

**POMPA ÇARKLARI İÇİNDEKİ AKIŞIN
SAYISAL ÇÖZÜMLENMESİ**

DOKTORA TEZİ

Y.Müh. Kemal SARIOĞLU

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 24 Şubat 1997

Tezin Savunulduğu Tarih : 7 Mayıs 1997

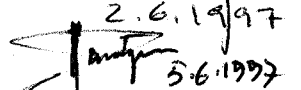
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mete ŞEN

 02.05.1997

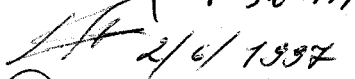
Diğer Jüri Üyeleri : Prof.Dr. Cahit ERALP



Prof.Dr. Haluk KARADOĞAN

 2.6.1997

Prof.Dr. Doğan ÖZGÜR

 2/6/1997

Doç.Dr. Erkan AYDER

 2/6/1997

MAYIS 1997

ÖNSÖZ

Pompa çarkı içindeki akışın sayısal olarak çözümlenmesi ile ilgili bu çalışmayı yapmamı öneren sayın hocam Prof.Dr. Mete ŞEN'e ve çalışmanın her kademesinde beni yönlendiren ve değerli fikir ve katkılarıyla bu çalışmayı bitirmemi sağlayan Doç.Dr. Erkan AYDER'e teşekkür ederim.

Ayrıca deneysel sonuçlarla karşılaştırma amacıyla çark geometrisi ve bunlara ait deneysel verileri sağlayan Standart Pompa A.Ş. ve MAS Pompa A.Ş. ye sağladıkları destekten ötürü teşekkürü burada bir borç bilirim.

Son olarak tezin hazırlanması esnasında bana gerekli kolaylığı sağlayan İ.T.Ü. Makina Fakültesi, Hidromekanik ve Hidrolik Makinalar Anabilim Dalı elemanlarına katkılarından dolayı ayrıca teşekkür ederim.

21.2.1997
İSTANBUL

Y.Müh. Kemal SARIOĞLU

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	ii
SEMBOL LİSTESİ.....	v
ŞEKİL LİSTESİ.....	viii
TABLO LİSTESİ.....	xiii
ÖZET.....	xiv
SUMMARY.....	xv
BÖLÜM 1 - GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2 - KAYNAK TARAMASI.....	5
2.1 Tarihsel Gelişim.....	5
2.2 Analitik Çalışmalar.....	6
2.3 Deneysel Çalışmalar.....	7
2.4 Sayısal Çalışmalar.....	9
2.5 Sonuç.....	13
BÖLÜM 3 - SIKIŞTIRILAMAZ AKIŞ.....	14
BÖLÜM 4 - İKİ BOYUTLU SIKIŞTIRILAMAZ AKIŞ.....	20
4.1 Denklemlerin Uzay Boyutunda Ayrıklaştırılması.....	21
4.2 Zaman Boyutunda Denklemlerin Ayrıklaştırılması.....	24
4.3 Uzay ve Zaman Boyutunda Ayrıklaştırılmış Denklemlerin Çözüm Yöntemi.....	25
4.3.1 Sınır Koşulları.....	27
4.3.2 Yapay Sönümleme.....	28
4.4 Hızlandırma Tekniği.....	29
4.5 Sayısal Uygulamalar.....	32
4.5.1 90° lik Dirsek.....	32
4.5.2 Çeşitli Dirsek Uygulamaları.....	33
4.6 Deneysel Sonuçları Mevcut Uygulamalar.....	34
4.6.1 Stanitz Dirseği.....	34
4.6.2 Sesaltı Difüzörü.....	35
4.6.3 Engel Üzerindeki Sesaltı Akış.....	36
4.7 Sonuç.....	36

BÖLÜM 5 - SANKİ ÜÇ BOYUTLU SIKIŞTIRILAMAZ AKIŞ.....	57
5.1 Denklemlerin Ayrıklaştırılması.....	59
5.2 Denklemlerin Matematiksel Karakteri.....	61
5.3 Zaman Adımı.....	62
5.4 Sınır Koşulları.....	63
5.5 Yapay Sönümleme.....	64
5.6 Çözüm Ağı Üretimi.....	66
5.7 Çark Performansının Sayısal Olarak Elde Edilmesi.....	68
5.8 Elde Edilen Sayısal Sonuçların Yorumlanması.....	69
5.9 Sayısal Uygulamalar.....	71
5.9.1 Tam Radyal Kanatlı Açık Çark.....	71
5.9.2 Silindirik Kanatlı, Geriye Dönük, Kapalı Pompa Çarkları ($h=sabit$).....	72
5.9.3 Silindirik Kanatlı Kapalı Pompa Çarkı ($h \neq sabit$).....	74
5.9.4 Dönük Kanatlı Kapalı Pompa Çarkı.....	75
BÖLÜM 6 - ÜÇ BOYUTLU SIKIŞTIRILAMAZ AKIŞ.....	97
6.1 Denklemlerin Ayrıklaştırılması.....	98
6.2 Sonlu Hacimler Tekniği.....	99
6.3 Kontrol Hacimleri ve İzdüşüm Alanlarının Hesaplanması.....	101
6.4 Zaman Boyutunda Denklemlerin Çözümlemesi.....	105
6.5 Kararlılık Analizi.....	107
6.6 Sınır Koşulları.....	109
6.7 Yapay Sönümleme.....	112
6.8 Çözüm Ağı.....	113
6.9 Örnekler.....	114
6.9.1 Sayısal Uygulama (90° lik dirsek).....	114
6.9.2 Deneysel Uygulama.....	115
6.9.3 Endüstriyel Pompa Çarkı.....	116
SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	130
KAYNAKLAR.....	132
EK-A Üç Boyutlu Euler Denklemlerinin Silindirik Koordinatlarda Elde Edilmesi.....	140
EK-B Sanki 3 Boyutlu Euler Denklemlerinin Elde Edilmesi.....	145
EK-C Çark Performansının Sayısal Olarak Elde Edilmesi.....	149
ÖZGEÇMİŞ.....	151

SEMBOL LİSTESİ

D : Yapay sönümleme terimleri

F : Froude sayısı

J : Jakobyen matrisi

L : Referans uzaklık

M : Mach sayısı

R : Artık terimleri, yarıçap

S : Alan

$\vec{U}$: Üç boyutlu akışa ait çözüm vektörü

$\tilde{U}$: İzdüşüm alanları ile hız bileşenlerinin çarpımı

V : Mutlak hız veya kontrol hacmi

W : Bağlı hız

CFL : Courant-Friedrichs-Levy katsayısı

SIX, SIY : Kontrol hacmini sınırlayan yüzeylerin x yönündeki izdüşüm alanları

SJX, SJY : Kontrol hacmini sınırlayan yüzeylerin y yönündeki izdüşüm alanları

SIM, SI θ : Kontrol hacmini sınırlayan yüzeylerin m yönündeki izdüşüm alanları

SJM, SJ θ : Kontrol hacmini sınırlayan yüzeylerin θ yönündeki izdüşüm alanları

a : Ses hızı

$\vec{b}$: Kuvvet vektörü bileşeni

c_p : Sabit basınçtaki özgül ısı

c_v : Sabit hacimdeki özgül ısı

c^2	: Yapay sıkıştırılabilirlik sabiti
d	: Yapay sönümleme operatörü
$\vec{f}, \vec{g}, \vec{h}$	: Akı vektörleri
g	: Yerçekimi ivmesi
h	: Meridyenel akım tübü genişliği
k	: Isı iletim katsayısı
$k^{(4)}$	: 4. Mertebeden farklar için kullanılan yapay sönümleme katsayısı
m	: Meridyenel bileşen
$\vec{n}$	: Yüzeye dik olan birim vektör (dış normal)
n_q	: Boyutsuz özgül hız
p	: Statik basınç
$\vec{q}$	: İki boyutlu sıkıştırılamaz akış için çözüm vektörü
r, θ, z	: Silindirik koordinatlar
t	: Zaman
u, v	: Mutlak hızın Kartezyen bileşenleri
x, y	: Kartezyen koordinatlar
Pr	: Prandtl sayısı
Re	: Reynolds sayısı
λ	: Özdeğer
ρ	: Yoğunluk
α	: İzotermal sıkıştırılabilirlik katsayısı
β	: Bulk genişleme katsayısı
μ	: Dinamik viskozite

- γ : Özgöl ısılar oranı (c_p/c_v)
- τ : Viskoz terimler
- ϕ : Viskoz sönümleme terimi
- ρ_0 : Sabit yoğunluk
- α_i : Runge-Kutta yöntemindeki sabit katsayılar
- κ : Zaman adımı hesabında kullanılan katsayı
- ε : Ağırlıklı ortalamaların hesabında kullanılan katsayı
- $\vec{\sigma}$: Sanki üç boyutlu akışa ait çözüm vektörü
- ω, Ω : Açısal hız
- ξ, η, τ : Dönüştürülmüş koordinat sistemi

Alt indisler

- 0 : Giriş, referans
- 01 : Giriş toplam koşulu
- m : Meridyenel bileşen; toplam indisi
- θ : Teğetsel bileşen
- i, j, k : Tanım indisleri
- r, θ , z : Silindirik koordinatlar yönündeki bileşenler
- x, y : Kartezyen bileşenler

Üst indisler

- * : Boyutsuz parametre
- : Boyutlu parametre

ŞEKİL LİSTESİ

		<u>Sayfa No</u>
Şekil 3.1	İç akış	15
Şekil 4.1	Kontrol hacmi	23
Şekil 4.2	Giriş, çıkış ve katı yüzey üzerindeki noktaların kontrol hacimleri	23
Şekil 4.2a	Kontrol hacmini oluşturan yüzeylerin izdüşüm alanları	27
Şekil 4.3	Çözüm bölgesi	27
Şekil 4.4a	Çözüm ağı (50x10)	37
Şekil 4.4b	Hız vektörleri (2 noktada bir)	37
Şekil 4.4c	Serbest dönmeli akışın olduğu bölgedeki hız vektörleri	38
Şekil 4.4d	Dirsek boyunca serbest dönmeli akışın değişik kesitlerdeki değerleri	38
Şekil 4.4e	Eş statik basınç eğrileri ($p_0=100\ 000\ \text{Pa}$)	39
Şekil 4.4f	Toplam basınç kaybı eğrileri ($P_{01}-P_0$)	39
Şekil 4.4g	Yakınsama eğrileri (Düşey eksen basınç artığını göstermektedir)	40
Şekil 4.5a	Çözüm ağı (70x11)	41
Şekil 4.5b	Hız vektörleri (2 noktada bir)	41
Şekil 4.5c	Eş statik basınç eğrileri ($p_0=100000\ \text{Pa}$)	41
Şekil 4.5d	Toplam basınç kaybı eğrileri ($P_{01}-P_0$)	42
Şekil 4.5e	Yakınsama eğrisi	42
Şekil 4.6a	Çözüm ağı (75x11)	43
Şekil 4.6b	Hız vektörleri (2 noktada bir)	43

Şekil 4.6c	Eş statik basınç eğrileri ($p_0=100\ 000\ \text{Pa}$)	44
Şekil 4.6d	Toplam basınç kaybı eğrileri ($P_{01}-P_0$)	44
Şekil 4.6e	Yakınsama eğrisi	45
Şekil 4.7a	Stanitz dirseği geometrik boyutları	46
Şekil 4.7b	Çözüm ağı (62x15)	46
Şekil 4.7c	Hız vektörleri (2 noktada bir)	47
Şekil 4.7d	Eş statik basınç eğrileri (p/p_0)	47
Şekil 4.7e	Giriş kesitindeki (4 nolu kesit) hız profilinin deneysel ve sayısal sonuçlarla karşılaştırılması	48
Şekil 4.7f	MOORE (1979) dan alınan deneysel sonuçlar	48
Şekil 4.7g	Stanitz ölçümleri ile sayısal olarak elde edilen yüzey hız dağılımları	49
Şekil 4.7h	Yakınsama eğrisi	49
Şekil 4.8a	Çözüm ağı (38x25)	50
Şekil 4.8b	Hız vektörleri (2 noktada bir)	50
Şekil 4.8c	Eş statik basınç eğrileri (p/p_0)	51
Şekil 4.8d	Toplam basınç kaybı eğrileri ($P_{01}-P_0$)	51
Şekil 4.8e	SEMMES ve diğ. (1988) den alınan deneysel sonuçlar	52
Şekil 4.8f	Yüzey üzerindeki sayısal olarak hesaplanan ve deneysel değerlerin karşılaştırılması	52
Şekil 4.8g	Yakınsama eğrisi	53
Şekil 4.9a	Çözüm ağı (65x17)	54
Şekil 4.9b	Hız vektörleri (2 noktada bir)	54
Şekil 4.9c	Eş statik basınç eğrileri	54
Şekil 4.9d	Toplam basınç kaybı eğrileri ($P_{01}-P_0$)	55
Şekil 4.9e	Eş hız eğrileri	55

Şekil 4.9f	NI (1982) den alınan sayısal sonuçlar	55
Şekil 4.9g	Sayısal olarak elde edilen alt ve üst yüzey hız değerleri	56
Şekil 4.9h	Yakınsama eğrisi	56
Şekil 5.1	Kanat geometrisi	57
Şekil 5.2	Kontrol hacmi	60
Şekil 5.3	Kontrol hacmini oluşturan yüzeylerin izdüşüm alanları	63
Şekil 5.4	Çözüm bölgesi	64
Şekil 5.5	Giriş, çıkış, periyodik ve katı yüzeyler üzerindeki kontrol hacimleri	66
Şekil 5.6	Meridyenel akım yüzeyi	67
Şekil 5.7	Kanatlar arası düzlemde akış yapısı ve bu yüzeydeki açısal momentum değişimi (TUZSON, 1993)	70
Şekil 5.8a	Tam radyal çark geometrisi ($R_g=50$, $R_c=100$, $h=15$ t=2 , $z=8$ kanat)	76
Şekil 5.8b	Çözüm ağı (60x20)	76
Şekil 5.8c	Tasarım debisinde sayısal olarak hesaplanmış eş statik basınç eğrileri (p/p_0 $p_0=100000$ Pa)	77
Şekil 5.8d	Yakınsama eğrisi	77
Şekil 5.8e	Emme ve basma yüzeylerindeki açısal momentum değişimi	78
Şekil 5.8f	Farklı devir sayılarında deneysel ve sayısal performans eğrilerinin karşılaştırılması	78
Şekil 5.8g	Ölçme paneli ve deney düzeneği akış şeması	79
Şekil 5.9a	Kanat geometrisi teknik resmi (KANNEMANS, 1980)	80
Şekil 5.9b	Çözüm ağı, hız vektörleri, eş statik ve toplam basınç eğrileri	81
Şekil 5.9c	Farklı yarıçaplarda ölçülen deneysel değerlerin sayısal sonuçlarla karşılaştırılması	82

Şekil 5.9d	Sayısal olarak elde edilen performans eğrisinin deneysel değerlerle karşılaştırılması	83
Şekil 5.9e	Çark çıkışında elde edilen bağıl çıkış açısının deneysel olarak ölçülen değerlerle karşılaştırılması	83
Şekil 5.9f	Tasarım debisinde kanatlar üzerindeki açısal momentum değişimi	84
Şekil 5.9g	Yakınsama eğrisi	84
Şekil 5.9h	KANNEMANS (1980) den alınan deneysel sonuçlar	85
Şekil 5.10a	Kanat geometrisi (MINER ve diğ., 1988)	86
Şekil 5.10b	Çözüm ağı $R_1=50.8$ mm, $R_2=101.6$ mm	87
Şekil 5.10c	Tasarım debisinde sayısal olarak hesaplanmış hız vektörleri ($Q=6.3$ lt/s)	87
Şekil 5.10d	Kanatlar arası yüzeyde eş statik basınç eğrileri ($P_0=100\ 000$ Pa)	88
Şekil 5.10e	Tasarım debisindeki yakınsama eğrisi	88
Şekil 5.10f	Deneysel olarak farklı ölçme düzlemlerindeki ölçümlerin (45, 180, 270, 360) sayısal sonuçla karşılaştırılması	89
Şekil 5.10g	Farklı akış debilerinde deneysel ve sayısal sonuçların karşılaştırılması	90
Şekil 5.10h	Kanat yüzeylerindeki açısal momentum değişimi	91
Şekil 5.10k	Deneysel ve sayısal performans eğrilerinin karşılaştırılması	91
Şekil 5.11a	Çark geometrisi (LIU ve diğ., 1994)	92
Şekil 5.11b	Çözüm ağı	92
Şekil 5.11c	Farklı tasarım debilerinde sayısal olarak hesaplanmış hız vektörleri	93
Şekil 5.11d	Farklı tasarım debilerinde deneysel ve sayısal değerlerin karşılaştırılması	94
Şekil 5.12a	Endüstriyel pompa çarkı	95
Şekil 5.12b	Çark geometrisinin meridyenel ve ön görünüşü	95

Şekil 5.12c	Göbek, yanak ve orta kesitte hesaplanan sayısal sonuçların deneysel performans eğrisiyle karşılaştırılması	96
Şekil 6.1	Sekiz tetrahedral elemandan oluşan kontrol hacmi	99
Şekil 6.2	Tetrahedral eleman	101
Şekil 6.3	Kararlılık eğrileri a) Standart Runge-Kutta yöntemi b) Düzenlenmiş yöntem	107
Şekil 6.4	Çözüm bölgesi	110
Şekil 6.5a	Çözüm ağı (11x11x51)	117
Şekil 6.5b	6 nolu meridyenel kesitteki hız vektörleri (2 noktada bir)	118
Şekil 6.5c	6 nolu kesitte eş statik basınç eğrileri (p/p_0)	118
Şekil 6.5d	Çeşitli dik kesitlerdeki eş statik basınç eğrileri	119
Şekil 6.5e	Serbest dönmeli akışın olduğu bölgedeki hız vektörleri	120
Şekil 6.5f	Dirsek boyunca serbest dönmeli akışın değişik kesitlerdeki değerleri	120
Şekil 6.5g	Yakınsama eğrisi	121
Şekil 6.6a	Çözüm ağı (11x11x61)	122
Şekil 6.6b	Tasarım debisinde farklı kanatlar arası düzlemlerdeki deneysel ve sayısal sonuçların karşılaştırılması ($z/b=0$, orta akım yüzeyi)	123
Şekil 6.6c	Sayısal ve deneysel (MINER ve diğ., 1988) performans eğrilerinin karşılaştırılması	124
Şekil 6.7a	Endüstriyel pompa kanat geometrisi	125
Şekil 6.7b	Çözüm ağı (11x11x65)	125
Şekil 6.7c	Göbek, yanak ve orta kesitteki hesaplanmış hız vektörleri	126
Şekil 6.7d	Meridyenel kesitlerdeki hız vektörleri ve eş statik basınç eğrileri	127
Şekil 6.7e	Çeşitli dik kesitlerdeki eş statik basınç eğrileri	128
Şekil 6.7f	Deneysel ve sayısal performans eğrilerinin karşılaştırılması	129

TABLO LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 1 Farklı test geometrileri için yakınsama zamanları

131



ÖZET

Pompa kanatları arasındaki akışın sayısal çözümünü elde etmek tasarımcılar için son yıllarda oldukça önem kazanmıştır. Verim ve performansın artırılması amacıyla kanatlar arasındaki akışın çözümlenmesi ve özelliklerinin bilinmesi tasarımcıya büyük faydalar sağlar.

Radyal pompa kanatları arasındaki karmaşık akışın, hala tam olarak anlaşılamamasının nedenlerinden biri kanatların dönmesinin deneysel ölçümleri çok zorlaştırmasıdır.

Bu çalışmada radyal pompa kanatları arasındaki akışın çözümlenmesi ve çark performansının sayısal olarak elde edilmesi amaçlanmıştır. Çark içindeki akışın çözümü için geliştirilen ve kullanılan modeller basitten karmaşığa sıralanmıştır. Sonlu hacimler tekniği ve zaman boyutunda ilerleme tekniği kullanılarak zamana bağlı denklemlerin daimi haldeki çözümü elde edilmiştir. Çalışma aşağıdaki bölümlerden oluşmaktadır.

Giriş bölümünde akışın sayısal olarak çözümlenmesi neticesinde tasarımcıya sağlanan faydalardan bahsedilmiştir. İkinci bölümde ise deneysel ve sayısal olarak yapılan çalışmalarla ilgili kaynak taraması özetlenmiştir.

Üçüncü bölümde sıkıştırılamaz akış ile ilgili özellikler verilmiş ve enerji denkleminin neden kullanılmadığı matematiksel olarak gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde iki boyutlu sıkıştırılamaz Euler denklemlerinin çözümü için programlanan yöntem, literatürde deneysel sonuçları mevcut test geometrileri ile sınanmıştır. Daimi haldeki çözümün elde edilmesi için kullanılan yapay sıkıştırılabilirlik tekniği ve sayısal çözümlemede kullanılan katsayıların daha sonraki bölümlerdeki çalışmalara yol göstermesi amacıyla çözüm üzerindeki etkileri incelenmiştir. Daimi haldeki çözüm amaçlandığından bu katsayılar çözümün daha kısa sürede elde edilebilmesine olanak tanımaktadır.

Beşinci bölümde ise çark kanatları arasındaki akış tanımlanan kanatlar arası düzlemde sanki üç boyutlu Euler denklemlerinin çözümü ile hesaplanmaktadır. Korunumlu formda yazılmış Euler denklemlerinde meridyenel akım tübü genişliği dikkate alınmıştır. Literatürde deneysel sonuçları mevcut değişik pompa çark geometrileri için sayısal çözümler elde edilmiş ve karşılaştırmalar yapılmıştır. Sanki üç boyutlu akış modelinin pompa çark performansını sayısal olarak daha kısa sürede ve büyük bir yaklaşıklıkla elde ettiği gözlenmiştir.

Altıncı bölümde ise üç boyutlu sıkıştırılamaz Euler denklemlerinin çözümü yapılmıştır. Hem kanatlar arası düzlemde hem de meridyenel akım düzlemlerinde performans düşürücü istenmeyen akış olaylarını gözlemlemek mümkün olmuştur. Sayısal olarak daimi haldeki çözümün elde edilmesi yakınsama zamanı açısından bir önceki bölüme nazaran daha uzundur.

Sonuç bölümünde ise gelişen hızlı bilgisayar teknolojisi neticesinde farklı bilgisayarlar kullanılarak elde edilen yakınsama zamanları gösterilmiştir. Ve çalışmanın daha ileriki aşamalarında neler yapılacağı hakkında fikirler verilmiştir.

SUMMARY

Flow in radial turbomachines is very complex and not clearly understood. Numerical solutions of the flow equations for the rotating parts of turbomachines have become an important tool for designers during the last decade. It is wanted that the flow pattern and properties inside an impeller is to be clarified to improve the efficiency and performance. That is why in this study it is attempted to find numerical solutions different kind of impellers where experimental performances are available.

A pump model is usually designed to achieve optimum performance for the customer with minimum cost and time. The numerical simulation of the internal flow field plays an important role to achieve design objectives. With the help of CFD codes the designer is able to produce more engineered and more clearly understood designs. The commercial advantages arising from the use of CFD in design process as follows.

- More accurate prediction of the flow pattern
- Natural physics limits of the flow (flow separation, cavitation)
- The use of graphical visualization techniques which enables the designer a better understanding of the flow field
- Shorter development times without using experimental prototypes

To solve the flow in centrifugal pump impellers numerically, one has to determine the assumptions dealing with the flow field. Since water is used in centrifugal pump, incompressible equations are used in this study. Water can be assumed as an incompressible fluid. Furthermore instead of using time consuming Navier-Stokes equations Euler equations will be used in this study. Another choice is the solution domain where the governing equations applied. Two dimensional, quasi three dimensional and three dimensional continuity and momentum equations which is written in conservative form has been used. Energy equation is dropped because of the isothermal changes are relatively small in incompressible flow.

It is desired to find steady state solution by using the time dependent equations. Finite volume space discretization has been used since the equations can not be solved directly. The discretization enables to use less arithmetic operations. Finite volume scheme is computationally inexpensive and conservative. The conservative scheme means that whatever its local truncation error it does not produce global gains or losses in the flux of mass or momentum through the solution domain. Using finite volume discretization the governing equations become ordinary differential equations. That's why it is needed a scheme for marching the coupled ODE 's forward in time. Fourth order Runge - Kutta time stepping scheme has been applied to all flow models.

Numerical solution is done on a finite mesh and incoming and outgoing waves cross the boundary of the mesh. In order to have well-posed problem appropriate boundary conditions must be specified. The numerical treatment of boundary conditions along the boundaries in the physical domain is one of the problem in solving the Euler equations. Their improper implementation can result inaccurate results.

A major problem involved in solving incompressible Euler equations comes from the lack of a pressure term in the continuity equation. The techniques used for the solution of the incompressible equations can be classified as follows (LAKSHMINARAYANA, 1990).

Pressure Based Methods : In this technique the assumed pressure is updated using an auxiliary equation for pressure. And this equation is solved together with momentum equations in an uncoupled manner. The equations are iterated until a divergence free flow field is satisfied. This procedure usually requires a relaxation scheme. Convergence slows down because of the uncoupled approach.

Fractional Step Method : This method is used for the time dependent computations of the incompressible Euler equations. The time evaluation is approximated by several steps. The common application of this method is done by two steps. The first step is to solve for an auxiliary velocity field using the momentum equation in which the pressure-gradient term can be computed from the pressure in the previous time step. In the second step, the pressure is computed which will map the auxiliary velocity onto a divergence-free velocity field.

Pseudo-compressibility Method : Recent advances and most of the studies in computational fluid dynamics have been made in compressible flow equations. Therefore many algorithms has been developed for compressible equations. Instead of using Poisson equation for pressure artificial compressibility approach suggested by CHORIN (1967) is used. In this formulation which is also used in this study, the continuity equation is modified by adding a time derivative of the pressure term. This is done to preserve the hyperbolic character of the equation. Together with the unsteady momentum equations, this forms a hyperbolic type of time-dependent equations.

NUMERICAL ANALYSIS OF THE FLOW

The numerical analysis of the flow in radial pump impeller is not studied properly. There are a few studies in the literature. In this study it is attempted to solve steady flow field in radial pump impeller, by using time-dependent incompressible Euler equations with the assumption of pseudo-compressibility. The flow models used in this study as follows.

Two Dimensional Incompressible Flow : The two dimensional incompressible time-dependent Euler equations written in conservative form has been used. This section has been done to test the limits of pseudo-compressibility approach by using computer calculations. Several two-dimensional test cases where experimental results are available has been solved numerically.

The governing equations by using a Cartesian coordinate system are as follows.

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} + \theta \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} \right] = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} p/\rho_0 \\ u \\ v \end{bmatrix} \quad \theta = \begin{bmatrix} c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} u \\ u^2 + p/\rho_0 \\ uv \end{bmatrix} \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} v \\ uv \\ v^2 + p/\rho_0 \end{bmatrix}$$

c is an arbitrary constant and can be chosen to accelerate the time decay to steady state. The equations are discretized in space and time separately. Finite volume discretization is used in space. To solve the equations in time evaluation, fourth-order Runge-Kutta time stepping scheme has been applied. Since the solution is performed explicitly, the time step can not be chosen arbitrarily. This is restricted by the CFL condition. The CFL condition states that, the physical domain of influence of one node of discretization must be inside the numerical domain of influence. By using this criteria, the maximum eigenvalue of the 2-dimensional spatial-difference operator leads to the local time step condition which is given by RIZZI and ERIKSSON (1985).

$$\Delta t \leq \frac{\text{CFL}}{|\lambda_{\max}|} \quad (2)$$

The finite volume discretization with vertex averaging is not dissipative which means that high frequency oscillations in the solution are not damped. In order to avoid these spurious oscillations dissipative terms must be added to the system of the equations. The fourth differences of the unknown variables has been used (JAMESON et al, 1981).

In order to have a mathematically well-posed problem boundary conditions along the boundaries must be specified. Inlet, outlet and impermeability boundary conditions are applied to solution domain to solve the equations in time. Total pressure and x-component of absolute velocity is given at the inlet boundary. Static pressure distribution is given at the outlet boundary. Impermeability condition is also fulfilled.

Furthermore implicit residual smoothing has been applied to governing equations to reduce convergence time of the calculations to the steady state. This procedure relaxes the restriction on the time step imposed by the Courant-Friedrichs-Levy condition.

To check the ability of the two dimensional assumption numerical examples where experimental data available has been used. First, flow in a 90° elbow has been solved numerically. Effect of the parameters which is used during the calculation has been determined. Convergence histories of the different values of the parameters has been compared. Furthermore Stanitz elbow (MOORE and MOORE, 1979), subsonic diffuser (SEMMES, 1988) and Ni bump (NI, 1982) examples solved numerically and compared with experimental data. The results are quite satisfactory.

Quasi Three Dimensional Flow : The solution is performed on blade-to-blade stream surface by using a curvilinear coordinate system (m, θ) and by taking into account meridional stream tube thickness. Incompressible quasi-3d time dependent Euler equations written in a conservative form are used. Pseudo-compressibility approach (CHORIN, 1967) has been added to continuity equation to preserve the hyperbolic character of the equations.

Time marching technique is applied to obtain steady state solution. The continuity and momentum equations are shown below.

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{f}(\sigma)}{\partial m} + \frac{\partial \bar{g}(\sigma)}{\partial R\theta} = \bar{b}(\sigma) \quad (3)$$

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} (p/\rho_0)Rh \\ W_m Rh \\ W_\theta Rh \end{bmatrix} \quad \bar{f} = \begin{bmatrix} c^2 W_m Rh \\ (W_m^2 + p/\rho_0)Rh \\ W_m W_\theta Rh \end{bmatrix} \quad \bar{g} = \begin{bmatrix} c^2 W_\theta h \\ W_m W_\theta h \\ (W_\theta^2 + p/\rho_0)h \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ p/\rho_0 d(Rh)/dm + h(W_\theta + \omega R)^2 dR/dm \\ -hW_m(W_\theta + 2\omega R)dR/dm \end{bmatrix}$$

All flow variables are normalized by the inlet stagnation conditions P_0 , ρ_0 and impeller exit radius.

The term $\bar{b}$ consists of the projection of the centrifugal force in the m direction and the projection of the Coriolis force in the θ direction.

The equations are discretized in space and time separately. Finite volume technique is used in space. The solution domain is divided into four sided elements and conservation equations are satisfied along the edges of these volumes. Besides, fourth order Runge-Kutta time stepping scheme with frozen dissipation terms is used for time discretization.

During solution progress to remove unwanted oscillations the dissipation term which is proportional to the fourth order differences of the conservative variables in two index directions (m, θ) are added to equations.

Inlet, outlet, impermeability and periodic boundary conditions are applied to solution domain to solve the equations in time. Meridional relative flow velocity and flow angle in θ direction is given at the inlet boundary and static pressure distribution is specified at the outlet boundary.

The examples solved numerically as follows. Flow in a radial bladed impeller where detailed measurements done in Hydromechanic Laboratory has been solved and compared with experimental performance curve. Secondly, the impellers which has cylindrical form and also has constant meridional thickness has been solved (KANNEMANS, 1980; MINER, 1988). Thirdly the impeller shape ($h \neq \text{constant}$)

where experimental measurements done by LIU (1994) has been solved and compared with experimental results. Lastly the impeller, obtained from industry, having the shape of twisted blades solved numerically.

It can be said that the code developed for quasi three dimensional flow can predict the performance of the impeller accurately without consuming time.

Three Dimensional Flow : In this part of this study full geometry of the impeller is considered. Then the flow pattern from hub to shroud also can be investigated. Secondary flows and flow separation especially at suction side of the shroud in radial impellers can be predicted.

The full 3-D of Euler system of equations written in a conservative form are used. The equations are written in a cylindrical system of coordinates (r, θ, z) , fixed to the blade row which rotates at a constant angular velocity around z axis. The unknown variables, which has to be solved, are the components of relative velocities (W_r, W_θ, W_z) and (p) static pressure. Energy equation is not included as explained before. To achieve the steady state solution time marching technique is applied.

Pseudo-compressibility technique, further developed by RIZZI and ERIKSSON (1985) has been applied to continuity equation to preserve the hyperbolicity. The governing equations are shown below.

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{f}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\bar{g}) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{h}) + \bar{b} = 0 \quad (4)$$

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} p / \rho_0 \\ W_r \\ W_\theta \\ W_z \end{bmatrix} \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -W_\theta^2 / r - p / \rho_0 r - r \Omega^2 - 2 \Omega W_\theta \\ W_r W_\theta / r + 2 \Omega W_r \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{f} = \begin{bmatrix} c^2 W_r \\ W_r^2 + p / \rho_0 \\ W_r W_\theta \\ W_r W_z \end{bmatrix} \quad \bar{g} = \begin{bmatrix} c^2 W_\theta \\ W_r W_\theta \\ W_\theta^2 + p / \rho_0 \\ W_\theta W_z \end{bmatrix} \quad \bar{h} = \begin{bmatrix} c^2 W_z \\ W_r W_z \\ W_\theta W_z \\ W_z^2 + p / \rho_0 \end{bmatrix}$$

Semi-discretization is applied to governing equations. Finite volume technique and fourth order Runge-Kutta time stepping scheme is applied to the equations like previous parts.

Since the solution is performed between two blades, periodic boundary conditions are applied in outlet and inlet part of the impeller channel. In order to preserve the conservative form of the numerical scheme the artificial dissipation terms are introduced by adding dissipative fluxes to the integral form of the Euler equations.

Since no shocks are expected in centrifugal pump impeller the second order dissipation terms is not used.

To verify the three dimensional flow assumption, flow in a 90° elbow which has rectangular cross section has been solved. Free vortex distribution obtained from numerical calculations has been compared with theoretical calculations. Secondly, the impeller where experiments has been done (MINER, 1988) has been solved. Lastly, an industrial pump impeller used to verify the code. The results obtained from numerical calculations has been interpreted. An experimental performance curve given by the company has been compared with the performance curve using numerical procedure. The results are couraging.

As a result, using the computer programs described above the characteristics of the radial pump impellers can be predicted satisfactorily. This helps to the designer to improve the efficiency and performance with the reduced cost and time.



BÖLÜM 1

GİRİŞ

Akışkanlar mekaniği problemlerinin çözümünde teorik, deneysel ve sayısal olmak üzere başlıca üç ana yöntem mevcuttur. Yüksek hızlı bilgisayarların gittikçe gelişmesi ve deneysel çalışmaların artan maliyeti sayısal çalışmaların önemini arttırmıştır. Bu yüzden son on yılda akışkanlar mekaniği problemlerinin çözümünde sayısal çalışmalar oldukça popüler hale gelmiştir.

Sayısal, deneysel ve teorik çalışmaların birbirlerine göre avantajları ve dezavantajları mevcuttur. Deneysel çalışmalar pahalı deney tesisatları, ölçme güçlükleri ve bazen çözülecek problemin daha küçük bir ölçekteki modelinin kullanılmasıyla deney yapılmasını gerektirir. Teorik veya analitik çalışmalar ise genel bir parametreye bağlı çözüm içerir. Fakat basit geometrilerle ve olayın fiziğiyle sınırlıdır. Popüler olan sayısal çözümlemeler ise geometri ve olayın fiziğiyle sınırlı değildir. Ayrıca zamana bağlı daimi olmayan problemlerin çözümü de mümkündür. Sayısal akışkanlar dinamiği kullanılarak yapılan çözümlemelerin dezavantajı ise sınır koşullarının verilmesindeki güçlükler, denklemlerin ayrıklaştırılmasından doğan kesme hataları ve kullanılan modeldeki yaklaşım hataları gösterilebilir.

Akım makinalarının (türbomakinalar) tasarımında sayısal akışkanlar dinamiği (SAD) ile yapılan akış çözümlemelerinin kullanılması oldukça yaygın hale gelmektedir. Klasik olarak türbomakina elemanlarının tasarımında çok sayıda ampirik denklem kullanılır. Tasarımı yapılan akım makinası elemanları (çark, salyangoz, difüzör v.b.) imal edilir ve istenen performansı sağlayıp sağlamadığının belirlenmesi için test edilir. Eğer istenen koşullar sağlanmamışsa tasarım işleminin başına dönülür. İteratif olarak yapılan bu işlemin yerini imalat ve test işlemlerine gerek kalmadan SAD ile yapılan akış çözümlemeleri almıştır. Bu çözümlemeler tasarım çevrimini bilgisayar kullanarak çok daha kısa bir sürede yapılmasını sağlar. Bilgisayar kullanılarak yapılan tasarım programları geliştirme zamanını oldukça kısaltır. Türbomakina elemanları üzerinde

tasarım tekniklerinin gelişmesi sayısal çalışmaların artması yönünde gelişmiştir. SAD ile yapılan çalışmalara önem veren firmalar, rakipleri yanında oldukça yüksek oranda avantajlar elde etmiştir. Bu avantajlar aşağıdaki gibi özetlenebilir (CASEY, 1994a, 1994b).

- Deneyimli tasarımcı istihdamının yerini sayısal çözümlemeler ile elde edilen sonuçlar almıştır.
- Firmanın sahip olduğu önceki deneyimlerinden daha geniş bir alanı kapsayan ve minimum risk ile yeni tasarım tekniklerinin elde edilmesine imkan sağlamıştır.
- Elde edilen yeni tasarımlar akışkanlar dinamiği ile ilgili fiziksel sınırlamaların kontrol edilmesi imkanını sağlar (Akış ayrılması, kavitasyon v.b.). Bu daha yüksek basma yüksekliklerine ve debilere ulaşmak demektir.
- Sayısal akışkanlar dinamiği çözümlemeleri ile elde edilen sonuçların grafiksel olarak görüntülenmesi neticesinde tasarımcı akış yapısını daha iyi anlama önceliğine sahiptir. Bu, yapılan tasarımın daha az kayıpla ve dolayısıyla daha yüksek performansla neticelenmesine yol açar.
- Deneysel prototipler kullanmadan çok kısa zamanda tasarım işlemleri sonuçlandırılır.

Yukarıda sayılan sayısal çalışmalara önem veren firmalara sağlanan bu avantajlar sayısal akışkanlar dinamiğinde kullanılan metodların gelişmesiyle artmaktadır. SAD kullanılarak yapılan tasarımlarda, kullanılan yöntemin çalışma sınırları, hata kaynakları ve doğruluğu hakkında fikir sahibi olunması gerekir. MEHTA (1991) de belirtildiği gibi SAD ile çözümlemede yapılan hatalar aşağıda belirtilmiştir.

- 1) Çözülmesi istenen fiziksel olayı tanımlayacak denklemlerin belirlenmesi
- 2) Denklemlerin ayrıklaştırılması neticesinde oluşan hatalar
- 3) Sayısal çözüm yöntemi ve hatası

Akış alanının çözümü için aşağıdaki koşulların sağlanması gerekir (LAKSHIMINARAYANA, 1991).

- Kullanılan genel denklemlerle yapılan kabulün geçerliliği
- Uygun sınır koşullarının verilmesi
- Geçerli çözüm ağı çözünürlüğü
- Türbülans veya kayıp modellerinin doğruluğu
- Kullanılan nümerik teknik - yapay sönümlemenin etkisi, ayırıklaştırma, yakınsama zamanı
- Verimli program algoritması geliştirilmesi, vektör bilgisayarların kullanılması
- Bilgisayar mimarisi, paralel işlem yapma imkanı
- Uygulanan sayısal tekniğin kalibrasyonu ve geçerliliği

Bu çalışmada pompa çark geometrisinin vermiş olduğu performans ve akış kapasitesinin sayısal olarak bulunması hedeflenmiştir. Bunun için akış ile ilgili daha basit modelden daha karmaşık modele doğru çözümlemeler yapılmıştır. Pompanın sahip olduğu diğer elemanların (salyangoz, difüzör) tasarımı bu çalışmada hedeflenmemiştir.

Ülkemizdeki mevcut su potansiyeli dikkate alındığında, sanayide üretilen pompaların hala klasik metodlarla tasarlandığı ve düşük verimlerle çalıştığı gözlenmiştir. Enerjiye olan ihtiyacın ve daha iyi tasarımlarla elde edilen enerji tasarrufunun ekonomiye çok büyük yararlar sağlayacağı aşikardır. SAD kullanılarak firmanın elde edeceği kazançlardan yukarıda bahsedilmiştir. Bu amaçla tasarım aşamasında daha yüksek performansa sahip ve daha kısa sürede tasarlanan pompa kanat geometrilerinin elde edilmesine ihtiyaç vardır. Pompa çarkı içindeki akış yapısının bilinmesi ve akış ile ilgili istenmeyen fiziksel olayların tesbit edilip tasarım aşamasında giderilmeye çalışılması oldukça yarar sağlar. Bu tasarlanan pompanın istenen performans ve kapasitede çalışıp çalışmayacağını belirler.

Ülkemizde üretilen pompaların büyük çoğunluğunu gerek verim ve gerekse sahip oldukları performans açısından radyal pompalar oluşturmaktadır. Eksenel pompalar genellikle yüksek debilerde ve büyük güçlerde üretilirler. Eksenel pompa çarkları içerisindeki akışın çözümlenmesi gerek potansiyel teori ile (STOCKMAN, 1963) ve gerekse ampirik ifadeler (MYLES, 1965) kullanılarak çözümlenmiştir.

tasarım tekniklerinin gelişmesi sayısal çalışmaların artması yönünde gelişmiştir. SAD ile yapılan çalışmalara önem veren firmalar, rakipleri yanında oldukça yüksek oranda avantajlar elde etmiştir. Bu avantajlar aşağıdaki gibi özetlenebilir (CASEY, 1994a,1994b).

- Deneyimli tasarımcı istihdamının yerini sayısal çözümler ile elde edilen sonuçlar almıştır.
- Firmanın sahip olduğu önceki deneyimlerinden daha geniş bir alanı kapsayan ve minimum risk ile yeni tasarım tekniklerinin elde edilmesine imkan sağlamıştır.
- Elde edilen yeni tasarımlar akışkanlar dinamiği ile ilgili fiziksel sınırlamaların kontrol edilmesi imkanını sağlar (Akış ayrılması, kavitasyon v.b.). Bu daha yüksek basma yüksekliklerine ve debilere ulaşmak demektir.
- Sayısal akışkanlar dinamiği çözümleri ile elde edilen sonuçların grafiksel olarak görüntülenmesi neticesinde tasarımcı akış yapısını daha iyi anlama önceliğine sahiptir. Bu, yapılan tasarımın daha az kayıpla ve dolayısıyla daha yüksek performansla neticelenmesine yol açar.
- Deneysel prototipler kullanmadan çok kısa zamanda tasarım işlemleri sonuçlandırılır.

Yukarıda sayılan sayısal çalışmalara önem veren firmalara sağlanan bu avantajlar sayısal akışkanlar dinamiğinde kullanılan metodların gelişmesiyle artmaktadır. SAD kullanılarak yapılan tasarımlarda, kullanılan yöntemin çalışma sınırları, hata kaynakları ve doğruluğu hakkında fikir sahibi olunması gerekir. MEHTA (1991) de belirtildiği gibi SAD ile çözümlemede yapılan hatalar aşağıda belirtilmiştir.

- 1) Çözülmesi istenen fiziksel olayı tanımlayacak denklemlerin belirlenmesi
- 2) Denklemlerin ayrıklaştırılması neticesinde oluşan hatalar
- 3) Sayısal çözüm yöntemi ve hatası

Akış alanının çözümü için aşağıdaki koşulların sağlanması gerekir (LAKSHIMINARAYANA, 1991).

Radyal pompa çarklarının meridyenel düzlemdeki kanat eğriliklerinden dolayı akış alanının çözümlenmesi potansiyel teori ve kullanılan ampirik denklemler ile iyi neticeler vermez. Bunun için bu çalışmada literatürde çok az çalışma mevcut olan radyal pompa çarkları içindeki akışın çözümlenmesi hedeflenmiştir. Bu yüzden daha sonraki bölümlerde bu tür pompa çarklarına ait sayısal özmlmeler irdelenecektir. Kuřkusuz geliştirilen yöntem eksenel pompa çarklarına da kolaylıkla tatbik edilebilir.

zet olarak bu çalışmada;

- Verimin yükseltilmesi ve bu sayede enerji tasarrufu elde edilmesi,
- Tasarım masrafının düşürülmesi,
- Tasarımın deneyim ve ampirik bağıntılardan kurtarılması

hedeflenmiştir.



BÖLÜM 2

KAYNAK TARAMASI

2.1 Tarihsel Gelişim

Radyal pompalarda günümüze kadar olan gelişmeler, buhar ve gaz türbinlerinde olan hızlı gelişmelerin paralelinde ilerlemiştir. Daha yüksek verimlere olan ihtiyaç santrifüj pompaların gelişimini hızlandırmıştır. Günümüzde pompalar uzay teknolojisi, kimyasal prosesler, rafineriler, gıda mühendisliği, enerji santralleri v.b. çok geniş bir uygulama alanına sahiptir. Pompalar farklı boyutlarda (birkaç cm. den birkaç metreye), basılan sıvıya bağlı olarak farklı malzemelerde ve farklı ek donanımlara (yataklar, rulmanlar v.b.) sahip olarak imal edilirler. Ayrıca salyangozlu, difüzörlü, karışık akımlı, eksenel veya radyal, tek kademeli veya çok kademeli tipleri mevcuttur (HICKS, 1957). Pompalar ile ilgili bu çok geniş kullanım alanlarına ait daha geniş bilgiler KRISTAL ve ANNETT (1953), ALLEN (1960), KARASSIK (1960), WARRING (1969) den elde edilebilir.

Santrifüj pompaların tasarımında ve üretiminde çoğunlukla ampirik denklemler kullanılmaktadır. Ayrıca tasarımcının tecrübesi çok büyük önem taşımaktadır (KOVATS, 1964; STEPANOFF, 1948). Firma açısından tasarıma verilen önem müşterinin taleplerini karşılamak açısından önemlidir. Ayrıca pompanın geniş çalışma aralığına sahip olması, ucuz olması, maliyetinin düşük olması ve müşterinin talep ettiği gerekli kapasitede istenen performansı vermesi firma tarafından önem verilen hususlardır. Pompa üretimi yapan çoğu firmanın kendi tasarım teknikleri ve üretim yelpazeleri mevcuttur. Buna rağmen optimum tasarım için bazı teknikler literatürde tanımlanmaktadır (ANDERSON, 1980; WHITFIELD ve BAINES, 1990). Tasarım işlemi tamamlandığında, tasarlanan pompa modelinin istenen performansı sağlayıp sağlamadığı deney yapılarak kontrol edilir. Sonuçta kurulan uygun deney tesisatları ile performans deneyleri yapılır (BAYSAL, 1979) ve grafikler halinde müşterinin hizmetine sunulur.

2.2 Analitik Çalışmalar

Radyal türbomakinalarda meridyenel düzlemdeki kanat eğriliklerinden dolayı, radyal kanatlar ile ilgili yapılan analitik çalışmalar eksenel makinalara nazaran daha zordur (ECK 1973). Genellikle akış pek çok kabul yapılarak hesaplanır.

Akışkanlar Mekaniğinde olan gelişmeler ile santrifüj pompa elemanları içerisindeki akış, temel ve teorik yaklaşımlar ile çözümlenmeye çalışılmıştır. Araştırmalar genellikle çark kanatları arasındaki akış içinde yoğunlaşmıştır. Enerji transferi çarktaki kanatlar arasında olduğu için, çark içerisindeki akışın hesaplanması ve anlaşılması diğer pek çok çalışmanın olduğu gibi bu çalışmanın da temel ögesidir.

Radyal kanatlar arasındaki akış analizi ile ilgili yapılan analitik çalışmalar genelde potansiyel akış kabulüne dayanır. Bu çözümlerlerde aşağıda belirtilen metodlar kullanılarak kanatlar arasındaki hız dağılımı elde edilir :

- Değişkenlerin ayrılması
- Tekil noktaların (singularity) kanatların üzerindeki dağılımı
- Kompleks fonksiyonlar teorisinin direkt uygulanması

yöntemleri kullanılmıştır. Literatürde pek az mevcut olan radyal pompa çarkları ile ilgili yapılan analitik çalışmalar aşağıdaki gibi özetlenebilir.

ACOSTA (1954) logaritmik spiral şeklindeki kanat formuna sahip kanatlar arasındaki akışı çözümlmek için Fourier serisi yardımıyla kompleks değişkenlerin ayrılması teorisini kullanmıştır. Radyal kanatlar üzerindeki basınç dağılımını hesaplamış ve deneysel sonuçlarla karşılaştırmıştır.

AYYUBI ve RAO (1971); MOHANNA ve RAO (1977), ACOSTA (1954) nın çalışmasını referans olarak kullanmış ve tekil noktaların dağılımı metodunu kullanarak kanat kalınlığını da hesabın içine katmıştır.

BADIE ve diğ. (1992) kompleks fonksiyonlar teorisini kullanarak radyal kanatlara sahip pompa çark geometrisi için kanat yüzeyleri boyunca hız dağılımını potansiyel akış teorisi ile elde etmiştir.

Kanatlar arasındaki potansiyel akışı analitik olarak çözümleyen bu araştırmacıların elde ettikleri sonuçlar akış denklemlerinin düzenlenmesiyle elde edilen

integrallerin sayısal çözümüyle ilgilidir. Radyal pompa kanatları arasında sürtmeli ve sürtmesiz akış modelleri kullanılarak yapılan analitik çözümlemeler literatürde mevcut değildir.

Bu çalışmada çark kanatları arasındaki rotasyonel ve viskoz olmayan akış çözümü amaçlandığından, aşağıda bu konu ile ilgili yapılan deneysel ve sayısal çalışmalara ağırlık verilecektir.

2.3 Deneysel Çalışmalar

Radyal pompa elemanları içindeki akış olaylarını incelemek için yapılan deneysel çalışmalar çoğunlukla çark kanatları arasındaki akış ile ilgilidir. Salyangoz ve difüzör gibi diğer elemanlarla ilgili yapılan deneysel çalışmalar nispeten daha azdır. Yapılan bu deneysel çalışmalar sayısal çalışmaların sınanması açısından önemlidir. Bu çalışmalarda lazer doppler anemometresi ve basınç duyargaları kullanılarak hız ve basınç ölçümleri gerçekleştirilmiştir.

Genellikle yapılan bu deneysel çalışmalarda logaritmik spiral veya tam radyal kanat formuna sahip çark geometrileri kullanılmıştır. Yapılan bu çalışmalar kronolojik sırada ve varsa mevcut sayısal çözümlemeleriyle birlikte aşağıda özetlenmiştir :

ACOSTA (1954) 30° lik logaritmik spiral şeklinde kanatlara sahip çarkları kullanarak deneyler yapmıştır. Çarktaki kanat sayıları değişebilmektedir. Dönen disklere bağlı manometre ile yük ve kanat yüzeyleri üzerindeki basınçları ölçmüştür. Çark kanatları içinde ikincil akışların oluştuğu gözlenmiş ve elde edilen sonuçlar potansiyel akış teorisi ile analitik olarak hesaplanan sonuçlar ile karşılaştırılmıştır.

MIZUKI ve diğ. (1974) yanak profilleri farklı uç değişik radyal çark geometrisi için optimum kanat yükü dağılımı incelemiştir. Kanat yüzeylerindeki statik basınç dağılımları ölçülmüş ve kanatlar arasındaki akış yapısı incelenmiştir. Yanak profili yakınlarında toplam basınç kaybının arttığı ve yanak profilinin eğrilik yarıçapı azaldıkça akışın ayrıldığı gözlenmiştir.

Daha sonra STURGE (1975), ACOSTA(1954)'nin deneysel sonuçlarını potansiyel teori ile kanatlar arası yüzeyde hesapladığı sonuçlar ile karşılaştırmış ve akış ayrılmalarını sayısal olarak bulunabileceğini göstermiştir.

KANNEMANS (1980) geriye dönük ve dört kanatlı saydam radyal pompa çarkı içersinde Lazer doppler anemometresi kullanarak hız ölçümleri yapmıştır. Yapılan ölçümler göbekten yanağa ve kanatlar arası düzlemde farklı eksenel uzaklıklarda ve yarıçaplarda gerçekleştirilmiştir. Deneysel sonuçlar potansiyel teori ile elde edilen sayısal sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Çark içindeki akışın çok büyük bir yaklaşıklık ile iki boyutlu olduğu ve düşük debilerde viskoz etkilerin görüldüğü belirtilmiştir.

MURAKAMI ve diğ. (1980) üç ve yedi kanata sahip radyal pompa geometrisi için değişik radyal pozisyonlarda, hız ve basınç değerleri ölçmüştür. Üç kanatlı pompa çarkı için potansiyel akışın tasarım ve tasarım dışı çalışma koşullarında gerçek akışı modelleyemediği gözlenmiştir.

MINER ve diğ. (1988) iki boyutlu lazer doppler anemometresi ile 16° lik logaritmik spiral şeklinde kanatlara sahip laboratuvar pompası çarkı içersinde ve salyangozunda hız ölçümleri yapmıştır. Kanatlar arası düzlemdeki hız ölçümleri dört çevresel pozisyonda ve değişik yarıçaplarda gerçekleştirilmiştir. Ayrıca kanat çıkışlarında da ölçümler yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar kanatların ve salyangozun birlikte modellendiği iki boyutlu potansiyel akışa ait sonuçlar ile karşılaştırılmıştır (MINER ve diğ., 1992). Tasarım dışı çalışma koşullarında pompa salyangozunun çark verimini etkilediği belirtilmiştir.

Endüstriyel amaçlı pompaların kanat geometrileri yukarıda bahsedilen laboratuvar pompalarının ki gibi olmayıp daha farklıdır. COMBES (1992) iki boyutlu lazer doppler anemometresi kullanarak endüstriyel pompa çarkı ve difüzöründe ayrıntılı akış ölçümleri yapmıştır. Tasarım debisinin %50 ve %100 arasındaki değerleri için sekiz radyal pozisyonda ölçümler yapılmış ve sonuçlar üç boyutlu türbülans modeli içeren sonlu elemanlar programıyla karşılaştırılmıştır.

Ayrıca GOTO (1992) karışık akımlı pompa çarkında iki delikli basınç probu kullanarak deneysel ölçümler yapmış ve DAWES (1988) tarafından geliştirilen üç boyutlu Navier-Stokes çözücüyle hesapladığı sonuçları, elde etmiş olduğu deneysel sonuçlarla karşılaştırmıştır.

Lazer ölçüm tekniğinin kolay kullanılması amacıyla LIU ve diğ. (1994) yansıma özelliği olmayan özel bir sıvı kullanarak, geriye eğik dört kanatlı salyangozlu

radyal pompada değişik açısıal pozisyonlarda lazer doppler anemometresi kullanarak ölçümler yapmıştır. Yanak kısmının emme yüzeyinde akış ayrılması ve tasarım dışı çalışma koşullarında pompa salyangozunun etkisi irdelenmiştir.

Son yıllarda ise TSUKAMATO ve diğ. (1995) dönme hızının pompa karakteristikleri üzerine etkisi, BASKHARONE ve diğ. (1994) radyal pompanın yanak kısmındaki kaçak debi ile ilgili deneysel çalışmalar yapmışlardır. Ayrıca LEFEBVRE ve BARKER (1995) pompanın daimi rejime gelmesi ve durması halinde elde edilen performansı deneysel olarak irdelenmiştir.

2.4 Sayısal Çalışmalar

Sayısal çalışmalarda çözümü yapılacak bölgedeki akışı modellemede kullanılacak dinamik ve uzaysal yaklaşımlar belirlenir. Sayısal akışkanlar dinamiği kullanılarak türbomakinalar ile ilgili yapılan çalışmalarda en basit modelden en karmaşık modele kadar farklı yaklaşımlar kullanılmaktadır (HIRSCH ve DECONINCK, 1985). Akış ile ilgili sıkıştırılabilirlik, sürtünmeli veya sürtünmesiz, girdaplı veya girdapsız, zamana bağlı olup olmaması gibi yaklaşımlar belirlenerek çözüm elde edilir.

Pompa çarkı içindeki akışın sayısal olarak çözümlenebilmesi için çark içindeki akışı modelleyecek akış denklemlerinin doğru bilinmesi gerekir. Akışkan olarak su kullanıldığından akış büyük bir yaklaşıklıkla sıkıştırılmaz kabul edilebilir. Sıkıştırılmaz viskoz olmayan (Euler) akış modellemesi pompa çarkı içindeki akışın sayısal çözümünde kullanılabilir.

Bu çalışmanın konusu sıkıştırılmaz ve viskoz olmayan çözücüler olduğuna göre radyal kanatlar arasındaki akışın çözümü için kullanılan teknikler ve yaklaşımlar ile ilgili çalışmalar aşağıda özetlenmiştir (LAKSHMINARAYANA, 1991) :

- a)- Tekil noktalar metodu (Panel metodları)
- b)- İki ve üç boyutlu potansiyel akış
- c)- İki ve sanki üç boyutlu akım fonksiyonu denklemleri
- d)- İki ve üç boyutlu Euler çözümleri

a)- Tekil noktalar metodu (Panel metodları): Girdapsız ve sıkıştırılmaz akış çözümlemelerinde kanat üzerindeki basınç dağılımını elde etmede kullanılan panel metodları oldukça iyi sonuçlar verir. Sadece kanat yüzeylerindeki basınç dağılımı ilgi alanıysa farklı bir metoda gerek yoktur (ANDERSON, 1991).

b)- İki ve üç boyutlu potansiyel akış: Potansiyel teori izentropik ve girdapsız akışların çözümünde kullanılabilir. KIRSCH (1971) kanatlar arası ve meridyenel akım yüzeylerinde radyal çıkışa sahip kanatlar için, sanki üç boyutlu potansiyel akış çözümünü gerçekleştirmiştir. Ayrıca üç boyutlu potansiyel akış çözümlemeleri LASKARIS (1978), DAIGUJI (1983) tarafından radyal kanatlar arasındaki akışı çözümlemek için kullanılmıştır. MINER ve diğ. (1990, 1992) logaritmik spiral şeklindeki kanatlara sahip bir laboratuvar pompasında kanatlara gelen kuvvetleri ve akışın çözülmesini potansiyel akış teorisi ile yapmıştır. Bu çalışmada çark ve salyangoz birlikte modellenmiş ve kanatın değişik açısız pozisyonlarda salyangoz içindeki konumuna göre daimi haldeki çözümler elde edilmiştir. Salyangozun tasarım dışı çalışma koşullarında çark performansını olumsuz yönde etkilediği belirtilmiştir.

c)- İki ve sanki üç boyutlu akım fonksiyonu denklemleri : Akım fonksiyonu denklemleri potansiyel akış çözümlerine benzetmekle birlikte oldukça yaygın olarak kullanılmıştır. Bunlar, WU (1952) tarafından tanımlanan S1 (Kanatlar arası akım yüzeyi) ve S2 (Meridyenel akım yüzeyi) akım yüzeylerinde elde edilen çözümlerdir. Bu yüzeylerin herhangi birinde akım fonksiyonu tanımlanır ve genel denklemler elde edilir (ADLER, 1980). Geliştirilen tekniklerin ve programların çoğu tasarım aşamasında verimli olarak kullanılmıştır. Bu akım yüzeylerinde çözüm iki şekilde yapılabilir. Göbek ve yanak kesitleri arasındaki orta yüzeydeki meridyenel akım yüzeyiyle birlikte birden fazla kanatlar arası yüzeyde çözüm yapılır. Bu yaklaşım sadece ortalama olarak üç boyutlu etkileri hesaplar (STOCKMAN ve KRAMER, 1963). İkinci olarak ise birden fazla S1 ve S2 yüzeylerinde çözüm yapılır. Kullanılan sayısal tekniklerde ise denklemlerin ayrıştırılması için genellikle sonlu elemanlar (KRIMMERMAN ve ADLER 1978) ve sonlu farklar metodları (KATSANIS, 1968; KATSANIS ve McNALLY, 1977) kullanılmıştır.

d)- İki ve üç boyutlu Euler çözümleri: Viskoz terimlerin ihmal edildiği iki ve üç boyutlu sıkıştırılmaz Euler denklemlerinin, çözümünde kullanılan metodlar aşağıdaki gibi listelenebilir.

