

21742

**KULE TÜRÜ YAPILARIN DEPREM DAVRANIŞININ
ZEMİN - YAPI ETKİLEŞİMİ GÖZÖNÜNE ALINARAK İNCELENMESİ**

DOKTORA TEZİ

Yük. Müh. Kadir GÜLER

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 17 HAZİRAN 1992

Tezin Savunulduğu Tarih : 21 EYLÜL 1992

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Halit DEMİR

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Nahit KUMBASAR

: Prof. Dr. Sadettin ÖKTEN

EYLÜL 1992

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

ÖNSÖZ

Bu doktora çalışması süresince, tez danışmanlığını yürüten, ilgi teşvik ve yardımlarını gördüğüm, fikirlerinden istifade ettiğim değerli hocam Prof. Dr. Halit DEMİR'e teşekkürlerimi sunarım.

Konu ile ilgili görüşmelerimiz ve birlikte yaptığımız çalışmalar sayesinde, fikirlerinden çok yararlandığım değerli hocam Prof. Dr. Zekai CELEP'e teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca, konu ile ilgili sayısal çözümlerde imkanlarından faydalandığım İ.T.Ü. Bilgi İşlem Daire Başkanlığı'na da teşekkür ederim.

Haziran 1992

Kadir GÜLER

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	XV11
SUMMARY.....	XV111
BÖLÜM 1. GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2. KONU İLE İLGİLİ ÇALIŞMALARIN GÖZDEN GEÇİRİLMESİ.....	3
BÖLÜM 3. KONSOL ÇUBUĞUN TİTREŞİMİ.....	14
3.1. Giriş	14
3.2. Yayılı Kütleli Konsol Çubuk.....	15
3.2.1. Titreşim Denkleminin Çözümü.....	16
3.3. Yayılı ve Toplu Kütleli Konsol Çubuk.....	19
3.3.1. Titreşim Denkleminin Çözümü.....	21
3.3.1.1. δ_u Olarak u_m Seçimi.....	26
3.4. Yayılı Kütleli Konsol Çubuğun Statik Çözümü.....	28
BÖLÜM 4. DAİRESEL PLAĞIN TİTREŞİMİ.....	29
4.1. Giriş.....	29
4.2.1. Dairesel Plâğın Titreşim Denklemi...	29
4.2.2. Dairesel Plâğın Serbest Titreşimi...	31
4.2.3. Kenarlarında Serbest Oturan Plak İçin Sınır Şartları.....	32
4.2.3.1. Eğilme Momenti ile ilgili Sınır Şartı	32
4.2.3.2. Kesme Kuvveti ile ilgili Sınır Şartı	34
4.3. Elastik Zemine Oturan Dairesel Plak.	39
4.3.1. Titreşim Denklemi.....	39
4.3.2. Titreşim Denkleminin Çözümü.....	42
4.3.3.1. Plak Denkleminin Ayrıklaştırılması..	48
4.3.3.2. δ_w Olarak 1 Seçimi.....	49
4.3.3.3. δ_w Olarak $\cos\theta$ Seçimi.....	51
4.3.3.4. δ_w Olarak $w_m(r) \cos m\theta$ Seçimi.....	53
4.4. Dairesel Plâğın Titreşimine Ait Ayrıklaştırılmış Denklem Takımı.....	58
4.5. Dairesel Plâğın Dönme ve Çökmelerinin Belirlenmesi.....	59
4.6. Dinamik Halden Statik Duruma Geçiş..	61
4.7. Statik Duruma Ait Sayısal Sonuçlar..	62

BÖLÜM 5.	DAİRESEL RİJİT PLAK-KOLON SİSTEMİ...	68
5.1.	Giriş.....	68
5.2.	Sistemin Hareket Denklemi ve Çözümü.	68
5.3.	Temeldeki Ayrılma Durumu.....	74
5.4.	Dairesel Plakın Düşey Statik Yerdeğiştirmesi.....	75
5.5.	Plak Kolon Sisteminin Harmonik Dış Etki Altında Davranışı.....	76
5.6	Sayısal Örnekler	86
5.6.1	Baca Problemleri	86
5.6.1.1	110 m Yükseklikli Baca	86
5.6.1.2	75 m Yükseklikli Baca	90
5.6.2	Su Kulesi Problemi	91
BÖLÜM 6.	DAİRESEL ELASTİK PLAK-KOLON SİSTEMİ.	94
6.1.	Giriş.....	94
6.2.	Sistemin Hareket Denklemi.....	94
6.2.1.	Dairesel Plak Merkezinde Düşey Denge	94
6.2.2.	Dairesel Plak Merkezinde Moment Dengesi.....	97
6.2.3.	Denklemlerin Birleştirilmesi.....	98
6.3.	Taban Kesme Kuvveti.....	104
6.4.	Statik Çözüm.....	105
6.5.	Plak-Kolon Sistemin Dinamik Davranışı.....	106
6.5.1.	Serbest Titreşim.....	107
6.5.2.	Harmonik Yer Hareketi.....	116
6.5.3.	Deprem Yer Hareketi.....	119
6.6.	Sayısal Örnekler	125
6.6.1.	Baca Problemleri	126
6.6.1.1.	110 m Yükseklikli Baca	126
6.6.1.2.	75 m Yükseklikli Baca	127
6.6.2.	Su Kulesi Problemi	127
BÖLÜM 7.	SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	129
KAYNAKLAR.....		131
ÖZGEÇMİŞ.....		138

SEMBOLLER

a	: plak yarıçapı
a_{mn}	: integrasyon sabiti
A_{mn}	: integrasyon sabiti
A_{nm}	: Dairesel plakta frekans ifadesi ($\bar{A}_{nm} / \bar{B}_{nm}$)
$\bar{A}_{nm}, \bar{B}_{nm}$	: Bessel fonksiyonlarının sınır şartlarına bağlı katsayılar
b_{mn}	: integrasyon sabiti
B_n	: integrasyon sabiti
c, d	: koordinat fonksiyonu sabitleri
c_{mn}	: integrasyon sabiti
C_c	: kolonda sönüm katsayısı
C_n	: integrasyon sabiti
C_f	: zeminde sönüm katsayısı
C_1, C_2, C_3, C_4	: konsol kolonda sınır şartları ile ilgili katsayılar
d_m	: integrasyon sabiti

D	: plak eğilme rijitliği
D_1, D_2	: kolonla ilgili zaman fonksiyonunda, başlangıç şartlarına bağlı katsayılar
e_m	: integrasyon sabiti
$EI (X)$	: kolonun eğilme rijitliği
EI_o	: kolonun tabandaki eğilme rijitliği
E_{mn}	: integrasyon sabiti
$f (X)$	: kolon kütlesi değişim fonksiyonu
f_{mn}	: integrasyon sabiti
F_f	: zeminde tepki olarak oluşan kuvvet
F_h	: kolon ucunda yatay harmonik etki
F_m, F_n	: integrasyon sabiti
F_o	: harmonik etkinin genliği
F_s	: zeminden ayrılmanın olduğu andaki kolon ucunda etki eden tekil kuvvet
g	: yerçekimi ivmesi
$g(X)$	: kolon atalet momenti değişim fonksiyonu
g_{mn}	: integrasyon sabiti
G_m	: integrasyon sabiti

h	: plak kalınlığı
h_{mn}	: integrasyon sabiti
$h(X)$	: kolona etki eden yayılı yükün değişim fonksiyonu
$H(R, \theta, t)$	: değme fonksiyonu
I_o	: kolonun tabandaki atalet momenti
$I(X)$	: kolonun yüksekliği boyunca atalet momentinin değişimi
$I_n(\lambda_{nm} R)$	: birinci mertebeden değiştirilmiş Bessel fonksiyonu
J_i	: toplu kütle atalet momenti
$J_n(\lambda_{nm} R)$	: birinci mertebeden Bessel fonksiyonu
K_f	: zemindeki yayların katsayısı
L	: kolon boyu (yüksekliği)
$L(R, \theta, t)$	: diferansiyel operatör
$L(U, \theta)$	: diferansiyel operatör
$m_c(X)$	: kolon birim boyunun kütlesi
m_{co}	: kolonun tabandaki birim boy kütlesi
$M(t)$	: plağa merkezinde etki eden eğilme momenti
M_c	: kolonun toplam kütlesi

M_f	: zeminde tepki olarak oluşan moment
M_i	: kolon üzerindeki toplu kütle
M_p	: toplam plak kütlesi
M_r	: dairesel plakta radyal eğilme momenti
M_{rt}	: dairesel plakta burulma momenti
$P(t)$	: plağa merkezinde etkiyen normal kuvvet
$P_c(t)$	: kolona yatay olarak etki eden tekil kuvvet
$P_d(X,t)$	: kolona yatay olarak etki eden yayılı kuvvet
$r_d(X)$	: kolon kesitinin dış yarıçapının değişimi
$r_i(X)$	: kolon kesitinin iç yarıçapının değişimi
R	: dairesel plakta kutupsal koordinat
Q	: plak üzerindeki düzgün yayılı yük
Q_r	: dairesel plakta radyal kesme kuvveti
t	: zaman
t_m	: integrasyon sabiti
T_c	: kolon titreşiminde karakteristik zaman parametresi

T_p	: plak titreşiminde karakteristik zaman parametresi
T_s	: sistemin boyutsuz periyodu
$\bar{T}_o$	: dairesel plağın rijit çökmesi ile ilgili terim
$\bar{T}_1$	: dairesel plağın rijit dönmesi ile ilgili terim
T_n	: dairesel plağın elastik yerdeğiştirilmesiyle ilgili terim
$\bar{\bar{T}}_n$	: kolonun elastik yerdeğiştirilmesiyle ilgili terim
$U(X,t)$	: kolonun elastik yerdeğiştirilmesi
$U_g(t)$	: yatay yer hareketi
$U_n(X)$	: koordinat fonksiyonu
U_s	: kolon ucundaki F_s kuvvetinden oluşan elastik yerdeğiştirme
$V(X,t)$	: kolonun toplam yanal yerdeğiştirilmesi
v_o	: toplu kütlenin yanal yerdeğiştirilmesi
$\bar{v}_o$	: başlangıç yerdeğiştirilmesi
v_s	: temelde ayrılmanın başlayacağı anda toplu kütlenin yanal yerdeğiştirilmesi
V_t	: taban kesme kuvveti
V_r	: dairesel plakta kesme kuvveti

$w_n(r)$	: dairesel elastik plağın dönel simetrik olmayan boyutsuz elastik yer değıştirmesi
w_s	: dairesel plağın düşey statik yerdeğıştirmesi
$w(t)$	: rijit dairesel plağın düşey yerdeğıştirmesi
$w(R, \theta, t)$	: dairesel elastik plağın toplam yerdeğıştirmesi
$Y(t)$	: zamana bağılı genlik
X_i	: toplu kütlelerin temelden olan yüksekliğı
δ	: Dirac delta fonksiyonu / Değışim operatörü
δ_{mn}	: Kronecker deltası
Δ	: Laplace operatörü
θ	: dönme açısı (açısal koordinat)
λ_n	: konsol kolonun titreşim probleminin özdeğerleri
λ_{nm}	: Bessel fonksiyonlarının argümanı
ν	: Poisson oranı
ρ	: plak yoğunluğu
τ	: boyutsuz zaman

$\phi(X)$	: kolonun mod şekil fonksiyonu
ω_c	: kolonun açısal frekansı
ω_f	: harmonik dış etkinin açısal frekansı
ω_g	: harmonik yer hareketinin frekansı
ω_n	: konsol kolonun serbest titreşim açısal doğal frekansları
ω_p	: dairesel plağın açısal frekansı



ŞEKİL LİSTESİ

<u>Şekil No</u>	<u>Şekil Adı</u>	<u>Sayfa No</u>
Şekil 3.2.1	Yayılı kütleli konsol çubuk ...	16
Şekil 3.3.1	Yayılı ve toplu kütleli konsol çubuk	21
Şekil 4.2.2.1	Dairesel plakta simetri eksenı.	32
Şekil 4.5.1	Dairesel elastik plakta dış yükler	60
Şekil 4.7.2	Eksenel yükün çeşitli değerleri için M-θ ilişkisi	63
Şekil 4.7.3	Çeşitli zemin rijitlikleri için M-θ ilişkisi	64
Şekil 4.7.4	Çeşitli zemin rijitlikleri için plak yerdeğıştirmeleri	65
Şekil 4.7.5a	Eksenel yükle plak yerdeğıştirmelerinin değışimi	66
Şekil 4.7.5b	Eksenel yükle plak yerdeğıştirmelerinin değışimi	67
Şekil 5.1.	Rijit daireseı plak-kolon sistemi	70
Şekil 5.2.	Plak-kolon sisteminin moment ve düşey dengesi	70
Şekil 5.3.1	Temelden ayrılma durumunda zemin gerilmeleri	75
Şekil 5.5.1	Harmonik dış etki altındaki rijit plak-kolon sistemi	77

Şekil 5.5.2	Çeşitli k_f değerleri için toplu kütlenin zorlanmış titreşimde v_o yanal yerdeğiştirmesi	78
Şekil 5.5.3	Sistem narınlığına göre toplu kütlenin v_o yanal yerdeğiştir- mesi	79
Şekil 5.5.4	Plağın düşey yerdeğiştirmesinin boyutsuz frekansla değişimi ..	80
Şekil 5.5.5	Ankastre kolonda uç yerdeğiştir- mesinin dış etki frekansı ile değişimi	81
Şekil 5.5.6	Elastik ankastre çubuğun rezonans frekansları	82
Şekil 5.5.7	Toplu kütlenin v_o yanal yerde- ğiştirmesinin boyutsuz frekans- la değişimi	83
Şekil 5.5.8	Toplu kütlenin yanal yerdeğiştir- me spektrumu	84
Şekil 5.5.9	Plağın düşey yerdeğiştirme spektrumu	85
Şekil 5.6.1	Bacanın boyuna ve enine kesiti.	87
Şekil 5.6.2	Su kulesinin boy kesiti	92
Şekil 6.1	Elastik dairesel plak-kolon sistemi	96
Şekil 6.2	Plak-kolon sisteminde düşey denge	97
Şekil 6.3	Plak-kolon sisteminde moment dengesi ve taban kesme kuvveti.	97
Şekil 6.5.1	Sistem periyodunun plak yükü ile değişimi	108
Şekil 6.5.2	Sistem periyodunun kolon ucunda uygulanan kuvvetle değişimi ..	109

Şekil 6.5.3	Çeşitli başlangıç yerdeğiştirmeleri için toplu kütle için v_0 yanal yerdeğiştirmesi	110
Şekil 6.5.4	Çeşitli başlangıç yerdeğiştirmeleri için plak merkezinin yerdeğiştirmesi	111
Şekil 6.5.5	Çeşitli $\bar{v}_0$ başlangıç yerdeğiştirmeleri için v_0 kütle için yanal yerdeğiştirmesi	112
Şekil 6.5.6a	Çeşitli $\bar{v}_0$ başlangıç yerdeğiştirmesi için w_1 plak yerdeğiştirmesi	112
Şekil 6.5.6b	Çeşitli $\bar{v}_0$ başlangıç yerdeğiştirmesi için w_2 plak merkezindeki yerdeğiştirme	113
Şekil 6.5.6c	Çeşitli $\bar{v}_0$ başlangıç yerdeğiştirmesi için w_3 plak yerdeğiştirmesi	113
Şekil 6.5.7	Çeşitli γ değerleri için v_0 kütle için yanal yerdeğiştirmesi..	114
Şekil 6.5.8a	Çeşitli γ değerleri için w_1 plak yerdeğiştirmesi	115
Şekil 6.5.8b	Çeşitli γ değerleri için w_3 plak yerdeğiştirmesi	116
Şekil 6.5.9	Harmonik yer hareketi etkisinde toplu kütle için yanal yerdeğiştirme spektrumu	117
Şekil 6.5.10	Harmonik yer hareketi etkisinde plak merkezinin düşey yerdeğiştirme spektrumu	118
Şekil 6.5.11a	El Centro yer hareketi için toplu kütle için yanal yerdeğiştirme spektrumu	120

Şekil 6.5.11b	El Centro yer hareketi için toplu kütlenin yanal yerde- ğiştirme spektrumu	121
Şekil 6.5.12a	El Centro yer hareketi için plağın düşey yerdeğiştirme spektrumu	122
Şekil 6.5.12b	El Centro yer hareketi için plağın düşey yerdeğiştirme spektrumu	123
Şekil 6.5.13	El Centro yer hareketi için kolonun yanal yerdeğiştirme spektrumu	124
Şekil 6.5.14	El Centro yer hareketi için plağın düşey yerdeğiştirme spektrumu	125

TABLO LİSTESİ

<u>Tablo No</u>	<u>Tablo adı</u>	<u>Sayfa No</u>
Tablo 5.6.1	Bacaya ait boyutsuz büyüklük- ler ve hesaplanan birinci moda ait titreşim periyotları...	89
Tablo 5.6.2	Bacaya ait boyutsuz büyüklük- ler ve hesaplanan birinci moda ait titreşim periyotları...	91
Tablo 5.6.3	Su kulesine ait boyutsuz büyüklükler ve hesaplanan birinci moda ait titreşim periyotları	93
Tablo 6.5.1	Bazı boyutsuz parametrelerin γ ile değişimi	107
Tablo 6.6.1	Bacaya ait boyutsuz büyüklük- ler ve hesaplanan birinci moda ait titreşim periyotları...	126
Tablo 6.6.2	Bacaya ait boyutsuz büyüklük- ler ve hesaplanan birinci moda ait titreşim periyotları...	127
Tablo 6.6.3	Su kulesine ait boyutsuz büyüklükler ve hesaplanan birinci moda ait titreşim periyotları	128

ÖZET

Bu tez çalışmasında çekme almayan Winkler zemini- ne oturan dairesel plak ve bu plağa merkezinde mesnetlenen kolonun oluşturduğu plak-kolon sisteminin dinamik etkiler altındaki davranışı incelenmiştir.

Kolon yayılı kütleli olup, ayrıca yüksekliği boyunca çeşitli seviyelerde toplu kütleler bulunmaktadır. Yüksekliği boyunca kolonun kütlesi ve eğilme rijitliği değişken olup toplu kütlelerin dönme ataletlerinin katkısı da hareket denklemine eklenmiştir. Kolonun mesnetlendiği dairesel plağın hem rijit hem de elastik olması durumları gözönüne alınmıştır.

Kolon ve plak hareket denklemleri ayrı ayrı yazılmıştır. Kolon ve plağın elastik olması durumunda titreşim denklemleri diferansiyel denklem türünde olduğundan sistem hareket denklemini elde ederken denklemlerin birleştirilmesinde yaklaşık çözüm izlenmiştir. Kolon için kolonun geometrik sınır şartlarını sağlayan koordinat fonksiyonları kullanılmış, plak için ise plağın elastik yerdeğiştirmelerinin ilgili basit eğilme titreşim modlarının bir toplamı ve Bessel fonksiyonları formunda olduğu kabul edilerek hareket denklemlerine Galerkin yöntemi uygulanmıştır. Geliştirilen bir bilgisayar programı yardımıyla sistemin davranışını gösteren parametrelerin değişimleri elde edilmiş ve grafiklerle gösterilmiştir. Sisteme temelde verilen yatay bir yer hareketi veya kolona yatay olarak uygulanan bir kuvvetle sistem yatay titreşimler yanında düşey olarak ta titreşmekte, sistemin hareketi bu iki titreşimin süperpozisyonu olarak ortaya çıkmaktadır.

Bu çalışmadaki analizin amacı yapı-zemin arasındaki ayrılımların bir plak-kolon sisteminin serbest ve zorlanmış titreşimlerine olan etkisini araştırmaktır. Sistemin serbest titreşimlerine ek olarak harmonik yer hareketi ve El Centro 1940 depremi kuzey-güney bileşeni için davranış spektrum eğrileri elde edilmiştir. Elde edilen sayısal sonuçların incelenmesinden çekme almayan zemin durumunda, sistemin titreşim periyodunun büyüdüğü belirlenmiştir. Sistem serbest titreşime başladığında salınımlar oldukça karmaşık bir yapı göstermektedir. Periyodik kuvvetle zorlanmış titreşim halinde dış kuvvetin frekansının sistemin doğal titreşim frekansından yüksek olması durumunda her iki zemin (çekme alan ve almayan) için davranış spektrum eğrileri birbirine çok yakın olarak ortaya çıkmaktadır.

SUMMARY

ON VIBRATIONS OF TOWERLIKE STRUCTURES UNDER EARTHQUAKE EXCITATION CONSIDERING SOIL-STRUCTURE INTERACTION

In this thesis, dynamic response of a plate-column system on a tensionless Winkler foundation is studied. Free and forced vibrations of the system are investigated in detail and numerical results are presented in figures.

The system consists of a circular plate and a column. The plate of constant thickness is supported on a tensionless Winkler foundation and carries a uniformly distributed load. On the other hand, the column is supported by the plate and has a continuously distributed mass and rigidity along its height. In addition to the column's own mass, a concentrated tip mass having transversal and rotational inertias is considered when the governing equations of the motion are derived. Both, the cases of rigid plate and elastic circular plate are investigated.

The governing equations of the system are obtained by considering the plate and the column separately. At first it is shown that, governing equation of the column can be written as

$$\begin{aligned} EI(X)U''(X,t) + C_c U(X,t) + \\ + [m_c(X) + \sum_i M_i \delta(X-X_i)] \ddot{U} + \sum_i J_i \delta(X-X_i) \ddot{V} - \\ - P_c(t) \delta(X-X_i) - P_d(X,t) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Where $EI(X)$ denotes flexural rigidity, $m_c(X)$ mass per unit length of the column, C_c damping coefficient, M_i concentrated masses and J_i 's their rotatory inertias. It is assumed that the masses are attached at points located at distances of X_i 's from the support of the column. $U(X,t)$ denotes the structural displacement of the column. δ Dirac delta function, $P_c(t)$ and $P_d(X,t)$ are

concentrated and distributed loads which are applied to the column, respectively. $V(X,t)$ denotes the total lateral displacement of the column and it consists of the horizontal ground motion, the displacement due to the rotation of the support and the elastic displacement of the column;

$$V(X,t) = U_g(t) + \theta(t) X + U(X,t), \quad (2)$$

where $U_g(t)$ denotes the horizontal displacement of the ground motion, $\theta(t)$ the rotation of the column.

In the case of the rigid base plate, the governing equations of the plate can be written as

$$Q\pi a^2 + (M_c + M_p + \sum_i M_i)(g - \ddot{W}) - F_f = 0 \quad (3)$$

$$M_1 - M_p a^2 \ddot{\theta} / 4 - M_f = 0 \quad (4)$$

where Q denotes uniformly distributed load on the plate, a a radius of the plate, M_p total mass of the plate, M_c total mass of the column, g acceleration of gravity. F_f and M_f are the force and the moment exerted by the foundation, due to the vertical displacement and the rotation of the plate. W is the vertical displacement of the center of the plate. $M_1 = EI_0 U''(X=0,t)$, denotes bending moment and EI_0 flexural rigidity at the bottom of the column.

On the other hand, in the case of elastic plate-column system, the dynamic governing equation of the plate can be written as

$$L[R, \theta, t] \equiv D \Delta \Delta W + C_f \dot{W} H(R, \theta, t) + K_f W H(R, \theta, t) - \\ - \rho h(g - \ddot{W}) - Q - \frac{2P(t)}{R} \delta(R) \delta(\theta) - \frac{2M(t)}{R} \delta(\theta)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\delta(R-\varepsilon) - \delta(R)}{\varepsilon} \right] = 0 \quad (5)$$

where (R, θ) denote polar co-ordinates, D flexural rigidity of the plate, $W(R, \theta, t)$ displacement function of the plate, C_f and K_f damping coefficient and stiffness of the foundation, respectively. ρ is unit mass of the plate,

$P(t)$ and $M(t)$ are the force and moment at the center of the plate respectively. They are the normal force and bending moment of the column at the support, i.e., at the point where the column joints the plate. $H(R, \theta, t)$ denotes the contact function and it is defined as follows.

$$H(R, \theta, t) = 1 \quad \text{for } W(R, \theta, t) > 0 \quad (6.a)$$

$$H(R, \theta, t) = 0 \quad \text{for } W(R, \theta, t) \leq 0 \quad (6.b)$$

It means that the function is unity for a point when the contact occurs at that point, and it vanishes for a point when a lift-off takes place at that point. However, the full contact throughout the plate surface can be assumed when the contact function is assumed to be equal one checking if the displacements correspond to the contact. This case corresponds to the conventional elastic foundation of Winkler type.

As explained above, the governing equations of the motion is written by considering the plate and column separately. These two systems of the equations are coupled through the equilibrium condition and the continuity of the deformation at the joint between the plate and column. The vertical force and the moment equilibriums at the joint between the plate and column can be written as follows

$$P_1(t) = (M_c + \sum_i M_i) (g - \ddot{W}) \Big|_{W(R=0, \theta=0)} \quad (7)$$

$$M_1(t) - M(t) = 0 \quad (8)$$

where $P_1(t)$ and $M_1(t)$ are the vertical force and the moment respectively at the joint of the column and the plate.

The governing equations of the rigid plate-elastic column system can be obtained through the combination of equations (1), (3) and (4); where as the suitable combination of equations (1), (5), (7) and (8) yields the governing equation of the elastic plate and elastic column. Although equations (1) and (5) are of continuous form i.e., they are differential equations with respect to X , whereas equations (3), (4), (7) and (8) are of discret form. For the discretization of the differential equation, the Galerkin method is adopted. For this purpose the lateral displacement is approximated as

$$V(X, t) = U_g(t) + X \theta(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_n(t) U_n(X) \quad (9)$$

where the co-ordinate functions $U_n(X)$ are assumed to satisfy the essential boundary conditions of the column.

The unsatisfied boundary conditions are compensated to increase the accuracy of the method by updating the application of the Galerkin technique as follows:

$$\int_0^L L(U, \theta) \delta U_n dx - (EI U'')' \delta U_n \Big|_0^L + EI U'' \delta U_n' \Big|_0^L = 0 \quad (10)$$

Thus, for the rigid plate-column system the governing equations (1), (3) and (10) can be combined and written in the following matrix form

$$\underset{\sim}{M} \underset{\sim}{V} + \underset{\sim}{C} \underset{\sim}{V} + \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{V} = \underset{\sim}{F} \quad (11)$$

where $\underset{\sim}{V}^T = [W, \theta, \bar{T}_1, \bar{T}_2, \dots]$ and defines the configuration of the system at any instant of time.

In the elastic plate-column system the governing equation of the plate which is continuous form has to be discretized as well. For this goal the displacement function of the plate is approximated as follows:

$$\frac{W(R, \theta, t)}{a} = w(r, \theta, t) = \bar{T}_0 + \bar{T}_1 r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{T}_n \frac{w_n(r)}{n} \cos n \theta \quad (12)$$

where the co-ordinate functions are assumed to be

$$w_n(r) = J_n(\lambda r) + A_n I_n(\lambda r) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

where $r = R/a$, J_n and I_n denotes the regular and modified Bessel Functions of the first kind, respectively. Furthermore, since the edge of the plate is not fixed, a rigid translation and a rigid rotation are included to the displacement function of the plate which could be seen in the right hand side of the equation (12). $\bar{T}_0$, $\bar{T}_1$ and $\bar{T}_n$ are unknown parameters which are functions of time. The other two unknowns λ and A_n are determined such that boundary conditions of the plate are satisfied by the co-ordinate functions. The plate is assumed to be supported free from the bending moment and the shearing force at the edge, so frequency equation of the completely free plate can be obtained as follows:

$$A_n = \frac{\lambda_n^2 (nJ_n - \lambda_n J_{n+1}) + (1-\nu) n^2 [(n-1)J_n - \lambda_n J_{n+1}]}{\lambda_n^2 (nI_n + \lambda_n I_{n+1}) - (1-\nu) n^2 [(n-1)I_n + \lambda_n I_{n+1}]}$$

(14)

where ν denotes Poisson ratio which is assumed $\nu = 0.33$ in all numerical computations. To discretize the equation (5) the Galerkin method is also used as follows.

$$\int_F L(R, \theta, t) \delta W R dR d\theta = 0 \quad (15)$$

Thus, the governing equation of the elastic plate-column system, equation (7), (8), (10) and (15) can be combined in the matrix form as it is done with equation (11) where $V^T = [\bar{T}_1, \bar{T}_2, \dots, \bar{T}_0, \bar{T}_1, T_1, T_2, \dots]$ Although the matrix equation (11) represents the small amplitude motion of the plate-column system, it is actually highly non-linear due to the tensionless character of the foundation.

Computer programs are developed for the rigid plate-column and for the elastic plate-column system in order to evaluate the behaviour of the systems. In order to cover a wide range of the parameter combinations the non-dimensionalized quantities are used and the numerical results are illustrated in various figures comparatively for the conventional as well as for the tensionless foundations.

As a first step the static behaviour of the circular plate on a tensionless Winkler foundation is obtained under an axial force and a moment at the centre of the plate. The relationship between the external moment and the rotation at the middle of the plate is obtained and represented in figures for various values of the axial force and those of the foundation rigidity. Displacements of the plate are determined at three points when a lift-off arises. Moreover, the behaviour of the rigid plate-column system subjected to an external harmonic horizontal force applied at the top of the column is obtained. The oscillations of the system is illustrated in figures. The inspection of these figures reveals that in case of an lift-off of the plate the system softens and vibration period of the system becomes higher. Horizontal displacements at the top of the column and at the centre of the plate experience larger values when the non-dimensional frequency of the applied force is lower. The full contact develops when the frequency of the external force is big. Furthermore,

the behaviour of the elastic plate-column system are obtained and illustrated in figures for free vibration. Besides the free vibrations of the system, the forced vibrations of the system are investigated for an assumed harmonic ground motion excitation. Additionally, the dynamic response of the system to the El Centro 1940 ground motion is presented. From various conclusions of the study the followings are of particular interest:

The period of the system becomes larger when the foundation is of tensionless character. The oscillations of the system are quite complex when the system experiences free vibrations and when the lift-off is present. However, if the frequency of the external excitation is large, the response spectra of the system are almost the same for these two types of the foundation.

In addition to these parametrical and numerical results, chimney and water tower problems available in the literature are also solved and their first mode periods are obtained. It is seen that the present model yields quite accurate results for the problems mentioned. As it is shown, the periods of the first modes agree well with the results given in the literature. The numerical calculation is carried out by considering elastic and rigid plate-column systems.

The present study enables the analysis of the structures of tower type by considering the interaction between the plate-column system and the elastic foundation.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bilim ve teknolojinin hızla ilerlediği günümüzde malzeme ve inşaat teknolojisi de bu gelişmelerden yararlanmaktadır. Mühendislik problemlerinin çözümünde bilgisayar kullanımının yaygınlaşmış olması ve hesap metodlarının gelişmesiyle mühendisler daha çok parametreyi hesaba katan ve daha dakik sonuçlar veren ve probleme uygun olan yöntemleri kullanmaya başlamışlardır.

Son zamanlarda malzeme mukavemetlerinde sağlanan artışlar oldukça büyük boyutlara ulaşmıştır. Fakat malzeme mukavemetleri yanında elastiklik modüllerinde bir artış olmamıştır.

Yukarıda açıklanan hususlar çerçevesinde yapı boyutları küçülmüş ve daha narin yapıların projendirilmesi mümkün olmuştur. Narinliğin artması, yapı ile zemin arasındaki yapı-zemin etkileşimi probleminin önemini arttırmaktadır. Bunun yanında hesaplama imkanlarının genişlemesi, daha önce gözönüne alınmayan etkilerin hesaba katılmasına imkan sağlamıştır. Yapı-zemin etkileşimi de bu sınıftan bir etki olarak değerlendirilebilir.

Ucuna kütleler tutturulmuş ve mesnedinde yaylar bulunan bir konsol kolon, yüksek bir su deposu, televizyon kulesi veya toplu kütleler olmaksızın baca modeli olarak gözönüne alınabilir ki, burada elastik yaylar temelinde elastisite modülünü karakterize etmektedir. Bunun

gibi modellerin statik ve dinamik analizinde genellikle elastik yayların basınç olduğu kadar çekme gerilmesi de karşıladığı kabul edilmektedir. Bu şekilde yapı ve zemin ortak ara yüzeylerinde çekme gerilmelerinin meydana gelmesi durumunda da tam değmenin var olduğunun kabul edilmesi gerçekçi olmayan bir yaklaşımdır ve davranışı tam olarak yansıtmayan bir çözümü beraberinde getirebilir.

Yapı çekme almayan bir zemine mesnetlendiğinde belirli yükleme şartları halinde bir ayrılma ortaya çıkması, dolayısıyla ayrılma ve değme bölgelerinin oluşması sözkonusudur. Böyle bir durumda problemin zorluğu hangi şartlarda zeminden ayrılma olacağı ve ayrılma bölgesinin genişliğinin belirlenmesidir.

Eksenel simetriden dolayı konsol kolon tipinde bir yapı genellikle dairesel plak temele sahiptir. Sunulan bu çalışmada plak-kolon sisteminin dinamik etkiler altındaki davranışı yapı-zemin etkileşimi de gözönüne alınarak incelenmiştir.

BÖLÜM 2

KONU İLE İLGİLİ ÇALIŞMALARIN GÖZDEN GEÇİRİLMESİ

İnşaat ve makina mühendisliğinde üzerinde toplu kütleler bulunan konsol kolon türünde oldukça fazla yapı elemanı vardır. Böyle elemanları bulunan yapıların dinamik analizi ile ilgili pek çok çalışma mevcuttur.

Toplu kütleleri bulunan elastik olarak mesnetli konsol kolon problemi için frekans denklemi Goel [1,2] tarafından Laplace dönüşümü kullanılarak kapalı bir formda elde edilmiştir.

Lee [3] bir ucu dönmeye karşı elastik yayla mesnetli ve diğer serbest ucunda bir kütlesi olan kolonda, kütlenin dönme ataleti ve kaymasının birinci moda etkisini incelemiştir.

Laura ve diğerleri [4] ucuna bir kütle tutturulmuş konsol kolonun ilk on frekansını sadece yanal yer değiştirme terimini alarak dönme ataletinin etkisini ihmal ederek tayin etmişlerdir. Bu çalışma daha sonra konsol kolonun mesnedinde dönmeye karşı bir yay olduğu kabul edilerek aynı yazarlar tarafından genişletilmiştir [5].

Mesnedinde yanal deplasmanlara ve dönmeye karşı yaylar bulunan konsol kolonun serbest ve zorlanmış titreşimleri Kounadis [6] tarafından kolon üzerinde toplu kütleler bulunması durumu için Laplace dönüşümü kullanılarak incelenmiştir.

Swaminadham ve Michael [7] ucuna bir kütle tutturulmuş kolonu, yanal ve dönme ataleti etkilerinin dahil edilmesiyle ele almış ve kolonun ilk beş doğal frekansını tayin etmişlerdir.

Komendant [8] üzerinde bir toplu kütle bulunan yayılı kütleli kule şeklindeki sistemin rüzgar ve deprem yükleri altında serbest titreşimine ait açısal frekans ifadesini elde etmiştir. Temel plağını rijit olarak kabul etmiş ve dönmesini de hesaba katmıştır.

Uçlarında deplasmanlara ve dönmeye karşı elastik yaylı ve yayılı kütleli kirişlerin serbest titreşimlerine ait frekans denklemleri Demir [9] tarafından verilmiş olup, bunlara ait antimetrik modlar konsol kirişe tekbül etmektedir.

Ciesielski ve Kawecki [10] deneysel çalışmalarında kullanılmasıyla binaların fiziksel ve matematik modellerinin dinamik özelliklerinin belirlenmesi üzerine çalışmışlardır. Ciesielski ve diğerleri [11] daha sonra kule tipi yapıların serbest titreşimlerinin elde edilmesi üzerine çeşitli metodları ele almışlardır.

Cuntze [12] değişken kalınlık ve kesitli bacaların temelde dönmenin de hesaba katılmasıyla, sistemin hareketini yöneten diferansiyel denklemi kuvvet serisi açılımı ile çözmüş ve serbest titreşimlerine ait ilk temel frekansları grafik halinde çeşitli baca geometrisi durumları için vermiştir.

Nakamura ve Lin [13] elastik doğru eksenli kirişin kütle titreşimini, verilen bir davranış spektrumu olan hareketle belirlemişlerdir.

Zembaty [14] kule şeklindeki narin yapıların

sismik etkiler altında rastgele titreşimleri ve güvenirliliği problemini incelemiştir. Davranışa ait en büyük etkilerin hesaplandığı bu çalışmada, bu tür yapılardaki göçmenin yeri tayin edilmeye çalışılmış ve dış hareketin süresinin davranışa olan etkisi belirlenmiştir.

Yapı-zemin etkileşiminde üst yapının oturduğu temel ile zemin arasında yanal etkiler altında oluşan ayrılmaların hesaba katılması, son zamanlarda gerçekçi bir çözüm yolu olarak görülmektedir.

Yapı temelleri genellikle plak veya kiriş gibi yapı elemanlarından oluşmaktadır. Bu yapı elemanlarının titreşimlerine değinilen kitapların bir kısmı [15-19] olarak verilebilir.

Zeytinci [20] doktora tezinde ince elastik dairesel plakların titreşimine ait frekans denklemlerini çeşitli mesnetlenme durumları için başlangıç koşullarını da içerecek şekilde elde etmiş ve bir kısım çözümler vermiştir.

Wolf [21,22] ise, zemin ile yapı etkileşimi konusunda değişik çalışmaları biraraya getirmiştir.

Winkler anlamında elastik zemine oturan plaklara ait analitik çözümler Timoshenko ve Woinowsky-Krieger [23] tarafından elde edilmiştir.

Weitsman [24] sadece basınca çalışan temelleri incelemiş olup, sonlu uzunluktaki kirişin ortasında bulunan tekil yük durumuna ait çözümü yanında, tekil ve düzgün yayılı yük etkisinde olan dönel simetrik plağa ait analitik çözümü elde etmiştir. Değme ve ayrılma bölgelerinin ortaya çıkma durumunun incelendiği bu çalışmada tekil yükün yukarı doğru etkimesi de gözönüne

alınmıştır. Elastik zemin için Winkler modeli yanında, Reissner modeli de hesaba katılmış ve bu iki model sonuçları karşılaştırılmıştır. Dönel simetrik plakta, bir çarpanla değişen dönel simetrik belirli tipte bir yükleme altında değme ve ayrılma bölgelerini ayıran sınırın yüklemenin şiddetine bağlı olmayıp, sadece plağın eğilme rijitliği ve zeminin elastik modülüne bağlı olduğu belirlenmiştir.

Westbrook [25] rijit bir ortama oturan elastik kirişin değme problemini, değişim eşitsizlikleri ve sonlu eleman yöntemiyle sayısal olarak incelemiştir. Ortaya konulan yöntemin kiriş dışında diğer taşıyıcı elemanlara da uygulanabileceğinin bildirildiği bu çalışmada, bazı çözümler kesin çözümlerle karşılaştırılarak yöntemin yaklaşımı üzerinde de durulmuştur.

Pavlovic ve Tsikkos [26] , Winkler zeminine oturan kirişin değme problemini statik olarak ele almıştır. Değme ve ayrılma bölgelerinde problemi yöneten denklem ayrı ayrı yazılarak çözülmüş, bölgeler arası süreklilik şartları kullanılarak probleme giren bilinmeyen sabitler belirlenmiştir. Çekme karşılayan ve karşılamayan zemine ait yapılan çözümler karşılaştırmalı olarak verilmiştir. Çözölen basit kiriş modeli için alışılğelen Winkler modeli daha büyük yerdeğiştirmeler ortaya çıkarırken, eğilme momenti değerlerini daha küçük olarak verdiği belirlenmiştir.

Choros ve Adams [27] çekme almayan Winkler zeminine oturan sonsuz uzun elastik kirişi, sabit hızla hareket eden bir tekil yük durumu için incelemiştir. Ayrılma bölgesi meydana gelmesine neden olan kritik hızın belirlendiği bu çalışmada değme bölgesinin boyu ve kirişin yerdeğiştirmesi yükün hızına bağlı olarak elde edilmiştir. Çalışmada yük olarak tek bir tekil kuvvetin

alındığı ve en fazla iki ayrılma bölgesinin kabul edildiği bildirilirken yöntemin geliştirilebileceği vurgulanmıştır.

Adams ve Bogy [28] rijit bir ortama oturan bir sonsuz uzun kirişin davranışını, sabit hızla hareket eden ve yönü yukarı doğru olan tekil yük durumunda incelemiştir. Euler-Bernoulli ve Timoshenko kiriş modellerinin her ikisinin de gözönüne alındığı bu çalışmada, yükün yüksek hızında ileri titreşim modlarının etkili olduğu ve bunun, özellikle Timoshenko modelinde daha belirgin olarak ortaya çıktığı görülmüştür.

Çekme almayan zemine oturan dikdörtgen plağın davranışı, merkezinde etki eden tekil yük altında pertürbasyon yöntemi kullanılarak Villaggio [29] tarafından incelenmiştir. Plağın dönel simetrik olmaması sebebiyle değme bölgesi eliptik bir şekilde tahmin edilmiş ve büyüklüğü ile ilgili parametreler değme ve problemin sınır şartlarından belirlenmiştir. Plağın çok büyük olması durumunda Weitsman [24] ün sonucunun sınır bir durum olarak bulunabileceği gösterilmiştir.