1-Basınca dayalı metodlar

2-Zamana bağlı metodlar

3-Sıkıştırılmaz akış için yapay sıkıştırılabilirlik

1-Basınca dayalı metodlar: Basınca dayalı metodda denklemler yardımcı bir basınç denklemi kullanılarak (Poisson) elde edilen tahmin edilmiş bir basınç alanı ile birlikte kullanılır. Çoğunlukla rahatlama (relaxation) teknikleri bu denklemlerin çözümünde iyi neticeler verir. Oldukça geniş kullanım alanı olan basınca dayalı metodlardan birisi basınç düzeltme metodu olarak bilinir (PATANKAR, 1980). Bu teknikte basıncın düzeltilmesi için ayrı bir denklem kullanılır. $P=p^*+p'$ şeklinde ifade edilen basınç denkleminde p^* ilk tahmin değerini, p' ise momentum denklemleri kullanılarak elde edilen basınç değerini gösterir. Bu metodla ilgili ayrıntılı açıklama ve denklemler PATANKAR (1980) den elde edilebilir. SIMPLE algoritması olarak bilinen bu metodda momentum ve basınç denklemleri ayrı ayrı olarak çözülür. Sonlu farklar ve sonlu hacimler tekniği kullanılarak yapılan çözümlemeler mevcuttur. Daha sonraları ise SIMPLE algoritması çeşitli yazarlar tarafından bilgisayar zamanı ve elde edilen çözümün doğruluğu açısından geliştirilmiştir (VON DOORMAL ve RATHBY, 1984).

Yukarıda bahsedilen basınca dayalı metodlarda momentum, süreklilik ve basınç denklemleri birbirinden bağımsız olarak çözülür ve bilinmeyenler sürekli olarak düzeltilir. Basınca dayalı metodun sıkıştırılmaz akış çözümlemeleri için çok geniş uygulamaları mevcuttur. Yalnız yöntemin yakınsama hızı çok yavaştır. Bu teknikteki temel problem Poisson denkleminin ayrıca çözülmesidir.

2-Zamana bağlı metodlar: Euler denklemlerinin çözümünde kullanılan diğer bir yöntem şekli ise bu çalışmada da kullanılan zamana bağlı metodlardır (AGARD AG-325, 1994). Zamana bağlı metodlarda açık ve kapalı yaklaşımlar mevcuttur. Açık yöntemde uzaysal türevler bir önceki zaman adımında hesaplanan değerler kullanılarak hesaplanır. Bu metodda zamana bağlı türevler mevcuttur ve mevcut denklemlerin hiperbolik karakteri kullanılarak çözüm yapılır. Akışın tüm rejimlerine (sesaltı veya

sesüstü) aynı algoritma kolaylıkla tatbik edilir. Kullanılması kolay ve denklemler basınca dayalı metoddan farklı olarak birbirine bağımlıdır. İç ve dış akış çözümlemelerine kolaylıkla uygulanabilir. Kompleks geometriler ve akış alanları için yöntem basınca dayalı metoda nazaran daha verimlidir. Açık yöntem kullanıldığında zaman adımı sınırlıdır ve bu çoğunlukla hızlandırma teknikleri kullanılarak giderilir. Açık yöntem kullanılarak ayrıklaştırma neticesinde elde edilen adi diferansiyel denklemlerin çözümü için genelde üç farklı teknik kullanılır.

-Lax-Wendroff metodu (LAX ve WENDROFF, 1964)

-Tahmin-doğrulama metodu (MacCORMACK, 1969)

-Runge-Kutta metodu (JAMESON ve diğ., 1981)

Yukarıda bahsedilen metodlarda çözümün kararlı olabilmesi için yakınsama zamanını büyük oranda etkileyen CFL sayısı ilk iki metotta 1, Runge-Kutta metodunda ise $2\sqrt{2}$ ile sınırlanmıştır.

Açık yöntem kullanılarak elde edilen zamana bağlı viskoz olmayan akış çözümlemeleri birçok araştırmacı tarafından gerçekleştirilmiştir (HOLMES ve TONG, 1985; DENTON, 1983; GHAZZANI ve diğ., 1992).

Kapalı yöntemlerde ise bilinmeyenlerin hesaplanması için denklem sisteminin oluşturduğu matrisin çözümü gerekir. Bunun için kapalı yöntemlerde matris çözümleme teknikleri uygulanır (IKOHAGI, 1992).

3-Sıkıştırılamaz akış için yapay sıkıştırılabilirlik denklemleri: Radyal pompalardaki akış çok düşük hız mertebelerine sahiptir. Yukarıda bahsedildiği gibi zamana bağlı metod kullanılarak sıkıştırılabilir akış için kullanılan hiperbolik denklemlerin çözümü için çok verimli teknikler geliştirilmiştir. Ayrıca sıkıştırılamaz akışta sıcaklık değişimleri ihmal edilebilir mertebede olduğu için enerji denklemi ihmal edilir. Hiperbolik olmayan sıkıştırılamaz akış denklemlerini (yoğunluk sabit) hiperbolik hale getirmek yukarıdaki tekniklerin kullanılabilmesine imkan tanımaktadır. CHORIN (1967) tarafından önerilen ve daha sonra RIZZI ve ERIKSSON (1985) tarafından geliştirilen süreklilik denklemine zamana bağlı yapay basınç terimi eklenmesi yaklaşımı, zamana bağlı metodların kullanılabilmesine imkan tanımaktadır. Yalnız bu yaklaşım daimi haldeki çözüm amaçlandığında kullanılabilir. Bu yaklaşım

kullanılarak elde edilen akış çözümleri genelde dış akış çözümü için kullanılan test geometrileri için uygulanmıştır (ERIKSSON ve RIZZI, 1984; KWAK ve CHAKRAWARTHY, 1986, CHANG ve diğ., 1988).

2.5 Sonuç

Bu çalışmada zamana bağlı sıkıştırılamaz Euler denklemlerinin daimi haldeki sayısal çözümü ile çeşitli pompa çarklarının performanslarını elde etmek hedeflenmiştir. Panel metodları, potansiyel akış çözümleri ve akım fonksiyonu denklemlerinin çözümü ile pompa çarkları içindeki akışın sayısal çözümlenmesi Euler denklemlerine nazaran iyi neticeler vermez. Panel metodu sadece kanat yüzeylerindeki basınç dağılımını hesaplamada iyi neticeler verir. Akım fonksiyonu denklemlerinin çözümü neticesinde iki farklı akım yüzeyinde elde edilen çözümler ise sadece tasarım aşamasında verimli olarak kullanılmıştır. Potansiyel akış kabulü ile radyal kanatlar arasındaki akışın çözümlenmesi meridyenel düzlemdeki kanat eğriliklerinden dolayı oldukça zordur.

Euler denklemlerinin daimi haldeki sıkıştırılabilir akış çözümünü elde etmede oldukça verimli teknikler geliştirilmiştir. Zamana bağlı metodlar olarak isimlendirilen bu teknikler düşük Mach sayılı akış çözümlerinde iyi neticeler vermez ve çoğu zaman sonucun elde edilmesi oldukça uzun zaman alır. Sıkıştırılamaz akış çözümlerinde zamana bağlı metodların kullanılması ile çözümün daha kısa sürede elde edilmesi mümkündür. Literatürde yapay sıkıştırılabilirlik tekniği olarak bilinen yöntem kullanılarak zamana bağlı metodların uzun yakınsama zamanlarını azaltmak hedeflenmiştir. Yukarıda bahsedildiği gibi sıkıştırılamaz akış çözümlerinde kullanılan basınca dayalı metodlarda ise süreklilik ve momentum denklemleri ayrı ayrı çözümlendiğinden yakınsama zamanları yapay sıkıştırılabilirlik tekniğine nazaran oldukça uzundur.

BÖLÜM 3

SIKIŞTIRILAMAZ AKIŞ

Sıkıştırılamaz akış, Akışkanlar Mekaniği ile ilgili problemlerin çözümünün önemli bir bölümünü teşkil eder. Pekçok sıvı çoğunlukla sıkıştırılamaz akışkan olarak ele alınır. Termodinamik yönden bakıldığında gazlar ve sıvılar farklı karakterlere sahiptirler. Ancak genellikle sıvılar sıkıştırılamaz akışkan olarak modellenir. Pompa çarkı içindeki akış büyük bir yaklaşıklıkla sıkıştırılamaz akışkan olarak modellenebilir.

Sıkıştırılamaz akışkan Termodinamik bir terimdir oysa sıkıştırılamaz akış bir Akışkanlar Mekaniği terimidir. Bu yüzden bu iki terimin birbirine karıştırılmaması gerekir. Yani sıkıştırılabilir bir akışkanın hareketi sıkıştırılamaz kabul edilebilir. Sıkıştırılamaz akış için temel kriter Mach sayısının sıfıra çok yakın olmasıdır ($M < 0.3$). Ayrıca ısı transferi ile ilgili olarak sıkıştırılamaz akış oluşabilmesi için bazı farklı koşulların sağlanabilmesi gerekir. Bu koşullar aşağıda irdelenmiştir (PANTON, 1984).

Sıkıştırılamaz akış, akışkan parçacıklarının (partikül) yoğunluk değişimlerinin zamana göre ihmal edilebilir mertebede olduğu akış olarak tariflenir. Matematiksel gösterimi ise,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \rho = 0 \quad (3.1)$$

Süreklilik denkleminde ;

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\partial_i V_i = \lim_{V \rightarrow 0} -\frac{1}{V} \frac{DV}{Dt} = 0 \quad (3.2)$$

Bu denklem akışkan partiküllerinin oluşturduğu hacmin zamana göre değişimini simgelemekte olup tüm partiküllerin yoğunluğu aynı olarak kabul edilebilir.

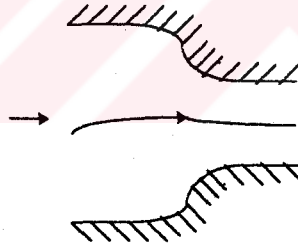
Akışkan yoğunluğunun zamana göre değişimi aynı zamanda termodinamik bir denklem ile de ifade edilebilir.

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \alpha \frac{Dp}{Dt} - \beta \frac{DT}{Dt} \quad (3.3)$$

$$\alpha(p, T) \equiv \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_T \quad \beta(p, T) \equiv -\frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_p \quad (3.4)$$

Burada α izotermal sıkıştırılabilirlik katsayısını, β ise bulk genişleme katsayısını göstermektedir. α ve β fonksiyonları akışkanı karakterize eden büyüklüklerdir. Basınç ve sıcaklık değişimleri çok küçük olduğu takdirde, (3.3) nolu denklemin sağ tarafı ihmal edilebilir.

(3.3) nolu denklemde, akış alanı etkileri Dp/Dt ve DT/dt terimleri içinde, akışkanın termodinamik karakteride α ve β terimleri ile belli olur. Sıcaklık ve basınç terimlerinin bu değişimlerinin daha iyi anlaşılabilmesi için akışın dinamik büyüklükleri ile boyutsuzlandırma yapılmalıdır. Bu büyüklükler akışı çevreleyen sınır koşulları ile belirlenir.



Şekil 3.1 İç akış

Katı yüzeyler boyunca ısı transferi olmadığı (adyabatik) iç akış şeklini ele alırsak, problemi tanımlayan temel denklemler aşağıdaki gibidir.

Süreklilik,

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\partial_i v_i = 0 \quad (3.5)$$

Termodinamik ,

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \alpha \frac{Dp}{Dt} - \beta \frac{DT}{Dt} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha(p, T) & \beta &= \beta(p, T) \\ c_p &= c_p(p, T) & \mu &= \mu(p, T) & k &= k(p, T) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Momentum,

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\partial_i p + \rho g_i + \partial_j \tau_{ji} \quad (3.8)$$

Enerji,

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \partial_i \left(k \partial_i T + \phi + \beta T \frac{Dp}{Dt} \right) \quad (3.9)$$

Genel bir akış probleminin çözümü için birbirine bağlı olan bu denklemlerin çözümü gerekmektedir.

(3.5) den (3.9) a kadar olan denklemler akışın çözümlenebilmesi için aynı derecede öneme sahiptir. Kullanılan boyutsuz denklemler aşağıda gösterilmiştir.

$$x_i^* = \frac{x_i}{L} \quad t^* = \frac{tv_o}{L} \quad v_i^* = \frac{v_i}{v_o} \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_o} \quad (3.10)$$

$$\alpha^* = \frac{\alpha}{\alpha_o} \quad \beta^* = \frac{\beta}{\beta_o} \quad c_p^* = \frac{c_p}{c_{po}} \quad \mu^* = \frac{\mu}{\mu_o} \quad k^* = \frac{k}{k_o} \quad F_i^* = \frac{g_i}{V_o^2 / L}$$

Sıcaklık ve basınç terimleri özel olarak ele alınmalıdır. Sıkıştırılamaz akışta, basınç momentum denkleminde bir kuvvet terimi olarak belirir. Bu denklemde basınç gradyan olarak bulunduğu referans seviye herhangi bir değişiklik olmaksızın basınç değerinden çıkartılabilir. Bu boyutsuzlandırma basınç terimleri ile yerçekimi terimlerinin aynı mertebede olmasını sağlar.

$$p^* = \frac{p - p_o}{p_s} \quad (3.11)$$

Boyutsuz sıcaklık ise,

$$T^* = \frac{T - T_o}{\mu_o v_o^2 / k_o} = \frac{T - T_o}{Pr v_o^2 / c_{po}} \quad Pr = \frac{\mu c_{po}}{k_o} \quad (3.12)$$

Bu boyutsuzlandırma enerji denkleminde iletim, taşınım ve sönümleme terimlerinin aynı mertebede olmasını sağlar.

Yukarıda gösterilen boyutsuzlandırma denklemleri (5)-(9) denklemlerine yerleştirildiğinde aşağıdaki boyutsuz sayılar oluşur.

$$Re = \frac{\rho_o L v_o}{\mu_o} \quad Pr = \frac{\mu c_{po}}{k_o} \quad \gamma_o = \frac{c_{po}}{c_{vo}} \quad (3.13)$$

$$Fr^2 = \frac{v_o^2}{gL} \quad M = \frac{v_o}{a_o} \quad A = \alpha_o \rho_o c_{po} T_o \quad B = \beta_o T_o$$

Ses hızı ise;

$$a_o^2 = \frac{\gamma_o}{\rho_o \alpha_o} \quad M^2 = \frac{v_o^2}{a_o^2} = \frac{\Delta p}{\rho_o} \equiv 0 \quad (3.14)$$

M^2 yoğunluk değişimlerinin akışkan yoğunluğuna oranını simgelemektedir. Dolayısıyla $M^2 \rightarrow 0$ koşulu sıkıştırılamaz akışlar için geçerlidir.

Denklemlerin tekrar düzenlenmesi ile aşağıdaki denklemler elde edilir.

Termodinamik ;

$$\frac{1}{\rho^*} \frac{D\rho^*}{Dt^*} = \gamma_o M^2 \left\{ \alpha^* \frac{Dp^*}{Dt^*} - \frac{Pr B \beta^*}{A} \frac{DT^*}{Dt^*} \right\} \quad (3.15)$$

$$\frac{1}{\rho^*} \frac{D\rho^*}{Dt^*} = 0 \quad \rho^* = c_p^* = \alpha^* = \beta^* = \mu^* = k^* = 1 \quad (3.16)$$

Süreklilik ;

$$\frac{1}{\rho^*} \frac{D\rho^*}{Dt^*} = -\partial_i v_i^* = 0 \quad (3.17)$$

Momentum ;

$$\frac{Dv_i^*}{Dt^*} = -\partial_i^* p^* + g_i Fr^{-2} + \frac{1}{Re} \partial_j^* \partial_j^* v_i^* \quad (3.18)$$

Enerji ;

$$\rho^* c_p^* \frac{DT^*}{Dt^*} = \frac{1}{Re Pr} \left\{ \partial_i^* (k^* \partial_i^* T^*) + \phi^* \right\} + \beta^* B \left\{ \frac{1}{Pr} + \frac{\gamma_o M^2}{A} T^* \right\} \frac{Dp^*}{Dt^*} \quad (3.19)$$

$$\phi^* = \frac{\phi}{\mu_o v_o^2 / L^2} \quad (3.20)$$

Bu denklemler sıkıştırılamaz akış ile pek çok özelliği özetlemektedir.

- Yoğunluk ve tüm termodinamik katsayılar sabittir. Termodinamik katsayıların birbirinden bağımsız olarak sabit olmaları koşulu gerekli değildir.
- Yoğunluk ve taşınım katsayıları sabit olduğundan, süreklilik ve momentum denklemleri enerji denkleminde ayrılır. Bu son derece önemli bir sonuçtur. Bu demektir ki süreklilik ve momentum denklemleri enerji denkleminde bağımsız olarak çözümlenmelidir. Sıkıştırılamaz akış içerisinde oluşan hız alanı, ısı transferi ve termal etkilerden etkilenmez. Sıkıştırılamaz akış çözümünde $p^* = (p - p_o) / \rho v_o^2$ değeri, p_o değeri belirlenmeden hesaplanır. Bir akış çözümlemesi için referans basınç değeri (p_o) artırıldığında, tüm basınç değerleri artar. Hızlar ve akım çizgileri basınç arttığında değişmez.
- Sıkıştırılamaz akışta sıcaklık değişimleri çok az ve referans sıcaklığa yakındır. T^* değişkeni uniform bir değer olarak kabul edilebilir. Bu yüzden enerji denkleminin çözümü tamamıyla ısı transferi çözümü ile ilgilidir.

Sıkıştırılamaz akış modeli kullanıldığında enerji denkleminin süreklilik ve momentum denklemleri ile birlikte kullanılması halinde aşağıdaki ikilem oluşur.

Enerji denklemi,

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T + \phi + \beta T \frac{Dp}{Dt} \quad (3.21)$$

Sıkıştırılmaz akışta enerji denklemi, konveksiyon ve iletim terimleri arasında dengeyi sağlar. 3.17 denklemi düşük Mach sayılı akış için sıcaklık farkları az olduğu zaman;

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T \quad (3.22)$$

haline gelir.

Enerji denkleminin diğer bir yazılış şekli ise boyutsuz sabit hacimde özgül ısılar oranını içermektedir.

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T + \phi - T \left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_p \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (3.23)$$

Bu denkleme bakıldığında sıkıştırılmaz akış için son terimin sıfır olduğu görülür. Ayrıca viskoz sönümlleme terimi küçük Mach sayıları için ihmal edilebilir mertebededir. Bu ikinci denklem de iletim ve taşınım terimleri arasındaki dengeyi göstermektedir. Fakat c_p yerine c_v içermektedir. Bu bir ikilemdir. Sıkıştırılmaz akışkanlar için c_p ve c_v arasındaki ilişki belirlenmedikçe bu ikilem çözülemez.

Özet olarak sıkıştırılmaz akış; düşük Mach sayılı adyabatik duvarların olduğu akışlarda veya küçük sıcaklık değişimlerin olduğu katı yüzeyler arasındaki akışlar için geçerlidir. Bu akışlar sabit özelliklere sahiptir ve akış ile ilgili özellikler ısı transferi ile ilgili olaylara bağlı değildir. Bu önemli bir basitleştirmeye yol açar. Akış alanının çözümü için süreklilik ve momentum denklemlerinin çözümü gerekir.

BÖLÜM 4

İKİ BOYUTLU SIKIŞTIRILAMAZ AKIŞ

Bu bölüm pompa çarkı içindeki akış ile ilgili kullanılan denklemlerin çözümüne başlangıç olması amacıyla hazırlanmıştır. Uygulanan sayısal yöntemin kullanılabilme limitlerini test etme imkanı sağlanmıştır.

İki boyutlu zamana bağlı Euler denklemlerinin daimi haldeki çözümü amaçlanmaktadır. Sıkıştırılamaz akışta yoğunluk sabit ve sıcaklık değişimleri çok küçük mertebede olduğundan süreklilik ve momentum denklemleri çözümlenecektir. Bu denklemler birbirine bağlı kısmi diferansiyel denklem sistemidir.

Bağımsız değişkenler kartezyen koordinatlar (x,y) ve zamandır (t). Bağımlı değişkenler hızın kartezyen bileşenleri (u, v) ve basınçtır (p). Sıkıştırılabilir akış için yazılan zamana bağlı Euler denklemlerinin çözümleri hiperbolik metodlara dayanır ve bu denklemler düşük Mach sayılı akış çözümlemelerinde yakınsama problemlerine sahiptir. Düşük Mach sayılarında taşınım hızları çok büyüktür. Sıkıştırılamaz akış denklemlerinin matematiksel karakteri, yoğunluk sabit olduğunda sıkıştırılabilir akış denklemlerinkinden farklıdır. Süreklilik denkleminde yoğunluğu kaldırmak, denklemlerin hiperbolik karakterini bozar. Yoğunluğun sabit olması nedeni ile süreklilik denklemi zamandan bağımsız hale gelir. Sadece daimi haldeki çözüm amaçlandığından süreklilik denklemine basıncın zamanla değişimi bir katsayı ile çarpılarak ilave edilir. Bu denklemlerin hiperbolik karakterinde olmasını sağlar. Bu denklemler en genel halde aşağıdaki gibi gösterilebilir (RIZZI ve ERIKSSON, 1985).

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial t} + c^2 \operatorname{div} V = 0$$

(4.1)

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \operatorname{grad}) V + \frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} p = 0$$

ρ_0 sabit yoğunluğu, c^2 ise hız boyutunda olup taşınım dalgalarının ortamda yayılma hızına yani ses hızına karşılık gelmektedir. Sıkıştırılabilir akışlar için geliştirilen çözüm metodları böylece gösterilen denklemlere uygulanabilir. c^2 katsayısı aynı zamanda çözümün daimi hale ulaşma zamanını belirleyen bir parametredir. Bu literatürde yapay sıkıştırılabilirlik tekniği olarak bilinir (CHORIN, 1967). Bu yaklaşımın denklemler daimi hale ulaşmaya kadar fiziksel bir anlamı yoktur. Daimi hale ulaşıldığında denklemlerde basıncın zamanla değişimi ortadan kalktığı için, daimi haldeki momentum ve süreklilik denklemleri haline gelir.

Bu denklemler 2 boyutlu kartezyen koordinat sisteminde korunumlu formda aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\frac{\partial}{\partial t} q + \theta \left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right] = 0 \quad (4.2)$$

$$q = \begin{bmatrix} p / \rho_0 \\ u \\ v \end{bmatrix} \quad \theta = \begin{bmatrix} c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} u \\ u^2 + p / \rho_0 \\ uv \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} v \\ uv \\ v^2 + p / \rho_0 \end{bmatrix}$$

4.1 Denklemlerin Uzay Boyutunda Ayırıklaştırılması

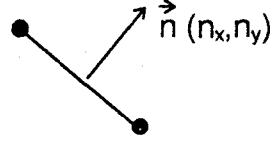
İki boyutlu zamana bağlı Euler denklemlerinin ayırıklaştırılması zaman ve uzay boyutunda ayrı ayrı yapılır. Uzay boyutunda sonlu hacimler tekniği kullanılır. Burada çözüm iki boyutlu olduğundan hacimler yerine alanlar kullanılacaktır (KROLL ve JAIN, 1987).

$$\iint_s \frac{\partial}{\partial t} q ds + \iint_s \theta \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] ds + \iint_s \theta \left[\frac{\partial g}{\partial y} \right] ds = 0 \quad (4.3)$$

$$ds = dx \cdot dy$$

Alan elemanının yüzeyleri boyunca olan normal kullanılarak,

$$\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j}$$



Gauss diverjans teoremi tatbik edilirse,

$$\iint \frac{\partial}{\partial t} \bar{q} ds + \theta \oint \vec{f} \cdot \vec{n} dx + \theta \oint \vec{g} \cdot \vec{n} dy = 0 \quad (4.4)$$

4.4 denklemi elde edilir. Kontrol hacimleri doğrusal kenarlı elemanlardan oluştuğu için eğrisel integraller, her bir kontrol hacminin kenarları boyunca hesaplanan integrallerin toplamı olarak düşünülebilir.

$$\iint \frac{\partial}{\partial t} \bar{q} ds + \theta \sum_{m=1}^4 \oint \vec{f}_m dx + \theta \sum_{m=1}^4 \oint \vec{g}_m dy = 0 \quad (4.5)$$

Yüzeyler boyunca akı vektörlerinin doğrusal değiştiği kabul edilirse 4.2 denklemi aşağıdaki hale gelir.

$$\theta \sum_{m=1}^4 \bar{f}_m S_{m_x} + \theta \sum_{m=1}^4 \bar{g}_m S_{m_y} = - \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right) S \quad (4.6)$$

S_{m_x} ve S_{m_y} hacim elemanının x ve y yönündeki izdüşüm uzunluklarını göstermektedir. $\bar{f}_m$ ve $\bar{g}_m$ bağımlı değişkenleri içermektedir.

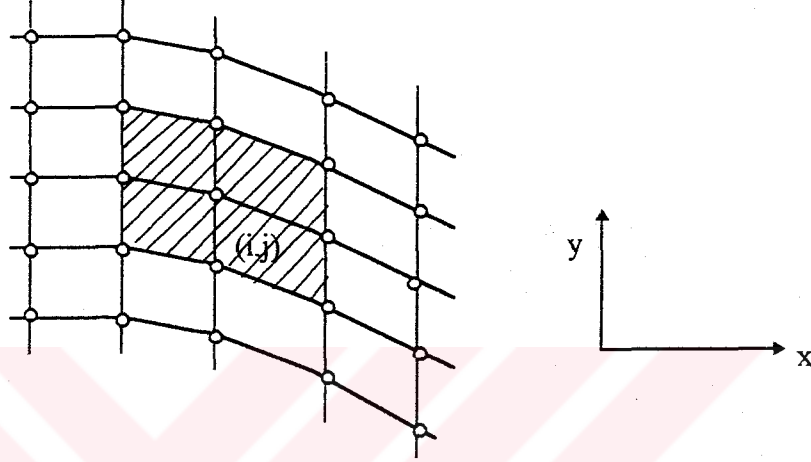
$$S_{m_x} = x_2 - x_1 \quad (4.7)$$

$$S_{m_y} = y_2 - y_1$$

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} dx dy$$

Bu denklem sisteminin çözülebilmesi için herbir kontrol hacminin (alan) izdüşüm alanları (S_{mx} ve S_{my}) ve alanı (S) önceden hesaplanmalıdır.

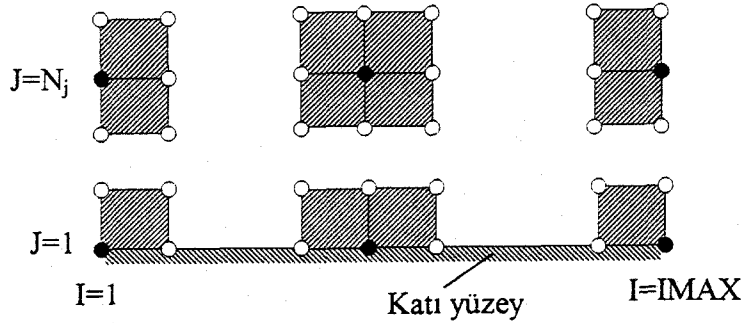
İki boyutlu Euler denklemlerinin hesaplanmasında dört elemandan oluşan kontrol hacmi (alan) kullanılmıştır. (Şekil 4.1)



Şekil 4.1 Kontrol hacmi (alan)

Bağımlı değişkenler elemanların köşe noktalarında tanımlanmaktadır. (Eleman köşeli yaklaşım) Yüzey akılarının hesaplanması biçimi denklem 4.8 de gösterilmiştir.

$$\bar{f} = \frac{1}{2}(q_{i,j} + q_{i+1,j}) \quad \bar{g} = \frac{1}{2}(q_{i,j} + q_{i,j+1}) \quad (4.8)$$



Şekil 4.2 Giriş, çıkış ve katı yüzey üzerindeki noktaların kontrol hacimleri

4.2 Zaman Boyutunda Denklemlerin Ayırıştırılması

Sonlu hacimler tekniği ile adi diferansiyel sistemine dönüştürülen akış denklemlerinin zaman boyutundaki ayırıştırılması 4 adımlı Runge-Kutta yöntemi ile yapılmıştır. Artık terimleri R ile gösterilmek üzere klasik 4 adımlı Runge-Kutta yöntemi aşağıdaki gibi yazılabilir. q çözüm vektörünü simgelemektedir.

$$V_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial t} q_{ij} \right) + R_{ij} - D_{ij} = 0 \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} q^{(0)} &= q^{(n)} \\ q^{(1)} &= q^{(0)} - \frac{\Delta t}{2} [R(q^{(0)}) - D(q^{(0)})] \\ q^{(2)} &= q^{(0)} - \frac{\Delta t}{2} [R(q^{(1)}) - D(q^{(1)})] \\ q^{(3)} &= q^{(0)} - \Delta t [R(q^{(2)}) - D(q^{(2)})] \\ q^{n+1} &= q^{(0)} - \frac{\Delta t}{6} \left[(R(q^{(0)}) - D(q^{(0)})) + 2(R(q^{(1)}) - D(q^{(1)})) \right. \\ &\quad \left. + 2(R(q^{(2)}) - D(q^{(2)})) + (R(q^{(3)}) - D(q^{(3)})) \right] \end{aligned} \quad (4.10)$$

D(q) yapay sönümler terimlerini göstermektedir. Δt zaman adımı kararlılık analizi neticesinde elde edilir. Bu yöntem $q^{(n+1)}$ teriminin $q^{(n)}$ etrafında Taylor serisine açılımı neticesinde elde edilmiştir. Ve zaman boyutunda 4. mertebeden doğruluğa sahiptir. Yukarıda gösterilen klasik yöntemde her bir adım boyunca yapay sönümler terimlerinin ve her bir adıma ait artıkların depolanması gerekir. Bu daha fazla bilgisayar hafızası ve çalışma zamanı demektir. Bu sınırlamayı ortadan kaldırmak için düzenlenmiş yeni yöntem bu çalışmada kullanılmıştır. Bu düzenlenmiş yöntemin denklemleri aşağıda gösterilmiştir. (JAMESON ve diğ., 1981).

$$\begin{aligned} q^{(0)} &= q^{(n)} \\ q^{(1)} &= q^{(0)} - \alpha_1 \Delta t [R(q^{(0)}) - D(q^{(0)})] \\ q^{(2)} &= q^{(0)} - \alpha_2 \Delta t [R(q^{(1)}) - D(q^{(1)})] \\ q^{(3)} &= q^{(0)} - \alpha_3 \Delta t [R(q^{(2)}) - D(q^{(2)})] \\ q^{(4)} &= q^{(0)} - \alpha_4 \Delta t [R(q^{(3)}) - D(q^{(3)})] \\ q^{(n+1)} &= q^{(4)} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Denklemlerde görülen katsayılar ise aşağıdaki gibi kullanılmıştır (KROLL ve JAIN, 1987).

$$\alpha_1 = 1/4 \quad \alpha_2 = 1/3 \quad \alpha_3 = 1/2 \quad \alpha_4 = 1$$

Burada yapay sönümlleme terimleri ilk adımda hesaplanır ve sonraki adımlarda sabit tutulur. Bu zaman ayrıklaştırması yöntemi zaman boyutunda 2. mertebeden doğruluğa sahiptir.

4.3 Uzay ve Zaman Boyutunda Ayrıklaştırılmış Denklemlerin Çözüm Yöntemi

Hiperbolik karaktere sahip denklemlerin açık yöntem ile yapılan sayısal çözümünün kararlı olabilmesi için zaman adımının belirli koşulları sağlaması gerekir. Bu koşulların belirlenebilmesi için öncelikle denklemlerin karakteri incelenmelidir. Denklemler en genel halde sanki-lineer formda aşağıdaki gibi yazılabilir (RIZZI ve ERIKSSON, 1985).

$$\frac{\partial}{\partial t} q + A \frac{\partial}{\partial x} q + B \frac{\partial}{\partial y} q = 0 \quad (4.12)$$

$$A = \theta \frac{\partial f}{\partial q} = \begin{bmatrix} 0 & c^2 & 0 \\ 1 & 2u & 0 \\ 0 & v & u \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$B = \theta \frac{\partial g}{\partial q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c^2 \\ 0 & v & u \\ 1 & 0 & 2v \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

(x, y, t, q) noktalarında tekil olmayan bir matris oluşursa sanki lineer sistem hiperboliktir. Bunun için A ve B matrislerinin lineer bileşimi olan $D = \alpha A + \beta B$ matrisinin diyagonal olmasını sağlayacak $T(\alpha, \beta)$ matrisi bulunmalıdır. Matrisin diyagonal olması denklemlerin çözümünde kolaylık sağlar.

$$T^{-1}DT = \begin{bmatrix} \lambda^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{(3)} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

D matrisinin özdeğerleri gerçektir ve T, T^{-1} matrisleri birbirlerine α ve β katsayıları ile bağlanmıştır.

D matrisinin özdeğerleri ,

$$u = \alpha u + \beta v \quad \text{ve} \quad a^2 = u^2 + c^2(\alpha^2 + \beta^2)$$

terimleri ile aşağıdaki gibidir.

$$\lambda^{(1)} = u - a \quad \lambda^{(2)} = u \quad \lambda^{(3)} = u + a \quad a = \text{ses hızı}$$

Burada dikkat edilirse en büyük ve en küçük özdeğer arasındaki fark c katsayısı ile kolaylıkla ayarlanabilir. Bu çözüm esnasında taşınım hızını kontrol imkanı verir. Böylece tüm özdeğerler gerçektir olduğundan denklem sistemi hiperboliktir.

c^2 parametresi çözümün daimi hale ulaşmasını çabuklaştıran bir parametre olarak serbest olarak seçilebilir. Sonlu hacimler ayrıklaştırması denklemlerin hiperbolik karakterini bozmamasına rağmen, c parametresi çözüm esnasında farklı dalgalanmalara sebep olabilir (ERIKSSON ve RIZZI, 1984). Bu parametre aşağıdaki gibi seçilebilir. κ değeri birden büyükse basınç dalgaları konveksiyon hızları üzerine çıkar. Ve sistem yünden daha az bağımsız olur. Bu katsayının tüm akış alanı boyunca sabit olması gereksizdir. Eğer zaman adımı tüm noktalar için lokal olarak değerlendirilirse aşağıdaki gibi kullanılabilir.

$$c^2 = \max(0.3, \kappa V.V) \quad 1 < \kappa < 5 \quad (4.16)$$

Zamana bağlı metodlarda açık yöntem kullanılması halinde çözümün daimi hale ulaşabilmesi için, zaman adımı gelişigüzel seçilemez. Zaman boyunca elde edilen çözümün kararlı olabilmesi için

$$\Delta t \leq \frac{CFL}{|\lambda_{\max}|} \quad (4.17)$$

olmalıdır.

CFL katsayısının değeri Runge-Kutta yönteminde kullanılan adım sayısına bağlıdır. Ve CFL sayısının aşağıdaki limitinde denklem sistemi kararlıdır (HOLMES, 1989).

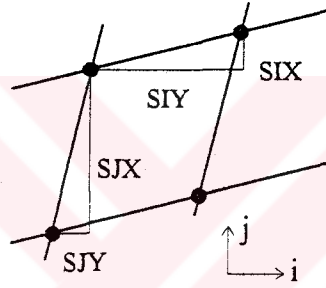
$$CFL \leq 2\sqrt{2} \quad (4.18)$$

Denklemlerin çözümünde çözüm ağındaki herbir noktada zaman adımı kriteri aşağıdaki gibi kullanılmıştır (RIZZI ve ERIKSSON, 1985).

$$\Delta t_{ij} \leq \text{CFL} \left[\frac{V_{ij}}{\tilde{U} + (\tilde{U}^2 + c^2 S^2)^{1/2}} \right]_{ij} \quad (4.19)$$

$$\tilde{U} = |uSIX + vSIY| + |uSJX + vSJY|$$

$$S^2 = (|SIX + SJX|)^2 + (|SIY + SJY|)^2 \quad (4.20)$$



$$SIX = x_{i+1,j} - x_{i,j}$$

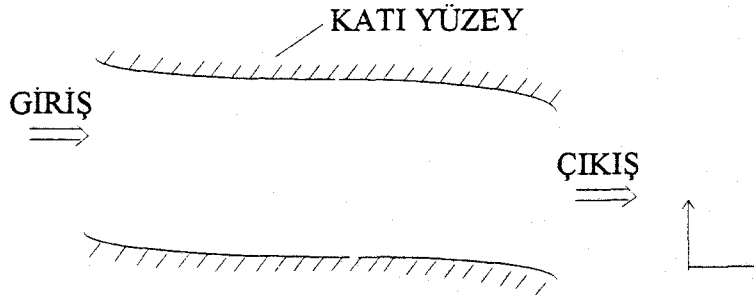
$$SIY = y_{i,j+1} - y_{i,j}$$

$$SJX = x_{i+1,j} - x_{i,j}$$

$$SJY = y_{i,j+1} - y_{i,j}$$

Şekil 4.2a Kontrol hacmini oluşturan yüzeylerin izdüşüm alanları

4.3.1 Sınır Koşulları



Şekil 4.3 Çözüm bölgesi

İki boyutlu Euler denklemlerinin sayısal çözümünde matematiksel doğruluğu sağlamak için sınır koşullarının doğru olarak tanımlanması gerekir (THOMPSON, 1990). Çözülecek denklemlerin tipine bağlı olarak giriş, çıkış ve katı yüzey üzerlerindeki karakteristikler sınır koşullarının belirlenmesi için kullanılır. Bu karakteristikler çözüm bölgesinden içeriye ve dışına doğru gerekli bilgiyi taşırlar.

Giriş yüzeyinde iki özdeğer negatif ve bir özdeğer pozitifdir. Yani çözüm bölgesinin içine doğru gerekli bilgiyi taşıyan bir karakteristik vardır. Bu nedenle iki fiziksel sınır koşulunun giriş yüzeyinde verilmesi gerekir. Toplam basınç ve mutlak hızın u bileşeninin x eksenine yaptığı açı giriş koşulu olarak verilir. Diğer hız bileşeni enterpolasyonla iç noktalardan sınırdaki noktalara taşınır.

Çıkışta ise çözüm bölgesi içine doğru iki gerçek karakteristik mevcut olduğundan tek bir fiziksel sınır koşulu vermek yeterlidir. Çıkış kesitinde statik basıncın y eksenine boyunca dağılımı tanımlanır. Hızın kartezyen bileşenleri içerideki noktalardan enterpolasyon ile sınırdaki noktalara taşınır.

Ayrıca katı yüzeylerde hızın normal bileşeninin sıfır olması sağlanır.

4.3.2 Yapay Sönümlleme

Euler denklemlerinin çözümünde, artıklar yapay sönümlleme terimleri eklenmezse sönümlenmez. Daimi hale ulaşıncaya kadar elde edilen çözümler önemli olmadığından bu terimlerin fiziksel bir anlamı yoktur. Literatürde sıkça kullanılan JAMESON (1981) (MAE Report) tarafından önerilmiş olan yöntem yapay sönümlleme terimlerinin hesaplanmasında kullanılmaktadır.

$$V_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial t} q_{ij} \right) + R_{ij} - D_{ij} = 0 \quad (4.21)$$

D yapay sönümlleme terimlerini simgelemektedir ve çözüm bölgesinde hesaplanan bağımlı değişkenlerin 4. mertebeden farkları kullanılarak elde edilir. Açık yazılımı aşağıda gösterilmiştir.

$$D_{ij} = (D_x + D_y)q_{ij} \quad (4.22)$$

$$D_{i,j} = d_{i+\frac{1}{2},j} - d_{i-\frac{1}{2},j} + d_{i,j+\frac{1}{2}} - d_{i,j-\frac{1}{2}} \quad (4.23)$$

$$d_{i+\frac{1}{2},j} = k^{(4)} \frac{V_{i+\frac{1}{2},j}}{\Delta t} \Delta x^3 q_{i-1,j} \quad (4.24)$$

Δx ileri mertebeden farkları simgelemektedir.

$$\Delta x q_{ij} = q_{i+1,j} - q_{i,j} \quad (4.25)$$

$k^{(4)}$ katsayısı iki boyutlu sıkıştırılmaz ile yapılan sayısal denemeler sonucunda iyi yakınsama hızının elde edildiği aralık aşağıda gösterilmiştir.

$$0.01 < k^{(4)} < 0.03 \quad (4.26)$$

sayısal denemeler sonucunda en uygun sonuçları vermektedir.

4.4 Hızlandırma Tekniği

2 boyutlu Euler denklemlerinin daimi haldeki çözümünü daha kısa zamanda elde edebilmek için hızlandırma tekniği uygulanır. Ara çözümler daimi hale gelinceye kadar önemli olmadığından bu işlem tatbik edilebilir. Bu çalışmada zaman adımı boyunca herbir iterasyonda elde edilen artıkların ağırlıklı ortalamalarının alınması yöntemi kullanılmıştır. Bu işlem yakınsama zamanını büyük oranda etkileyen CFL sayısının büyümesine yol açar. CFL sayısının limitini artırmak için kullanılan bir başka yol ise Runge-Kutta metodunun adım sayısı artırmaktır. Fakat adım sayısının artırılması yakınsama zamanının azalmasıyla ilgili olarak önemli bir etki sağlamaz (JAMESON ve BAKER 1983).

4 adımlı Runge-Kutta metodunda CFL sayısının sahip olabileceği en büyük değer 2.8 dir. Maksimum zaman adımı çözüm ağının çözüm ağının sık olduğu

bölgelerde oluşur. Bu bölgeler genellikle katı yüzeylere yakın bölgelerdir. İç bölgelerdeki zaman adımı bu bölgelere nazaran daha küçüktür.

Runge-Kutta yönteminin k. adımı için;

$$\Delta q^{(k)} \equiv q^{(k)} - q^{(0)} = -\alpha_k \Delta t [Rq^{(k-1)} - Dq^{(0)}] \quad (4.27)$$

$$(1 + \varepsilon \delta_x^2)(1 + \varepsilon \delta_y^2) \Delta q^{(k)} = \Delta q^{(k)}$$

δ_x ve δ_y artıkların 2. mertebeden farklarını simgelemektedir.

Bu CFL koşuluyla belirlenen zaman adımının sınırlamasında bir genişleme sağlar. Dolayısıyla daha büyük CFL sayısı kullanılabilir. ε artıkların ağırlıklı ortalamalarını uyarlayan bir katsayıdır. Kararlılık analizi neticesinde,

$$0 < \varepsilon < 1/4 \quad (4.28)$$

arasındadır. Bu limitler dahilinde CFL sayısı 1.5 kat arttırılabilir.

ε üzerindeki bu sınırlamayı kaldırmak için artıkların ağırlıklı ortalamalarının alınma işlemi kapalı yöntemle yapılabilir (JORGENSEN ve CHIMA, 1989).

$$(1 - \varepsilon \delta_x^2)(1 - \varepsilon \delta_y^2) \Delta q^{(k)} = \Delta q^{(k)} \quad (4.29)$$

$$(-\varepsilon \bar{q}_{i-1} + (1 + 2\varepsilon) \bar{q}_i - \varepsilon \bar{q}_{i+1})(-\varepsilon \bar{q}_{j-1} + (1 + 2\varepsilon) \bar{q}_j - \varepsilon \bar{q}_{j+1}) = \Delta q^{(k)}$$

Eğer sonsuz bir aralık düşünülürse yukarıdaki denklem,

$$\bar{q}_i = \frac{1-r}{1+r} (q_i + r(q_{i-1} + q_{i+1}) + r^2(q_{i-2} + q_{i+2}) + \dots) \quad (4.30)$$

şeklinde yazılabilir.

$$\varepsilon = \frac{r}{(1-r)^2} \quad 0 < r < 1 \quad (4.31)$$

Bu denklem kararlılık analizi neticesinde,

$$\varepsilon \geq \frac{1}{4} \left[\left(\frac{CFL}{CFL^*} \right)^2 - 1 \right] \quad \frac{1+r}{1-r} \geq \frac{CFL}{CFL^*} \quad (4.32)$$

limitleri dahilinde kararlıdır. CFL^* , düzeltme işlemi yapılmamış yöntemin CFL sayısıdır.

(4.17) denklemi herhangi bir noktadaki artık değerinin diğer noktalardaki artıkların bir faktör ile çarpılması neticesinde değişmesini göstermektedir. Sönümleme terimlerinin olmadığı durumda Fourier analizi neticesinde z kompleks sayıyı göstermek üzere,

$$z = iCFL^* \sin \xi \left[1 + 2r \cos \xi + 2r^2 \cos^2 \xi + \dots \right] \quad (4.33)$$

$$1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos k\xi = \frac{1-r^2}{1-2r \cos \xi + r^2} \quad (4.34)$$

$$z = \frac{iCFL^*(1-r^2) \sin \xi}{1-2r \cos \xi + r^2} \quad (4.35)$$

Böylece $|z| \leq CFL$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir ve ağırlıklı ortalamaların alındığı durumda sistem kararlıdır.

4 adımlı Runge-Kutta metodu kullanıldığından bu metodun sadece çift adımlarında artıkların ağırlıklı ortalaması alınması işlemi yapılmıştır (JAMESON ve BAKER, 1983).

4.5 Sayısal Uygulamalar

4.5.1 90° lik Dirsek

Sıkıştırılamaz iki boyutlu Euler denklemlerinin sayısal uygulaması olarak 90° lik bir dirsekteki akışın çözümlenmesi amaçlanmıştır. Sayısal olarak dirsekte serbest dönmeli akışın hesaplanabileceği gösterilecektir.

Şekil 4.4a da dirsek boyunca yarıçapları oranı iki olan 90° lik dirseğin çözüm ağı gösterilmiştir. Akışa dik yönde 10 bölüm, akış yönünde ise 50 bölümlere yapılmıştır. Yani bağımlı değişkenlerin hesaplanacağı çözüm ağındaki nokta sayısı 500' dür. Kanal girişinde hız dağılımı uniform olarak tanımlanmıştır. Uygulanan sınır koşulları boyutsuz olarak aşağıdaki gibidir.

$$\alpha = 0, P_{01} = 1, p_{\text{çıkış}} = 0.9222, R_2/R_1=2$$

Akışın çözümlenmesi neticesinde elde edilen hız vektörleri Şekil 4.4b de gösterilmiştir. Dirseğin küçük yarıçaplı kısmında akışkan partikülleri hızlanacağı için beklenildiği gibi hız değerleri büyük yarıçapa nazaran daha büyüktür. Bu dirsek boyunca serbest dönmeli akış olduğunu gösterir.

$$R \cdot V = \text{Sabit}$$

Dirsek içersindeki hız dağılımı daha büyük ölçekli olarak Şekil 4.4c de gösterilmiştir. Dirsek boyunca serbest dönme kuralının geçerli olup olmadığının kontrolü için dirseğin çeşitli kesitlerinde yarıçapa bağlı olarak hız değerleri çizilmiştir. Şekil 4.4d de görüldüğü gibi dirseğin başlangıç ve son kısımlarındaki ayrıklaştırma hataları ihmal edilirse dirsek boyunca serbest dönmeli akış sayısal olarak elde edilmiştir.

Dirsek boyunca eş statik basınç eğrileri Şekil 4.4e de verilmiştir. Beklenildiği gibi küçük yarıçaptan büyük yarıçapa doğru statik basınç artmaktadır. Ayrıca akış alanı boyunca toplam basınç kaybı eğrileri Şekil 4.4f de görülebilir. Sayısal olarak elde edilen farklar ihmal edilebilir mertebededir.

Bu örnek üzerinde tezin bundan sonraki bölümlerinde yapay sıkıştırılabilirlik yönteminin kullanılacak sayısal katsayılarına yol göstermesi amacıyla parametrik bir çalışma yapılmıştır. Daimi haldeki çözüm amaçlandığından bu katsayılar çözümün

daha kısa sürede elde edilebilmesine olanak tanımaktadır. İlk olarak Şekil 4.4g-a da artıkların ağırlıklı ortalamalarının alındığı ve alınmadığı durumları için (her bir zaman adımı boyunca oluşan maksimum basınç farkları) yakınsama eğrileri gösterilmiştir. Sabit tutulan katsayılar aşağıdaki gibidir.

$$CFL = 1 \quad k^{(4)} = 0.01 \quad \kappa = 1$$

Ağırlıklı ortalama alınarak yapılan hesap çözüm esnasında oluşan dalgalanmaları minimize etmektedir.

Daha önce de belirtildiği gibi artıkların ağırlıklı ortalamalarının kapalı yöntemle elde edilmesi neticesinde CFL sayısı limiti 2 katına çıkarılabilmektedir. Şekil 4.4g-b de CFL sayısının 1, 2.5 ve 5 olması durumunda yakınsama eğrileri gösterilmiştir. CFL sayısının artırılması iterasyon sayısını büyük oranda azaltmıştır.

Ayrıca ağırlıklı ortalama ve yapay sönümleme mertebelerini belirleyen κ ve $k^{(4)}$ katsayılarının farklı değerleri için daimi haldeki çözüm elde edildiğinde yakınsama eğrileri çizilmiştir (Şekil 4.4g-c ve 4.4g-d). Bu katsayıların limitler dahilinde alacağı değerlerin çözümün daha kısa sürede elde edilmesinde CFL sayısı kadar etkisi olmadığı görülmüştür.

Sonuç olarak, sayısal uygulama olarak çözülen bu örnekte CFL sayısının yakınsama zamanını büyük oranda etkilediği belirlenmiştir.

4.5.2 Çeşitli Dirsek Uygulamaları

Sayısal olarak uygulanan yöntemin çalışma koşullarını test etmek amacıyla birbirine bitişik iki dirsekten oluşan iki farklı geometri için çözümler elde edilmiştir. Şekil 4.5a da akış yönünün girişte ve çıkışta aynı doğrultuda olduğu geometri için çözüm ağı gösterilmiştir. Dirseklerin yarıçapları oranı ikidir. Elde edilen hız dağılımları ve eş statik basınç eğrileri Şekil 4.5b ve Şekil 4.5c de gösterilmiştir. Beklenildiği gibi dirseğin küçük yarıçaplı kısımlarında akışın hızlandığı görülebilir. Uygulanan sınır koşulları aşağıdaki gibidir.

$$\alpha = 0, P_{01} = 1, p_{\text{çıkış}} = 0.9222$$

Ayrıca eş-toplam basınç kaybı çizgileri Şekil 4.5d ve yakınsama eğrisi Şekil 4.5e de verilmiştir.

Akış yönünün girişte ve çıkışta tamamen farklı doğrultuda olduğu şekilde oluşturulan geometri için çözüm ağı, hız vektörleri ve basınç eğrileri Şekil 4.6a,b,c,d,e de gösterilmiştir. Benzer şekilde akış yönünün girişte ve çıkışta aynı doğrultuda olduğu geometride uygulanan sınır koşulları verilmiştir.

Bölüm 4.5a da sayısal olarak çözülen geometride bulunan optimum katsayılar kullanılarak, serbest dönmeli akış iki geometri için elde edilmiştir.

Sonuç olarak, sayısal olarak iki boyutlu akışı çözen program büyük bir yaklaşıklıkla doğru sonuç vermektedir. Ve aşağıda literatürde deneysel sonuçları mevcut iki boyutlu test geometrileri ile karşılaştırılacaktır.

4.6 Deneysel Sonuçları Mevcut Uygulamalar

4.6.1 Stanitz Dirseği

STANITZ ve diğ. (1953) tarafından katı yüzeyler üzerindeki ayrılmaları minimum yapacak şekilde tasarlanan dikdörtgen kesitli dirsek içindeki akış çözümlenmiştir (MOORE ve MOORE, 1979). Geliştirilen dirsek, içindeki akış iki boyutlu ve viskoz etkilerin minimum olacağı şekilde tasarlanmıştır. Dolayısıyla geliştirilen iki boyutlu sıkıştırılmaz akış programı için iyi bir deneysel test örneği olacaktır.

Kullanılan çözüm ağı ile birlikte dirseğin geometrik boyutları Şekil 4.7a ve 4.7b de gösterilmiştir. Akışa yönünde 62 bölümleme, akışa dik yönde ise 15 bölümleme yapılmıştır. Dirsek çıkış kesitinde izentropik Mach sayısı 0.4 olacak şekilde sınır koşulları verilmiştir.

$$M_{\text{çıkış}} = 0.4 \quad p_{\text{çıkış}} = 0.8956 \quad \alpha = 0 \quad P_{01} = 1$$

Akışın çözümlenmesi neticesinde elde edilen hız vektörleri ve eş-statik basınç eğrileri Şekil 4.7c ve 4.7d de gösterilmiştir. Dirseğin emme ve basma yüzeylerindeki hız değerleri Stanitz tarafından ölçülen değerlerle karşılaştırılmıştır (Şekil 4.7f, Şekil

4.7g). Dirsek emme ve basma yüzeylerindeki ayırıklaştırma hataları hariç elde edilen sonuç oldukça iyidir.

Dirsek giriş kesitindeki sayısal olarak hesaplanan hız dağılımı ($x = 4$ cm) deneysel ölçümlerle karşılaştırılmıştır (Şekil 4.7e). Elde edilen hız dağılımı deneysel sonuçlarla uyum içindedir. Şekil 4.7h de yakınsama eğrisinde kullanılan katsayılar verilmiştir.

Ayrıca Stanitz dirseği ASLAN (1991) tarafından parabolik Navier-Stokes denklemleri kullanılarak sayısal çözümü elde edilmiştir. İki boyutlu akış modeli ile elde edilen sonuçlar daha karmaşık model ile elde edilen çözümle büyük bir uyum içindedir.

4.6.2 Sesaltı Difüzörü

Geliştirilen iki boyutlu program kullanılarak difüzör açısı 12° olan ve sesaltı akışın olduğu ıraksak difüzörde sayısal olarak akış çözümlenmesi yapılmıştır (SEMMES ve diğ., 1988). Katı yüzeye yakın bölgelerde daha sık çözüm ağı kullanılmıştır. Akış yönünde ve akışa dik yönde sırasıyla 38 ve 25 bölümlene yapılmıştır (Şekil 4.8a). Sayısal olarak elde edilen hız vektörleri ve eş-statik basınç çizgileri Şekil 4.8b ve 4.8c de gösterilmiştir. Uygulanan sınır koşulları aşağıda verilmiştir. Girişte toplam basıncın sabit tutulması koşulu yerine mutlak hızın x yönündeki bileşeni sabit verilmiştir.

$$p_{\text{çıkış}} = 0.934 \quad \alpha = 0 \quad V_{\text{giriş}} = 0.6324$$

Difüzör yüzeyinde sayısal olarak elde edilen P/P_0 oranı deneysel sonuçlarla karşılaştırılmıştır (Şekil 4.8f). Deneysel ve sayısal sonuçlar arasındaki %10 luk bir fark görülmüştür. Bu fark çıkış statik basıncının kesit boyunca aynı verilmesinden kaynaklanmıştır. Ayrıca toplam basınç kaybı eğrileri (Şekil 4.8d) ve yakınsama eğrisi (Şekil 4.8g) kullanılan katsayılarla birlikte verilmiştir.

4.6.3 Engel Üzerindeki Sesaltı Akış

NI (1982) tarafından iki boyutlu sıkıştırılmaz akış çözümü için kullanılan geometri çözümlenmiştir. Engel kısmından üst katı yüzeye doğru sıkıştırılmış çözüm ağı kullanılmıştır (Şekil 4.9a) (65x17). Giriş ve çıkış kesitlerinde uygulanan sınır koşulları aşağıdaki gibidir.

$$p_{\text{çıkış}} = 0.84301 \quad \alpha = 0 \quad V_{\text{giriş}} = 0.56032$$

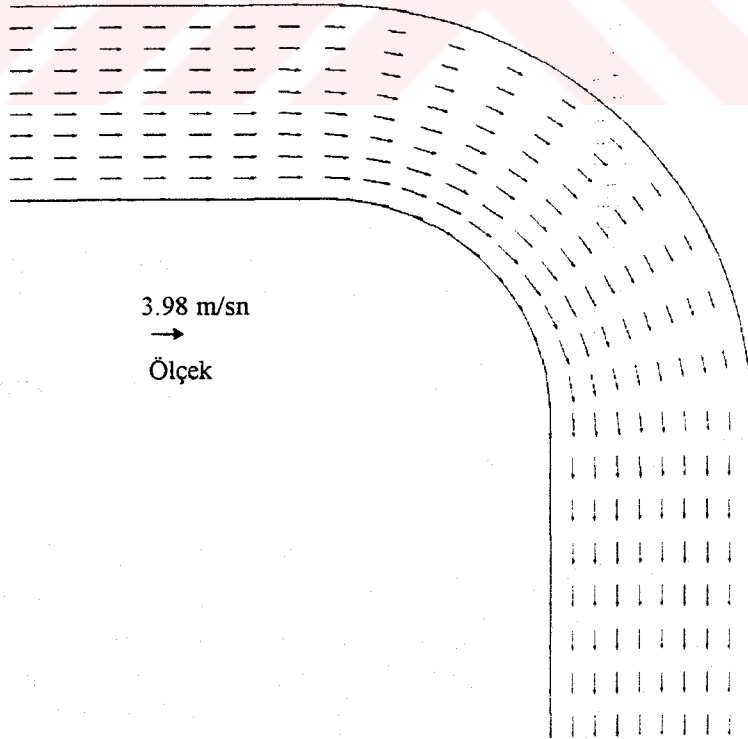
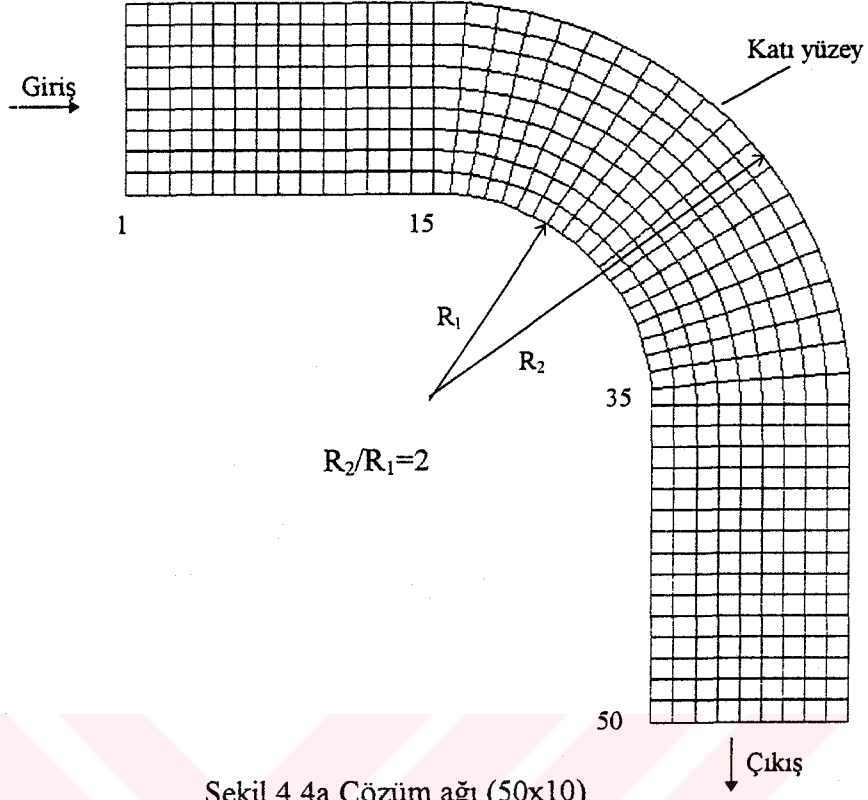
Elde edilen hız vektörleri ve eş-statik basınç eğrileri Şekil 4.9b ve Şekil 4.9c de gösterilmiştir. Şekil 4.9d verilen toplam basınç kaybı konturları engel üzerinde ihmal edilebilir mertebededir. NI tarafından elde edilen ve izentropik eş mach sayılarını gösteren sonuçlar (Şekil 4.9f), sayısal olarak elde edilen sonuçlarla (Şekil 4.9e ve Şekil 4.9g) benzer karakterdedir. NI engeli etrafındaki akışa ait hesaplanan sayısal sonuçlar ile NI tarafından elde edilen sayısal sonuçlar arasındaki fark, problemin NI tarafından bir dış akış problemi (üst yüzey katı duvar değil) olarak ele almasından kaynaklanmıştır. Elde edilen sayısal sonuçlar bu örnekte sıkıştırılabilirlik etkisinin ihmal edilebilir mertebede olduğunu göstermiştir (CHOI ve MERKLE, 1985). Ayrıca elde edilen yakınsama eğrisi Şekil 4.9h da verilmiştir.

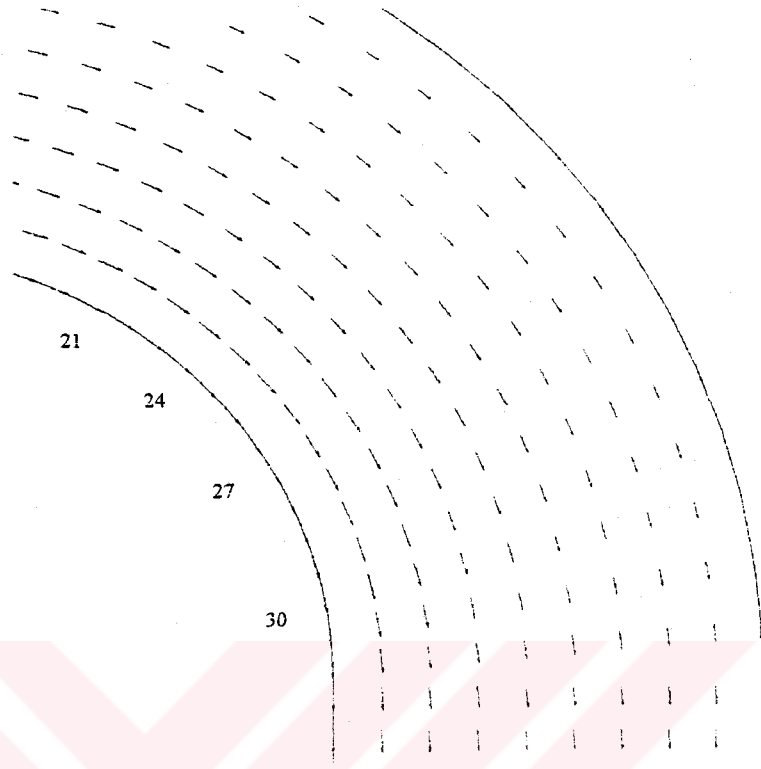
4.7 Sonuç

Sonuç olarak, deneysel sonuçları mevcut yukarıdaki örneklerin sayısal olarak geliştirilen iki boyutlu sıkıştırılmaz akış programı kullanılarak elde edilen çözümleri oldukça iyi neticeler vermiştir. Bu çalışmada pompa çarkı içindeki akışın sayısal olarak çözümü amaçlandığından sıkıştırılmaz akış çözümünde kullanılan yapay sıkıştırılabilirlik tekniği kolaylıkla diğer akış modellerine uygulanabilir.

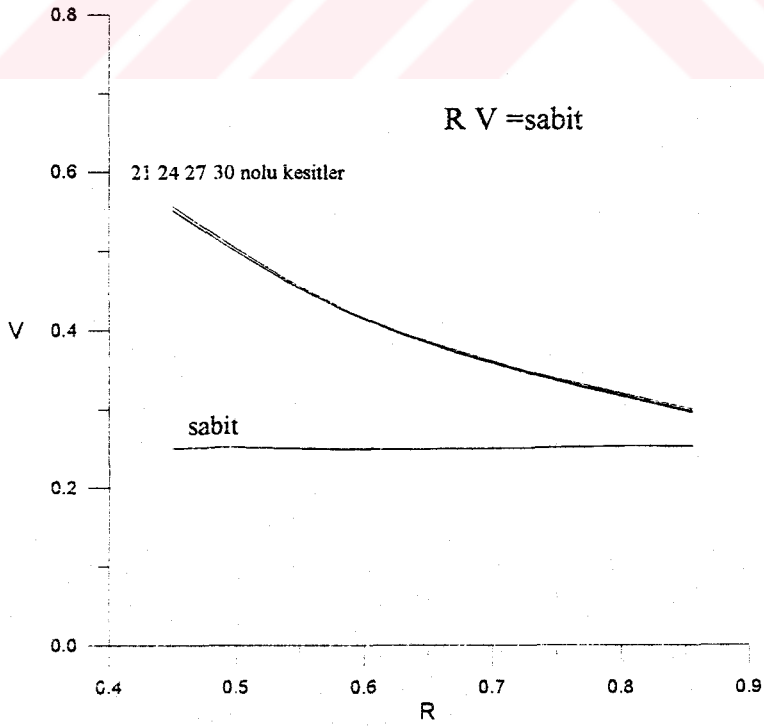
Bölüm 2 de bahsedilen basınca dayalı metod ve basınç düzeltme metodlarında süreklilik ve momentum denklemleri ayrı ayrı çözümlenmektedir. Bu yakınsama zamanının artmasına sebep olur. Yapay sıkıştırılabilirlik tekniğinde süreklilik ve momentum denklemleri aynı anda çözümlendiğinden yakınsama zamanı büyük oranda azalmaktadır.

90⁰ lik DİRSEK

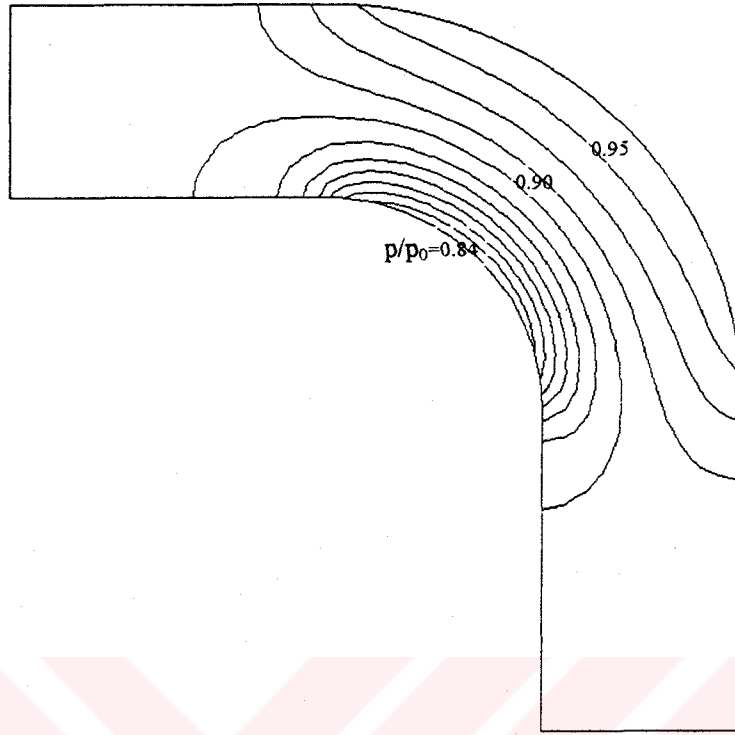




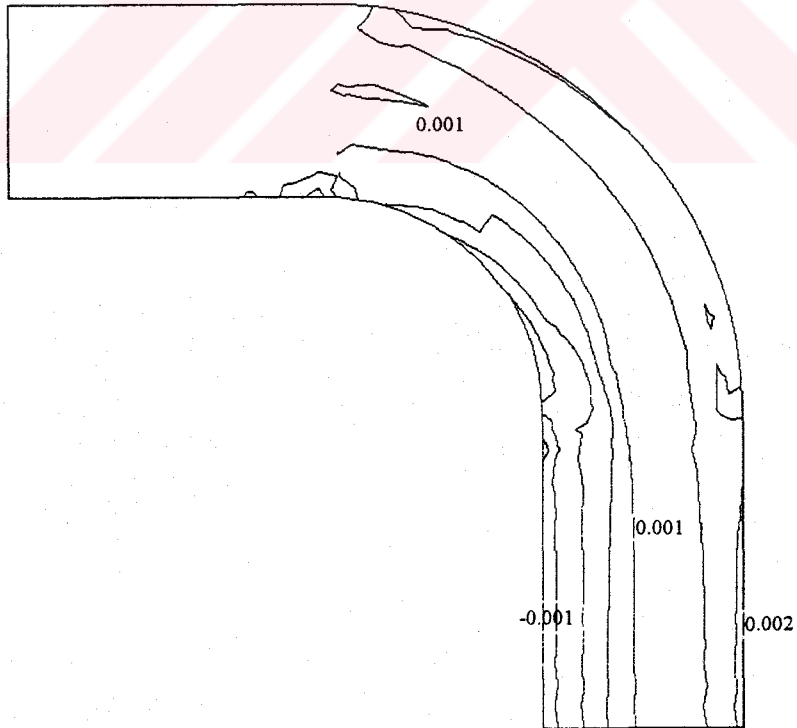
Şekil 4.4c Serbest dönmeli akışın olduğu bölgedeki hız vektörleri



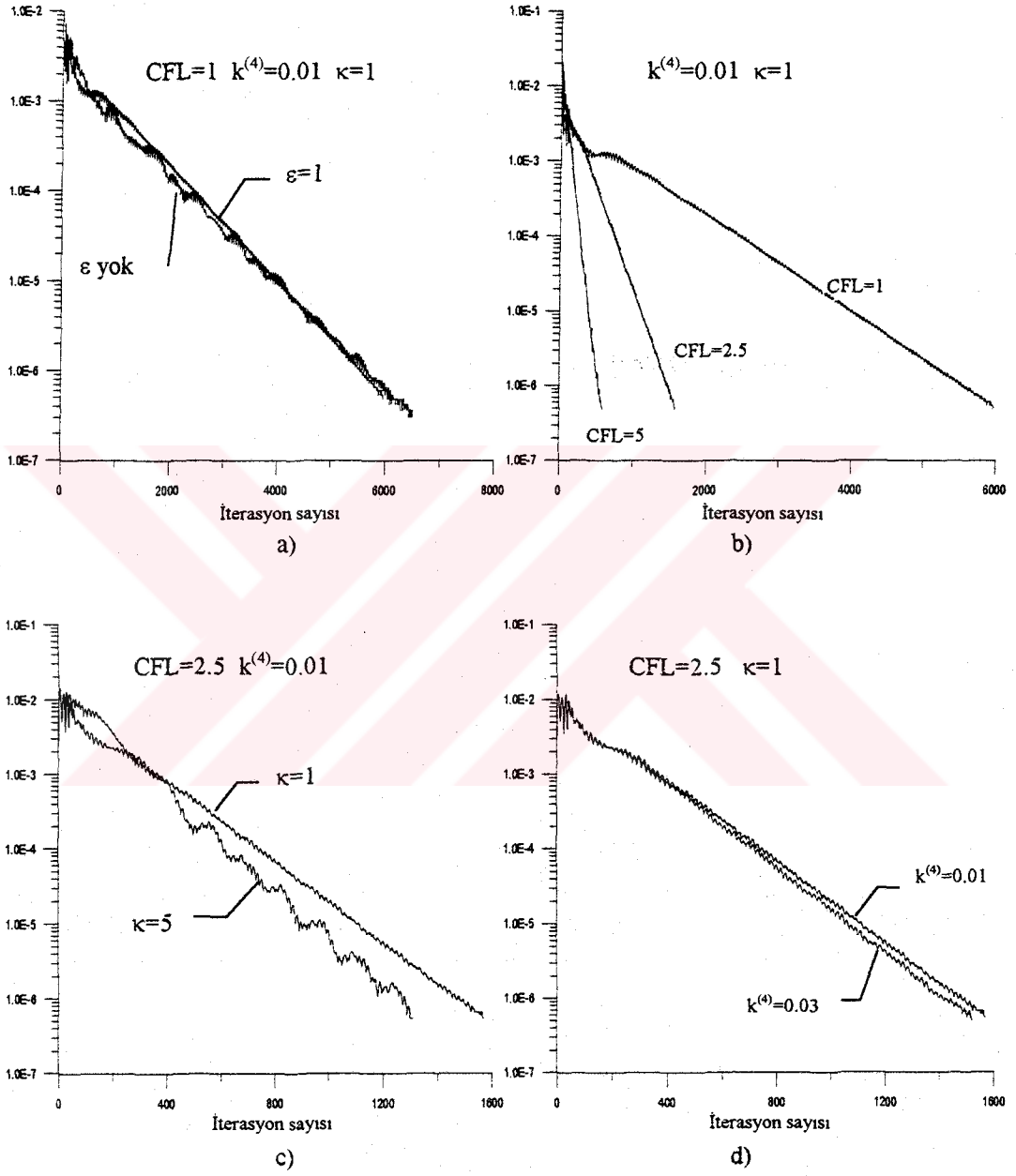
Şekil 4.4d Dirsek boyunca serbest dönmeli akışın değişik kesitlerdeki değerleri



Şekil 4.4e Eş statik basınç eğrileri ($p_0=100\ 000\ \text{Pa}$)

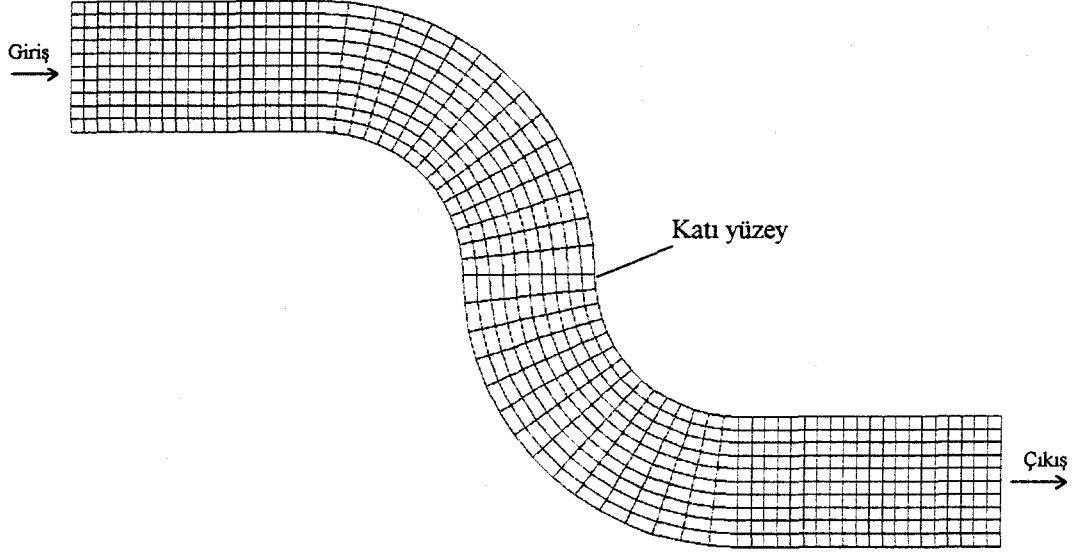


Şekil 4.4f Toplam basınç kaybı eğrileri ($P_{01}-P_0$)

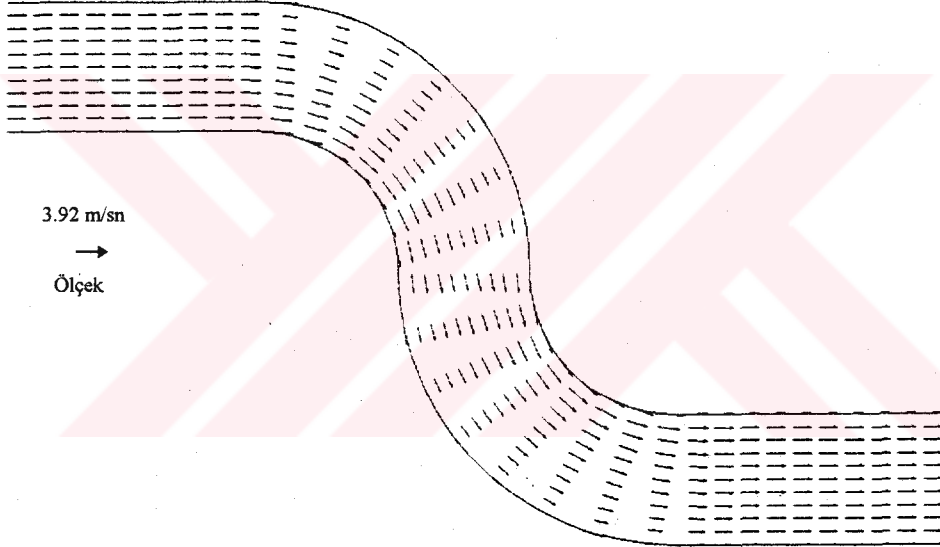


Şekil 4.4g Yakınsama eğrileri (Düşey eksen basınç artığını göstermektedir)

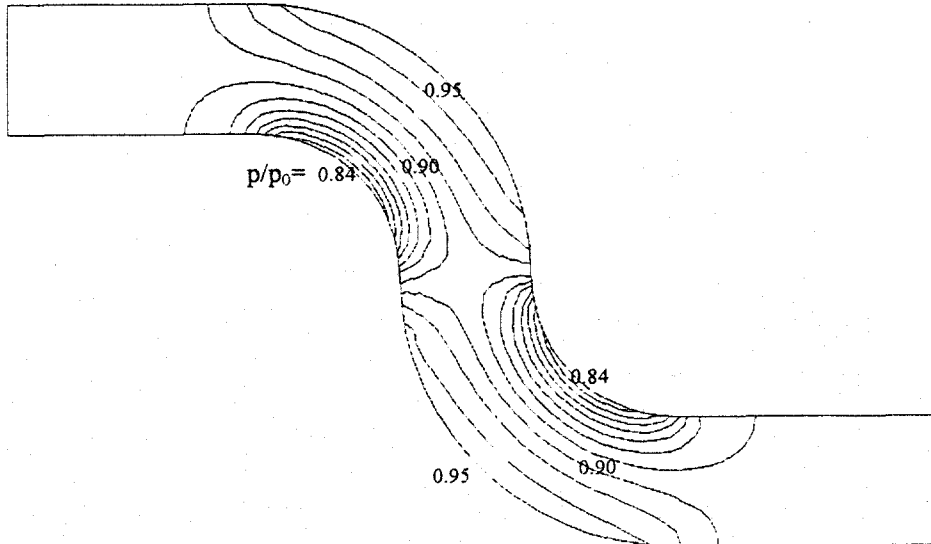
S DİRSEĞİ



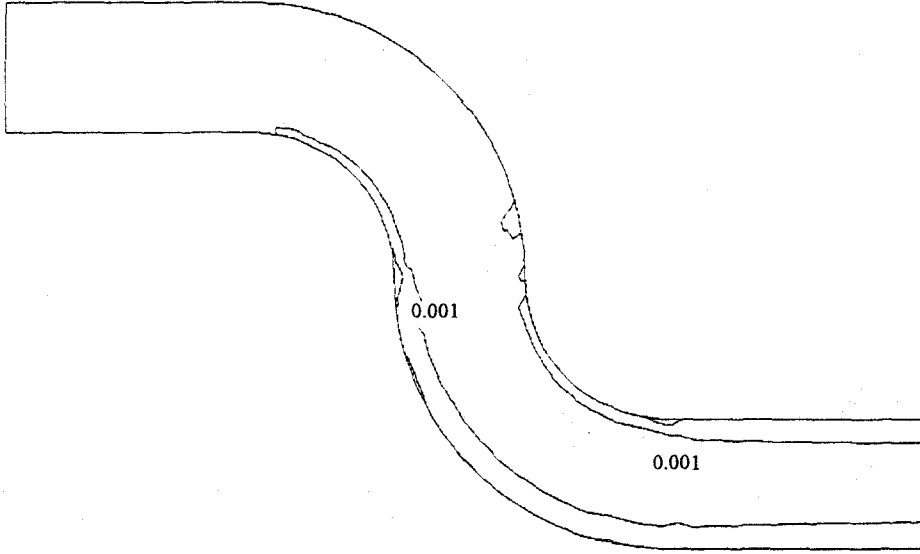
Şekil 4.5a Çözüm ağı (70x11)



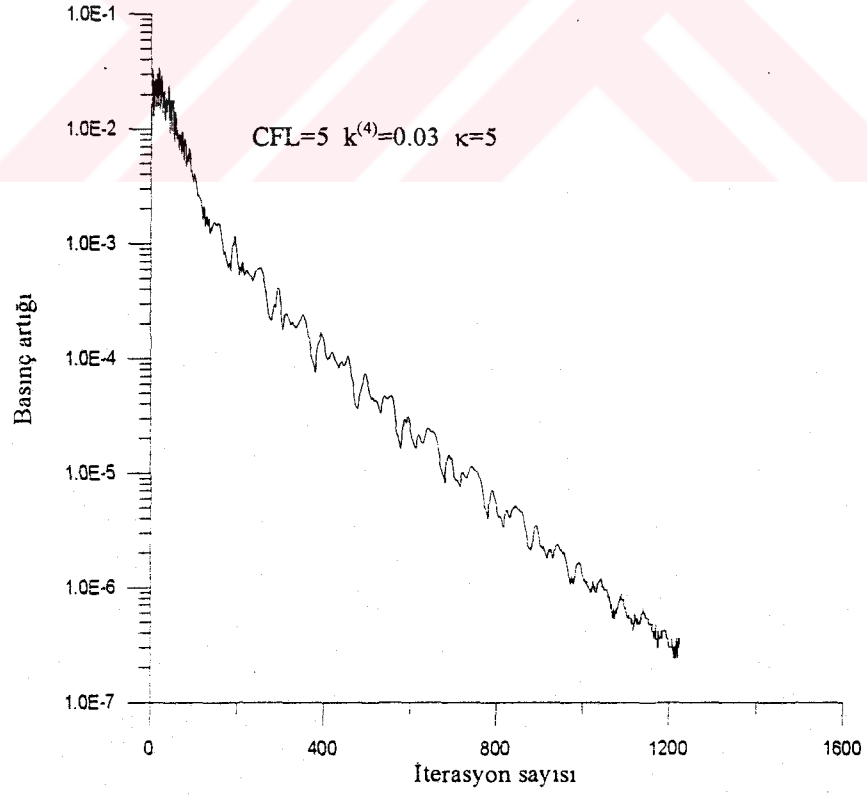
Şekil 4.5b Hız vektörleri (2 noktada bir)



Şekil 4.5c Eş statik basınç eğrileri ($p_0=100000$ Pa)

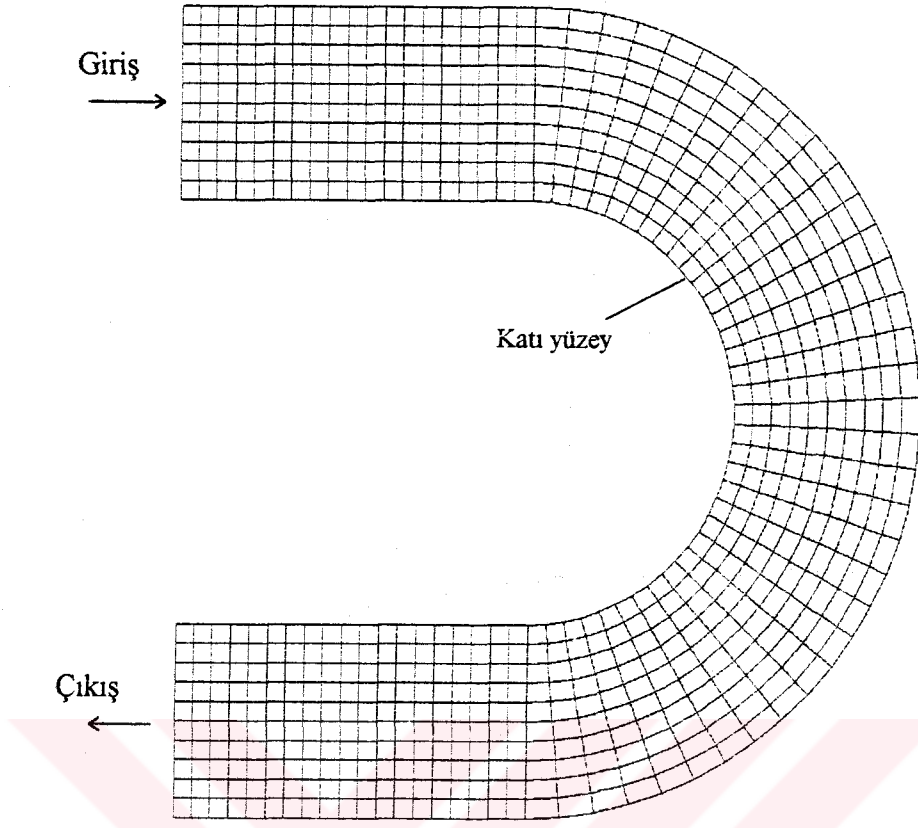


Şekil 4.5d Toplam basınç kaybı eğrileri ($P_{01}-P_0$)

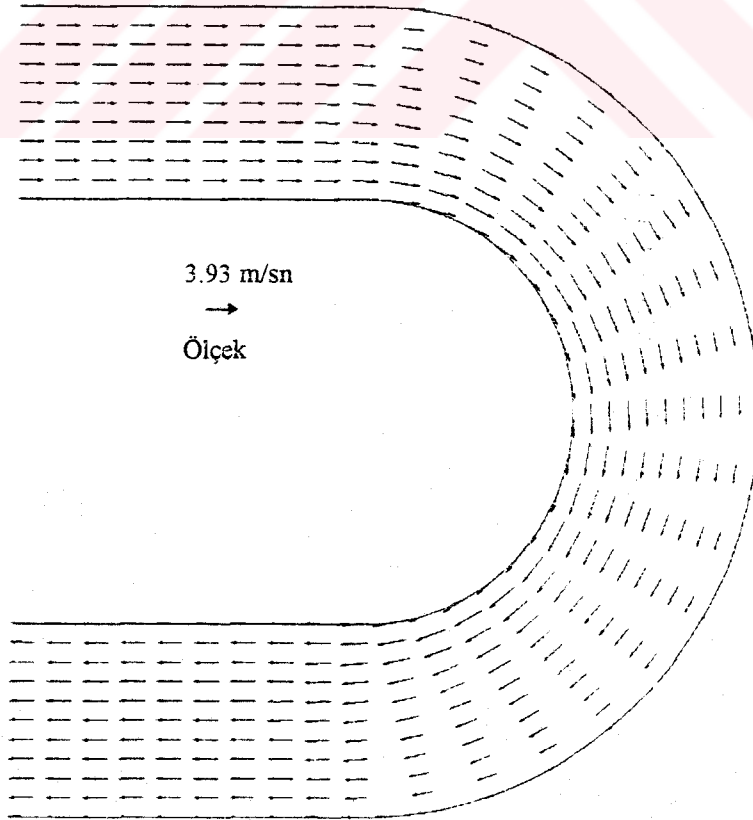


Şekil 4.5e Yakınsama eğrisi

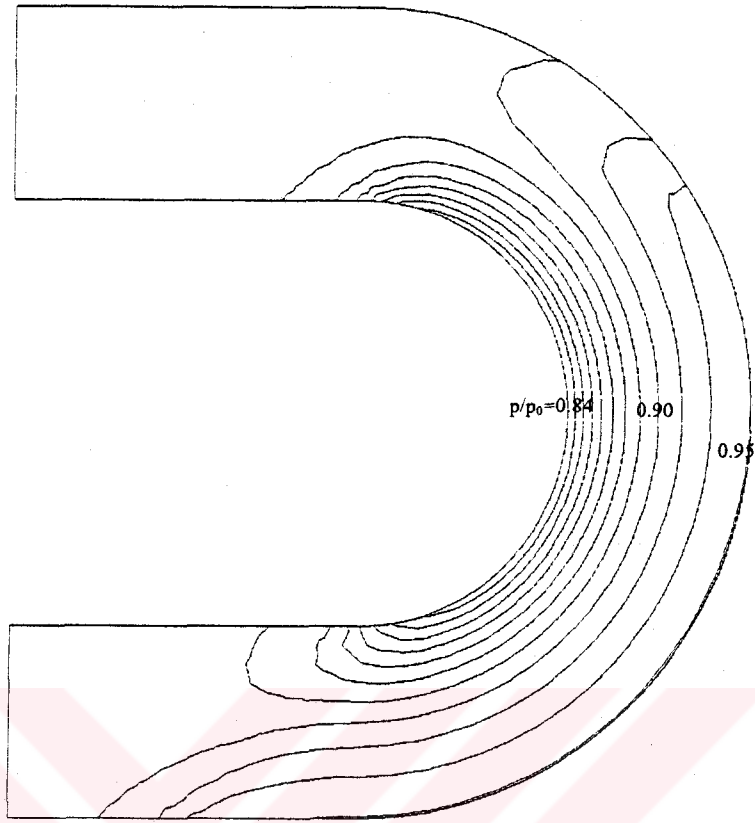
180⁰ lik DİRSEK



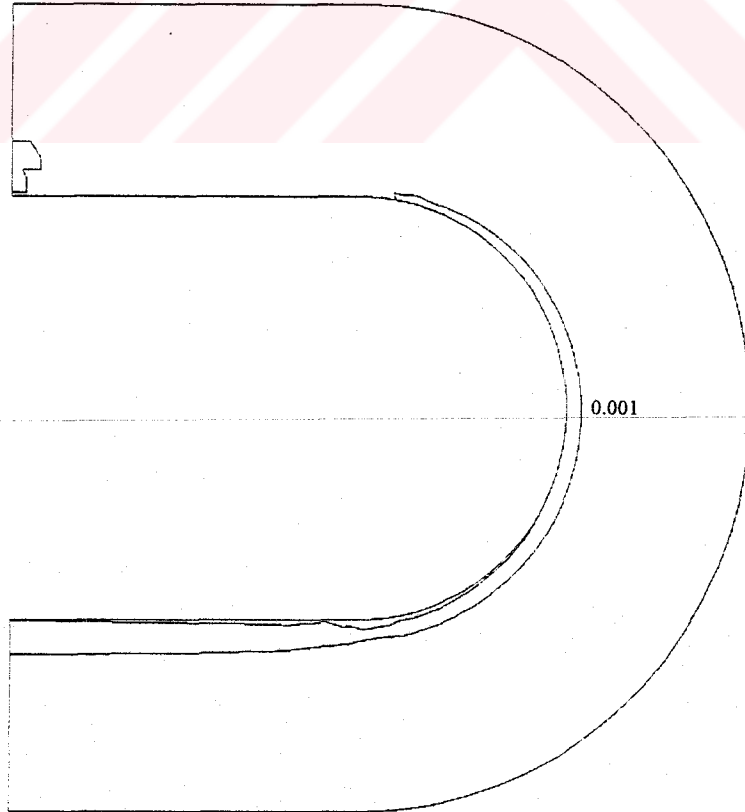
Şekil 4.6a Çözüm ağı (75x11)



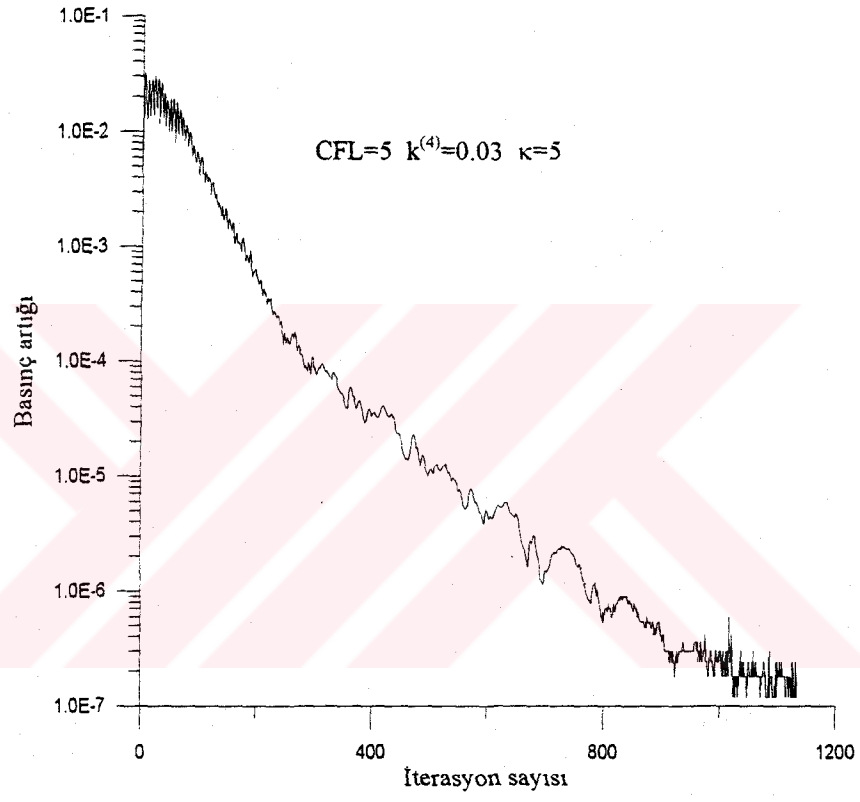
Şekil 4.6b Hız vektörleri (2 noktada bir)



Şekil 4.6c Eş statik basınç eğrileri ($p_0=100\ 000\ \text{Pa}$)

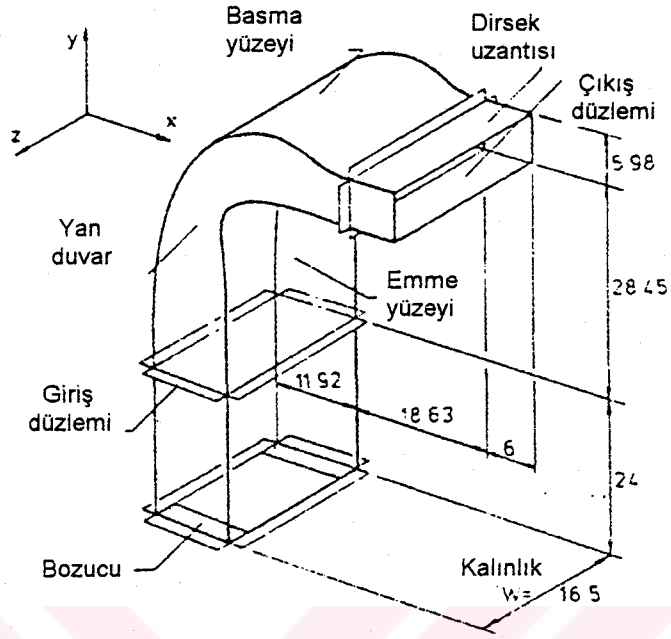


Şekil 4.6d Toplam basınç kaybı eğrileri ($P_{01}-P_0$)

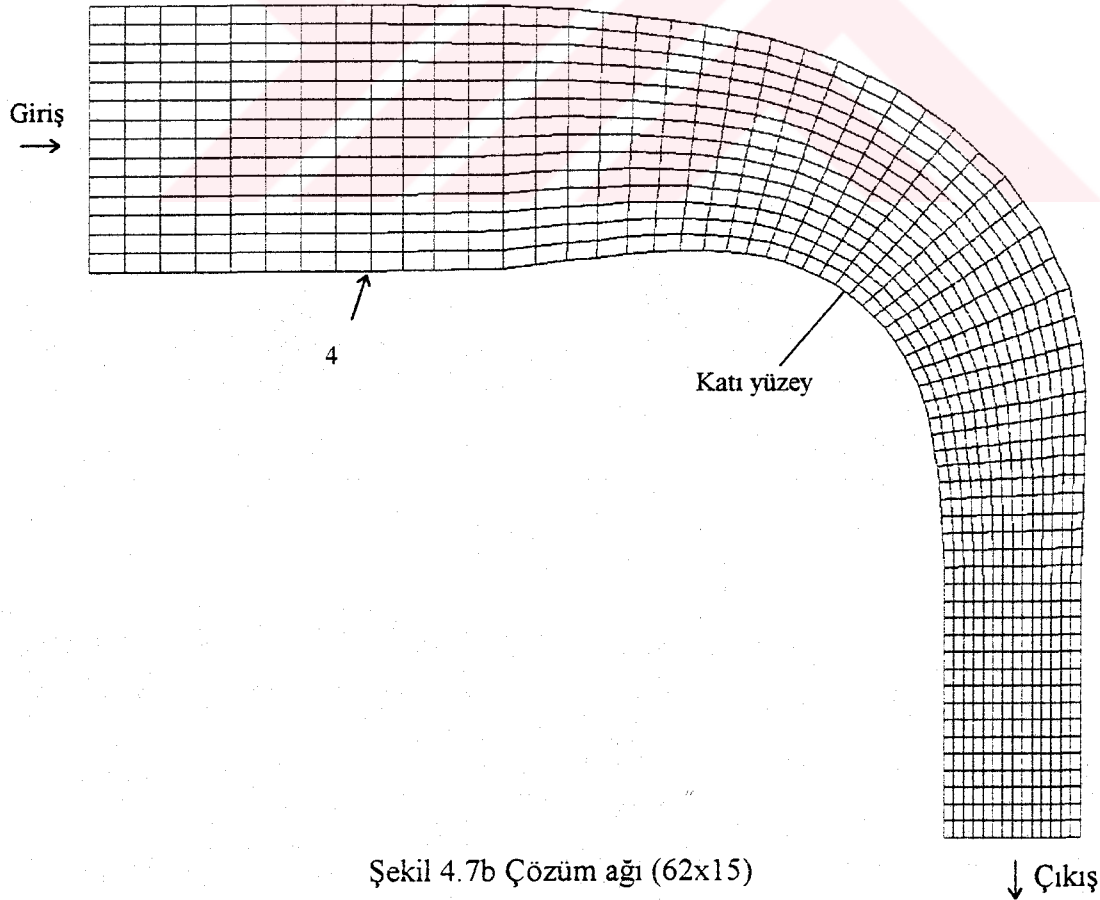


Şekil 4.6e Yakınsama eğrisi

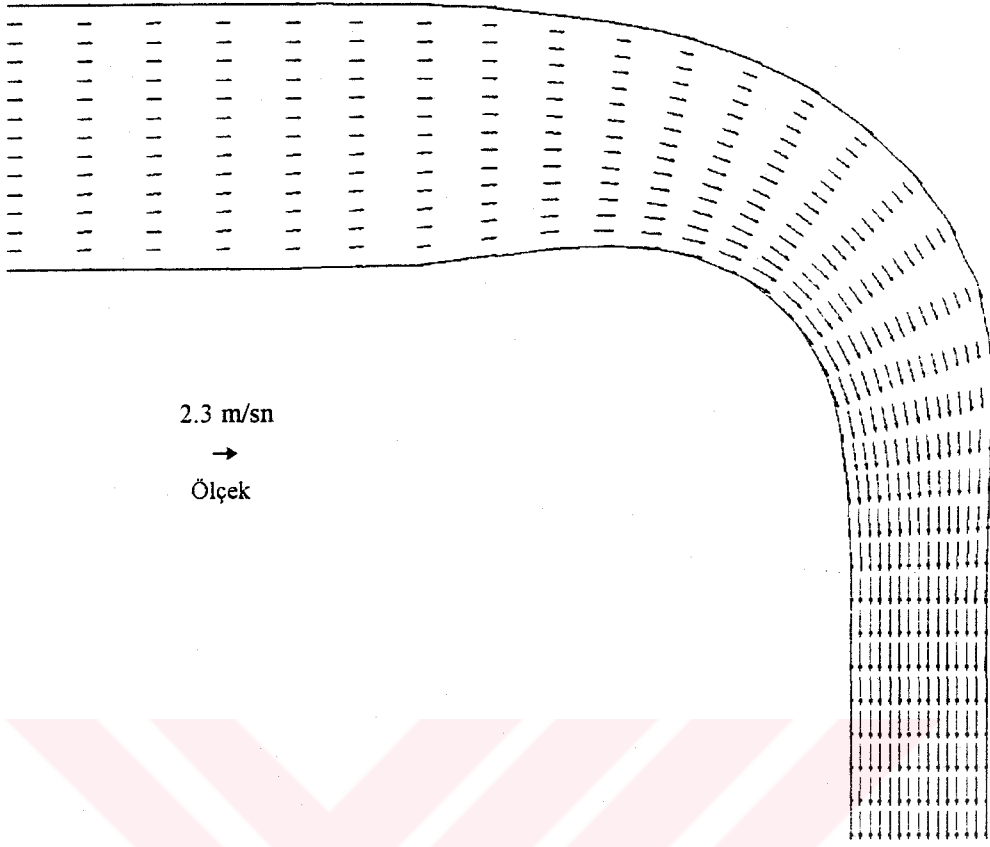
STANITZ DİRSEĞİ



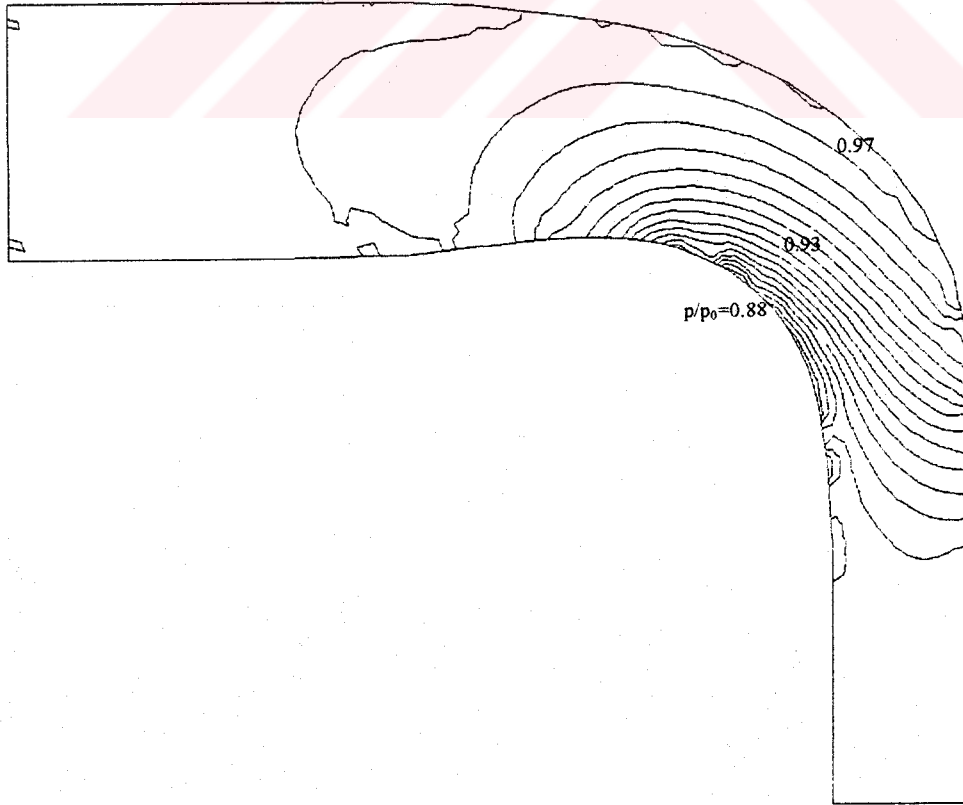
Şekil 4.7a Stanitz dirseği geometrik boyutları (MOORE ve MOORE, 1979)



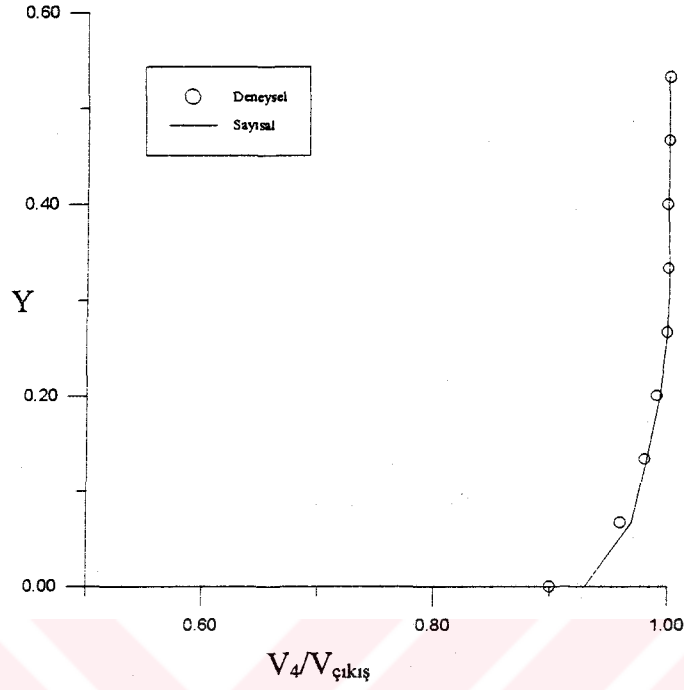
Şekil 4.7b Çözüm ağı (62x15)



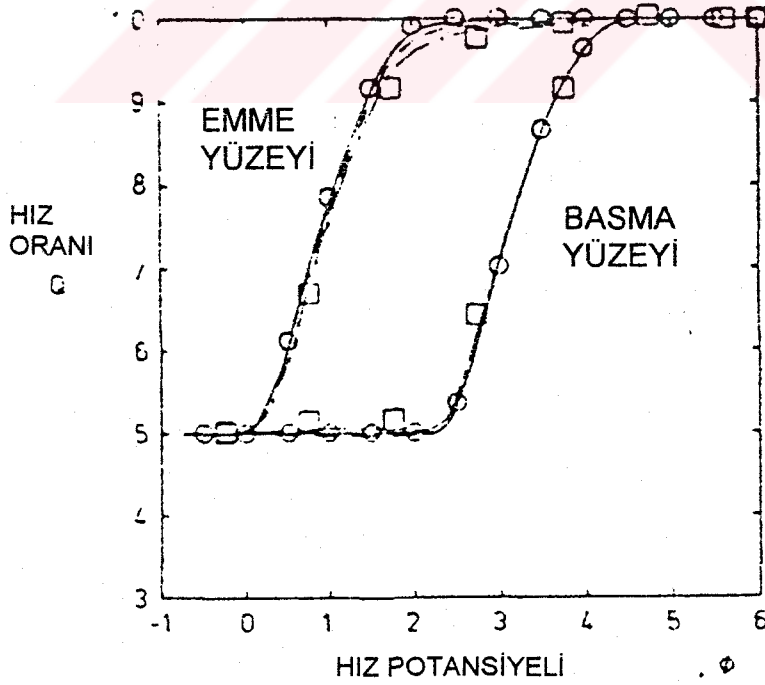
Şekil 4.7c Hız vektörleri (2 noktada bir)



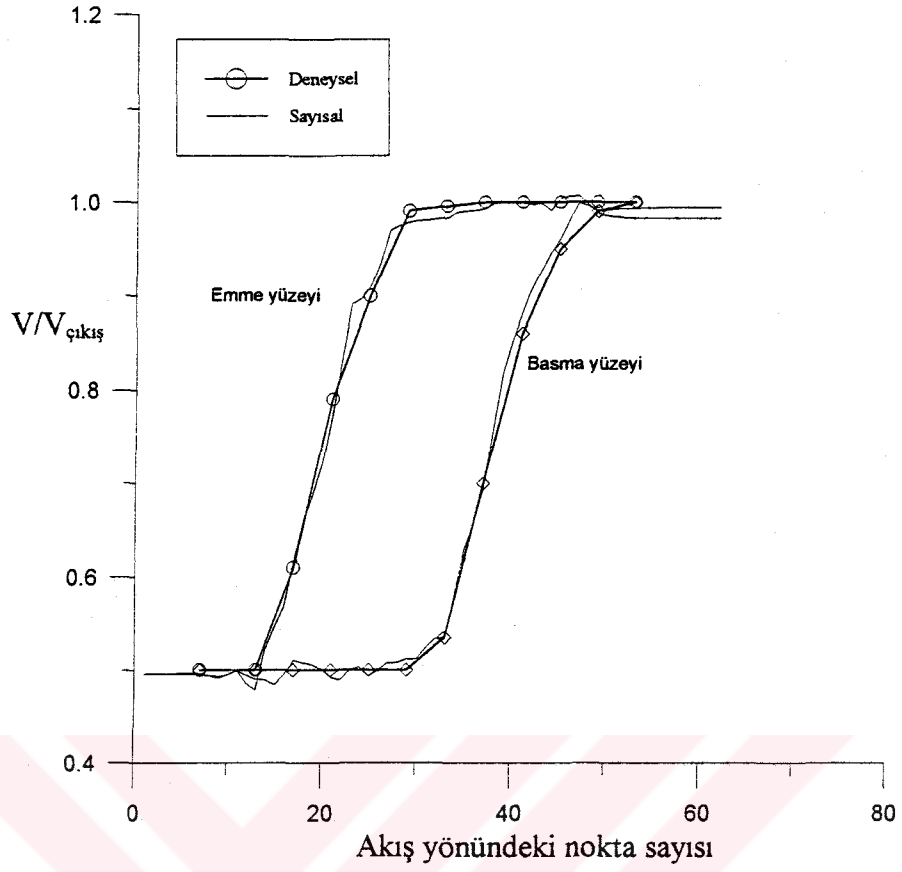
Şekil 4.7d Eş statik basınç eğrileri (p/p_0)



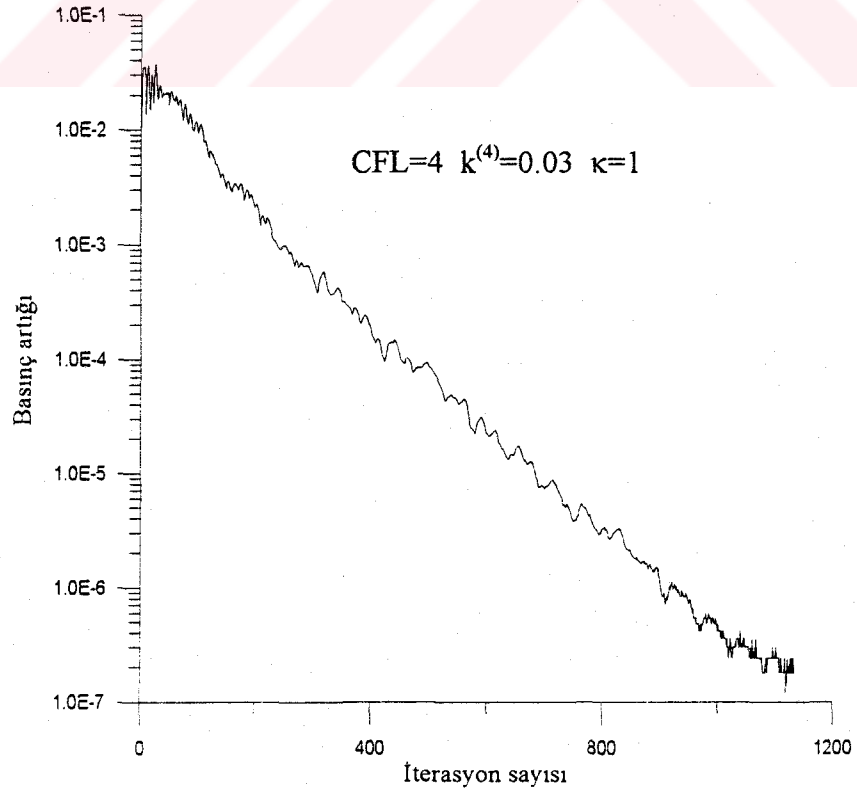
Şekil 4.7e Giriş kesitindeki (4 nolu kesit) hız profilinin deneysel (STANITZ, 1953) ve sayısal sonuçlarla karşılaştırılması



Şekil 4.7f MOORE (1979) dan alınan deneysel sonuçlar

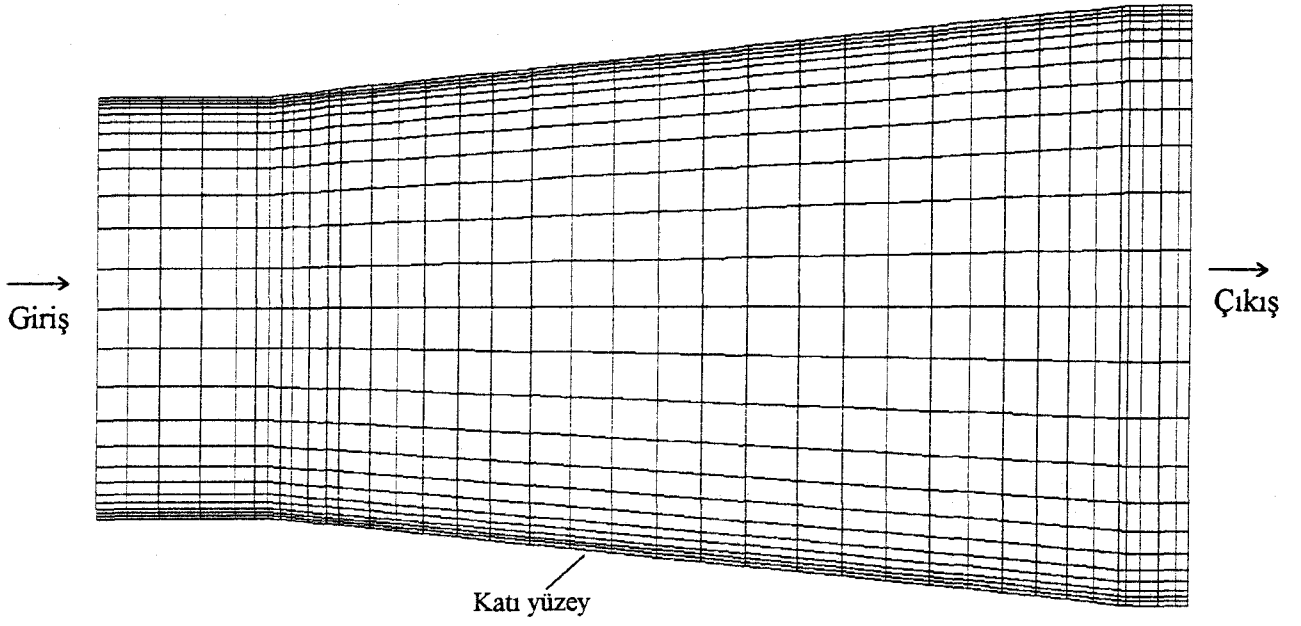


Şekil 4.7g Stanitz ölçümleri ile sayısal olarak elde edilen yüzey hız dağılımlarının karşılaştırılması