Celep [30] dikdörtgen plağı, düzgün yayılı, tekil yük ve moment etkisi altında ele almıştır. Çekme almayan zemin durumunda davranışın doğrusal olmadığı, değme bölgesinin uygulanan kuvvetin büyüklüğünden bağımsız olduğu ve plak yerdeğiştirmelerinin alışılacak Winkler zeminine göre daha büyük olarak ortaya çıktığı belirtilmiştir. Dış etkilerin değişik kombinezonları incelenmiş ve bazı durumlarda değme bölgesinin birden fazla olarak ortaya çıktığı belirlenmiştir. Ayrıca, değişik yükleme şekillerinde değme bölgesinin sadece yüklerin oranına bağlı olduğu kaydedilmiştir. Yükler aynı oranda arttığında, değme bölgesi değişmemekte, sadece düşey yerdeğiştirmeler bu oranda artmaktadır.

Dempsey ve Li [31,32] kenarlarından sadece tek yönde basınç alacak şekilde mesnetli kare plakta düzgün yayılı ve tekil yük etkisinde kenar değme uzunluğunu belirleyen bir çözüm yöntemi verdi.

Salamon ve diğerleri [33] kenarlarından elastik olarak mesnetlenmiş kare plağı düzgün yayılı yük ve ortasından etki eden tekil yük altında sonlu eleman yöntemi ile inceledi. Plağın köşelerinin küçük mesnet rijitlikleri dışında kalktığını ve bu durumda plağın davranışının önemli ölçüde değiştiğini belirlediler. Değme ve ayrılma şekillerinin iteratif olarak elde edildiği bu çalışmada sayısal sonuçlar için formüller geliştirilmiştir. Poisson oranının büyümesi plağı daha rijitleştirirken, değme bölgesini arttırmaktadır. Rijit veya rijite yakın mesnetlenme durumunda kenar kesme kuvveti değişiminin önemli ölçüde değiştiği gözlenmiştir.

Ascione ve Olivito [34] elastik yarı sonsuz ortama oturan dikdörtgen plakla ortam arasındaki değme problemini değişim yöntemiyle inceledi. Kesme kuvvetinin etkisini alabilmek amacıyla, Mindlin plak modeli kabul edilmiştir. Sayısal çözümler, sonlu eleman yöntemi kullanılarak elde edilmiştir.

Sönümün de gözönüne alınmasıyla yapı ile zemin arasındaki ayrılmalar, sarsma tablası deneyleri ve dinamik sonlu eleman yöntemi ile Ohtomo ve Iwatate [35] tarafından incelenmiştir. Temelin alt zeminden ayrılmasını incelemek için bir yöntemin geliştirildiği bu çalışmada sayısal sonuçlar deney verileri ile karşılaştırmalı olarak verilmiştir.

Celep [36] elastik zemin üzerindeki dairesel plağı, düzgün yayılı yük ve simetri eksenini üzerinde herhangi bir noktada normal kuvvet ve moment olması durumunda incelemiştir. Yaklaşık çözümün elde edilmesinde potansiyel enerjinin minimum olma özelliği kullanılmıştır.

Hesaba esas olan düşey sehîm fonksiyonları olarak da plağın serbest titreşim mod şekillerinden faydalanılmıştır. Ayrıca verilen yöntemin daha değişik yükleme türlerini de ele alabileceği bildirilmiştir.

Ascione ve Grimaldi [37] elastik yarı sonsuz ortam ve Winkler zeminine oturan dairesel plağı değişim ilkesini kullanarak statik olarak inceledi. Sayısal çözümlerde verilen yöntemin yaklaşımı incelenmiş, sonucun daha öncekilerle uyduğu belirtilmiştir.

Selvadurai [38] elastik dairesel plak ile izotop yarı sonsuz ortam arasındaki elastik değme problemini değişim yöntemiyle inceledi. Karşılıklı etkinin meydana geldiği bölgede düzgün yayılı yük altında gerilmelerin basınç olarak ortaya çıktığını belirledi.

Celep ve diğerleri [39] çevresinde elastik mesnetli dairesel elastik plağı, simetri eksenine göre simetrik şerit yükü etkisi altında inceledi. Çevrede değme boyunun, yükleme şeritinin merkezle yaptığı açı ve yükleme yarıçapına bağlı olarak değiştiği belirtilmiştir. Çözümde plağın düşey yerdeğiştirmeleri Fourier serisine açılarak gerçekleştirilmiştir. Aynı yazarlar çalışmalarına devam ederek yükleme şeriti yerine dairesel yükleme bölgesi alarak dairesel plağın davranışını araştırmışlardır [40]. Ancak, yaptıkları çözümde bir önceki çalışmadan farklı olarak potansiyel enerjinin minimum olması prensibini kullanmışlardır. Burada plağın davranışına, yükleme şekli, plağın eğilme rijitliği ve mesnet rijitliğinin etkili olduğu noktasına dikkat çekilmiştir.

Kamiya [41,42] , iki parametrelî zemin modeline oturan, çevresi boyunca ankastre olarak mesnetli düzgün

yayılı yük altındaki dairesel plağın simetrik şekil değiştişirmesini inceledi. Esas denklemler Berger'in plakların büyük şekil değiştirmelerinin analizine dayanılarak çıkartılmış, söz konusu zemin modelinde plağın düşey yerdeğiştirmesinin aşağı ve yukarı doğru olması durumuna göre farklı yay katsayıları ile mukabele edeceği kabul edilmiştir. Böyle bir kabulde çekmeye çalışan zemini gözönüne almak mümkün olmaktadır.

Karasev [43] elastik zeminle dairesel plak arasındaki değme problemini statik olarak inceledi.

Yukarıda açıklanan problemlerde yükleme statik olarak gözönüne alınmıştır. Yüklemenin zamanla değişmesi durumunda, problemin karmaşıklığı biraz daha artmakta ve değme bölgesi zamanın bir fonksiyonu olarak ortaya çıkmaktadır. Bu ise, çoğu kere çözümün zaman yönünde adım adım yapılmasını zorunlu kılmaktadır. Zemin ile yapı arasındaki değme problemlerinin dinamik olarak ele alındığı çalışmaların bir kısmı aşağıda özetlenmiştir.

Celep ve diğerleri [44] elastik zemin üzerindeki kirişin, düzgün yayılı, tekil yük ve moment etkisi altında zorlanmış titreşimlerini incelemiştir. Çözümde problemi yöneten diferansiyel denkleme Galerkin yöntemi uygulanarak, zamana bağlı ikinci mertebeden bir diferansiyel denklem elde edilmiş ve sayısal çözülmüştür. Sayısal sonuçların incelenmesinden zeminin çekme almama özelliğinin davranışı önemli ölçüde değiştirdiği, zemin rijitleştikçe, zorlanmış titreşim modlarına yüksek titreşim modlarının katkısının arttığı bildirilmiştir.

Ascione ve Bilotti [45] çekme gerilmesi almayan iki parametrelili zemin modeli üzerine oturan dairesel plağın davranışını dinamik etkiler için sonlu eleman yöntemiyle incelemişlerdir.

Celep [46] elastik zemine oturan kare plağın, merkezinde etki eden tekil yük durumunda titreşimini incelemiştir. Plağın yerdeğiştirme fonksiyonu, serbest kiriş özfonksiyonlarının bir lineer kombinezonu olarak alınmıştır. Diğer çalışmalardan farklı olarak başlangıç çözümünün plağın tümünde yazılacak bir denge denklemiyle kontrol edildiği bildirilmiştir. Ayrıca sunulan yöntemin daha değişik yükleme türleri için de uygulanabileceği vurgulanmıştır.

Celep ve Turhan [47] elastik zemin üzerindeki dairesel elastik plağın, dinamik etkinin plak merkezinde düşey olarak etkiyen tekil yük olması durumunda titreşimlerini inceledi. Plağın dinamik yerdeğiştirmelerinin başlangıç yüküyle doğrusal olarak arttığı, değme yarıçapının uygulanan yükün şiddetinden bağımsız olduğuna işaret edilmiştir. Hareketi yöneten diferansiyel denklem Galerkin yöntemiyle ayrıklaştırılarak zaman yönünde sayısal çözülmüştür. Adım-adım yapılan sayısal çözümde pertürbasyon yöntemi de uygulanmıştır.

Kiriş-kolon, plak-kolon ve plak-çerçeve yapı gibi sistemlerin oturdukları zeminde, dinamik etkiler altında zeminden ayrılma olması durumunu inceleyen çalışmaların bir kısmı aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Temeldeki ayrılmaların depreme karşı davranışa etkisi rijit bir blok için Housner [48] tarafından araştırılmıştır.

Meek [49,50] rijit temel üzerindeki tek serbestlik dereceli yapıları gözönüne alarak zeminden ayrılmaların etkisini incelemiştir. Yer hareketi olarak sabit ivme ile hızlanan ve gene sabit ivme ile yavaşlayan bir hareket kabul edilmiştir. Kabul edilen modelde ani değme ile ikinci derece titreşimlerin ortaya çıktığına ve bunların yapıyı zorlayıcı olduğuna dikkat çekilmiştir.

Psycharis [51-53] yukarıda verilen çalışmayı genelleştirerek rijit ve iki parametrelili zemin modeli üzerindeki tek serbestlik dereceli elastik sistemin davranışı üzerinde durmuştur. Temel girişinin rijit olduğu ve iki ucunda yay sönümlü mesnetli olduğu kabul edilmiştir. Ayrılmanın meydana gelmesiyle uç yer değiştirmesinin ani olarak arttığı belirlenmiştir. Harmonik yer hareketi için sistemin davranışı parametrik olarak incelenmiştir.

Psycharis ve Jennings [54] iki parametrelili ve Winkler zemini üzerindeki elastik sistemin davranışını elde etti. Çalışmada rijit bloğun iki ucunda mesnetlenmesi yanında bloğun sürekli olarak mesnetlendiği de kabul edilmiştir. Sistemin davranışı gözönüne alınarak iki mesnetlenme durumu için sistem parametreleri arasındaki bağıntı araştırılmıştır. Ayrılma ile sistemin daha yumuşak davrandığını ve iki uçundan yaylarla mesnetli sistemde ayrılmanın kısmi olmadığından farklı doğrusal davranışların ardarda eklenmesi şeklinde düşünülebileceği ortaya konulmuştur. Ayrıca sönümün ayrılmayı azaltıcı yönde etkilediği belirlenmiştir. Önemli bir sonuç olarak ayrılmanın varlığının sistemin davranışına olumlu veya olumsuz etkimesinin belirlenemediği ve bunun sistemin parametrelerine bağlı olduğu vurgulanmıştır.

Deprem etkisini sayısal olarak incelemek zor olduğundan, bu etkiyi hesaba katan basit bir hesap tarzına ihtiyaç vardır. Böyle bir hesap şekli yukarıda bahsedilen zemin modelleri üzerindeki bir giriş kolon ve çok katlı bir yapı gözönüne alarak Yim ve Chopra [55-57] tarafından verilmiştir. Bu çalışmada ayrıca üst kütleli P- δ etkisi de hesaba katılmıştır. Tek serbestlik dereceli sistemin girişe, bunun da sürekli ve sönümlü elastik yaylara mesnetlendiği kabul edilen bu çalışmada zeminle giriş arasındaki moment-dönme bağıntıları basitleştirilerek sistemin davranışı incelenmiştir.

Rijit dairesel plak-kolon sisteminin serbest ve zorlanmış titreşimleri Celep ve Güler [58-60] tarafından elde edilmiştir.

Daha sonra Güler [61] yukarıda verilen [58,59] sistemde dış etkinin kolon ucunda etkiyen yatay harmonik bir kuvvet olması durumunda sistemin zorlanmış titreşimlerini incelemiştir. Konu ile yakın ilgisi bakımından bu çalışma burada da verilmiştir.

BÖLÜM 3.

KONSOL ÇUBUĞUN TİTREŞİMİ

3.1 Giriş

Mühendislik yapıları genellikle yayılı kütleli-dir. Bazı yapılarda yayılı kütlelere ek olarak toplu kütleler de bulunur. Yayılı kütleler toplu kütlelerin yanında ihmal edilebilecek mertebede ise ya ihmal edilir, ya da toplu kütlelere eklenerek çok serbestlik dereceli bir sistem olarak incelenir. Yayılı kütleler ihmal edilemeyecek mertebede ise toplu kütlelerle birlikte ele alınır. Sistem bazan sadece yayılı kütleli olsa bile kütlelerin belirli noktalarda toplanmış olduğu kabulüyle çok serbestlik dereceli bir sistem olarak ele alınabilir.

Çok serbestlik dereceli sistem durumunda sistemin hareket denklemi adi diferansiyel denklem iken yayılı kütleli sistem durumunda kısmi türevli diferansiyel denklemdir[18]. Bu kısmi türevli diferansiyel denklemin verilen başlangıç ve sınır şartları altında kapalı çözümü çoğu kere zor veya mümkün değildir. Çoğunlukla amaca uygun bir sayısal yöntemle yaklaşık çözüm elde etme yoluna gidilir.

Yayılı kütleli sistemler sonsuz serbestlik derecelidirler. Dolayısıyla sonsuz sayıda titreşim modu vardır. Genel olarak herhangi bir titreşim hareketi bu modların süperpozisyonu şeklinde ifade edilebilir. Her frekansa bir mod şekli karşı gelmekte olup, en küçük frekanslı mod temel(esas) mod olarak adlandırılır. Periyodu en büyük olan mod da budur. Pratik uygulamalar için ileri modların etkisi küçük olduğundan bunların

gözönüne alınmasına ihtiyaç duyulmayabilir. Hesaba esas olarak alınacak mod sayısı problemin özelliğine bağlı olarak değişir.

3.2. Yayılı Kütleli Konsol Çubuk

Şekil 3.2.1 de görülen konsol çubuk gözönüne alınarak, hareket denklemi yazılacaktır. Kayma şekil değiştirmelerinin ihmal edildiği durum için yanal titreşimi yöneten hareket denklemi

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI(X) \frac{\partial^2 U(X,t)}{\partial x^2}] + C_c \frac{\partial U(X,t)}{\partial t} + m_c(X) \frac{\partial^2 U(X,t)}{\partial t^2} = P_d(X,t) \quad (3.2.1)$$

olarak yazılabilir. Burada

$EI(X)$: kolonun (konsol çubuğun) eğilme rijitliği,

$U(X,t)$: kolonun elastik yerdeğiştirmesi,

C_c : kolonda sönüm katsayısı,

$m_c(X)$: kolonun birim boyunun kütlesi,

$P_d(X,t)$: kolona yatay olarak etki eden yayılı yük,

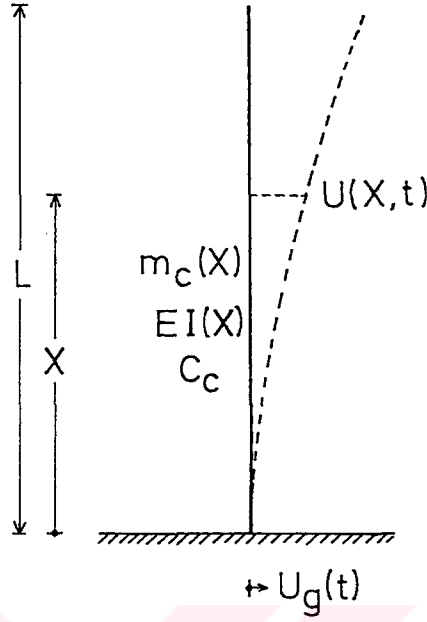
olup, bu büyüklüklerin kolon boyunca değişmesi de hesaba katılmış olmaktadır. Zorlanmış titreşimi gösteren bu (3.2.1) denkleminde ikinci tarafın sıfıra eşitlenmesiyle

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI(X) \frac{\partial^2 U(X,t)}{\partial x^2}] + C_c \frac{\partial U(X,t)}{\partial t} + m_c(X) \frac{\partial^2 U(X,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.2.2)$$

olarak yayılı kütleli konsol çubuğun serbest titreşimini yöneten hareket denklemi elde edilir. Sönüm gözönüne alınmazsa bu hareket denklemi

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI(X) \frac{\partial^2 U(X,t)}{\partial x^2}] + m_c(X) \frac{\partial^2 U(X,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.2.3)$$

şeklini alır.



Şekil 3.2.1 Yayılı kütleli konsol çubuk

3.2.1 Titreşim Denkleminin Çözümü

Bölüm 3.3.1 de yayılı ve toplu kütleli konsol çubuğun titreşim denkleminin çözümü ayrıntılı olarak açıklanacağından bu bölümde yayılı kütleli konsol çubuğun kütle ve atalet momenti değişiminin sabit olması durumunda serbest titreşime ait çözümü üzerinde kısaca durulacaktır. Bulunan sonuçlardan daha sonraki bölümlerde faydalanılacaktır.

Bölüm 3.2 de (3.2.3) ile verilen diferansiyel denklemde $EI(X) = EI_0 = \text{sabit}$, $m_c(X) = m_{co} = \text{sabit}$ kabul edilirse hareket denklemi

$$EI_0 \frac{\partial^4 U(X,t)}{\partial X^4} + m_{co} \frac{\partial^2 U(X,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.2.1.1)$$

olarak belirir. Buradaki kısmi türevli diferansiyel

denklemin çözümü, mod şekli ve zamana bağlı genliğin çarpımı şeklinde

$$U(X,t) = \phi(X) Y(t) \quad (3.2.1.2)$$

olarak alınır ve (3.2.1.1) de yerine konulursa bazı düzenlemelerden sonra

$$\frac{1}{\phi} \frac{d^4 \phi(X)}{dX^4} = \omega^2 = -\frac{m_{co}}{EI_o} \frac{\ddot{Y}(t)}{Y(t)} \quad (3.2.1.3)$$

ifadesine varılır. Yukarıdaki ifadeden aşağıdaki iki adi diferansiyel denklemi yazmak mümkündür:

$$\frac{d^4 \phi(X)}{dX^4} - \lambda^4 \phi(X) = 0 \quad (3.2.1.4)$$

$$\ddot{Y}(t) + \omega^2 Y(t) = 0 \quad (3.2.1.5)$$

Burada $\lambda^4 = \frac{\omega^2 m_{co}}{EI_o}$ olup λ ve ω sırasıyla problemin

özdeğer ve kolonun serbest titreşim açısal frekansını göstermektedir. Yukarıda verilen (3.2.1.5) denkleminin çözümü

$$Y(t) = D_1 \sin \omega t + D_2 \cos \omega t \quad (3.2.1.6)$$

gibi yazılabilir, ve D_1 ve D_2 katsayıları başlangıç şartlarından elde edilecektir. İkinci olarak (3.2.1.4) denkleminin çözümü $\phi(X) = C e^{\lambda X}$ olarak alınır ve (3.2.1.4) te yerine konulursa

$$\phi(X) = C_1 \sin \lambda X + C_2 \cos \lambda X + C_3 \sinh \lambda X + C_4 \cosh \lambda X \quad (3.2.1.7)$$

ifadesine varılır. Böylece (3.2.1.2) çözümü olarak

$$U(X,t) = (D_1 \sin \omega t + D_2 \cos \omega t) (C_1 \sin \lambda X + C_2 \cos \lambda X + C_3 \operatorname{sh} \lambda X + C_4 \operatorname{ch} \lambda X) \quad (3.2.1.8)$$

yazılabilir. Buradaki $D_1, D_2, C_1, C_2, C_3, C_4$ sabitleri başlangıç ve sınır şartlarından elde edilecektir. Konsol çubuk için $X=0$ da yanal yerdeğiştirme ve dönme sıfır olduğundan $U(X,t) = U'(X,t) = 0$, ve kolonun diğer ucunda $X=L$ de ise, moment ve kesme kuvvetleri sıfır olduğundan $U''(X,t) = U'''(X,t) = 0$ yazılınca aşağıdaki frekans denklemi elde edilir.

$$1 + \cos \lambda L \operatorname{ch} \lambda L = 0 \quad (3.2.1.9)$$

Bu transandant denklemin sonsuz sayıda kökü olup ilk altısı için

$\lambda L = 1.875; 4.694; 7.855; 10.966; 14.137; 17.279$; bulunur[17]. Bu ifadenin daha yüksek kökleri ise $\lambda_n L \cong (n + 1/2) \pi$ ile yaklaşık olarak ifade edilebilir. Herhangi bir $\lambda_n X$ özdeğeri ve karşı gelen serbest titreşim mod şekli

$$\phi_n(X) = \sin \lambda_n X - \operatorname{sh} \lambda_n X + \frac{\sin \lambda_n L + \operatorname{sh} \lambda_n L}{\cos \lambda_n L + \operatorname{ch} \lambda_n L} (\operatorname{ch} \lambda_n X - \cos \lambda_n X) \quad (3.2.1.10)$$

ile verilebilir [17]. Yayılı kütleli çubuğun sonsuz sayıda serbest titreşim modu olduğu görülmektedir. Çubuk bu hareketlerin herhangi birini yapabileceği gibi, denklem (3.2.3) ün lineer homogen olması dolayısıyla, bunların herhangi bir lineer kombinezonu ile verilen bir hareketi de yapabilir. Bölüm 5 ve Bölüm 6 da da görüleceği gibi, plak-kolon sistemlerinde konsol çubuk idealleştirilmesi, plağın rijit olması yanında zemin modelindeki yayların rijitliğinin yüksek tutulması ile yapılmıştır. Çözümlerde sisteme birinci moda uygun bir başlangıç yerdeğiştirmesi verilmiş ve birinci moda ait serbest titreşim periyodları elde edilmiştir. Uygun başlangıç yerdeğiştirmesi verilmesi durumunda, sistemin yukarıda belirtilen diğer titreşim modlarına ait serbest titreşim

periyodları da elde edilebilir.

3.3. Yayılı ve Toplu Kütleli Konsol Çubuk

Konsol çubuk olarak modellenendirilen yapılarda çubuğun yayılı kütlesine ek olarak belirli noktalarda toplu kütleler de bulunabilir. Şekil 3.3.1 de verilen böyle bir konsol çubuğun hareket denklemi Bölüm 3.2 de verilen (3.2.1) ifadesinden faydalanarak

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2} \left[EI(X) \frac{\partial^2 U(X,t)}{\partial X^2} \right] + C_c \frac{\partial U(X,t)}{\partial t} +$$

$$+ I m_c(X) + \sum_i M_i \delta(X-X_i) \frac{\partial^2 U(X,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (3.3.1)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

M_i : $X=X_i$ noktasındaki toplu kütleyi,

δ : Dirac delta fonksiyonunu göstermektedir. Konsol çubukta dış yük olarak herhangi X_i noktalarında tekil yatay kuvvet olması ve ayrıca yükseklik boyunca zamanla değişen yayılı bir yük bulunması durumunda hareket denklemi

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2} \left[EI(X) \frac{\partial^2 U(X,t)}{\partial X^2} \right] + C_c \frac{\partial U(X,t)}{\partial t} + [m_c(X) +$$

$$+ \sum_i M_i \delta(X-X_i)] \frac{\partial^2 U(X,t)}{\partial t^2} - P_c(t) \delta(X-X_i) - P_d(X,t) = 0 \quad (3.3.2)$$

halini alır. Burada

$P_c(t)$: X_i noktasında yatay olarak etki eden tekil kuvveti göstermektedir. Konsol çubuk üzerinde bulunan toplu kütlelerin, yanal hareket sırasındaki dönmeleri nedeniyle ortaya çıkacak dönme ataletleri de hareket denkleminde eklenirse

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2}{\partial X^2} [EI(X) \frac{\partial^2 U(X,t)}{\partial X^2}] + C_c \frac{\partial U(X,t)}{\partial t} + [m_c(X) \\
& + \sum_i M_i \delta(X-X_i)] \frac{\partial^2 U(X,t)}{\partial t^2} + \sum_i J_i \frac{\partial^3 U(X,t)}{\partial X \partial t^2} \left[\frac{\delta(X+\varepsilon/2)}{\varepsilon} - \right. \\
& \left. \frac{\delta(X-\varepsilon/2)}{\varepsilon} \right] \Big|_{X=X_i} - P_c(t) \delta(X-X_i) - P_d(X,t) = 0 \quad (3.3.3)
\end{aligned}$$

denkleminde varılır. Burada kütlelesel ataletten doğan atalet momenti birbirine çok yakın bir kuvvet çifti olarak hesaba alınmış olup,

J_i ; X_i noktasındaki toplu kütlenin kütlelesel atalet momentini,

$U(X,t)$; daha önce de belirtildiği gibi konsol kirişin elastik yerdeğiştirmesini göstermektedir. Konsol kirişin mesnetlendiği noktada eğer yatay bir $U_g(t)$ yerdeğiştirmesi (mesela deprem) söz konusu ise, o zaman toplam yatay yerdeğiştirme

$$V(X,t) = U_g(t) + U(X,t) \quad (3.3.4)$$

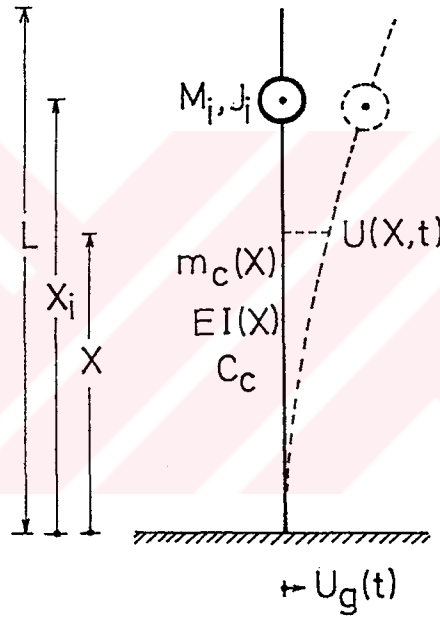
olarak ifade edilebilir. Bu durumda (3.3.3) ile verilen ve burada ele aldığımız konsol kiriş için genel haldeki hareket denklemi

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2}{\partial X^2} [EI(X) \frac{\partial^2 U(X,t)}{\partial X^2}] + C_c \frac{\partial U(X,t)}{\partial t} + [m_c(X) + \sum_i M_i \delta(X-X_i)] \\
& \frac{\partial^2 V(X,t)}{\partial t^2} + \sum_i J_i \frac{\partial^3 V(X,t)}{\partial X \partial t^2} \left[\frac{\delta(X+\varepsilon/2)}{\varepsilon} - \frac{\delta(X-\varepsilon/2)}{\varepsilon} \right] \Big|_{X=X_i} \\
& - P_c(t) \delta(X-X_i) - P_d(X,t) = 0 \quad (3.3.5)
\end{aligned}$$

ile ifade edilmiş olacaktır. Burada X e göre türev $(')$ ile ve zamana göre türev de $(\dot{})$ ile gösterilirse (3.3.5) denklemi

$$L[U(X,t),\theta(t)] \equiv (EI(X)U'')'' + C_c \dot{U} + [m_c(X) + \sum_i M_i \delta(X-X_i)] \ddot{U} + \sum_i J_i \delta'(X-X_i) \ddot{U} - P_c(t) \delta(X-X_i) - P_d(X,t) = 0 \quad (3.3.6)$$

şekline gelir.



Şekil 3.3.1 Yayılı ve toplu kütleli konsol çubuk

3.3.1 Titreşim Denkleminin Çözümü

Bölüm 3.3 de (3.3.5) ile verilen kısmi türevli diferansiyel denklemin sayısal çözümü yapılarak, yaklaşık çözüm elde edilmiş olacaktır. İlerideki Bölüm 5 ve Bölüm 6 da görüleceği gibi gerçekte, incelenen problem konsol çubuk (kolon)-dairesel plak sistemi olduğundan gerek kolon, gerekse elastik plak hareket denklemleri sürekli formdadır. Sistem titreşim denklemini elde etmek için sürekli formda olan kolon ve plak hareket

denklemlerinin önce ayrıklaştırılması ve sonra da, birleştirilmesi yoluna gidilecektir. Ayrıklaştırma işlemi için burada Galerkin yöntemi kullanılacaktır. Bu nedenle toplam yerdeğiştirme fonksiyonu olarak (3.3.4) yerine

$$V(X,t) = U_g(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_n(t) U_n(X) \quad (3.3.1.1)$$

ifadesi kullanılacaktır. Burada $U_n(X)$ koordinat fonksiyonu olup bunların kolonun geometrik sınır şartlarını sağlaması, yöntemin yaklaşıklığı için gereklidir. Koordinat fonksiyonu olarak

$$U_n(X) = X^n + c X^{n-1} + d X^{n-2} \quad (3.3.1.2)$$

seçilebilir. Konsol kirişteki koordinat fonksiyonları için geometrik sınır şartlarını $X = 0$ da

$$U_n(0) = 0 \quad U_n'(0) = 0 \quad (3.3.1.3)$$

ve $X = L$ de dinamik sınır şartları ise

$$U_n''(L) = 0 \quad U_n'''(L) = 0 \quad (3.3.1.4)$$

gibi yazılabilir.

Yukarıda (3.3.1.4) ile verilen kolonun dinamik sınır şartları kolon ucunda moment ve kesme kuvvetinin sıfır olduğuna karşı gelmektedir. Gerekli işlemlerle

$$U_n''(L) = n(n-1)X^{n-2} + c(n-1)(n-2)X^{n-3} + d(n-2)(n-3)X^{n-4} = 0$$

$$U_n'''(L) = n(n-1)(n-2)X^{n-3} + c(n-1)(n-2)(n-3)X^{n-4} +$$

$$+ d(n-2)(n-3)(n-4)X^{n-5} = 0 \quad (3.3.1.5)$$

elde edilir. Sınır şartlarını sağlamak üzere buradaki iki bilinmeyenli iki denklem matris formda

$$\begin{bmatrix} (n-1)(n-2) & (n-2)(n-3) \\ (n-1)(n-2)(n-3) & (n-2)(n-3)(n-4) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c \\ d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -n(n-1) \\ -n(n-1)(n-2) \end{Bmatrix}$$

(3.3.1.6)

gibi yazılırsa bilinmeyenler

$$c = 2n/(2-n), \quad d = n(1-n)/((n-3)(2-n)) \quad (3.3.1.7)$$

olarak belirlenir. Böylece konsol çubuğun elastik eğri-
sinin dördüncü türevi

$$U_n^{IV}(X) = n(n-1)(n-2)(n-3) X^{n-4} + c (n-1)(n-2)(n-3) X^{n-5} + d (n-2)(n-3)(n-4)(n-5) X^{n-6} \quad (3.3.1.8)$$

ile belirmiş olur. Elastik eğrinin (3.3.1.8) ile verilen ifadesinde şekil değiştirme enerjisinin hesabında dördüncü türeve ihtiyaç olduğundan ikinci terim $n \geq 5$ için ve üçüncü terim ise $n \geq 6$ için sözkonusudur. Burada verilen koordinat fonksiyonları kolonun geometrik sınırlar şartlarını sağlamaktadır. Ancak çoğu kere yukarıdaki gibi sistemin sınır şartlarını tamamen gerçekleyen koordinat fonksiyonları bulmak zordur. Sağlamayan sınır şartlarından ortaya çıkan hatayı da azaltmak amacıyla, Galerkin yöntemi aşağıdaki biçimde geliştirilmek suretiyle uygulanmıştır:

$$\int_0^L L(U, \theta) \delta U_m dX - (EI(X) U_m''(X, t))' \delta U_m \Big|_0^L + EI(X) U_m''(X, t) \delta U_m' \Big|_0^L = 0 \quad (3.3.1.9)$$

Daha önce (3.3.6) ile verilen konsol kirişin titreşim denklemi (3.3.1.8) de yerine yazılacak olursa

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI(x) \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}) + C_c \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + [m_c(x) + \sum_i M_i \delta(x-x_i)] \right. \\
& \left. \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t^2} + \sum_i J_i \frac{\partial^3 V(x,t)}{\partial x \partial t^2} \left[\frac{\delta(x+\varepsilon/2)}{\varepsilon} - \frac{\delta(x-\varepsilon/2)}{\varepsilon} \right] \right|_{x=x_i} \\
& - P_c(t) \delta(x-x_i) - P_d(x,t) \} \delta U_m dx - \frac{\partial}{\partial x} (EI(x) \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2})
\end{aligned}$$

$$\delta U_m \Big|_0^L + EI(x) \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} \delta U_m \Big|_0^L = 0 \quad (3.3.1.10)$$

denkleme varılır. Bu ifadede

$$\begin{aligned}
u_m(x) &= U_m(x)/L, \quad u_n(x) = U_n(x)/L, \quad u_g = U_g/L, \quad v = V/L \\
\delta(x-x_i) &= \delta(X-X_i) L, \quad x = X/L
\end{aligned} \quad (3.3.1.11)$$

boyutsuz dönüşümlerinin yapılmasıyla ve ayrıca konsol çubuk boyunca kütle, atalet momenti ve yayılı yükün değişiminin sırasıyla

$$\begin{aligned}
m_c(x) &= m_{co} f(x), \quad f(0)=1 & EI(x) &= EI_o g(x), \quad g(0)=1 \\
P_d(x,t) &= p_d(t) h(x), \quad h(0)=1
\end{aligned} \quad (3.3.1.12)$$

olarak kabul edilmesiyle (3.3.1.10) denklemi

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \frac{1}{L^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI_o g(x) \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_n u_n''(x) L] + C_c L^3 \sum_{n=1}^{\infty} \dot{\bar{T}}_n u_n(x) + \right. \\
& + [m_{co} f(x) + \sum_i \frac{M_i}{L} \delta(x-x_i)] [\ddot{u}_g + \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{\bar{T}}_n u_n(x)] L^3 + \\
& \left. + \sum_i J_i L^2 \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{\bar{T}}_n u_n'(x) \left[\frac{\delta(x+\varepsilon/2) - \delta(x-\varepsilon/2)}{\varepsilon} \right] \right|_{x=x_i} - P_c L \delta(x-x_i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -p_d h(x)L \left. \delta u_m dx - \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x} [EI_o g(x) \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_n u_n(x)] \delta u_m \right|_0^1 + \\
 & \frac{1}{L} [EI_o g(x) \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_n u_n''(x)] \delta u_m' \Big|_0^1 = 0 \quad (3.3.1.13)
 \end{aligned}$$

şeklini alır. Burada incelenmekte olan sistem dairesel plak-konsol çubuk (kolon) olduğundan zamanla ilgili boyutsuz parametreler elde edilirken kolon veya dairesel plaktan herhangi birinde zaman ile ilgili bir parametre örneğin(periyot) tanımlanarak boyutsuzlaştırma yapılabilir. İlerideki bölümlerde de rijit dairesel plak-kolon sistemi ve elastik dairesel plak-kolon sisteminin davranışı ele alınacağı için uyuşumu sağlamak üzere, zamana göre boyutsuzlaştırma

$$\begin{aligned}
 T_c^2 &= \frac{m_{co} L^4}{EI_o}, & T_p^2 &= \frac{\rho h a^4}{D}, & \tau &= t/T_p, \\
 \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{1}{T_p} \frac{\partial}{\partial \tau}, & \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \frac{1}{T_p^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}, & (3.3.1.14)
 \end{aligned}$$

şeklinde T_p parametresinin kullanılmasıyla yapılacaktır.

T_c : kolon titreşiminde karakteristik zaman parametresi,

T_p : plak titreşiminde karakteristik zaman parametresi,

τ : boyutsuz zaman,

ρ : plağın yoğunluğu,

h : plak kalınlığı,

a : plak yarıçapı,

D : plak eğilme rijitliğini göstermektedir.

Buradaki T_p elastik plak gözönüne alındığında ilgili büyüklüklerden hesaplanabilir. Ancak, rijit plak-kolon sistemi veya sadece kolonun ele alınması durumunda zaman boyutunda herhangi bir değer seçilebilir.

Şimdi (3.3.1.13) denklemi L/EI_o ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[g(x) \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_n u_n''(x) \right] + c_c \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_n u_n(x) + \right. \\
& + [f(x) + \sum_i m_i \delta(x-x_i)] \left[\ddot{u}_g + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_n u_n(x) \right] \bar{\beta} + \\
& + \sum_i j_i \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_n u_n'(x) \left[\frac{\delta(x+\varepsilon/2) - \delta(x-\varepsilon/2)}{\varepsilon} \right] \Big|_{x=x_i} - p_c \delta(x-x_i) - \\
& - p_d h(x) \Big\} \delta u_m dx - \frac{\partial}{\partial x} \left[g(x) \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_n u_n''(x) \right] \delta u_m \Big|_0^1 + \\
& + \left[g(x) \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_n u_n''(x) \right] \delta u_m' \Big|_0^1 = 0 \quad (3.3.1.15)
\end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Sayısal sonuçların geniş bir parametre değişim bölgesini kapsamaları için, boyutsuz parametreler kullanılmıştır. Yukarıda (3.3.1.15) de kullanılan değerler aşağıdaki şekilde tarif edilmiştir.

$$\begin{aligned}
c_c &= \frac{C_c L^4}{EI_o T_p}, \quad m_i = \frac{M_i}{m_{co} L}, \quad \bar{\beta} = \frac{m_{co} L^4}{EI_o T_p^2}, \\
j_i &= \frac{J_i L}{EI_o T_p^2}, \quad p_c = \frac{P_c L^2}{EI_o}, \quad p_d = \frac{P_d L^2}{EI_o},
\end{aligned} \quad (3.3.1.16)$$

Bu bölümde (3.3.6) ile verilen diferansiyel denklemin çözümü için (3.3.1.1) ifadesi çözüm fonksiyonu olarak alınmıştır. Yukarıdaki denklemde δu_m virtüel yerdeğiştirmeleri olarak (3.3.1.1) de yer alan $u_m(x)$ fonksiyonları kullanılacaktır.

3.3.1.1 δu_m olarak u_m seçimi

Yukarıda verilen (3.3.1.15) ifadesinde türevler alınır ve δu_m yerine u_m konulursa

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \left\{ [g''(x) u_n''(x) + 2g'(x) u_n''(x) + g(x) u_n''(x)] \bar{T}_n + c_c \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_n u_n(x) + \right. \\
& + \bar{\beta} [f(x) + \sum_i m_i \delta(x-x_i)] [\ddot{u}_g + \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_n u_n(x)] + \\
& + \sum_i j_i \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_n u_n'(x) \delta'(x-x_i) - p_c \delta(x-x_i) - p_d h(x) \left. \right\} u_m(x) dx - \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_n [g'(x) u_n''(x) u_m(x) + g(x) u_n''(x) u_m'(x) - \\
& - g(x) u_n''(x) u_m'(x)] \Big|_0^1 = 0 \quad (3.3.1.1.1)
\end{aligned}$$

ifadesine varılır. Bu ifadelerde ortaya çıkan integral-ler için aşağıdaki kısaltmalar kullanılacaktır:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 g''(x) u_n''(x) u_m(x) dx = c_{mn}, \quad \int_0^1 g'(x) u_n''(x) u_m(x) dx = b_{mn} \\
& \int_0^1 g(x) u_n''(x) u_m(x) dx = a_{mn}, \quad \int_0^1 f(x) u_m(x) dx = d_m \\
& \int_0^1 f(x) x u_m(x) dx = e_m, \quad \int_0^1 f(x) u_n''(x) u_m(x) dx = f_{mn} \\
& \int_0^1 u_n''(x) u_m(x) dx = g_{mn}, \quad \int_0^1 h(x) u_m(x) dx = t_m \\
& u_m(x) g'(x) u_n''(x) + g(x) u_n''(x) u_m'(x) - g(x) u_n''(x) u_m'(x) = h_{mn} \\
& \quad (3.3.1.1.2)
\end{aligned}$$

Bu kısaltmalarla (3.3.1.1.1) denkleminin düzenlenerek yazılmasıyla

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \left[\bar{\beta} f_{mn} + \bar{\beta} \sum_{i=1}^n m_i u_m(x_i) u_n''(x_i) + \sum_{i=1}^n j_i u_m'(x_i) u_n''(x_i) \right] \ddot{T}_n + \\
& + c_c \sum_{n=1}^{\infty} g_{mn} \ddot{T}_n + \sum_{n=1}^{\infty} [c_{mn} + 2b_{mn} + a_{mn} - h_{mn}(1) + h_{mn}(0)] \bar{T}_n
\end{aligned}$$

$$= -\bar{\beta} d_m \ddot{u}_g - \sum_{i=1}^n \bar{\beta} m_i u_m(x_i) \ddot{u}_g + p_c u_m(x_i) + p_d t_m \quad (3.3.1.1.3)$$

bağıntısı elde edilir. Burada (3.3.1.1.3) deki bazı ifadeler için

$$\bar{F}_{mn} = [\bar{\beta} f_{mn} + \bar{\beta} \sum_i m_i u_m(x_i) u_n(x_i) + \sum_i j_i u'_m(x_i) u'_n(x_i)]$$

$$\bar{C}_{mn} = [c_{mn} + 2b_{mn} + a_{mn} - h_{mn}(1) + h_{mn}(0)] \quad (3.3.1.1.4)$$

gibi parametreler tarif edilirse yayılı ve toplu kütleli konsol kolonun hareket denklemi

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{F}_{mn} \ddot{\bar{T}}_n + c_c \sum_{n=1}^{\infty} g_{mn} \dot{\bar{T}}_n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{C}_{mn} \bar{T}_n = \\ = -\bar{\beta} d_m \ddot{u}_g - \sum_i \bar{\beta} m_i u_m(x_i) \ddot{u}_g + p_c u_m(x_i) + p_d t_m \end{aligned} \quad (3.3.1.1.5)$$

şeklinde bulunur.