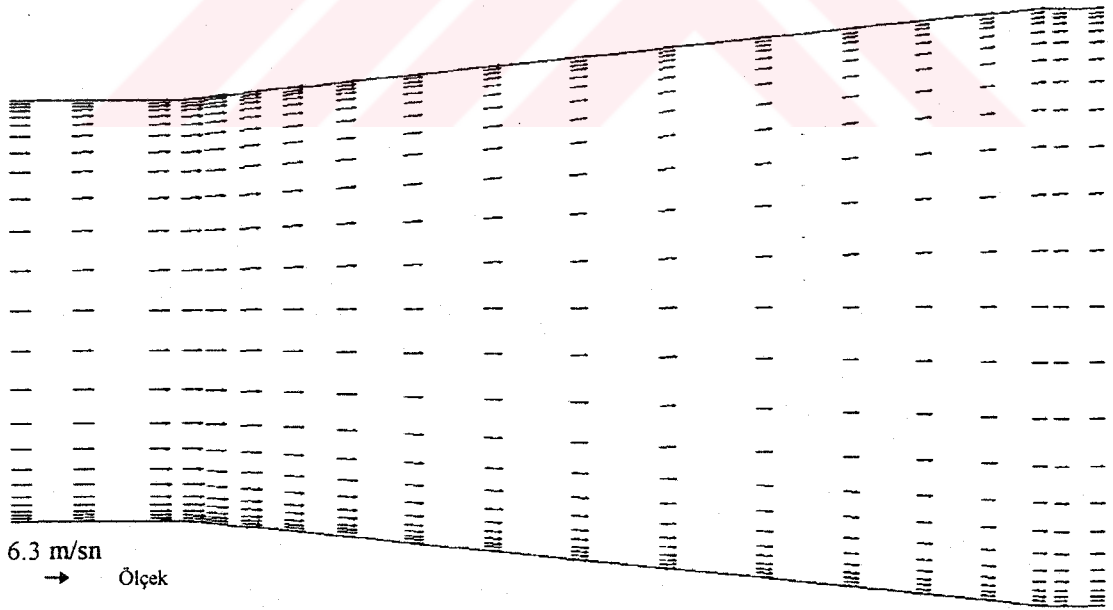


Şekil 4.7h Yakınsama eğrisi

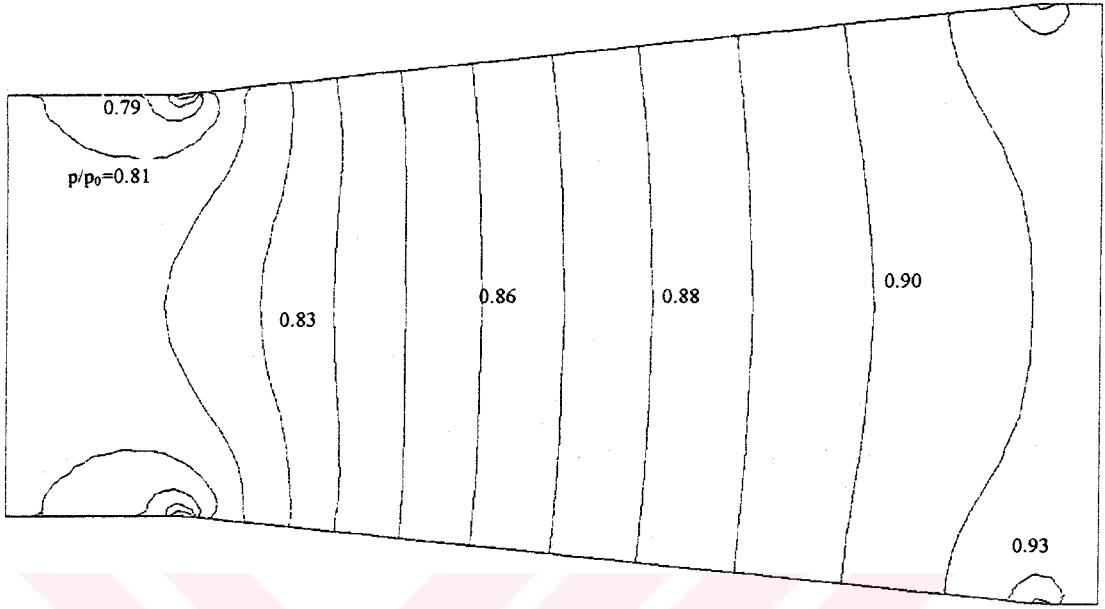
SESALTI DİFÜZÖR



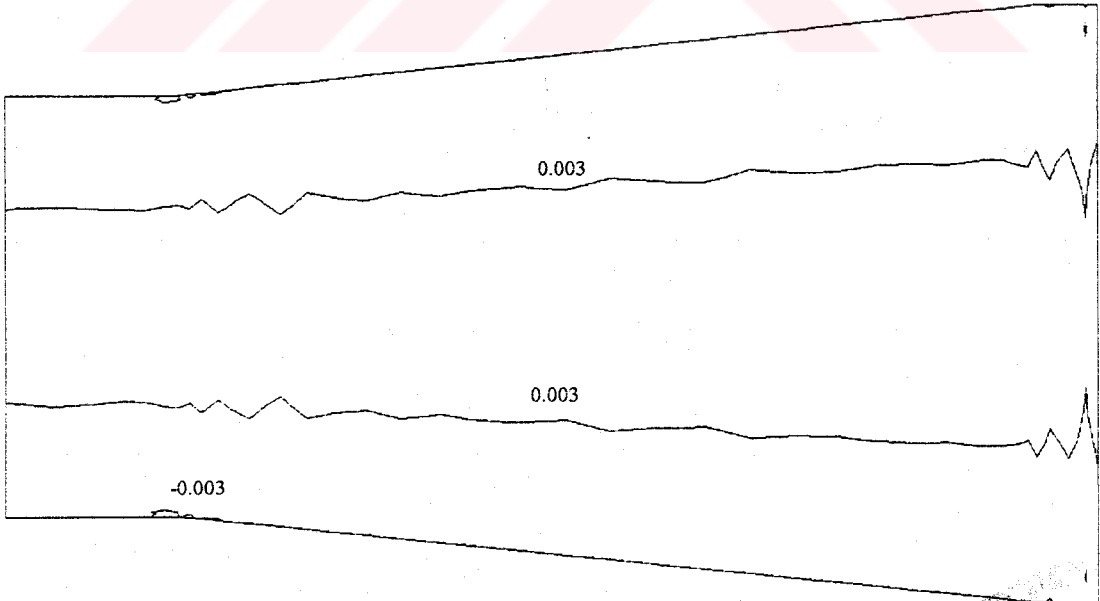
Şekil 4.8a Çözüm ağı (38x25)



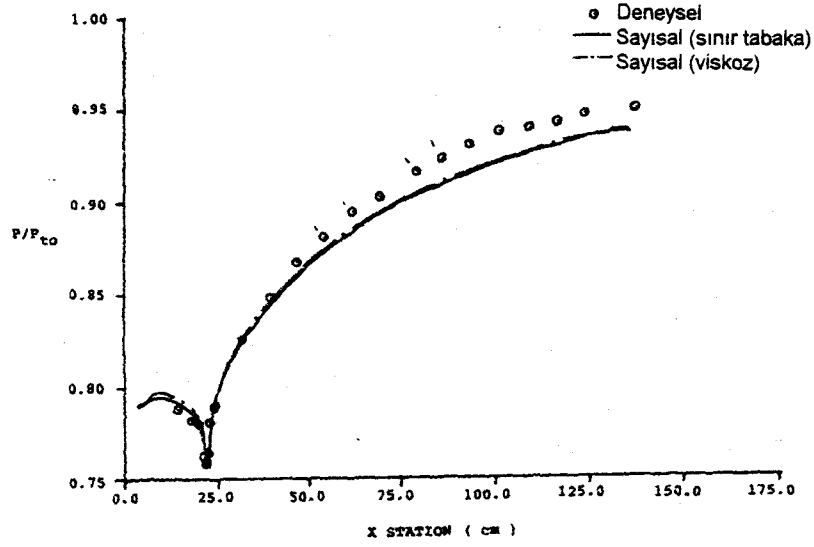
Şekil 4.8b Hız vektörleri (2 noktada bir)



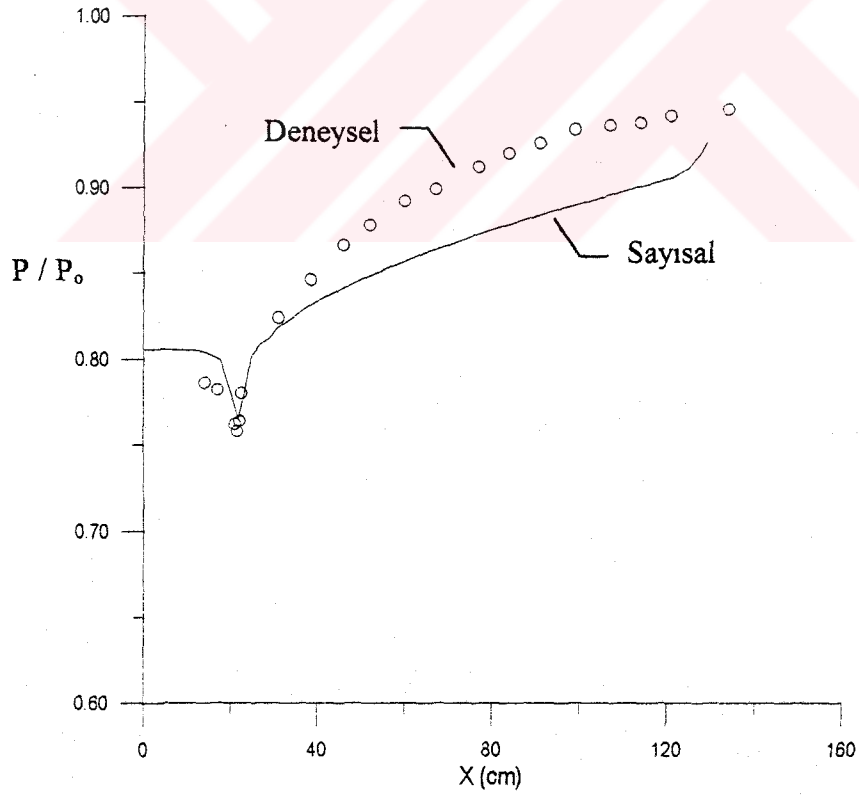
Şekil 4.8c Eş statik basınç eğrileri (p/p_0)



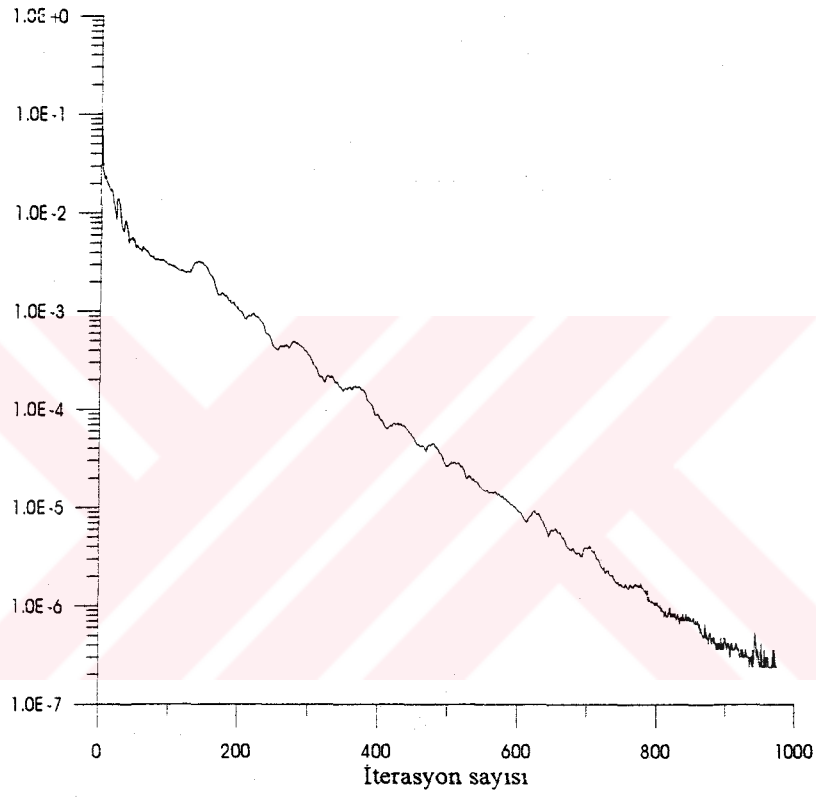
Şekil 4.8d Toplam basınç kaybı eğrileri ($P_{01}-P_0$)



Şekil 4.8e SEMMES ve diğ. (1988) den alınan deneysel sonuçlar

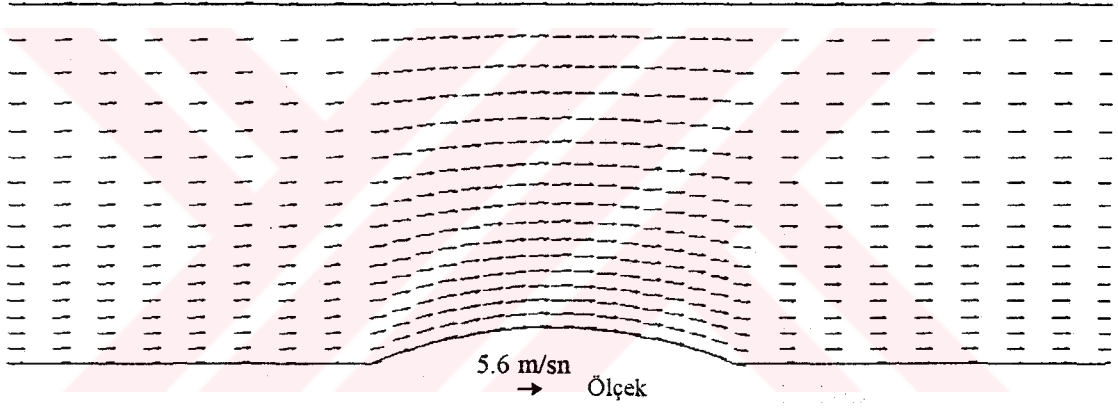
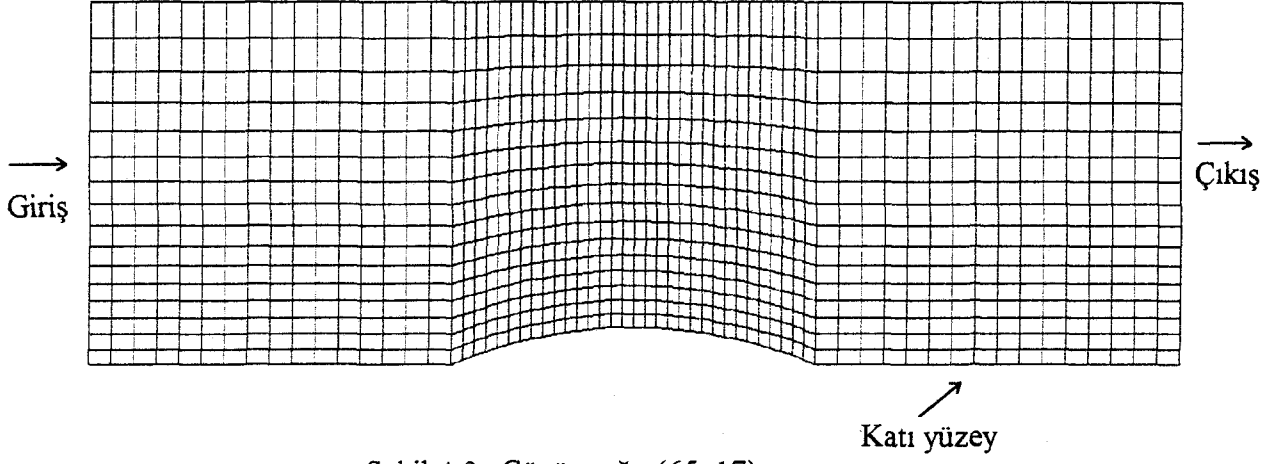


Şekil 4.8f Yüzey üzerindeki sayısal olarak hesaplanan ve deneysel değerlerin karşılaştırılması

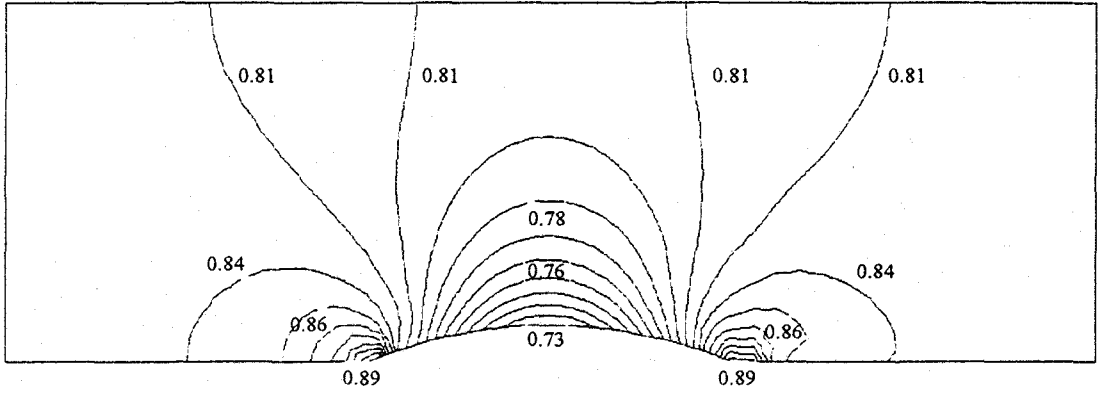


Şekil 4.8g Yakınsama eğrisi

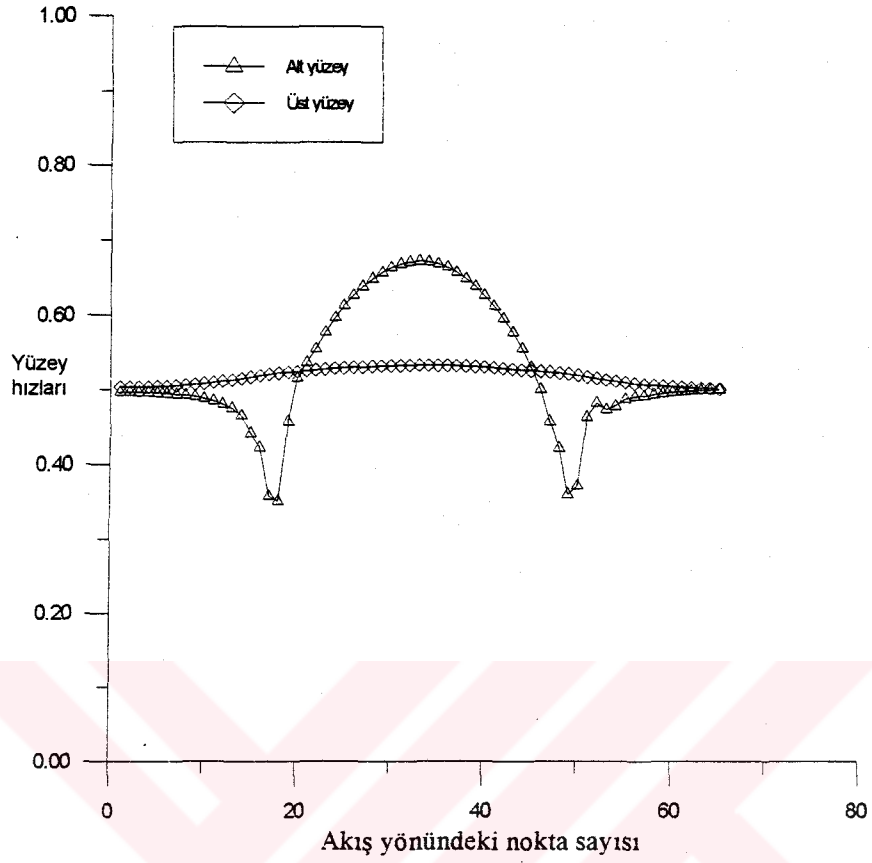
ENGEL ÜZERİNDEKİ AKIŞ



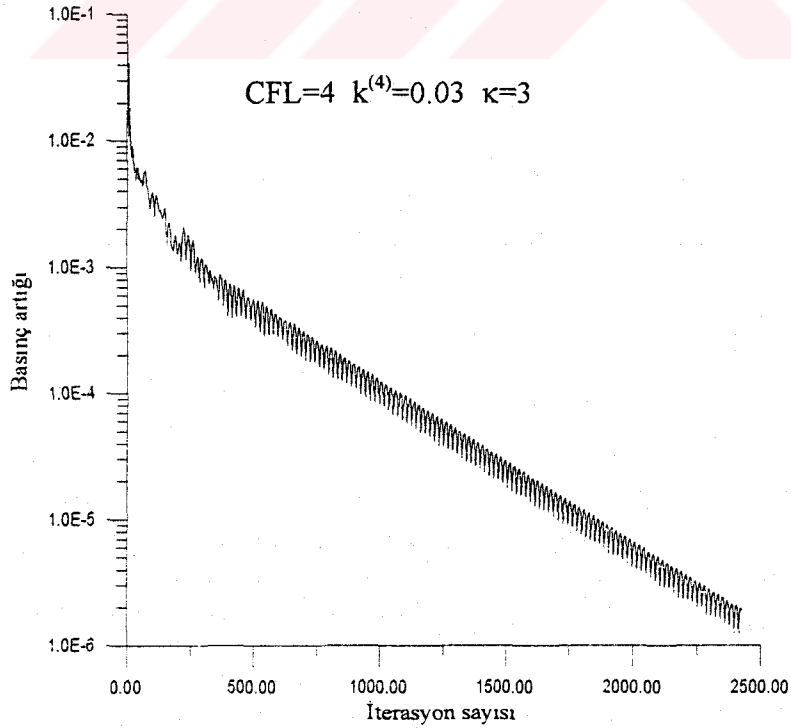
Şekil 4.9b Hız vektörleri (2 noktada bir)



Şekil 4.9c Eş statik basınç eğrileri



Şekil 4.9g Sayısal olarak elde edilen alt ve üst yüzey hız değerleri



Şekil 4.9h Yakınsama eğrisi

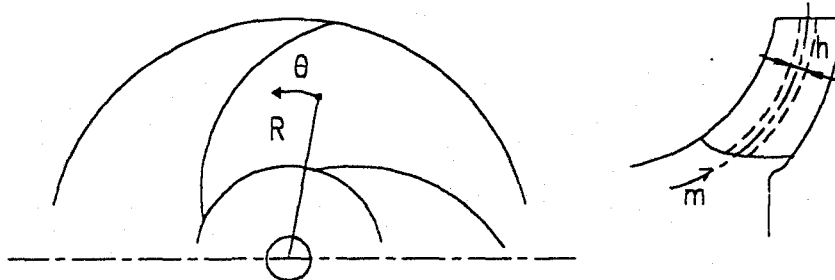
BÖLÜM 5

SANKİ ÜÇ BOYUTLU SIKIŞTIRILAMAZ AKIŞ

Bu bölümde radyal pompa kanatları arasındaki akışı çözümlemek amaçlanmıştır. Elde edilen çözüm kullanılarak çark performansı sayısal olarak elde edilecektir.

Pompa çarkı kanatları arasındaki akış, iki boyutlu yaklaşım ile, değişik araştırmacılar tarafından çözümlenmiştir. Bu çalışmaların ilki WU (1951) tarafından yapılmıştır. Bu yaklaşımda iki farklı akım yüzeyinde çözüm yapılır. Kanatlar arası akım yüzeyi ve meridyenel akım yüzeyi olarak tanımlanan bu yüzeyler eksenel simetriktir. Teorik olarak bu akım yüzeyleri sadece sıkıştırılamaz ve radyal çıkışlı akış koşullarında oluşur (VAVRA, 1960).

Bu bölümde, iki boyutlu yaklaşımdan farklı olarak kanatlar arası akım yüzeyinde meridyenel akım tübü genişliği hesaba katılarak elde edilen sanki üç boyutlu akım yüzeyinde çözüm yapılmaktadır. Hesaplanacak fiziksel büyüklükler bağıl hızın meridyenel (W_m) ve teğetsel bileşenleri (W_θ) ve basınçtır (p). Denklemler çark eksenine ile birlikte dönen eğrisel koordinat sisteminde (m, θ) yazılmışlardır (Şekil 5.1). Bu koordinat sistemi kanat geometrisinin daha kolay tanımlanmasına imkan verir (HOLMES, 1989).



Şekil 5.1 Kanat geometrisi

Bu bölümde zamana bağlı sanki üç boyutlu sıkıştırılmaz Euler denklemleri çözülmektedir. Yoğunluk sabit olduğundan ve zaman adımı boyunca daimi haldeki çözüm amaçlandığından yapay sıkıştırılabilirlik tekniği kullanılmıştır. Denklemlerin hiperbolik karakterini korumak ve zamana bağlı metodun kullanılmasına imkan vermesi açısından süreklilik denklemine zamana bağlı yapay basınç terimi eklenmiştir. Denklemler en genel halde aşağıdaki gibi gösterilebilir (VAN DEN BRAEMBUSSCHE, 1996).

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{f}(\sigma)}{\partial m} + \frac{\partial \bar{g}(\sigma)}{\partial R\theta} = \bar{b}(\sigma) \quad (5.1)$$

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} (p/\rho_0)Rh \\ W_m Rh \\ W_\theta Rh \end{bmatrix} \quad \bar{f} = \begin{bmatrix} c^2 W_m Rh \\ (W_m^2 + p/\rho_0)Rh \\ W_m W_\theta Rh \end{bmatrix} \quad \bar{g} = \begin{bmatrix} c^2 W_\theta h \\ W_m W_\theta h \\ (W_\theta^2 + p/\rho_0)h \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ p/\rho_0 d(Rh)/dm + h(W_\theta + \omega R)^2 dR/dm \\ -hW_m(W_\theta + 2\omega R)dR/dm \end{bmatrix}$$

Bu denklemlerde kullanılan büyüklükler aşağıda gösterildiği şekilde, karakteristik uzunluk ($\bar{L}_0$) ve giriş koşulları ($\bar{P}_0, \bar{\rho}_0$) ile boyutsuzlaştırılır. Üstü çizgili değerler boyutlu büyüklükleri göstermektedir.

$$p = \frac{\bar{p}}{\bar{p}_0} \quad m = \frac{\bar{m}}{\bar{L}_0} \quad R = \frac{\bar{R}}{\bar{L}_0} \quad W_{m,\theta} = \frac{\bar{W}_{m,\theta}}{\sqrt{\bar{p}_0/\bar{\rho}_0}} \quad (5.2)$$

$$t = \frac{\bar{t}}{\bar{L}} \sqrt{\bar{p}_0/\bar{\rho}_0} \quad \omega R = \frac{\bar{\omega}\bar{R}}{\sqrt{\bar{p}_0/\bar{\rho}_0}} \quad \rho_0 = \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_0}$$

Bu denklemlerin çıkarılışı EK-B de gösterilmiştir.

5.1 Denklemlerin Ayırıştırılması

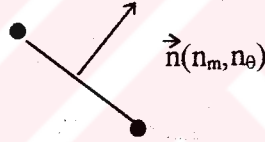
Sanki üç boyutlu zamana bağlı Euler denklemlerinin daimi haldeki çözümünün elde edilebilmesi için zaman ve uzay boyutunda ayrı ayrı ayırıştırma yapılır.

Uzay boyutunda ayırıştırma sonlu hacimler tekniği kullanılarak yapılmıştır. Bu teknikte çözüm bölgesi sonlu elemanlara bölünür ve tanımlanan kontrol bölgelerinin sınırları boyunca akı vektörlerinin korunumu sağlanır (AGARD AG-325, 1994). Dört elemandan oluşan kontrol hacminin yüzeyleri boyunca (5.1) denklemi integre edilirse aşağıdaki hale gelir.

$$\iint_s \frac{\partial f(\sigma)}{\partial m} ds + \iint_s \frac{\partial g(\sigma)}{\partial \theta} ds = \iiint_s \left[-\frac{\partial \sigma}{\partial t} + b \right] ds = 0 \quad (5.3)$$

$$ds = dm R d\theta$$

Alan elemanın yüzeyleri boyunca tanımlanan normal kullanılarak,

$$\vec{n} = n_m \vec{i}_m + n_\theta \vec{i}_\theta$$


Gauss diverjans teoremi ile yüzey integralleri eğrisel integrallere dönüştürülür.

$$\oint \vec{f} \cdot \vec{n} d\theta + \oint \vec{g} \cdot \vec{n} dr = \iint_s \left[-\frac{\partial \sigma}{\partial t} + b \right] ds \quad (5.4)$$

Kontrol hacimleri yaklaşık olarak düzgün elemanlardan oluştuğu için eğrisel integraller, herbir kontrol hacminin kenarları boyunca hesaplanan integrallerin toplamı olarak düşünülebilir.

Ayrıca yüzeyler boyunca akı vektörlerinin doğrusal değiştiği kabul edilirse, (5.1) denklemi aşağıdaki hale gelir.

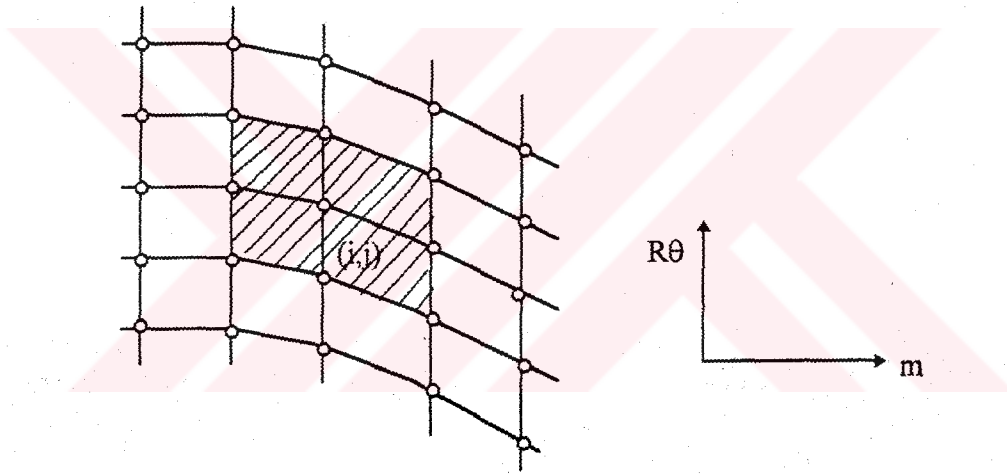
$$\sum_{m=1}^4 \vec{f}_m S_m + \sum_{m=1}^4 \vec{g}_m S_\theta = -\left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} + b \right) S \quad (5.5)$$

S_m ve S_θ alan elemanın m ve θ yönündeki izdüşüm uzunluklarını göstermektedir. $\bar{f}_m$ ve $\bar{g}_m$ vektörleri bağımlı değişkenleri içermektedir.

$$S_m = m_2 - m_1 \quad (5.6)$$

$$S_\theta = r_2\theta_2 - r_1\theta_1 \quad (5.7)$$

Uzay boyutunda denklem sisteminin çözülebilmesi için izdüşüm alanlarının ve kontrol hacminin (S) hesaplanması gerekir. Dört elemandan oluşan kontrol hacmi (alan) aşağıda gösterilmiştir. (Şekil 5.2)



Şekil 5.2 Kontrol hacmi

Bağımlı değişkenler elemanların köşe noktalarında tanımlanır. Yüzeyden geçen akı değerleri ($\bar{f}$ ve $\bar{g}$) ise köşe noktalarında hesaplanan akı değerlerinin aritmetik ortalaması alınarak hesaplanmıştır.

$$\bar{f} = \frac{1}{2}(\sigma_{i,j} + \sigma_{i+1,j}) \quad \bar{g} = \frac{1}{2}(\sigma_{i,j} + \sigma_{i,j+1}) \quad (5.8)$$

Zaman boyutunda ayrıklaştırma neticesinde adi diferansiyel denklem sistemi haline gelen denklemlerin çözümü düzenlenmiş 4 adımlı Runge-Kutta metodu ile

yapılır. Bu teknik zaman boyutunda lineer olmayan denklemlerin çözümünde ikinci mertebeden doğruluğa sahiptir (JAMESON ve diğ., 1981).

$$V_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial t} \sigma_{ij} \right) + R_{ij} - D_{ij} = 0 \quad (5.9)$$

σ çözüm vektörünü, R artık değerlerini, D ise sönümlerme operatörünü simgelemektedir. Her bir adım için kullanılan denklemler aşağıda verilmiştir. Sadece birinci adımda hesaplanan sönümlerme operatörleri diğer adımlarda da kullanılmıştır.

$$\begin{aligned} \sigma^{(0)} &= \sigma^{(n)} \\ \sigma^{(1)} &= \sigma^{(0)} - \alpha_1 \Delta t \left[R(\sigma^{(0)}) - D(\sigma^{(0)}) \right] \\ \sigma^{(2)} &= \sigma^{(0)} - \alpha_2 \Delta t \left[R(\sigma^{(1)}) - D(\sigma^{(0)}) \right] \\ \sigma^{(3)} &= \sigma^{(0)} - \alpha_3 \Delta t \left[R(\sigma^{(2)}) - D(\sigma^{(0)}) \right] \\ \sigma^{(4)} &= \sigma^{(0)} - \alpha_4 \Delta t \left[R(\sigma^{(3)}) - D(\sigma^{(0)}) \right] \\ \sigma^{(n+1)} &= \sigma^{(4)} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Denklemlerde görülen katsayılar ise aşağıdaki gibi kullanılmıştır.

$$\alpha_1 = 1/4 \quad \alpha_2 = 1/3 \quad \alpha_3 = 1/2 \quad \alpha_4 = 1 \quad (5.11)$$

5.2 Denklemlerin Matematiksel Karakteri

5.1 nolu denklem sistemi sanki-lineer formda aşağıdaki gibi yazılabilir (VAN DEN BRAEMBUSSCHE, 1996).

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + A(\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial m} + B(\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial R\theta} = b(\sigma) \quad (5.12)$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} p / \rho_0 \\ W_m \\ W_\theta \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} W_m & c^2 & 0 \\ 0 & W_m & 0 \\ 0 & 0 & W_m \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} W_\theta & 0 & c^2 \\ 0 & W_\theta & 0 \\ 0 & 0 & W_\theta \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} -\frac{W_m}{Rh} \frac{d(Rh)}{dm} \\ \frac{(W_\theta + \omega R)^2}{R} \frac{dR}{dm} \\ -\frac{W_m(W_\theta + 2\omega R)}{R} \frac{dR}{dm} \end{bmatrix}$$

A ve B matrisleri korunumlu formdaki akı vektörlerinin jakobyen matrislerini göstermektedir. A matrisi 3 tane gerçek özdeğere sahiptir ve sistem hiperboliktir.

$$\lambda_1 = W_m \quad \lambda_2 = W_m - a \quad \lambda_3 = W_m + a \quad (5.13)$$

5.3 Zaman Adımı

Denklemlerin daimi haldeki çözümü açık yöntemle elde edilmektedir. Yani bir önceki zaman adımında hesaplanan fiziksel büyüklükler bir sonraki zaman adımında kullanılmaktadır. Açık yöntemlerde zaman adımı gelişigüzel seçilemez (RIZZI ve ERIKSSON, 1985).

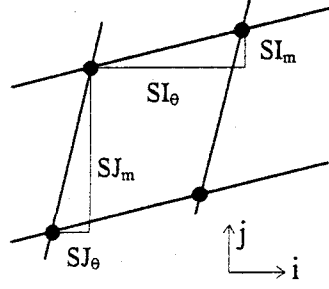
$$\Delta t \leq \frac{\Delta l_{\min}}{a + |W|} \text{ CFL} \quad \text{olmalıdır.} \quad (5.14)$$

CFL katsayısının değeri Runge-Kutta yönteminde kullanılan adım sayısına bağlıdır.

$$\Delta t_{ij} \leq \text{CFL} \left[\frac{\text{VOL}}{\tilde{U} + (\tilde{U}^2 + c^2 S^2)^{1/2}} \right]_{ij} \quad (5.15)$$

$$\tilde{U} = |W_m SI_m + W_\theta SI_\theta| + |W_m SJ_m + W_\theta SJ_\theta| \quad (5.16)$$

$$S^2 = (|SI_m + SJ_m|)^2 + (|SI_\theta + SJ_\theta|)^2 \quad (5.17)$$



$$SI_m = m_{i+1,j} - m_{i,j}$$

$$SI_\theta = m_{i,j+1} - m_{i,j}$$

$$SJ_m = (r\theta)_{i+1,j} - (r\theta)_{i,j}$$

$$SJ_\theta = (r\theta)_{i,j+1} - (r\theta)_{i,j}$$

Şekil 5.3 Kontrol hacmini oluşturan yüzeylerin izdüşüm alanları

5.4 Sınır Koşulları

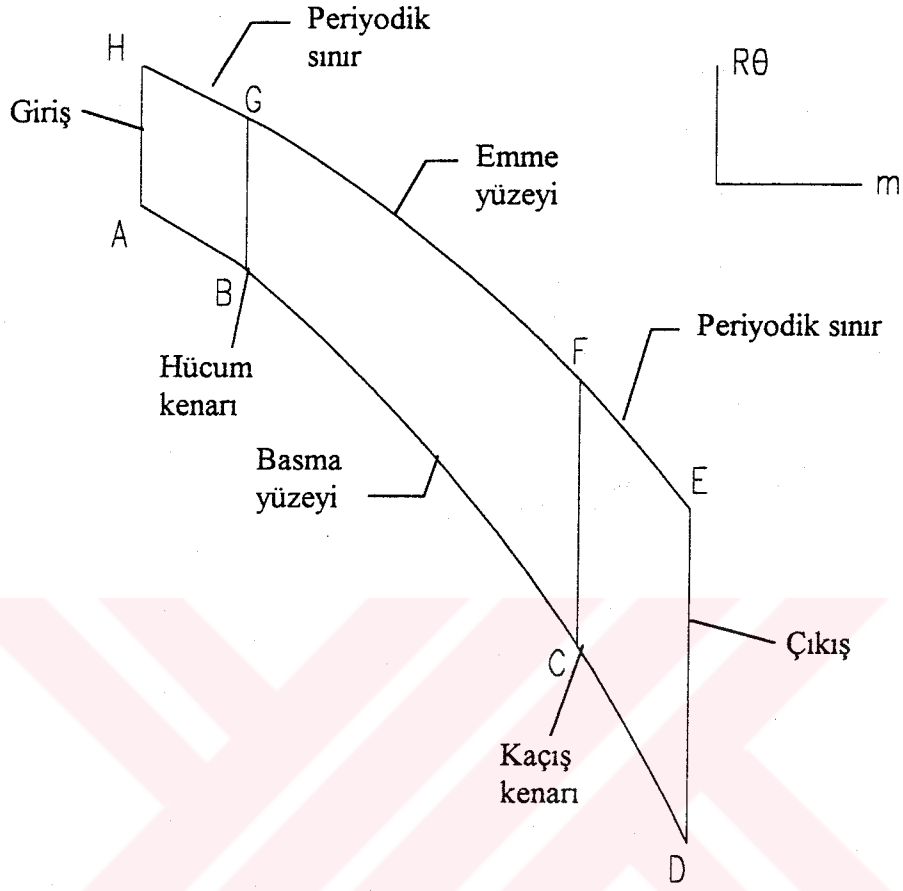
Denklemlerin matematiksel olarak uygunluğunun sağlanabilmesi için sınır koşullarının uygun verilmesi gerekir (SEGAL ve diğ., 1994; MARCUM ve HOFFMAN, 1987).

Giriş ve çıkış yüzeylerinde (AH ve DE kesitleri) yansımali sınır koşulu uygulanmıştır (Şekil 5.4). Bu nedenle elde edilecek çözüm kanat geometrisinin giriş ve çıkışında oluşturulan çözüm ağının uzunluğuna bağlıdır. Giriş yüzeyinde iki tane karakteristik (W_m, W_m+a) çözüm bölgesinin içine doğru gerekli bilgiyi taşır. Bu nedenle iki tane fiziksel sınır koşulu verilmelidir. Üçüncü fiziksel büyüklük sayısal olarak entropolasyon uygulanarak çözüm bölgesinin içinden taşınır. Bağlı hızın meridyenel bileşeni (veya toplam basınç) ve θ eksenine yapmış olduğu bağlı akış açısı (α) girişte fiziksel sınır koşulu olarak verilir.

Çıkış bölgesinde ise sadece bir karakteristik eğri dışarıdan gerekli bilgiyi çözüm bölgesi içine taşır. Bu yüzden gereken tek fiziksel sınır koşulu olarak çıkış kesitinde sabit statik basınç dağılımı verilmiştir.

Giriş : $W_m (P_0), \alpha$ Çıkış : $P_{\text{çıkış}}$

Katı yüzeyler boyunca ise (BC ve GF kesitleri) hızın yüzeye dik bileşeninin sıfır olması sağlanır. Çözüm esnasında iletim terimleri açık olarak kullanıldığından katı



Şekil 5.4 Çözüm bölgesi

yüzeyler boyunca kütle akısı sıfır yapılır. Emme ve basma yüzeyleri boyunca katı yüzeylerde sadece statik basınç momentum akısına dahil edilir.

Çözüm sadece iki kanat arasında gerçekleştirildiği için girişte ve çıkışta periyodik sınır koşulu verilir. EF, GH ve CD, AB sınırları boyunca kütle ve momentum akılarının birbirine eşit olması sağlanır.

5.5 Yapay Sönümleme

Euler denklemlerinin çözümünde kullanılan yapay sönümleme terimleri çözüm yönteminin kararlı olması için gereklidir. JAMESON ve diğ. (1981) tarafından önerilmiş bağımlı değişkenlerin 4. mertebeden farkları sönümleme terimleri olarak

kullanılmıştır. Pompa çarkı içindeki akışın çözümlenmesi için, akış alanı içinde herhangi bir şok oluşumu beklenmediğinden 2. mertebeden farklar kullanılmamıştır.

$$V_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial t} \sigma_{ij} \right) + R_{ij} - D_{ij} = 0 \quad (5.18)$$

D ile gösterilen yapay sönümleme terimleri,

$$D_{i,j} = d_{i+\frac{1}{2},j} - d_{i-\frac{1}{2},j} + d_{i,j+\frac{1}{2}} - d_{i,j-\frac{1}{2}} \quad (5.19)$$

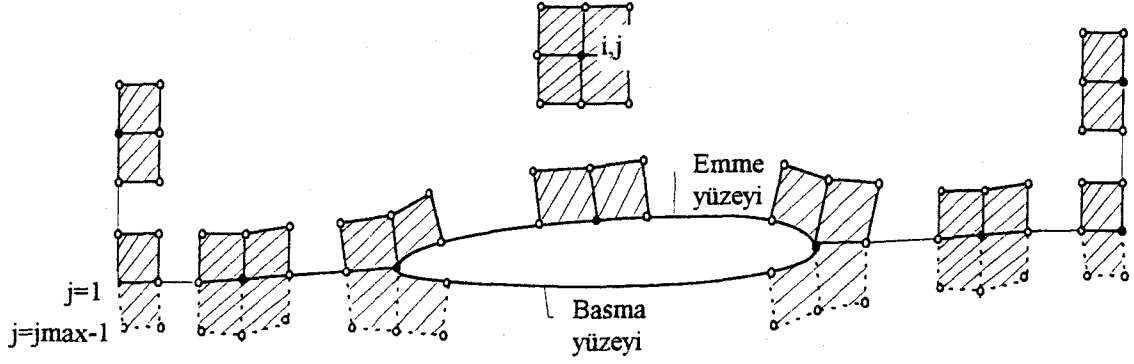
$$d_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta V_{i,j}}{\Delta t_{i,j}} + \frac{\Delta V_{i+1,j}}{\Delta t_{i+1,j}} \right) \left[k^{(4)} (\sigma_{i+2,j} - 3\sigma_{i+1,j} + 3\sigma_{i,j} - \sigma_{i-1,j}) \right] \quad (5.20)$$

şeklindedir. Burada $k^{(4)}$ katsayısı 4. mertebeden farkları uyarlayan bir sabittir. $k^{(4)}$ katsayısı sayısal denemeler sonucunda aşağıdaki değerler arasında iyi sonuçlar vermiştir.

$$k^{(4)} = 0.03 - 0.035$$

Belirli pompa çarkı geometrilerinin çalıştırılması neticesinde yapılan sayısal denemelerde katı yüzeyler üzerindeki yapay sönümleme terimlerinin daimi haldeki çözümün elde edilmesinde kritik önemi olduğu görülmüştür. Katı yüzey üzerinde ve ona yakın noktalarda yapay sönümleme terimleri aşağıdaki gibi kullanılmıştır. Katı ve periyodik yüzeyler üzerinde kullanılan kontrol hacimleri Şekil 5.5 de gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} j = 1 \quad D &= k^{(4)} (\sigma_{i,j+2} - 2\sigma_{i,j+1} + \sigma_{i,j}) \\ j = 2 \quad D &= k^{(4)} (\sigma_{i,j+2} - 4\sigma_{i,j+1} + 5\sigma_{i,j} - 2\sigma_{i,j-1}) \\ j = 3 \quad D &= k^{(4)} (\sigma_{i,j+2} - 4\sigma_{i,j+1} + 6\sigma_{i,j} - 4\sigma_{i,j-1} + \sigma_{i,j-2}) \\ &\dots\dots\dots \\ j = N_j - 2 \quad D &= k^{(4)} (\sigma_{i,j+2} - 4\sigma_{i,j+1} + 6\sigma_{i,j} - 4\sigma_{i,j-1} + \sigma_{i,j-2}) \\ j = N_j - 1 \quad D &= k^{(4)} (-2\sigma_{i,j+1} + 5\sigma_{i,j} - 4\sigma_{i,j-1} + \sigma_{i,j-2}) \\ j = N_j \quad D &= k^{(4)} (\sigma_{i,j} - 2\sigma_{i,j-1} + \sigma_{i,j-2}) \end{aligned} \quad (5.21)$$



Şekil 5.5 Giriş, çıkış, periyodik ve katı yüzeyler üzerindeki kontrol hacimleri

5.6 Çözüm Ağı Üretimi

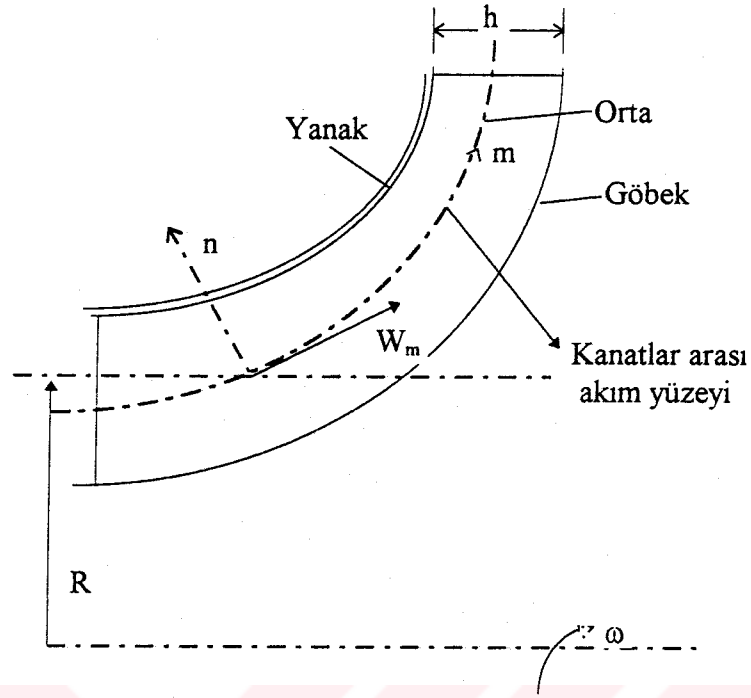
Çark kanatlarını temsil eden silindirik koordinatlar (r, θ, z) çarkın tasarım resmi üzerinden tesbit edilir. Kanatlar arası düzlemde akış analizi yapıldığından kanat emme ve basma yüzeylerinin m ve θ koordinatları elde edilir (SARIOĞLU ve AYDER, 1996a ; SARIOĞLU ve AYDER, 1997b).

$$m = \sqrt{R^2 + z^2} \quad (5.22)$$

Çözüm meridyenel düzlemde herhangi bir pozisyonda olan kanatlar arası düzlemde gerçekleştirilir. Bu yüzden çözümün gerçekleştirildiği kesitdeki (göbek, yanak, orta) yarıçap ve akım tübü genişliğinin m koordinatıyla değişimi ayrıca belirlenmelidir. Bu sayede b vektörünü oluşturan türevler kolaylıkla hesaplanabilir.

$$R=R(m) \quad h=h(m) \quad (5.23)$$

Bu değişimler meridyenel düzlemde çizilmiş çark tasarım resminden kolaylıkla elde edilebilir (Şekil 5.6). Meridyenel düzlemdeki potansiyel akışı çözümleyen bir program kullanılarak da bu koordinatlar tesbit edilebilir. Kanat emme ve basma yüzeyleri arasındaki bölgede diğer koordinatlar eşit veya farklı aralıklı olarak oluşturulur. Böylelikle kanatlar arasındaki tüm koordinatlar belirlenmiş olur. Bu



Şekil 5.6 Meridyenel akım yüzeyi

bölümde θ yönünde eşit aralıklara sahip H-tipi çözüm ağı kullanılmıştır.

Çözümün sadece iki kanat arasında gerçekleştirildiği ve kanat giriş-çıkış bölgelerinde periyodik sınır koşullarının uygulandığından daha önce bahsedilmişti. Ayrıca θ yönündeki giriş ve çıkış kesitlerinde yansımali sınır koşulları uygulandığından kanatlar dışındaki bu bölgelerin çözüm ağının üretimi oldukça önemlidir.

Giriş ve çıkış bölgelerindeki çözüm ağı koordinatlarının geometrik yerlerinin tesbiti için kütlenin korunumu ve serbest dönmeli akış denklemleri kullanılarak kanadın emme ve basma yüzeylerini takip eden m ve θ koordinatları elde edilir.

$$R(W_\theta + \omega R) = \text{sabit}$$

$$2\pi\rho_0 Rh W_m = \text{sabit}$$

(5.24)

Öncelikle akışkanın çarka giriş açısı ($\beta_{1 \text{ akış}}$) ve akış debisi ($Q_{\text{giriş}}$) tesbit edilir. Bu iki değer giriş kesitinde meridyenel ve teğetsel hız bileşenlerin hesaplanmasına

olarak tanır. Giriş bölgesinde serbest dönmeli akış oluşabilmesi için gerekli sabit (C) elde edilir .

$$W_{m_{giriş}} = \frac{Q}{2\pi R_{giriş} h_{giriş}} \quad W_{\theta_{giriş}} = W_{m_{giriş}} \tan \beta_{1_{giriş}} \quad (5.25)$$

$$R_{giriş} W_{\theta_{giriş}} + \omega R_{giriş}^2 = C$$

Giriş bölgesinin periyodik sınırlardaki θ koordinatları kanat hücum kenarından geriye doğru bu sabit kullanılarak hesaplanır. Aynı işlemler çıkış bölgesi için tatbik edilir.

$$W_{\theta} = \frac{C - \omega r^2}{r} \quad W_m = \frac{Q}{2\pi r h} \quad \theta = \arctan \frac{W_{\theta}}{W_m} \quad (5.26)$$

5.7 Çark Performansının Sayısal Olarak Elde Edilmesi

Kanatlar arası akım yüzeyinde meridyenel akım tübü genişliği de dikkate alınarak elde edilen sayısal çözüm kullanılarak çark performansı elde edilir. Giriş bölümünde de belirtildiği gibi burada amaçlanan tasarımcının deney yapmadan çark performansı ve çözüm içindeki istenmeyen akış olayları hakkında fikir sahibi olmasıdır.

Pompalar için basma yüksekliği emme ve basma flanşı arasında birim ağırlık başına transfer edilen enerji farkıdır. Kinetik, potansiyel ve hız enerjilerinin farkı pompanın kazandırmış olduğu enerji miktarını verir. Radyal çıkışlı kanatlara sahip pompa için kazanılan enerji miktarı sayısal olarak elde edilen verilerle aşağıdaki gibi gösterilebilir. (EK-C)

$$H_m = \frac{2(P_2 - P_1)}{\rho g} + \frac{W_2^2 - W_1^2}{g} + \frac{U_2 W_{\theta_2} - U_1 W_{\theta_1}}{g} \quad (5.27)$$

$$Q = 2\pi R h W_m \quad (5.28)$$

5.8 Elde Edilen Sayısal Sonuçların Yorumlanması

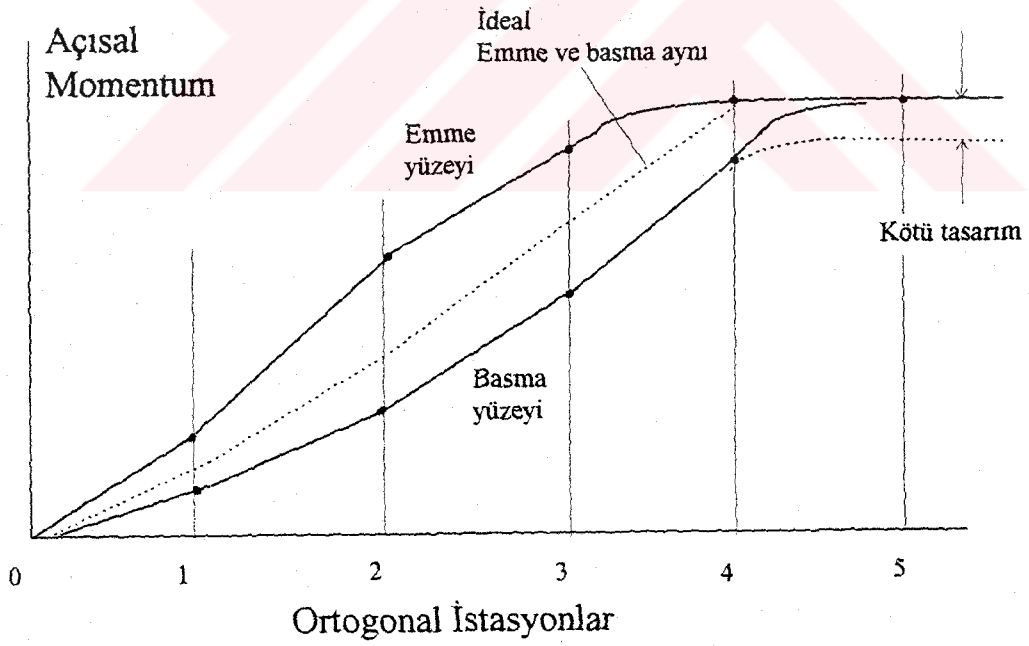
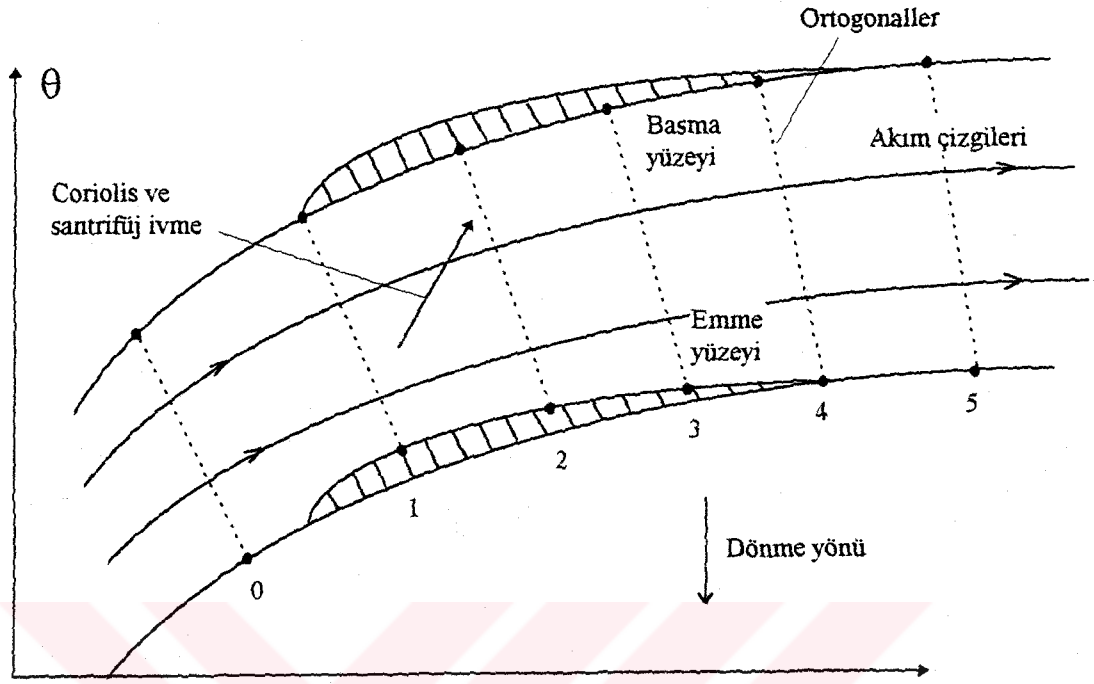
Sayısal olarak elde edilen sonuçların tasarımcı tarafından daha iyi anlaşılması gerekir. Tasarımcının temel amacı optimum kanat açısı dağılımı ve en uygun meridyenel geometriyi elde etmektir. Bu ancak deneme ve yanılmalarla mümkündür. Kanat geometrisi sayısal çözüm için giriş olarak verilir ve sonuçta akış analizi elde edilir.

Pompa milinin dönme hareketi neticesinde pompa kanatları tarafından akışkana enerji aktarılır ve çark çıkışında akışkanın enerjisi artmış olur. Bu sadece akışkanın açısal momentumunun değişimiyle mümkündür (TUZSON, 1993). Daimi akışta akışkan parçacıkları kanatlar arasında belirli bir yolu tarif eden akım çizgilerini izler. İyi kanat tasarımının birinci kuralı her bir akım çizgisinin aynı enerjiye sahip olmasıdır. Enerjinin kinetik enerjiden basınç enerjisine dönüşümü esnasında toplam enerji değişmez. Göbek ve yanak arasındaki enerji gradyanı girdaplara ve kayıplara sebep olur.

Kanat girişinde çıkışına kadar akım çizgileri boyunca açısal momentum değişiminin hangi noktalarda karşılaştırılacağı önemlidir. Kanatlar arası düzlemde açısal momentum gradyanı akım çizgilerine dik ortogonal istasyonlar boyunca sıfır olmalıdır (Şekil 5.7). Benzer şekilde meridyenel düzlemde de bu koşul sağlanmalıdır (SARIOĞLU ve AYDER, 1997b).

Uniform açısal momentum değişimi sağlanabilmesi için kanat giriş ve çıkışları akım çizgilerine ortogonal olmalıdır. Fakat çoğu pompa kanat geometrilerinin giriş ve çıkışında kanat uçları yuvarlatılmıştır. Bu akım çizgilerinin kanat uçlarına ortogonal olmasını engeller. Ayrıca değişik çalışma koşullarında açısal momentum değişimi farklılıklar gösterir. Bu uniform olmayan enerji iletimine ve dolayısıyla girdaplı bölgelere yol açar.

TUZSON (1993) tarafından önerilen ve kanatlar arası bölgede enerji değişimini gösteren açısal momentum değişimi tasarımcıya hız vektörleri ve eş statik basınç dağılımından daha faydalı olur.



Şekil 5.7 Kanatlar arası düzlemde akış yapısı ve bu yüzeydeki açısal momentum değişimi (TUZSON, 1993)

5.9 Sayısal Uygulamalar

5.9.1 Tam Radyal Kanatlı Açık Çark

İ.T.Ü. Makina Fakültesi, Hidromekanik ve Hidrolik Makinalar Anabilim Dalı, Hidromekanik Laboratuvarında bulunan radyal pompa-türbin deney tesisatı kullanılarak sekiz kanata sahip radyal pompa çarkında deneyler yapılmıştır. (SARIOĞLU ve KAVURMACIOĞLU, 1997). Sayısal hesap sadece çark içindeki akışı simüle ettiği, pompanın salyangoz ve difüzör gibi diğer elemanlarını hesaba katmadığı için deneylerde bu elemanlar çıkartılmış ve çark performansı buna göre elde edilmiştir. Basma yüksekliği aynı çaplı emme ve basma borularındaki basınçlar ölçülerek hesaplanmıştır. Radyal çark geometrisi geometrik boyutlarıyla birlikte Şekil 5.8a da gösterilmiştir. Ayrıca ölçme paneli ve deney düzeneği akış şeması Şekil 5.8g de gösterilmiştir.

$$R_0/R_g=2 \quad z=8 \text{ kanat} \quad h=15 \quad n=1000-1300 \text{ d/dak}$$

Kullanılan H-tipi çözüm ağı Şekil 5.8b de görülmektedir. m yönünde 60° , θ yönünde ise 20° bölümlenme yapılmıştır. Sayısal hesaplamalar neticesinde elde edilen (maksimum verimdeki tasarım debisi) eşstatik basınç eğrileri Şekil 5.8c de gösterilmiştir. Çark girişinden çıkışına doğru statik basınç artmaktadır. Fakat sayısal sonuçların daha doğru yorumu için kanat girişinden çıkışına açısall momentum değişimi çizilmiştir (Şekil 5.8e). Enerji iletimi büyük bir oranda santrifüj kuvvet sayesinde olur. Dolayısıyla emme ve basma yüzeylerinde çizilen açısall momentum değişimleri aynı olacaktır. Şekil 5.8e de görüldüğü gibi kanat çıkışındaki ayrıklaştırma hataları hariç emme ve basma yüzeylerindeki açısall momentum değişimi aynıdır.

Deneyssel olarak farklı devir sayılarında elde edilen çark performans eğrilerinin sayısal sonuçlarla karşılaştırılması Şekil 5.8f de verilmektedir. Sonuçlar büyük bir uyum içerisindedir. Düşük debilerde sayısal ve deneyssel sonuçlar arasındaki %10 luk bir fark gözlenmiştir. Bu fark çark içersindeki kayıpların hesaba katılmamasından kaynaklanmıştır.

5.9.2 Silindirik Kanatlı, Geriye Dönük, Kapalı Pompa Çarkları (h=sabit)

1. Örnek :

KANNEMANS (1980) tarafından iki boyutlu lazer doppler anemometresi kullanılarak transparan pompa sisteminde ölçümler yapılmıştır. Göbekten yanağa ve çark girişinden çıkışına kadar olan yatay düzlemde bağıl hızın iki bileşeni deneysel olarak ölçülmüştür. Pompa geometrisi ve boyutları Şekil 5.9a da gösterilmiştir. Ölçme işlemleri salyangoz dilinden etkilenilmemesi için dilin tam karşı kısmında yapılmıştır.

Tasarım debisinde ($Q=4.1$ l/sn) elde edilen çözüm ağı, hız vektörleri, eş-statik ve toplam basınç eğrileri ve yakınsama eğrisi Şekil 5.9b ve Şekil 5.9g de görülmektedir. Emme ve basma yüzeyleri arasındaki statik basınç artımı görülebilir. Ayrıca çözüm bölgesi içinde toplam basınç kaybı çok düşüktür.

Değişik yarıçaplarda ve farklı akış debilerinde deneysel olarak elde edilen sonuçlar Şekil 5.9h da gösterilmiştir ($R=76$ mm, $R=84$ mm, $R=91$ mm). Deneysel ölçümler göbek ve yanak arasında eşit aralıklı beş düzlemde gerçekleştirilmiştir. Orta düzlemde deneysel ölçümlerin sayısal sonuçlarla karşılaştırılmaları düşük, orta ve yüksek akış debilerinde Şekil 5.9c de gösterilmiştir. Akış debisi soldan sağa artmaktadır. Dokuz grafiğin yatay koordinatı emme ve basma yüzeyleri arasındaki mesafeyi, dikey koordinatı ise bağıl hızı ($w = \sqrt{w_m^2 + w_0^2}$) göstermektedir. Kanat girişi kesitine yakın düşük yarıçapta ve düşük debideki sayısal sonuçlar hariç sonuçlar büyük bir uyum içerisindedir. KANNEMANS (1980) denenen kanat geometrisi içerisindeki akışın iki boyutlu olduğu vurgulanmıştır. Sabit debide kanatlar arası düzlemde basınç gradyanı girişten çıkışa ilerledikçe azalmaktadır. Genellikle kanatlara teğet bağıl hız emme yüzeyinden basma yüzeyine gidildikçe azalmaktadır. Fakat düşük akış debisinde ($Q=1.73$ l/s) bunun tam tersi elde edilmiştir. Bu TUZSON (1993) de belirtildiği gibi enerji transferi açısından istenmeyen bir durumdur.

Deneysel ve sayısal olarak elde edilen performans eğrileri Şekil 5.9d de karşılaştırılmıştır. Sonuçlar hemen hemen aynıdır. Ayrıca çark çıkışında ($R=107$ mm) deneysel ve sayısal olarak elde edilen bağıl çıkış açısı ($\beta_{2 \text{ akış}}$) karşılaştırılmıştır (Şekil 5.9e) (SARIOĞLU ve AYDER, 1997b). Tasarım debisinde kanatlar arası düzlemde

elde edilen açısal momentum değişimi Şekil 5.9f de gösterilmiştir. Bu çark kanatları içinde girişten çıkışa elde edilen enerji değişiminin yorumu açısından önemlidir. Çark girişinden çıkışına doğru enerji iletimi, tam radyal çark geometrisinden farklı olarak santrifüj ve Coriolis kuvvetleri sayesinde olur. Kanat emme ve basma yüzeyleri arasındaki açısal momentum değişiminin hangi bölgelerde daha yüksek değerlere haiz olduğu çark tasarımcısına yol gösterme ve kanat geometrisi üzerinde değişiklik yapma kolaylığı sağlar.

2. Örnek :

MINER ve diğ. (1988) tarafından lazer doppler anemometresi kullanılarak hız ölçümleri gerçekleştirilmiş olan silindirik kanatlı çark geometrisi sayısal olarak denenmiştir (SARIOĞLU ve AYDER, 1997a). Kanat ve salyangoz geometrisi Şekil 5.10a da gösterilmiştir. Kanatlar $R=50.8e^{\tan 16.9}$ denklemine haiz logaritmik spiralden oluşmaktadır. Dört kanata sahip çarkın meridyenel genişliği sabit ve $h=24.6$ mm'dir. Deneysel ölçümler kanatlar arasında 4 çevresel ve 8 radyal uzaklıkta gerçekleştirilmiştir. Akış debileri tasarım debisinin %40'ından %105'ine değişmektedir. Ölçümlerin yapıldığı pencereler Şekil 5.10a da görülmektedir.

Tasarım debisinde elde edilen çözüm ağı Şekil 5.10b de görülmektedir. Akış yönünde 61 bölümlenme, akışa dik yönde ise 20 bölümlenme yapılmıştır. Tasarım debisindeki hız vektörleri, eş statik basınç konturları ve yakınsama eğrisi Şekil 5.10c, Şekil 5.10d ve Şekil 5.10e' de gösterilmiştir.

Elde edilen sayısal sonuçlar, tasarım debisinde MINER ve diğ. (1988) tarafından farklı ölçme pencerelerinde (2,4,6,8) elde edilmiş deneysel sonuçlarla karşılaştırılmıştır (Şekil 5.10f). Eğrilerdeki semboller bu ölçme pencerelerini göstermektedir. Eğrilerin yatay eksenini kanatlar arası düzlemde emme ve basma yüzeyi arasındaki mesafeyi göstermekte, dikey eksenini ise bağıl hızın teğetsel ve meridyenel bileşenlerinin çark çıkışındaki teğetsel hıza bölümü neticesinde elde edilen boyutsuz hızları göstermektedir. Eğrilerde yukarıdan aşağıya inildikçe yarıçap artmaktadır. Deneysel sonuçlar arasındaki farklılıklar salyangoz etkisinden dolayı farklı kanatlar arasındaki akışın uniform olmamasından kaynaklanmaktadır. Şekil 5.10 f de görüldüğü gibi (kalın çizgi ile gösterilen) tasarım debisinde elde edilen sayısal sonuçlar

uyum içerisinde. Tasarım debisinin düşük değerlerinde deneysel sonuçlar ile sayısal hesap arasındaki %10 luk sapma çark girişindeki bağıl akış açısının değişiklik göstermesi ile açıklanabilir.

Ayrıca farklı iki akış debisinde deneysel ve sayısal sonuçlar karşılaştırılmış ve Şekil 5.10g de gösterilmiştir. Deneysel ve sayısal sonuçlar arasındaki farklılıklar bilhassa tasarım debisinin %60 ında salyangozun çarkla uyuşmadığını göstermektedir.

Tasarım debisinde sayısal olarak elde edilen kanatlar boyunca enerji değişimini gösteren açıl momentum değişimi Şekil 5.10h da görülmektedir. Ayrıca MINER ve diğ. (1988) tarafından elde edilen salyangoz ve çarka ait performans eğrisi sayısal olarak elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır (Şekil 5.10k). Tasarım debisi hariç, düşük debilerde elde edilen daha düşük değerler salyangoz etkisiyle açıklanabilir.

5.9.3 Silindirik Kanatlı Kapalı Pompa Çarkı ($h \neq \text{sabit}$)

LIU ve diğ. (1994) tarafından lazer ölçüm cihazı kullanılarak deneysel ölçümlerin yapıldığı radyal pompa çarkı sayısal olarak çözülmüştür. Kanat geometrisi Şekil 5.11a da görülmektedir. Meridyenel akım tübü genişliği kanat girişinden çıkışına azalmaktadır ($h \neq \text{sabit}$). Çark geriye dönük dört kanatdan oluşmaktadır. Ölçümlerin yapıldığı çalışma sıvısı olarak lazer doppler cihazının kullanılma kolaylığı için salyangoz gövdesiyle aynı yansıma özelliğine sahip sıvı kullanılmıştır. Kanatların geometrik şekli giriş açısı 30° ve çıkış açısı 58° ($40 \sim 62.7$ mm yarıçapları arasında) olan logaritmik spiraldir. Ölçme sıvısı olarak tetraline ve yağ karışımı kullanılmıştır.

$$\rho = 0.893 \text{ kg/m}^3 \quad n=2910 \text{ d/dak} \quad Q_n=2.72 \text{ l/s} \quad \gamma=1.74 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{sn}$$

Tasarım debisinin %57 sinden %93 üne kadar olan aralıkta ölçüm yapılmıştır. Deneysel ölçümler kanatlar arası düzlemde farklı yarıçaplarda gerçekleştirilmiştir. Bağıl hızın teğetsel, radyal ve eksenel bileşenleri deneysel olarak elde edilmiştir.

Tasarım debisinde elde edilen çözüm ağı Şekil 5.11b de görülmektedir. Çözüm ağında m yönünde 62, θ yönünde ise 20 bölümlene yapılmıştır. Tasarım debisinin %57 ve %93 ünde orta akım yüzeyinde sayısal olarak elde edilen hız

vektörleri Şekil 5.11c de gösterilmiştir. Tasarım debisinin daha düşük değerinde yüksek debi değerine nazaran basma yüzeyinde çark girişine yakın bölgede akışın oldukça yavaşladığı gözlenmiştir.

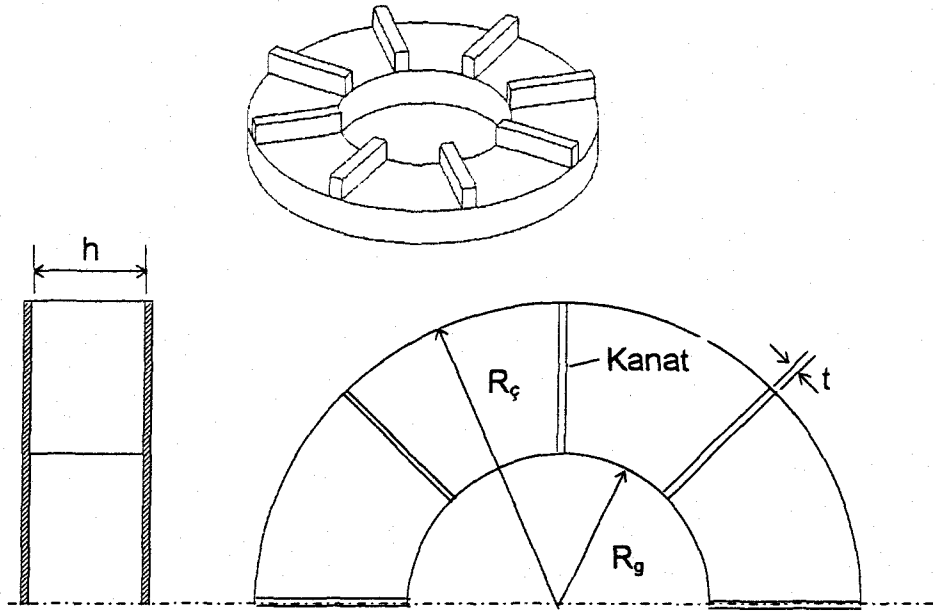
Kanatlar arası bölgede orta akım yüzeyinde çark çıkış yarıçapında ($R=62.7$ mm) deneysel ve sayısal olarak elde edilen değerler karşılaştırılmıştır (Şekil 5.11d). Eğrilerin yatay eksen emme ve basma yüzeyleri arasındaki açısal pozisyonu göstermekte, dikey eksenleri ise bağıl hızın meridyenel ve teğetsel bileşenlerinin çark çıkışındaki çevresel hızla bölümü neticesinde elde edilen boyutsuz hızları göstermektedir. Bağıl hızın meridyenel bileşeni basma yüzeyinden emme yüzeyine azalmaktadır ve deneysel sonuçlarla uyum içerisindedir. Teğetsel hızların karşılaştırılmasında elde edilen eğilim farklılığı sayısal hesapta salyangoz etkisinin düşünülmemesinden kaynaklanmıştır.

5.9.4 Dönük Kanatlı Kapalı Pompa Çarkı

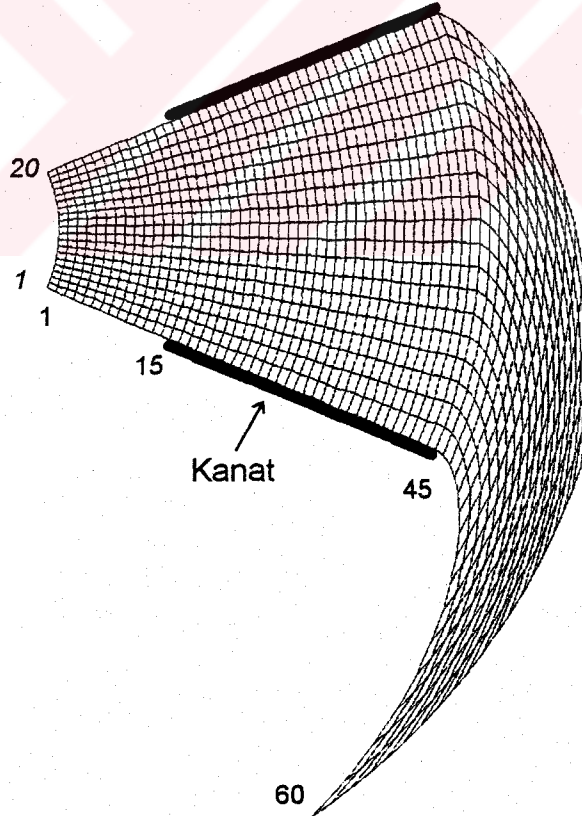
Göbek, yanak ve orta kesitleri kanatlar arası düzlemde farklı geometriye sahip olan bir endüstriyel pompa çarkı örneği sayısal olarak denenmiştir. Pompa çarkının üç boyutlu görüntüsü (Şekil 5.12a), meridyenel ve ön görünüşleri Şekil 5.12b de verilmiştir (KARAKAŞ ve AYDER, 1997).

Deneysel performans eğrisi çarkı imal eden firma tarafından sağlanmıştır. Kanatlar arası düzlemde göbek, yanak ve orta kesitte farklı akış debilerinde sayısal olarak çözüm elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar Şekil 5.12c de deneysel performans eğrisiyle karşılaştırılmıştır. Üç farklı düzlemde elde edilen sonuçların kütesel ortalaması (debi çarpı basma yükeklği toplamalarının debiye oranı) alınarak elde edilen eğri ayrıca gösterilmiştir. Bu eğri ile deneysel performans eğrisinin karşılaştırılması neticesinde kullanılan sayısal modelin deneysel performans eğrisini büyük bir yaklaşıklıkla elde ettiği görülmüştür. Elde edilen ufak farklılıklar ise farklı akış debilerinde bağıl giriş akış açısının farklılık göstermesi ve kayıplar ile açıklanabilir.

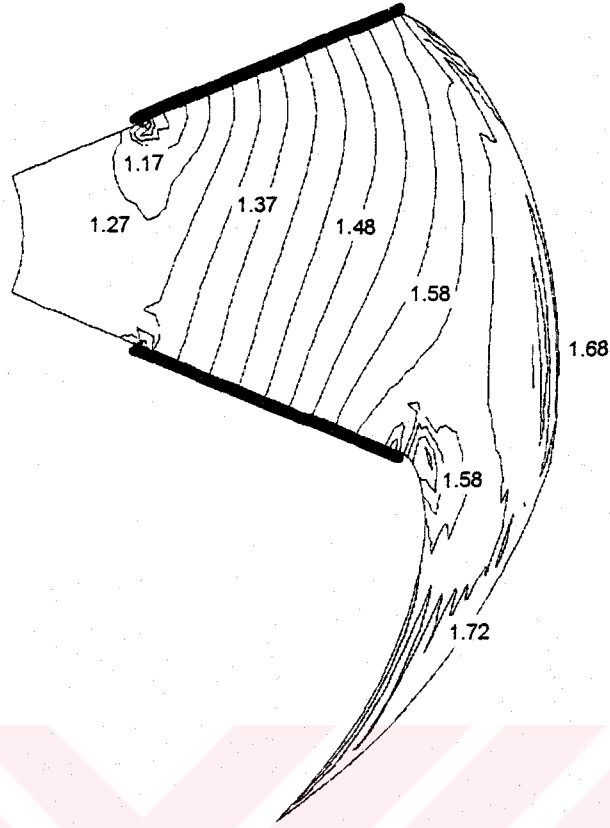
TAM RADYAL KANATLI AÇIK ÇARK



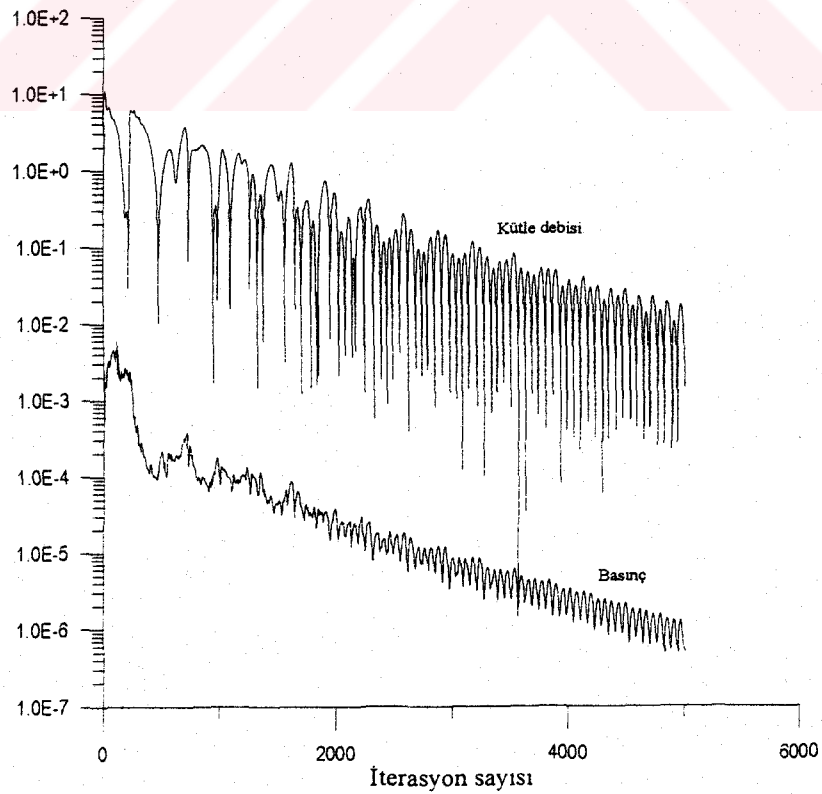
Şekil 5.8a Tam radyal çark geometrisi ($R_g=50$, $R_ç=100$, $h=15$ $t=2$, $z=8$ kanat)



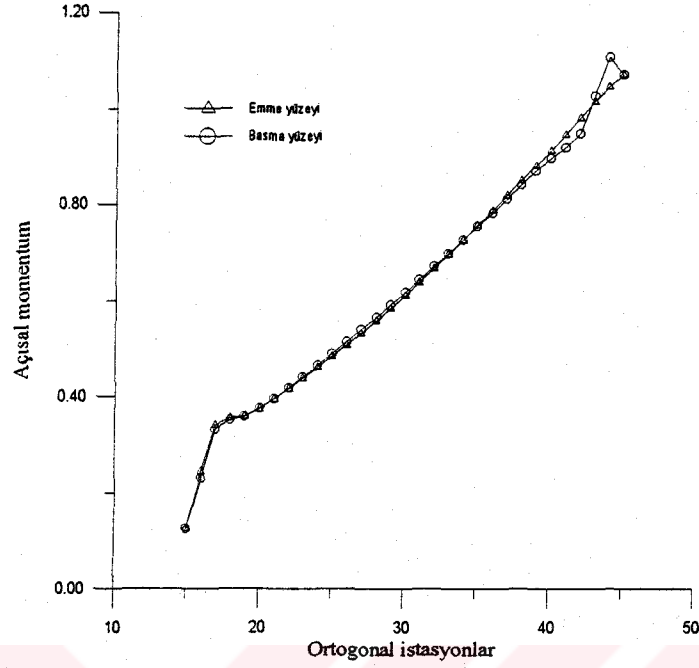
Şekil 5.8b Çözüm ağı (60x20)



Şekil 5.8c Tasarım debisinde sayısal olarak hesaplanmış eş statik basınç eğrileri (p/p_0 , $p_0=100000$ Pa)

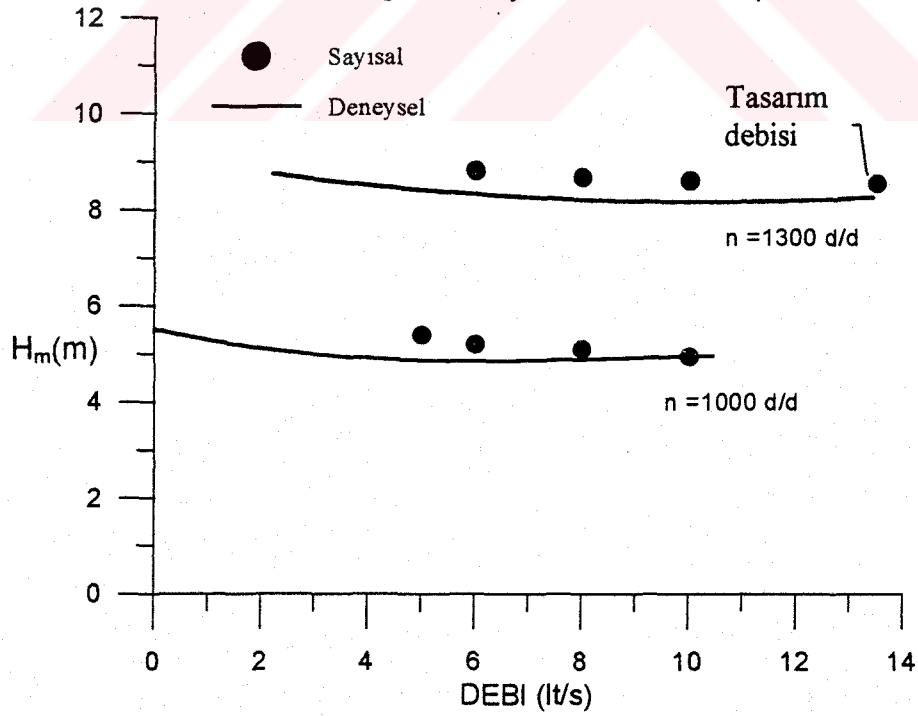


Şekil 5.8d Yakınsama eğrisi

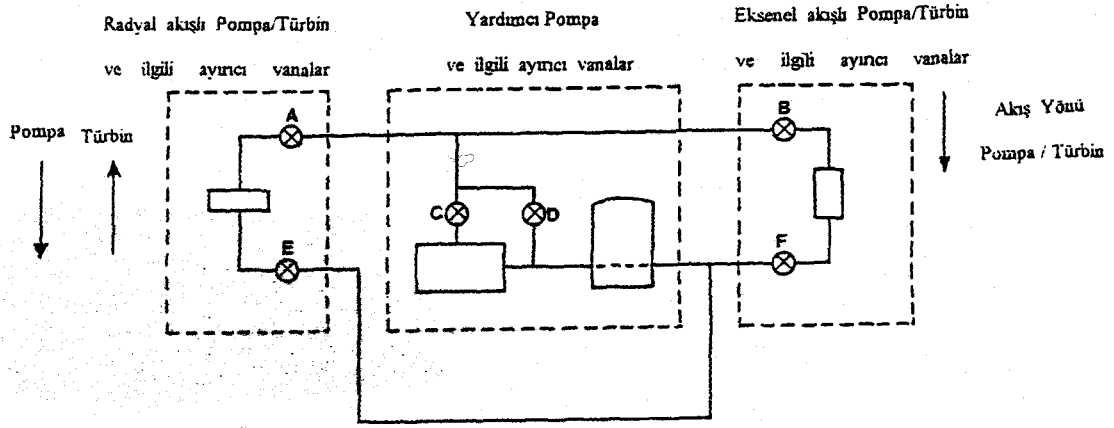


Şekil 5.8e Emme ve basma yüzeylerindeki açısai momentum değışimi

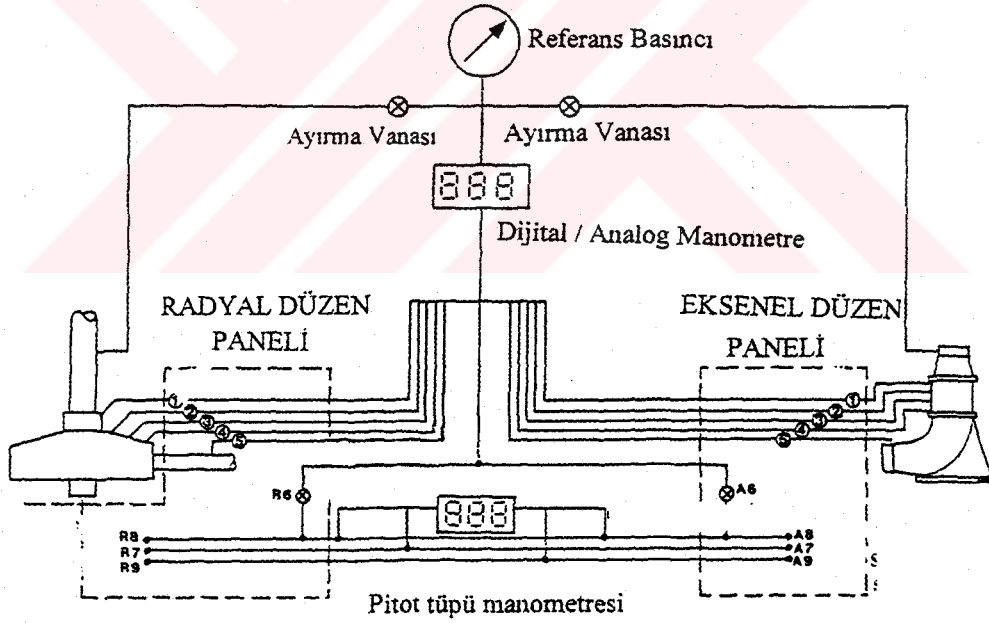
TAM RADYAL AÇIK ÇARK DİFÜZÖRSÜZ
8 Kanat , $R_g=50$, $R_ç=100$, $b=15$, $n_q=28$



Şekil 5.8f Farklı devir sayılarında deneysel ve sayısal çark performans eğrilerinin karşılaştırılması

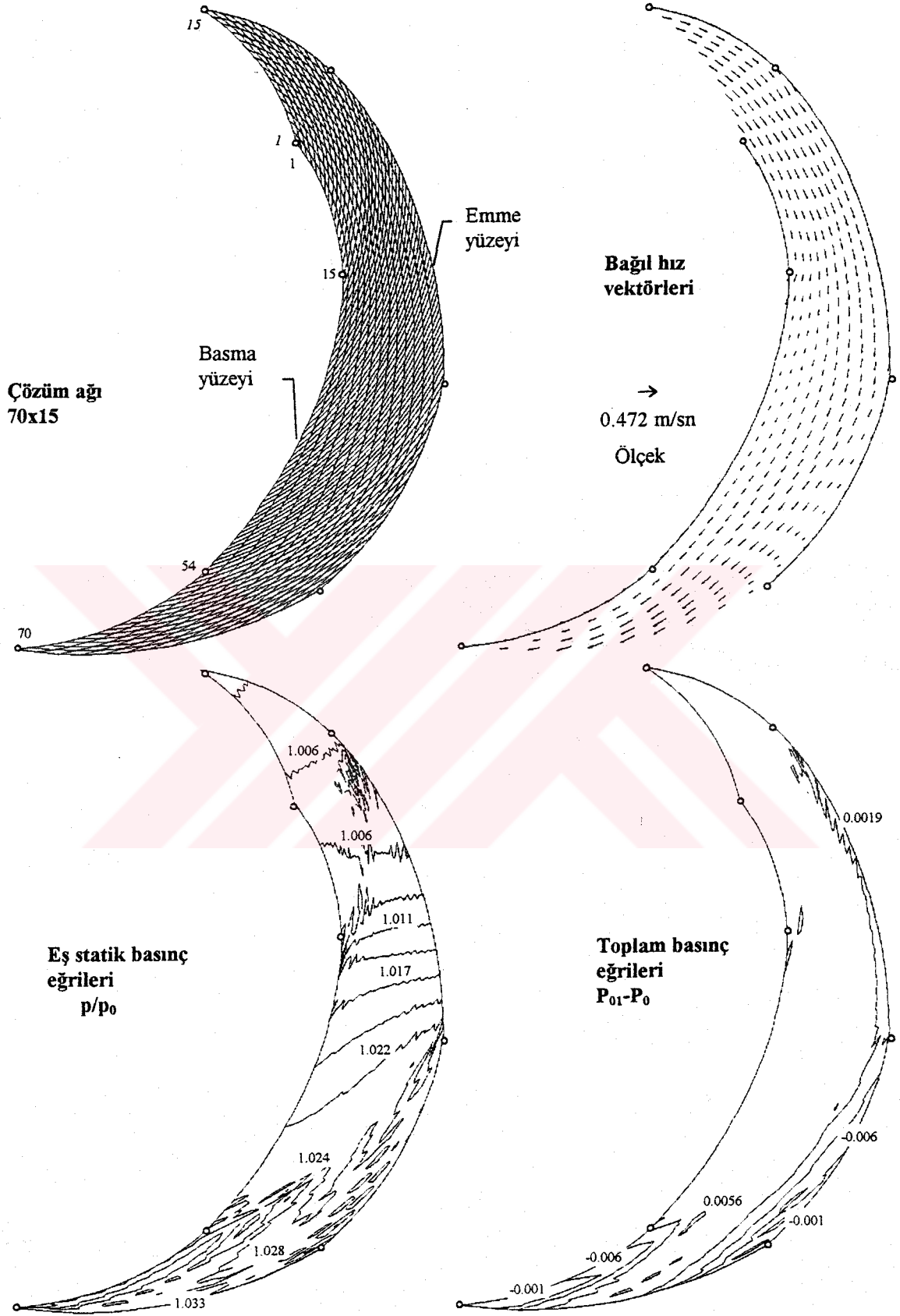


Ölçme paneli

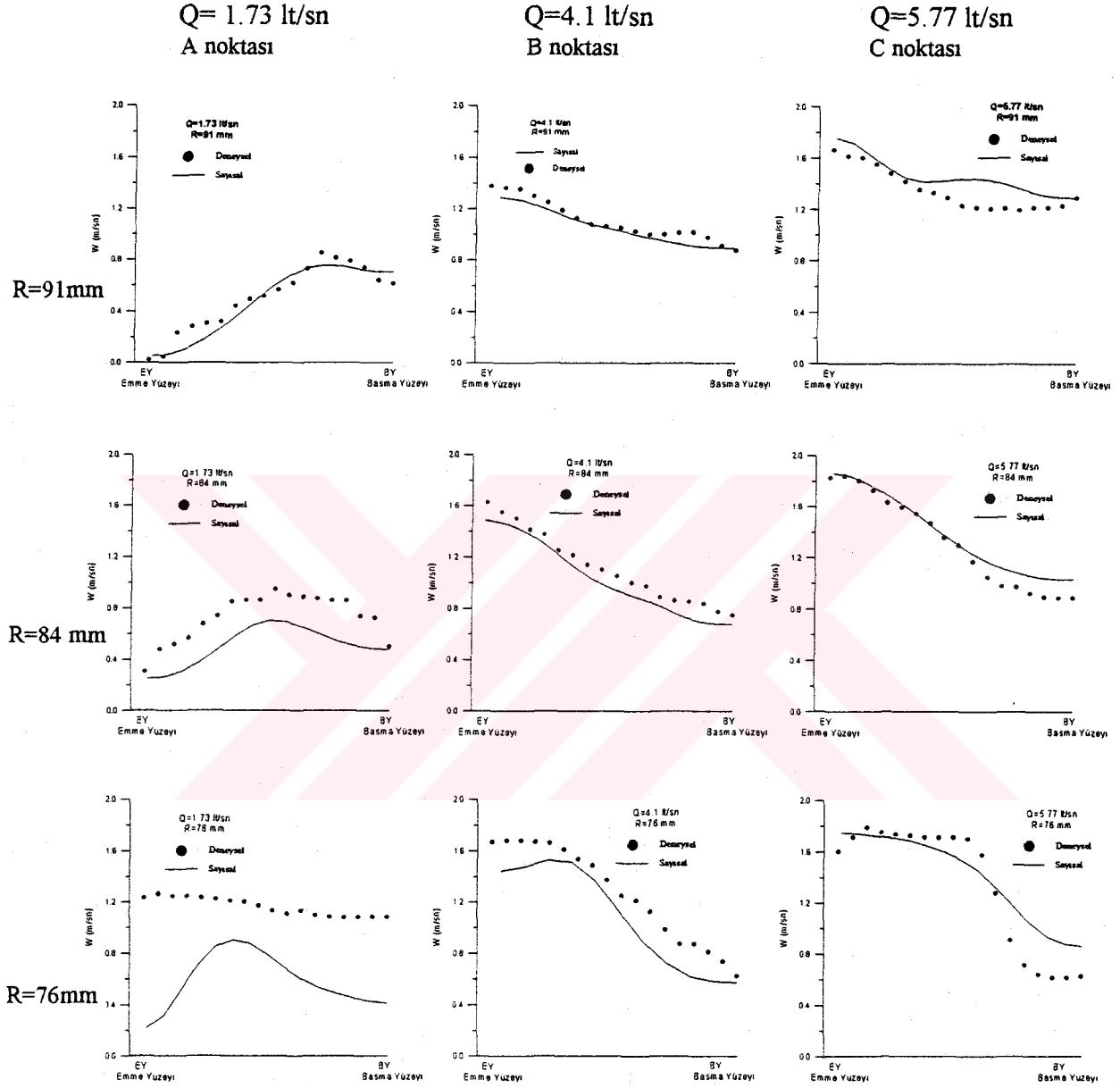


Deney düzeneği akış şeması

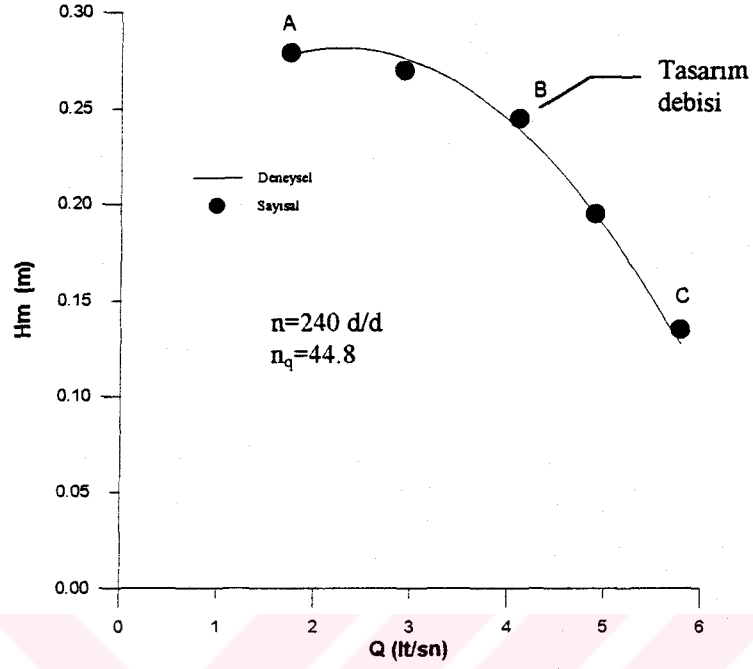
Şekil 5.8g Ölçme paneli ve deney düzeneği akış şeması



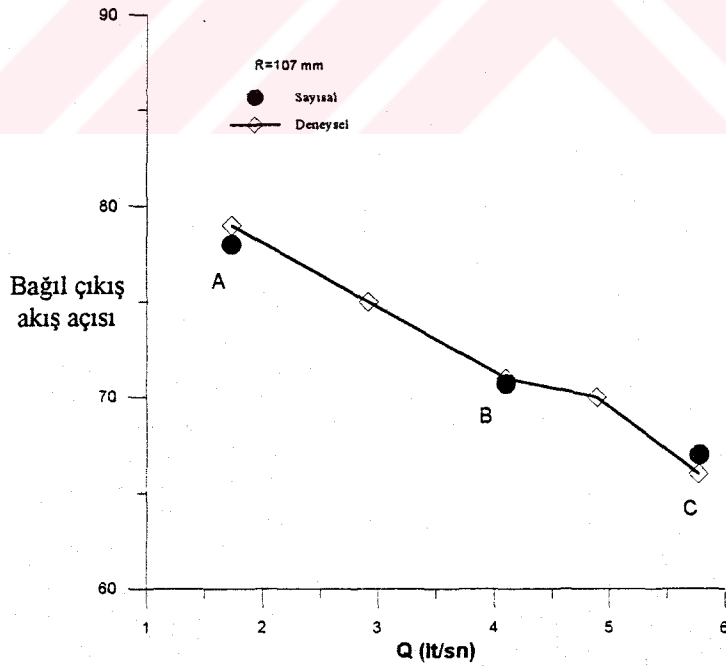
Şekil 5.9b Çözüm ağı, hız vektörleri, eş statik ve toplam basınç eğrileri



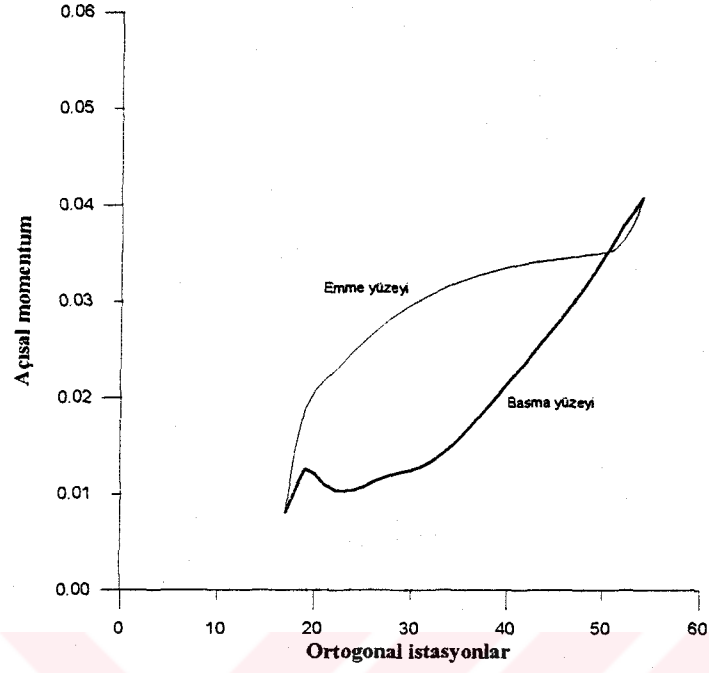
Şekil 5.9c Farklı yarıçaplarda ölçülen deneysel değerlerin sayısal sonuçlarla karşılaştırılması (A,B ve C noktaları deneysel performans eğrisi üzerindeki noktaları göstermektedir)



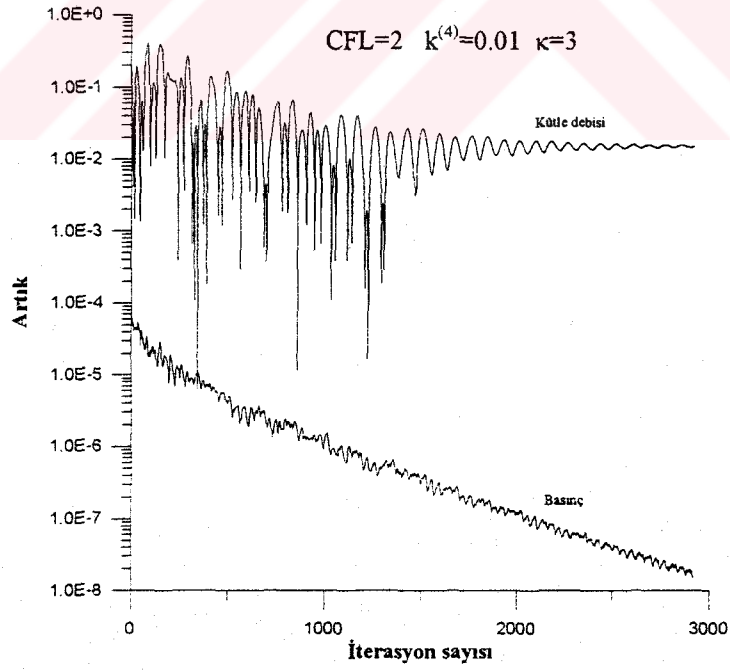
Şekil 5.9d Sayısal olarak elde edilen performans eğrisinin deneysel değerlerle karşılaştırılması



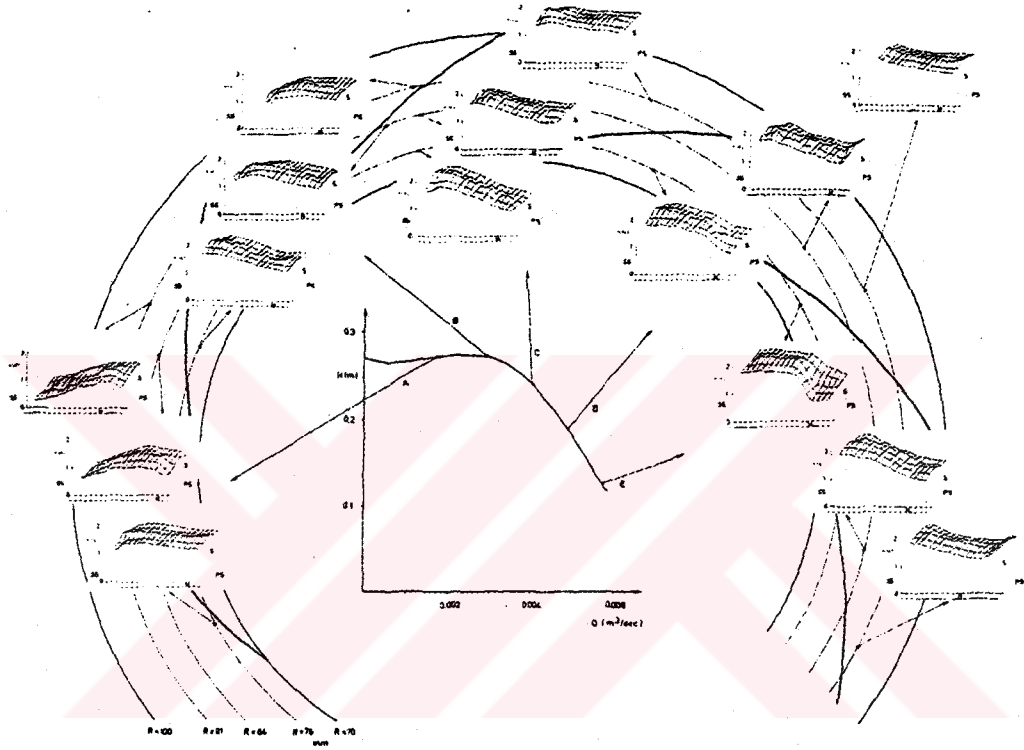
Şekil 5.9e Çark çıkışında elde edilen bağıl çıkış açısının deneysel olarak ölçülen değerlerle karşılaştırılması



Şekil 5.9f Tasarım debisinde kanatlar üzerindeki açısal momentum değişimi



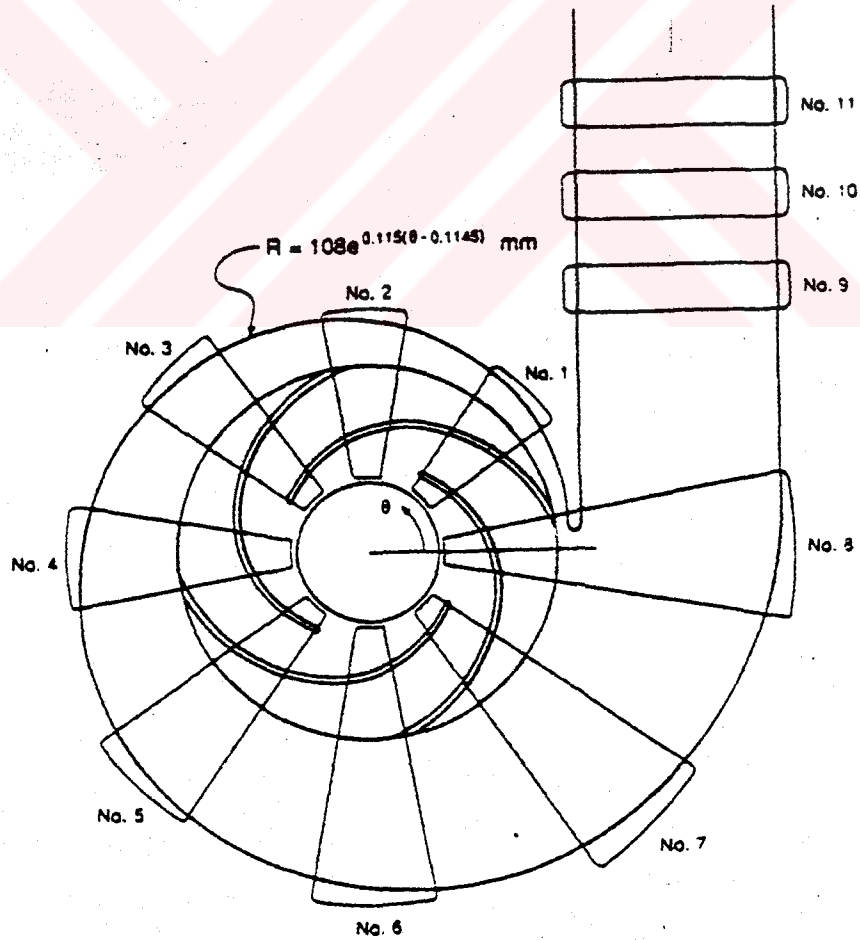
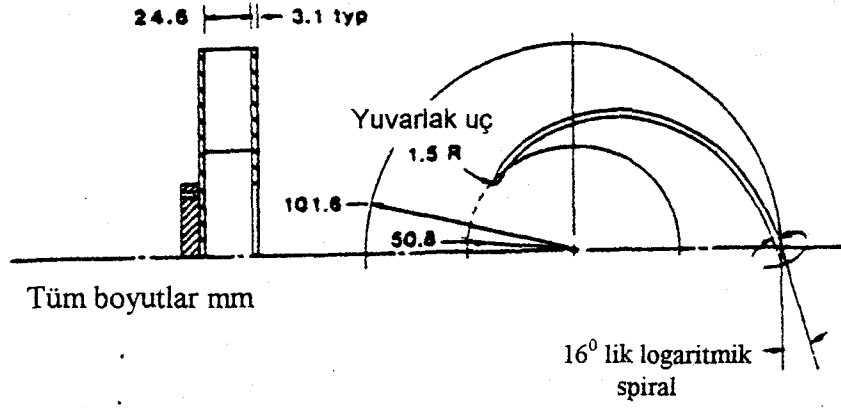
Şekil 5.9g Yakınsama eğrisi



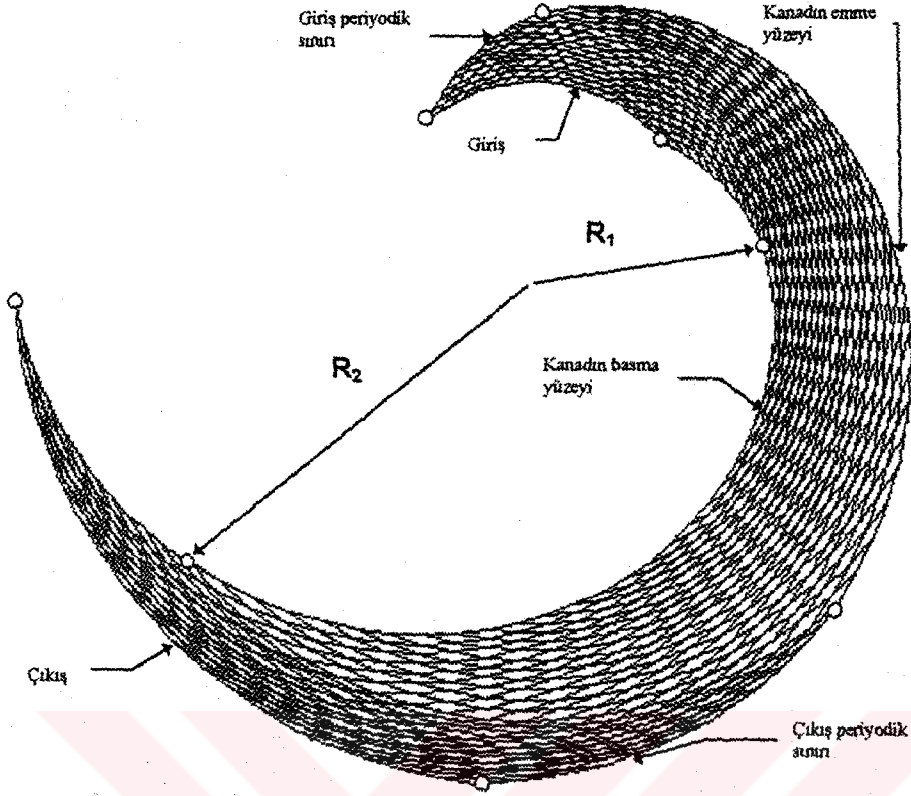
Kanatlara teğet bağıl hızlar

Şekil 5.9h KANNEMANS (1980) den alınan deneysel sonuçlar

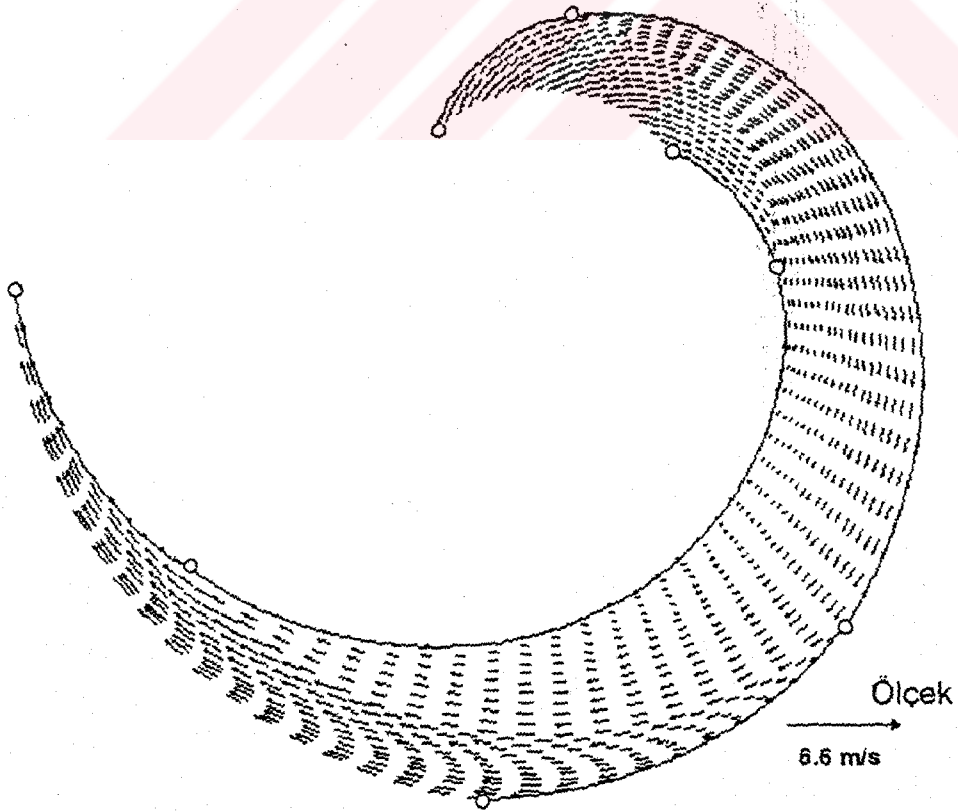
SİLİNDİRİK KANATLI KAPALI POMPA ÇARKI H=SABİT (2. ÖRNEK)



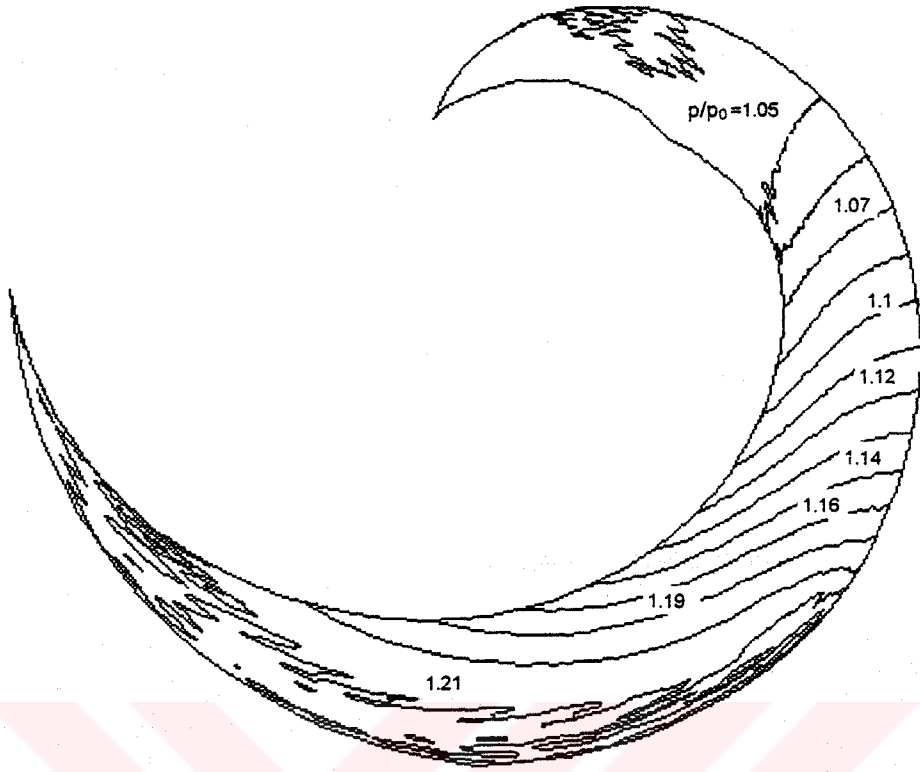
Şekil 5.10a Çark geometrisi (MINER ve diğ, 1988)



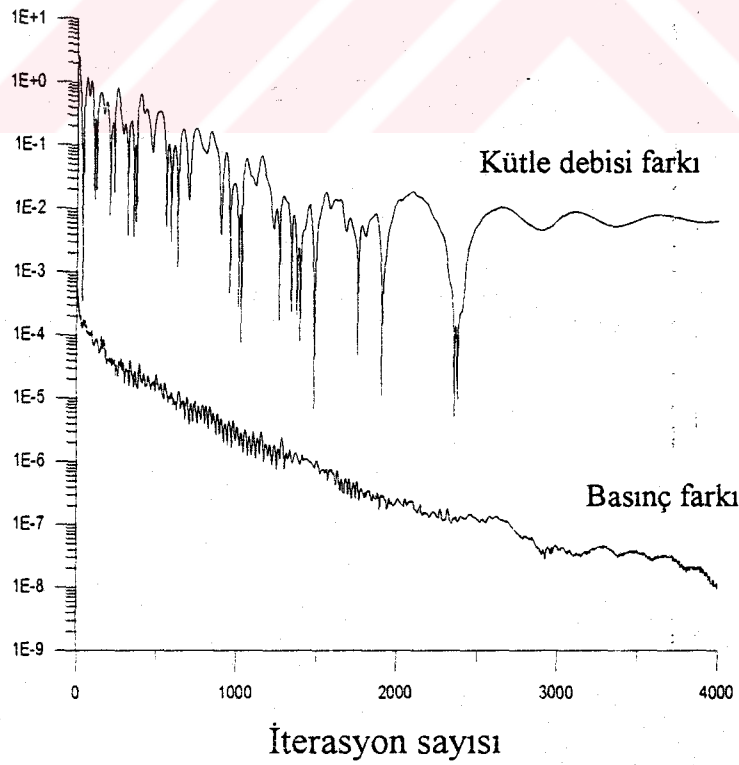
Şekil 5.10b Çözüm ağı $R_1=50.8$ mm, $R_2=101.6$ mm