3.4. Yayılı Kütleli Konsol Çubuğun Statik Çözümü

Bölüm 3.3.1.1 de (3.3.1.1.3) ifadesinde sözkonusu problemin statik durumuna ilişkin denklemini kolayca elde etmek mümkündür. Türev içermeyen terimler gözönüne alınırsa (3.3.1.1.5) denklemi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{C}_{mn} \bar{T}_n = p_c u_m(x_i) + p_d t_m \quad (3.4.1)$$

şeklini alırken, bu da konsol çubuğun statik durumdaki dengesini ifade eden denklemdir. Burada bilinmeyenler vektörü $\bar{T} = [\bar{T}_1, \bar{T}_2, \bar{T}_3, \dots]$ olarak ortaya çıkar.

BÖLÜM 4

DAİRESEL PLAKLARIN TİTREŞİMİ

4.1. Giriş

Plak yerdeğiştirmelerinin zamanla değişimi eğer ihmal edilemeyecek mertebede atalet kuvvetlerinin ortaya çıkmasına neden oluyorsa, bu durumda problemin dinamik olarak incelenmesi gereklidir. Plakta oluşan atalet kuvvetleriyle birlikte zamanla değişen dış kuvvetler varsa, plağın zorlanmış titreşimi sözkonusudur. Plağın zorlanmış titreşimi, ayrıca mesnetlerindeki zamana bağlı yerdeğiştirme sonucu da ortaya çıkar. Bütün bunların dışında plağın zorlanmasız olarak belirli titreşim şekilleriyle hareketi, serbest titreşimi meydana getirir.

Plağın statik olarak ele alınmasında, plak diferansiyel denkleminin sınır şartlarını sağlaması yeterli olurken, dinamik olarak incelenmesinde sınır şartlarına ek olarak başlangıç şartlarının da sağlanması gerekir.

4.2.1. Dairesel Plağın Titreşim Denklemi

Plak yüzeyi üzerine yayılı yük $Q(X,Y)$, plağın çökmeleri $W(X,Y)$ ile gösterildiğinde plak denkleminin

$$\Delta\Delta W(X,Y) = \frac{Q(X,Y)}{D} \quad (4.2.1)$$

şeklinde olduğu bilinmektedir. Burada Δ Laplasiyen operatördür. Problemin dinamik özellik göstermesi durumunda, yukarıdaki denklemde $Q(X,Y)$ yerine

$$[Q(X,Y,t) - \rho h \frac{\partial^2 W(X,Y,t)}{\partial t^2}] \quad (4.2.2)$$

konularak plak diferansiyel denklemi

$$\Delta \Delta W(X,Y,t) + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 W(X,Y,t)}{\partial t^2} = \frac{Q(X,Y,t)}{D} \quad (4.2.3)$$

şekline girer.

Bu çalışmada ele alınan plaklar dairesel olduğundan, (X,Y) yerine (R,θ) kutupsal koordinatlarının konulmasıyla (4.2.3) ile verilen plak denklemi

$$\Delta \Delta W(R,\theta,t) + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 W(R,\theta,t)}{\partial t^2} = \frac{Q(R,\theta,t)}{D} \quad (4.2.4)$$

şekline dönüşür ki, bu da dairesel plağın zorlanmış titreşimine ait diferansiyel denklemdir. Burada Δ Laplasiyen operatörünün kutupsal koordinatlardaki ifadesi

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (4.2.5)$$

gibi olur. R ve θ dairesel plağın koordinatlarını göstermektedir. Verilen (4.2.4) denkleminin ikinci tarafının sıfıra eşitlenmesiyle

$$\Delta \Delta W(R,\theta,t) + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 W(R,\theta,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4.2.6)$$

olarak dairesel plağın serbest titreşim denklemi elde edilir.

4.2.2. Dairesel Plâğın Serbest Titreşimi

Tamamen dolu bir daireysel plak için genel titreşim denkleminin çözümü

$$\frac{W(R, \theta)}{a} = w(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [\bar{B}_{nm} J_n(\lambda_{nm} r) + \bar{A}_{nm} I_n(\lambda_{nm} r)] \cos(n\theta) \quad (4.2.2.1)$$

olarak verilebilir. Burada

$w(r, \theta)$: boyutsuz plak yerdeğiştirmesi

$J_n(\lambda_{nm} r)$: birinci mertebeden Bessel fonksiyonu

$I_n(\lambda_{nm} r)$: birinci mertebeden değiştirilmiş Bessel fonksiyonu

$r = R/a$

$\bar{A}_{nm}, \bar{B}_{nm}$: Bessel Fonksiyonlarının sınır

şartlarına bağlı katsayıları olup, n ve m ise sırasıyla θ ve r yönündeki değişimle ilgili indislerdir.

Dairesel plâğın titreşimine ilişkin Şekil 4.2.2.1 deki gibi bir simetri eksenini olduğu kabul edilirse (4.2.2.1) denklemleri

$$w(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [\bar{B}_{nm} J_n(\lambda_{nm} r) + \bar{A}_{nm} I_n(\lambda_{nm} r)] \cos n\theta \quad (4.2.2.2)$$

şeklini alır. Burada

$$\bar{w}_n(r) = \sum_{m=1}^{\infty} [\bar{B}_{nm} J_n(\lambda_{nm} r) + \bar{A}_{nm} I_n(\lambda_{nm} r)] \quad (4.2.2.3)$$

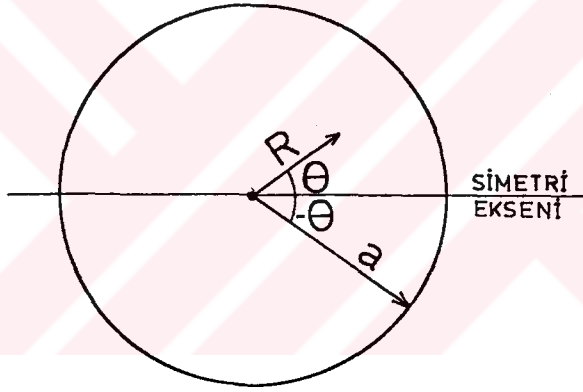
alınırsa (4.2.2.2) ile verilen eşitlik

$$w(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{w}_n(r) \cos n\theta \quad (4.2.2.4)$$

olarak belirir. Kenarları tamamen boşta olan daireysel plâğın serbest titreşimine ait frekans denklemi [15]

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda_{nm}^2 J_n(\lambda_{nm}) + (1-\nu) \lambda_{nm} J_n'(\lambda_{nm}) - n^2 J_n(\lambda_{nm})}{\lambda_{nm}^2 I_n(\lambda_{nm}) - (1-\nu) [\lambda_{nm} I_n'(\lambda_{nm}) - n^2 I_n(\lambda_{nm})]} = \\
& = \frac{\lambda_{nm}^3 J_n'(\lambda_{nm}) + (1-\nu) n^2 \lambda_{nm} J_n'(\lambda_{nm}) - J_n(\lambda_{nm})}{\lambda_{nm}^3 I_n'(\lambda_{nm}) - (1-\nu) n^2 [\lambda_{nm} I_n'(\lambda_{nm}) - I_n(\lambda_{nm})]} \quad (4.2.2.5)
\end{aligned}$$

olup burada ν Poisson oranı, λ_{nm} ler ise frekans denkleminin kökleridir. r yönünde düğüm noktaları arttıkça kök sayısı da artmaktadır. Aşağıda dairesel plağın serbest titreşimine ait (4.2.2.5) ile verilen frekans ifadesi elde edilecektir.



Şekil 4.2.2.1 Dairesel plakta simetri eksen

4.2.3 Frekans Denkleminin Elde Edilmesi

İncelenmekte olunan dairesel plakta, kenarlarından tamamen boşta olduğu için $r=1$ deki moment ve kesme kuvveti sıfırdır. Eğilme momenti ve kesme kuvvetine ait bu şartlar aşağıda ayrı ayrı yazılmıştır.

4.2.3.1 Eğilme Momenti ile İlgili Sınır Şartı

Kenarlarından serbest oturan dairesel plakta $r=1$ deki moment sıfırdır ve

$$M_r = -D\nu/a \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] = 0 \quad (4.2.3.1.1)$$

olarak yazılabilir [23]. Burada plak çökmesi $w(r, \theta)$ nın yerine (4.2.2.4) deki ifadesi yazılırsa, eğilme momenti için

$$M_r = \sum_{n=0}^{\infty} -D\nu/a \left[\frac{1}{r} \frac{d\bar{w}_n(r)}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \bar{w}_n(r) + \frac{1}{\nu} \frac{d^2 \bar{w}_n(r)}{dr^2} \right] \cos n\theta = 0 \quad (4.2.3.1.2)$$

ifadesine varılır.

Aşağıda $\bar{w}_n(r)$ ifadesinin argümana $(\lambda_{nm} r)$ göre birinci ve ikinci mertebeden türevleri verilmiştir [62]. Üst burada argümana göre alınan türevi göstermektedir.

$$\begin{aligned} \frac{dJ_n}{dr} &= \frac{dJ_n(\lambda_{nm} r)}{d(r\lambda_{nm})} \lambda_{nm} = J'_n \lambda_{nm}, \quad \frac{dI_n}{dr} = I'_n \lambda_{nm} \\ \frac{d^2 J_n}{dr^2} &= -\frac{1}{r} \frac{dJ_n}{dr} - \left(\lambda_{nm}^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) J_n \\ \frac{d^2 I_n}{dr^2} &= -\frac{1}{r} \frac{dI_n}{dr} + \left(\lambda_{nm}^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) I_n \end{aligned} \quad (4.2.3.1.3)$$

Bu türev ifadeleri (4.2.3.1.2) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d\bar{w}_n(r)}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \bar{w}_n(r) + \frac{1}{\nu} \frac{d^2 \bar{w}_n(r)}{dr^2} &= \\ = \bar{B}_{nm} \left[\frac{1}{r} \frac{dJ_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} J_n - \frac{1}{r\nu} \frac{dJ_n}{dr} - \frac{1}{\nu} \left(\lambda_{nm}^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) J_n \right] + \end{aligned}$$

$$\bar{A}_{nm} \left[\frac{1}{r} \frac{dI_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} I_n - \frac{1}{r\nu} \frac{dI_n}{dr} + \frac{1}{\nu} \left(\lambda_{nm}^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) I_n \right] \quad (4.2.3.1.4)$$

elde edilir. Burada moment sıfır şartı, $r=1$ de yazıldığından (4.2.3.1.4) de r yerine eşiti konulur ve sıfıra eşitlenirse

$$\begin{aligned} \bar{B}_{nm} \left\{ \frac{\nu-1}{r} \frac{dJ_n}{dr} - \left[\lambda_{nm}^2 + \frac{n^2(\nu-1)}{r^2} \right] J_n \right\} + \\ + \bar{A}_{nm} \left\{ \frac{\nu-1}{r} \frac{dI_n}{dr} - \left[-\lambda_{nm}^2 + \frac{n^2(\nu-1)}{r^2} \right] I_n \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.2.3.1.5)$$

denklemine varılır. Bu denklemde birinci ve ikinci terimler

$$a_{11} = \left\{ \frac{\nu-1}{r} \frac{dJ_n}{dr} - \left[\lambda_{nm}^2 + \frac{n^2(\nu-1)}{r^2} \right] J_n \right\} \quad (4.2.3.1.6)$$

$$a_{12} = \left\{ \frac{\nu-1}{r} \frac{dI_n}{dr} - \left[-\lambda_{nm}^2 + \frac{n^2(\nu-1)}{r^2} \right] I_n \right\} \quad (4.2.3.1.7)$$

olarak alınırse denklem

$$\bar{B}_{nm} a_{11} + \bar{A}_{nm} a_{12} = 0 \quad (4.2.3.1.8)$$

şekline girer.

4.2.3.2. Kesme Kuvveti ile İlgili Sınır Şartı

Kenarlarından serbest oturan plakta kenarda kesme kuvvetinin sıfır alınması şartı olarak

$$\begin{aligned}
 V_r &= Q_r - \frac{1}{r} \frac{\partial M_{rt}}{\partial \theta} = \\
 &= -D/a^2 \frac{\partial}{\partial r} \Delta w - (1-\nu) D/a^2 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)
 \end{aligned}
 \tag{4.2.3.2.1}$$

yazılabilir [23]. Burada

Q_r : radyal kesme kuvvetini

M_{rt} : burulma momentini göstermektedir.

Yukarıda verilen (4.2.3.2.1) ifadesi açık formda yazılırsa

$$\begin{aligned}
 V_r &= -D/a^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \\
 &- D(1-\nu)/a^2 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)
 \end{aligned}
 \tag{4.2.3.2.2}$$

denklemini elde edilir ve bu denkleminde çökme ifadesi yerine (4.2.2.4) de verilen eşiti yazılırsa

$$\begin{aligned}
 V_r &= \sum_{n=0}^{\infty} D/a^2 \left\{ \frac{d}{dr} \left[\frac{d\bar{w}_n(r)}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{w}_n(r)}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \bar{w}_n(r) \right] \right. \\
 &+ (1-\nu) n^2 \left[\frac{1}{r^2} \frac{d\bar{w}_n(r)}{dr} - \frac{1}{r^3} \bar{w}_n(r) \right] \left. \right\} \cos n\theta
 \end{aligned}
 \tag{4.2.3.2.3}$$

denkleminde varılır. Moment sıfır şartında olduğu gibi parantez içindeki ifade sıfır olmalıdır. Burada $\bar{w}_n(r)$

yerine (4.2.2.3) deki eşiti türevleri alınarak ifadelerde basitlik sağlamak amacıyla m ve n üzerine olan toplamalar ve $\cos n\theta$ yazılmazsa

$$\begin{aligned}
& \bar{B}_{nm} \left\{ \frac{d}{dr} \left[-\frac{1}{r} \frac{dJ_n}{dr} - \left(\lambda_{nm}^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) J_n + \frac{1}{r} \frac{dJ_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} J_n \right] - \right. \\
& \left. - (1-\nu) \frac{n^2}{r^2} \left[\frac{dJ_n}{dr} - \frac{J_n}{r} \right] \right\} + \\
& + \bar{A}_{nm} \left\{ \frac{d}{dr} \left[-\frac{1}{r} \frac{dI_n}{dr} + \left(\lambda_{nm}^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) I_n + \frac{1}{r} \frac{dI_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} I_n \right] - \right. \\
& \left. - (1-\nu) \frac{n^2}{r^2} \left[\frac{dI_n}{dr} - \frac{I_n}{r} \right] \right\} = 0 \quad (4.2.3.2.4)
\end{aligned}$$

denklemine varılır ve bunun düzenlenmesiyle

$$\begin{aligned}
& \bar{B}_{nm} \left\{ -\lambda_{nm}^2 \frac{dJ_n}{dr} - (1-\nu) \frac{n^2}{r^2} \left[\frac{dJ_n}{dr} - \frac{J_n}{r} \right] \right\} + \\
& + \bar{A}_{nm} \left\{ \lambda_{nm}^2 \frac{dI_n}{dr} - (1-\nu) \frac{n^2}{r^2} \left[\frac{dI_n}{dr} - \frac{I_n}{r} \right] \right\} = 0 \quad (4.2.3.2.5)
\end{aligned}$$

elde edilmiş olur. Burada $\bar{A}_{nm}$ ve $\bar{B}_{nm}$ in çarpanları sırasıyla

$$a_{21} = \left\{ -\lambda_{nm}^2 \frac{dJ_n}{dr} - (1-\nu) \frac{n^2}{r^2} \left[\frac{dJ_n}{dr} - \frac{J_n}{r} \right] \right\} \quad (4.2.3.2.6)$$

$$a_{22} = \left\{ \lambda_{nm}^2 \frac{dI_n}{dr} - (1-\nu) \frac{n^2}{r^2} \left[\frac{dI_n}{dr} - \frac{I_n}{r} \right] \right\} \quad (4.2.3.2.7)$$

olarak alındığında

$$\bar{B}_{nm} a_{21} + \bar{A}_{nm} a_{22} = 0 \quad (4.2.3.2.8)$$

gibi ikinci bir denklem elde edilir. İki sınır şartının birleştirilmesiyle bu durumda denklem takımı sembolik olarak

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{B}_{nm} \\ \bar{A}_{nm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.2.3.2.9)$$

birleştirilebilir. Bu durumda frekans denklemi

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{\bar{A}_{nm}}{\bar{B}_{nm}} \quad (4.2.3.2.10)$$

olarak yazılabilir. Yukarıda yapılan işlemlerde Bessel fonksiyonlarında kullanılan türevlerde üst argümana göre olan türetmeyi göstermektedir:

$$\frac{dJ_n(\lambda_{nm} r)}{dr} = \frac{dJ_n(\lambda_{nm} r)}{d(r\lambda_{nm})} \lambda_{nm} = J'_n \lambda_{nm} \quad (4.2.3.2.11)$$

Buna göre sınırda $r=1$ için (4.2.3.1.8) ve (4.2.3.2.8) denklemindeki katsayılar

$$\begin{aligned} a_{11} &= (\nu-1) \lambda_{nm} J'_n - [\lambda_{nm}^2 + n^2 (\nu-1)] J_n \\ &= -\lambda_{nm}^2 J_n + (\nu-1) [\lambda_{nm} J'_n - n^2 J_n] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{12} &= (\nu-1) \lambda_{nm} I'_n - [-\lambda_{nm}^2 + n^2 (\nu-1)] I_n \\ &= \lambda_{nm}^2 I_n + (\nu-1) [\lambda_{nm} I'_n - n^2 I_n] \end{aligned}$$

$$a_{21} = -\lambda_{nm}^3 J_n' - (\nu-1) n^2 (\lambda_{nm} J_n' - J_n)$$

$$a_{22} = \lambda_{nm}^3 I_n' - (\nu-1) n^2 (\lambda_{nm} I_n' - I_n) \quad (4.2.3.2.12)$$

gibi olur ve frekans denklemi

$$A_{nm} = \frac{\bar{A}_{nm}}{\bar{B}_{nm}} = - \frac{a_{11}}{a_{12}} = - \frac{a_{21}}{a_{22}} \quad (4.2.3.2.13)$$

şekline girer. Burada (4.2.3.2.10) denklemiindeki katsayıların (4.2.3.2.9) daki değerleri yerine konulursa

$$\frac{\lambda_{nm}^2 J_n + (1-\nu)(\lambda_{nm} J_n' - n^2 J_n)}{\lambda_{nm}^2 I_n - (1-\nu)(\lambda_{nm} I_n' - n^2 I_n)} = \frac{\lambda_{nm}^3 J_n' + (1-\nu)n^2(\lambda_{nm} J_n' - J_n)}{\lambda_{nm}^3 I_n' - (1-\nu)n^2(\lambda_{nm} I_n' - I_n)} \quad (4.2.3.2.14)$$

denklemine varıldıktan sonra frekans denklemi

$$A_{nm} = - \frac{a_{21}}{a_{22}} = \frac{\lambda_{nm}^3 J_n' + (1-\nu)n^2(\lambda_{nm} J_n' - J_n)}{\lambda_{nm}^3 I_n' - (1-\nu)n^2(\lambda_{nm} I_n' - I_n)} \quad (4.2.3.2.15)$$

şekline girer. Denklemdaki türev ifadelerin yerine eşitlerinin yazılmasıyla

$$A_{nm} = \frac{\lambda_{nm}^2 (nJ_n - \lambda_{nm} J_{n+1}) + (1-\nu)n^2 [(n-1)J_n - \lambda_{nm} J_{n+1}]}{\lambda_{nm}^2 (nI_n + \lambda_{nm} I_{n+1}) - (1-\nu)n^2 [(n-1)I_n + \lambda_{nm} I_{n+1}]} \quad (4.2.3.2.16)$$

ifadesi elde edilir.

Eğer sistem dönel simetrik yüklemeye sahipse bu durumda $n=0$ olup mod şekli ifadesi,

$$w(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} [\bar{B}_{0m} J_0(\lambda_{0m} r) + \bar{A}_{0m} I_0(\lambda_{0m} r)] \quad (4.2.3.2.17)$$

olacaktır. Dönel simetrik durum için λ_{om} lerin ilk üçünün kareleri [15] de

$$\lambda_{om}^2 = 9.084 ; 38.55 ; 87.50$$

olarak verilmektedir. Yukarıdaki (4.2.3.2.16) ifadesinden $A_{nm} = A_{nm}(\lambda_{nm})$ olduğu görülmektedir.

Sistemin, simetrik olmayan yüklemeye sahip olması durumunda simetrik olmamanın etkisinin özellikle m nin birinci değerine karşı gelen mod şekli ile yeterli yaklaşıklıkla ifade edilebileceği kabul edilirse, yerdeğiştirme ifadesi

$$w(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} [\bar{B}_{n1} J_n(\lambda_{n1} r) + \bar{A}_{n1} I_n(\lambda_{n1} r)] \cos n\theta \quad (4.2.3.2.18)$$

olarak yazılabilir. Burada λ_{n1} ; (4.2.3.2.13) denkleminin en küçük köküdür ve ilk yedi kökün kareleri [15] de $\nu=0.33$ için aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\lambda_{n1}^2 = 9.084; \quad 20.52; \quad 5.253; \quad 12.23; \quad 21.60; \quad 33.10; \quad 46.20$$

4.3. Elastik Zemine Oturan Dairesel Plak

4.3.1. Titreşim Denklemi

Elastik zemine oturan dairesel plağın serbest titreşimlerine ait denklem

$$D \Delta \Delta w + K_f w + \rho h \ddot{w} = 0 \quad (4.3.1.1)$$

olarak yazılabilir. Burada

K_f : plağın oturduğu yayların rijitliği,

($\ddot{}$): ise zamana göre türevi göstermektedir. Plâğın oturduğu zeminin sönümü, düşey titreşimler için yerçekimi ivmesi ve plak üzerinde plâğın ağırlığını da temsil edebilecek düzgün yayılı bir yük düşünülürse diferansiyel denklem

$$D\Delta\Delta W + C_f \dot{W} + K_f W + \rho h (\ddot{W} - g) - Q = 0 \quad (4.3.1.2)$$

şeklını alır. Burada

C_f : zeminin sönümü,

g : yerçekimi ivmesi,

Q : düzgün yayılı yükü belirtmektedir.

Dairesel plâğın merkezinden etkiyen düşey kuvvet ve moment olması durumunda hareket denklemi

$$D\Delta\Delta W + C_f \dot{W} + K_f W - \rho h (g - \ddot{W}) - Q - \frac{2P(t)}{R} \delta(R) \delta(\theta) - \frac{2M(t)}{R} \delta(\theta) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\delta(R - \varepsilon) - \delta(R)}{\varepsilon} \right] = 0 \quad (4.3.1.3)$$

şeklını alır. Burada

$P(t)$: plâğa merkezinde etkiyen düşey kuvvet,

$M(t)$: plâğa merkezinde etkiyen momenti göstermektedir.

Dirac delta fonksiyonunun tanımı gereğince

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(\theta) d\theta = 1, \quad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(R) dR = 1 \quad (4.3.1.4)$$

olduğu bilindiğine göre (4.3.1.3) denkleminde plâğın merkezinde normal kuvvet ve momenti belirten son iki terimin doğruluğu aşağıdaki gibi kontrol edebilir. Önce düşey kuvvet için:

$P(t)$ düşey kuvvetinin plâğın $\bar{W}(R, \theta)$ yerdeğiştirmesi sırasında yapacağı iş ifadesi, (4.3.1.3) ün karşı gelen teriminin tüm plak üzerinde integrali

$$\begin{aligned}
& \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{2P(t)}{R} \delta(R) \delta(\theta) \bar{W} R dR d\theta = \\
& = 2P \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\theta) d\theta \int_0^{\alpha} \delta(R) \bar{W} dR \quad (4.3.1.5)
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir.

Burada yine Dirac delta fonksiyonu tanımı gereği

$$\int_0^{\varepsilon} \delta(R) \bar{W}(R) dR = \frac{1}{2} \bar{W}(0,0) \quad (4.3.1.6)$$

yazılırsa (4.3.1.5) iş ifadesi

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\alpha} \frac{2P}{R} \delta(R) \delta(\theta) \bar{W} R dR d\theta = P \bar{W}(0,0) \quad (4.3.1.7)$$

olarak elde edilir ki, bu da beklenen sonuçtur. Benzer kontrol moment için yazılırsa iş ifadesi

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\alpha} \frac{2M(t)}{R} \frac{\delta(R-\varepsilon)-\delta(R)}{\varepsilon} \delta(\theta) \bar{W} R dR d\theta \quad (4.3.1.8)$$

gibi yazılabilir ve burada

$$\int_0^{\alpha} \frac{\delta(R-\varepsilon)-\delta(R)}{\varepsilon} \bar{W} dR = - \int_0^{\alpha} \delta'(R) \bar{W} dR \quad (4.3.1.9)$$

$$- \int_0^{\alpha} \delta'(R) \bar{W} dR = \int_0^{\alpha} \delta(R) \bar{W}' dR \quad (4.3.1.10)$$

olarak alınıp (4.3.1.8) de yerine konulursa (4.3.1.11) ifadesinin eşitliği

$$2M \int_0^{\alpha} \delta(R) \bar{W} dR = 2M \frac{\bar{W}'(0,0)}{2} = M \bar{W}'(0,0) \quad (4.3.1.11)$$

gibi elde edilerek sonucun beklenen türden olduğu görülür. Daha önce (4.3.1.3) denklemi ile Winkler anlamında

elastik zemine oturan ve orta noktasında düşey kuvvet ve moment etkisinde olan dairesel plak denklemi yazılmıştı. Zemin modelinde olduğu düşünülen yayların çekme gerilmeleri almayıp, sadece basınç gerilmeleri aldığı durum için plağın hareket denklemini

$$D\Delta\Delta W + C_f \dot{W} H(R, \theta, t) + K_f W H(R, \theta, t) - \rho h (g - \ddot{W}) -$$

$$Q - \frac{2P(t)}{R} \delta(R) \delta(\theta) - \frac{2M(t)}{R} \delta(\theta) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\delta(R-\epsilon) - \delta(R)}{\epsilon} \right] = 0$$

(4.3.1.12)

şeklinde yazmak mümkündür. Burada sözkonusu edilen dinamik problem için $H(R, \theta, t)$ değme fonksiyonu olarak tanımlanmıştır. Bu değme fonksiyonunu plak çökme ifadesinin pozitif veya negatif olması durumuna göre [36] ya benzer şekilde

$$\begin{aligned} W(R, \theta, t) > 0 & \quad H(R, \theta, t) = 1 \\ W(R, \theta, t) \leq 0 & \quad H(R, \theta, t) = 0 \end{aligned} \quad (4.3.1.13)$$

gibi verilebilir. Bu yeni fonksiyonla, zemin ile plak arasında sadece basınç gerilmeleri iletilebileceği ve çekme gerilmelerinin meydana gelmeyeceği gözönüne alınmış bulunmaktadır.

4.3.2. Titreşim Denkleminin Çözümü

Hareketin (4.3.1.13) ile verilmiş olan diferansiyel denkleminin çözümü

$$\frac{W(R, \theta, t)}{a} = w(r, \theta, t) = \bar{T}_0 + \bar{T}_1 r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} T_n w_n(r) \cos n\theta$$

(4.3.2.1)

şeklinde bir fonksiyon kabul edilerek yapılacaktır.

Burada eşitliğin ikinci tarafında; ilk terim dairesel plağın rijit yerdeğiştirmesini, ikinci terim rijit düşey dönmesini ve üçüncü terim ise simetrik ve simetrik olmayan elastik yerdeğiştirmeleri belirtmektedir, ve

$$w_n(r) = J_n(\lambda_{n1} r) + A_{n1} I_n(\lambda_{n1} r) \quad (4.3.2.2)$$

olarak yazılabilir. Burada λ_{nm} in ikinci indisi m titreşim formunun radyal yöndeki mod sayısını göstermektedir. Gözönüne alınan problemde plağın titreşim formuna aksenal simetrik olmayan titreşim formunun daha etkili olacağı düşünülerek, radyal yönde tek bir düğüm noktası olduğu kabul edilirken, çevresel yönde çeşitli düğüm noktalarının varlığı kabul edilecektir. Böylece λ_{nm} ler λ_{n1} ve A_{nm} katsayıları da A_{n1} olarak ortaya çıkacaktır.

Çözüm getirmek istenilen problem sadece dairesel plak olmayıp, üst yapı ile birlikte zemin-yapı etkileşiminin de hesaba katılmasıyla sistemin davranışı olduğundan sistemin titreşim denkleminin elde edilmesi gerekmektedir. Sistemin titreşim denklemi elde edilirken, sürekli formda olan dairesel plak ve kolon titreşim denklemlerinin ayrıklaştırılması yoluna gidilecektir. Bu ayrıklaştırma işleminden sonra dairesel plak ve kolon denklemleri birleştirilecek ve sisteme ait hareket denklemi elde edilecektir. Kolon hareket denklemlerinin ayrıklaştırılması daha önce Bölüm 3 de verilmişti. Plak için aynı işlem yapılmak istenirse, aşağıdaki sıra dahilinde benzer yol izlenebilir:

Önce (4.3.2.1) ile verilen çözüm ifadesi (4.3.1.12) ile verilen ifade de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
L(r, \theta, t) = & a D \Delta \Delta (\bar{T}_0 + \bar{T}_1 r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} T_n w_n(r) \cos n \theta) + \\
& + C_f a (\dot{\bar{T}}_0 + \dot{\bar{T}}_1 r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \dot{T}_n w_n(r) \cos n \theta) H(r, \theta, t) + \\
& + K_f a (\ddot{\bar{T}}_0 + \ddot{\bar{T}}_1 r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \ddot{T}_n w_n(r) \cos n \theta) H(r, \theta, t) - \\
& - \rho h [g - (\ddot{\bar{T}}_0 + \ddot{\bar{T}}_1 r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \ddot{T}_n w_n(r) \cos n \theta)] - Q - \\
& - \frac{2P(t)}{r a} \frac{\delta(r)}{a} \frac{\delta(\theta)}{\delta(\theta)} - \frac{2M(t)}{r a^3} \frac{\delta(\theta)}{\delta(\theta)} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\delta(r-\epsilon) - \delta(r)}{\epsilon} \right]
\end{aligned}
\tag{4.3.2.3}$$

elde edilir. Burada eşitliğin ikinci tarafındaki Laplasiyen ifadelerden kurtulmak istenirse, $r=R/a$ olarak (4.2.5) te verilen Laplasiyen tekrar yazılırsa

$$\Delta = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)
\tag{4.3.2.4}$$

bulunur ve (4.3.2.3) de bu şekliyle yazılırsa

$$D \Delta \Delta (\bar{T}_0)/a^3 = 0
\tag{4.3.2.5}$$

$$D \Delta \Delta (\bar{T}_1 r \cos \theta)/a^3 = 0
\tag{4.3.2.6}$$

$$D \Delta \Delta \left(\sum_{n=0}^{\infty} T_n w_n(r) \cos n \theta \right) / a^3 = \frac{1}{a^3} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2} \right)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left[\sum_{n=0}^{\infty} T_n (J_n(\lambda_{n1} r) + A_{n1} I_n(\lambda_{n1} r)) \cos n \theta \right]
\tag{4.3.2.7}$$

ifadesine varılır. (4.3.2.7) in ikinci tarafı

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left\{ (J_n(\lambda_{n1} r) + A_{n1} I_n(\lambda_{n1} r)) \cos \theta \right\} = \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right] \left[J_n(\lambda_{n1} r) + A_{n1} I_n(\lambda_{n1} r) \right] \cos \theta$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right] \cos \theta [J_n(\lambda_{n1} r) + A_{n1} I_n(\lambda_{n1} r)]$$

(4.3.2.8)

olarak yazılabilir. Burada

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right] \left\{ \cos \theta [J_n(\lambda_{n1} r) + A_{n1} \lambda_{n1}^2 I_n(\lambda_{n1} r)] \right\} =$$

$$= \cos \theta (-\lambda_{n1}^2 J_n(\lambda_{n1} r) + A_{n1} \lambda_{n1}^2 I_n(\lambda_{n1} r))$$

(4.3.2.9)

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right] \left\{ \cos \theta (-\lambda_{n1}^2 J_n(\lambda_{n1} r) + A_{n1} \lambda_{n1}^2 I_n(\lambda_{n1} r)) \right\} =$$

$$= \cos \theta \lambda_{n1}^4 (J_n(\lambda_{n1} r) + A_{n1} I_n(\lambda_{n1} r))$$

(4.3.2.10)

olarak ifade edilince (4.3.2.2) de birinci terim için de

$$\frac{1}{a^3} D \Delta \Delta \left(\sum_{n=0}^{\infty} T_n (J_n(\lambda_{n1} r) + A_{n1} I_n(\lambda_{n1} r)) \cos \theta \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} T_n \frac{D}{a^3} \lambda_{n1}^4 w_n(r) \cos \theta$$

(4.3.2.11)

yazmak mümkün olur. Buraya kadar (4.3.2.5), (4.3.2.6) ve (4.3.2.11) ile verilen eşitlikler (4.3.2.3) de yerine konulursa denklem

$$\begin{aligned}
 L(r, \theta, t) = & \frac{D}{a^3} \sum_{n=0}^{\infty} T_n \lambda_{n1}^4 w_n(r) \cos \theta + a C_f (\dot{\bar{T}}_0 + \dot{\bar{T}}_1 r \cos \theta + \\
 & + \sum_{n=0}^{\infty} \dot{T}_n w_n(r) \cos \theta) H(r, \theta, t) + K_f a (\bar{T}_0 + \bar{T}_1 r \cos \theta + \\
 & + \sum_{n=0}^{\infty} T_n w_n(r) \cos \theta) H(r, \theta, t) - \rho g h + \rho h a (\ddot{\bar{T}}_0 + \ddot{\bar{T}}_1 r \cos \theta + \\
 & + \sum_{n=0}^{\infty} \ddot{T}_n w_n(r) \cos \theta) - Q - \frac{2P(t)}{ra^2} \delta(r) \delta(\theta) - \\
 & - \frac{2M(t)}{ra^3} \delta(\theta) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\delta(r-\epsilon) - \delta(r)}{\epsilon} \right]
 \end{aligned} \tag{4.3.2.12}$$

şeklini alır. Bu denklem a^3/D ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
 L(r, \theta, t) = & \sum_{n=0}^{\infty} T_n \lambda_{n1}^4 w_n(r) \cos \theta + \frac{C_f a^4}{D} (\dot{\bar{T}}_0 + \dot{\bar{T}}_1 r \cos \theta + \\
 & + \sum_{n=0}^{\infty} \dot{T}_n w_n(r) \cos \theta) H(r, \theta, t) + \frac{K_f a^4}{D} (\bar{T}_0 + \bar{T}_1 r \cos \theta + \\
 & + \sum_{n=0}^{\infty} T_n w_n(r) \cos \theta) H(r, \theta, t) - \frac{\rho h g a^3}{D} + \frac{\rho h a^4}{D} \\
 & + (\ddot{\bar{T}}_0 + \ddot{\bar{T}}_1 r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \ddot{T}_n w_n(r) \cos \theta) - \frac{Q a^3}{D} - \\
 & - \frac{2P(t)a}{D r} \delta(r) \delta(\theta) - \frac{2M(t)}{D r} \delta(\theta) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\delta(r-\epsilon) - \delta(r)}{\epsilon} \right]
 \end{aligned} \tag{4.3.2.13}$$

denklemine varılır. Burada

$$k_f = \frac{K_f a^4}{D}, \quad c_f = \frac{C_f a^4}{D T_p}, \quad q = \frac{Q a^3}{D}, \quad m_{pg} = \frac{\rho h g a^3}{D},$$

$$m^* = \frac{M(t)}{D}, \quad \delta(R) = \delta(r)/a, \quad p^* = \frac{P(t)a}{D},$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\delta(R-\varepsilon) - \delta(R)}{\varepsilon} \right] = \frac{1}{a^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\delta(r-\varepsilon) - \delta(r)}{\varepsilon} \right]$$

(4.3.2.14)

ile verilen boyutsuz parametreler kullanılmıştır. Zamanla ilgili boyutsuzlaştırma $\tau = t/T_p$ şeklinde yapılmaktadır. Yukarıda (4.3.2.14) ile verilen boyutsuz parametrelerin (4.3.2.13) de yerlerine konulmasıyla dairesel plağın titreşim denklemi

$$\begin{aligned} L(r, \theta, \tau) = & \sum_{n=0}^{\infty} T_n \lambda_n^4 w_n(r) \cos n\theta + c_f (\dot{\bar{T}}_0 + \dot{\bar{T}}_1 r \cos \theta + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \dot{\bar{T}}_n w_n(r) \cos n\theta) H(r, \theta, \tau) + k_f (\bar{T}_0 + \bar{T}_1 r \cos \theta + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{T}_n w_n(r) \cos n\theta) H(r, \theta, \tau) - q - m_{pg} + (\ddot{\bar{T}}_0 + \ddot{\bar{T}}_1 r \cos \theta + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \ddot{\bar{T}}_n w_n(r) \cos n\theta) - \frac{2p^*}{r} \delta(r) \delta(\theta) \\ & - \frac{2m^*}{r} \delta(r) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\delta(r-\varepsilon) \delta(r)}{\varepsilon} \right] \end{aligned}$$

(4.3.2.15)

şeklını alır.

4.3.3.1. Plak Denkleminin Ayırıklaştırılması

Daha önce de belirtildiği gibi sürekli formda olan plak denklemi Galerkin yöntemi ile ayırıklaştırılacaktır. Bu amaçla

$$\int_F L(r, \theta, \tau) \delta w r dr d\theta = 0 \quad (4.3.3.1.1)$$

yazılabilir. Görüldüğü gibi titreşim denklemi δw ile çarpılmakta ve alan üzerinde integrale edilmektedir. Dairesel plağın alanı $F = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^a R dR d\theta$ olarak yazılabilir. Daha önce titreşim denklemi $r=R/a$ yazılarak elde edildiğinden alan $\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 r dr d\theta$ şeklinde ifade edilebilir. Dairesel plağın (4.3.2.15) ile verilen hareket denklemi (4.3.3.1.1) de yerine konulursa

$$\int_F L(r, \theta, \tau) \delta w r dr d\theta = 2 \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} T_n \lambda_n^4 w_n(r) \cos n\theta + c_f (\ddot{T}_0 + \ddot{T}_1 r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \ddot{T}_n w_n(r) \cos n\theta) \right.$$

$$H(r, \theta, \tau) + k_f (\bar{T}_0 + \bar{T}_1 r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{T}_n w_n(r) \cos n\theta) H(r, \theta, \tau) -$$

$$-m_{pg} + (\ddot{T}_0 + \ddot{T}_1 r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \ddot{T}_n w_n(r) \cos n\theta) - q - \frac{2p^*}{r} \delta(r) \delta(\theta) -$$

$$- \frac{2m^*}{r} \delta(\theta) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\delta(r-\varepsilon) - \delta(r)}{\varepsilon} \right] \delta w r dr d\theta = 0$$

(4.3.3.1.2)

denkleme varılır. Dairesel plağın çözüm fonksiyonu olarak daha önce verilen (4.3.2.1) de görüleceği

gibi, burada zamanın fonksiyonu olan $\bar{T}_0, \bar{T}_1$ ve T_n ler ($n=0,1,2,3,4,\dots$) olmak üzere gözönüne alınmaktadır. Dolayısıyla Galerkin yönteminin uygulanmasının gereği olarak δw yerine çözüm fonksiyonunda sırasıyla 1, $r \cos \theta$ ve $w_n(r) \cos n\theta$ seçilerek alan üzerinde integrasyon yapılacaktır.