Şekil 5.10c Tasarım debisinde sayısal olarak hesaplanmış hız vektörleri ($Q=6.3$ lt/s)



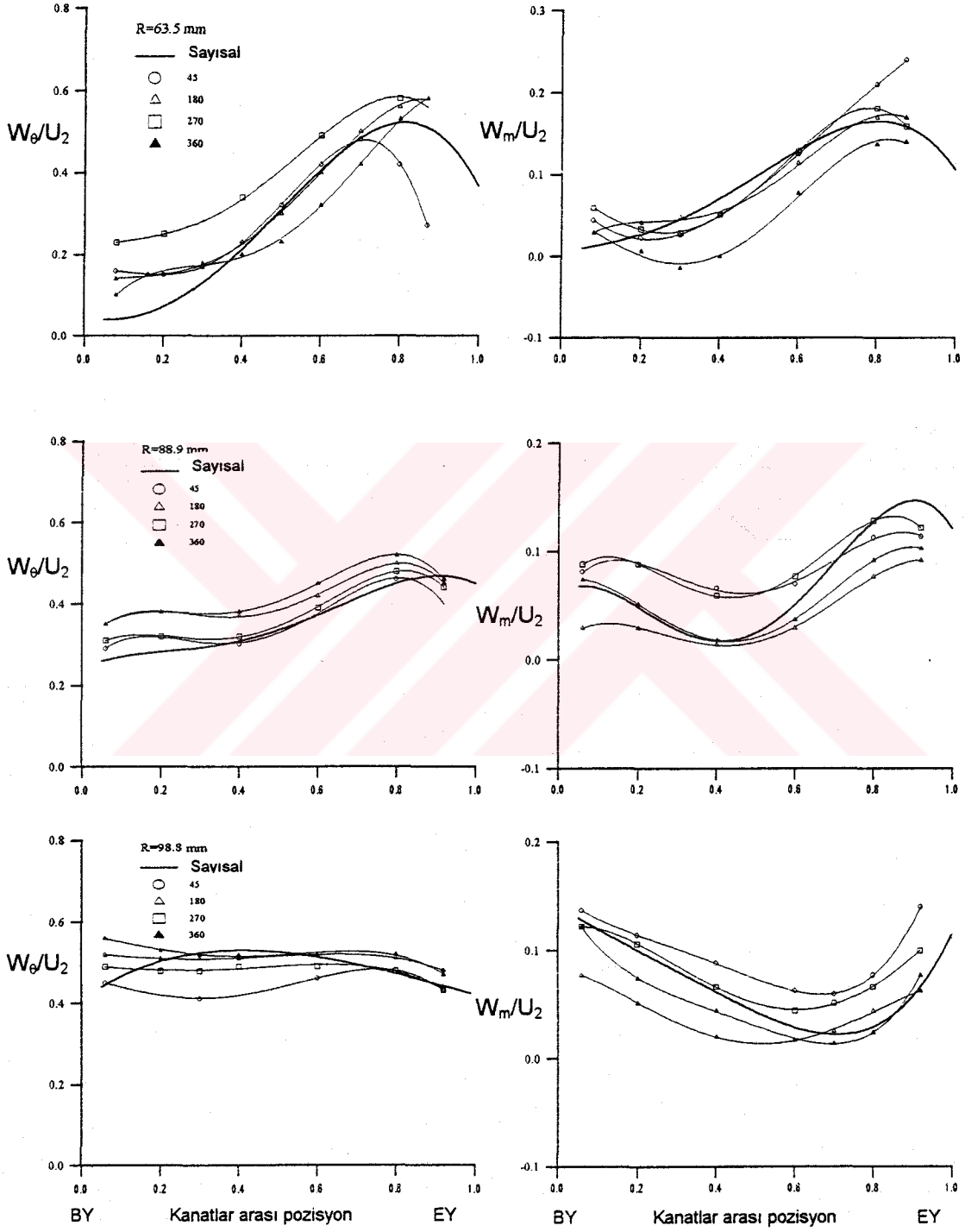
Şekil 5.10d Kanatlar arası yüzeyde eş statik basınç eğrileri
($P_0=100\ 000\ \text{Pa}$)



Şekil 5.10e Tasarım debisindeki yakınsama eğrisi

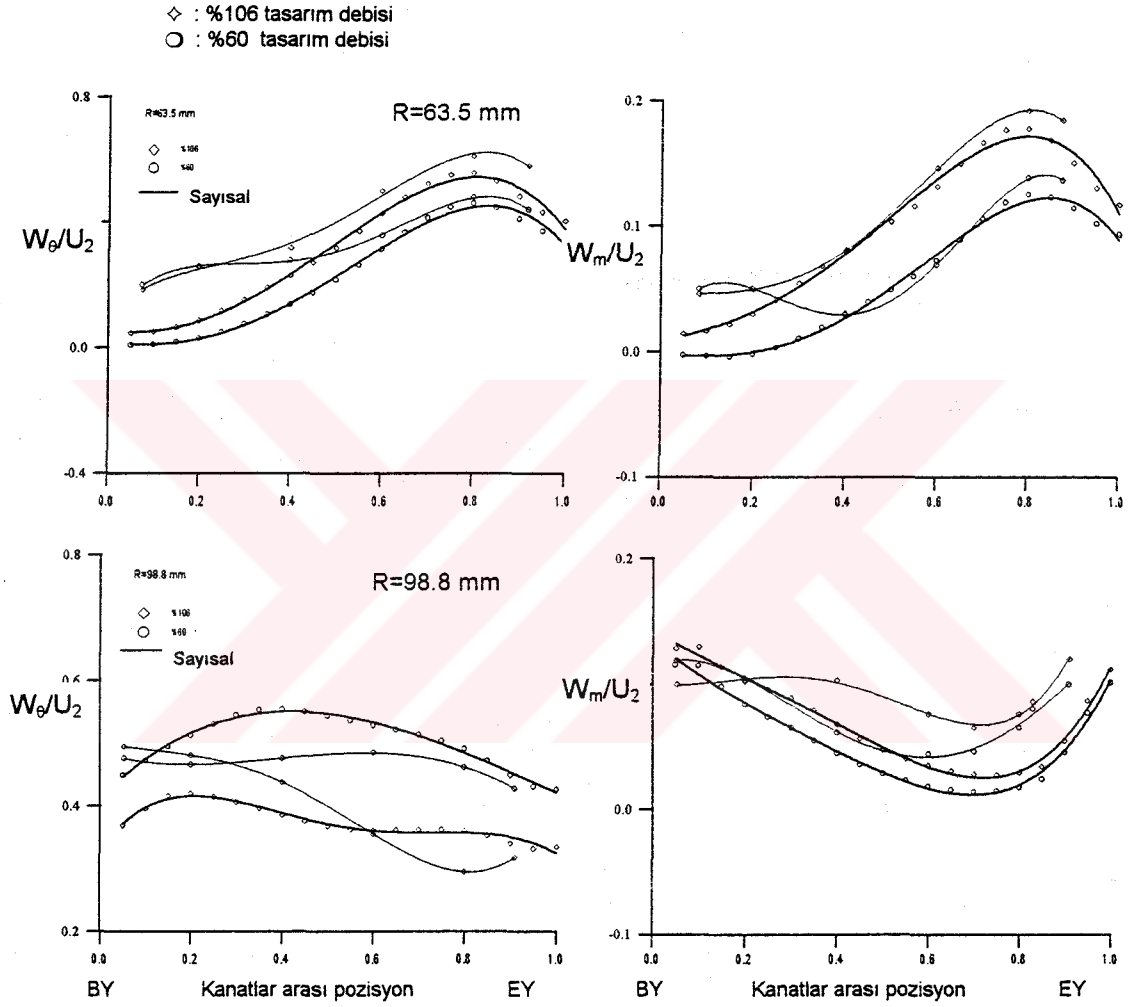
TASARIM DEBİSİ $Q=6.3$ L/S

▲ ○ □ △ : Salyangoz diline nazaran
ölçme düzlemi açıları

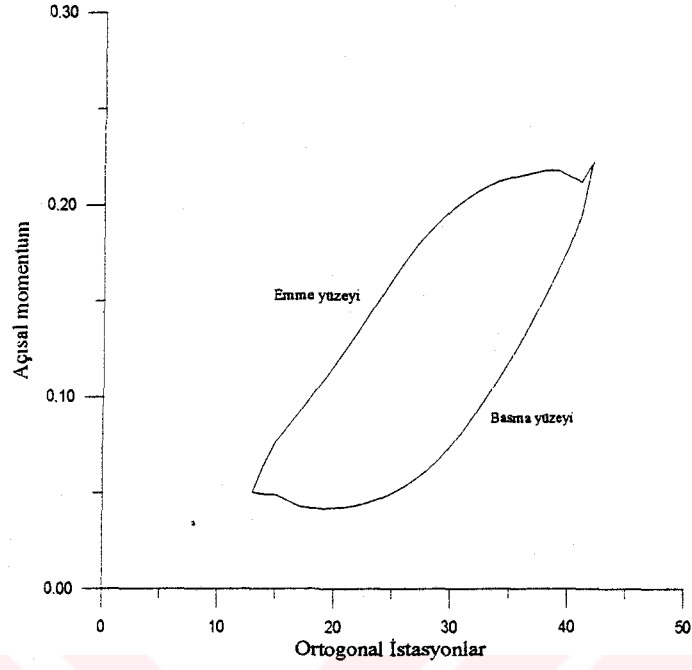


Şekil 5.10f Deneysel olarak farklı ölçme düzlemlerindeki ölçümlerin (45, 180, 270, 360) sayısal sonuçla karşılaştırılması

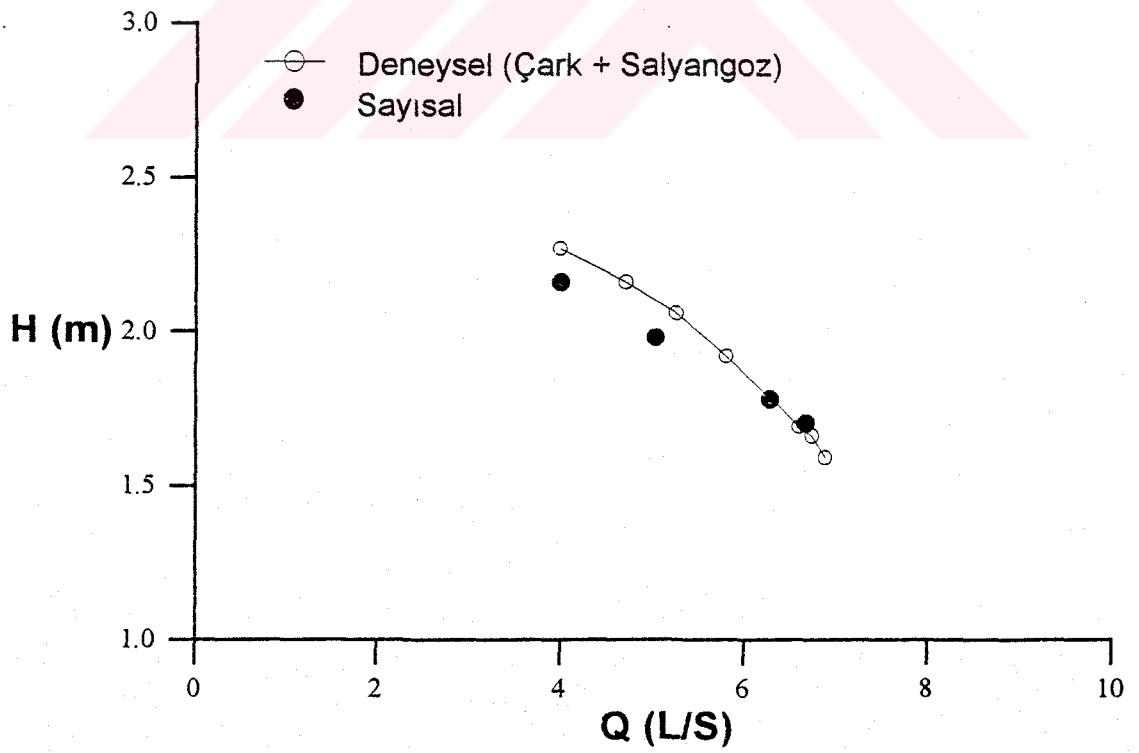
FARKLI AKIŞ DEBİLERİ



Şekil 5.10g Farklı akış debilerinde deneysel ve sayısal sonuçların karşılaştırılması

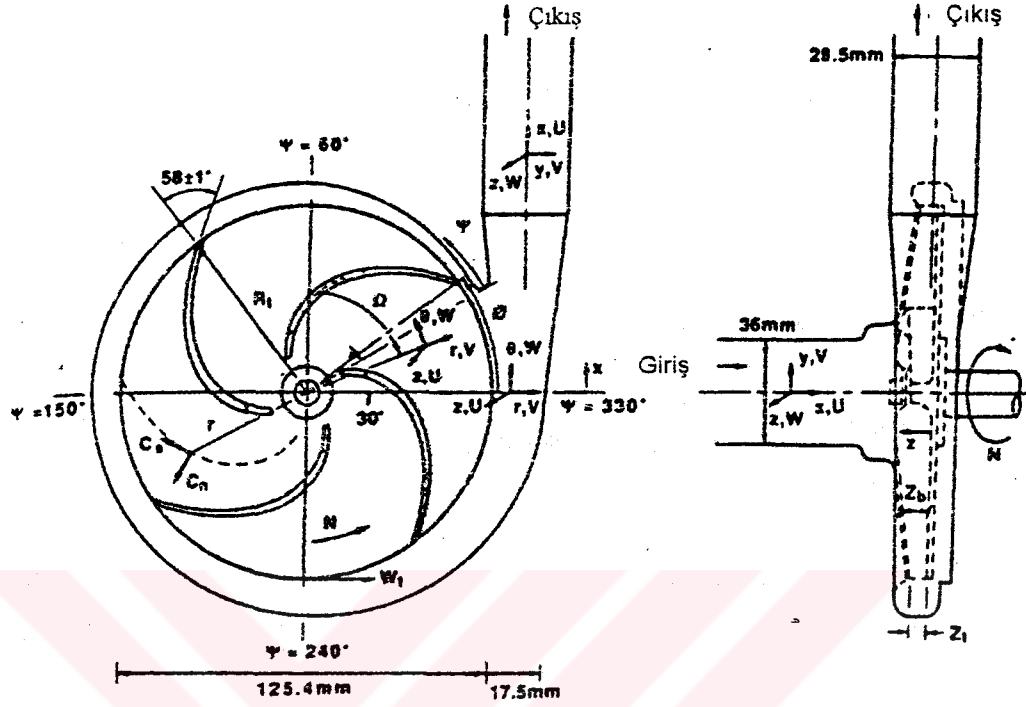


Şekil 5.10h Kanat yüzeylerindeki açısal momentum değişimi

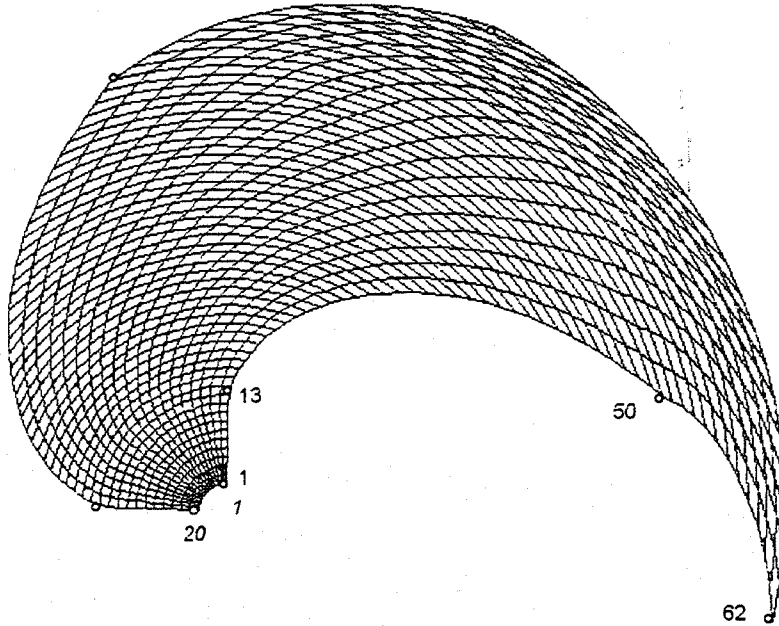


Şekil 5.10k Deneysel ve sayısal performans eğrilerinin karşılaştırılması

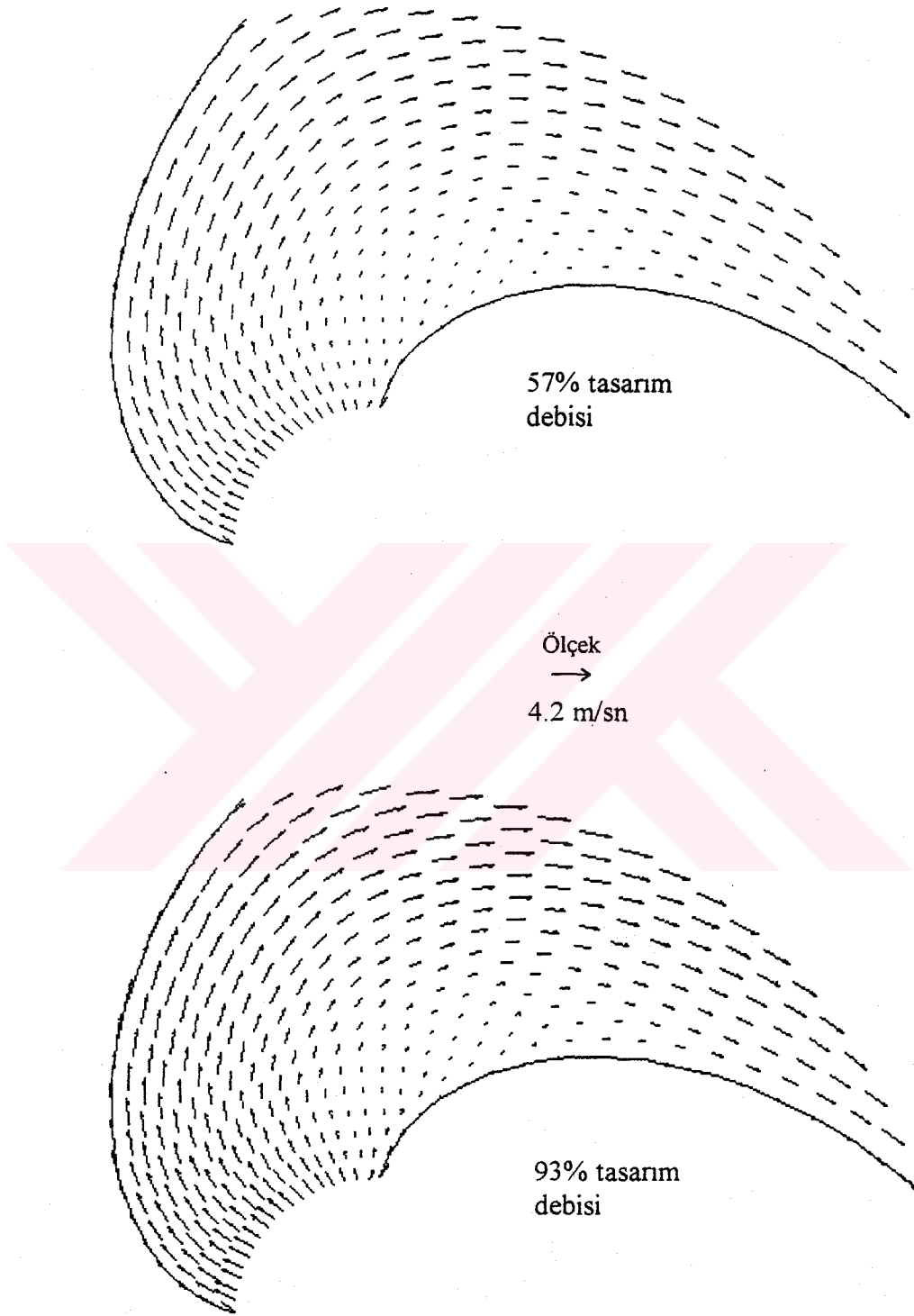
SİLİNDİRİK KANATLI KAPALI POMPA ÇARKI (H≠ SABİT)



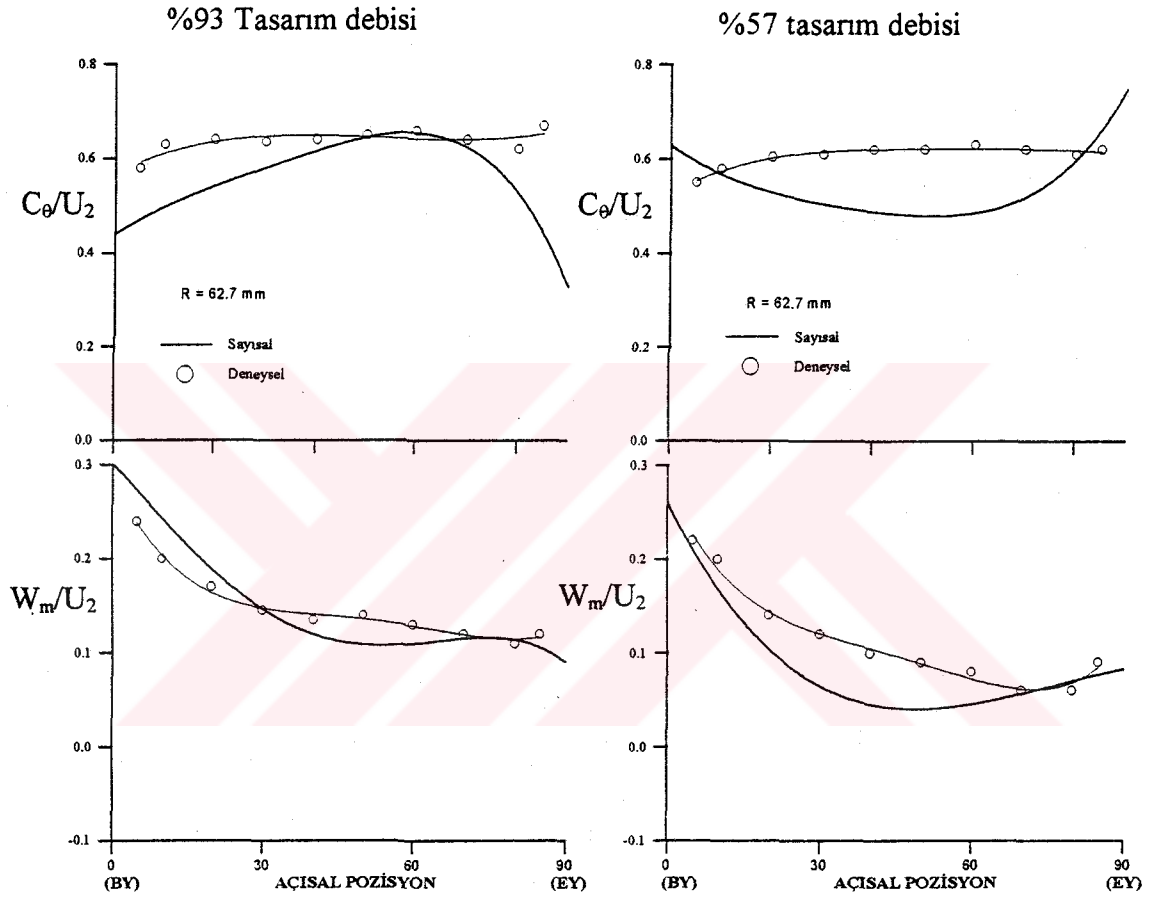
Şekil 5.11a Çark geometrisi (LIU ve diğ., 1994)



Şekil 5.11b Çözüm ağı

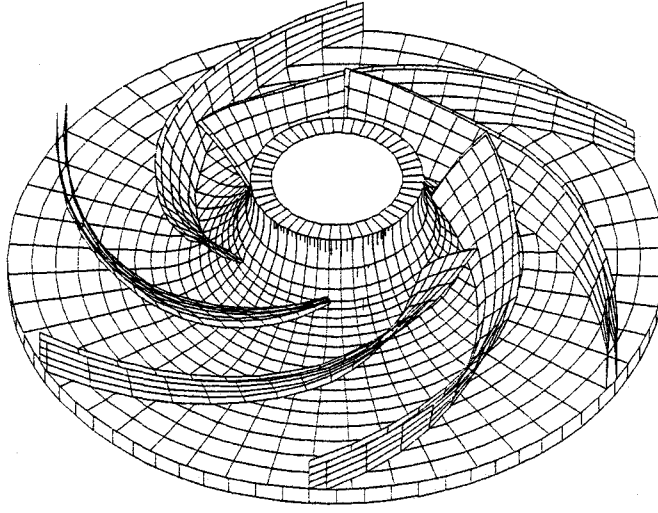


Şekil 5.11c Farklı tasarım debilerinde sayısal olarak hesaplanmış hız vektörleri

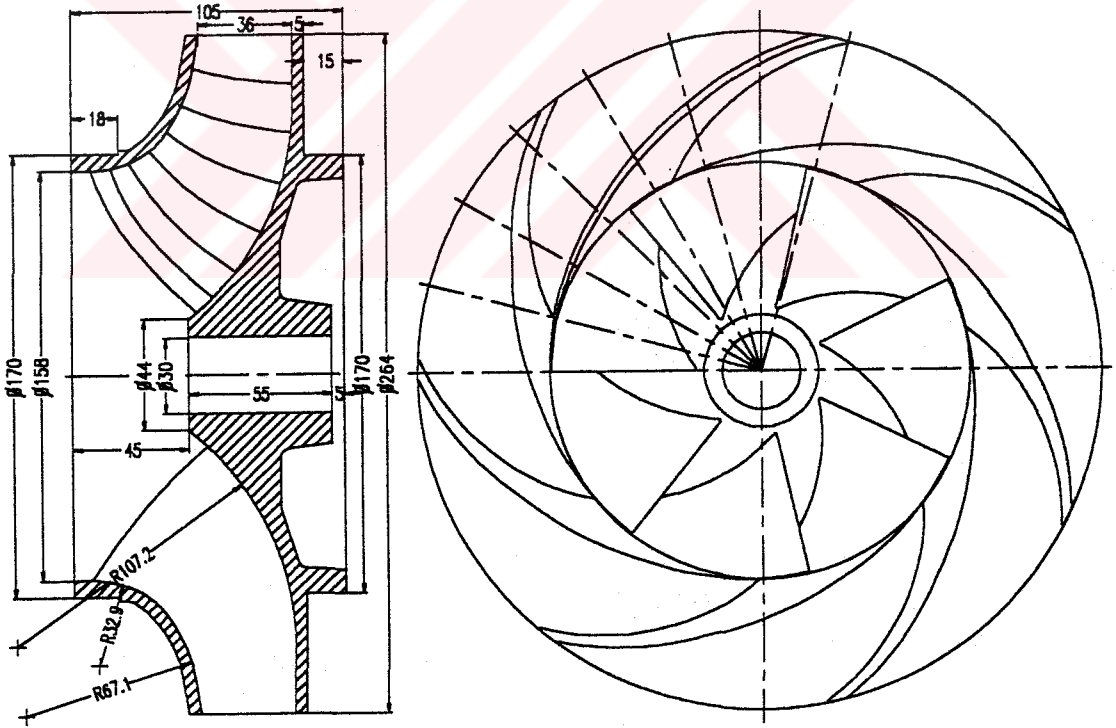


Şekil 5.11d Farklı tasarım debilerinde deneysel ve sayısal değerlerin karşılaştırılması

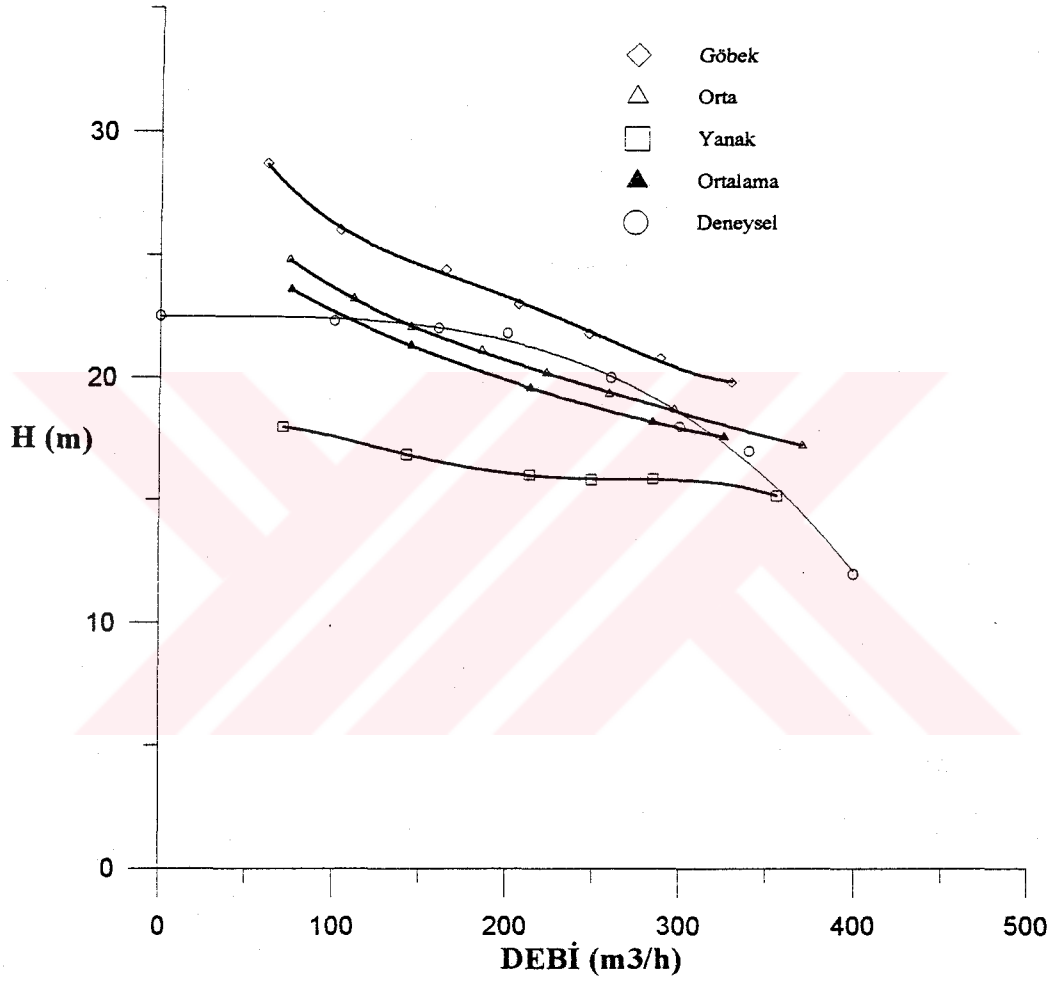
DÖNÜK KANATLI POMPA ÇARKI



Şekil 5.12a Endüstriyel pompa çarkı



Şekil 5.12b Çark geometrisinin meridyenel ve ön görünüşü



Şekil 5.12c Göbek, yanak ve orta kesitte hesaplanan sayısal sonuçların deneysel performans eğrisiyle karşılaştırılması

BÖLÜM 6

ÜÇ BOYUTLU SIKIŞTIRILAMAZ AKIŞ

Akışın sıkıştırılmaz, viskoz olmayan, zamana bağlı ve rotasyonel olduğu kabulü yapılarak üç boyutlu Euler denklemlerinin çözümü amaçlanmaktadır. Bu denklem sistemi birbirine bağlı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem sistemini oluşturmaktadır. Denklemler fiziksel olarak kütle korunumu ve momentumun korunumu simgelemektedir. Denklem sistemi dört bilinmeyeni içermektedir (W_r , W_θ , W_z , p).

Bağımsız değişkenler silindirik koordinatlar (r, θ, z) ve (t) zamandır. z eksenini makinenin dönme eksenini kabul edilmiştir. Akış analizi yapılacak kanatlar dönmekte iken koordinat sisteminin çark ile birlikte z eksenini etrafında sabit açılma hızında (Ω) döndüğü kabul edilir.

Bağımlı değişkenler ise basınç (p) ve bağıl hız bileşenleri (W_r, W_θ, W_z) dir.

Çıkarılışı EK-A da gösterilen bu denklemler en genel halde aşağıdaki gibi gösterilebilir (ARTS, 1985).

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{f}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\bar{g}) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{h}) + \bar{b} = 0 \quad (6.1)$$

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} p / \rho_0 \\ W_r \\ W_\theta \\ W_z \end{bmatrix} \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -W_\theta^2 / r - p / \rho_0 r - r \Omega^2 - 2 \Omega W_\theta \\ W_r W_\theta / r + 2 \Omega W_r \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{f} = \begin{bmatrix} c^2 W_r \\ W_r^2 + p / \rho_0 \\ W_r W_\theta \\ W_r W_z \end{bmatrix} \quad \bar{g} = \begin{bmatrix} c^2 W_\theta \\ W_r W_\theta \\ W_\theta^2 + p / \rho_0 \\ W_\theta W_z \end{bmatrix} \quad \bar{h} = \begin{bmatrix} c^2 W_z \\ W_r W_z \\ W_\theta W_z \\ W_z^2 + p / \rho_0 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki denklemler aşağıdaki boyutsuz denklemler kullanılarak elde edilir.

$$\begin{aligned} l &= \frac{\bar{l}}{\bar{L}} & t &= \frac{\bar{t}}{\bar{L}} \sqrt{\bar{p}_{01} / \bar{\rho}_{01}} & p &= \frac{\bar{p}}{\bar{p}_{01}} & \rho &= \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_{01}} \\ T &= \frac{\bar{T}}{\bar{T}_{01}} & W_{r,\theta,z} &= \frac{\bar{W}_{r,\theta,z}}{\sqrt{\bar{p}_{01} / \bar{\rho}_{01}}} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Zamana bağlı Euler denklemleri kullanıldığından, zaman boyutunda ilerleme tekniği kullanılarak denklemlerin çözümü yapılarak daimi haldeki çözüm elde edilmeye çalışılır. (6.1) nolu denklem sistemi lineer olarak gözükmemektedir. Fakat $\bar{f}$, $\bar{g}$, $\bar{h}$ vektörleri $\bar{U}$ vektörünün lineer olmayan fonksiyonudur. Yani bu vektörler W_r , W_θ , W_z bilinmeyenlerini içermektedir. Bu yüzden denklem sistemi sanki lineer olarak anılmaktadır.

Ayrıca denklemlerin silindirik koordinatlarda kullanılması sınır koşullarının verilmesini kolaylaştırır. Kartezyen koordinatlar kullanıldığında sınır koşullarının verilmesi için ekstra olarak dönüşüm yapmak gerekir. Bu yüzden silindirik koordinatların kullanılması çark geometrisinin daha kolay tanımlanmasını sağlamaktadır.

6.1 Denklemlerin Ayrıklaştırılması

Euler denklemlerinin analitik çözümü karmaşık geometriler için mümkün değildir. Sadece sayısal çözümler yapılabilir. Euler denklemlerinin sayısal çözümü için pek çok yöntem kullanılmıştır. Bu bölümde önceki bölümlerde tanımlanan yöntem kullanılmaktadır (HOLMES, 1989).

Bu yöntemde aşağıdaki sayısal ayrıklaştırmalar yapılır. Kısmi diferansiyel denklemlerin konuma bağlı (uzaysal) türevleri ayrıklaştırılır. Bu denklemlerin adi diferansiyel denklem sistemi haline gelmesini sağlar. Bu diferansiyel denklem sistemi çözüm ağı içerisindeki her bir noktada çözüm vektörünün bileşenlerini içermektedir.

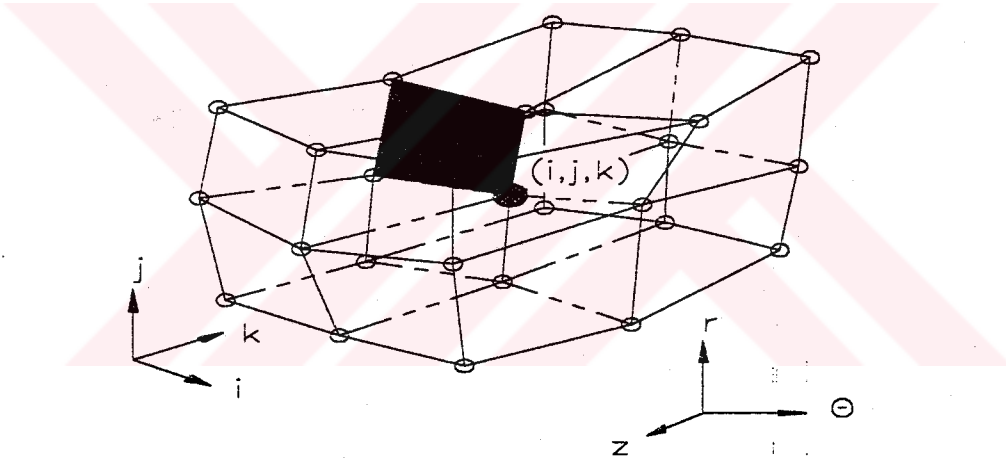
Elde edilen adi diferansiyel denklem sistemi zaman boyutunda ilerleme tekniği kullanılarak çözülür. Bu işlem iteratif olup daimi haldeki çözüm elde edilinceye kadar devam eder. Daimi haldeki çözümün elde edilmesi iki zaman adımı arasındaki çözüm vektörü bileşenlerinin değişmediği durumda tesbit edilir. İki zaman adımı arasında $\bar{U}$

vektörünün bileşenleri çözüm ağı içerisindeki tüm noktalarda makina doğruluğundan (1×10^{-6}) küçükse işlem durdurulur.

6.2 Sonlu Hacimler Tekniği

Adi diferansiyel denklem sisteminin ayrıklaştırması için literatürde sonlu farklar, sonlu elemanlar ve sonlu hacimler teknikleri kullanılmaktadır. Bu çalışmada son yıllarda oldukça popüler olan sonlu hacimler tekniği kullanılmıştır (DICK, 1991).

Sonlu hacimler tekniğinde çözüm bölgesi belirli sayıda kontrol hacimlerine bölünür ve bu hacimlerin yüzeyleri boyunca korunum denklemleri sağlanılmaya çalışılır. Kontrol hacminin tanımlanması ile ilgili literatürde farklı yaklaşımlar mevcuttur. Bu çalışmada 8 tetrahedral elemandan oluşan kontrol hacmi kullanılmıştır. (Şekil 6.1)



Şekil 6.1 Sekiz tetrahedral elemandan oluşan kontrol hacmi

(6.1) nolu denklem sisteminin ayrıklaştırma işlemi aşağıdaki gibi yapılır.

Kontrol hacmini oluşturan tetrahedral eleman için (6.1) denklemini integre edilirse,

$$\iiint_V \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \vec{f}) dV + \iiint_V \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\vec{g}) dV + \iiint_V \frac{\partial}{\partial z} (\vec{h}) dV = \iiint_V \left(\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t} + \vec{b} \right) dV \quad (6.3)$$

$$dV = r dr d\theta dz \quad (6.4)$$

(6.3) denklemi elde edilir. dV tetrahedral elemanın hacmini göstermektedir. (6.4) denklemi (6.3) de yerine konursa denklem aşağıdaki hale gelir.

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial r}(\bar{r}\bar{f})drd\theta dz + \iiint_V \frac{\partial}{\partial \theta}(\bar{g})drd\theta dz + \iiint_V \frac{\partial}{\partial z}(\bar{h})rdrd\theta dz = \iiint_V \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} + \bar{b} \right) dV \quad (6.5)$$

$$\bar{n} = n_r \bar{i}_r + n_\theta \bar{i}_\theta + n_z \bar{i}_z \quad (6.6)$$

$\bar{n}$ burada hacim elemanının yüzeyleri boyunca olan normali göstermektedir. Hacim integrallerini yüzey integrallerine çevirmek için Gauss Diverjans Teoremi kullanılırsa denklem aşağıdaki hali alır.

$$\iint_S \bar{f} n_r r d\theta dz + \iint_S \bar{g} n_\theta dr dz + \iint_S \bar{h} n_z r dr d\theta = \iiint_V \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} + \bar{b} \right) dV \quad (6.7)$$

Kontrol hacimleri yaklaşık olarak düzgün tetrahedral elemanlardan oluştuğu için yüzey integralleri, her bir kontrol hacminin yüzeyleri boyunca hesaplanan integrallerin toplamı olarak düşünülebilir (ARTS, 1985).

$$\sum_{m=1}^6 \iint_S \bar{f} n_r r d\theta dz + \sum_{m=1}^6 \iint_S \bar{g} n_\theta dr dz + \sum_{m=1}^6 \iint_S \bar{h} n_z r dr d\theta = \iiint_V \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} + \bar{b} \right) dV \quad (6.8)$$

$$S = \sum_{m=1}^6 S_m$$

Yüzeyler boyunca mevcut akı bileşenlerinin doğrusal olduğu kabul edilirse yukarıdaki denklem,

$$\sum_{m=1}^6 \bar{f}_m \iint_{S_m} n_r r d\theta dz + \sum_{m=1}^6 \bar{g}_m \iint_{S_m} n_\theta dr dz + \sum_{m=1}^6 \bar{h}_m \iint_{S_m} n_z r dr d\theta = \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} + \bar{b} \right) V \quad (6.9)$$

$$\sum_{m=1}^6 \bar{f}_m S_{m_r} + \sum_{m=1}^6 \bar{g}_m S_{m_\theta} + \sum_{m=1}^6 \bar{h}_m S_{m_z} = \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} + \bar{b} \right) V \quad (6.10)$$

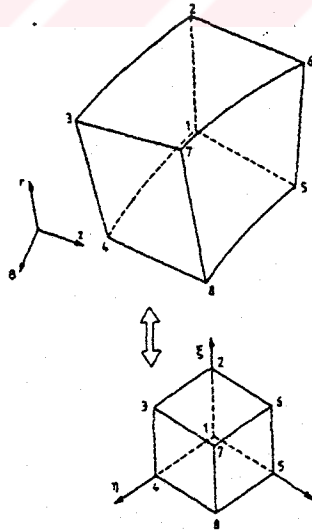
hale gelir. (6.10) denkleminde S_{mr} , $S_{m\theta}$, S_{mz} değerleri hacim elemanının yüzeyleri boyunca r , θ ve z yönündeki izdüşüm alanlarını göstermektedir. $\bar{f}$, $\bar{g}$, $\bar{h}$ ve $\bar{b}$ vektörleri ise çözülmesi istenen bağımlı değişkenleri içermektedir.

(6.10) nolu denklem sisteminin çözülebilmesi için herhangi bir kontrol hacmi için izdüşüm alanları ve kontrol hacminin hesaplanması gerekir.

6.3 Kontrol Hacimleri ve İzdüşüm Alanlarının Hesaplanması

Çözüm bölgesi içindeki her bir tetrahedral hacim elemanı dönüşüm yardımıyla (ξ, η, τ) koordinat sistemine çevrilir. Böylece hacim elemanının koordinatları bu koordinatlar yardımıyla ifade edilir. Dönüşüm denklemleri aşağıda gösterilmiştir (ARTS, 1985).

$$\begin{aligned} r &= \sum_{m=1}^8 K_m r_m \\ \theta &= \sum_{m=1}^8 K_m \theta_m \\ z &= \sum_{m=1}^8 K_m z_m \end{aligned} \quad (6.11)$$



Şekil 6.2 Tetrahedral eleman

$$\begin{aligned}
K_1 &= (1-\xi)(1-\eta)(1-\tau) & K_5 &= (1-\xi)(1-\eta)\tau \\
K_2 &= \xi(1-\eta)(1-\tau) & K_6 &= \xi(1-\eta)\tau \\
K_3 &= \xi\eta(1-\tau) & K_7 &= \xi\eta\tau \\
K_4 &= (1-\xi)\eta(1-\tau) & K_8 &= (1-\xi)\eta\tau
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Kontrol hacminin hesaplanması ise aşağıda gibidir. (J jakobyen matrisini göstermektedir).

$$V = \iiint_V r dr d\theta dz = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 r J d\xi d\eta d\tau \tag{6.13}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial \theta}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial \theta}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial r}{\partial \tau} & \frac{\partial \theta}{\partial \tau} & \frac{\partial z}{\partial \tau} \end{vmatrix}$$

Kontrol hacmi 8 tane tetrahedral elemandan oluştuğu için elde edilen hacimler toplanarak her bir noktaya ait kontrol hacmi hesaplanır.

Hacim elemanının yüzey izdüşüm alanlarının hesaplanması ise benzer şekilde silindirik koordinatlardan (ξ, η, τ) koordinatlarına transformasyonla geçilir.

$$\begin{aligned}
r &= \sum_{m=1}^4 K_m r_m \\
\theta &= \sum_{m=1}^4 K_m \theta_m \\
z &= \sum_{m=1}^4 K_m z_m
\end{aligned} \tag{6.14}$$

$$\begin{aligned}
K_1 &= (1-\delta)(1-\lambda) & K_3 &= \delta\lambda \\
K_2 &= \delta(1-\lambda) & K_4 &= (1-\delta)\lambda
\end{aligned} \tag{6.15}$$

δ ve λ sırasıyla (ξ, η) , (η, τ) ve (ξ, τ) yüzeylerini simgelemektedir (Şekil 6.2).

Yüzey üzerinde herhangi bir noktadan geçen vektör $\vec{q}$ ile gösterilirse alanı hesaplanacak yüzeyin normali aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial \vec{q}}{\partial \delta} \times \frac{\partial \vec{q}}{\partial \lambda}}{\left| \frac{\partial \vec{q}}{\partial \delta} \times \frac{\partial \vec{q}}{\partial \lambda} \right|} \quad (6.16)$$

Hacim elemanını oluşturan yüzey alanları böylelikle kolaylıkla hesaplanabilir.

$$dS = \left| \frac{\partial \vec{q}}{\partial \delta} \times \frac{\partial \vec{q}}{\partial \lambda} \right| d\delta d\lambda \quad (6.17)$$

$$\iint_{S_m} \vec{n} dS = \iint_{0 \ 0}^1 \frac{\partial \vec{q}}{\partial \delta} \times \frac{\partial \vec{q}}{\partial \lambda} d\delta d\lambda \quad (6.18)$$

(6.18) nolu denklemin sağ tarafındaki vektörel çarpımın bileşenleri ise aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial \delta} = \frac{\partial \vec{q}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \delta} + \frac{\partial \vec{q}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \delta} + \frac{\partial \vec{q}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \delta} = \frac{\partial r}{\partial \delta} \vec{i}_r + \frac{\partial \theta}{\partial \delta} r \vec{i}_\theta + \frac{\partial z}{\partial \delta} \vec{i}_z \quad (6.19)$$

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial \lambda} = \frac{\partial \vec{q}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \lambda} + \frac{\partial \vec{q}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} + \frac{\partial \vec{q}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \lambda} = \frac{\partial r}{\partial \lambda} \vec{i}_r + \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} r \vec{i}_\theta + \frac{\partial z}{\partial \lambda} \vec{i}_z$$

Alanı hesaplanan yüzeyin r, θ, z yönündeki izdüşüm alanları ise,

$$S_{m_r} = \iint_{S_m} n_r r d\theta dz = \iint_{0 \ 0}^1 r \left(\frac{\partial \theta}{\partial \delta} \frac{\partial z}{\partial \lambda} - \frac{\partial z}{\partial \delta} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} \right) d\delta d\lambda$$

$$S_{m_\theta} = \iint_{S_m} n_\theta r dr dz = \iint_{0 \ 0}^1 r \left(\frac{\partial z}{\partial \delta} \frac{\partial r}{\partial \lambda} - \frac{\partial r}{\partial \delta} \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right) d\delta d\lambda \quad (6.20)$$

$$S_{m_z} = \iint_{S_m} n_z r dr d\theta = \iint_{0 \ 0}^1 r \left(\frac{\partial r}{\partial \delta} \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} - \frac{\partial \theta}{\partial \delta} \frac{\partial r}{\partial \lambda} \right) d\delta d\lambda$$

şeklindedir. Hacim ve izdüşüm alanlarının sayısal olarak hesaplanması sayısal integrasyonla yapılmıştır. Literatürde mevcut olan 3 boyutlu Simpson veya Yamuk metodu bu bölümde uygulanmıştır.

Sonlu hacimler tekniğinde kontrol hacimlerinin hesaplanması için değişik yaklaşımlar olduğu gibi çözüm vektörünü oluşturan bileşenlerin tanımlandığı noktalar için de farklı yaklaşımlar mevcuttur. Bu çalışmada eleman köşeli yaklaşım kullanılmıştır. Yani hacim elemanının köşe noktalarında bağımlı değişkenler sayısal olarak hesaplanmaktadır. (Diğer bir yaklaşım türü olan eleman merkezli yaklaşımda ise bağımlı değişkenler eleman merkezlerinde hesaplanmaktadır.) Eleman köşeli yaklaşım katı duvarlarda sınır koşullarının verilmesi için oldukça uygundur. Yüzey üzerindeki statik basınç değerleri yüzeyi oluşturan noktalar kullanılarak hesaplanır.

(6.10) denkleminde bakıldığında hacim elemanını oluşturan yüzeylerden geçen akı vektörlerinin de ayrıca hesaplanması gerekir. Bunun için iki yaklaşım mevcuttur.

Daha çok fiziksel olan birinci yaklaşımda her bir nokta için akı vektörleri hesaplanarak yüzeyden geçen ortalama akı bulunur.

Örnek olarak herhangi bir yüzey için $\bar{f}$ akı vektörü ;

$$\bar{f} = \frac{1}{4}(\bar{f}_{i,j,k+} + \bar{f}_{i+1,j,k} + \bar{f}_{i,j+1,k} + \bar{f}_{i+1,j+1,k}) \quad (6.21)$$

şeklindedir. Matematiksel olarak kolaylık sağlayan ikinci yaklaşımda ise çözüm vektörünü oluşturan bileşenlerin ortalaması alınır, yüzeyden geçen akı vektörü bu ortalamalar kullanılarak hesaplanır (TURKEL, 1983).

$$\bar{f} = \bar{f} \left[\frac{1}{4}(\bar{U}_{i,j,k+} + \bar{U}_{i+1,j,k} + \bar{U}_{i,j+1,k} + \bar{U}_{i+1,j+1,k}) \right] \quad (6.22)$$

İkinci yaklaşım birinci yaklaşıma nazaran daha az aritmetik işlem içerir.

6.4 Zaman Boyutunda Denklemlerin Çözümlemesi

Şimdiye kadar anlatılanlarda sonlu hacimler tekniği ile bağımlı değişkenlerin herhangi bir zaman değerinde elde edilmesi mümkündür. Çözüm vektörü $\bar{U}$ nun bileşenlerinin değişimi her bir kontrol hacmi için hesaplanabilir. Bu işlem çözülecek olan Euler denklemlerini $4 \times N$ adi diferansiyel denkleme indirger. Burada N eleman sayısını göstermektedir. Böylece sonlu hacimler tekniği ile yapılan ayrıklaştırma işlemi çözülecek denklem sayısını azaltır. Elde edilen adi diferansiyel denklem sisteminin zaman boyutunda çözümünün elde edilebilmesi için yeni bir yonteme ihtiyaç vardır. Bunun için çok yaygın olarak kullanılan ve verimli çalışan çok adımlı açık yöntem kullanılmıştır. Açık yöntemin anlamı sadece bulunulan zaman adımındaki değerlerin hesaplanmasıdır. (Kapalı yöntemde bir sonraki zaman adımının değerleri de kullanılır) Çok adımlı açık yöntemin en kullanışlı olanı 4 adımlı Runge-Kutta yöntemidir. Klasik 4 adımlı Runge metodu aşağıdaki gibi yazılabilir (JAMESON ve diğ., 1981)

$$V_{ijk} \left(\frac{\partial}{\partial t} U_{ijk} \right) + Q_{ijk} - D_{ijk} = 0 \quad (6.23)$$

$$\begin{aligned} \bar{U}^{(0)} &= \bar{U}^n \\ \bar{U}^{(1)} &= \bar{U}^{(0)} - \alpha_1 \Delta t \bar{P}(\bar{U}^{(0)}) \\ \bar{U}^{(2)} &= \bar{U}^{(0)} - \alpha_2 \Delta t \bar{P}(\bar{U}^{(1)}) \\ \bar{U}^{(3)} &= \bar{U}^{(0)} - \alpha_3 \Delta t \bar{P}(\bar{U}^{(2)}) \\ \bar{U}^{(4)} &= \bar{U}^{(0)} - \Delta t [\alpha_4 \bar{P}(\bar{U}^{(3)}) + \alpha_5 \bar{P}(\bar{U}^{(2)}) + \alpha_6 \bar{P}(\bar{U}^{(1)}) + \alpha_7 \bar{P}(\bar{U}^{(0)})] \\ \bar{U}^{n+1} &= \bar{U}^{(4)} \end{aligned} \quad (6.24)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1/2 & \alpha_2 &= 1 & \alpha_3 &= 1 \\ \alpha_4 &= 1/6 & \alpha_5 &= 1/3 & \alpha_6 &= 1/3 & \alpha_7 &= 1/6 \end{aligned}$$

Bu denklemlerde $\bar{P}(\bar{U})$ artık ve sönümleme terimlerini içermektedir.

$$\bar{P}(\bar{U}^{(i)}) = \bar{Q}(\bar{U}^{(i)}) + \bar{D}(\bar{U}^{(i)}) \quad (6.25)$$

Klasik Runge-Kutta yöntemi 4 artık ve sönümleme akı vektörünün hesabını gerektirir. Ayrıca her bir adımda ara değerlerin hesaplama esnasında depolanması gerekir. Bu 3 boyutlu uygulamalarda büyük problem yaratır. Bu yüzden Jameson tarafından önerilen değiştirilmiş yöntem bu çalışmada kullanılmıştır (JAMESON ve diğ., 1981).

$$\begin{aligned}
 \bar{U}^{(0)} &= \bar{U}^n \\
 \bar{U}^{(1)} &= \bar{U}^{(0)} - \alpha_1 \Delta t \bar{P}(\bar{U}^{(0)}) \\
 \bar{U}^{(2)} &= \bar{U}^{(0)} - \alpha_2 \Delta t \bar{P}(\bar{U}^{(1)}) \\
 \bar{U}^{(3)} &= \bar{U}^{(0)} - \alpha_3 \Delta t \bar{P}(\bar{U}^{(2)}) \\
 \bar{U}^{(4)} &= \bar{U}^{(0)} - \alpha_4 \Delta t \bar{P}(\bar{U}^{(3)}) \\
 \bar{U}^{n+1} &= \bar{U}^{(4)}
 \end{aligned} \tag{6.26}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= 1/4 & \alpha_2 &= 1/3 & \alpha_3 &= 1/2 \\
 \alpha_4 &= 1 & \alpha_5 &= 0 & \alpha_6 &= 0 & \alpha_7 &= 0
 \end{aligned}$$

Bu yöntem ara değerlerin depolanmasını gerektirmez. Bu yöntemin kararlılık analizi Fourier analizi ile yapılır. Taşınım ve sönümleme operatörleri lineer kabul edilirse, bağımlı değişkenleri içeren $\bar{U}$ vektörünün bir sonraki zaman adımındaki değeri, ara değerler elimine edildiği takdirde aşağıdaki gibidir.

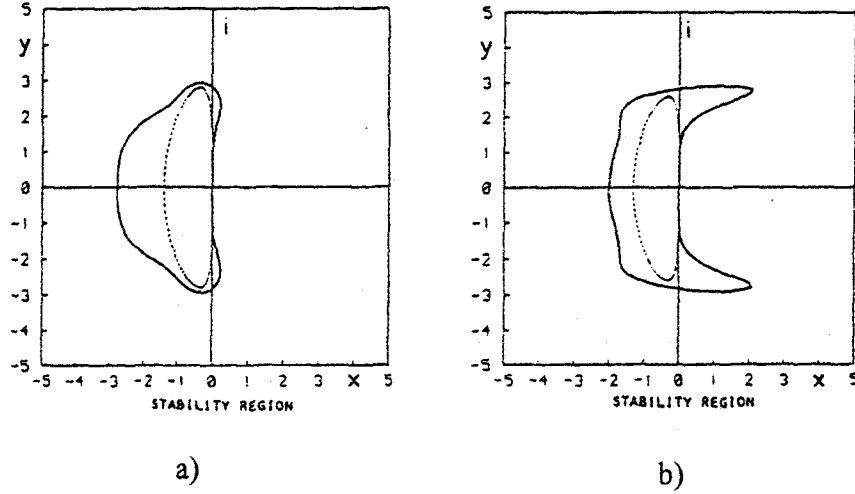
$$\bar{U}^{n+1} = \bar{U}^n - \Delta t \left[\bar{P}(\bar{U}^n) - \frac{2}{3} \Delta t \bar{P}\bar{P}(\bar{U}^n) - \frac{1}{3} \Delta t^2 \bar{P}\bar{P}\bar{P}(\bar{U}^n) - \frac{1}{12} \Delta t^3 \bar{P}\bar{P}\bar{P}(\bar{U}^n) \right] \tag{6.27}$$

Von-Neuman kararlılık analizi kullanıldığında, büyüme faktörü için aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\bar{U}^n = G_m \bar{U}^{n+1} \tag{6.28}$$

$$G_m = \left[1 - z - \frac{2}{3} z^2 - \frac{1}{3} z^3 - \frac{1}{12} z^4 \right]$$

z kompleks sayıyı göstermek üzere sistemin kararlı olabilmesi için büyüme faktörünün birden küçük olması gerekir.