4.3.3.2. δw Yerine 1 Seçimi

Yukarıda elde edilmiş olan (4.3.3.1.2) denkleminde $\delta w=1$ konulmasıyla alan üzerinde integrasyon yapılırsa

$$\begin{aligned}
 & 2 \int_0^{\pi} \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{n1} T_n w_n(r) \cos n\theta r dr d\theta + 2k_f \int_0^{\pi} \int_0^1 [\bar{T}_0 + \bar{T}_1 r \cos \theta + \\
 & + \sum_{n=0}^{\infty} T_n w_n(r) \cos n\theta] H(r, \theta, \tau) r dr d\theta + 2c_f \int_0^{\pi} \int_0^1 [\dot{\bar{T}}_0 + \dot{\bar{T}}_1 r \cos \theta + \\
 & + \sum_{n=0}^{\infty} \dot{T}_n w_n(r) \cos n\theta] H(r, \theta, \tau) r dr d\theta - 2 \int_0^{\pi} \int_0^1 m_{pg} r dr d\theta \\
 & + 2 \int_0^{\pi} \int_0^1 [\bar{T}_0 + \bar{T}_1 r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{T}_n w_n(r) \cos n\theta] r dr d\theta - 2 \int_0^{\pi} \int_0^1 q r dr d\theta \\
 & - 4 \int_0^{\pi} \int_0^1 p^* \delta(r) \delta(\theta) dr d\theta - 4 \int_0^{\pi} \int_0^1 m^* \delta(\theta) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\delta(r-\varepsilon) - \delta(r)}{\varepsilon} \right] \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

(4.3.3.2.1)

elde edilir. Şimdi bu integrallerin eşitlerini yazmak isteyelim. Önce (4.3.3.2.1) deki ilk terim için

$$C_n = 2 \int_0^{\pi} \int_0^1 w_n(r) \cos n\theta r dr d\theta \quad (4.3.3.2.2)$$

alınsın. Burada $w_n(r) \cos n\theta$ kenarları tamamen boşa

olan dairesel plağın titreşim formudur. C_n ifadesinde $\int_0^{\pi} \int_0^1 r dr d\theta$ bir alanı ifade eder. Titreşim modlarının ortogonalliği gereği $m \neq n$ için $\int_0^{\pi} \int_0^1 \phi_m \phi_n r dr d\theta = 0$ olduğu bilindiğine göre $w_n(r) \cos n\theta$ titreşim formu diğer bir titreşim formu olan sabit ($=1$) ile çarpılmaktadır, dolayısıyla $C_n = 0$ yazmak mümkündür. İkinci ve üçüncü terimlerdeki katsayılar

$$A_{11} = 2 \int_0^{\pi} \int_0^1 H(r, \theta, \tau) r dr d\theta \quad (4.3.3.2.3)$$

$$A_{12} = 2 \int_0^{\pi} \int_0^1 H(r, \theta, \tau) r^2 \cos \theta dr d\theta \quad (4.3.3.2.4)$$

$$A_{1, n+3} = 2 \int_0^{\pi} \int_0^1 H(r, \theta, \tau) w_n(r) \cos n\theta r dr d\theta \quad (4.3.3.2.5)$$

olarak alınsın. Dairesel plakta dış etkiler altında ayrılma olmaması durumunda yani $H(r, \theta, \tau) = 1$ için $A_{11} = \pi$, $A_{12} = 0$ ve C_n in sıfır olduğu hatırlanırsa $A_{1, n+3} = 0$ olacaktır. İntegral ifadelerin eşitlerini yazmaya devamla

$$2 \int_0^{\pi} \int_0^1 m_{pg} r dr d\theta = \pi m_{pg} \quad (4.3.3.2.6)$$

$$2 \int_0^{\pi} \int_0^1 q r dr d\theta = \pi q \quad (4.3.3.2.7)$$

ve son iki terim için de eşitleri

$$4 p^* \int_0^{\pi} \int_0^1 \delta(r) \delta(\theta) dr d\theta = 4 p^* \int_0^{\pi} \delta(\theta) d\theta \int_0^1 \delta(r) dr = p^* \quad (4.3.3.2.8)$$

$$4 m^* \int_0^{\pi} \int_0^1 \delta(\theta) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\delta(r-\varepsilon) - \delta(r)}{\varepsilon} \right] dr d\theta =$$

$$\begin{aligned}
&= -4 m^* \int_0^\pi \delta'(r) \delta(\theta) dr d\theta \\
&= -4 m^* \int_0^\pi \delta(\theta) d\theta \int_0^1 \delta'(r) dr = 0 \quad (4.3.3.2.9)
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Çünkü, aşağıda verilen eşitlikte $f(r)=1$ olup

$$- \int_0^1 \delta'(r) f(r) dr = \int_0^1 \delta(r) f'(r) dr = 0 \quad (4.3.3.2.10)$$

olacaktır. Gerçekte çözüm fonksiyonunda ilk terim rijit çökmeye karşılık gelmekte olduğundan, momentle ilgili olan (4.3.3.2.9) ifadesinin sıfır olması bekleniyordu. İntegral ifadelerin eşitleri yazıldıktan sonra, (4.3.3.2.2) denklemi düzenlenerek yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\pi \ddot{\bar{T}}_0 + c_f A_{11} \dot{\bar{T}}_0 + c_f A_{12} \dot{\bar{T}}_1 + c_f \sum_{n=0}^{\infty} A_{1,n+3} \dot{\bar{T}}_n + k_f A_{11} \bar{T}_0 + \\
&+ k_f A_{12} \bar{T}_1 + k_f \sum_{n=0}^{\infty} A_{1,n+3} \bar{T}_n = (q + m_{pg}) \pi + p^* \quad (4.3.3.2.11)
\end{aligned}$$

denklemine varılır.

4.3.3.3 δw Yerine $r \cos \theta$ Seçimi

İkinci olarak (4.3.3.1.2) denkleminde δw yerine $r \cos \theta$ konulursa bu durumda denklem

$$\begin{aligned}
&2 \int_0^\pi \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{n1}^4 T_{nn}(r) \cos n\theta r^2 \cos \theta dr d\theta + 2 k_f \int_0^\pi \int_0^1 \\
&[\bar{T}_0 + \bar{T}_1 r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} T_{nn}(r) \cos n\theta] H(r, \theta, \tau) r^2 \cos \theta dr d\theta +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2c_f \int_0^{\pi/2} \int_0^1 [\ddot{T}_0 + \ddot{T}_1 r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \ddot{T}_n w_n(r) \cos n\theta] H(r, \theta, \tau) r^2 \cos \theta \, dr \, d\theta - \\
& -2 \int_0^{\pi/2} \int_0^1 m_{pg} r^2 \cos \theta \, dr \, d\theta + 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^1 [\ddot{T}_0 + \ddot{T}_1 r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \ddot{T}_n w_n(r) \\
& \cos n\theta] r^2 \cos \theta \, dr \, d\theta - 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^1 q r^2 \cos \theta \, dr \, d\theta - \\
& -4 \int_0^{\pi/2} \int_0^1 p^* \delta(r) \delta(\theta) r \cos \theta \, dr \, d\theta - 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^1 m^* \delta(\theta)
\end{aligned}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\delta(r-\epsilon) - \delta(r)}{\epsilon} \right] r \cos \theta \, dr \, d\theta = 0 \quad (4.3.3.3.1)$$

şeklını alır. Buradaki integrallerden

$$B_n = 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^1 w_n(r) \cos n\theta \cos \theta \, r^2 \, dr \, d\theta \quad (4.3.3.3.2)$$

ile gösterilecektir. Burada, plak titreşim formu $r \cos \theta$ ile çarpılmaktadır. Yani rijit dönme ve elastik eğilme titreşimlerinin çarpımı söz konusudur ki, modların ortogonalliğinden $B_n = 0$ yazılabilecektir. İntegrallere devamla

$$A_{21} = 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^1 H(r, \theta, \tau) \cos \theta \, r^2 \, dr \, d\theta \quad (4.3.3.3.3)$$

$$A_{22} = 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^1 H(r, \theta, \tau) \cos^2 \theta \, r^3 \, dr \, d\theta \quad (4.3.3.3.4)$$

ile gösterilerek $H(r, \theta, \tau) = 1$ olması halinde $A_{21} = 0$ ve $A_{22} = \pi/4$ olacaktır. Daha sonra

$$A_{2, n+3} = 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^1 w_n(r) \cos n\theta \cos \theta H(r, \theta, \tau) r^2 \, dr \, d\theta \quad (4.3.3.3.5)$$

ile belirtilirse ve $H(r, \theta, r) = 1$ olması durumunda B_n için olduğu gibi, $A_{2, n+3} = 0$ yazmak mümkündür. Dairesel plağa merkezinde etkiyen düşey kuvvetle ilgili olarak

$$4 p^* \int_0^{\pi} \int_0^1 \delta(r) \delta(\theta) \cos \theta r dr d\theta =$$

$$= 4 p^* \int_0^{\pi} \delta(\theta) \cos \theta d\theta \int_0^1 \delta(r) r dr = 0 \quad (4.3.3.3.6)$$

ve moment için de

$$4 m^* \int_0^{\pi} \int_0^1 \delta(\theta) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\delta(r-\varepsilon) - \delta(r)}{\varepsilon} \right] \cos \theta r dr d\theta =$$

$$= 4 m^* \int_0^{\pi} \delta(\theta) \cos \theta d\theta \int_0^1 \delta'(r) r dr$$

$$= 4 m^* \left(+ \frac{1}{2} \right) \left(- \frac{1}{2} \right) = m^* \quad (4.3.3.3.7)$$

ile yukarıda verilen integraller (4.3.3.3.1) de yerlerine yazılırsa

$$\frac{\pi}{4} \ddot{T}_1 + c_f A_{21} \dot{T}_0 + c_f A_{22} \dot{T}_1 + c_f \sum_{n=0}^{\infty} A_{2, n+3} \dot{T}_n +$$

$$+ k_f A_{21} \bar{T}_0 + k_f A_{22} \bar{T}_1 + k_f \sum_{n=0}^{\infty} A_{2, n+3} T_n = m^* \quad (4.3.3.3.8)$$

denkleme varılır.

4.3.3.4 δw Yerine $w_m(r) \cos \theta$ Seçimi

Üçüncü olarak δw yerine $w_m(r) \cos \theta$ konulursa (4.3.3.1.2) denklemi

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{n1}^4 T_n \int_0^{\pi} \int_0^1 w_n(r) w_m(r) \cos n\theta \cos m\theta r dr d\theta + \\
& + 2 k_f \int_0^{\pi} \int_0^1 [\bar{T}_0 + \bar{T}_1 r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} T_n w_n(r) \cos n\theta] H(r, \theta, \tau) w_m(r) \\
& \cos m\theta r dr d\theta + 2 C_f \int_0^{\pi} \int_0^1 [\ddot{T}_0 + \ddot{T}_1 r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \ddot{T}_n w_n(r) \cos n\theta] \\
& H(r, \theta, \tau) w_m(r) \cos m\theta r dr d\theta - 2 \int_0^{\pi} \int_0^1 q w_m(r) \cos m\theta r dr d\theta \\
& - 2 \int_0^{\pi} \int_0^1 m_{pg} w_m(r) \cos m\theta r dr d\theta + 2 \int_0^{\pi} \int_0^1 [\ddot{T}_0 + \ddot{T}_1 r \cos \theta + \\
& \sum_{n=0}^{\infty} \ddot{T}_n w_n(r) \cos n\theta] w_m(r) \cos m\theta r dr d\theta - \\
& - 4 p^* \int_0^{\pi} \int_0^1 \delta(\theta) \delta(r) w_m(r) \cos m\theta dr d\theta - 4 m^* \int_0^{\pi} \int_0^1 \\
& \delta(\theta) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\delta(r-\varepsilon) - \delta(r)}{\varepsilon} \right] w_m(r) \cos m\theta dr d\theta = 0
\end{aligned}
\tag{4.3.3.4.1}$$

şeklinde ifade edilecektir. Buradaki integrallerde

$$A_{m+3,1} = 2 \int_0^{\pi} \int_0^1 w_m(r) \cos m\theta H(r, \theta, \tau) r dr d\theta
\tag{4.3.3.4.2}$$

$$A_{m+3,2} = 2 \int_0^{\pi} \int_0^1 w_m(r) \cos m\theta \cos \theta H(r, \theta, \tau) r^2 dr d\theta
\tag{4.3.3.4.3}$$

$$A_{m+3,n+3} = 2 \int_0^{\pi} \int_0^1 w_m(r) w_n(r) \cos n\theta \cos m\theta H(r, \theta, \tau) r dr d\theta
\tag{4.3.3.4.4}$$

olarak alınsın. $H(r, \theta, \tau) = 1$ olması halinde

$A_{m+3,1} = A_{m+3,2} = 0$ ve $m=n$ için $A_{m+3,n+3} \neq 0$, $m \neq n$ için ise $A_{m+3,n+3} = 0$ olarak bulunur. İntegrallerin eşitleri yazılmaya devam edilirse

$$E_{mn} = 2 \int_0^{\pi} \int_0^1 w_m(r) w_n(r) \cos m\theta \cos n\theta r dr d\theta \quad (4.3.3.4.5)$$

olarak verilen bu eşitlikte modların ortogonalliği özelliğinden $m=n$ için $E_{mn} \neq 0$ ve $m \neq n$ için de $E_{mn} = 0$ sonucu beklenen bir durumdur. E_{mn} i integral ifadelerden kurtarmak istersek, Bessel fonksiyonlarını içeren $w_n(r)$ ve $w_m(r)$ terimlerinin çarpımı $m=n$ için $w_n^2(r)$ olur ve (4.3.3.4.5) eşitliğinden

$$E_{nn} = 2 \int_0^{\pi} \cos^2 n\theta d\theta \int_0^1 J_n^2(\lambda_{n1} r) + 2A_{n1} I_n(\lambda_{n1} r) + A_{n1}^2 I_n^2(\lambda_{n1} r) r dr \quad (4.3.3.2.6)$$

ifadesine varılır. E_{nn} ifadesindeki integrallerin eşitleri

$$I_1 = \int_0^{\pi} \cos^2 n\theta d\theta = \begin{cases} \pi & n = 0 \\ \pi/2 & n \neq 0 \end{cases} \quad (4.3.3.4.7)$$

ve

$$\int_0^1 J_n^2(\lambda_{n1} r) r dr = \frac{1}{2} [J_n^2(\lambda_{n1}) - J_{n-1}(\lambda_{n1}) J_{n+1}(\lambda_{n1})]$$

$$\int_0^1 I_n(\lambda_{n1} r) J_n(\lambda_{n1} r) r dr =$$

$$= \frac{1}{2\lambda_{n1}} [J_n(\lambda_{n1})' I_{n+1}(\lambda_{n1}) + I_n(\lambda_{n1}) J_{n+1}(\lambda_{n1})]$$

$$\int_0^1 I_n^2(\lambda_{n1} r) r dr = -\frac{1}{2} [I_n'^2(\lambda_{n1}) - (1 + \frac{\nu^2}{\lambda_{n1}^2}) I_n^2(\lambda_{n1})]$$

$$I_n'(\lambda_{n1}) = \frac{\nu}{\lambda_{n1}} I_n(\lambda_{n1}) + I_{n+1}(\lambda_{n1})$$

$$I_n'^2(\lambda_{n1}) = \frac{\nu}{\lambda_{n1}^2} I_n^2(\lambda_{n1}) + \frac{2\nu}{\lambda_{n1}} I_n(\lambda_{n1}) I_{n+1}(\lambda_{n1}) + I_{n+1}^2(\lambda_{n1})$$

$$\int_0^1 I_n^2(\lambda_{n1} r) r dr = \frac{1}{2} [I_n^2(\lambda_{n1}) - I_{n+1}(\lambda_{n1}) I_{n-1}(\lambda_{n1})]$$

(4.3.3.2.8)

alınarak (4.3.3.4.6) ifadesi

$$\begin{aligned} E_{nn} = I_1 \left\{ [J_n^2(\lambda_{n1}) - J_{n-1}(\lambda_{n1}) J_{n+1}(\lambda_{n1})] + \frac{2A_{n1}}{\lambda_{n1}} \right. \\ [J_n(\lambda_{n1}) I_{n+1}(\lambda_{n1}) + I_n(\lambda_{n1}) J_{n+1}(\lambda_{n1})] + \\ \left. + A_{n1}^2 [I_n^2(\lambda_{n1}) - I_{n-1}(\lambda_{n1}) I_{n+1}(\lambda_{n1})] \right\} \end{aligned} \quad (4.3.3.2.9)$$

gibi elde edilir. Diğer integraller

$$\begin{aligned} F_m &= 4 \int_0^\pi \int_0^1 \delta(\theta) \delta(r) w_m(r) \cos m\theta dr d\theta \\ &= 4 \int_0^\pi \delta(\theta) \cos m\theta d\theta \int_0^1 \delta(r) [J_m(\lambda_{m1} r) + A_{m1} I_m(\lambda_{m1} r)] dr \\ &= 4 \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} (J_m(0) + A_{m1} I_m(0)) \right) \\ &= [J_m(0) + A_{m1} I_m(0)] \end{aligned} \quad (4.3.3.2.10)$$

gibi elde edilmiş olur. Benzer şekilde son ifade

$$\begin{aligned}
G_m &= 4 \int_0^{\pi} \int_0^1 \delta(\theta) \cos m\theta \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\delta(r-\varepsilon) - \delta(r)}{\varepsilon} \right] w_m(r) dr d\theta \\
&= 4 \int_0^{\pi} \delta(\theta) \cos m\theta d\theta \int_0^1 (-\delta'(r)) [J_m(\lambda_{m1} r) + A_{m1} I_m(\lambda_{m1} r)] dr \\
&= 2 \int_0^1 \delta(r) [J_m(\lambda_{m1} r) + A_{m1} I_m(\lambda_{m1} r)]'_{r=0} dr \\
&= \frac{\lambda_{m1}}{2} [J_{m-1}(\lambda_{m1} r) - J_{m+1}(\lambda_{m1} r)] + A_{m1} \frac{\lambda_{m1}}{2} [I_{m-1}(\lambda_{m1} r) \\
&\quad + I_{m+1}(\lambda_{m1} r)]_{r=0} \\
G_m &= \frac{\lambda_{m1}}{2} [J_{m-1}(0) - J_{m+1}(0)] + \frac{A_{m1} \lambda_{m1}}{2} [I_{m-1}(0) + I_{m+1}(0)] \\
&\quad (4.3.3.2.11)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır, ve integrallerin eşitli olan bu ifadeler (4.3.3.4.1) eşitliğinde yerine konulursa

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \delta_{mn} E_{mn} \ddot{T}_n + c_f A_{m+3,1} \dot{\bar{T}}_0 + c_f A_{m+3,2} \dot{\bar{T}}_1 + c_f \sum_{n=0}^{\infty} A_{m+3,n+3} \dot{T}_n + \\
&+ k_f A_{m+3,1} \bar{T}_0 + k_f A_{m+3,2} \bar{T}_1 + \sum_{n=0}^{\infty} (k_f A_{m+3,n+3} + \lambda_{n1}^4 \delta_{nn} E_{nn}) T_n = \\
&= F_m p^* + G_m m^* \quad (4.3.3.4.12)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada δ_{mn} Kronecker deltası olup

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases} \quad (4.3.3.2.13)$$

şeklinde tanımlandığı bilinmektedir.

4.4 Dairesel Plağın Titreşimine Ait Ayırıklaştırılmış Denklemler Takımı

Ayrıklaştırma sonucu ortaya çıkan (4.3.3.2.11), (4.3.3.3.8) ve (4.3.3.4.11) denklemlerinden dairesele plağın titreşimine ait denklemler takımı matris formda

$$\underset{\sim}{M} \ddot{\underset{\sim}{V}} + \underset{\sim}{C} \dot{\underset{\sim}{V}} + \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{V} = \underset{\sim}{F} \quad (4.4.1)$$

olarak yazılabilir. Burada bilinmeyenler vektörü

$\underset{\sim}{V}^T = [\bar{T}_0, \bar{T}_1, T_0, T_1, T_2, \dots]$ şeklinde belirlemektedir.

Denklemler takımıdaki kütle, sönüm, rijitlik ve yük matrisleri aşağıda sırası ile verilmiştir.

$$\underset{\sim}{M} = \begin{bmatrix} \pi & & & & \\ & \pi/4 & & & \\ & & E_{00} & & \\ & & & E_{11} & \\ & & & & E_{22} \end{bmatrix} \quad (4.4.2)$$

$$\underset{\sim}{C} = c_f \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{bmatrix} \quad (4.4.3)$$

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} k_f A_{11} & k_f A_{12} & k_f A_{13} & k_f A_{14} & k_f A_{15} \\ k_f A_{21} & k_f A_{22} & k_f A_{23} & k_f A_{24} & k_f A_{25} \\ k_f A_{31} & k_f A_{32} & k_f A_{33} + \lambda^4 E_{01} E_{00} & k_f A_{34} & k_f A_{35} \\ k_f A_{41} & k_f A_{42} & k_f A_{43} & k_f A_{44} + \lambda^4 E_{11} E_{11} & k_f A_{45} \\ k_f A_{51} & k_f A_{52} & k_f A_{53} & k_f A_{54} & k_f A_{55} + \lambda^4 E_{21} E_{22} \end{bmatrix}$$

(4.4.4)

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} (q+m_{pg})\pi + p^* \\ m^* \\ F_1 p^* + G_0 m^* \\ F_2 p^* + G_1 m^* \\ F_3 p^* + G_2 m^* \end{bmatrix} \quad (4.4.5)$$

Dairesel plağın (4.4.1) ile verilen titreşimine ait denklem takımı zemindeki yayların çekme gerilmeleri almamasından dolayı doğrusal olmayıp oldukça yüksek mertebeden non-lineerdir.

4.5. Dairesel Plağın Dönme ve Çökmelerinin Belirlenmesi

Dairesel plağa orta noktasından ($r=0$, $\theta=0$) statik olarak etki eden moment ve normal kuvvet durumunda, (Şekil 4.5.1) plaktaki dönme ve düşey yerdeğiştirmeler elde edilebilir. Plağın düşey yerdeğiştirmeleri (4.3.2.1) ile verilen ifadede hesaplanabilir. Plağın merkezindeki dönmeler ise (4.3.2.1) ifadesinin r ye göre türevinin alınmasıyla

$$w'_n(r, \theta) = \bar{T}_1 \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} T_n w'_n(r) \cos n\theta \quad (4.5.1)$$

olarak elde edilir. Burada $w'_n(r)$

$$w'_n(r) = \frac{d}{dr} [J_n(\lambda_{n1}r) + A_{n1}I_n(\lambda_{n1}r)] \quad (4.5.2)$$

olarak yazılır ve türevler alınır (4.5.2) eşitliğinden

$$w'_n(r) = 0.5[J_{n-1}(\lambda_{n1}r) - J_{n+1}(\lambda_{n1}r) + A_{n1}(I_{n-1}(\lambda_{n1}r) + I_{n+1}(\lambda_{n1}r))] \quad (4.5.3)$$

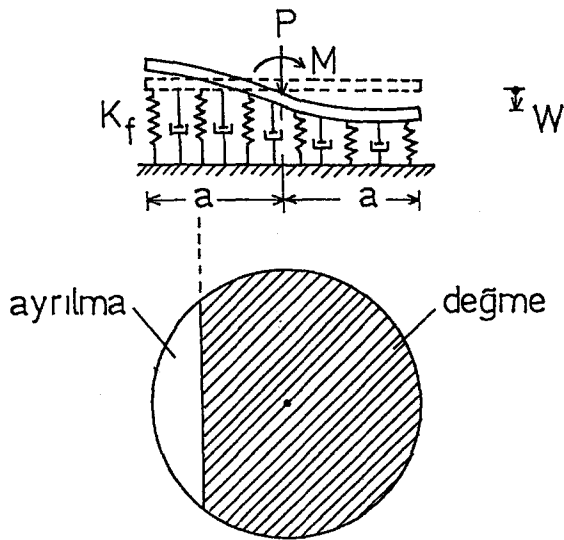
elde edilir. Burada $r=0$ için

$$\mu_n = 0.5[J_{n-1}(0) - J_{n+1}(0) + A_{n1}(I_{n-1}(0) + I_{n+1}(0))] \quad (4.5.4)$$

ile verilirse, bu durumda plağın dönmesi ($r=0, \theta=0$) için

$$w'(0,0,r) = \bar{T}_1 + \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n T_n \quad (4.5.5)$$

ile belirlenmiş olur.



Şekil 4.5.1 Dairesel plakta dış yükler

4.6 Dinamik Halden Statik Duruma Geçiş

Dairesel plak için Bölüm 4.4 de verilen denklem takımından statik duruma ait çözüm elde edilebilir. Bulunan (4.4.1) denkleminde zamana göre türev ifade eden terimler gözönüne alınmazsa elde edilecek denklem takımı statik durumu ifade edecektir. Bu durumda

(4.4.1) denkleminde

$$\underset{\sim}{K} \underset{\sim}{V} = \underset{\sim}{F} \quad (4.6.1)$$

ile yazılan denklem takımına varılacaktır. Bilinmeyenlerin vektörü yine $\underset{\sim}{V}^T = [\bar{T}_0, \bar{T}_1, T_0, T_1, T_2, \dots]$ olarak verilebilir. Burada (4.4.1.1) ile verilen denklem takımındaki rijitlik ve yük matrisleri sırasıyla (4.4.4) ve (4.4.5) te verildiği gibidir.

Ancak yük matrisindeki boyutsuz normal kuvvet ve moment ifadeleri (p^*, m^*) , dinamik halde dinamik dış tesirlerin; statik halde ise, dış statik tesirlerin boyutsuz olan değerlerine karşılık gelmektedir.

Gerek dinamik durumda, gerekse buradaki statik durum için yukarıda verilen denklemler hakkında Bölüm 3 ve Bölüm 4.4 de açıklanan hususlar geçerlidir. Bu nedenle, çözüm için iteratif bir yol izlenmiştir. Dairesel plağın rijit çökme ve dönmesine ek olarak, bir simetrik ve iki simetrik olmayan yerdeğiştirme fonksiyonu gözönüne alınmıştır.

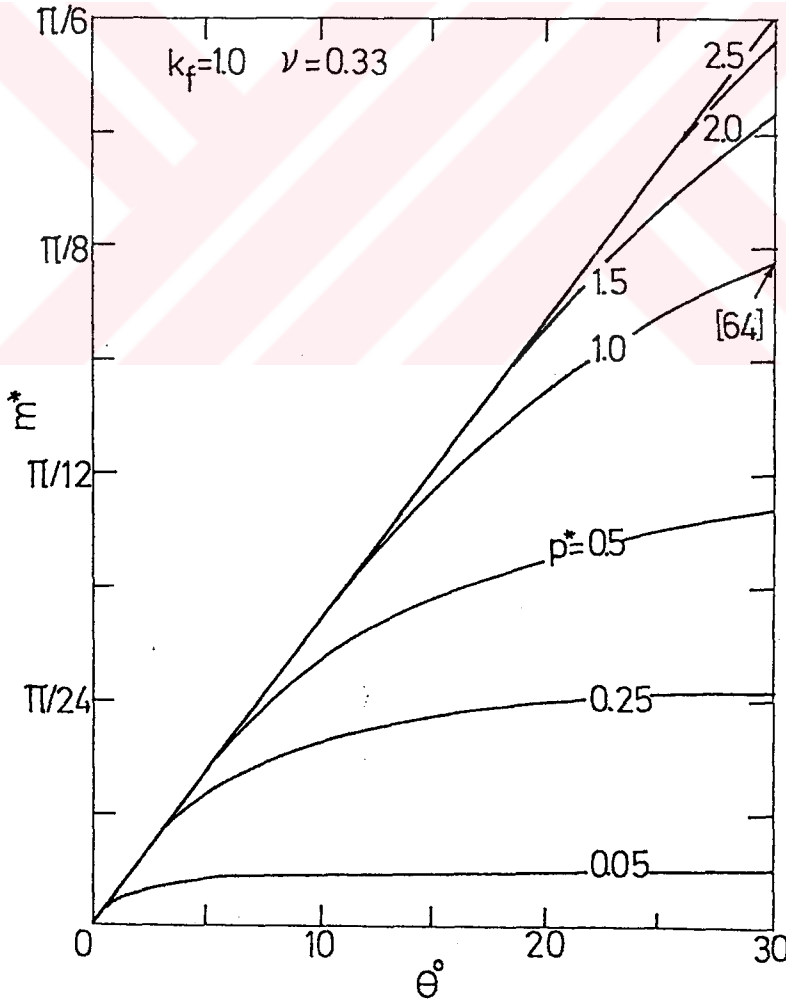
Statik durumda çekme almayan Winkler zeminine oturan dairesel plağın davranışına ait bazı çözümler elde edilmiş ve sonuçlar şekillerde gösterilmiştir.

4.7. Statik Duruma Ait Sayısal Sonuçlar

Bölüm 4.6 da statik duruma ait denklem takımı (4.6.1) ile verilmişti. Burada bu denklem takımının sayısal çözümüne ait sonuçlar verilecektir. Problemin sayısal çözümü için bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Denklem takımındaki integrallerin sayısal hesaplanmasında Gauss-Legendre sayıları kullanılmıştır[63]. Çözüm fonksiyonunda bulunan Bessel fonksiyonlarının hesaplanması, denklem takımının çözümü ve bir matrisin tersinin alınması v.b. gibi işlemler için; İ.T.Ü. Bilgi İşlem Merkezindeki IBM 4381 ve bünyesindeki alt programlar kullanılmıştır. Denklem takımı (4.6.1) in çözümü sonucunda elde edilen sabit $\bar{T}_0$, $\bar{T}_1$, T_0 , T_1 , ...ler plağın (4.3.2.1) ile verilen çözüm fonksiyonunda yerlerine yazılmakta ve plağın istenilen noktadaki çökmeleri bulunmaktadır. Daha sonra Bölüm 4.5 de (4.5.5) yardımıyla plak merkezindeki dönmeler bulunmaktadır. Burada problem statik olduğu için (4.5.5) ifadesinde $\tau=0$ olarak alınmaktadır. Plağın simetrik olmayan yerdeğiştirmeleri için (4.3.2.1) ifadesinde ilk üç terim ($n=0,1,2$) gözönüne alınmıştır. Bu bölümdeki çözümlerde plak ağırlığı ve plak üzerinde düzgün yayılı bir yük gözönüne alınmamıştır ($m_{pg}=0$, $q=0$). Poisson oranı ise $\nu=0.33$ olarak alınmıştır.

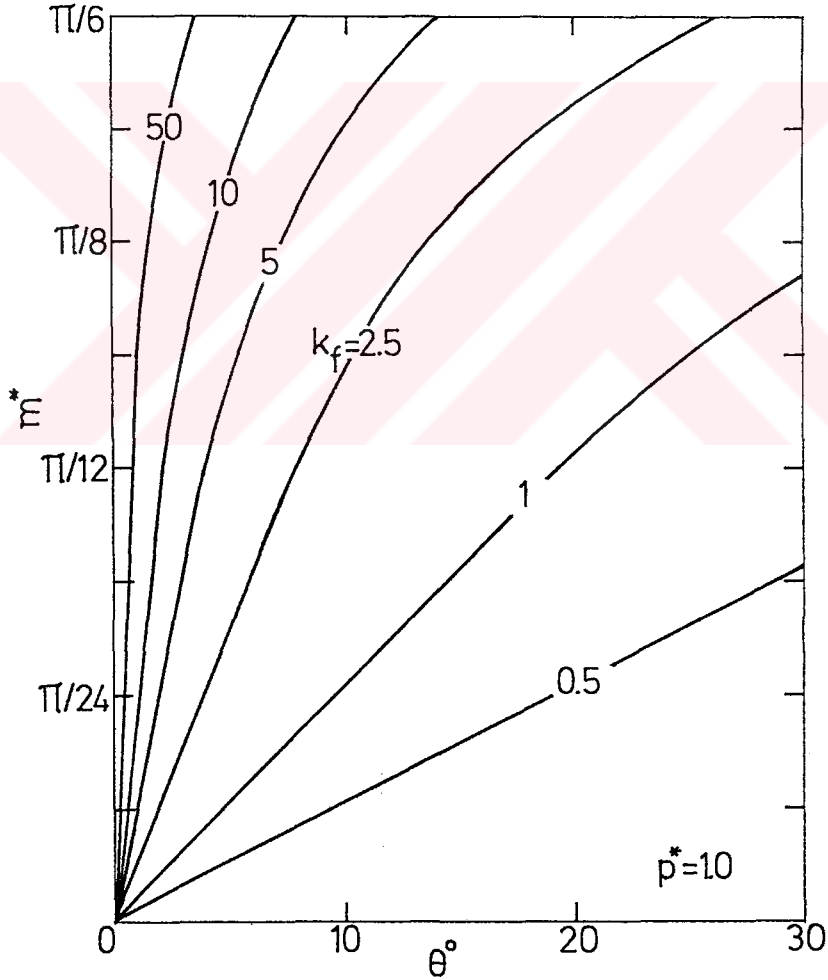
Plak merkezinde etki eden eksenel kuvvet ve moment için davranışa ait sayısal sonuçlar elde edilmiştir. Eksenel kuvvetin değişen değerleri için moment-eğrilik (dönme) ilişkisi Şekil 4.7.2 de verilmiştir. Alışılage-len Winkler zemini (çekme ve basınç gerilmesi alan) durumunda yani tam değmenin olduğu sürece, moment-eğrilik değişimi doğrusaldır ve etkiyen kuvvetten bağımsız olarak ortaya çıkmaktadır. Zeminden ayrılmalar olması durumunda değişim şekillerde görüldüğü gibidir. Eksenel yükün küçük değerleri için değme bölgesi çok sınırlı (küçük) kalmakta, hatta küçük momentler için oldukça büyük dönmeler ortaya çıkmakta ve momentteki küçük artmalar dönmelerde

önemli artmalara neden olmaktadır. Eksenel yük arttıkça zeminden ayrılmalar azalmakta, değme bölgesi büyümekte ve dolayısıyla plağın dönmesi sınırlı kalmaktadır. Aynı zemin modeline oturan rijit dairesel plak durumunda ($M-\theta$) ilişkisi [64] de verilmiştir. Burada, Şekil 4.7.2 de eksenel yükün $p^* = 1.0$ değeri için işaretlenen eğri, sözü geçen referansta verilen eksenel yükün 0.2 değerine karşılık gelmektedir. Elastik plak durumunda plağın merkezsel dönmesi ve karşı gelen moment; parametrelerin burada ve ilgili referansta kullanılan değerleri için, eksenel yükün rijit plak durumundakinin beş katı olması halindeki değerleri almaktadır. Görüldüğü gibi plağın rijit olması durumunda dönmeyi oluşturan moment, elastik plak durumuna



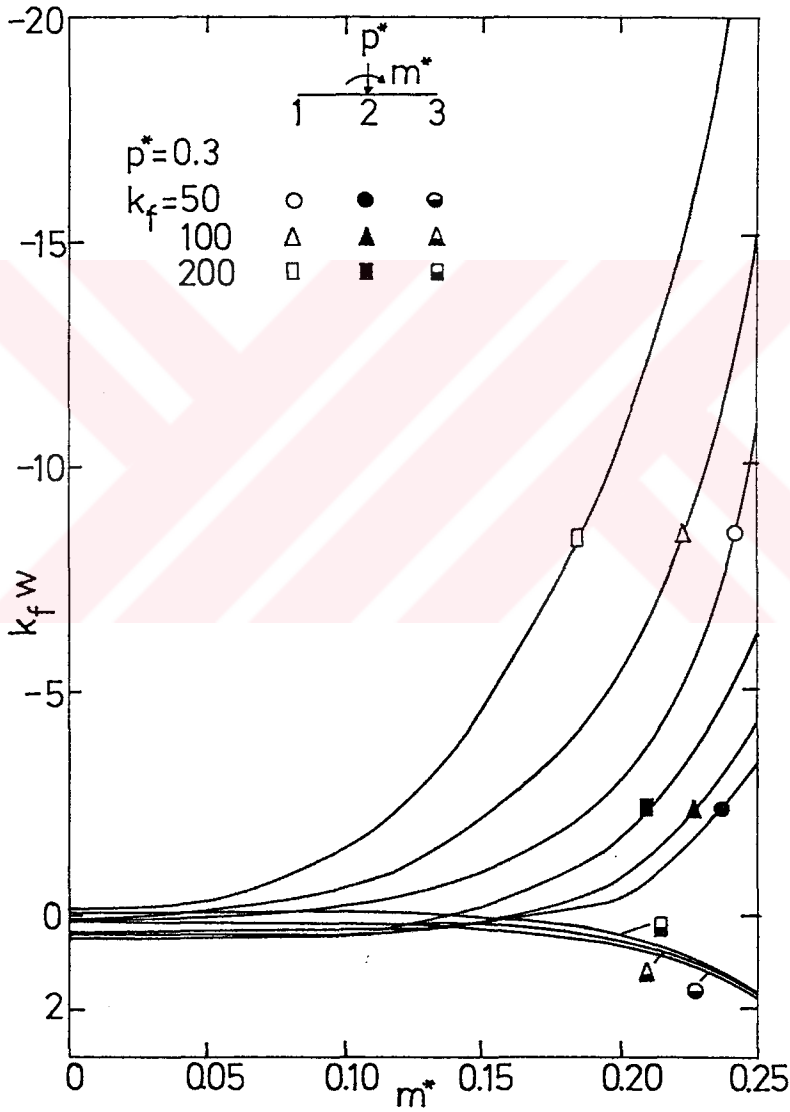
Şekil 4.7.2 Eksenel yükün çeşitli değerleri için $M-\theta$ ilişkisi

göre daha büyüktür. Bu merkezsel dönme için rijit plak-
taki yerdeğiştirmelerin daha büyük olarak ortaya çıkma-
sından ileri gelmektedir. Moment-eğrilik ilişkisinin
zemin rijitlikleri ile değişimi Şekil 4.7.3 de görülmek-
tedir. Zeminin çok yumuşak olması durumunda değişim doğ-
rusal olmakta, dolayısıyla büyük dönmeler ortaya çıkma-
ktadır. Zemin rijitliği arttıkça tam değme kaybolduğu
için doğrusal olmayan bir değişim kendisini göstermekte-
dir. Zemin rijitliğinin artmasıyla plağın dönmesi azal-
maktadır.



Şekil 4.7.3 Çeşitli zemin rijitlikleri için
M- θ ilişkisi

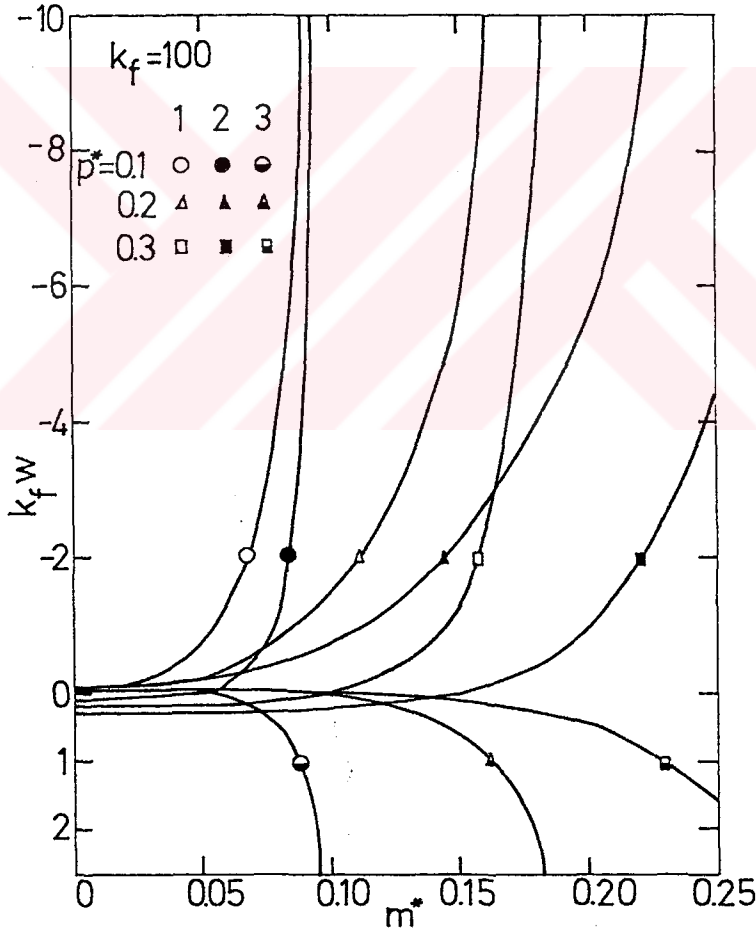
Plak merkezinde etki eden eksenel kuvvet ve moment durumunda, simetri ekseninde iki uçta ve merkezdeki plak yerdeğiştirmeleri, zemin rijitliğine bağlı olarak Şekil 4.7.4 de gösterilmiştir. Değişik zemin rijitliğine ait değişimleri aynı çerçevede gösterebilmek için, w yerdeğiştirmesi yerine, $k_f w$ büyüklüğü esas alınmıştır. Zeminin yumuşak olması durumunda değme bölgesi büyük olarak



Şekil 4.7.4 Çeşitli zemin rijitlikleri için plak yerdeğiştirmeleri

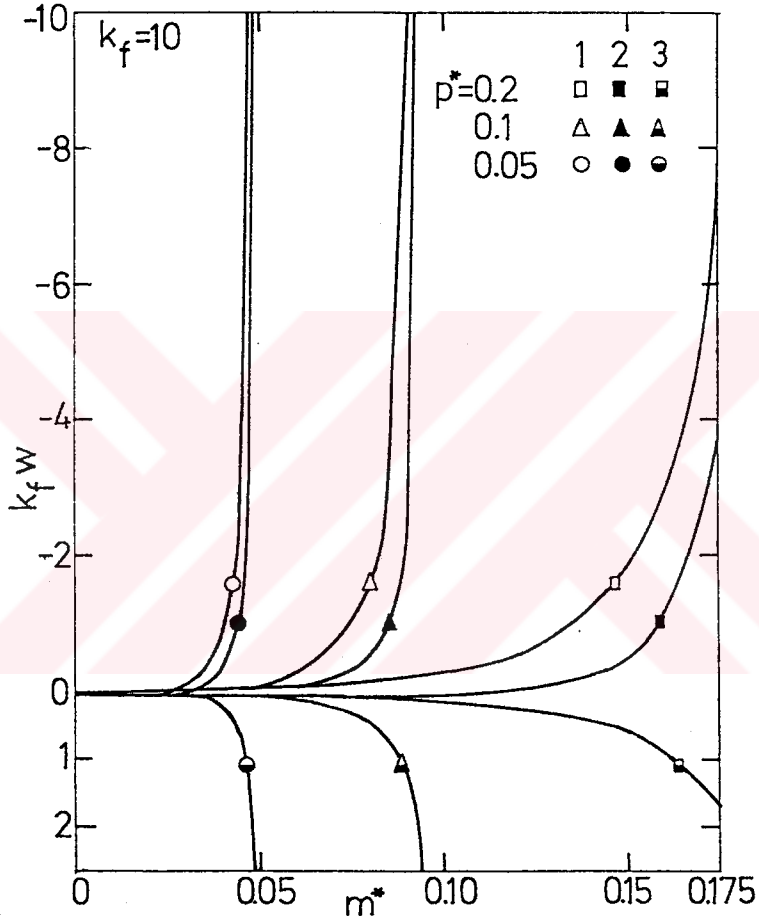
belirmektedir. Büyük zemin rijitliği durumunda yerdeğiştirmeler artmaktadır. Plâkın 3 noktasında ise $k_f w$ parametresinin değişimi zemin rijitliğinden fazlaca etkilenmemektedir. Eğer ayrılmanın etkisi gözönüne alınmasaydı, 2 noktasındaki $k_f w$ değişiminin m^* dan bağımsız olarak bir sabit değerde kalması gerekirdi.