Şekil 6.3 Kararlılık eğrileri a)Standart Runge-Kutta yöntemi b) Düzenlenmiş yöntem

Kararlılık bölgesiyle imajiner eksenin kesişimi maximum Courant sayısını belirler. Bu değer $2\sqrt{2}$ ye kadar çıkmaktadır. Değiştirilmiş Runge-Kutta yönteminde sönümlenme operatörlerinin sadece birinci adımda hesaplanması ve diğer adımlar için bu değerlerin kullanılması bilgisayar zamanını azaltır.

$$\bar{P}(\bar{U}^{(1)}) = \bar{Q}(\bar{U}^{(1)}) + \bar{D}(\bar{U}^{(0)}) \quad (6.29)$$

Bu değişiklik orijinal yöntemin kararlılık bölgesini fazla etkilemez.

Klasik yöntemin ve değiştirilmiş yöntemin kararlılık eğrileri Şekil 6.3 de gösterilmiştir (KROLL ve JAIN, 1987).

6.5 Kararlılık Analizi

Kararlılık için, çözüm bölgesi içindeki herhangi bir nokta için fiziksel bölgenin etkisi, nümerik bölgenin içinde kalmalıdır (HOLMES, 1989).

3 boyutlu, eşit aralıklı ve ortogonal olmayan bir çözüm ağında kararlılık için gerekli zaman adımı aşağıda gösterilmiştir.

$$\Delta t_{i,j,k} \leq \text{CFL} \left(\frac{|A_1|}{\Delta x} + \frac{|A_2|}{\Delta y} + \frac{|A_3|}{\Delta z} \right)^{-1} \quad (6.30)$$

CFL Courant sayısını, $|A_1|$, $|A_2|$ ve $|A_3|$ ise Jakobyen matrisinin bileşenlerini göstermektedir.

$$A_1 = \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{U}} \right) \quad A_2 = \left(\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \tilde{U}} \right) \quad A_3 = \left(\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{U}} \right) \quad (6.31)$$

Bu matrislerin özdeğerleri hesaplanıp (6.30) denkleminde yerine konulduğunda aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\Delta t_{i,j,k} \leq C \left(\frac{|W_r| + c}{\Delta x} + \frac{|W_\theta| + c}{\Delta y} + \frac{|W_z| + c}{\Delta z} \right)^{-1} \quad (6.32)$$

Bu diğer bir yazılış şekliyle aşağıdaki gibi gösterilebilir (RIZZI ve ERIKSSON, 1985).

$$\Delta t_{ij} \leq \text{CFL} \left[\frac{V_{ijk}}{\tilde{U} + (\tilde{U}^2 + c^2 S^2)^{1/2}} \right]_{ijk} \quad (6.33)$$

$$\begin{aligned} \tilde{U} = & |W_r SI_r + W_\theta SI_\theta + W_z SI_z| \\ & + |W_r SJ_r + W_\theta SJ_\theta + W_z SJ_z| \\ & + |W_r SK_r + W_\theta SK_\theta + W_z SK_z| \end{aligned} \quad (6.34)$$

$$\begin{aligned} S^2 = & (|SI_r + SJ_r + SK_r|)^2 \\ & + (|SI_\theta + SJ_\theta + SK_\theta|)^2 \\ & + (|SI_z + SJ_z + SK_z|)^2 \end{aligned} \quad (6.35)$$

SI_r , SJ_r ve SK_r r yönündeki izdüşüm alanlarını simgelemektedir ve hesaplanması daha önce açıklanmıştır.

6.6 Sınır Koşulları

3 boyutlu Euler denklemlerinin matematiksel olarak uygunluğunun sağlanabilmesi için sınır koşullarının verilmesi gerekir (THOMPSON, 1990). Verilen sınır koşulları çözülecek denklem sisteminin tipine bağlıdır. Sınırdaki verilecek fiziksel değişkenlerin sayısı sistemin yayılma özelliklerine bağlıdır. Akışın sesaltı veya sesüstü olması bu fiziksel koşulların sayısını değiştirir. Bu çalışmada sesaltı akış için gerekli sınır koşulları uygulanmıştır..

Toplam bağımlı değişken sayısı N , N_n nümerik sınır koşullarını N_p ise fiziksel sınır koşullarını göstermek üzere

$$N_n = N - N_p \quad (6.36)$$

olmalıdır. Fiziksel sınır koşullarının sayısı K matrisin özdeğerlerinin işaretine bağlıdır.

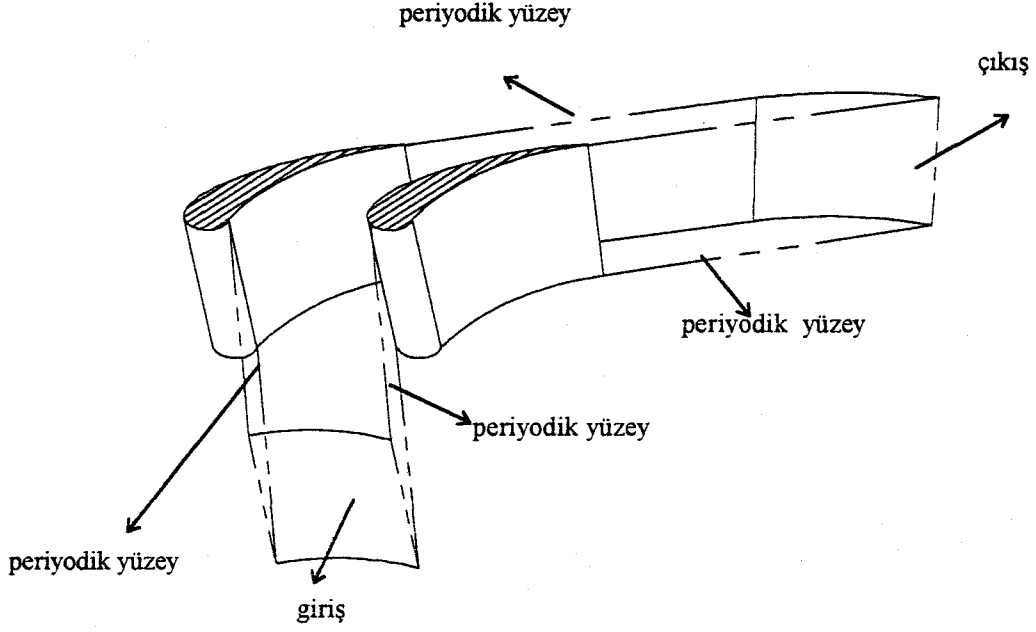
$$K = \bar{A} \bar{l}_n = A_1 \bar{n}_x + A_2 \bar{n}_y + A_3 \bar{n}_z \quad (6.37)$$

$\bar{l}_n$ sınır yüzeyin birim vektörü, A_1, A_2, A_3 ise korunumlu akı vektörlerinin jakobyenlerini göstermektedir.

K matrisinin özdeğerleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{array}{cc} \bar{W} l_n & \bar{W} l_n \\ \bar{W} l_n + c & \bar{W} l_n - c \end{array}$$

İlk iki özdeğer sınır koşulunun belirleneceği yüzeye dik olan normal hız bileşenini göstermektedir. Kalan iki özdeğer ise yayılım dalgalarını göstermektedir. Tüm bu özdeğerlerin işaretleri sınır yüzeylere dik olan hız bileşenleri ile belirlenir. Çözüm bölgesindeki herhangi bir düzgünsüzlüğün yayılım hızı $\lambda \bar{l}_n$ dir. λ burada yukarıdaki özdeğerleri göstermektedir. λ nın işareti pozitifse sınır yüzeyden gelen bilgi akış bölgesi içine taşınmaktadır. Bu durumda fiziksel sınır koşulu verilmesi gerekir. Eğer λ nın işareti negatifse çözüm bölgesi içinden gelen bilgi sınır yüzeyden dışarı taşınır.



Şekil 6.4 Çözüm bölgesi

a) Giriş sınır koşulu

Çözüm bölgesi girişinde akış ses altı ise, 3 özdeğer pozitif 1 özdeğer negatiftir. Bu üç tane fiziksel sınır koşulunun giriş bölgesinde verilmesini gerektirir. Dördüncü büyüklük ise iç bölgeden taşınır.

Girişte çözüm bölgesini teşkil eden tüm noktalarda hesaplanması gereken fiziksel büyüklükler bağıl hızın üç bileşeni (W_r , W_θ , W_z) ve basınç (p) dır.

Bağıl hızın z yönündeki bileşeni enterpolasyon ile giriş bölgesine taşınır.

$$W_{z_{girs}} = 2W_{z_{k=3}} - W_{z_{k=2}} \quad (6.38)$$

Girişte sınır koşulu olarak bağıl hızın teğetsel ve radyal yöndeki hız bileşenlerinin z eksenine yapmış olduğu açılar verilir. (α, β)

Böylece girişte radyal ve teğetsel hız bileşenleri bulunur.

$$\begin{aligned} W_{r_{girs}} &= W_{z_{girs}} \alpha \\ W_{\theta_{girs}} &= W_{z_{girs}} \beta \end{aligned} \quad (6.39)$$

Giriş sınır koşulları : α, β, P_0

Ayrıca girişte diğer fiziksel sınır koşulu olarak toplam basınç (P_0) verilir. Bu fiziksel sınır koşulu girişte hesaplanmış hız bileşenleri ile birlikte tüm büyüklüklerin hesaplanmasına imkan verir.

b) Çıkış sınır koşulu

Çıkış bölgesinde, pozitif normal yüzeyden içeriye doğru olduğu için 3 özdeğer negatif 1 özdeğer ise pozitifdir. Bu yüzden 1 fiziksel sınır koşulu ve 3 adet sayısal sınır koşulu gerekmektedir.

En uygun fiziksel sınır koşulu olarak çıkışta statik basınç verilir. Diğer büyüklükler iç bölgeden enterpolasyonla bulunur. Çıkışta akışın girdaplı olabilmesinden ötürü, tüm yüzeyde statik basınç değeri sabit değildir. Radyal, eksenel veya karışık akımlı makinalarda çıkış statik basıncının verilmesiyle ilgili literatürde farklı yaklaşımlar mevcuttur.

Bu bölümde çıkış yüzeyinin göbek kısmında statik basınç değeri sabit tutulmuştur. Çıkış yüzeyindeki diğer noktadaki basınç değerleri bir önceki kesitteki yapıyla orantılı olarak hesaplanmıştır.

$$\text{Oran} = \frac{P^*(1 \dots i_{\max}, 1, k_{\max})}{P(1 \dots i_{\max}, 1, k_{\max})} \quad (6.40)$$

$$P(1 \dots i_{\max}, 2 \dots j_{\max}, k_{\max}) = \text{oran} * p(i, j, k_{\max} - 1) \quad (6.41)$$

c) Katı duvar sınır koşulu

Katı yüzeylerde sadece bir özdeğer pozitif olduğu için sadece bir fiziksel sınır koşulunun verilmesi gerekir. Bu koşul katı duvarlara dik hız değerinin olmaması koşulu olarak belirlenir. Sadece basınç değerleri katı duvarlarda hesaplanır.

$$\bar{W}_n = 0 \quad (6.42)$$

Bunun sonucu olarak katı yüzeylerde akı vektörleri aşağıdaki hale gelir.

$$\bar{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

d) Periyodik sınır koşulları

Çözümü yapılacak akış bölgesi belirli sayıda kanatlardan oluştuğu için periyodik sınır koşullarının verilmesi gerekir. Bu koşulların uygulanması ile çözüm sadece iki kanat arasında gerçekleştirilir.

Çözüm bölgesinin giriş ve çıkış bölgelerinin yan yüzeylerinde periyodik sınır koşulları uygulanır (Şekil 6.4). Çözüm vektörünün bileşenleri hayali koordinatlara kopyalanır. Euler denklemleri için sadece bir çizgi boyunca içindeki akı vektörlerini kopyalamak kafi'dir.

6.7 Yapay Sönümleme

Çözüm yönteminin kararlı olabilmesi için Euler denklemlerine sönümleyici terimler eklenir. JAMESON ve diğ. (1981) tarafından önerilen bağımlı değişkenlerin 4. mertebeden farkları cinsinden yazılan yapay sönümleme terimleri kullanılmıştır.

$$V_{ijk} \left(\frac{\partial}{\partial t} U_{ijk} \right) + R_{ijk} - D_{ijk} = 0 \quad (6.44)$$

Sönümleme operatörü D aşağıdaki gibi gösterilir.

$$D_{i,j,k} = d_{i+\frac{1}{2},j,k} - d_{i-\frac{1}{2},j,k} + d_{i,j+\frac{1}{2},k} - d_{i,j-\frac{1}{2},k} \quad (6.45)$$

$$d_{i+\frac{1}{2},j,k} = k^{(4)} (U_{i+2,j,k} - 3U_{i+1,j,k} + 3U_{i,j,k} - U_{i-1,j,k}) \quad (6.46)$$

$k^{(4)}$ katsayısı 4. mertebeden farkları uyarlayan bir katsayıdır. İleri farklar operatörü kullanılarak (6.39) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\delta_r U_{i,j,k} = U_{i+1,j,k} - U_{i,j,k} \quad (6.47)$$

$$d_{i+\frac{1}{2},j,k} = k^{(4)} \delta_{rr} U_{i-1,j,k}$$

Benzer şekilde $d_{i,j+\frac{1}{2},k}$ ve $d_{i,j,k+\frac{1}{2}}$ aşağıdaki gibi elde edilir.

$$d_{i,j+\frac{1}{2},k} = k^{(4)} \delta_{\theta\theta} U_{i,j-1,k} \quad d_{i,j,k+\frac{1}{2}} = k^{(4)} \delta_{zz} U_{i,j,k-1} \quad (6.48)$$

4. mertebeden farklar cinsinden yazılan yapay sönümlleme terimleri katı yüzeylere yakın bölgelerde bazı problemler çıkarır. Dolayısıyla bu bölgelerde sönümlleme operatörlerinin değerlendirilmesinde KROLL ve JAIN (1987) tarafından önerilen yaklaşım kullanılmıştır.

Katı yüzey üzerindeki noktalarda ($j=1$ ve $j=j_{\max}$) (6.47) denklemi $j=1$ için,

$$\delta_r U_{i,-1,k} = \delta_r U_{i,0,k} = \delta_r U_{i,1,k} = U_{i,2,k} - U_{i,1,k} \quad (6.49)$$

Giriş ve çıkış yüzeylerinde ($k=1$ ve $k=k_{\max}$) ise,

$$\delta_z U_{i,j,k_{\max}+1} = \delta_z U_{i,j,k_{\max}} = \delta_z U_{i,j,k_{\max}-1} = U_{i,j,k_{\max}} - U_{i,j,k_{\max}-1} \quad (6.50)$$

şeklindedir.

6.8 Çözüm Ağı

Çark teknik resminin meridyenel ve ön görünüşlerinden, çözüm ağının üretilmesi için gerekli silindirik koordinatlar tesbit edilir. Bu koordinatlar kullanılarak kanatlar arası düzlemde ve göbekten yanağa eşit aralıklı olan veya olmayan bölümler yapılarak iç bölgelereki noktaların geometrik yerleri elde edilir.

Çözüm bölgesinin giriş ve çıkış bölgelerindeki noktaların geometrik yerleri içinse Bölüm 5 de bahsedilen süreklilik ve serbest dönme denklemleri kullanılır. Göbek bölgesinde kanatlar arası düzlemde bu denklemler kullanılarak giriş ve çıkış bölgelerindeki noktaların koordinatları elde edilir ve aynı koordinatlar yanağa kadar olan diğer düzlemlere taşınır.

6.9 Örnekler

6.9.1 Sayısal Uygulama (90° lik dirsek)

Bölüm 4 de sayısal uygulama olarak kullanılan yarıçapları oranı iki olan dikdörtgen kesitli bir dirsekte üç boyutlu akışın çözümü amaçlanmıştır. Dirsekteki serbest dönmeli akış sayısal olarak elde edilmiştir. Bu örneğin çözülmesi neticesinde geliştirilen programın doğrulaması yapılmıştır.

Şekil 6.5a' da dirseğin meridyenel ve dik kesitindeki çözüm ağları gösterilmiştir. R yönünde 11, θ yönünde 11 ve z yönünde 51 bölümlene yapılmıştır. Çözüm ağındaki nokta sayısı 6171 dir. Silindirik koordinatlar kullanılarak çözüm yapıldığından çözüm bölgesindeki herhangi bir dik kesit yaklaşık olarak karedir. Bölüm 4.5a da belirtilen giriş ve çıkış sınır koşulları uygulanmıştır.

$$\alpha=0^\circ \quad \beta=0^\circ \quad P_{01}=1 \quad P_{\text{çıkış}}=0.9222 \quad n=0$$

Akışın çözülmesi neticesinde elde edilen hız vektörleri 6 nolu meridyenel kesitte gösterilmiştir (Şekil 6.5b). Beklenildiği gibi dirsek emme yüzeyinde akış hızlanmakta basma yüzeyinde ise yavaşlamaktadır. Aynı düzlem üzerindeki eş statik basınç eğrileri Şekil 6.5c de gösterilmiştir. Dirsek kısmında düşük yarıçaptan büyük yarıçapa doğru statik basınç artmaktadır. Ayrıca Şekil 6.5d de dirseğin çeşitli dik kesitlerde (21,24,27,30) eş statik basınç eğrileri gösterilmiştir. Beklenildiği gibi emme yüzeyinden basma yüzeyine basınç artmaktadır.

Şekil 6.5e de dirsek boyunca hız vektörleri daha büyük ölçekli olarak gösterilmiştir. 6 nolu meridyenel kesit üzerinde, 21-24-27-30 nolu dik kesitlerdeki hesaplanmış hız değerleri yarıçapa bağlı olarak Şekil 6.5f de gösterilmiştir. Değişik dik kesitlerde oluşan ufak farklılıklar ayrıklaştırma hatalarından kaynaklanmaktadır. Çözüm ağındaki nokta sayısı arttırılırsa bu farklar azalacaktır. Ayrıca Şekil 6.5g de

verilen giriş ve çıkış sınır koşulları için yakınsama eğrisi verilmiştir. Benzer şekilde bölüm 4.5a da olduğu gibi kullanılan katsayılar ile parametrik bir çalışma yapılarak daha kısa sürede çözüm elde etmek mümkündür.

Sonuç olarak sayısal olarak elde edilen sonuçlar geliştirilen programın benzer test geometrilerine uygulanabileceğini göstermiştir.

6.9.2 Deneysel Uygulama

Bölüm 5 de sanki üç boyutlu akış denklemleri kullanılarak kanatlar arası düzlemde çözümü elde edilen örnek için üç boyutlu akış çözümü gerçekleştirilmiştir. MINER ve diğ. (1988) tarafından lazer doppler anemometresi kullanılarak deneysel hız ölçümleri yapılmış çalışmada göbekten yanağa farklı kanatlar arası düzlemlerde ve farklı yarıçaplarda ölçümler de gerçekleştirilmiştir. Üç boyutlu akış çözümünde göbekten yanağa kadar olan düzlemlerde çözüm elde edilmektedir. Bu yüzden sayısal olarak elde edilen sonuçlarla farklı eksenel uzaklıklarda karşılaştırma yapılmıştır. Göbekten yanağa akış yapısının nasıl gerçekleştiği hakkında fikir sahibi olunacaktır.

Tasarım debisinde elde edilen çözüm ağı Şekil 6.6a da gösterilmiştir. Kanatlar arası düzlem, meridyenel ve dik kesitlerdeki çözüm ağı görülmektedir. Akış giriş kesitinde radyal olarak girmektedir. MINER ve diğ. (1988) tarafından elde edilen farklı yarıçaplardaki deneysel sonuçlar, sayısal olarak elde edilen sonuçlarla Şekil 6.6b de karşılaştırılmıştır. Eğrilerin yatay uzaklığı emme ve basma yüzeyleri arasındaki mesafeyi, düşey eksenler ise bağıl hızın teğetsel ve meridyenel bileşenlerinin çark çıkışındaki çevresel hıza bölünmesiyle elde edilen oranı göstermektedir. Deneysel eğriler üzerindeki semboller farklı kanatlar arası düzlemleri göstermektedir. $Z/b=0$ eğrisi orta akım yüzeyini simgelemektedir. Çark çıkışından geriye doğru gelindikçe deneysel ve sayısal sonuçlar arasındaki mertebe farklılığı artmaktadır. Fakat elde edilen sonuç cesaret vericidir.

Bu çalışmanın amacı çark performansını sayısal olarak elde etmek olduğundan, deneysel ve sayısal performans eğrileri karşılaştırılmıştır (Şekil 6.6c). Ayrıca sanki üç boyutlu akış kabulü ile elde edilen sayısal performans eğrisi de verilmiştir. Bu çözümlemede kanatlara girişteki bağıl akış açısının tüm debilerde sabit tutulması

sebebiyle elde edilen sayısal noktalar tasarım debisi hariç deneysel noktaların altındadır. Üç boyutlu çözümlemede ise bu kabul yapılmamıştır. Fakat elde edilen sonuçlar uyum içindedir. Fakat tasarım debisinde üç boyutlu akış kabulü ile elde edilen yakınsama zamanı (yaklaşık olarak 12 saat) oldukça uzundur.

6.9.3 Endüstriyel Pompa Çarkı

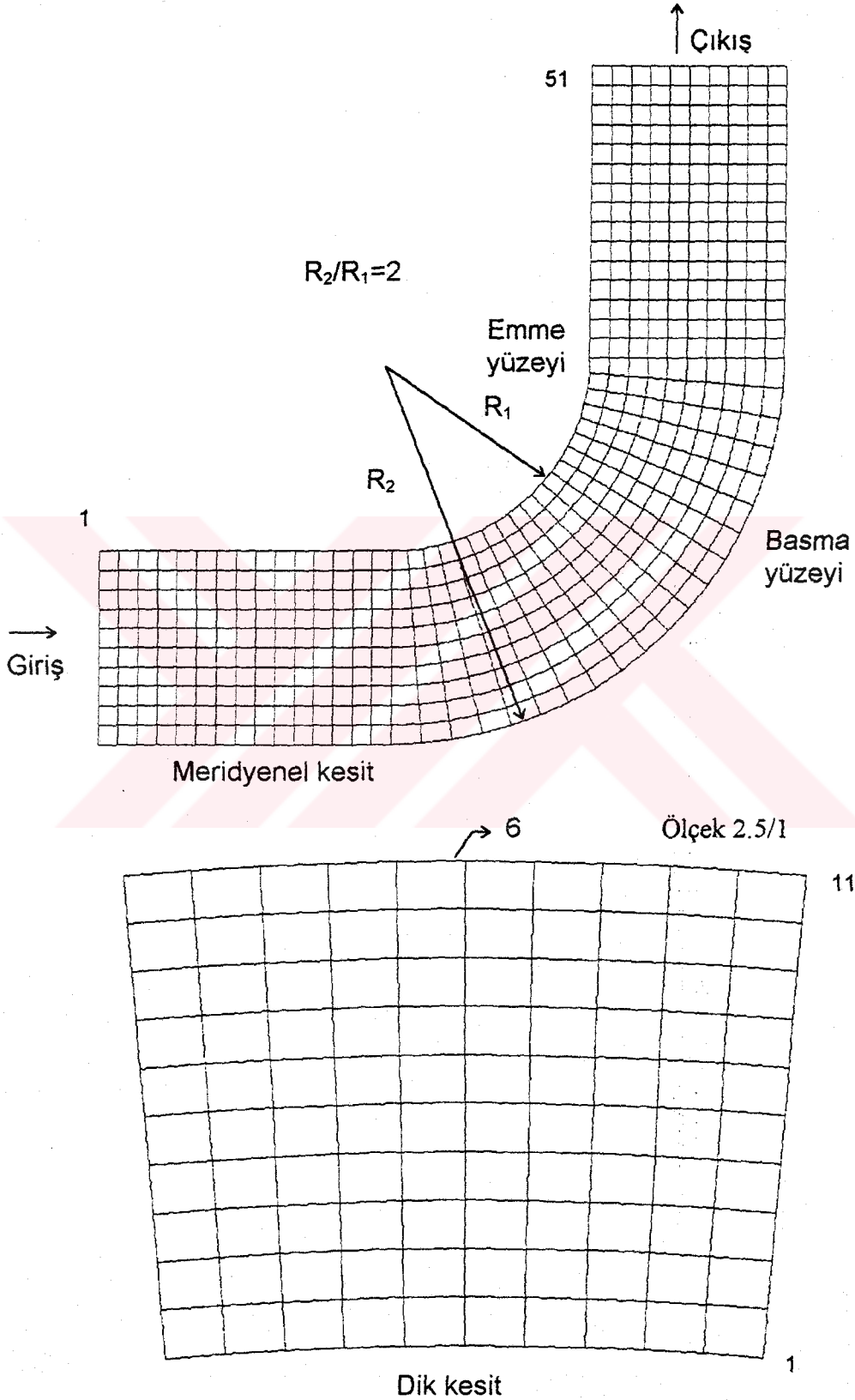
Geliştirilen 3 boyutlu akış analizi programı ile kanat sayısal performansının deneysel performans ile uyum içerisinde olması nedeni ile endüstriyel bir pompa çarkındaki akış çözümlenmiştir. Bu çarka ait deneysel performans eğrisi firma tarafından sağlanmıştır.

Çarka ait kanat geometrisi Şekil 6.7a da görülmektedir. Tasarım debisinde elde edilen çözüm ağı ise farklı düzlemlerde Şekil 6.7b de gösterilmiştir. Çözüm ağındaki nokta sayısı $11 \times 11 \times 65$ dir. Akış giriş kısmında eksenel olarak girmektedir.

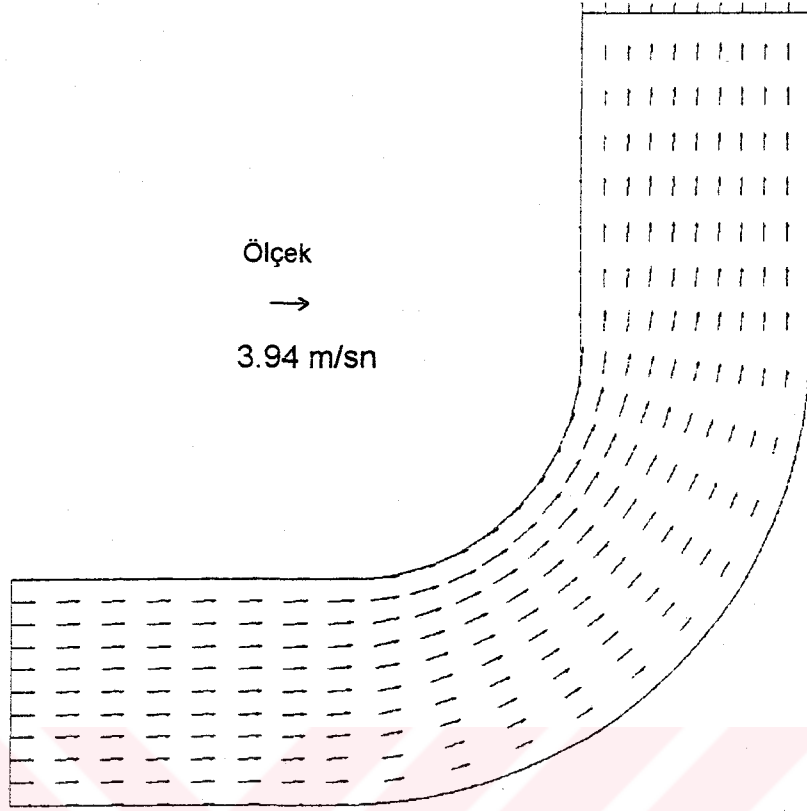
Tasarım debisinde sayısal olarak elde edilen (kanatlar arası düzlem) göbek, yanak ve orta kesitlerde hız vektörleri ve eş statik basınç eğrileri Şekil 6.7c de görülmektedir. Çark girişinden çıkışına doğru statik basınç göbek, yanak ve orta düzlemlerde artmaktadır. Ayrıca göbekten yanağa boyutsuz statik basınç mertebeleri karşılaştırıldığında yanak kesitindeki statik basınç değerleri beklenildiği gibi daha yüksek mertebededir. Sayısal olarak yanak kesitindeki hız vektörlerine bakıldığında çark içindeki akış yapısı hemen hemen iki boyutlu olduğundan yanak kesiti üzerindeki akış yapısında ard-iz bölgesi yoktur. Ayrıca emme, basma ve orta meridyenel akım yüzeylerindeki hız vektörleri ve eş statik basınç eğrileri Şekil 6.7d de verilmiştir. Orta meridyenel akım yüzeyinde akışın yanak kısmında bozulmaya meyilli olduğu gözlenmiştir. Ayrıca farklı dik kesitlerdeki eş statik basınç eğrileri Şekil 6.7e de gösterilmiştir.

Deneysel ve sayısal performans eğrileri Şekil 6.7f de karşılaştırılmıştır. Bir önceki örnekte olduğu gibi elde edilen yakınsama zamanları oldukça uzundur (ortalama 10 saat). Fakat geliştirilen program ile çark performansı firma tarafından sağlanan performans eğrisiyle karşılaştırıldığında elde edilen sonuç cesaret vericidir.

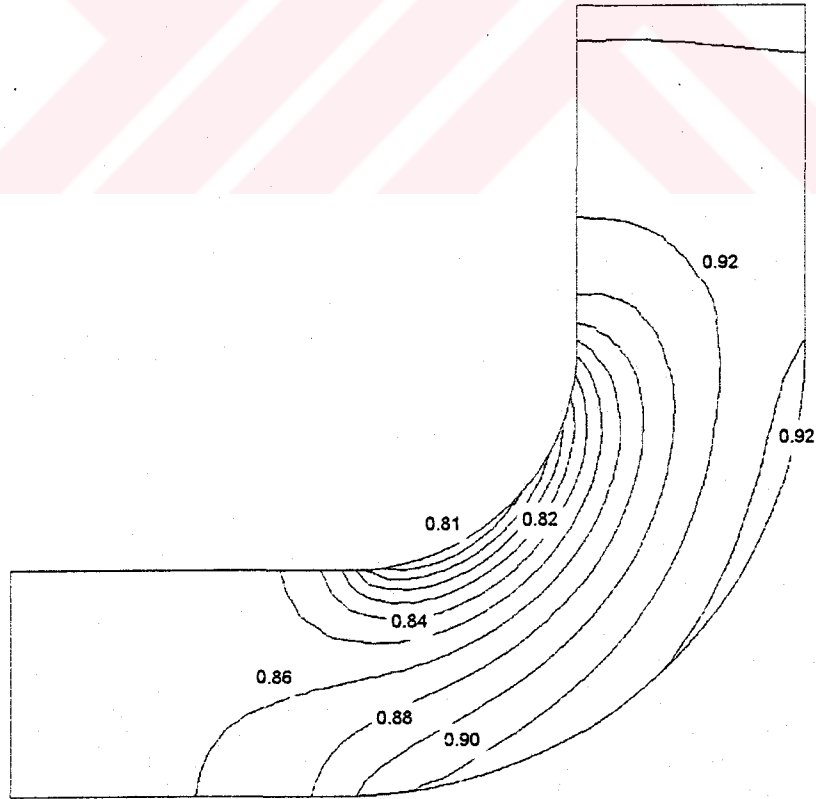
SAYISAL UYGULAMA (90° lik DİRSEK)



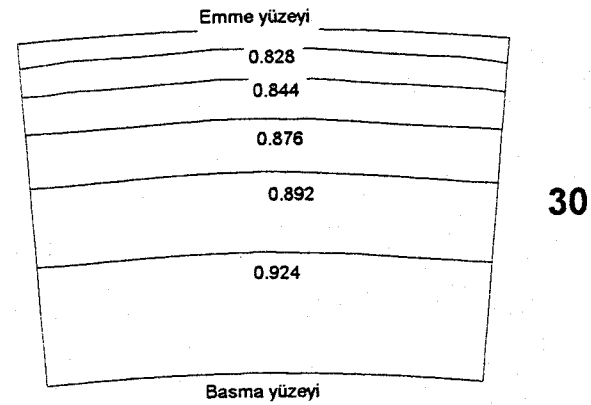
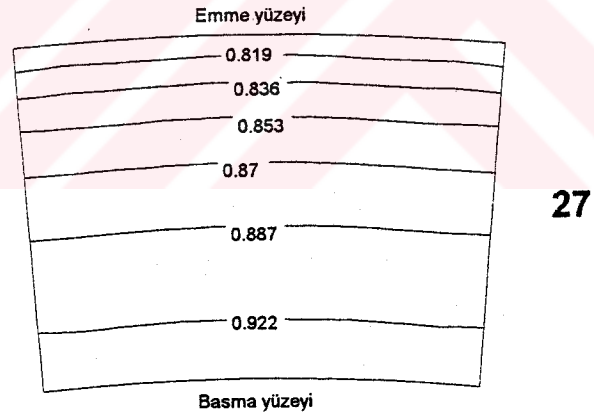
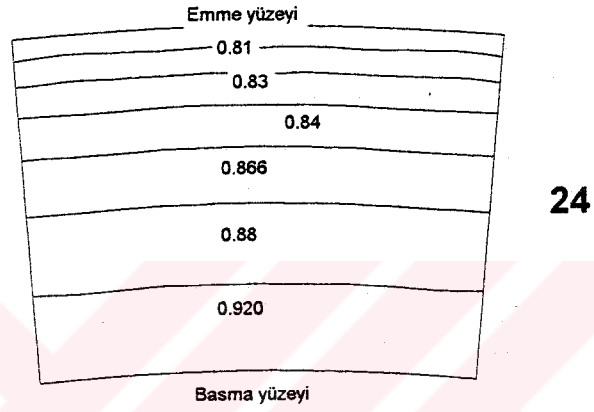
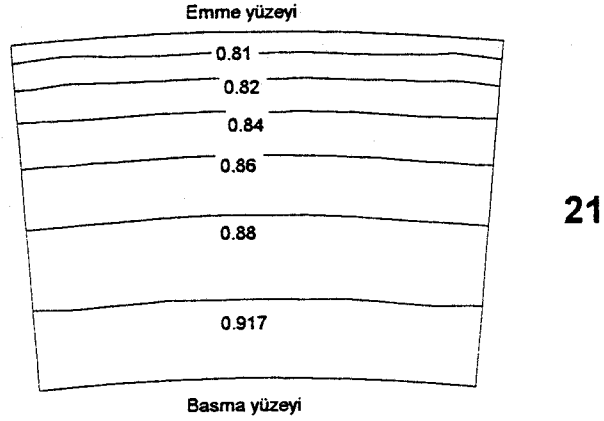
Şekil 6.5a Çözüm ağı (11x11x51)



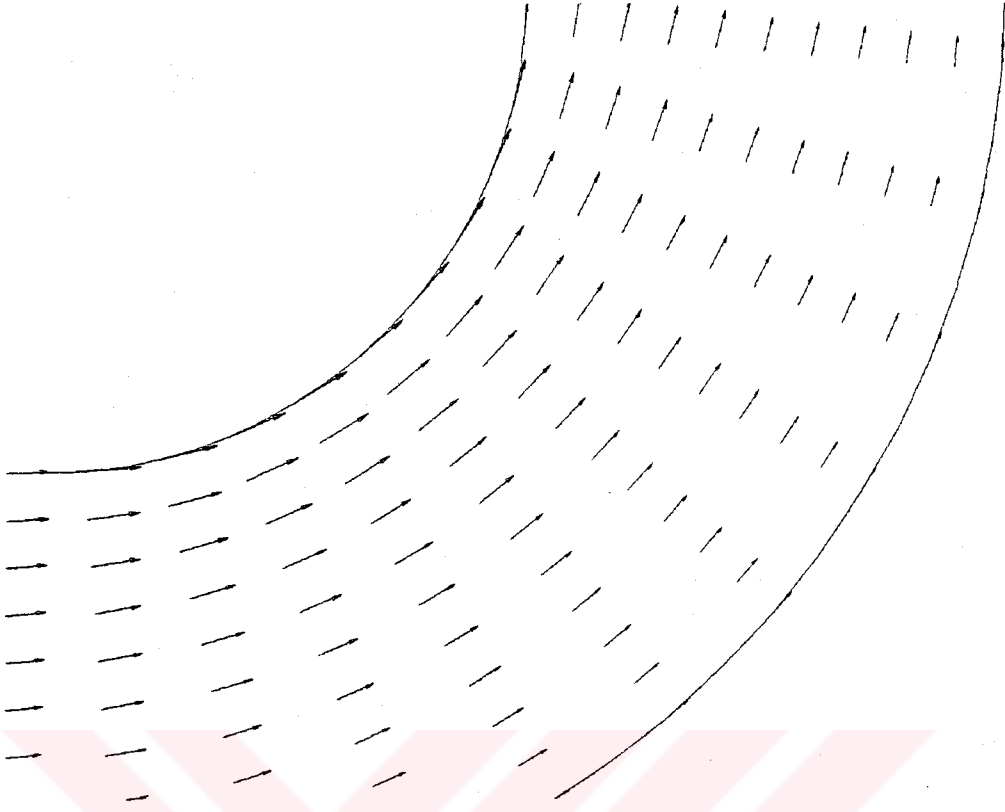
Şekil 6.5b 6 nolu meridyenel kesitteki bağıl hız vektörleri (2 noktada bir)



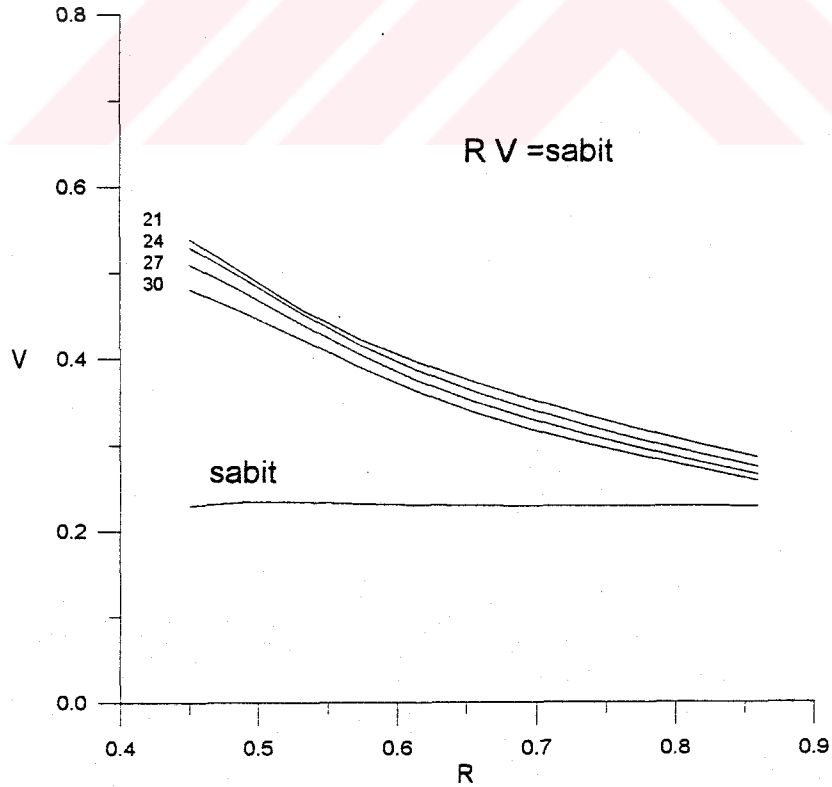
Şekil 6.5c 6 nolu kesitte eş statik basınç konturları (p/p_0 $p_0=100000$ Pa)



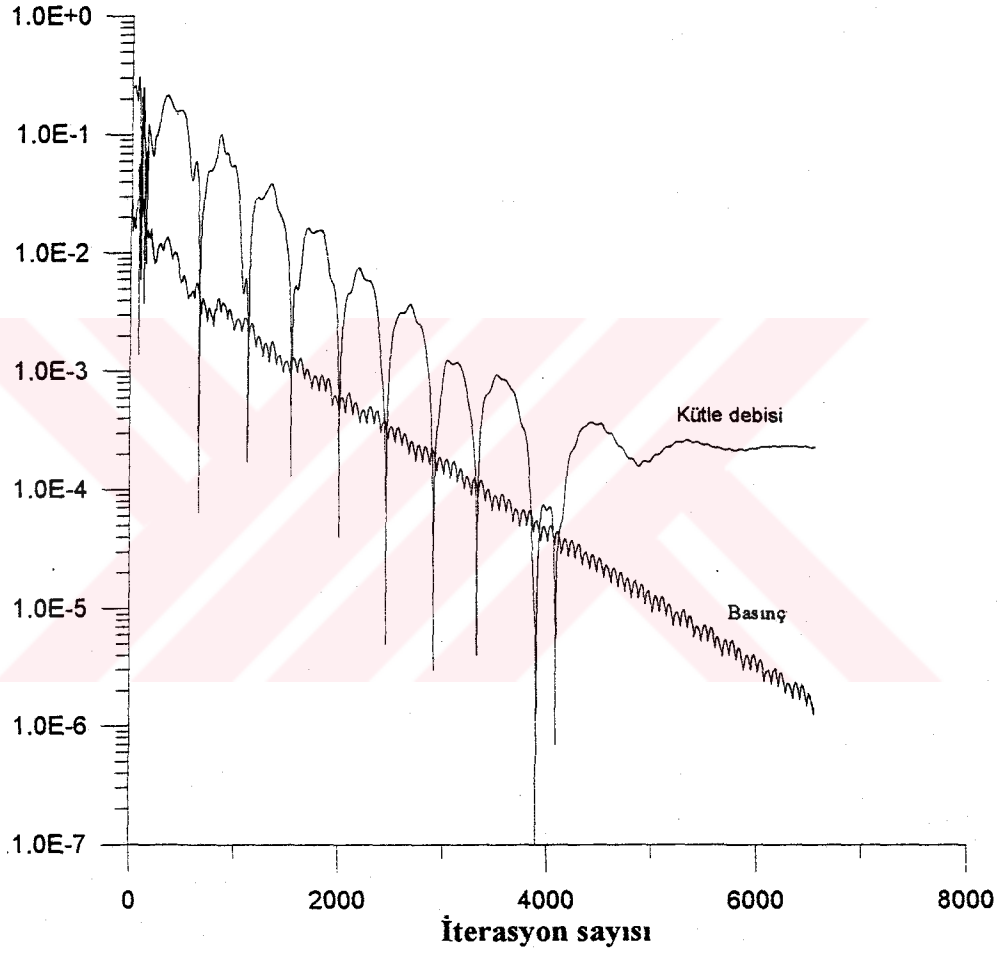
Şekil 6.5d Çeşitli dik kesitlerdeki eş statik basınç konturları



Şekil 6.5e Serbest dönmeli akışın olduğu bölgedeki hız vektörleri

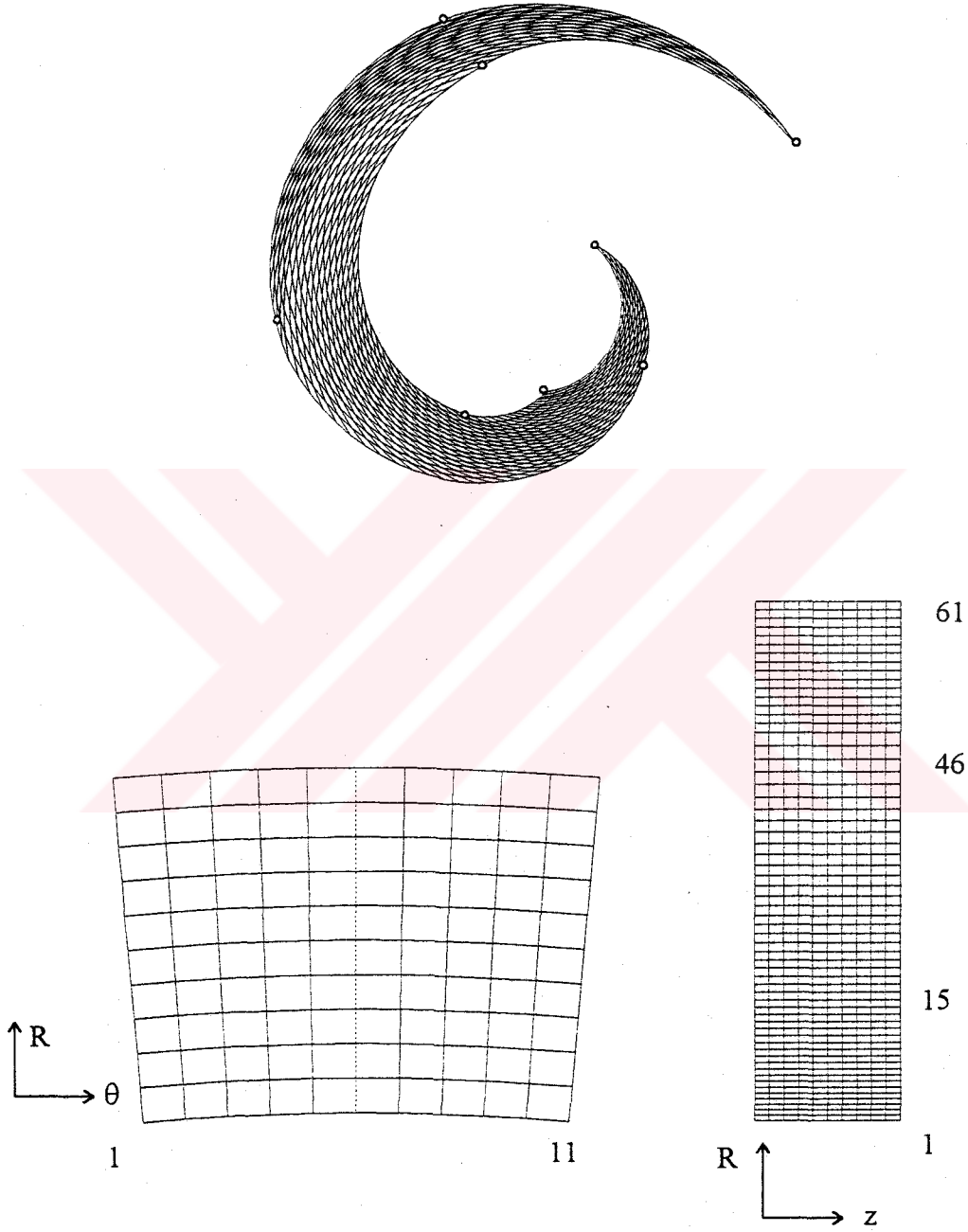


Şekil 6.5f Dirsek boyunca serbest dönmeli akışın değişik kesitlerdeki değerleri

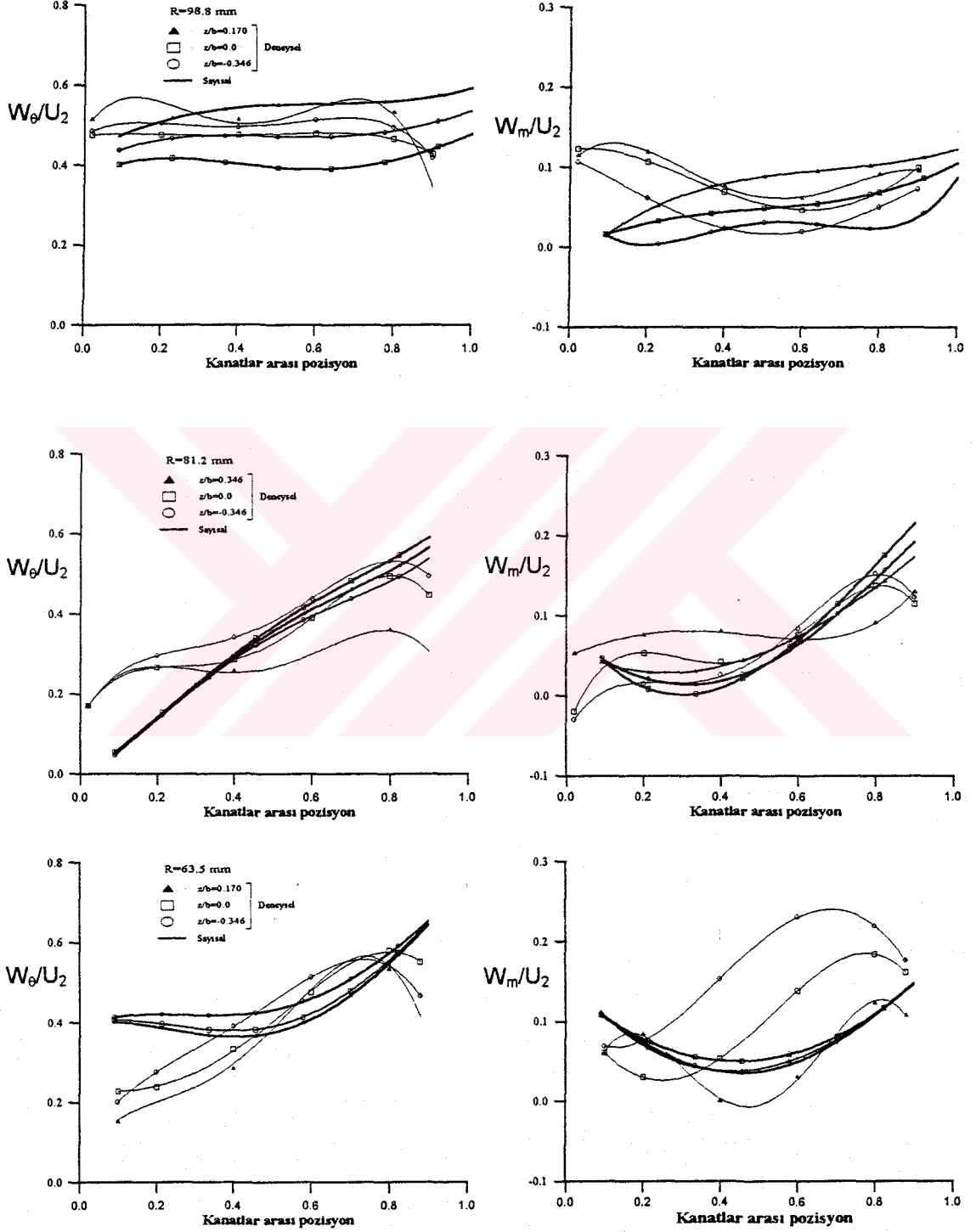


Şekil 6.5g Yakınsama eğrisi

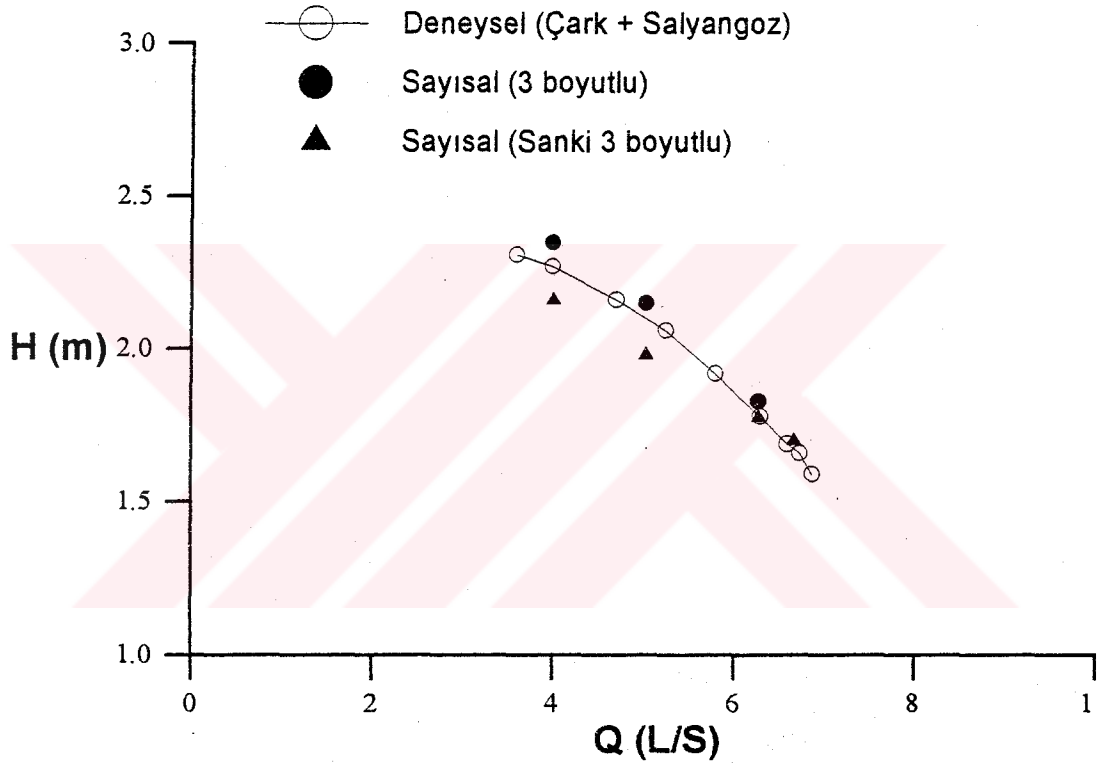
DENEYSEL UYGULAMA SİLİNDİRİK KANATLI POMPA ÇARKI



Şekil 6.6a Çözüm ağı (11x11x61)

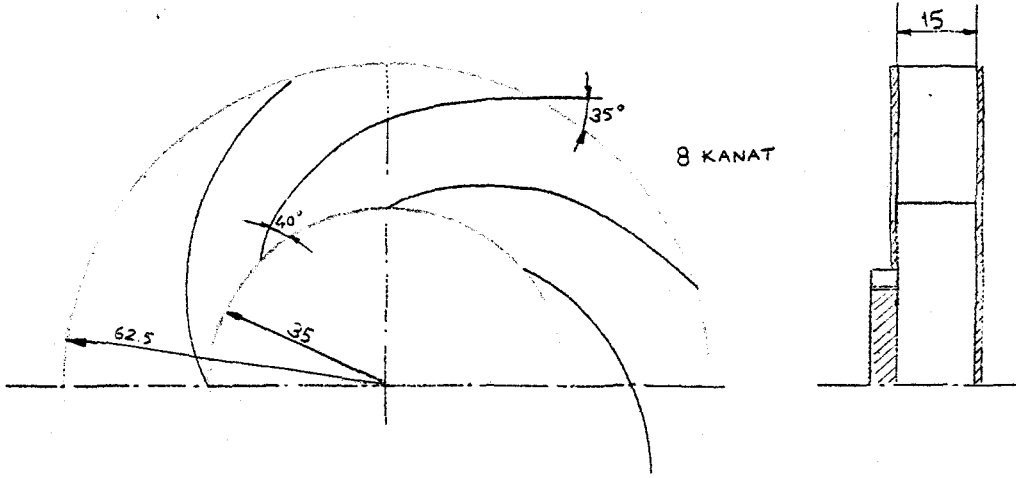
TASARIM DEBİSİ $Q=6.3$ L/S

Şekil 6.6b Tasarım debisinde farklı kanatlar arası düzlemlerdeki deneysel ve sayısal sonuçların karşılaştırılması ($z/b=0$, orta akım yüzeyi)

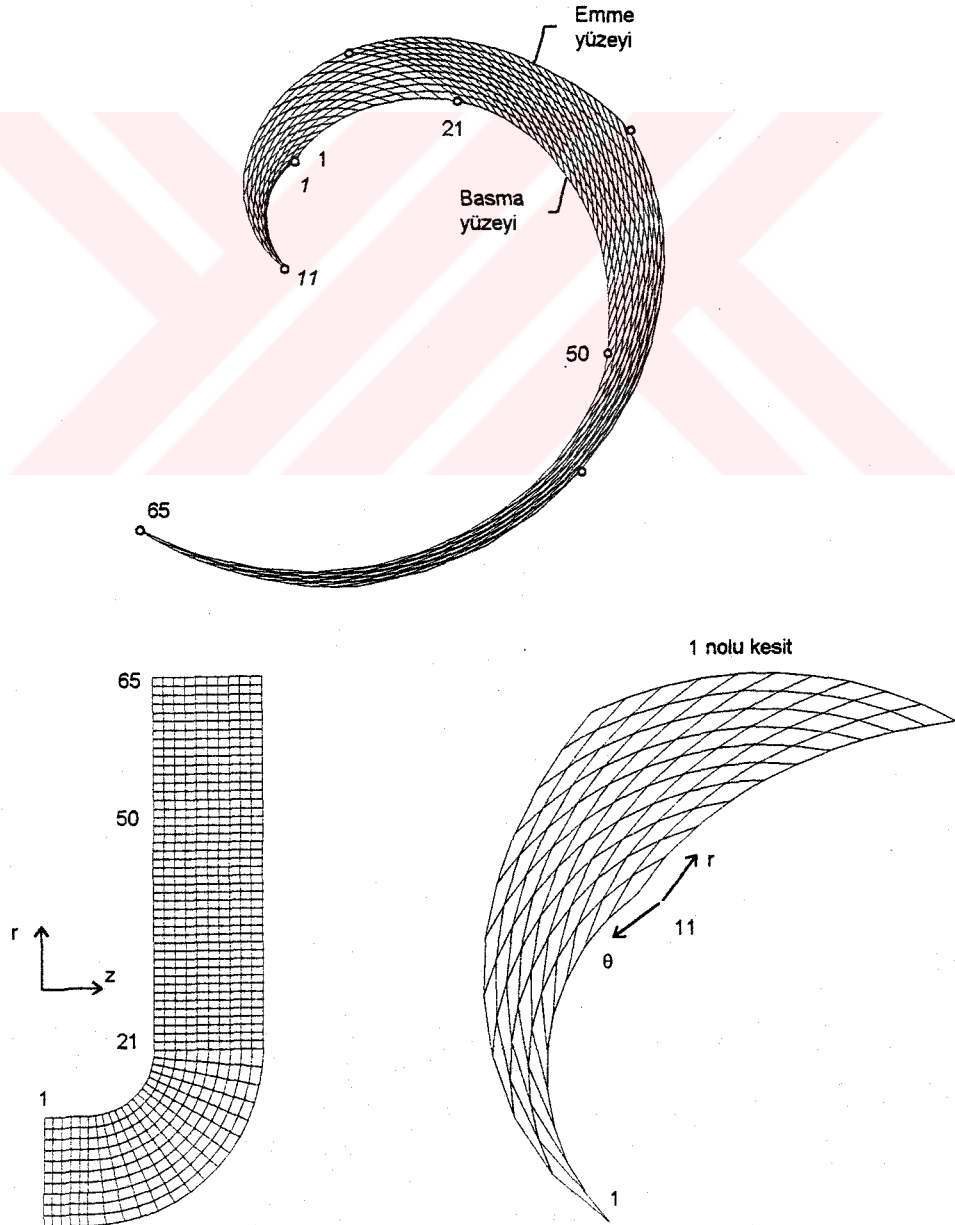


Şekil 6.6c Sayısal ve deneysel (MINER ve diğ., 1988) performans eğrilerinin karşılaştırılması