Sabit zemin rijitlikleri için eksenel yüke bağlı olarak plak merkezi ve plak uçlarındaki yerdeğiştirmelerin değişimi Şekil 4.7.5a ve Şekil 4.7.5b de verilmiştir.



Şekil 4.7.5a Eksenel yükle plak yerdeğiştirmelerinin değişimi

Yumuşak zemin için ve küçük eksenel yük durumunda zemin ayrılımları 1 ve 2 noktalarında, belirli bir moment değerinden sonra asimtotik olarak büyük değerlere erişmektedir.



Şekil 4.7.5b Eksenel yüklerle plak yerdeğiştirmelerinin değişimi

BÖLÜM 5

DAİRESEL RİJİT PLAK-KOLON SİSTEMİ

5.1 Giriş

Bu bölümde ele alınan sistem Şekil 5.1 de görüldüğü gibi yay katsayısı K_f , sönümü C_f alan çekme gerilmeleri almayan Winkler zeminine oturan a yarıçaplı ve M_p kütleli rijit bir dairesel plak ile bu plağa merkezinde mesnetlenen birim boyunun kütlesi m_c , eğilme rijitliği EI ve sönümü C_c olan bir kolondan oluşmaktadır. Kolon yüksekliği boyunca çeşitli noktalarda M_i toplu kütlelerini taşımakta olup bu kütlelerin J_i dönme ataletleri de hareket denklemine dahil edilmiştir. Kolonun yere ve zamana bağlı yerdeğiştirmesi $U(X,t)$ ile verilmiştir. Plak ayrıca şiddeti Q olan düzgün yayılı yükün de etkisi altındadır.

5.2. Sistemin Hareket Denklemi ve Çözümü

Sistemin temel plağının herhangi bir andaki yerdeğiştirmiş durumu, $W(t)$ düşey yerdeğiştirmesi ve $\theta(t)$ dönmesi ile belirtilebilir. Şekil 5.2 de görüldüğü gibi plağın dinamik dengesine ait denklemler

$$Q\pi a^2 + \left(\sum_i M_i + M_c + M_p\right) (g - \ddot{W}) - F_f = 0 \quad (5.2.1)$$

$$M_1 - M_p a^2 \ddot{\theta}/4 - M_f = 0 \quad (5.2.2)$$

olarak yazılabilir. Burada $M_1 = EI_0 U''(X=0,t)$, kolonun mesnetlendiği yerdeki eğilme momenti, M_c , kolonun toplam kütlesidir. F_f ve M_f ise zemin tarafından temel plağına uygulanan düşey kuvvet ve eğilme momenti olup aşağıdaki

şekilde ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} F_f &= K_f a^2 [W (\pi - \beta + \sin \beta \cos \beta) + 2 s_t a \dot{\theta} \sin^3 \beta / 3] + \\ &+ C_f a^2 [\dot{W} (\pi - \beta + \sin \beta \cos \beta) + 2 s_t a \dot{\theta} \sin^3 \beta / 3] \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

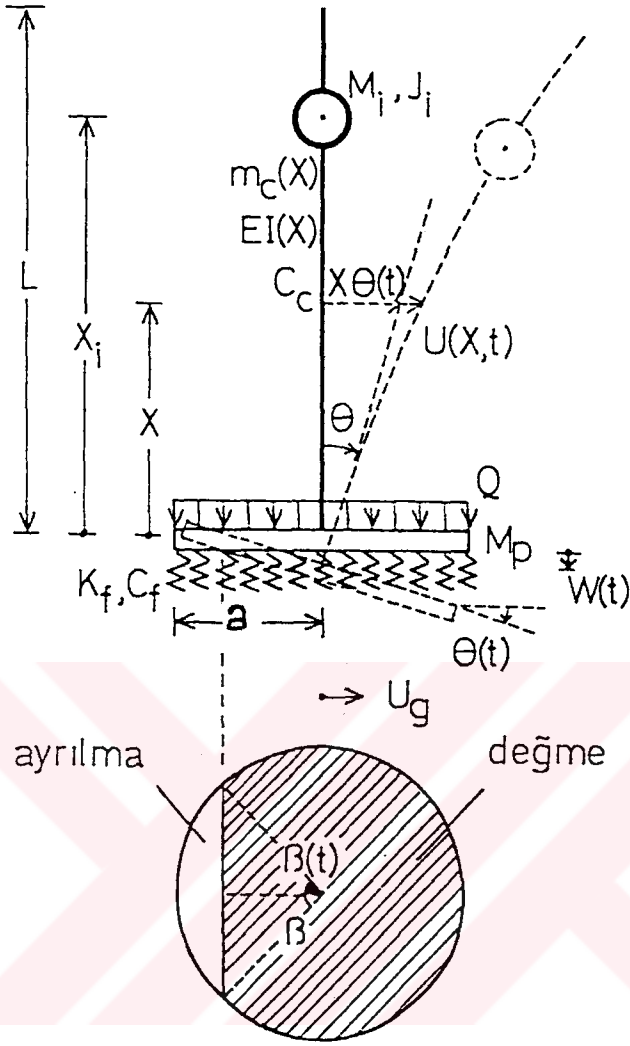
$$\begin{aligned} M_f &= K_f a^3 [2 s_t W \sin^3 \beta / 3 + a \dot{\theta} (\pi - \beta + \sin 4\beta / 4) / 4] + \\ &+ C_f a^3 [2 s_t \dot{W} \sin^3 \beta / 3 + a \dot{\theta} (\pi - \beta + \sin 4\beta / 4) / 4] \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

Burada $s_t = \text{sign}(\dot{\theta})$ ve $\beta = \arccos(s_t W / (a \dot{\theta}))$ olup Şekil 5.2 de görüldüğü gibi β açısı ayrılma bölgesinin ölçüsü olarak kabul edilebilir. Sistemin düşey ve moment dengesi için (5.2.1) ve (5.2.2) ile verilen ifadelerde (5.2.3) ve (5.2.4) ile verilen F_f ve M_f in eşitleri yerlerine konularak düzenlenirse

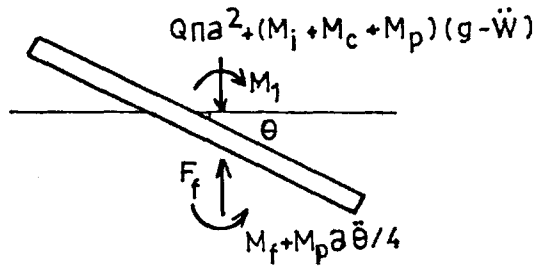
$$\begin{aligned} (m_c + \sum_i m_i + m_p) \ddot{w} + c_f \gamma^2 [\dot{W} (\pi - \beta + \sin \beta \cos \beta) + \\ 2 s_t \gamma \dot{\theta} \sin^3 \beta / 3] + k_f \gamma^2 [W (\pi - \beta + \sin \beta \cos \beta) + \\ 2 s_t \gamma \dot{\theta} \sin^3 \beta / 3] = \\ = \pi q \gamma^2 + (m_c + \sum_i m_i + m_p) m_{cg} \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{m_p}{4} \gamma^2 \ddot{\theta} + 2 c_f \gamma^3 [s_t \dot{W} \sin^3 \beta / 3 + \gamma \dot{\theta} (\pi - \beta + \sin 4\beta / 4) / 4] \\ + 2 k_f \gamma^3 [s_t W \sin^3 \beta / 3 + \gamma \dot{\theta} (\pi - \beta + \sin 4\beta / 4) / 4] \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{I}_n u_n''(0) = 0 \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

eşitliklerine varılır. Burada $\gamma = a/L$ olarak alınmıştır.



Şekil 5.1 Rijit dairesel plak-kolon sistemi



Şekil 5.2 Plak-kolon sisteminin moment ve düşey dengesi

Kolonun hareket denklemi, Bölüm 3 de (3.3.6) ile verilmişti. Sistemin hareket denkleminin elde edilmesi için (5.2.5) ve (5.2.6) ile verilen, plakta düşey kuvvet ve moment denge denklemlerinin kolon hareket denklemiyle birleştirilmesi gerekmektedir. Kolonun (3.3.6) ile verilen hareket denklemi diferansiyel denklem türünde olduğundan ayrıklaştırılması gerekir. Bölüm 3 de konsol kolonun yerdeğiştirme ifadesi (3.3.1.1) ile verilmişti. Burada sistemde bir $\theta(t)$ dönmesi olması halinde kolonun yerdeğiştirme ifadesi (3.3.1.1) e benzer şekilde

$$V(X,t) = U_g(t) + \theta(t) X + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_n(t) U_n(X) \quad (5.2.7)$$

gibi yazılabilir. Bu durumda tamamen Bölüm 3 deki benzer şekilde ayrıklaştırılmış denklem takımı aşağıda verildiği gibi elde edilebilir:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} [f_{mn} + \sum_i m_i u_m(x_i) u_n(x_i) + \sum_i j_i u'_m(x_i) u'_n(x_i)] \ddot{\bar{T}}_n + \\ & c_c \sum_{n=1}^{\infty} g_{mn} \dot{\bar{T}}_n + \sum_{n=1}^{\infty} [c_{mn} + 2b_{mn} + a_{mn} - h_{mn}(1) + h_{mn}(0)] \bar{T}_n + \\ & [e_m + \sum_i m_i x_i u_m(x_i) + \sum_i j_i u'_m(x_i)] \ddot{\theta} = \\ & = -d_m \ddot{u}_g - \sum_i m_i u_m(x_i) \ddot{u}_g + p_c u_m(x_i) + p_d t_m \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

Bölüm 3 de ayrıklaştırılmış denklem takımı olan (3.3.1.1.3) elde edilirken plak titreşiminde karakteristik zaman parametresi olan T_p kullanılmıştı. Burada kolon titreşiminde karakteristik zaman parametresi olan T_c kullanılmıştır. Sistemin hareketini yöneten denklemin elde edilmesinde kullanılacak olan (5.2.5), (5.2.6) ve (5.2.8) denklemlerinde bulunan boyutsuz parametreler aşağıda verilmiştir:

$$m_i = \frac{M_i}{m_{co} L}, \quad m_p = \frac{M_p}{m_{co} L}, \quad \gamma = \frac{a}{L}, \quad m_c = f(x) dx,$$

$$c_f = \frac{C_f L^3}{EI T_c}, \quad k_f = \frac{K_f L^5}{EI_o}, \quad q = \frac{Q L^4}{EI_o}, \quad v = V/L, \quad u = U/L$$

$$w = \frac{W(t)}{L}, \quad m_{cg} = \frac{m_{co} g L^3}{EI_o}, \quad j_i = J_i / (m_{co} L^3) \quad (5.2.9)$$

Yukarıda verilen (5.2.8) denkleminde

$$F_{mn} = f_{mn} + \sum_i m_i u_m(x_i) u_n(x_i) + \sum_i j_i u'_m(x_i) u'_n(x_i)$$

$$C_{mn} = c_{mn} + 2 b_{mn} + a_{mn} - h_{mn}(1) + h_{mn}(0)$$

$$E_m = e_m + \sum_i m_i x_i u_m(x_i) + \sum_i j_i u'_m(x_i) \quad (5.2.10)$$

kısaltmaları yapılırsa denklem

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_{mn} \ddot{\bar{T}}_n + c_c \sum_{n=1}^{\infty} g_{mn} \dot{\bar{T}}_n + \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \bar{T}_n + E_m \ddot{\Theta} =$$

$$= -d_m \ddot{u}_g - \sum_i m_i u_m(x_i) \ddot{u}_g + p_c u_m(x_i) + p_d t_m$$

(5.2.11)

gibi elde edilecektir. Sistemin hareketine ait denklem takımını oluşturmak için (5.2.5), (5.2.6), ve (5.2.11) hareket denklemleri birleştirilerek matris formda yazılırsa

$$\underset{\sim}{M} \ddot{\underset{\sim}{V}} + \underset{\sim}{C} \dot{\underset{\sim}{V}} + \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{V} = \underset{\sim}{F} \quad (5.2.12)$$

elde edilir. Burada $\underset{\sim}{V}^T = [w, \Theta, \bar{T}_1, \bar{T}_2, \bar{T}_3, \dots]$ olarak belirtilebilir. Sistemin hareket denklemi (5.2.12) plak-kolon sisteminin küçük genlikli hareketini

göstermesine rağmen, gerçekte zeminin çekme gerilmeleri almama özelliğinden dolayı oldukça yüksek mertebeden doğrusal olmayan bir diferansiyel denklem takımıdır. Yukarıda (5.2.11) ile verilen denklem takımındaki kütle, sönüm, rijitlik ve yük matrisleri koordinat fonksiyonunun ilk iki teriminin alınmasıyla aşağıda verilmiştir.

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} m_c + \sum_i m_i + m_p & & & \\ & m_p \gamma^2 / 4 & & \\ & E_1 & F_{11} & F_{12} \\ & E_2 & F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \quad (5.2.13)$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} c_f \gamma^2 (\pi - \beta + \sin \beta \cos \beta) & 2c_f \gamma^3 s_t \sin^3 \beta / 3 & & \\ 2c_f \gamma^3 s_t \sin^3 \beta / 3 & 2c_f \gamma^4 (\pi - \beta + \sin 4\beta / 4) / 2 & & \\ & & c_c g_{11} & c_c g_{12} \\ & & c_c g_{21} & c_c g_{22} \end{bmatrix} \quad (5.2.14)$$

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} k_f \gamma^2 (\pi - \beta + \sin \beta \cos \beta) & 2k_f \gamma^3 s_t \sin^3 \beta / 3 & -u_1''(0) & -u_2''(0) \\ 2k_f \gamma^3 s_t \sin^3 \beta / 3 & k_f \gamma^4 (\pi - \beta + \sin 4\beta / 4) / 2 & C_{11} & C_{12} \\ & & C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \quad (5.2.15)$$

$$\tilde{F} = \left\{ \begin{array}{c} \pi q \gamma^2 + (m_c + \sum_i m_i + m_p) m_{cg} \\ 0 \\ -d_1 \ddot{u}_g - \sum_i m_i u_1(x_i) \ddot{u}_g + p_c u_1(x_i) + p_d t_1 \\ -d_2 \ddot{u}_g - \sum_i m_i u_2(x_i) \ddot{u}_g + p_c u_2(x_i) + p_d t_2 \end{array} \right\} \quad (5.2.16)$$

5.3. Temelde Ayrılma Anında Durum

Şekil 5.3.1 de görüldüğü gibi kolon üst ucunda statik F_s yatay kuvveti etki ederse sistemin dengesine ait denklemler

$$(M_c + M_p + \sum_i M_i)g + \pi a^2 Q = K_f \pi a^2 W = F_f \quad (5.3.1)$$

$$F_s L = 2 K_f a^3 \frac{a\theta}{16} 2\pi = M_f \quad (5.3.2)$$

olarak yazılabilir. (5.3.2) denkleminde F_s yalnız bırakılarak $\theta = W/a$ ve W için de (5.3.1) deki eşitinin yazılmasıyla

$$F_s = \frac{a}{4L} [M_c + M_p + \sum_i M_i] g + \pi a^2 Q \quad (5.3.3)$$

eşitliğine varılır ve burada eşitliğin iki tarafı da L^2/EI_o ile çarpılarak düzenlenmiş olarak yazılırsa

$$f_s = F_s L^2 / (EI_o) = \frac{\gamma}{4} m_{cg} [m_c + m_p + \sum_i m_i] + \frac{\pi \gamma^3 q}{4} \quad (5.3.4)$$

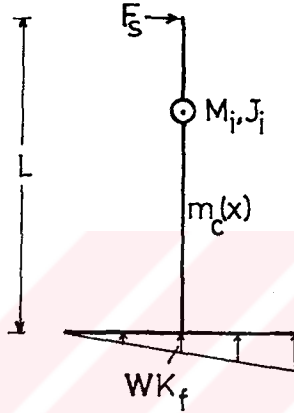
ifadesiyle kolon ucundaki yatay kuvvet boyutsuz olarak elde edilir. f_s kuvvetinin uygulandığı kolon ucundaki toplam yerdeğiştirme ise

$$v_s = \frac{f_s}{3} + \frac{4 f_s}{k_f \pi \gamma^4} \quad (5.3.5)$$

ile verilebilir. Burada birinci terim kolonun elastik yerdeğiştirmesinden, ikinci terim ise temel dairesel plağının θ dönmesinden dolayı olan yatay yerdeğiştirme-
dir. Sabit kesit için kolonun elastik yerdeğiştirmesi

$$u_s = \frac{U_s}{L} = \frac{F_s L^3 / 3EI_o}{L} = \frac{1}{3} f_s \quad (5.3.6)$$

olarak verilebilir.



Şekil 5.3.1 Temelden ayrılma durumunda
zemin gerilmeleri

5.4. Dairesel Plağın Düşey Statik Yerdeğiştirmesi

Dairesel plağın statik durum için rijit çökmesi

$$W_s = \frac{\pi Q a^2 + [\sum_i M_i + M_c + M_p] g}{\pi a^2 K_f} \quad (5.4.1)$$

ile belirir. Burada $w_s = W_s / L$ yazılır ve düzenlenirse
(5.4.1) eşitliği boyutsuz olarak

$$w_s = m_{cg} [m_c + \sum_i m_i + m_p] \frac{1}{k_f r^2 \pi} + \frac{q}{k_f} \quad (5.4.2)$$

şeklini alır. Elde edilen bu w_s değeri dairesel plağın
düşey statik yerdeğiştirmesidir.

5.5. Plak-Kolon Sisteminin Harmonik Dış Etki Altında Davranışı

Bu bölümde incelenen plak-kolon sisteminin serbest ve zorlanmış titreşimine ilişkin olarak elde edilen sonuçlar [58-61] verilmiştir. Bu çalışmalarda kolon ucunda bir toplu kütle olması durumunda, kolona bir başlangıç yerdeğiştirmesi verilmesiyle, meydana çıkan serbest titreşime ait şekiller verilmiştir. Sistemin zorlanmış titreşimi; plak seviyesinde (tabanda) harmonik bir yer hareketi, kolon ucunda harmonik dış etki ve ayrıca deprem kaydı olarak da El Centro 1940 depreminin kuzey-güney bileşeninin etkimesi halleri için elde edilmiştir. Bu etkiler altında toplu kütlenin yanal yerdeğiştirmesi ve dairesel plağın düşey yerdeğiştirmesine ait spektrum eğrileri elde edilmiştir.

Burada Şekil 5.5.1 de de görüldüğü gibi kolon ucunda etkiyen harmonik dış etki durumunda sistemin zorlanmış titreşimleri [61] üzerinde durulacaktır. Kolon ucundaki toplu kütle ve dönme ataleti sırasıyla M_o ve J_o ile, harmonik dış etki ise

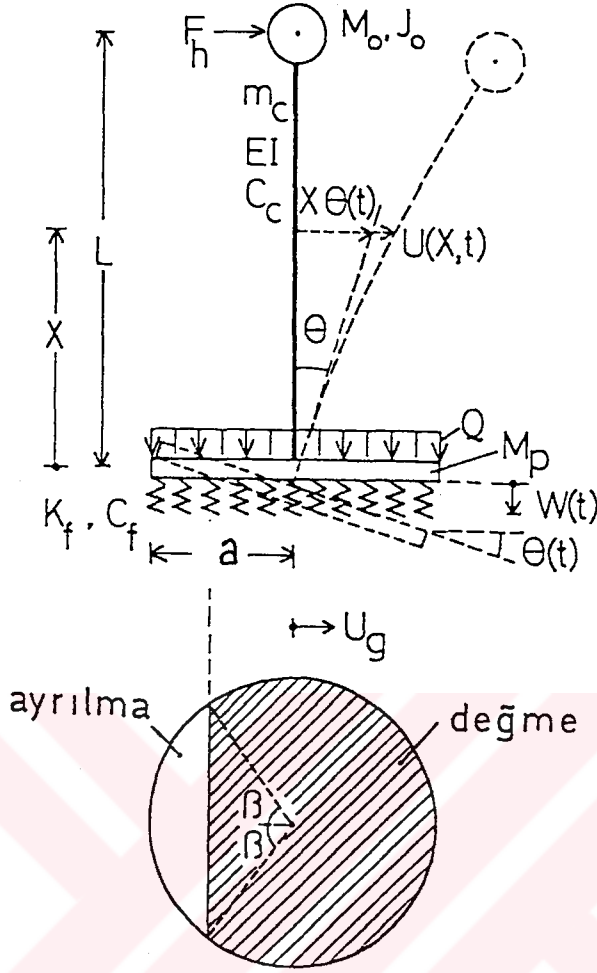
$$F_h = F_o \sin \omega_f t \quad (5.5.1)$$

ile gösterilirse; Bölüm 3 de (3.7.1.10) ve Bölüm 5 de (5.2.9), (5.3.4), (5.3.5) ve (5.4.2) ile verilen boyutsuz parametrelere ek olarak

$$m_o = \frac{M_o}{m_{co} L}, \quad j_o = \frac{J_o}{m_{co} L^3}, \quad f_o = \frac{F_o L^2}{EI_o},$$

$$f_h = f_o \sin [(\omega_f / \omega_c) 2\pi \tau] \quad (5.5.2)$$

yazılabilir. Burada f_o harmonik etkinin genliği, ω_f harmonik etkinin açısal frekansı ve ω_c ise kolonun parametrelerine bağlı olarak $\omega_c = 2\pi / T_c$ ile tanımlanmaktadır.



Şekil 5.5.1 Harmonik dış etki altındaki rijit plak-kolon sistemi

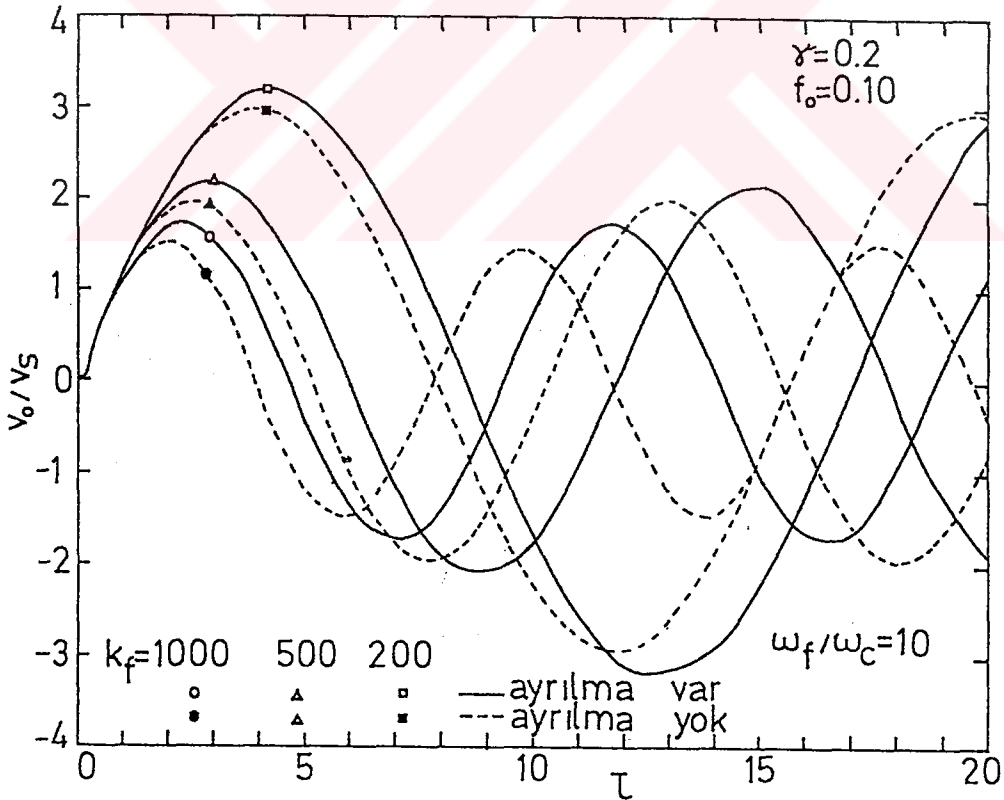
Sistemin (5.2.12) ile verilen hareket denklemindeki kütle, sönüm ve rijitlik matrisleri sırasıyla (5.2.13), (5.2.14) ve (5.2.15) de verildiği gibidir. Yanlız yük matrisi (5.2.16) ifadesi yerine aşağıda verildiği gibi ortaya çıkmaktadır.

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} \pi q \gamma^2 + (m_c + m_o + m_p) m_{cg} \\ 0 \\ f_h u_1(1) \\ f_h u_2(2) \end{bmatrix}$$

(5.5.3)

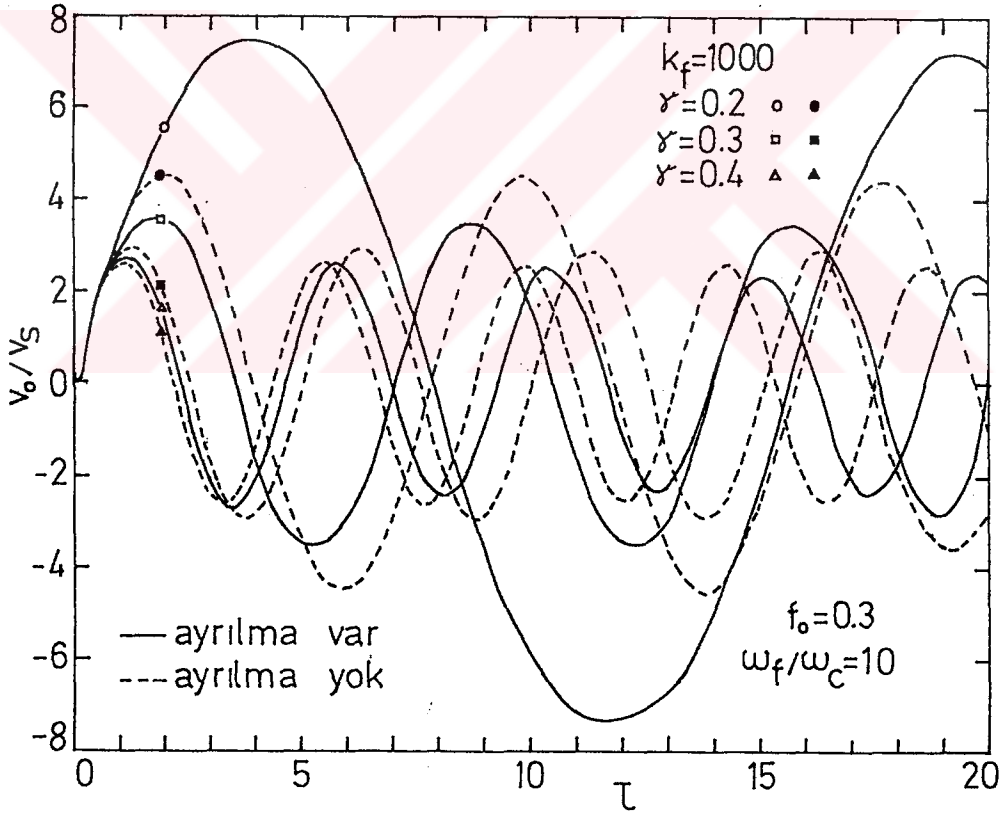
Sistem davranışının belirlenmesi için hazırlanan bilgisayar programında, hareket denkleminin çözümü doğrusal ivme değişimi yöntemiyle yapılmıştır. Parametre sayısının çokluğu nedeniyle $m_p = 2$, $m_o = 1$, $m_{cg} = 0.001$, $f_o = 0.01$, $q = 0.05$, $c_c = 0.0$ ve $c_f = 0.0$ değerleri kabul edilmiş, diğer parametreler değiştirilmiştir.

Kolon ucunda etkiyen harmonik kuvvetle zorlanan sistemde toplu kütlenin yanal yerdeğiştirmesinin zemin rijitliklerine bağlı olarak değişimi Şekil 5.5.2 de görülmektedir. Şekilde görülen v_o değeri Bölüm 5.3 de (5.3.5.) ile tanımlanmıştı. Zemin rijitliği azaldıkça yerdeğiştirmelerin arttığı, zeminden ayrılmaların hareketin periyodunu ve yerdeğiştirmeleri de arttırdığı şekilde anlaşılmaktadır. Zeminden ayrılma olmaması durumunda



Şekil 5.5.2 Çeşitli k_f değerleri için toplu kütlenin zorlanmış titreşiminde v_o yanal yerdeğiştirmesi

hareket sabit bir periyoda sahip iken, zeminden ayrılma-
ların ortaya çıkması durumunda, ayrılma alanının genişle-
mesi oranında hareketin periyodu da artmaktadır. Top-
lu kütlenin yanal yerdeğiştirmesinin sistem narinliği ile
ters orantılı olan γ ile değişimi Şekil 5.5.3 de veril-
miştir. Bu şeklin incelenmesinden sistem narinliğinin
büyük değerlerinde, temele uygulanan momentin büyük
olmasından, ayrılmanın daha erken belirttiği dolayısıyla
daha büyük yanal yerdeğiştirmelerin ortaya çıktığı,
alışlagelen Winkler zeminine göre yerdeğiştirmelerin çok
daha belirgin olarak arttığı görülmektedir. Zeminden

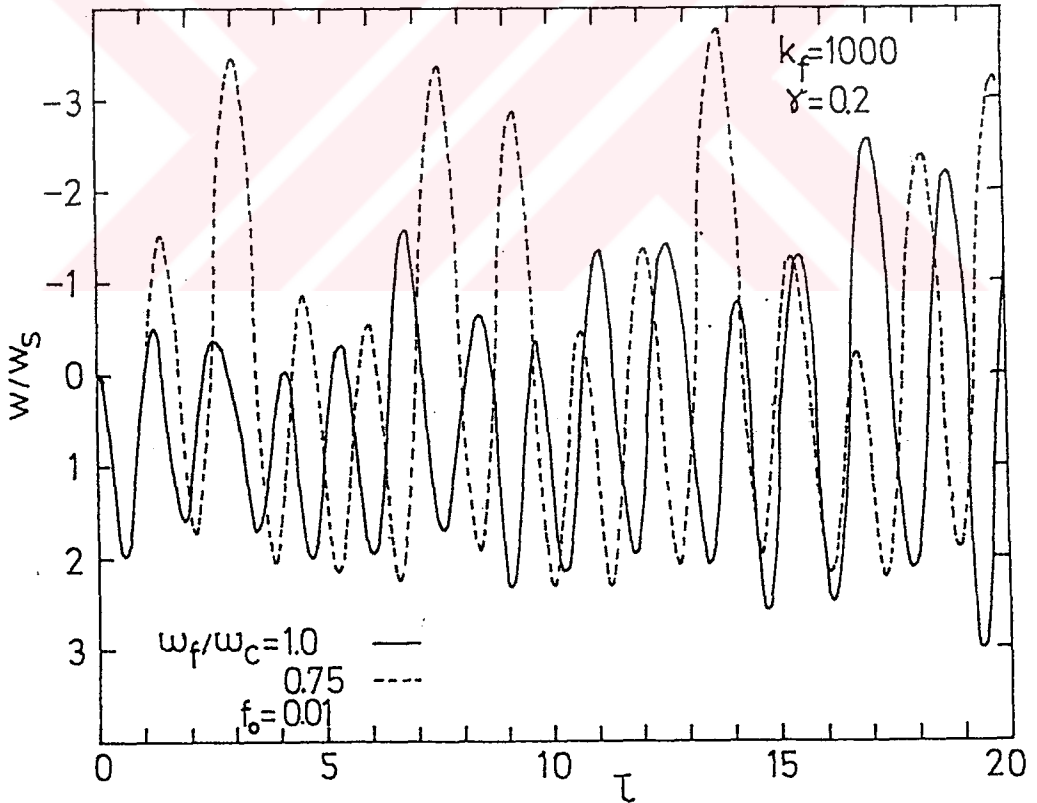


Şekil 5.5.3 Sistem narinliğine göre toplu kütlenin
 v_o yanal yerdeğiştirmesi

ayrılmaların hareketin periyodunu arttırmakta olduğunu bu şekilde de görmek mümkündür. Şekil 5.5.4 de ise plak merkezindeki düşey yerdeğiştirmelerin, hareketin boyutsuz frekansıyla değişimi görülmektedir. Burada boyutsuz frekans ω_f/ω_c ile verilmektedir. Paydadaki ω_c nin yerine eşitli olan $2\pi/T_c$ yazılmasıyla, boyutsuz frekans $\omega_f/\omega_c = \omega_f T_c / 2\pi$ şeklini alır. Bölüm 3 de T_c nin (3.3.1.14) ile verilen eşitinin yazılmasıyla

$$\omega_f/\omega_c = (\omega_f/2\pi) \sqrt{m_{co} L^4 / (EI_o)} \quad (5.5.1)$$

eşitliği elde edilir. Alt ucundan ankastre kolonun rezonans frekansları, kolonun frekansı $\omega_f = \omega_{kolon}$ olduğunda



Şekil 5.5.4 Plakın düşey yerdeğiştirmesinin boyutsuz frekansla değişimi

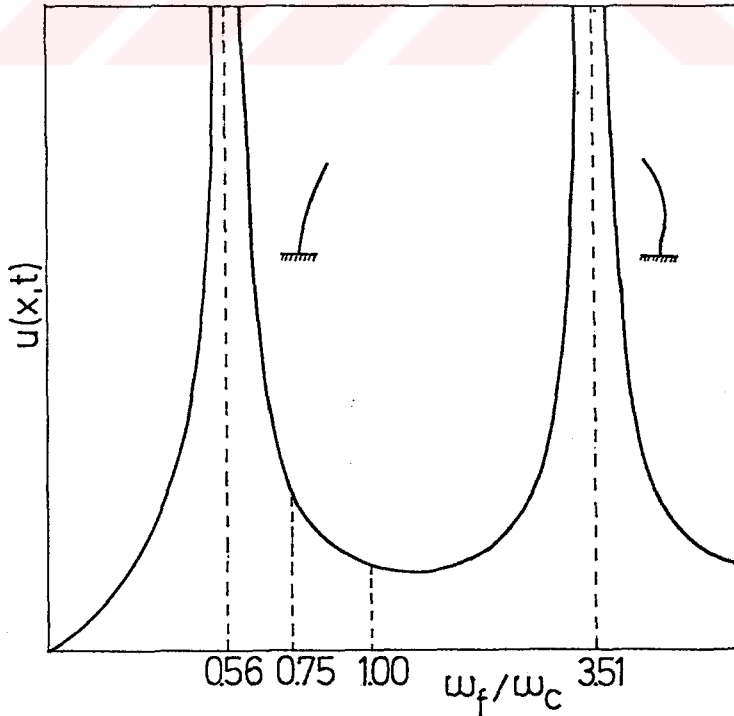
elde edilebileceğine göre ve kolonun birinci moduna ait frekans da

$$\omega_{\text{kolon}} = (1.875)^2 \sqrt{EI_o / (m_{co} L^4)} \quad (5.5.2)$$

[17] olarak yazılırsa, bu durumda (5.5.1) eşitliği

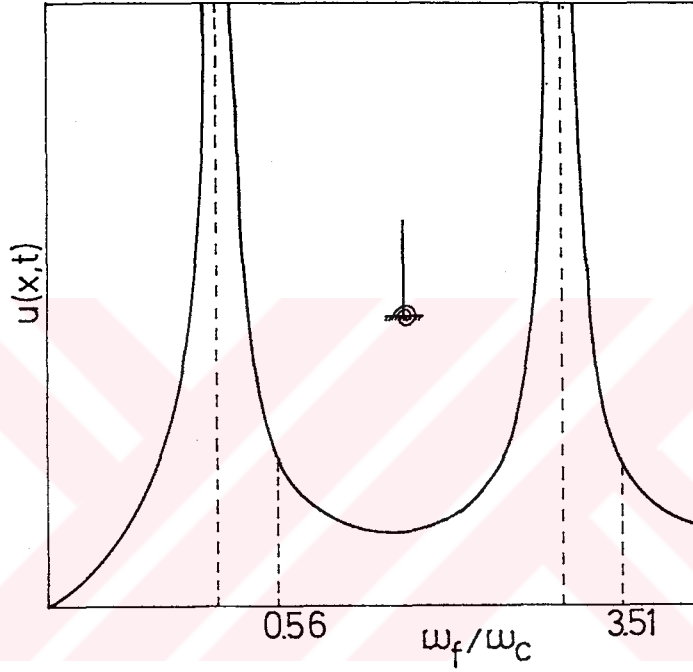
$$\omega_f / \omega_c = (1.875)^2 / 2\pi = 0.56 \quad (5.5.3)$$

şeklini alır. Kolonun ikinci ve üçüncü moduna ait boyutsuz rezonans frekansları da (5.5.3) e benzer şekilde sırasıyla 3.506 ve 9.82 olarak elde edilebilir. Konsol kolona ait olan bu rezonans frekansları Şekil 5.5.5 de görülmektedir. Mesnedinde dönme olan kolonun rezonans frekansları da yukarıda hesaplanan ve şekilde verilen değerlere yakın olacağından, $\omega_f / \omega_c = 0.75$ in $\omega_f / \omega_c = 1.0$ dan daha çok rezonans frekansına yakın olduğu anlaşılar. Bu ise genliklerin büyümesine karşı gelir. Boyutsuz frekansın küçülmesine bağlı olarak, plak merkezindeki düşey yerdeğiştirme büyümektedir. Konsol kolonun mesnedinde



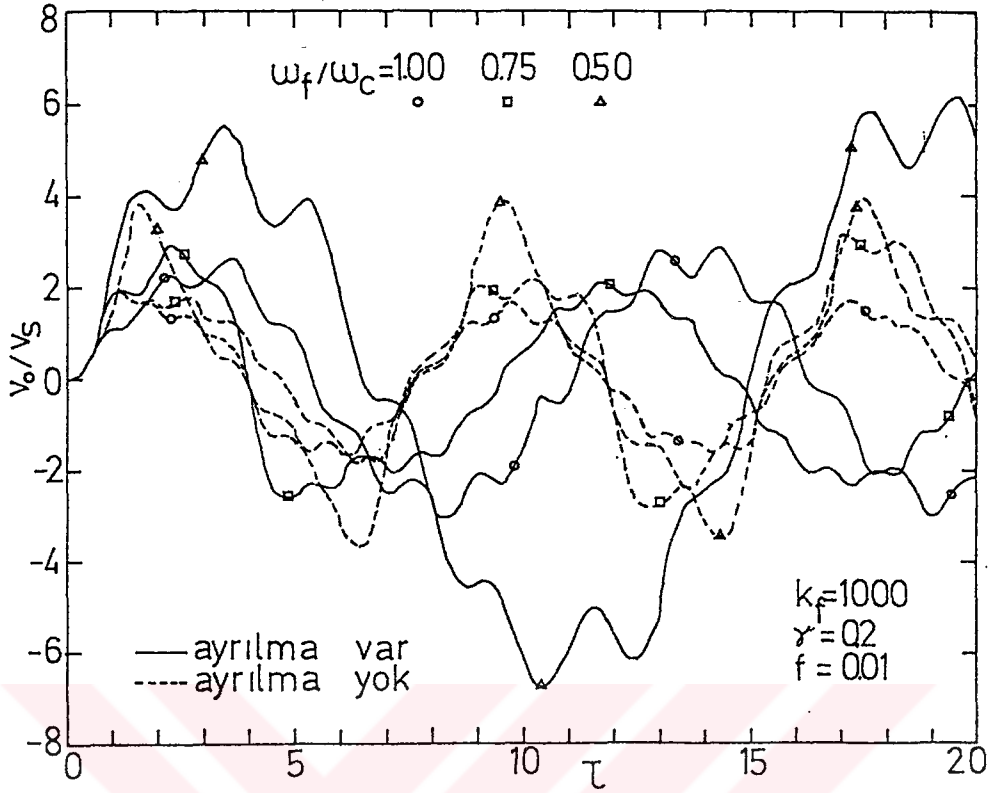
Şekil 5.5.5 Ankastre kolonda uç yerdeğiştirmesinin dış etki frekansı ile değişimi

dönme varsa, hareketin periyodu büyüyecek ve frekansları da küçülecektir. Dolayısıyla rezonans frekanslarının değerleri daha küçük olarak ortaya çıkacaktır. Dönme olması durumunda bu değerler istenilirse yine hesaplanabilir. Burada bu değerlerin hesabına girilmemiş olup, bu frekansların Şekil 5.5.6 da verildiği gibi konsol kolumnkilerden küçük olduğuna değinmekle yetinilecektir.