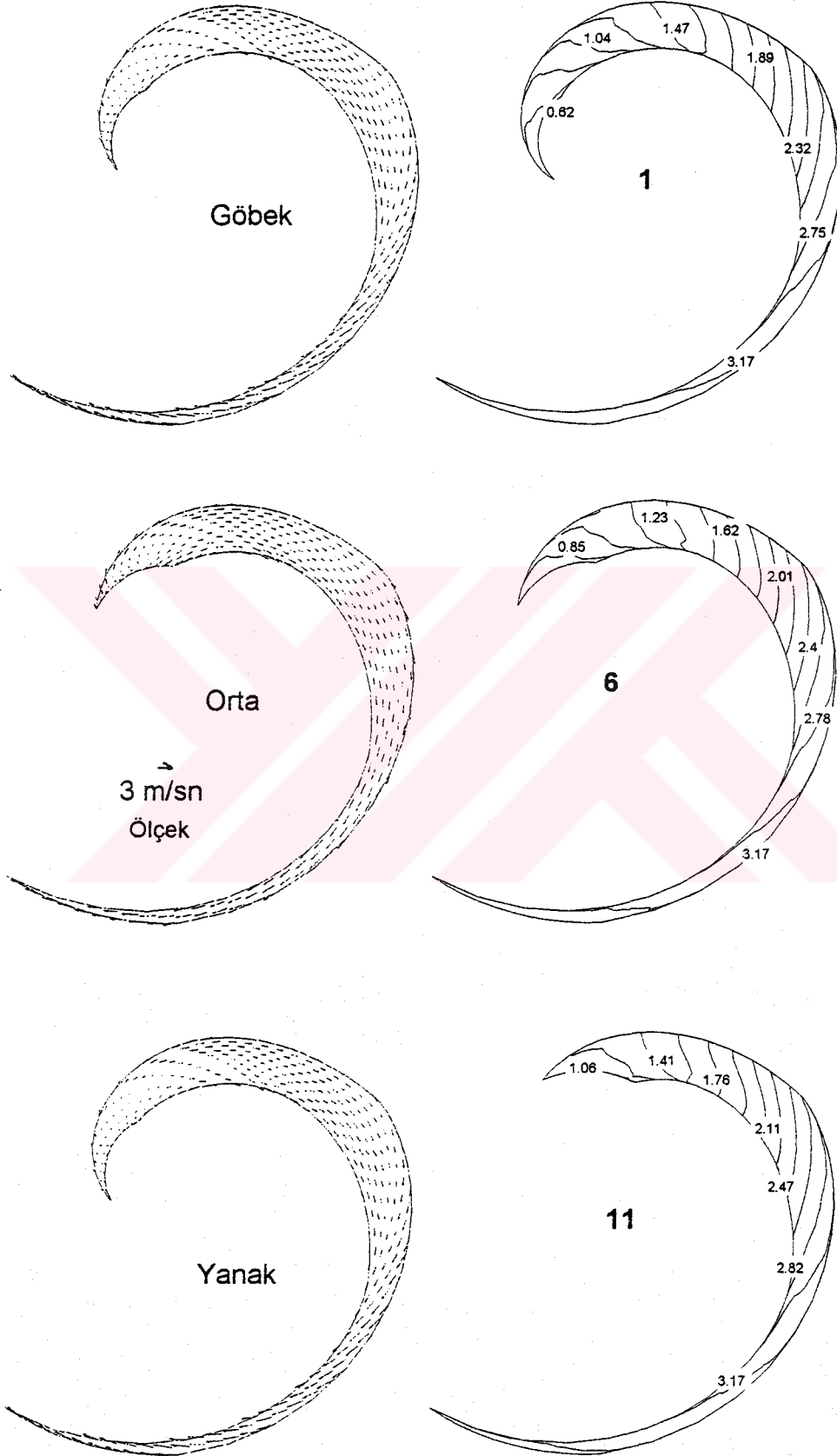
ENDÜSTRİYEL POMPA CARKI



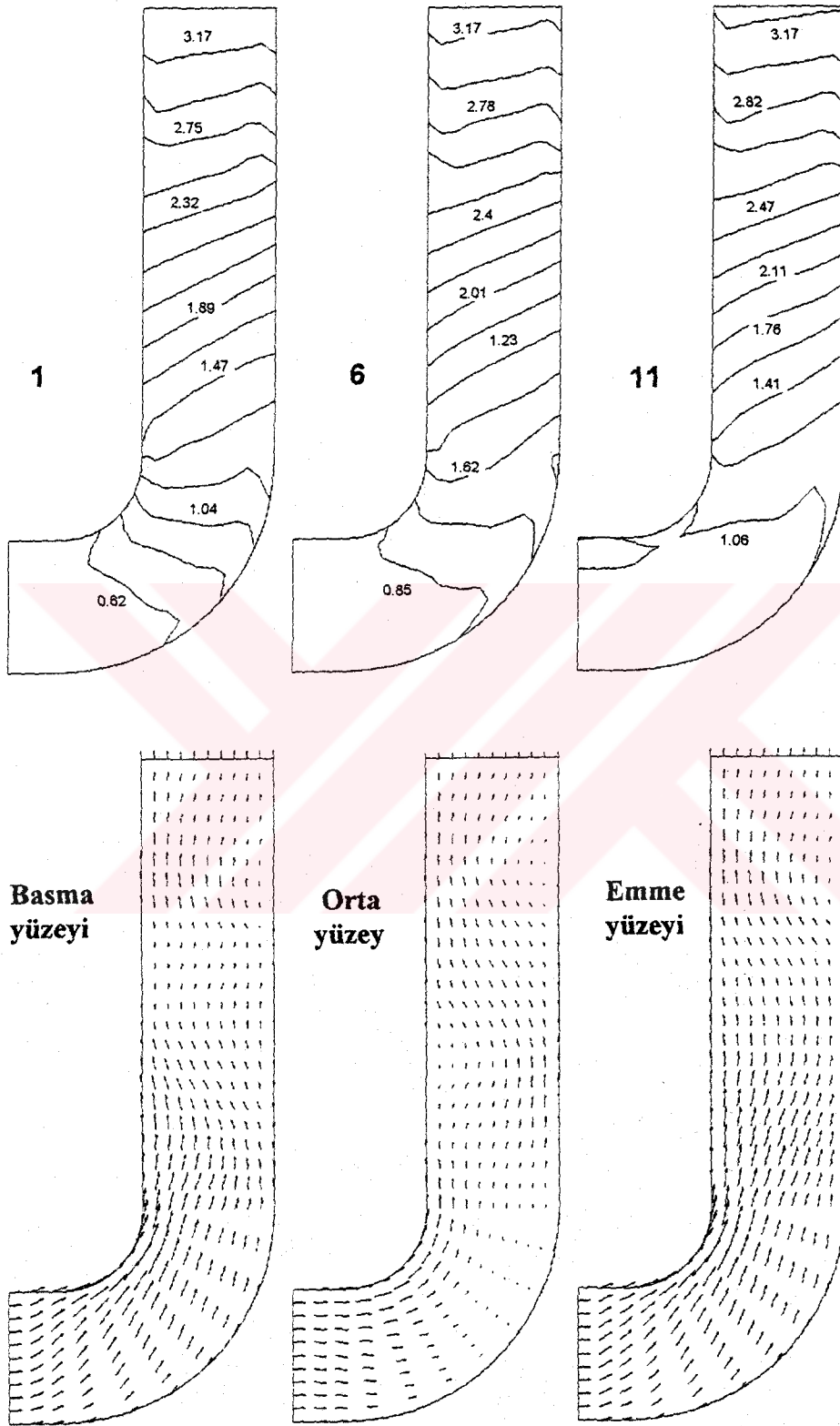
Şekil 6.7a Endüstriyel pompa kanat geometrisi



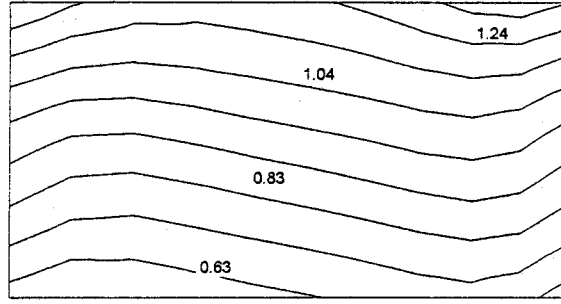
Şekil 6.7b Çözüm ağı (11x11x65)



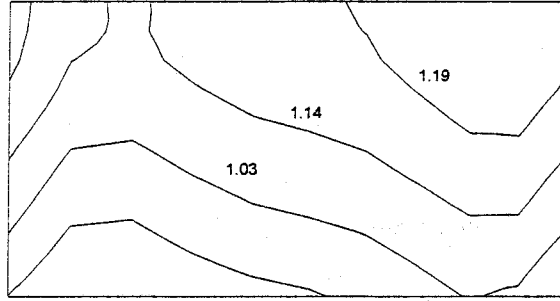
Şekil 6.7c Göbek, yanak ve orta kesitdeki hesaplanmış hız vektörleri ve eş statik basınç eğrileri



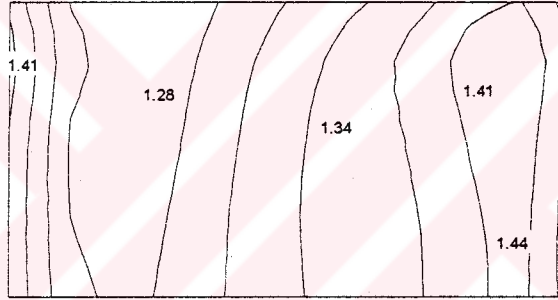
Şekil 6.7d Meridyenel kesitlerdeki bağıl hız vektörleri ve eş statik basınç eğrileri



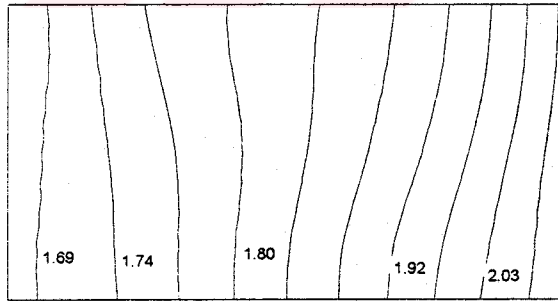
1 Giriş kesidi



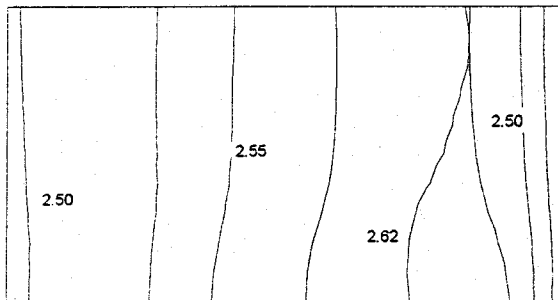
15



21 Hücüm kenarı

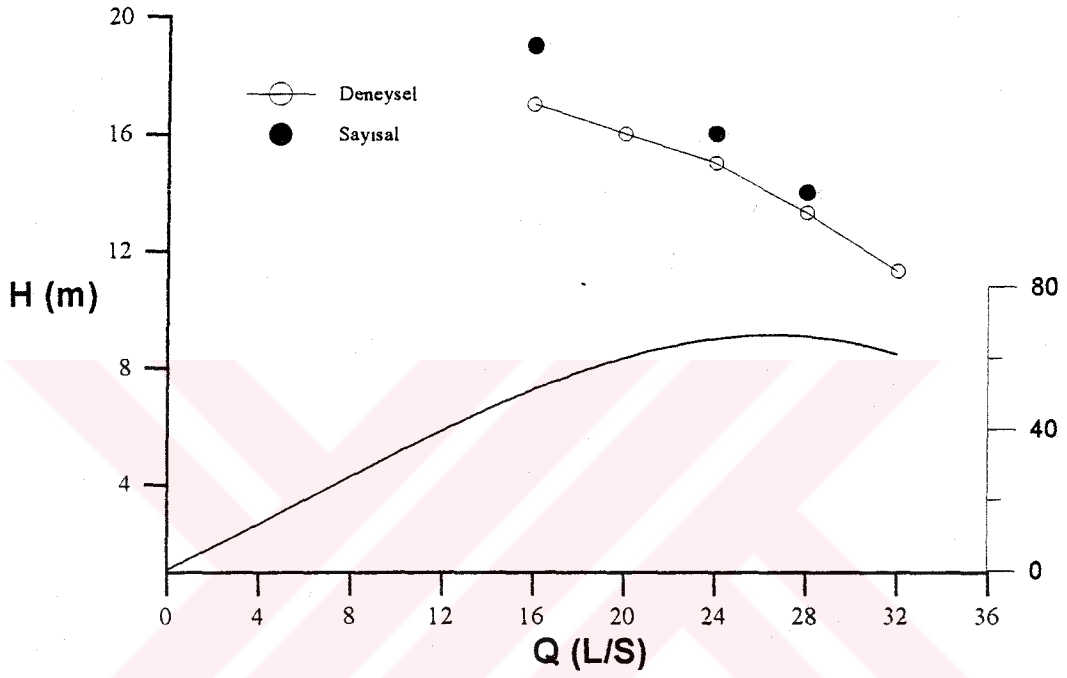


35



50 Kaçış kenarı

Şekil 6.7e Çeşitli dik kesitlerdeki es statik basınç eğrileri



Şekil 6.7f Deneysel ve sayısal performans eğrilerinin karşılaştırılması

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada radyal pompa kanatları arasındaki akışın sayısal olarak çözümü yapılmış ve çark performansı sayısal olarak elde edilmiştir. Çark performansının sayısal olarak deney yapmadan elde edilmesi tasarımcıya büyük yararlar sağlar. İki boyutlu, sanki üç boyutlu ve üç boyutlu Euler denklemleri kullanılarak yapılan uzaysal yaklaşımlar ile pompa çarkı içindeki sıkıştırılmaz akış modellenmiştir.

Kanatlar arasındaki sıkıştırılmaz akışın çözümlenmesi için kullanılan yapay sıkıştırılabilirlik tekniğinin iki boyutlu test geometrilerinin çözümünde çok iyi sonuçlar elde edilmiştir. Elde edilen yakınsama hızları sıkıştırılabilir akış denklemleri kullanılması durumuna göre oldukça iyidir.

Kanatlar arası düzlemde meridyenel akım tübü genişliğini de dikkate alan akış modeli kullanıldığında, çark performansı deneysel sonuçları mevcut test geometrileri ile büyük bir uyum içerisindedir. Bu model kullanıldığında elde edilen yakınsama zamanları oldukça iyidir.

Üç boyutlu akış modelinde çark performansının elde edilmesindeki yakınsama zamanı fazla olmakla birlikte elde edilen sonuçlar cesaret vericidir.

Elde edilen sayısal performans eğrileriyle deneysel performans eğrilerinin karşılaştırılması neticesinde, tasarımcı için tasarım noktasındaki performans değeri önemli olduğundan bu noktadaki %10 luk bir yaklaşım kabul edilebilir düzeydedir.

Tablo 1 de gösterilen yakınsama zamanları Pentium 200 Mhz Pro mikroişlemcili bilgisayar kullanıldığında yarı yarıya azalmaktadır. Ayrıca çözüm ağındaki nokta sayısı arttırıldığında özellikle üç boyutlu test geometrileri için gereken bilgisayar hafızası miktarı artmaktadır. (Örneğin çözüm ağında 24000 nokta mevcut olduğunda 6.1 MB RAM gereksinimi vardır.)

Aşağıda karşılaştırma açısından farklı bilgisayarlar kullanılarak elde edilen yakınsama zamanları bir tablo halinde verilmiştir.

Tablo 1. Farklı test geometrileri için yakınsama zamanları

Test geometrisi	Çözüm ağındaki nokta sayısı	İterasyon sayısı	(ortalama) Yakınsama zamanı <i>Pentium 120 Mhz</i> <i>32 MB RAM</i>
Dirsek	50x10	700	15 dakika
Stanitz dirseği	62x15	1100	
Engel (NI,1982)	65x17	2400	
Sesaltı difüzör	38x25	970	
Tam radyal çark	60x20	5000	30 dakika
Silindirik	70x15	3000	
kanatlı çark			
Dönük kanatlı çark	60x20	3500	2 saat
3 boyutlu dirsek	11x11x51	6500	
3 boyutlu silindirik	61x11x11	40000	
kanatlı çark			
Endüstriyel pompa	65x11x11	35000	10 saat
çarkı			

Bu çalışmanın daha ileriki aşamalarında önerilenler ise aşağıdaki gibidir.

- Üç boyutlu akış modeli kullanılarak çark performansının elde edilmesindeki yakınsama zamanının azaltılması için parametrik bir çalışma yapılabilir.
- Hem sanki üç boyutlu hemde üç boyutlu akış modeli için çark içindeki mevcut kayıpları karakterize eden bir kayıp modeli kullanılabilir.
- Ayrıca denklemler korunumlu formda kullanıldığı için elde edilen programlara viskoz akılar eklenerek kolaylıkla Navier-Stokes denklemlerine geçilebilir. Fakat tasarımcı için yakınsama zamanı açısından pek pratik değildir.
- Euler denklemleri kullanılarak çark ve salyangozun birlikte modellendiği bir çalışma yapılabilir.

KAYNAKLAR

- ACOSTA, A.J., (1954), "An Experimental and Theoretical Investigation of two Dimensional Centrifugal Impellers", Trans. Asme, 76, no.3, p.749.
- ADLER, D., (1980), "Status of Centrifugal Impeller : Internal Aerodynamics Part I: Inviscid Flow Prediction Methods", Trans. ASME, vol. 102, pp. 728, July.
- AGARD AG-325, (1994), "Computational Aerodynamics Based on the Euler Equations", September.
- ALLEN, E., (1960), "Using Centrifugal Pumps", Oxford University Press, London.
- ANDERSON, H.H., (1980), "Centrifugal Pumps", Trade & Technical Press.
- ANDERSON, J.D., (1991), "Incompressible Inviscid Flows : Source and Vortex Panel Methods", VKI Lecture Series, Introduction to CFD.
- ARTS, T., (1985), "Three Dimensional Rotational Inviscid Flow Calculation in Axial Turbine Blade Rows", VKI Technical Note 154, September
- ASLAN, R., (1991), "Parabolized Navier-Stokes Equations for Ducted Flow Systems", VKI Lecture Series, Computational Fluid Dynamics, February 18-22.
- AYYUBI, S.B., RAO, Y.V.N., (1971) "Theoretical Analysis of Flow Through Two Dimensional Centrifugal Pump Impeller by Method of Singularities", J. Basic Engineering 93, no.1, p.35.
- BADIE, R., JONKER, J.B., VAN ESSEN, T.G., (1992), "Calculations on the Time-Dependent Potential Flow in a Centrifugal Pump", ASME Paper 92-GT-151.
- BASKHARONE, E.A., DANIEL, A.S., HENSEL, S.J., (1994), "Rotordynamic Effects of the Shroud-to-Housing Leakage Flow in Centrifugal Pumps", Trans. ASME, vol.116, pp.558, September.
- BAYSAL, K., (1979), "Tam Santrifüj Pompalar, Hesap, Çizim ve Konstrüksiyon Özellikleri", İ.T.Ü. Kütüphanesi, Sayı 1149, Gümüşsuyu.
- CASEY, M.V., (1994a), "The Industrial Use of CFD in the Design of Turbomachinery", AGARD Lecture Series 195, Turbomachinery Design Using CFD, pp 6-1, May.

- CASEY, M.V., (1994b) "Computational Methods for Preliminary Design and Geometry Definition in Turbomachinery", AGARD Lecture Series 195, Turbomachinery Design Using CFD, pp. 1-1, May.
- CHANG, J.L.C., KWAK, D., ROGERS, S.E., YANG, R-J., (1988), "Numerical Simulation Methods of Incompressible Flows and an Application to the Space Shuttle Main Engine", NASA Technical Memorandum 100038, March.
- CHOI, D., MERKLE, C.L., (1985), "Application of Time Iterative Schemes to Incompressible Flow", AIAA Journal, vol. 23, no. 10, pp. 1518-1524.
- CHORIN, A.J., (1967), "A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems", J. Comp. Phys., 2, pp.12-26.
- COMBES, J.F., RIEUTARD E., (1992), "Numerical and Experimental Analysis of the Flow in a Centrifugal Pump at Nominal and Partial Flow Rate", ASME 92-GT-284.
- DAIGUJI, H., (1983), "Numerical Analysis of 3-D Potential Flow in Centrifugal Turbomachines", Bulletin JSME 26, no.219, p.1495.
- DAWES, W.N. , (1988), "Development of a 3-D Navier-Stokes Solver for Application to All Types of Turbomachines", ASME Paper, No.88, GT-70.
- DENTON, J.D., (1983), "An Improved Time Marching Method for Turbomachinery Flow Calculation", Trans. ASME, vol. 105, pp. 514, July.
- DICK, E., (1991), "Introduction to Finite Volume Techniques in Computational Fluid Dynamics", Introduction to CFD, VKI Lecture Series.
- ECK, B., (1973), "Fans", tr.by. Azad and Scott, Pergamon Press.
- ERIKSSON, L.E., RIZZI, A., (1984), "Numerical Solutions of the Steady Incompressible Euler Equations Applied to Water Turbines", AIAA 2nd Applied Aerodynamics Conference, August 21-23, Washington.
- GHAZZANI, E.M., BOIS, G., GEAI, P., LEBOEUF, F., (1992), "Three Dimensional Inviscid Flow Computations in a Spatial Turbopump Inducer Using a Distributed Loss Model", ASME 92-GT-65.
- GOTO, A., (1992), "Study of Internal Flows in a Mixed-Flow Pump Impeller at Various Tip Clearances Using Three-Dimensional Viscous Flow Computations", ASME Journal of Turbomachinery, Vol.114, pp.373, April.
- HICKS, T.G., (1957), "Pump Selection and Application", McFraw Hill.

- HIRSCH, C., DECONINCK, H., (1985), "An Analysis of Flow Models : From Navier-Stokes to Potential Flow Equations", AGARD LS No. 140, Juin.
- HOLMES, D.G., (1989a), "Inviscid 2D Solutions on Unstructured, Adaptive Grids", Numerical Methods for Flows in Turbomachines, VKI Lecture Series, 1989-06.
- HOLMES, D.G., (1989b), "Inviscid 3D Solution Methods", Numerical Methods for Flows in Turbomachines, VKI Lecture Series, 1989-06.
- HOLMES, D.G., TONG, S.S., (1985), "A Three Dimensional Euler Solver for Turbomachinery Blade Rows", Trans. ASME, vol. 107, pp. 258.
- IKOHAGI, T., SHIN, B.R., DAIGUJI, H., (1992), "Application of an Implicit Time Marching Scheme to a Three Dimensional Incompressible Flow Problem in Curvilinear Coordinate Systems", Computer Fluids, Vol.21, no.2, pp.163-175.
- JAMESON, A., (1981), "A Non-Oscillatory Shock Capturing Scheme Using Flux Limited Dissipation", Princeton University, MAE Report, no. 1653.
- JAMESON, A., SCHMIDT, W., TURKEL, E., (1981), "Numerical Solutions of the Euler Equations by a Finite Volume Method Using Runge-Kutta Time Stepping Schemes", AIAA Paper 81-1259.
- JAMESON, A., BAKER, T.J., (1983), "Solution of the Euler Equations for Complex Configurations", AIAA Paper, pp.293, 83-1929.
- JORGENSEN, P., CHIMA, R., (1989), "An Unconditionally Stable Runge-Kutta Method for Unsteady Flows", AIAA 89-0025, 27th Aerospace Sciences Meeting, January 9-12, Nevada.
- KANNEMANS, H., (1980), "Radial Pump Impeller Measurements Using a Laser Doppler Velocimeter", ASME Paper 80-GT-94.
- KARAKAŞ, A., AYDER, E., (1996), "Santrifüj Pompa Çarkının Bezier Eğrileri ile Modellenmesi", İkinci Pompa Kongresi, Bildiriler Kitabı, Sayfa 132-136, 3-5 Nisan, Harbiye-İstanbul.
- KARASSIK, I.J., CARTER, R., (1960), "Centrifugal Pumps", pb. F.W. Dodge Corporation, NewYork.
- KARASSIK, I.J., (1964), "Engineers Guide to Centifugal Pumps", McGraw-Hill, NewYork.

- KATSANIS, T., (1968), "Computer Program for Calculating Velocities and Streamlines on a Blade-to-Blade Stream Surface of a Turbomachine", NASA TN-D 4525.
- KATSANIS, T., McNALLY, W.D., (1977), "Revised Fortran Program for Calculating Velocities and Streamlines on the Hub-Shroud Midchannel Stream Surface of an Axial, Radial, or Mixed- Flow Turbomachine or Annular Duct- I. Users Manual, II. Programmers Manual", NASA Technical Note D-8430, D-8431, March.
- KIRSCH, Ph., (1971), "Numerical Analysis and Design Methods of Radial Impellers", VKI Internal Note 39, May.
- KOVATS, A., (1964), "Design and Performance of Centrifugal and Axial Flow Pumps and Compressors", Pergamon Press.
- KRIMMERMAN, Y., ADLER, D., (1978), "The Three Dimensional flow Field in Turbo Impellers", J. Mech. Eng. Sci., Vol. 20, No. 3.
- KRISTAL, F.A., ANNETT, F.A., (1953), "Pumps Types Selection, Installation, Operation, and Maintenance", McGraw-Hill.
- KROLL, N., JAIN, R.K., (1987), "Solutions of Two Dimensional Euler Equations - Experience with a Finite Volume Code", DFVLR-FB 87-41.
- KWAK, D., CHAKRAWARTHY, S.R., (1986), "A Three Dimensional Incompressible Navier-Stokes Flow Solver Using Primitive Variables", AIAA Journal, vol. 24, no.3, pp. 390, March.
- LAKSHMINARAYANA, B., (1991), "An Assesment of Computational Fluid Dynamic Techniques in the Analysis and Design of Turbomachinery-The 1990 Freeman Scholar Lecture", J. Fluids Engineering, vol. 113, pp. 315, September.
- LASKARIS, T.E., (1978), "Finite Element Analysis of 3-D Potential Flow Turbomachines", AIAA 16, no.7, p.717.
- LAX, P.D., WENDROFF, B., (1964), "Difference Schemes for Hyperbolic Equations with High Order Accuracy", Comm. Pure. App. Math., 17, pp. 381-398.
- LEFEBVRE, P.J., BARKER, W.P., (1995), "Centrifugal Pump Performance During Transient Operation", ASME Journal of Fluids Engineering, vol.117, pp.123, March.
- LIU, C.H., VAFIDIS, C., WHITELAW, J.H., (1994), "Flow Characteristics of a Centrifugal Pump", ASME Journal of Fluids Engineering, vol.116, pp.303, June.

- MacCORMACK, R.W., (1969), "The Effect of Viscosity in Hypervelocity Impact Catering", AIAA Paper 69-345.
- MARCUM, D.L., HOFFMAN, J.D., (1987), "Numerical Boundary Condition Procedures for Euler Solvers", AIAA Journal, vol.25, pp.1054, August.
- MEHTA, U.B. , (1991), "Some Aspects of Uncertainty in Computational Fluid Dynamics Results", ASME J. Fluid Engineering, Vol. 113, pp. 538-543, December.
- MINER, S.M., BEAUDOIN, R.J., FLACK, R.D., (1988), "Laser Velocimeter Measurements in a Centrifugal Flow Pump", ASME 88-GT-95.
- MINER, S.M., FLACK, R.D., TREVISAN, P., (1992), "Potential Flow Analysis of the Forces on a Laboratory Centrifugal Pump Impeller", ASME 92-GT-285.
- MINER, S.M., FLACK, R.D., ALLAIRE, P.E., (1990), "Two Dimensional Flow Analysis of a Laboratory Centrifugal Pump", ASME 90-GT-50.
- MIZUKI, S., ARIGA, I., WATANABE, I., (1974), "Investigation Concerning the Blade Loading of Centrifugal Impellers", ASME Paper, 74-GT-143.
- MOHANNA KUMAR T.C., RAO, Y.V.N., (1977), "Theoretical Investigation of Pressure Distribution Along the Surface of a Thin Blade of Arbitrary Geometry of a Two Dimensional Centrifugal Pump Impeller", J. Fluids Engineering 99, no.3, p.531.
- MOORE, J., MOORE, J.G., (1979a), "A Calculation Procedure for Three Dimensional, Viscous, Compressible Duct Flow, Part I- Inviscid Flow Considerations", Journal of Fluids Engineering, vol. 101, pp. 415.
- MOORE, J., MOORE, J.G., (1979b), "A Calculation Procedure for Three Dimensional, Viscous, Compressible Duct Flow, Part II- Stagnation Pressure Losses in a Rectangular Elbow", Journal of Fluids Engineering, vol. 101, pp. 423.
- MURAKAMI, M., KIKUYAMA, K., ASAKURA, E., (1980), " Velocity and Pressure Distributions in the Impeller Passages of Centrifugal Pumps", ASME Paper, vol.102, pp.420-426, December.
- MYLES, D.J., (1965) " A Design Method for Mixed-Flow Fans and Pumps", National Engineering Laboratory Report, No. 177, March 1965.
- NI, R.H., (1982), "A Multiple-Grid Scheme for Solving the Euler Equations", AIAA Journal, vol. 20, no.11, November.

- PANTON, R.L., (1984) "Incompressible Flow", John Wiley and Sons.
- PATANKAR, S.V., (1980), "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Hemisphere, New York.
- RIZZI , A., ERIKSSON, L.E., (1985), "Computation of Inviscid Incompressible Flow With Rotation", J. Fluid Mech., vol. 153, pp. 275-312.
- SARIOĞLU, K., AYDER, E., (1997a), " Numerical Analysis of the Flow in Centrifugal Pump Impeller", International Symposium on Pumping Machinery III, 1997 ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting, June 22-26, Vancouver, British Columbia, Canada. (kabul edildi)
- SARIOĞLU, K., AYDER, E., (1996a), "Pompa Çarkı İçindeki Akışın Sanki 3 Boyutlu Sıkıştırılmaz Euler Denklemleri ile Çözümü", İkinci Pompa Kongresi, Bildiriler Kitabı, Sayfa 126-131, 3-5 Nisan, Harbiye-İstanbul.
- SARIOĞLU, K., AYDER, E., (1997b), "Flow in Centrifugal Pump Impellers", 1. Makina Mühendisliği Kongresi, İ.T.Ü. Makina Fakültesi, 4-6 Haziran, Taksim-İstanbul. (kabul edildi)
- SARIOĞLU, K., AYDER, E., (1996b), "Türbomakina Kanatları Arasındaki Akışın 3 Boyutlu Euler Denklemleri ile Çözümü", İkinci Pompa Kongresi, Bildiriler Kitabı, Sayfa 119-125, 3-5 Nisan, Harbiye-İstanbul.
- SARIOĞLU, K., AYDER, E., (1997c), "Pompa Çarkı İçindeki Akışın 3 Boyutlu Euler Denklemleri ile Çözümü", TUBİTAK Doğa Dergisi (kabul edildi).
- SARIOĞLU, K., KAVURMACIOĞLU, L., (1997), "Radyal Pompa Performansının Pompa-Türbin Deney Tesisatı ile Elde Edilmesi ve Sayısal Model ile Karşılaştırılması", 1. Makina Mühendisliği Kongresi, İ.T.Ü. Makina Fakültesi, 4-6 Haziran, Taksim-İstanbul. (kabul edildi)
- SARIOĞLU, K., (1994), "Radyal Girişli Türbin Kanatlarının İndirekt Dizaynı", I. Havacılık Sempozyumu, Sayfa 175-180, 9-10 Haziran, Yeşilyurt-İstanbul.
- SEGAL, G., VUIK, K., KASSELS, K., (1994), "On the Implementation of Symmetric and Antisymmetric Periodic Boundary Conditions for Incompressible Flow", International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 18, pp. 1153-1165.
- SEMMES, R.G., ARBITER, D.G., DYER, R.D., (1988), "Efforts Toward the Validation of a Computational Fluid Dynamics Code for Analysis of Internal Aerodynamics", Validation of Computational Dynamics,

Volume 1 - Symposium Papers and Round Table Discussion, AGARD CP-437, vol.1.

- STANITZ, J.D., OSBORN, W.M., MIZISIN, J., (1953), "An Experimental Investigation Secondary Flow in an Accelerating, Rectangular Elbow with 90° Turning", NACA TN 3015, October.
- STEPANOFF, A.J., (1948), "Centrifugal and Axial Flow Pumps, Theory, Design, and Application", John Wiley&Sons.
- STOCKMAN, N.O., KRAMER, J.L., (1963), "Method for Design of Pump Impellers Using a High Speed Digital Computer", NASA Technical Note D-1562.
- STURGE, D.P., (1975), "A Comparison of Calculated Separated Flow With Experiments on Radial Pump Impellers", University of Cambridge, CUED/A-Turbo/Tr 68.
- THOMPSON, W.K., (1990), "Time Dependent Boundary conditions for Hyperbolic Systems, II", Journal of Computational Physics 89, pp. 439-461.
- TSUKAMATO, H., YONEDA, H., SAGARA, K., (1995), "The Response of a Centrifugal Pump to Fluctuating Rotational Speed", ASME Journal of Fluids Engineering, vol.117, pp.479, September.
- TURKEL, E., (1983), "Acceleration to a Steady State for the Euler Equations", Proc. INIRA Euler Workshop.
- TUZSON, J., (1993), "Interpretation of Impeller Flow Calculations", J. Fluids Engineering, vol. 115, pp. 463.
- VAVRA, M.H., (1960), "Aero-Thermodynamics and Flow in Turbomachines", Wiley&Sons.
- VAN DEN BRAEMBUSSCHE, R.A., (1996), "Impeller Response to Downstream Pressure Distortion", Flow in Radial Turbomachines, VKI LS 1996-01, January 15-19.
- WARRING, R.H., (1969), "Pumps Selection, Systems and Applications", Trade&Technical Press.
- VON DOORMAL, J.P., RAITHBY, G.D., (1984), "Enhancement of the SIMPLE Method for Predicting Incompressible Fluid Flow", Num. Heat Transfer, vol. 67, pp. 147.
- WHITFIELD, A., BAINES, N.C., (1990), "Design of Radial Turbomachines", Wiley&Sons, NewYork.

WU, C.H., (1952), "A General Teheory of Three Dimensional Flow in Subsonic and Supersonic Turbomachine in Radial, Axial and Mixed Flow Types", NACA TN 2604.



EK - A

ÜÇ BOYUTLU EULER DENKLEMLERİNİN SİLİNDİRİK KOORDİNATLARDA ELDE EDİLMESİ

Bölüm 6 da belirtilen Euler denklemlerinin elde edilebilmesi için kartezyen koordinatlarda korunumlu formda yazılmış olan Euler denklemleri kullanılır. En genel halde bu denklemler aşağıda gösterilmiştir.

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{f}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{f}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{f}_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{A-1})$$

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_x \\ \rho u_y \\ \rho u_z \end{bmatrix} \quad \bar{f}_x = \begin{bmatrix} \rho u_x \\ \rho u_x^2 + p \\ \rho u_x u_y \\ \rho u_x u_z \end{bmatrix} \quad \bar{f}_y = \begin{bmatrix} \rho u_y \\ \rho u_y u_x \\ \rho u_y^2 + p \\ \rho u_y u_z \end{bmatrix} \quad \bar{f}_z = \begin{bmatrix} \rho u_z \\ \rho u_z u_x \\ \rho u_z u_y \\ \rho u_z^2 + p \end{bmatrix}$$

Burada $\bar{U}$ çözüm vektörünü, $\bar{f}_x, \bar{f}_y, \bar{f}_z$ ise akı vektörlerini göstermektedir.

Bu denklemleri kartezyen koordinat sisteminden (x,y,z), silindirik koordinat sistemine (r,θ,z) çevirmek için aşağıdaki temel eşitlikler kullanılır.

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

$$r = \pm \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan(y/x) \quad (\text{A-2})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

Silindirik koordinatlardaki hız bileşenleri u_r, u_θ, u_z kartezyen koordinatlardaki hızlar cinsinden aşağıdaki gibi yazılır.

$$u_r = \cos \theta u_x + \sin \theta u_y$$

$$u_\theta = -\sin \theta u_x + \cos \theta u_y$$

Akı vektörleri ise,

$$\begin{aligned}\bar{f}_r = \cos\theta f_x + \sin\theta f_y &= \begin{bmatrix} \rho u_r \\ \rho u_x u_r + p \cos\theta \\ \rho u_y u_r + p \sin\theta \\ \rho u_z u_r \\ (\rho E + p)u_r \end{bmatrix} & \bar{f}_\theta = -\sin\theta f_x + \cos\theta f_y &= \begin{bmatrix} \rho u_\theta \\ \rho u_x u_\theta - p \sin\theta \\ \rho u_y u_\theta + p \cos\theta \\ \rho u_z u_\theta \\ (\rho E + p)u_\theta \end{bmatrix} \\ \bar{f}_z &= \begin{bmatrix} \rho u_z \\ \rho u_x u_z \\ \rho u_y u_z \\ \rho u_z^2 + p \\ (\rho E + p)u_z \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (A-3)$$

şeklinde elde edilir. En genel halde silindirik koordinatlarda gösterimi ise;

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{f}_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{f}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{f}_z}{\partial z} = 0 \quad (A-4)$$

Bu denklemin r ile çarpılmış hali;

$$\frac{\partial (r \bar{U})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{f}_r) + \frac{\partial \bar{f}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial (r \bar{f}_z)}{\partial z} = 0 \quad (A-5)$$

şeklindedir.

A-5 denklemi kullanılarak kütle korunumu ve momentum denklemlerinin açık yazılımı aşağıda gösterilmiştir.

Süreklilik denklemi;

$$\frac{\partial (r \rho)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (r \rho u_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho u_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (r \rho u_z) = 0 \quad (A-6)$$

Momentum denklemleri;

$$\frac{\partial}{\partial t} (r \rho u_x) + \frac{\partial}{\partial r} [r (\rho u_x u_r + p \cos\theta)] + \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho u_x u_\theta - p \sin\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (r \rho u_x u_z) = 0 \quad (A-7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (r \rho u_y) + \frac{\partial}{\partial r} [r (\rho u_y u_r + p \sin\theta)] + \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho u_y u_\theta + p \cos\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (r \rho u_y u_z) = 0 \quad (A-8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(r\rho u_z) + \frac{\partial}{\partial r}(r\rho u_z u_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho u_z u_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}[(r\rho u_z^2 + p)] = 0 \quad (\text{A-9})$$

x ve y momentum denklemleri u_x ve u_y hız bileşenlerini içermektedir. u_x ve u_y bileşenleri u_r ve u_θ hız bileşenleri cinsinden,

$$\begin{aligned} u_x &= \cos\theta u_r - \sin\theta u_\theta \\ u_y &= \sin\theta u_r + \cos\theta u_\theta \end{aligned} \quad (\text{A-10})$$

x ve y momentum denklemlerinde yerine konulursa ve aşağıdaki düzenlemeler yapılırsa,

$$(\text{A-7}) \cdot \cos\theta + (\text{A-8}) \cdot \sin\theta \quad (\text{A-11})$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(r\rho u_r) + \frac{\partial}{\partial r}[r(\rho u_r^2 + p)] + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho u_r u_\theta) - \cos\theta \frac{\partial}{\partial \theta}[\sin\theta(\rho u_\theta^2 + p)] \\ &+ \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}[\cos\theta(\rho u_\theta^2 + p)] + \frac{\partial}{\partial z}(r\rho u_r u_z) = 0 \end{aligned}$$

$$(\text{A-7}) \cdot (-\sin\theta) + (\text{A-8}) \cdot \cos\theta \quad (\text{A-12})$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(r\rho u_\theta) + \frac{\partial}{\partial r}(r\rho u_\theta u_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho u_\theta^2 + p) - \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}(\cos\theta \rho u_r u_\theta) \\ &+ \cos\theta \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta \rho u_r u_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(r\rho u_\theta u_z) = 0 \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. $\sin\theta$ ve $\cos\theta$ içeren terimlerde gerekli θ türevleri alınırsa denklemler aşağıdaki hale gelir.

$$\frac{\partial}{\partial t}(r\rho u_r) + \frac{\partial}{\partial r}[r(\rho u_r^2 + p)] + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho u_r u_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(r\rho u_r u_z) - \rho u_\theta^2 - p = 0 \quad (\text{A-13})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(r\rho u_\theta) + \frac{\partial}{\partial r}(r\rho u_\theta u_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho u_\theta^2 + p) + \frac{\partial}{\partial z}(r\rho u_\theta u_z) + \rho u_r u_\theta = 0 \quad (\text{A-14})$$

Yukarıdaki bu iki denklem türevler dışında terimler içerdiği için korunumlu formda değildir. Bu çalışmada korunumlu formda yazılmış Euler denklemleri çözümlendiğinden bu iki denklem için uygulanan ayrıklaştırma işleminde r ve θ momentum denklemlerinin korunumu tam olarak sağlanması garanti edilemez. Dikkat edilirse süreklilik ve z-momentum denklemleri zaten korunumlu formdadır.

z ekseninde dönen silindirik koordinat sisteminde yazılmış denklemleri elde etmek için yukarıda elde edilen denklemler kullanılır. Bunun için yukarıdaki denklemlere aşağıdaki dönüşümler uygulanır.

$$\begin{aligned} u_{\theta} &= u'_{\theta} + \Omega r \\ \theta &= \theta' + \Omega t' \\ t &= t' \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t'} - \Omega \frac{\partial}{\partial \theta'} \end{aligned} \quad (A-15)$$

Süreklilik denkleminin dönüştürülmesi ;

$$\frac{\partial \rho}{\partial t'} - \Omega \frac{\partial \rho}{\partial \theta'} + \frac{\partial}{\partial r}(\rho u_r) + \frac{\partial}{\partial \theta'}[\rho(u'_{\theta} + \Omega r)] + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) = 0 \quad (A-16)$$

Gerekli düzenleme yapılırsa,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial r}(\rho u_r) + \frac{\partial}{\partial \theta'}(\rho u'_{\theta}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) = 0 \quad (A-17)$$

z-momentum denkleminin dönüştürülmesi;

$$\frac{\partial}{\partial t'}(\rho u_z) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho u_z u_r) + \frac{\partial}{\partial \theta'}(\rho u_z u'_{\theta}) + \frac{\partial}{\partial z}[(\rho u_z^2 + p)] = 0 \quad (A-18)$$

r-momentum denkleminin dönüştürülmesi;

A-11 denkleminde u_{θ} yerine u'_{θ} yerleştirilirse,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t'}(\rho u_r) + \frac{\partial}{\partial r}[\rho(u_r^2 + p)] + \frac{\partial}{\partial \theta'}(\rho u_r u'_{\theta}) - \cos \theta' \frac{\partial}{\partial \theta'}[\sin \theta'(\rho |u'_{\theta} + \Omega r|^2 + p)] \\ + \sin \theta' \frac{\partial}{\partial \theta'}[\cos \theta'(\rho |u'_{\theta} + \Omega r|^2 + p)] + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_r u_z) = 0 \end{aligned} \quad (A-19)$$

$$\frac{\partial}{\partial t'}(\rho u_r) + \frac{\partial}{\partial r}[\rho(u_r^2 + p)] + \frac{\partial}{\partial \theta'}(\rho u_r u'_{\theta}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_r u_z) - \rho u_{\theta}'^2 - 2\rho u'_{\theta} r \Omega - \rho \Omega^2 r^2 - p = 0$$

r * r-momentum denklemi elde edildiğinden yukarıdaki denklemin türev ihtiva etmeyen terimleri r ile bölündüğünde Bölüm 6 daki b vektörünün r yönündeki bileşenini bulunur.

θ -momentum denkleminin dönüşümü;

A-12 denkleminde u_θ yerine u'_θ yerleştirilirse,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t'} [r\rho(u'_\theta + \Omega r)] - \Omega \frac{\partial}{\partial \theta'} [r\rho(u'_\theta + \Omega r)] + \frac{\partial}{\partial r} [r\rho u_r(u'_\theta + \Omega r)] + \frac{\partial}{\partial \theta'} [\rho(u'_\theta + \Omega r)^2 + p] \\ & - \sin\theta' \frac{\partial}{\partial \theta'} [\cos\theta' \rho u_r(u'_\theta + \Omega r)] + \cos\theta' \frac{\partial}{\partial \theta'} [\sin\theta' \rho u_r(u'_\theta + \Omega r)] + \frac{\partial}{\partial z} [r\rho u_z(u'_\theta + \Omega r)] = 0 \end{aligned}$$

Ωr^* süreklilik denklemini,

$$\Omega r \left[\frac{\partial r\rho}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial r} (r\rho u_r) + \frac{\partial}{\partial \theta'} (\rho u'_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (r\rho u_z) \right] = 0 \quad (A-20)$$

yukarıdaki denklemden çıkarılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{\partial}{\partial t'} (r\rho u'_\theta) + \frac{\partial}{\partial r} (r\rho u'_\theta u_r) + \frac{\partial}{\partial \theta'} (\rho u'^2_\theta + p) + \frac{\partial}{\partial z} (r\rho u'_\theta u_z) + \rho u_r u'_\theta + 2\rho u_r \Omega r = 0 \quad (A-21)$$

elde edilir. Benzer şekilde $r^*\theta$ -momentum denklemini elde edildiğinden yukarıdaki denklemin türev ihtiva etmeyen terimleri r ile bölündüğünde Bölüm 6 daki b vektörünün θ yönündeki bileşeni bulunur.

Yukarıda elde edilen süreklilik ve momentum denklemleri sıkıştırılabilir akış için geçerlidir. Sıkıştırılamaz akışta yoğunluk sabittir. Süreklilik denkleminde yoğunluğun zamana bağlı türevi yerine yapay basınç terimi eklenir ve gerekli düzenleme yapılırsa Bölüm 6 daki 6.1 nolu denklem sistemi elde edilir.

EK - B

SANKİ ÜÇ BOYUTLU EULER DENKLEMLERİNİN ELDE EDİLMESİ

Sıkıştırılamaz akış için yazılan genel denklemleri elde etmek için öncelikle sıkıştırılabilir akış için yazılan denklemler elde edilecektir.

Burada kanatlar arası akım yüzeyinde, meridyenel akım yüzeyi genişliğini de dikkate alan sıkıştırılabilir Euler denklemleri (süreklilik, momentum) elde edilir.

Süreklilik denklemi :

Sıkıştırılabilir akış için kütle korunumu denklemi en genel halde aşağıdaki gibi yazılabilir (VAVRA, 1960).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{W}) = 0 \quad (B-1)$$

Bağıl hızın bileşenleri,

$$\rho \vec{W} = \vec{i}_1(\rho W_\theta) + \vec{i}_2(\rho W_m) + \vec{i}_3(\rho W_n) \quad (B-2)$$

ortogonal koordinat sisteminde (m,n,θ) daha açık bir halde yazılırsa;

$$\nabla = \vec{i}_1 \frac{\partial}{R \partial \theta} + \vec{i}_2 \frac{\partial}{\partial m} + \vec{i}_3 \frac{\partial}{\partial n}$$

$$\nabla(\rho \vec{W}) = \frac{1}{R} \frac{\partial(\rho W_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial(\rho R W_m)}{\partial m} + \frac{1}{R} \frac{\partial(\rho R W_n)}{\partial n} + W_m k_n + W_n k_m = 0 \quad (B-3)$$

elde edilir.

Eksenel simetrik akım yüzeyi oluşabilmesi için aşağıdaki koşulların sağlanması gerekir.

$$\begin{aligned} W_n &= 0 & \frac{\partial(\Delta h)}{\partial \theta} &= 0 & \frac{\partial R}{\partial \theta} &= 0 \\ k_m &= -\frac{1}{W_m} \frac{\partial W_m}{\partial n} & k_n &= \frac{1}{\Delta h} \frac{\partial(\Delta h)}{\partial m} \end{aligned} \quad (B-4)$$

(B-3) denkleminde k_m ve k_n terimleri yerine yukarıdaki eşitlik yazılır ve her terim $R\Delta h$ ile çarpılırsa, (B-3) nolu denklem aşağıdaki hale gelir.

$$\frac{\partial(\rho\Delta h W_\theta)}{\partial\theta} + \Delta h \frac{\partial(\rho R W_m)}{\partial m} + W_m R \frac{\partial(\Delta h)}{\partial m} = 0 \quad (B-5)$$

Zamana bağlı terim eklenir ve m yönündeki türevleri içeren terimlerde gerekli düzenleme yapılırsa süreklilik denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{\partial(\rho R \Delta h)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \Delta h W_\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial(\rho R \Delta h W_m)}{\partial m} = 0 \quad (B-6)$$

Sıkıştırılmaz akışta yoğunluk sabit olduğundan yoğunluğun zamanla değişimi denklemlerden düşer. Denklemin hiperbolik karakterini sağlamak için denkleme zamana bağlı olarak değişen yapay basınç terimi eklenir. Ve diğer terimler c^2 gibi bir katsayıyla çarpılır. ρ_0 sabit yoğunluğu göstermektedir.

$$\frac{\partial(p/\rho_0 R \Delta h)}{\partial t} + c^2 \frac{\partial(\Delta h W_\theta)}{\partial\theta} + c^2 \frac{\partial(R \Delta h W_m)}{\partial m} = 0 \quad (B-7)$$

Momentum denklemi :

Sıkıştırılabilir, izentropik akış için momentum denklemi,

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \nabla H_R = \vec{W} \wedge (\nabla \wedge \vec{W} + 2\vec{\omega}) \quad (B-8)$$

şekilindedir. H_R bağıl toplam entalpiyi göstermektedir.

$$\vec{W} = \vec{i}_\theta W_\theta + \vec{i}_m W_m + \vec{i}_n W_n \quad (B-9)$$

$$H_R = \frac{p}{\rho} + \frac{W^2}{2} - \frac{\omega^2 R^2}{2}$$

(B-8) denkleminin sağ tarafı daha açık yazılırsa (VAVRA, 1960);

$$\begin{aligned} \vec{W} \wedge (\nabla \wedge \vec{W} + 2\vec{\omega}) \Rightarrow & i_\theta \left[\frac{W_m}{R} \left(\frac{\partial W_m}{\partial\theta} - \frac{\partial(RW_\theta + \omega R^2)}{\partial m} \right) \right] + \\ & i_m \left[\frac{W_\theta}{R} \left(\frac{\partial(RW_\theta + \omega R^2)}{\partial m} - \frac{\partial W_m}{\partial\theta} \right) \right] + \\ & i_n \left[\frac{W_\theta}{R} \left(\frac{\partial(RW_\theta + \omega R^2)}{\partial n} - \frac{\partial W_n}{\partial\theta} \right) \right] - W_m \frac{\partial W_n}{\partial m} + W_m \frac{\partial W_m}{\partial n} + W_m^2 k_m \end{aligned} \quad (B-10)$$

elde edilir. Eksenel simetrik akım yüzeyi oluşabilmesi için aşağıdaki koşulların sağlanması gerekir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_n}{\partial m} = 0 \quad \frac{\partial W_n}{\partial \theta} = 0 \\ K_m = -\frac{1}{W_m} \frac{\partial W_m}{\partial n} \quad \frac{\partial (RW_\theta + \omega R^2)}{\partial n} = 0 \end{aligned} \quad (B-11)$$

Momentum denkleminin m yönündeki bileşeni :

B-8 denkleminin m-yönündeki bileşeni aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_m}{\partial t} + \frac{\partial H_R}{\partial m} = \frac{W_\theta}{R} \left(\frac{\partial (RW_\theta + \omega R^2)}{\partial m} - \frac{\partial W_m}{\partial \theta} \right) \\ \nabla H_R = i_m \frac{\partial H_R}{\partial m} + \frac{i_\theta}{R} \frac{\partial H_R}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (B-12)$$

Denklemin her iki tarafı ρRh ile çarpılıp ve sol tarafa W_m *Süreklilik denklemini eklenirse, gerekli düzenlemelerden sonra aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\frac{\partial (\rho W_m Rh)}{\partial t} + \frac{\partial (p + \rho W_m^2) Rh}{\partial m} + \frac{\partial (\rho h W_m W_\theta)}{\partial \theta} = \frac{p \partial (Rh)}{\partial m} + h \rho (W_\theta + \omega R)^2 \frac{\partial R}{\partial m} \quad (B-13)$$

Momentum denkleminin θ yönündeki bileşeni :

$$\frac{\partial W_\theta}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial H_R}{\partial \theta} = \frac{W_m}{R} \left(\frac{\partial W_m}{\partial \theta} - \frac{\partial (RW_\theta + \omega R^2)}{\partial m} \right) \quad (B-14)$$

Denklemin her iki tarafı ρRh ile çarpılıp ve sol tarafa W_θ *Süreklilik denklemini eklenirse aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\frac{\partial (\rho W_\theta Rh)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho Rh W_m W_\theta)}{\partial m} + \frac{\partial (p + \rho W_\theta^2) h}{\partial \theta} = -h \rho W_m (W_\theta + 2\omega R) \frac{\partial R}{\partial m} \quad (B-15)$$

Yukarıda elde edilen m ve θ momentum denklemleri sıkıştırılmaz akış için yeniden düzenleme yapılırsa aşağıdaki hale gelir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(W_m Rh)}{\partial t} + \frac{\partial(p/\rho_0 + W_m^2)Rh}{\partial m} + \frac{\partial(hW_m W_\theta)}{\partial \theta} &= \frac{p}{\rho_0} \frac{\partial(Rh)}{\partial m} + h(W_\theta + \omega R)^2 \frac{\partial R}{\partial m} \\ \frac{\partial(W_\theta Rh)}{\partial t} + \frac{\partial(RhW_m W_\theta)}{\partial m} + \frac{\partial(p/\rho_0 + W_\theta^2)h}{\partial \theta} &= -hW_m(W_\theta + 2\omega R) \frac{\partial R}{\partial m} \end{aligned} \quad (B-16)$$

Bu denklemler Bölüm 5 de belirtilen genel denklemlerin açık yazılmış halidir.

EK - C

ÇARK PERFORMANSININ SAYISAL OLARAK ELDE EDİLMESİ (DEBİ - YÜK DEĞİŞİMİ)

Pompanın manometrik basma yüksekliği bir boyutlu momentum denklemi ile ifade edilebilir.

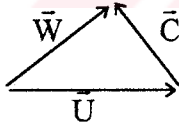
$$H_m = \frac{C_{\theta_2} U_2 - C_{\theta_1} U_1}{g} \quad (C.1)$$

U_1 , U_2 kanat hücum ve kaçış kenarlarındaki çevresel hızları, C_{θ_1} ve C_{θ_2} ise teğetsel mutlak hızları göstermektedir. Sayısal olarak bağıl hız bileşenleri elde edildiğinden yukarıdaki denklemin düzenlenmesi gerekir.

Girdapsız ve sıkıştırılamaz akışta herhangi bir akışkan ipçığı boyunca yük sabittir.

$$\frac{p}{\rho} + \frac{W^2}{2} - \frac{U^2}{2} = \text{sabit} \quad (C.2)$$

Mutlak ve bağıl hızlar vektörel gösterim ile,



$$\vec{C} = \vec{W} + \vec{U} \quad \vec{C} = C_{\theta} \vec{i}_{\theta} + C_m \vec{i}_m \quad \vec{W} = W_{\theta} \vec{i}_{\theta} + W_m \vec{i}_m \quad (C-3)$$

C.2 denkleminde yerine konulursa,

$$\frac{p}{\rho} + \frac{W^2}{2} - \frac{\vec{U}(\vec{C} - \vec{W})}{2} = \text{sabit} \quad (C-4)$$

$$\frac{p}{\rho} + \frac{W^2}{2} - \frac{1}{2}(UC_{\theta} - UW_{\theta}) = \text{sabit} \quad (C-5)$$

elde edilir.

Giriş ve çıkış noktaları 1 ve 2 indisleri ile gösterilirse, C-5 denklemi aşağıdaki gibi yazılır.

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{W_1^2}{2} - \frac{1}{2}(U_1 C_{\theta_1} - U_1 W_{\theta_1}) = \frac{p_2}{\rho} + \frac{W_2^2}{2} - \frac{1}{2}(U_2 C_{\theta_2} - U_2 W_{\theta_2}) = \text{sabit} \quad (\text{C-6})$$

C.1 denkleminin sağ tarafı için denklem yeniden düzenlenirse,

$$\left(\frac{p_2}{\rho} + \frac{W_2^2}{2} - \frac{1}{2} U_2 W_{\theta_2} \right) - \left(\frac{p_1}{\rho} + \frac{W_1^2}{2} - \frac{1}{2} U_1 W_{\theta_1} \right) = \frac{U_2 C_{\theta_2} - U_1 C_{\theta_1}}{2} \quad (\text{C-7})$$

elde edilir. Denklemin sol tarafı A ile gösterilirse çark girişi ve çıkışı arasında enerji değişimi için aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$H_m = \frac{2A}{g} \quad (\text{C-8})$$

Debi değeri ise aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$Q = \int_{\theta_1}^{\theta_2} W_m dA$$

$$Q = 2\pi R h W_{m_{\text{giriş}}} \quad (\text{C-9})$$

ÖZGEÇMİŞ

Kemal SARIOĞLU 1966 yılında İstanbul' da doğdu. 1981 yılında İstanbul Haydarpaşa Endüstri ve Meslek Lisesi' ne girerek 1983 yılında Makina bölümünden mezun oldu. 1984 yılında İ.T.Ü. Makina Fakültesi Makina Mühendisliği bölümüne girerek, 1988 yılında Konstrüksiyon bölümünden mezun oldu. Aynı yıl İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Makina Mühendisliği Ana Bilim Dalı Enerji programına girerek 1990 yılında yüksek mühendis ünvanı alarak mezun oldu. 1990 yılında Enerji programında -yüksek ortalama nedeniyle- doktora öğrenimine sınavsız olarak kabul edildi. Bir yıl bu programda kaydını dondurarak Belçika' daki von Karman Akışkanlar Dinamiği Enstitüsünde bir yıllık diploma kursunu başarıyla tamamladı ve doktora çalışmasına başladı.

1989 Aralık ayında İ.T.Ü. Makina Fakültesi Hidromekanik ve Hidrolik Makinalar Ana Bilim Dalında Araştırma Görevlisi olarak görevine başlayan Kemal SARIOĞLU halen aynı yerde bilimsel çalışmalarını sürdürmektedir.