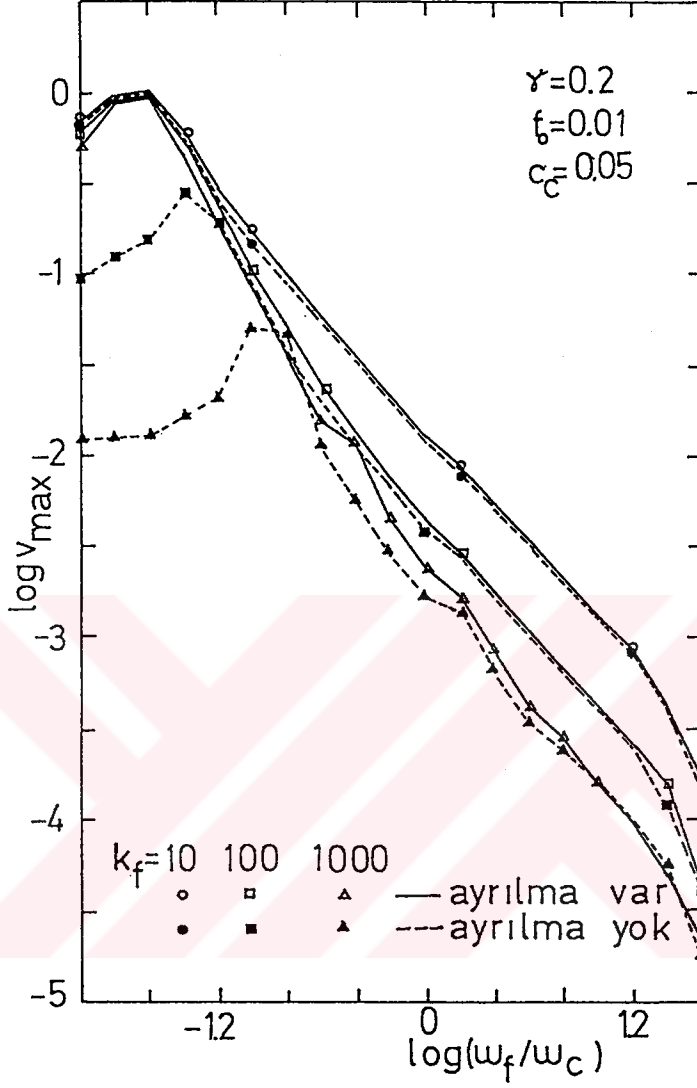
Şekil 5.5.6 Elastik ankastre çubuğun rezonans frekansları

Zeminden ayrılmalar gözönüne alındığında, sistemin yanal titreşimi yanında düşey titreşimi de ortaya çıkmaktadır. Bu titreşimler doğrusal olmayan davranıştan dolayı oldukça karmaşık bir görünüm sergilemektedir. Ancak Şekil 5.5.7 nin incelenmesinden bu değişimde sistemin yatay ve düşey titreşimlerinin etkisini fark etmenin mümkün olduğu görülmektedir. Bu değişimde iki tane titreşimin süperpozisyonu kolayca görülebilir. Bunlardan frekansı büyük olan düşey titreşimin ve frekansı küçük olan da yatay titreşimin etkisini göstermektedir.



Şekil 5.5.7 Toplu kütlenin v_0 yanal yerdeğiştirmesinin boyutsuz frekansla değişimi

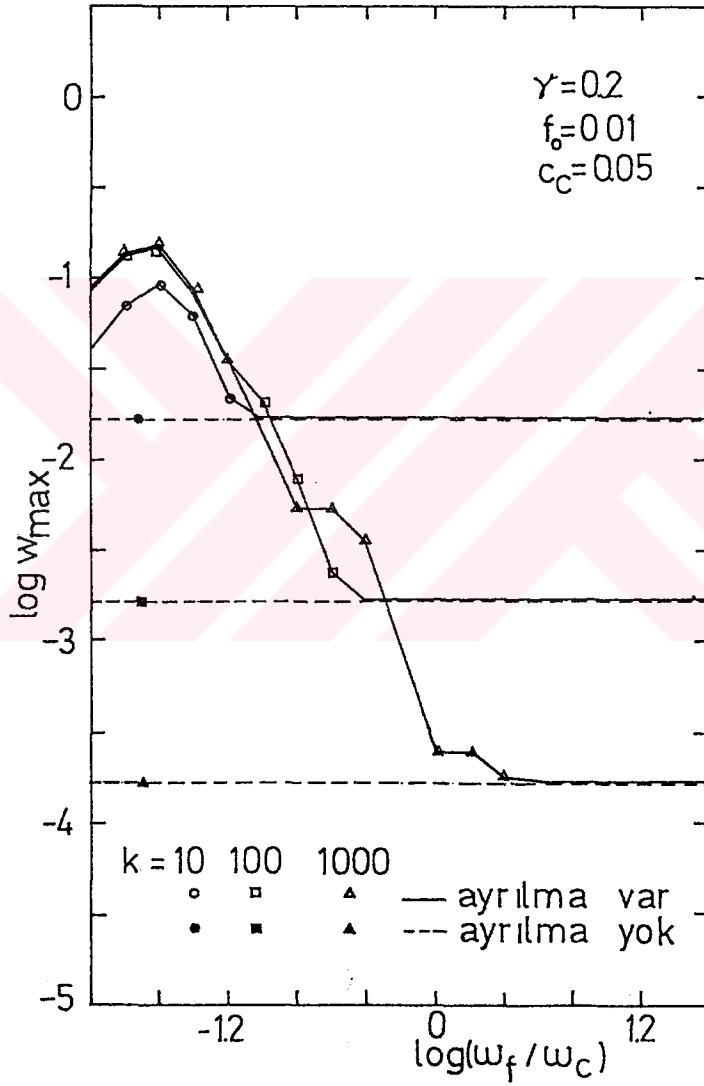
Şekil 5.5.8 de toplu kütlenin yanal yerdeğiştirmesinin maksimum genliğini göstermektedir. Zeminin yumuşak (zayıf) olması durumunda, zeminden ayrılma olması ve olmaması hallerine ait eğriler üst üste düşmektedir. Çünkü verilen durumda ayrılma ortaya çıkmamaktadır. En büyük değerler uygulanan kuvvetin frekansının sistemin serbest titreşim frekansına yaklaştığında ortaya çıkmaktadır. Rezonans frekansı, zemin sertleştikçe büyümekte ve zemin yumuşadıkça da küçülmektedir. Sönüm olduğundan rezonans değerleri sonlu kalmaktadır. Şekil 5.5.9 da plağın düşey yerdeğiştirme spektrum eğrileri çeşitli zemin rijitlikleri için verilmiştir. Alışlagelen Winkler zemini durumunda üst yapıdan gelen yüklerden dolayı, başlangıçta bir düşey yerdeğiştirme olacak ve daha sonra dış



Şekil 5.5.8 Toplu kütlenin yanal yerdeğiştirme spektrumu

etkiler altında plak sabit genlikli serbest titreşim yapacaktır. Bu doğrultuda herhangi bir kuvvet olmadığı için, plak merkezinin hareketinin genliği zorlama frekansından bağımsız olacaktır. Ancak, ayrılma olması durumunda her iki yöndeki hareket denklemi birbiri ile ilgili olarak ortaya çıkacaktır. Bunun sonucu olarak

rezonans frekansının etkisi, düşey genlik spektrum eğrisinde de görülmektedir. Zorlamanın frekansı arttıkça, sistem zorlamayı takip edemeyeceği için genlikler küçülmemekte ve ayrılmanın var veya yok olma durumları arasındaki farklılık azalmaktadır. Statik denge konumu etrafında meydana gelen titreşim genliği de azalmaktadır.



Şekil 5.5.9 Plâğın düşey yerdeğiştirme spektrumu

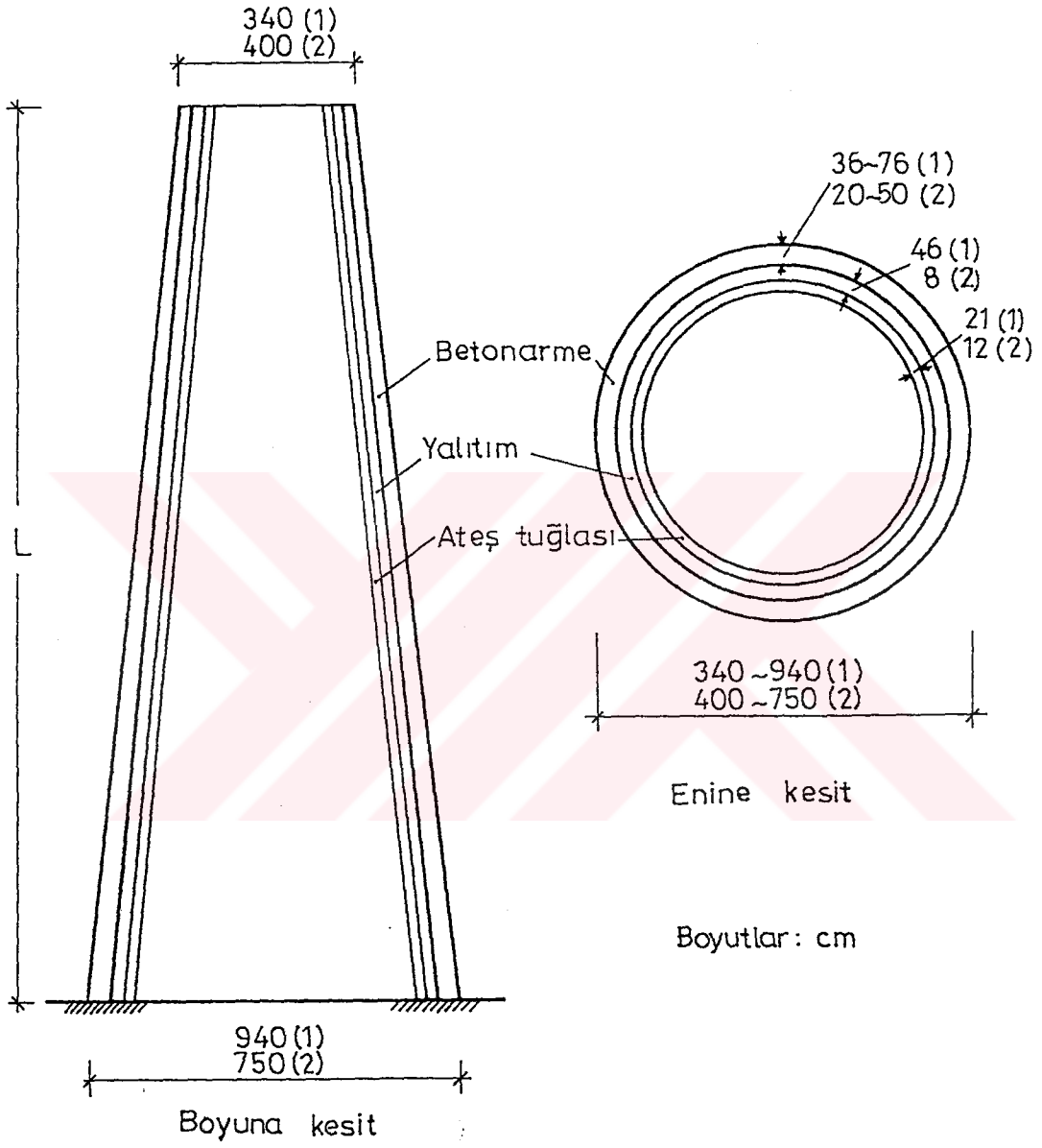
5.6. Sayısal Örnekler

Bu çalışmada gözönüne alınan dairesel rijit plak-kolon sistemi ve dairesel elastik plak-kolon sistemlerinin; kolonun sadece yayılı kütleli olması durumunda bir baca problemine, kolon yayılı kütleline ek olarak toplu kütleler de bulunduruyorsa televizyon kulesi, yüksek su deposu (su kulesi) v.b. gibi yapılara model oluşturduğu daha önce belirtilmişti. Burada ortaya konulan modellerle, çözümü başka yöntemlerle yapılan iki adet baca ve bir adet su kulesi problemi incelenecektir. Bu inceleme yukarıda adı geçen yapıların serbest titreşimine ait birinci modların bulunmasını içermektedir. Elde edilen sonuçlar daha önce elde edilenlerle karşılaştırılmıştır.

5.6.1. Baca Problemleri

5.6.1.1. 110 m Yükseklikli Baca

Kaynak [65,66] de ilk üç moda ait titreşim periyodu verilen baca buradaki model ve yöntemle çözümlenmiştir. Yukarıda belirtilen kaynaklardaki yöntem şöyle özetlenebilir. Konsol bir çubuk olarak modellendirilen bacada önce özel moda ait yerdeğiştirmeleri veren statik yükler tahmin edilmekte, daha sonra bu yüklerden meydana gelen statik yerdeğiştirmeler hesaplanmaktadır. Yeni statik yük olarak bir önceki adımda hesaplanan yerdeğiştirmelere ait atalet kuvvetleri alınmakta, benzer hesaplarda ardışık iki adımda birbirine yeter derecede yakın değerler bulununca hesaba son verilmektedir. Betti karşılıklı teoreminin kullanılmasıyla elde edilen doğal açısal frekans ifadesi, konsol çubuğun kütleline, uygulanan yük ve yerdeğiştirmelere bağlı olup, bu değerlerin yerlerine konulmasından sonra özel titreşim periyodları bulunmaktadır.



Şekil 5.6.1 Bacanın boyuna ve enine kesiti

Burada verilen model ve yöntemle bacanın incelenmesinde tabanda ankastreliğin sağlanması için, zeminin rijitliği çok büyük olan klasik Winkler zemini olduğu kabul edilmiş ve temel çapı da büyük tutulmuştur. Bacayı temsil eden kolonun ucuna verilen yanal bir başlangıç yerdeğiştirmesi ile sistemin serbest titreşimi sağlanmaktadır. Bacanın söz konusu kaynakta ilk üç moduna ait serbest titreşim periyodu bulunduğu halde, burada kolonun yerdeğiştirmesi için kullanılan koordinat fonksiyonu ifadesinde ilk üç terimin hesaba katılmasıyla birinci mod; ikinci ve üçüncü koordinat fonksiyonlarının katkısı ile belirlenmiş olmaktadır. İncelemekte olduğumuz bacalar için şematik boyuna ve enine kesitler Şekil 5.6.1 de görülmektedir. Şekilde (1) ile 110 m yükseklikli, (2) ile ise Bölüm 5.6.1.2 de çözümü yapılacak olan 75 m yükseklikli bacaya ait bilgiler verilmiştir.

Sisteme ait Bölüm 5.2 de verilen boyutsuz parametreleri kullanabilmek için öncelikle kütle ve atalet momenti değişimine ait ifadelerin elde edilmesi gerekir. Yükseklik boyunca bacanın kütlelerinin değişimi yaklaşık olarak

$$m_c(x) = \pi \gamma_c (r_d^2(x) - r_i^2(x)) = m_{co} \cdot f(x) \quad (5.6.1.1)$$

ile gözönüne alınmıştır. Burada γ_c bacada kullanılan betonarme betonun yoğunluğu, $r_d(x)$ ve $r_i(x)$ ise sırasıyla bacanın dış ve iç yarıçaplarının değişimini göstermektedir. Şekil 5.6.1 de verilen kesitlerden de görüldüğü gibi baca; kalınlığı doğrusal olarak değişen betonarme betonu, sabit kalınlıklı yalıtım malzemesi ve ateş tuğlasından meydana gelmektedir. Bu üç malzemenin de yoğunlukları farklı olduğundan, bu malzemelerin meydana getirdiği eşdeğer bir kalınlık bacanın tabanında ve ucunda hesap edilmiş ve bu kalınlıklar için tabanda ve tepede sırasıyla 104 cm ve 64 cm bulunmuştur. Böylece (5.6.1.1) ile verilen kütle değişimindeki $f(x)$ ve m_{co} ,
 $f(x) = 2.5407(1 - 0.6383x)^2 - 1.5407(1 - 0.7104x)^2$,

$m_{co} = 65554 \text{ kg/m}$ olarak hesaplanmıştır. Bacanın eğilme rijitliği hesaplanırken sadece betonarme kesit söz konusu olacağından, atalet momenti değişimi

$$I(x) = \frac{\pi}{4} \left[r_d^4(x) - r_i^4(x) \right] \quad (5.6.1.2)$$

gibi yazılabilir. Burada tabanda kesit kalınlığı 76 cm, bacanın ucunda ise 36 cm dir. Buna göre yarıçap değişimleri

$$r_d(x) = 4.70(1 - 0.6383x) \text{ m}, \quad r_i(x) = 3.94(1 - 0.66x) \text{ m},$$

olarak yazılır ve (5.6.1.2)'de yerlerine konulursa (3.3.1.11) yardımıyla atalet momentinin değişimi $I_o = 193.9823 \text{ m}^4$ olmak üzere $I(x) = I_o [1.9757(1 - 0.6383x)^4 - 0.9757(1 - 0.66x)^4]$ olarak elde edilir. Kütle ve atalet momenti değişimi belirlendikten sonra (5.2.9) ile verilen boyutsuz parametreler elde edilmiş ve çözüm sonuçlarıyla birlikte Tablo 5.6.1 de verilmiştir. Plak kalınlıkları 3.0 m, diğer parametreler $m_o = j_o = q = c_f = c_c = 0.0$ olarak alınmıştır.

Tablo 5.6.1 Bacaya Ait Boyutsuz Büyüklükler ve Hesaplanan 1.nci Moda Ait Titreşim Periyodları

γ	k_f	m_p	m_{cg}	$T_c(s)$	$T_1(s)$	$\frac{[65,66]}{T_1(s)}$
0.66	1000	16.53	0.210	1.535	1.996	1.96
0.45	1000	7.69	0.210	1.535	2.026	
0.30	1000	3.42	0.210	1.535	2.610	

Tablodan görüldüğü gibi 1.inci mod için hesaplanan titreşim periyodları γ nın çeşitli değerleri için elde edilmiştir. Sistem narinliğinin azalmasıyla tabanda ankastreliğin daha iyi sağlandığı görülmektedir. Buradaki problemde 1.nci moda ait periyot; baca ucuna tekil kuvvet uygulanmasıyla 1.96 s, deneme vektörleriyle 2.08 s olarak elde edilmiştir.

5.6.1.2 75 m Yükseklikli Baca

Bu bölümde [67] de çözümü [65,66] daki yöntemle çözülmüş olan bacanın hesabı yapılacak ve sonuçlar karşılaştırılacaktır. Bu bacanın kesitleri ve ilgili büyüklükleri de Şekil 5.6.1 de (2) ile verilmektedir. Bacanın kütle ve atalet momenti değişimi tamamen Bölüm 5.6.1.1 de verildiği gibi hesaplanmıştır. Yükseklik boyunca betonarme betonu, yalıtım malzemesi ve ateş tuğlasının değişimi 110 m yükseklikli bacanıninkine benzer şekildedir. Baca taban ve tepesinde hesaplanan eşdeğer halka kesit kalınlıkları sırasıyla 61cm ve 31cm bulunmuştur. Böylece kütle değişiminde $m = 33010 \text{ kg/m}$, $f(x) = 3.3459(1-0.467x)^2 - 2.3459(1-0.4618x)^2$ olarak hesaplanmıştır. Atalet momentinin hesabı için yarıçap değişimleri sırasıyla

$$r_d(x) = 3.75(1-0.467x)m, \quad r_i(x) = 3.25(1-0.4462x)m$$

olarak yazılabilir. Baca tabanındaki atalet momenti $I_0 = 67.6915 \text{ m}^4$ olmak üzere atalet momenti değişimi

$$I(x) = I_0 \left[2.2945(1-0.467x)^4 - 1.2945(1-0.446)^4 \right]$$

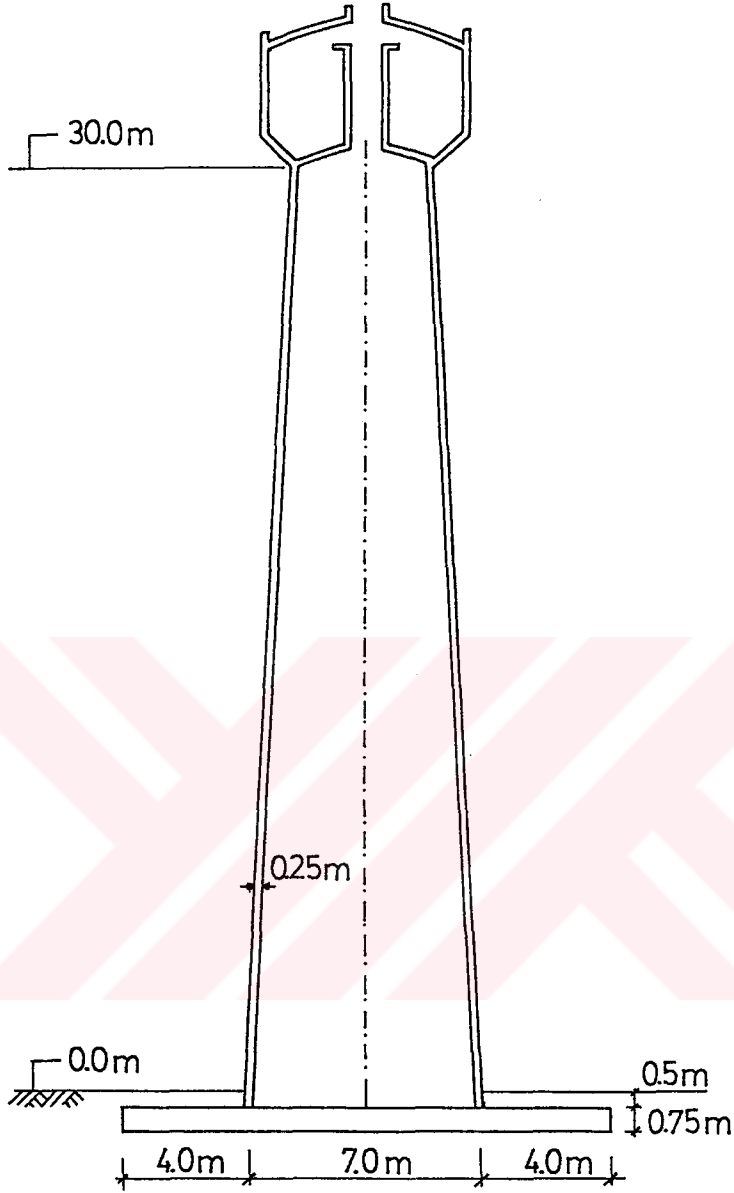
olarak elde edilir. γ değerinin 0.66, 0.45 ve 0.30 olması durumuna ait boyutsuz parametreler ve çözümler Tablo 5.6.2 de verilmiştir. Burada $m_0 = j_0 = q = c_c = c_f = 0.0$ olarak alınmıştır. [65] de deneme vektörleri ile 1.nci moda ait periyod 0.9764 s, doğrusal bir yayılı yük alınarak da 0.897 olarak elde edilmiştir.

Tablo 5.6.2 Bacaya Ait Boyutsuz Büyüklükler ve Hesaplanan 1.nci Moda Ait Titreşim Periyodları

γ	k_f	m_p	m_{cg}	$T_c (s)$	$T_1 (s)$	[67] $T_1 (s)$
0.66	1000	23.32	0.064	0.697	0.920	0.9764
0.45	1000	10.84	0.064	0.697	0.948	
0.30	1000	4.82	0.064	0.697	1.227	

5.6.2 Su Kulesi Problemi

İller Bankası tarafından Adapazarı'nda yapımı 1980 yılında bitirilen, 100m³ lük yüksek bir su deposu (su kulesi) mevcuttur. Depo tabandan itibaren doğrusal olarak daralan silindirik bir kabuk üzerine oturmaktadır. Silindirik kabuk sabit kalınlıklı dairesel bir plağa mesnetlenmektedir. Bu su kulesinin statik ve dinamik özellikleri deneysel ve sayısal olarak [68] de verilmiştir. Adı geçen çalışmada deponun boş olması durumunda birinci mod periyodu, depo dolu iken ise ilk iki moda ait periyodlar Newmark Yöntemi ile hesaplanmıştır. Burada verilen, ucunda toplu kütle bulunan konsol bir kolon-plak sistemi olarak idealleştirilen su kulesinin birinci moduna ait periyodlar deponun boş ve dolu olması halleri için hesaplanmıştır. İlgili referansta problemin çözümünde konsol çubuk idealleştirmesi yapıldığından, zemin yaylarının rijit alınması yanında plağın rijitliği de yüksek tutulmuştur. Su kulesinin kütle ve atalet momentinin değişimi aşağıda verilmiştir. Deponun tipik kesiti Şekil 5.6.2 de görülmektedir. Deponun geometrisine ait büyüklükler aşağıdaki gibidir. Depoyu taşıyan kabuğun;



Şekil 5.6.2 Su kulesinin boy kesiti

dış ve iç yarıçapının yükseklikle değişimleri sırasıyla $r_d(x) = 3.625(1-0.4083x)m$, $r_i(x) = 3.375(1-0.4385x)m$ ile, kütle değişimi $m_c(x) = 13195(1-0.423x) kg/m$, yüksekliği $L = 30.5 m$, ve atalet momenti değişimi $I(x) = I_g(x)$ olmak

üzere değişim fonksiyonu $g(x)=4.022(1-0.4083x)^4-3.022(1-0.439x)^4$ olarak yazılabilir. Tabandaki atalet momenti $I_o = 33.7169 \text{ m}^4$ ve elastisite modülü $E= 2.1 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ olarak alınmıştır. Sisteme ait boyutsuz büyüklükler ve elde edilen sonuçlar Tablo 5.6.3 de verilmiştir. Burada $j_o=c_c=c_f= 0.0$ olarak alınmıştır. [68] de depo boş iken $T_1 = 0.308 \text{ s}$, depo dolu iken 0.417 s olarak hesaplanmıştır.

Tablo 5.6.3 Su Kulesine Ait Boyutsuz Büyüklükler ve 1.nci Mod İçin Hesaplanan Serbest Titreşim Periyodları

Depo	γ	k_f	m_p	m_{cg}	m_o	$T_c \text{ (s)}$	$T_1 \text{ (s)}$	[68] $T_1 \text{ (s)}$
Boş	0.66	1000	25.76	0.008	0.164	0.163	0.338	0.308
	0.45	1000	11.97	0.008	0.164	0.163	0.348	
	0.217	1000	0.70	0.008	0.164	0.163	0.536	
Dolu	0.66	1000	25.76	0.008	0.413	0.163	0.438	0.417
	0.45	1000	11.97	0.008	0.413	0.163	0.452	
	0.217	1000	0.70	0.008	0.413	0.163	0.715	

BÖLÜM 6

DAİRESEL ELASTİK PLAK-KOLON SİSTEMİ

6.1 Giriş

Bu bölümde incelenen sistem Şekil 6.1 de de görüldüğü gibi yay katsayısı K_f , sönümü C_f olan çekme gerilmeleri almayan Winkler zeminine oturan yarıçapı a , birim alan için kütlesi ρh , eğilme rijitliği D olan elastik bir dairesel plak ile bu plağa merkezinde mesnetlenen birim boyunun kütlesi m_c , eğilme rijitliği EI ve sönümü C_c olan bir kolondan oluşmaktadır. Kolon, üzerinde M_i toplu kütlelerini taşımakta ve bu kütlelerin J_i dönme ataletleri de gözönüne alınmaktadır. Ayrıca plak şiddeti Q olan düzgün yayılı bir yük etkisindedir.

6.2. Sistemin Hareket Denklemi

6.2.1 Dairesel Plak Merkezinde Düşey Denge

Şekil 6.2 de görüldüğü gibi düşey kuvvet dengesi

$$P(t) = (M_c + \sum_i M_i) (g - \ddot{W}) \Big|_{W(R=0, \theta=0)} = P_1(t) \quad (6.2.1.1)$$

olarak yazılabilir.

Burada $P(t)$ plağa merkezinde etki eden düşey kuvveti, W plak yerdeğiştirme ifadesinin zamana göre ikinci türevini ve M_c ise kolonun toplam kütlesini belirtmekte olup

$$M_c = \int_0^L m_c(X) dX = m_{co} L \int_0^1 f(x) dx \quad (6.2.1.2)$$

gibi yazılabilir. Dairesel plağın (4.3.2.1) ile verilen yerdeğiştirme ifadesinin zamana göre ikinci türevi alınır

$$\ddot{w}(r, \theta, t) = \ddot{T}_0 + \ddot{T}_1 r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} \ddot{T}_n [J_n(\lambda_{n1} r) + A_{n1} I_n(\lambda_{n1} r)] \cos n\theta \quad (6.2.1.3)$$

eşitliği elde edilir. Eğer (6.2.1.2) eşitliği (6.2.1.1) de yerine konulursa

$$m_{co} L \left(\int_0^1 f(x) dx + \sum_i m_i \right) \left[g - \frac{a}{T_p^2} \ddot{w}(r, \theta, \tau) \right] \Big|_{w(r=0, \theta=0, \tau)} = P(\tau) \quad (6.2.1.4)$$

eşitliğine varılır. Burada düzenleme yapılarak (6.2.1.4) eşitliği tekrar yazılırsa

$$\frac{1}{m_{pc}} \left(m_c + \sum_i m_i \right) [m_{pg} - \ddot{w}(r, \theta, \tau)] \Big|_{w(r=0, \theta=0, \tau)} = p^* \quad (6.2.1.5)$$

ifadesine varılır. Burada boyutsuz değerler

$$m_{pc} = \rho h a^2 / (m_{co} L) \quad (6.2.1.6)$$

ile, m_{pg} ve p^* ise daha önce (4.3.2.14) te verildiği gibidir. Kolon daireysel plağa $r=0$, $\theta=0$ da mesnetlendiğinden (6.2.1.5) ifadesindeki $w(r, \theta, \tau)$ terimi (6.2.1.3) ifadesi yardımıyla

$$\ddot{w}(0, 0, \tau) = \ddot{T}_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \ddot{T}_n [J_n(0) + A_{n1} I_n(0)] \quad (6.2.1.7)$$

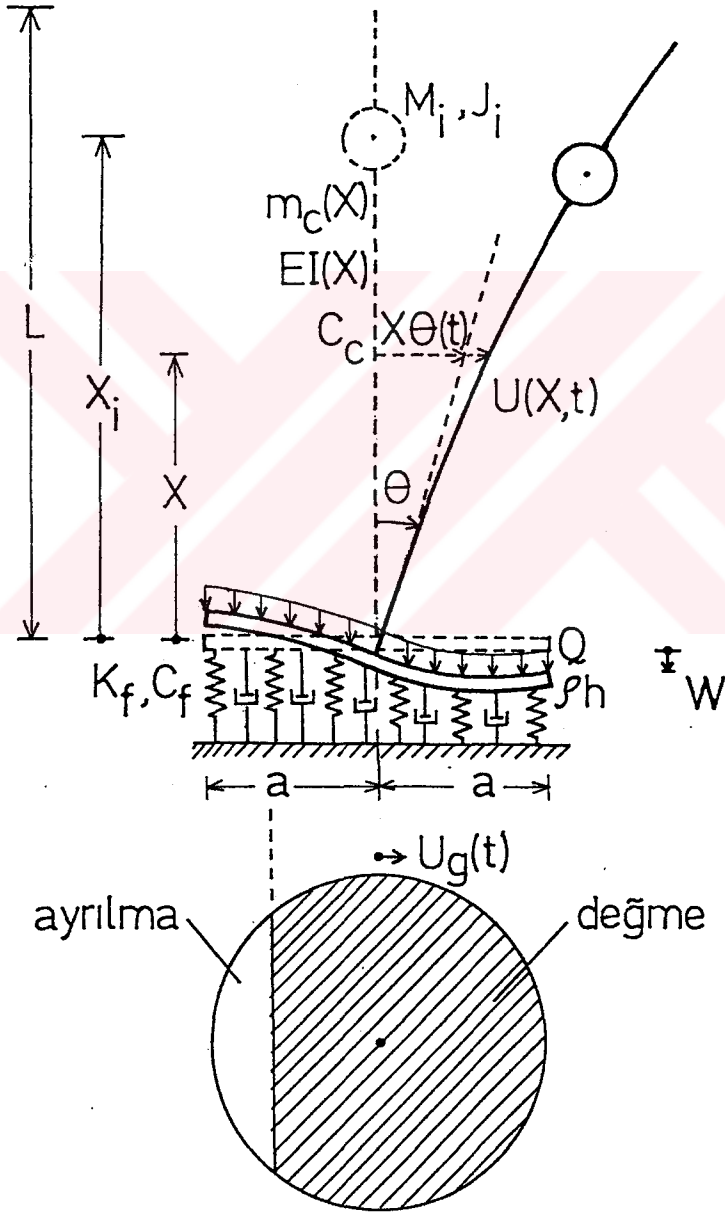
şeklını alır ve burada

$$[J_n(0) + A_{n1} I_n(0)] = F_n, \quad (m_c + \sum_i m_i) / m_{pc} = \varphi \quad (6.2.1.8)$$

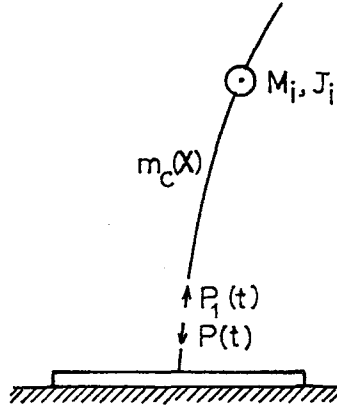
olarak kabul edilirse (6.2.1.5) eşitliği

$$\varphi \left(m_{pg} - \ddot{T}_0 - \sum_{n=0}^{\infty} F_n \ddot{T}_n \right) = p^* \quad (6.2.1.9)$$

olarak elde edilmiş olur.



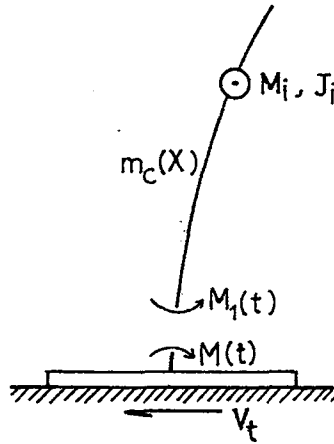
Şekil 6.1 Elastik dairesel plak-kolon sistemi



Şekil 6.2 Plak-kolon sisteminde düşey denge

6.2.2 Dairesel Plak Merkezinde Moment Dengesi

Şekil 6.3 de görüldüğü gibi kolonun plağa mesnetlendiği yerde ($r=0, \theta=0$) moment dengesini



Şekil 6.3 Plak-kolon sisteminde moment dengesi
ve taban kesme kuvveti

$$M_1 - M(t) = 0 \quad (6.2.2.1)$$

olarak yazmak mümkündür. Burada moment eğrilik arasındaki bağıntıdan

$$M_1 = EI_0 g(X) \frac{\partial^2 U(X,t)}{\partial X^2} \Big|_{X=0} \quad (6.2.2.2)$$

yazılır ve $U(X,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_n U_n(X)$, $u=U/L$, $x=X/L$ konularak

iki taraf $1/D$ ile çarpılırsa (6.2.2.2) eşitliği

$$\frac{M_1}{D} = g(x) \Big|_{x=0} \frac{EI_0}{DL} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_n u_n''(x) \Big|_{x=0} \quad (6.2.2.3)$$

olarak ifade edilir. Burada boyutsuz χ değeri aşağıdaki

$$\chi = EI_0 / (D L) \quad (6.2.2.4)$$

gibi verilirse ve $g(x) \Big|_{x=0} = 1$ olduğundan (6.2.2.3) eşitliği

$$\chi \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_n u_n''(x) \Big|_{x=0} = m^* \quad (6.2.2.5)$$

şeklini alacaktır. Burada m^* daha önce (4.3.2.14) ile verildiği gibidir.

6.2.3 Denklemlerin Birleştirilmesi

İncelenmekte olunan sistemle ilgili olarak burada; kolonun ve dairesel plağın hareket denklemleri, kolon ve dairesel plağın birleşim noktasında düşey denge ve moment dengesi için yazılmış denklemler olmak üzere dört ayrı denklem yazılmıştır. Burada esas itibarıyla iki ana denklem vardır. Kolonun hareket denklemi ile

plağın hareket denklemi. Sistemin hareket denklemi yazılmak istenince sistemde sürekliliğin sağlanması için bileşim noktasında düşey kuvvet ve moment dengesi denklemleri yazılmış (6.2.1.9) ve (6.2.2.5) ile verilen boyutsuz normal kuvvet ve moment ifadeleri elde edilmiştir. Bu boyutsuz değerler dairesel plak için elde edilmiş olan (4.3.3.2.11), (4.3.3.3.8) ve (4.3.3.4.12) denklemlerinde yerlerine konulur ve düzenlenirse

$$\begin{aligned}
 (\pi + \varphi) \ddot{\bar{T}}_0 + \sum_{n=0}^{\infty} F_n \varphi \ddot{T}_n + c_f A_{11} \dot{\bar{T}}_0 + c_f A_{12} \dot{\bar{T}}_1 + \\
 + c_f A_{1,n+3} \dot{T}_n + k_f A_{11} \bar{T}_0 + k_f A_{12} \bar{T}_1 + k_f \sum_{n=0}^{\infty} A_{1,n+3} T_n = \\
 = \pi q + (\pi + \varphi \gamma) m_{pg} \quad (6.2.3.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi}{4} \ddot{\bar{T}}_1 + c_f A_{21} \dot{\bar{T}}_0 + c_f A_{22} \dot{\bar{T}}_1 + c_f \sum_{n=0}^{\infty} A_{2,n+3} \dot{T}_n + k_f A_{21} \bar{T}_0 + \\
 + k_f A_{22} \bar{T}_1 + \sum_{n=0}^{\infty} k_f A_{2,n+3} T_n - \chi \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_n u_n''(x) = 0 \quad (6.2.3.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_m \varphi \ddot{\bar{T}}_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (F_m F_n \varphi + \delta_{mn} E_{mn}) \ddot{T}_n + c_f A_{m+3,1} \dot{\bar{T}}_0 + \\
 + c_f A_{m+3,2} \dot{\bar{T}}_1 + c_f \sum_{n=0}^{\infty} A_{m+3,n+3} \dot{T}_n + k_f A_{m+3,2} \bar{T}_0 + \\
 + k_f A_{m+3,2} \bar{T}_1 + \sum_{n=0}^{\infty} (k_f A_{m+3,n+3} + \lambda_{n1}^4 \delta_{mn} E_{mn}) T_n - \\
 - G_m \chi \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_n u_n''(x) = F_m \varphi m_{pg} \quad (6.2.3.3)
 \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir.

Ayrıklaştırılmış yapıdaki kolon denklemi (3.3.1.1.5) ile verilmişti. Bu ifadelerde sistemin sürekliliğin sağlanması için yapılması gereken $\theta(t)$ ile belirtilen dönme terimi yerine dairesel plağın birleşim noktasındaki ($r=0, \theta=0$) dönmenin eşitinin yazılmasıdır. Bu eşitlik

$$\theta = w' (r=0, \theta=0) \quad (6.2.3.4)$$

olarak yazılabilir. Plak merkezindeki dönme dairesel plak çözümünden yerdeğiştirme (4.3.2.1) ifadesinin argümana göre türevinin alınmasıyla (4.6.1) de verilmiştir. Yukarıda (6.2.3.4) ile verilen θ dönmesinin sözkonusu yerdeki eşiti (4.6.5) te yazılmıştır. Bu ifadenin zamana göre türevinin alınmasıyla

$$\ddot{\theta} = \ddot{T}_1 + \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \ddot{T}_n \quad (6.2.3.5)$$

eşitliğine varılır. Bu eşitlik (3.3.1.1.3) te yerine konulursa kolonun hareket denklemi

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} [\bar{\beta} f_{mn} + \bar{\beta} \sum_i m_i u_m(x_i) u_n(x_i) + \sum_i j_i u'_m(x_i) u'_n(x_i)] \ddot{T}_n + \\ & + [\bar{\beta} e_m + \bar{\beta} \sum_i m_i x_i u_m(x_i) + \sum_i j_i u'_m(x_i)] \ddot{T}_1 + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n [\bar{\beta} e_m + \bar{\beta} \sum_i m_i x_i u_m(x_i) + \sum_i j_i u'_m(x_i)] \ddot{T}_n + \\ & + c_c \sum_{n=1}^{\infty} g_{mn} \ddot{T}_n + \sum_{n=1}^{\infty} [c_{mn} + 2b_{mn} + a_{mn} - h_{mn}(1) + h_{mn}(0)] \ddot{T}_n + \\ & = - \bar{\beta} d_m \ddot{u}_g - \sum_i \bar{\beta} m_i u_m(x_i) \ddot{u}_g + p_c u_m(x_i) + p_d t_m \end{aligned} \quad (6.2.3.6)$$

şeklini alır ve (3.3.1.1.4) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \bar{F}_{mn} \ddot{\bar{T}}_n + \bar{E}_m \ddot{\bar{T}}_1 + \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \bar{E}_m \ddot{\bar{T}}_n + c_c \sum_{n=1}^{\infty} g_{mn} \dot{\bar{T}}_n + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{C}_{mn} \bar{T}_n = \\
& = -\bar{\beta} d_m \ddot{u}_g - \sum_i \bar{\beta} m_i u_m(x_i) \ddot{u}_g + p_c u_m(x_i) + p_d t_m
\end{aligned}$$

(6.2.3.7)

ifadesine varılır.

Böylece burada incelemekte olduğumuz sisteme ait hareket denklemi (6.2.3.1), (6.2.3.2), (6.2.3.3) ve (6.2.3.12) denklemlerinin birleştirilmesiyle elde edilecektir. Bu birleştirme yapılırsa sisteme ait hareket denklemi matris şeklinde

$$\begin{matrix} M & \ddot{V} & + & C & \dot{V} & + & K & V & = & F \\ \sim & \sim & & \sim & \sim & & \sim & \sim & & \sim \end{matrix} \quad (6.2.3.8)$$

olarak elde edilir. Burada bilinmeyenler vektörü

$$\begin{matrix} V^T \\ \sim \end{matrix} = [\bar{T}_1, \bar{T}_2, \bar{T}_3, \dots, \bar{T}_0, \bar{T}_1, T_1, T_2, T_3, \dots] \text{ olarak}$$

belirli olmaktadır. Sistemin denklem takımı (6.2.3.8), plak-kolon sisteminin küçük genlikli hareketini göstermesine ve doğrusal olarak görünmesine rağmen, gerçekte zeminin çekme gerilmeleri almama özelliğinden dolayı oldukça yüksek mertebeden doğrusal olmayan bir denklem takımı olarak ortaya çıkmaktadır. Aşağıda

(6.2.3.13) ile verilen sistemin denklem takımında görülen kütle, sönüm, rijitlik ve yük matrisleri sırasıyla verilmiştir. Rijitlik matrisi yazılırken $\bar{E}_{mn} = \lambda_{n1}^4 \delta_{mn} E_{mn}$ kısaltması yapılmıştır.

$$M = \begin{bmatrix} \bar{F}_{11} & \bar{F}_{12} & \bar{F}_{13} & \bar{E}_1 & \mu_0 \bar{E}_1 & \mu_1 \bar{E}_1 & \mu_2 \bar{E}_1 \\ \bar{F}_{21} & \bar{F}_{22} & \bar{F}_{23} & \bar{E}_2 & \mu_0 \bar{E}_2 & \mu_1 \bar{E}_2 & \mu_2 \bar{E}_2 \\ \bar{F}_{31} & \bar{F}_{32} & \bar{F}_{33} & \bar{E}_3 & \mu_0 \bar{E}_3 & \mu_1 \bar{E}_3 & \mu_2 \bar{E}_3 \\ & & & (\pi+\varphi) & - & F_0 \varphi & F_1 \varphi & F_2 \varphi \\ & & & - & \pi/4 & - & - & - \\ & & & F_0 \varphi & - & (F_0 F_0 \varphi + E_{00}) & (F_0 F_1 \varphi + E_{01}) & (F_0 F_2 \varphi + E_{02}) \\ & & & F_1 \varphi & - & (F_1 F_0 \varphi + E_{10}) & (F_1 F_1 \varphi + E_{11}) & (F_1 F_2 \varphi + E_{12}) \\ & & & F_2 \varphi & - & (F_2 F_0 \varphi + E_{20}) & (F_2 F_1 \varphi + E_{21}) & (F_2 F_2 \varphi + E_{22}) \end{bmatrix}$$

(6.2.3.9)

$$C = \begin{bmatrix} c_c g_{11} & c_c g_{12} & c_c g_{13} & c_f A_{11} & c_f A_{12} & c_f A_{13} & c_f A_{14} & c_f A_{15} \\ c_c g_{21} & c_c g_{22} & c_c g_{23} & c_f A_{21} & c_f A_{22} & c_f A_{23} & c_f A_{24} & c_f A_{25} \\ c_c g_{31} & c_c g_{32} & c_c g_{33} & c_f A_{31} & c_f A_{32} & c_f A_{33} & c_f A_{34} & c_f A_{35} \\ & & & c_f A_{41} & c_f A_{42} & c_f A_{43} & c_f A_{44} & c_f A_{45} \\ & & & c_f A_{51} & c_f A_{52} & c_f A_{53} & c_f A_{54} & c_f A_{55} \end{bmatrix}$$

(6.2.3.10)

$$K = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & & & \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & & & \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & & & \\ & -\chi u_1 & -\chi u_2 & -\chi u_3 & k_f A_{11} & k_f A_{12} & k_f A_{13} & k_f A_{14} & k_f A_{15} \\ & -G_0 \chi u_1 & -G_0 \chi u_2 & -G_0 \chi u_3 & k_f A_{21} & k_f A_{22} & k_f A_{23} & k_f A_{24} & k_f A_{25} \\ & -G_1 \chi u_1 & -G_1 \chi u_2 & -G_1 \chi u_3 & k_f A_{31} & k_f A_{32} & k_f A_{33} & k_f A_{34} & k_f A_{35} \\ & -G_2 \chi u_1 & -G_2 \chi u_2 & -G_2 \chi u_3 & k_f A_{41} & k_f A_{42} & k_f A_{43} & k_f A_{44} & k_f A_{45} \\ & -G_3 \chi u_1 & -G_3 \chi u_2 & -G_3 \chi u_3 & k_f A_{51} & k_f A_{52} & k_f A_{53} & k_f A_{54} & k_f A_{55} + \bar{E}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{F} = \left\{ \begin{array}{l} -\bar{\beta} d_1 \ddot{u}_g - \bar{\beta} \sum_i m_i u_1(x_i) \ddot{u}_g + p_c u_1(x_i) + p_d t_1 \\ -\bar{\beta} d_2 \ddot{u}_g - \bar{\beta} \sum_i m_i u_2(x_i) \ddot{u}_g + p_c u_2(x_i) + p_d t_2 \\ -\bar{\beta} d_3 \ddot{u}_g - \bar{\beta} \sum_i m_i u_3(x_i) \ddot{u}_g + p_c u_3(x_i) + p_d t_3 \\ \pi q + (\pi + \varphi) m_{pg} \\ 0 \\ F_0 \quad \varphi \quad m_{pg} \\ F_1 \quad \varphi \quad m_{pg} \\ F_2 \quad \varphi \quad m_{pg} \end{array} \right\} \quad (6.2.3.12)$$

6.3 Statik Çözüm

Plak-kolon sisteminin (6.2.3.13) ile matris formda en genel halde verilmiş olan hareket denkleminde türev içeren terimlerin terkedilmesiyle statik durum için matris formda

$$\tilde{K} \tilde{V} = \tilde{F} \quad (6.3.1)$$

denklemini kolayca elde edilir. Çözüm vektörü yine Bölüm 6.2.3 te verildiği gibidir. Burada $\tilde{K}$ rijitlik matrisi (6.2.3.16) ile verildiği gibidir, $\tilde{F}$ yük vektörü ise aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\tilde{F} = \left\{ \begin{array}{l} p_c u_1(x_i) + p_d t_1 \\ p_c u_2(x_i) + p_d t_2 \\ p_c u_3(x_i) + p_d t_3 \\ \pi q + (\pi + \varphi) m_{pg} \\ 0 \\ F_0 \quad \varphi \quad m_{pg} \\ F_1 \quad \varphi \quad m_{pg} \\ F_2 \quad \varphi \quad m_{pg} \end{array} \right\} \quad (6.3.2)$$

6.4 Taban Kesme Kuvveti

Şekil 6.3 de görüldüğü gibi verilen sistemde taban kesme kuvveti

$$V_i = \sum_i M_i \left[\ddot{U}_g(t) + \ddot{\Theta}(t)X + \ddot{U}(X,t) \right] \Big|_{X=X_i} + \int_0^L m_c f(X) dX$$

$$\left[\ddot{U}_g(t) + \ddot{\Theta}(t) X + \ddot{U}(X,t) \right] + M_p \ddot{U}_g(t) \quad (6.4.1)$$

ile belirtilebilir. Burada $u=U/L$, $x=X/L$ yazılarak her iki taraf L^2/EI_0 ile çarpılırsa (6.4.1) ifadesi

$$\frac{V_i L^2}{EI_0} = \bar{\beta} \sum_i m_i \left(\ddot{u}_g + \ddot{\Theta} x + \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_n u_n(x) \right) \Big|_{x=x_i} + \bar{\beta} \int_0^1 f(x) dx$$

$$\left(\ddot{u}_g + \ddot{\Theta} x + \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_n u_n(x) \right) + m_p \ddot{u}_g \quad (6.4.2)$$

şeklini alır. Burada Θ yerine (6.2.3.5) ile verilen eşiti yazılırsa

$$V_i = \bar{\beta} \sum_i m_i \left[\ddot{u}_g + x \left(\ddot{T}_1 + \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \ddot{T}_n \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_n u_n(x) \right] \Big|_{x=x_i} + \bar{\beta} m_c \left[\ddot{u}_g + x \left(\ddot{T}_1 + \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \ddot{T}_n \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{T}_n u_n(x) \right] + m_p \ddot{u}_g \quad (6.4.3)$$

ifadesi boyutsuz taban kesme kuvveti olarak elde edilir.

6.5. Plak-Kolon Sisteminin Dinamik Davranışı

Bölüm 6.2.3 de hareket denklem takımı (6.2.3.8) olan plak-kolon sisteminin davranışını incelemek üzere bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Daha önce Bölüm 4.7 de statik çözüm için hazırlanan programdan da faydalananlar olarak geliştirilen bu programda, (6.2.3.8) denklem takımının zaman bölgesinde çözümü için doğrusal ivme yöntemi kullanılmıştır [17]. Denklem takımının çözümü sonucunda ortaya çıkan $\bar{T}_0, \bar{T}_1, T_1, T_2, T_3, \dots$ zamana bağlı parametreleri (4.3.2.1) de yerine konularak plağın çökmeleeri, (4.5.5) de yerine konularak da plağın dönmesi belirlenmektedir. Kolonun yerdeğiştirmeleri ise çözüm vektöründe bulunan $\bar{T}_1, \bar{T}_2, \bar{T}_3, \dots$ zamana bağlı parametrelerin (5.2.7) de yerine yazılmasıyla elde edilmektedir. Sistemin davranışı elde edilirken, parametrik inceleme sonuçlarının sınırlı tutulması amacıyla, bazı sistem parametreleri için tipik bir su deposu gözönüne alınmış, $m_0 = 1, j_0 = 0.04, c_c = 0.05, T_p = 0.01445, m_{pg} = 0.001$ olarak sabit kabul edilmiş, plak yarıçapının kolon yüksekliğine oranı olan γ ya bağılı olan parametreler γ nın çeşitli değerleri için ilgili (3.3.1.16), (5.2.9), (6.2.1.6) ve (6.2.2.4) formüllerinin kullanılmasıyla Tablo 6.5.1 de verilmiştir. Sabit tutulan bu parametreler yanında diğer parametreler değiştirilerek sayısal hesaplar yapılmıştır. Sayısal hesaplarda, plak ve kolonun elastik yerdeğiştirmesi için kullanılan koordinat fonksiyonu ifadelerinde ilk üçer terim hesaba katılmıştır.

Sistemin serbest titreşimi yanında, zorlanmış titreşimi üzerinde de durulmuş ve harmonik yer hareketi ve deprem yer hareketi etkisinde davranış spektrum eğrileri çizilmiştir. Daha sonra Bölüm 6.6 da literatürde verilen iki adet baca ve bir su kulesinin serbest titreşimine ait birinci mod periyodları elde edilmiştir.

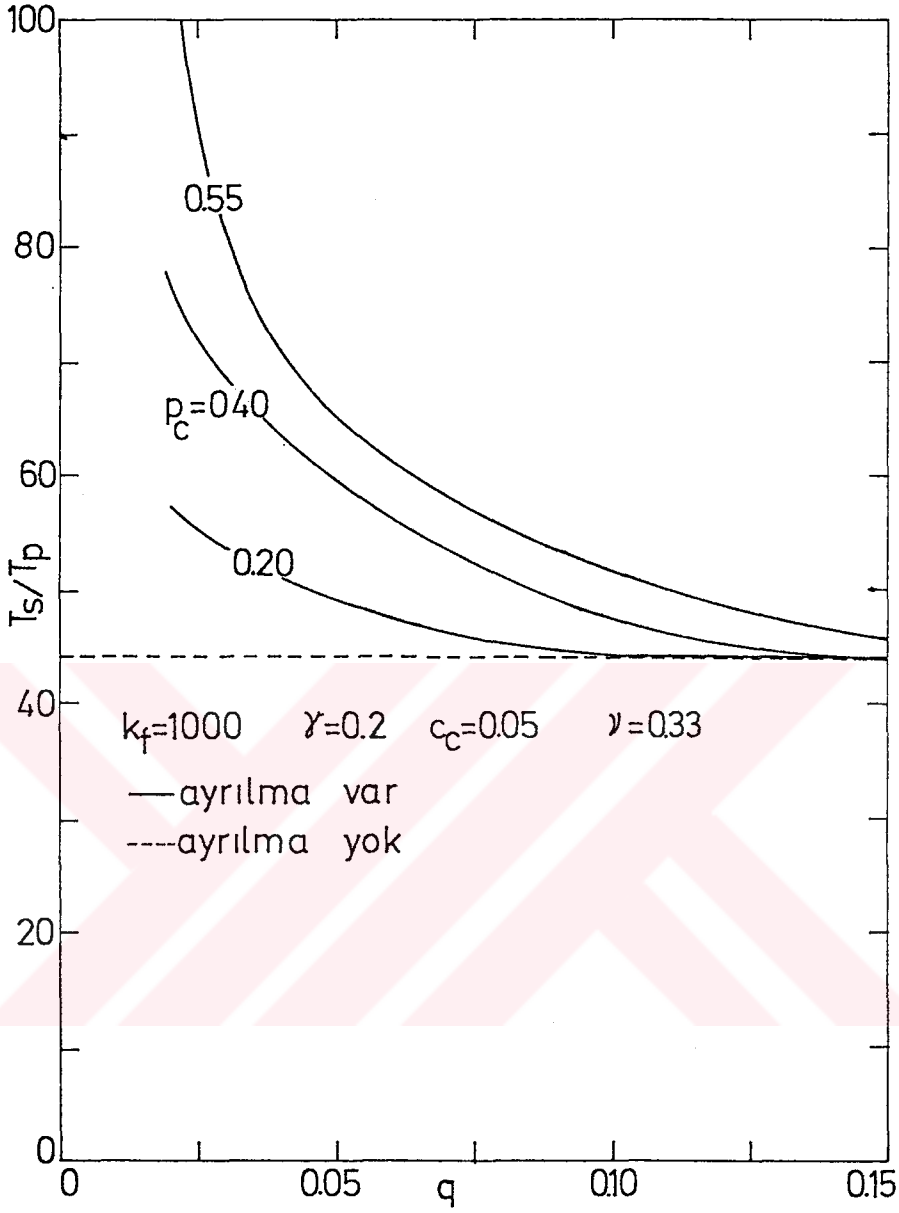
Tablo 6.5.1 Bazı Boyutsuz Parametrelerin γ ile Değişimi

γ	m_{pc}	m_{cg}	$\bar{\beta}$	χ
0.10	0.20	0.156	1875	0.268
0.15	0.30	0.046	371	0.402
0.20	0.40	0.020	117	0.536
0.25	0.50	0.010	48	0.670
0.30	0.60	0.006	23	0.804

6.5.1 Serbest Titreşim

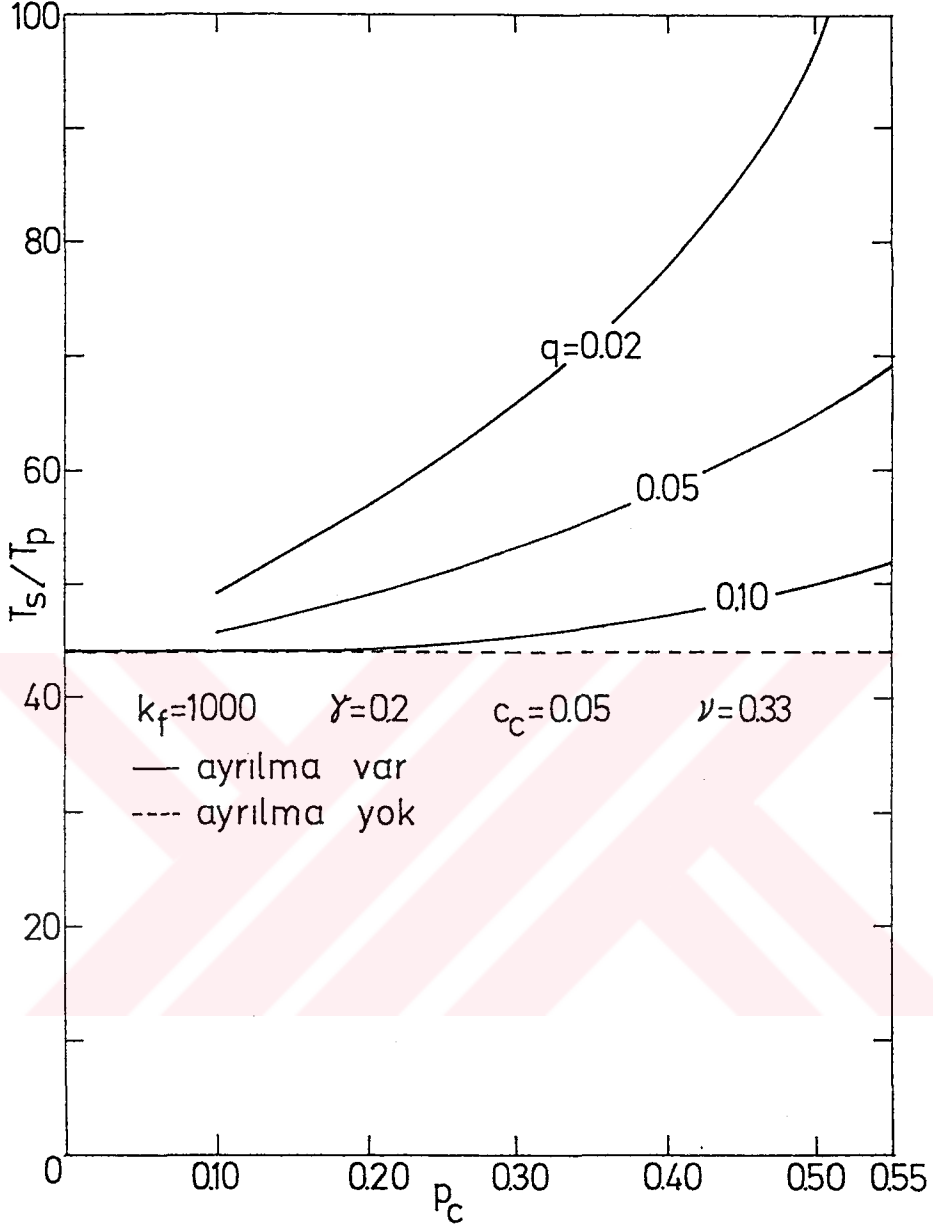
Sistemin serbest titreşimi; kolon ucunda sisteme tekil bir yük etki ettirilerek elde edilen yanal yerdeğiştirme, başlangıç yerdeğiştirmesi kabul edilerek sağlanmaktadır. Başlangıç yerdeğiştirmesi için zeminden ayrılma olması durumunda plak için değme alanı hesaplanarak, kolon ucundaki yerdeğiştirme belirlenmektedir.

Plağın hareket denklemi yazılırken plağın kütlesi ve plak üzerinde düzgün yayılı bir yük ayrı ayrı gözönüne alınmıştır. Plak üzerindeki toplam yük (plak kütlesinin ağırlığı+plak üzerindeki yayılı yük) ile T_s sistemin periyodunun değişimi kolon ucunda uygulanan tekil yükün çeşitli değerleri için Şekil 6.5.1 de görülmektedir. Plak üzerindeki yükün belirli bir değerinden sonra, kolon ucunda uygulanan kuvvete bağlı olarak zeminden ayrılma olmamakta ve sistemin periyodu sabit kalmaktadır. Ayrıca benzer durum küçük uç kuvveti değerleri için de görülmektedir. Küçük uç kuvveleri zeminden ayrılma doğurmayacağı için periyod sabit değerini korumaktadır. Şekil 6.5.2 de ise kolon ucunda



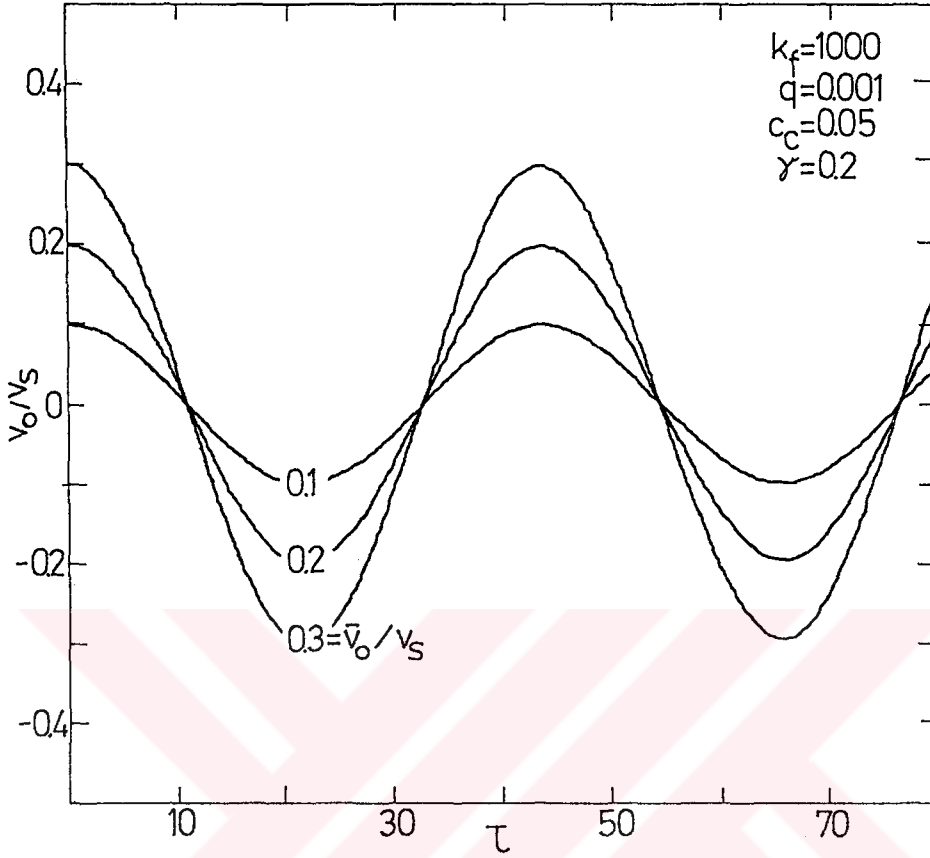
Şekil 6.5.1 Sistem periyodunun plak yükü ile değişimi

uygulanan kuvvetle toplam plak yükünün çeşitli değerleri için sistemin serbest titreşim periyodunun değişimi görülmektedir. Toplam plak yükünün küçük değerlerinde zeminde ayrılma oluşturan kuvvetin büyük değerleri için sistem periyodunun çok fazla büyüdüğü görülmektedir.



Şekil 6.5.2 Sistem periyodunun kolon ucunda uygulanan kuvvetle değişimi

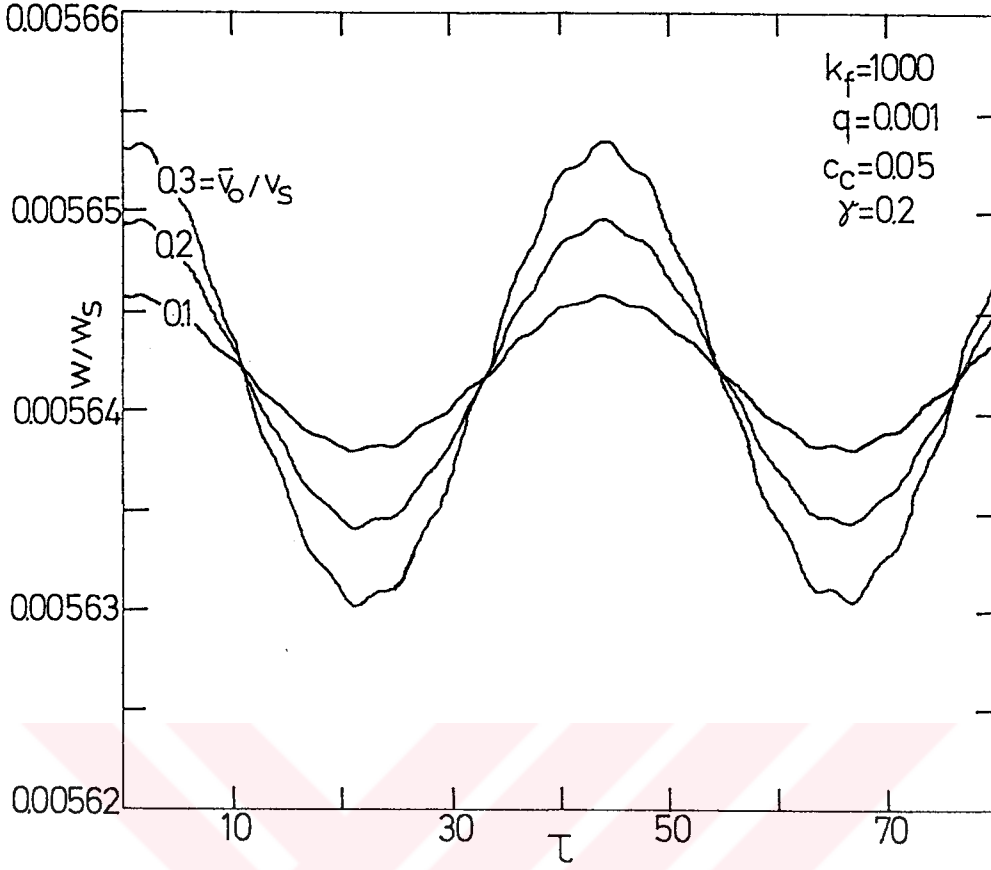
Zeminden ayrılma oluşturmeyen başlangıç yerdeğiştirmeleri için kolon ucundaki yanal yerdeğiştirme ve plak merkezindeki yerdeğiştirmelerin değişimi Şekil 6.5.3 ve Şekil 6.5.4 de verilmiştir. Verilen değer kombinezonu için tam değme olduğundan dolayı yerdeğiştirmelerin sabit



Şekil 6.5.3 Çeşitli başlangıç yerdeğiştirmeleri için toplu kütlenin v_o yanal yerdeğiştirmesi

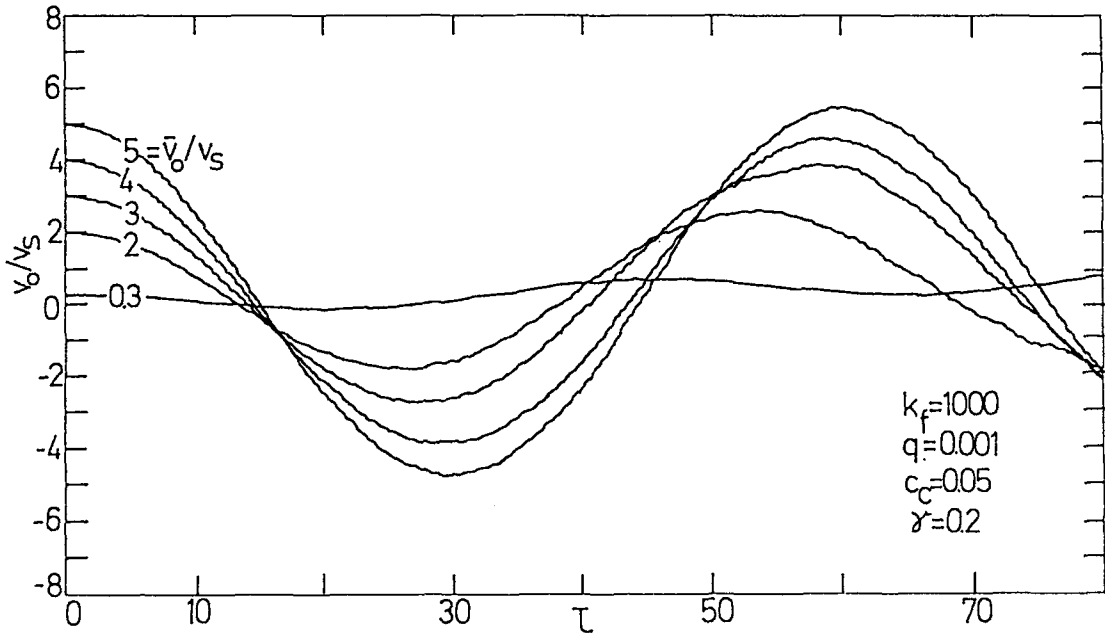
bir periyotla değişim gösterdiği görülmektedir. Plak için rijit yerdeğiştirme ve rijit dönme ile bir simetrik ve iki tane de simetrik olmayan titreşim modu gözönüne alındığından, birinci mod yanında diğer modların kolon ucundaki yerdeğiştirmelere etkisi görülmektedir. Plak merkezindeki yerdeğiştirmelerin değişiminden ise rijit dönme ve öteleme ile plağın yüksek (ileri) modlarının katkısı farkedilmektedir.

Sisteme verilen çeşitli başlangıç yerdeğiştirmeleri için kolonun ucundaki yerdeğiştirmeler Şekil 6.5.5 de,

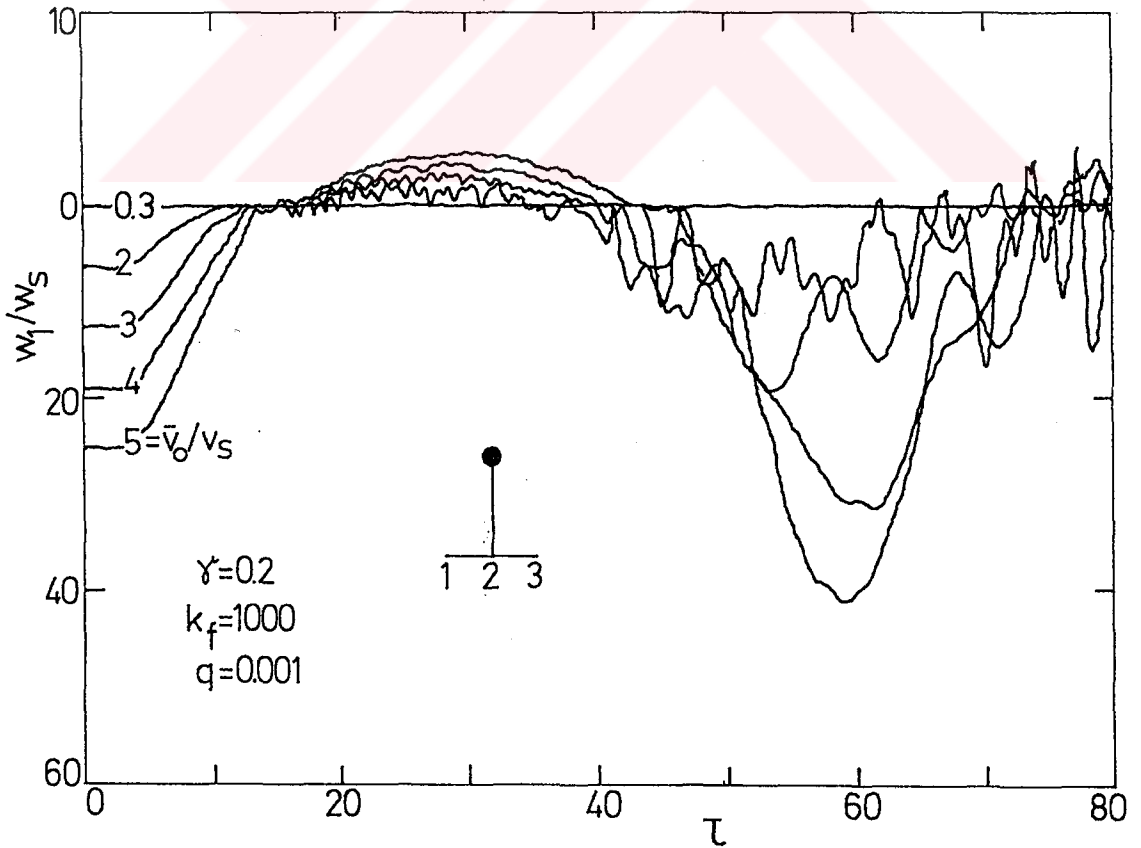


Şekil 6.5.4 Çeşitli başlangıç yerdeğiştirmeleri için plak merkezinin yerdeğiştirmesi

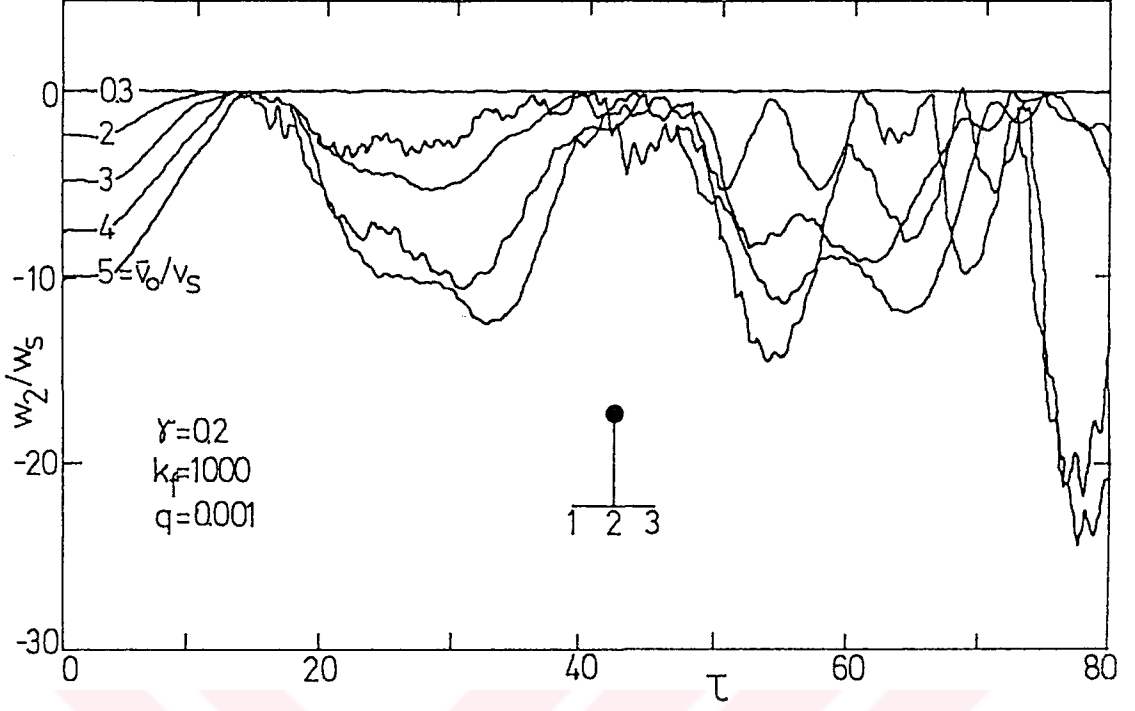
plağın simetri ekseninde bulunan üç noktadaki yerdeğiştirmeleri ise Şekil 6.5.6a, Şekil 6.5.6b ve Şekil 6.5.6c de görülmektedir. Zeminden ayrılma oluşturmayan başlangıç yerdeğiştirmesi ($\bar{v}_0/v_s = 0.3$) durumunda plak merkezindeki yerdeğiştirme sabit bir değer (Şekil 6.5.6b) aldığı halde, plağın 1 ve 3 noktalarındaki (Şekil 6.5.6a ve Şekil 6.5.6c) değişim sabit değildir, ancak bu noktadaki değişim, başlangıç yerdeğiştirmesinin diğer değerlerindeki yerdeğiştirmelere göre oldukça küçük değerde olduğundan sabit gibi görülmektedir. Zeminden ayrılma olmaması durumunda, kolon ucundaki yerdeğiştirmelere birinci modun etkisinin çok fazla olduğu ve diğer modların etkisinin çok zayıf kaldığı görülmüştü. Bu, başlangıç



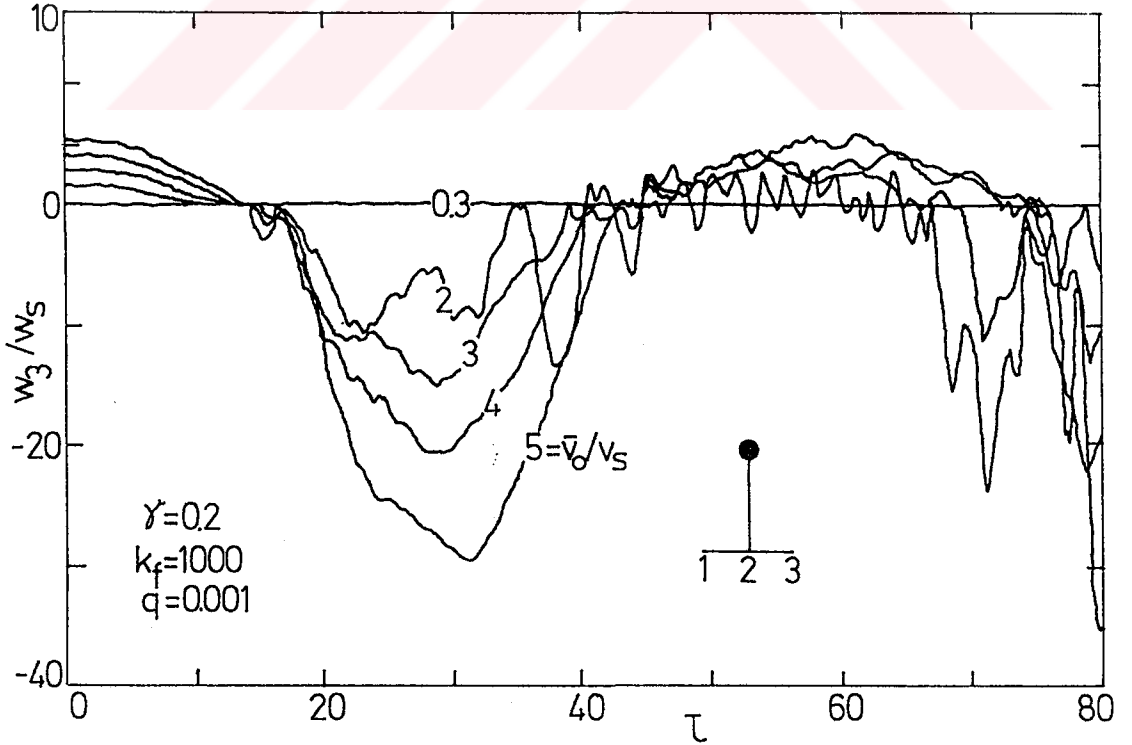
Şekil 6.5.5 Çeşitli $\bar{v}_0$ başlangıç yerdeğiştirmeleri için v_0 kütlelinin yanal yerdeğiştirmesi



Şekil 6.5.6a Çeşitli $\bar{v}_0$ başlangıç yerdeğiştirmesi için w_1 plak yerdeğiştirmesi



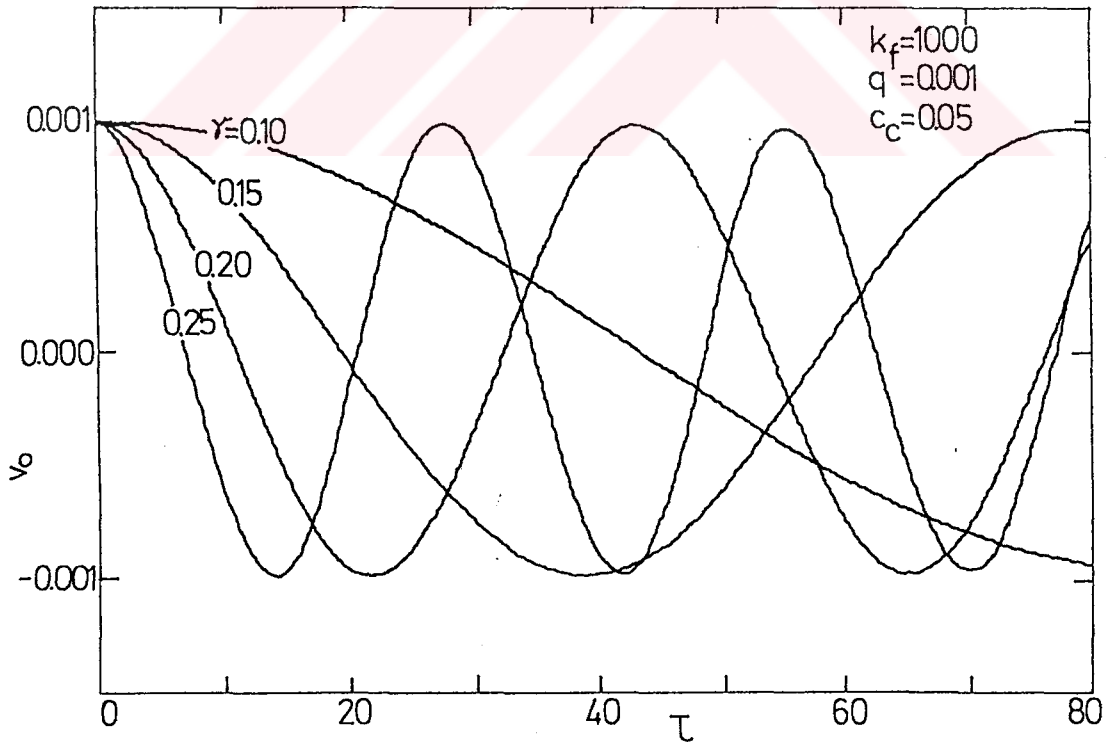
Şekil 6.5.6b Çeşitli $\bar{v}_0$ başlangıç yerdeğiştirmesi için w_2 plak merkezindeki yerdeğiştirme



Şekil 6.5.6c Çeşitli $\bar{v}_0$ başlangıç yerdeğiştirmesi için w_3 plak yerdeğiştirmesi

yerdeğiştirmesinin kolonun birinci moduna çok yakın olduğundan dolayı meydana gelmekteydi. Halbuki, plakta başlangıç düşey yerdeğiştirmesine simetrik olan birinci modun etkisi fazla değildir. Çünkü plak başlangıç yerdeğiştirmesinde simetrik olmayan şekil hakimdir. Bu ise bizi plak yerdeğiştirmesinin alınan bütün modların katkısıyla meydana gelmesi sonucuna götürür. Bu nedenle verilen şekillerde pek karmaşık bir değişim elde edilmiştir.

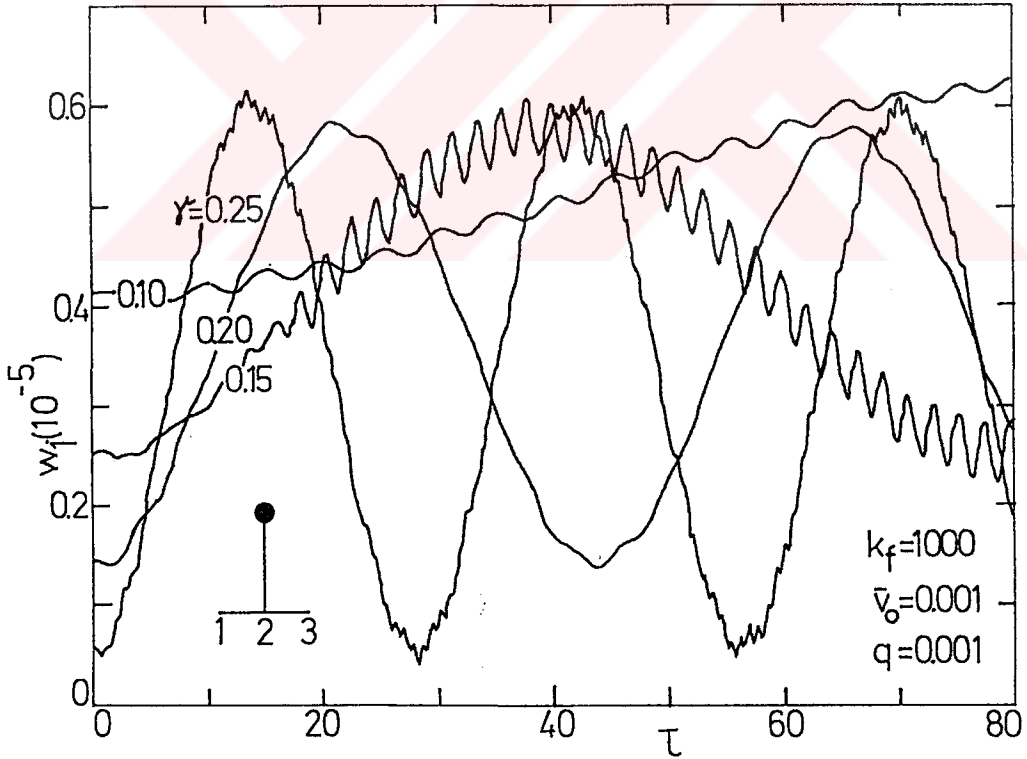
Zeminden ayrılma oluşturan başlangıç yerdeğiştirmeleri durumunda sistemin hareketinin periyodunun büyüdüğü görölmektedir. Sistem narinliği ile ters orantılı olan γ nın çeşitli değerleri için kolon ucundaki yerdeğiştirmeler şekil 6.5.7 de verilmiştir. Verilen başlangıç yerdeğiştirmesi için zeminden ayrılmaların oluşmadığı bu



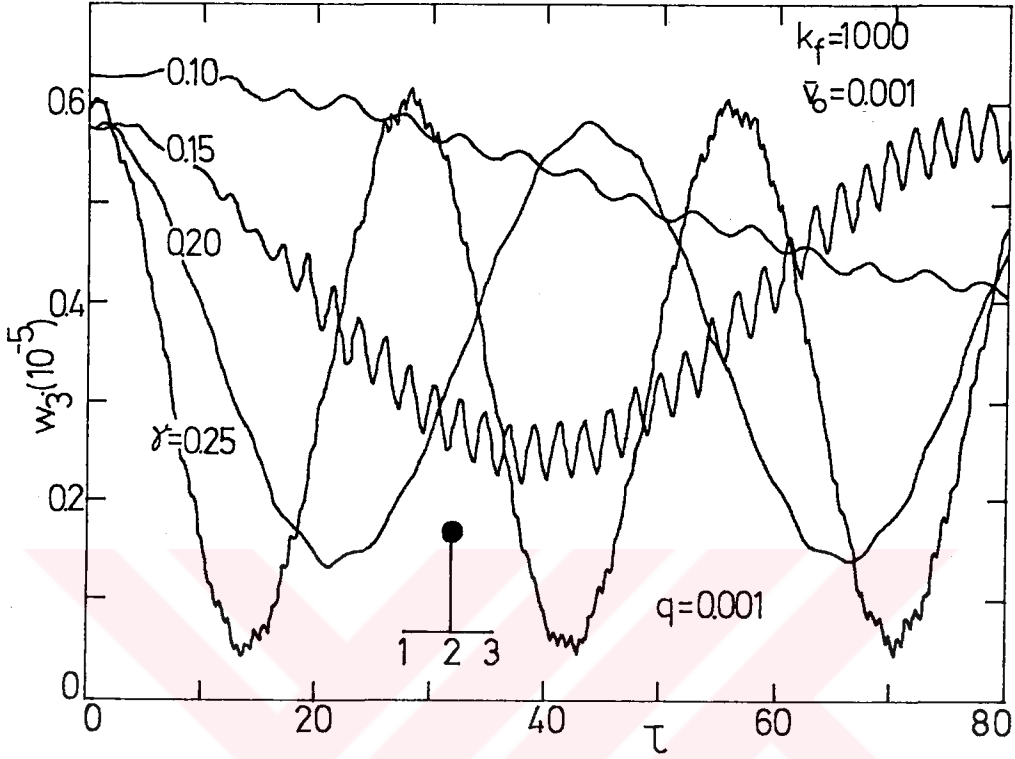
şekil 6.5.7 Çeşitli γ değerleri için v_0 kütlenin yanal yerdeğiştirmesi

şekilde, γ nın küçük değerlerinde hareketin periyodunun oldukça büyük olduğu görülmektedir. γ nın değerleri büyüdükçe hareketin periyodu küçülmekte olup, gerçekte bu durum da beklenen bir sonuçtur. Yukarıda Şekil 6.5.7 ile verilen başlangıç yerdeğiştirmesi için plağın yerdeğiştirmelerinin değişimi ise Şekil 6.5.8a ve Şekil 6.5.8b de verilmiştir.

Plağın hareketinin periyodunun değişimi, kolonun ucundaki değişime benzer şekilde ortaya çıkmaktadır. Ancak plağın hareketi için gözönüne alınan rijit dönme ve simetrik olmayan elastik yerdeğiştirmelerin etkisinin sistem narinliğine bağlı olarak kendisini gösterdiği görülmektedir.



Şekil 6.5.8a Çeşitli γ değerleri için w_1 plak yerdeğiştirmesi

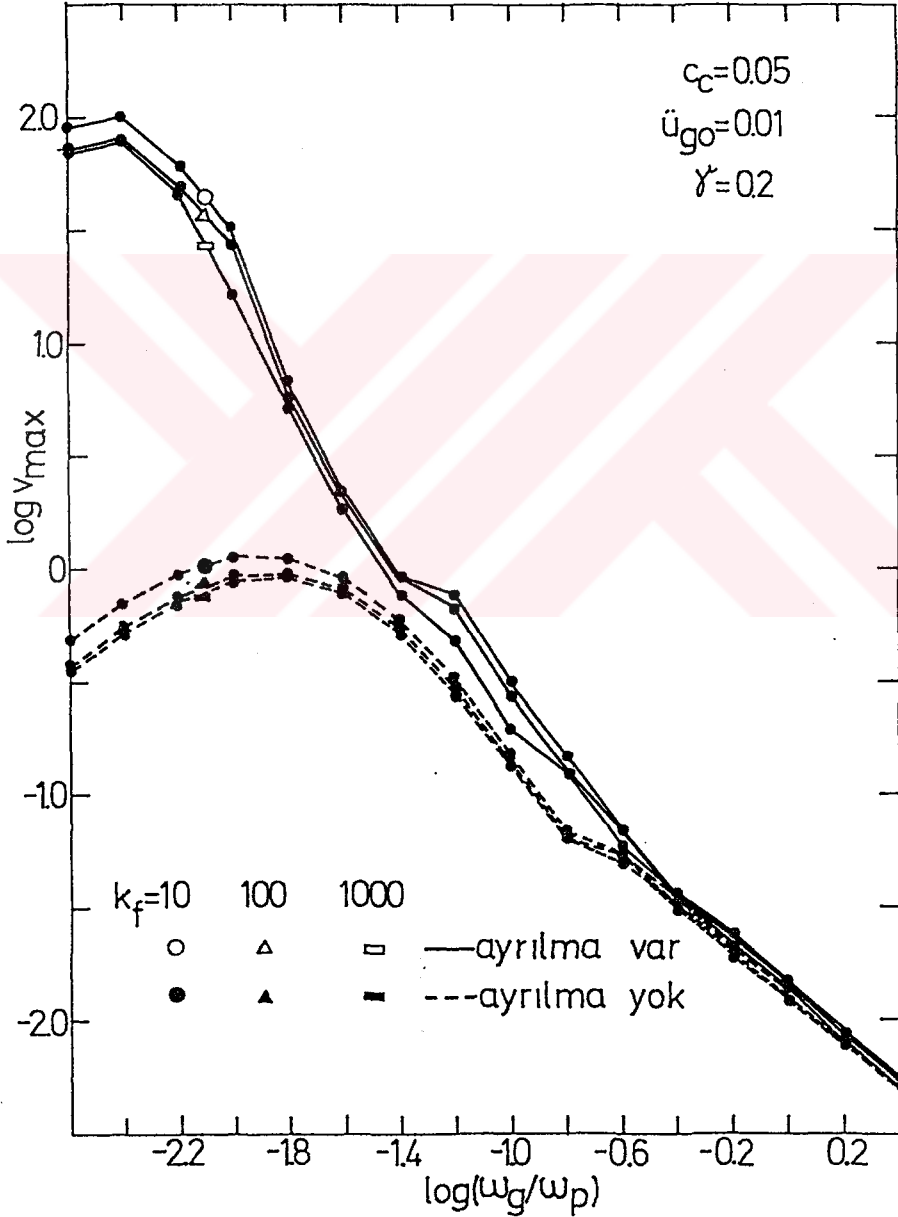


Şekil 6.5.8b Çeşitli γ değerleri için w_3 plak yerdeğiştirmesi

6.5.2 Harmonik Yer Hareketi

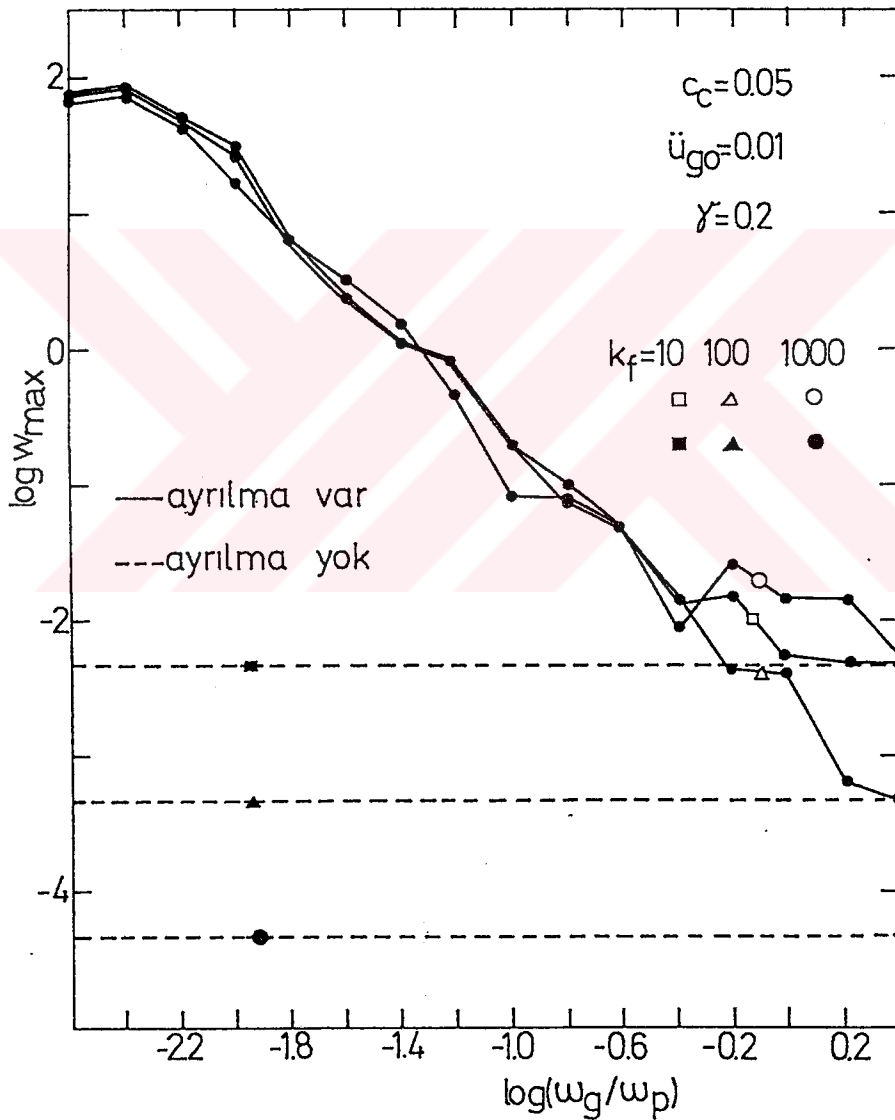
Sistemin serbest titreşiminden sonra, zorlayıcı bir etki altında sistemin davranışı için bu bölümde plak seviyesinde harmonik bir yer hareketinin etkimesi gözönüne alınmıştır. Harmonik yer hareketinin ivmesinin $\ddot{u}_g = \ddot{u}_{go} \sin(\omega_g \tau / \omega_p)$ olması hali için sistemin davranışını karakterize eden spektrum eğrileri çizilmiştir. Burada $\ddot{u}_{go}$ ve ω_g sırasıyla harmonik yer hareketinin ivmesinin genliğini ve frekansını göstermektedir. ω_p ise $\omega_p = 2\pi/T_p$ olarak tanımlanmıştır.

Davranış spektrum eğrileri zeminden ayrılmanın önlenmiş ve önlenmemiş olduğu durumlar için çizilmiştir. Toplu kütlenin yanal yerdeğiştirme spektrum eğrisi çeşitli zemin rijitlikleri için Şekil 6.5.9 da verilmiştir. En büyük yanal yerdeğiştirmelerin, yer hareketinin frekansının sistemin serbest titreşiminin frekansına yaklaştığında ortaya çıktığı görülmektedir. Boyutsuz frekansın



Şekil 6.5.9 Harmonik yer hareketi etkisinde toplu kütlenin yanal yerdeğiştirme spektrumu

artmasıyla, sistem zorlamayı takip edemediğinden, yerdeğiştirmeler küçülmekte ve zeminden ayrılma olmamakta dolayısıyla her iki zemin (çekme alan ve almayan) için de aynı genlikli hareket söz konusu olmaktadır. Bu durum plak yerdeğiştirmelerinin maksimum genliklerinin gösterildiği Şekil 6.5.10 da da görülmektedir. Alışılacak Winkler zemini durumunda, başlangıçta zemine aktarılan



Şekil 6.5.10 Harmonik yer hareketi etkisinde plak merkezinin düşey yerdeğiştirme spektrumu

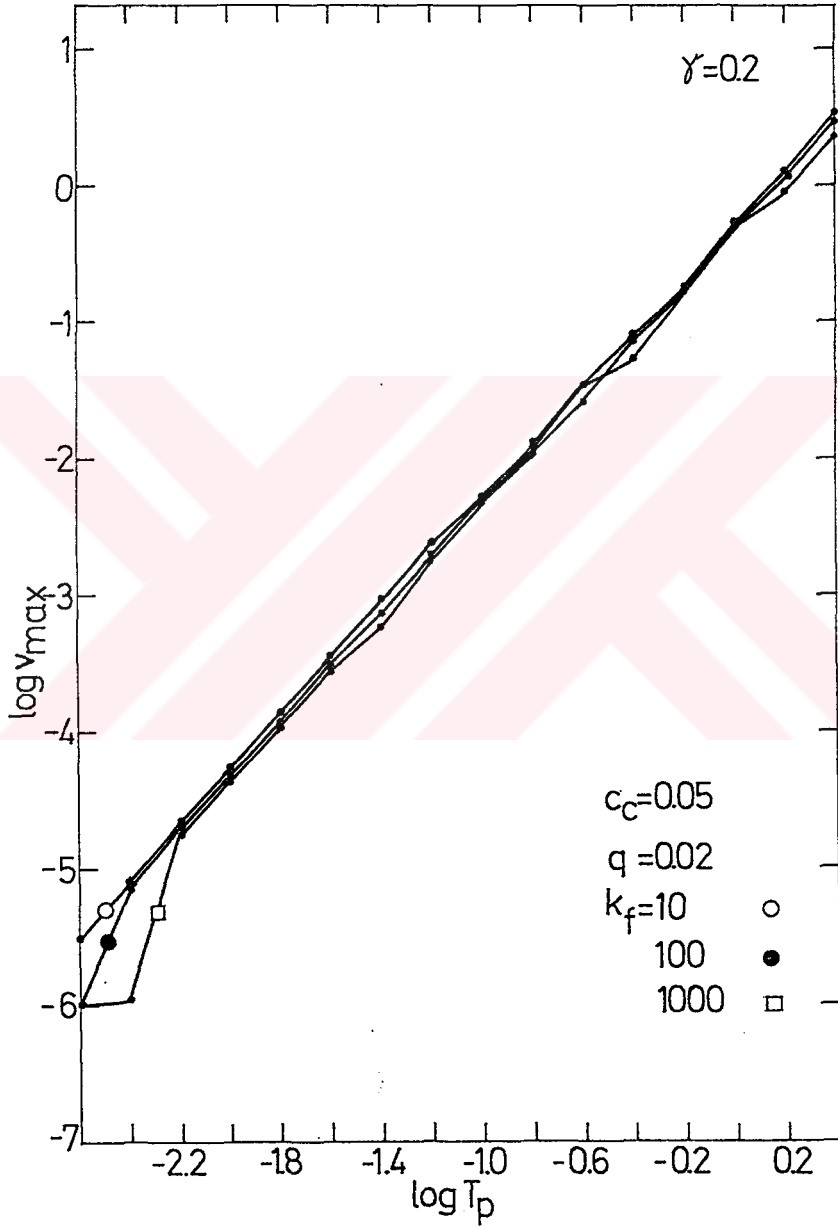
düşey yüklerden dolayı düşey bir yerdeğiştirme olmakta ve daha sonra sistem dış etkiyle sabit genlikli titreşim hareketi yapmaktadır. Düşey doğrultuda herhangi bir kuvvet olmadığı için, plak merkezinin genliği zorlama frekansından etkilenmemektedir. Ayrılma olmaması durumunda ise yatay ve düşey hareket denklemleri birbirinden etkilenmemektedir.

Sonuç olarak ayrılma dolayısıyla düşey genliklerin büyük değerlere ulaştığı, rezonans frekansı değerinden sonra, zorlama frekansının artmasıyla genliklerin küçülmekte olduğu şeklin incelenmesinden anlaşılmaktadır.

6.5.3 Deprem Yer Hareketi

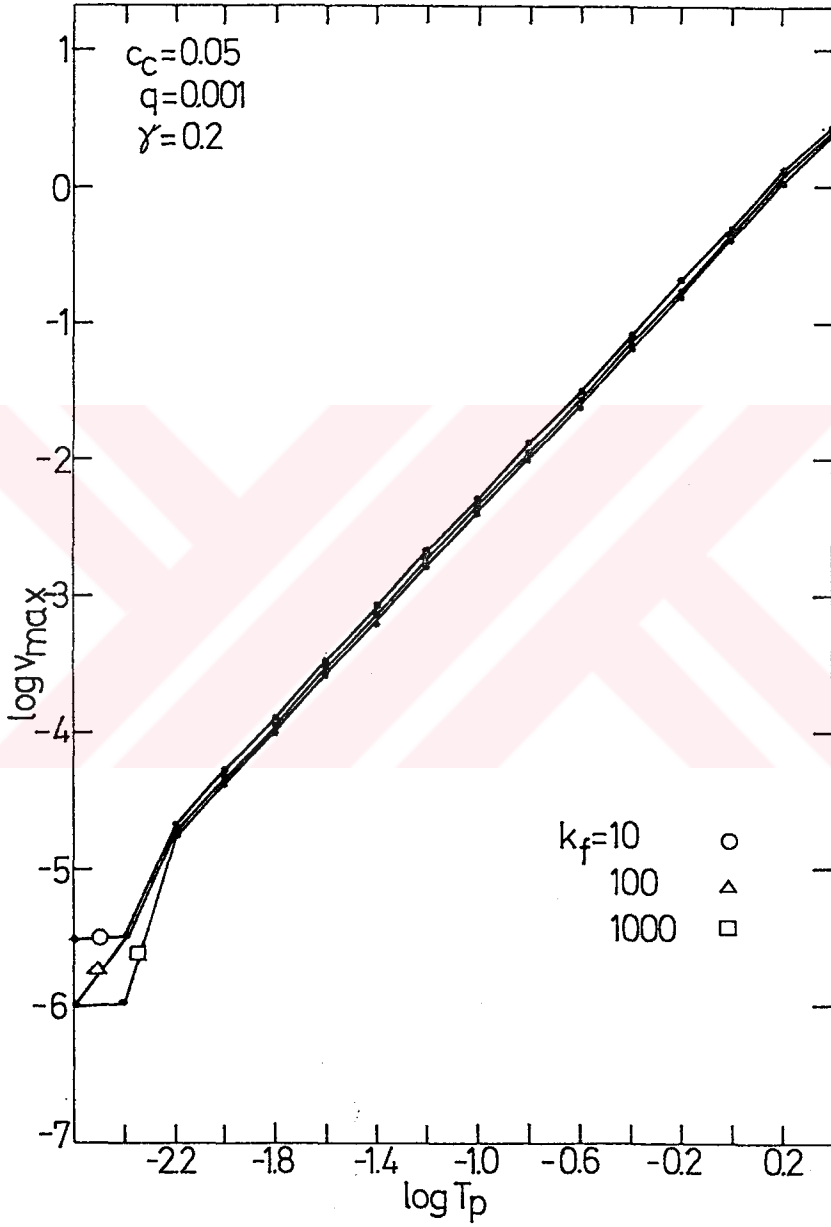
Bölüm 6.5.1 ve Bölüm 6.5.2 de sistemin serbest ve harmonik yer hareketi etkisinde zorlanmış titreşimine ilişkin sonuçlar, bazı sistem parametrelerinin sabit tutulmasıyla boyutsuz olarak verilmişti. Elde edilen sonuçlar aynı geometriye sahip ve boyutsuz parametreleri ile parametrelerin gerçek değerlerine bakılmadan bütün sistemlere uygulanabilir. Ancak sisteme deprem yer hareketi uygulanmak istenildiğinde, gerçek deprem ivmeleri boyutlu olarak verildiğinden, uzunluk ve zamanla ilgili en az iki değişkenin boyutlu olarak verilmiş olması gerekir. Burada daha önce verilen boyutsuz parametrelere ek olarak, gerçek zaman t yi boyutsuzlaştırmak için zaman $T_p(s)$ ve plağın yarıçapı $a = 2.5(m)$ olarak alınmış, $m_{pg} = T_p^2 g/a$ olarak hesaplanmıştır. Burada elastik plak-kolon sistemine uygulanan deprem kaydı, El Centro 1940 depreminin kuzey-güney bileşenine ait kayıttır. Sistemin davranışı için kolon ucundaki toplu kütlenin yanal yerdeğiştirmesine ait spektrum eğrileri çeşitli zemin rijitlikleri için Şekil 6.5.11a ve Şekil 6.5.11b de, plak merkezinin düşey yerdeğiştirmesine ait spektrum eğrileri

ise çeşitli zemin rijitlikleri için Şekil 6.5.12a ve Şekil 6.5.12b de verilmiştir. Kolon sönümünün $c_c = 0.05$ olarak alındığı bu çözümlerde, plak üzerindeki q yükünün burada gözönüne alınan değerleri için zeminden ayrılma

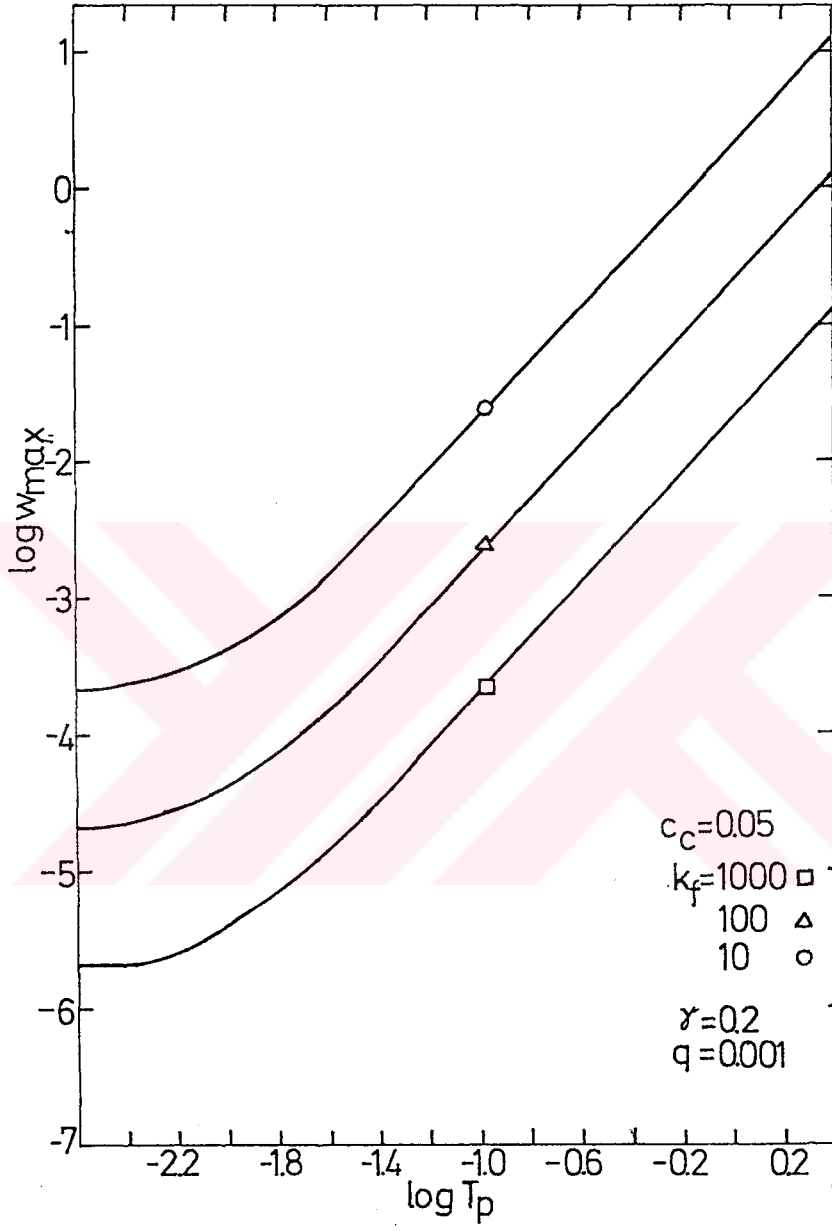


Şekil 6.5.11a El Centro yer hareketi için toplu kütlenin yanal yerdeğiştirme spektrumu

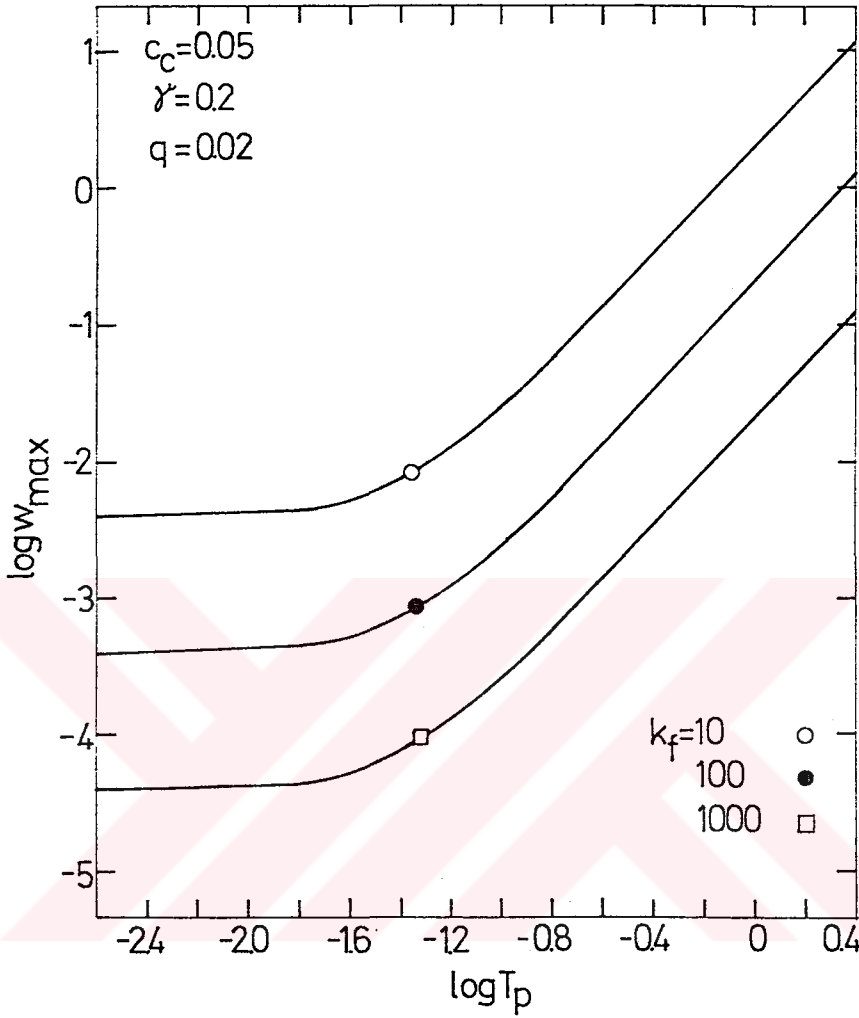
ortaya çıkmamıştır. Yanal yerdeğiştirme spektrum eğrileri q yükünün azalmasıyla daha kararlı bir değişim göstermektedir.



Şekil 6.5.11b El Centro yer hareketi için toplu kütlenin yanal yerdeğiştirme spektrumu

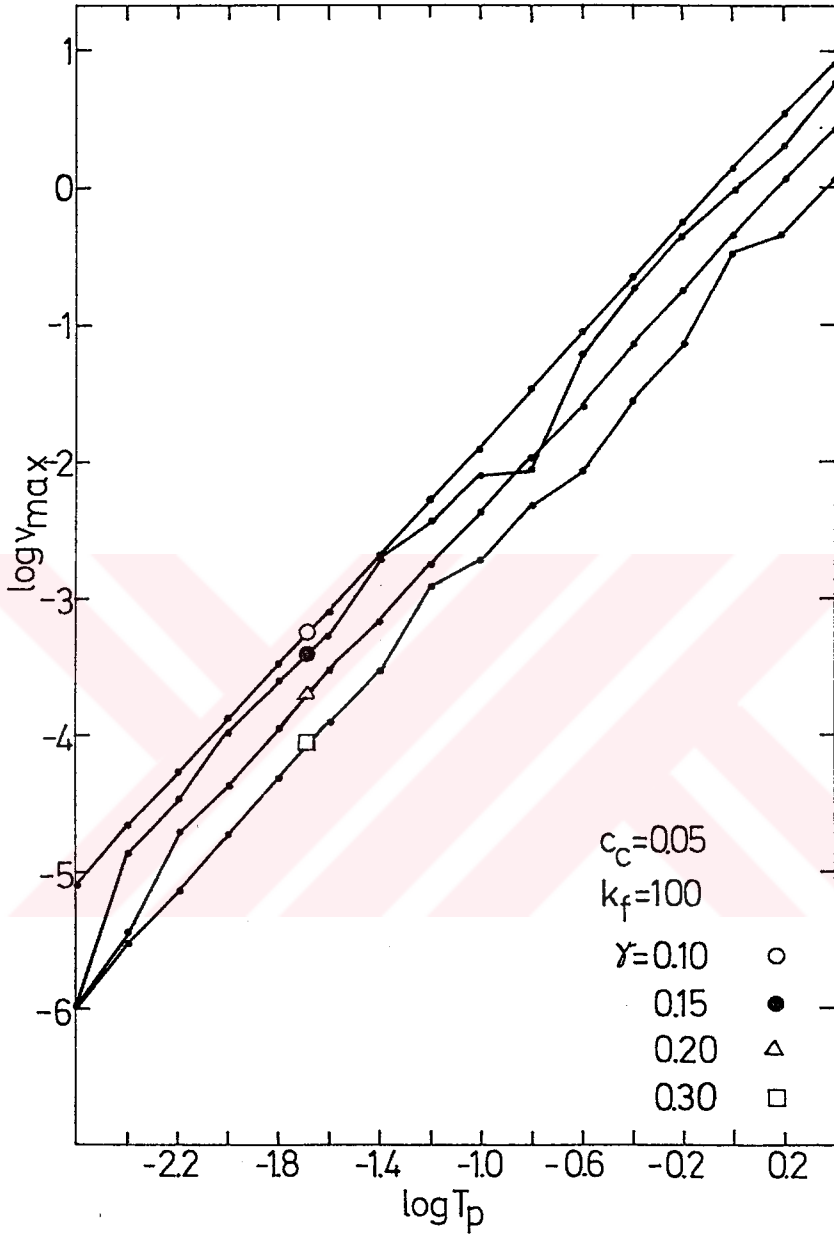


Şekil 6.5.12a El Centro yer hareketi için plağın
düşey yerdeğiştirme spektrumu

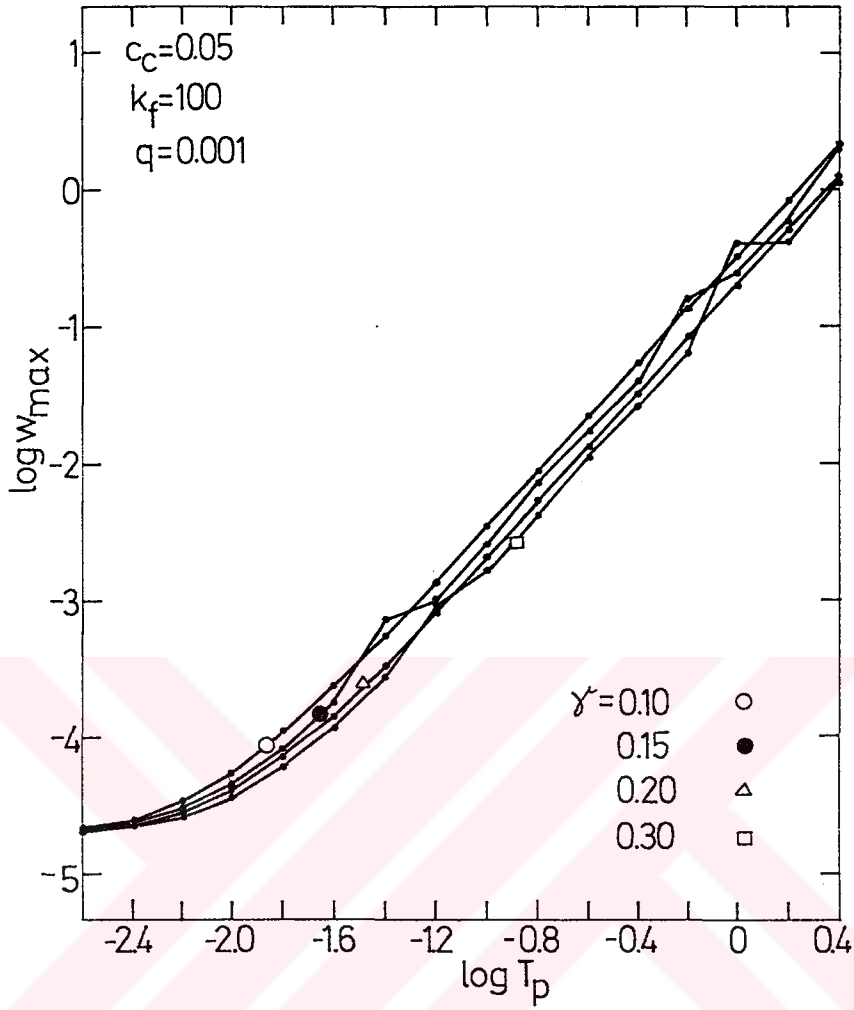


Şekil 6.5.12b El Centro yer hareketi için plağın düşey yerdeğiştirme spektrumu

Sistemin yanal ve düşey yerdeğiştirmesinin, sistem narinliği ile ters orantılı olan γ ile değişimi Şekil 6.5.13 ve 6.5.14 de görülmektedir. γ nın küçük değerlerinde sistemin yanal ve düşey salınımları daha büyük olarak ortaya çıkmakta ve değişimi ise doğrusala yakın bir şekilde devam etmektedir.



Şekil 6.5.13 El Centro yer hareketi için toplu
kütlenin yanal yerdeğiştirme spektrumu



Şekil 6.5.14 El Centro yer hareketi için plağın düşey yerdeğiştirme spektrumu

6.6. Sayısal Örnekler

Bölüm 5.6 da çözümü yapılmış olan baca ve su kulesi problemlerinin, bu bölümde ele alınan dairesel elastik plak-kolon sistemi modeliyle çözümü yapılmıştır. Plağın elastik ve rijit olması durumundaki çözümlerin karşılaştırılabilmesi için elastik plağın eğilme rijitliği yüksek bir değer olarak alınmıştır.

6.6.1. Baca Problemleri

Bölüm 5.6.1 de kesitleri ve geometrik büyüklükleri verilen bacaların birinci modlarına ait titreşim periyodları bulunmuştur. Sistemin titreşimi kolona yatay olarak uygulanan parabolik bir yük ile sağlanmıştır. Tabanda ankastreliğin gerçekleştirilebilmesi için zemin modelindeki yayların çok rijit ve hem basınç, hem de çekme gerilmesi karşıladığı kabul edilmektedir.

6.6.1.1. 110 m Yükseklikli Baca

Burada Bölüm 5.6.1.1 de çözümü yapılan baca ele alınmıştır. Bacanın bütün özellikleri yukarıda bahsedilen bölümde verildiğinden dairesel elastik plak-kolon sisteminin boyutsuz parametreleri ve çözüm sonuçları Tablo 6.6.1 de verilmiştir. Kolon ve zemin modelindeki yayların sönümü $q=c_c=c_f=0.0$ olarak alınmıştır.

Tablo 6.6.1. Bacaya Ait Boyutsuz Büyüklükler ve Hesaplanan Birinci Moda Ait Titreşim Periyodları

γ	k_f	m_{pg}	m_{pc}	χ	$\bar{\beta}$	$T_p(s)$	$T_1(s)$	$\frac{[65,66]}{T_1(s)}$
0.66	1000	0.51	5.26	0.698	0.62	1.942	2.152	2.08
0.45	1000	0.16	2.45	0.698	2.89	0.903	2.156	
0.30	1000	0.05	1.09	0.698	14.63	0.401	2.165	

Tablodan da görüldüğü gibi elde edilen sonuçlar ilgili referanstaki çözümle tam bir uyum içerisinde, rölatif hata % 4 ün altında kalmaktadır.

6.6.1.2. 75 m Yükseklikli Baca

Bölüm 5.6.1.2 de geometrik büyüklükleri ve çözümü verilen bacanın, bu bölümdeki plak-kolon sistemi modelinin esas alınmasıyla hesabı yapılmıştır. Bölüm 5.6.1.2 de izlenen yola uygun olarak sistem γ nın çeşitli değerleri için boyutsuz parametreler ve elde edilen sonuçlar Tablo 6.6.2 de verilmiştir. Kolon ve zemindeki sönümler $q=c_c=c_f=0.0$ olarak alınmıştır. Buradaki rölatif hata ise % 1 civarında elde edilmektedir.

Tablo 6.6.2. Bacaya Ait Boyutsuz Büyüklükler ve Hesaplanan Birinci Moda Ait Titreşim Periyodları

γ	k_f	m_{pg}	m_{pc}	χ	$\bar{\beta}$	$T_p(s)$	$T_1(s)$	[67] $T_1(s)$
0.66	1000	0.111	7.423	0.35	0.865	0.749	0.9827	0.9764
0.45	1000	0.035	3.451	0.35	4.004	0.348	0.9834	
0.30	1000	0.010	1.534	0.36	20.270	0.155	0.9858	

6.6.3. Su Kulesi Problemi

Bölüm 5.6.2 de ele alınan su kulesi probleminin; buradaki plak-kolon sistemi gibi idealleştirilerek çözümü yapılacaktır. Deponun geometrisine ait bilgiler sözkonusu bölümde verilmiştir. Bu bölümde de su deposunun boş ve dolu olması durumları için birinci moda ait serbest titreşim periyodları elde edilecektir. Probleme ait boyutsuz büyüklükler ve bulunan sonuçlar Tablo 6.6.3 de verilmiştir. Diğer parametreler $q=j_o=c_c=c_f=0.0$, $k_f=1000$,

alınmış ve $\chi = 0.3871$ olarak hesaplanmıştır. Burada elde edilen sonuçların da literatürdeki sonuçlarla uyumlu olduğu görülmektedir.

Tablo 6.6.3. Su Kulesine Ait Boyutsuz Büyüklükler ve Hesaplanan Birinci Moda Ait Titreşim Periyodları

Depo	γ	m_o	m_{pg}	m_{pc}	$\bar{\beta}$	$T_p(s)$	$T_1(s)$	$\frac{[68]}{T_1(s)}$
Boş	0.66	0.164	0.0157	8.20	0.7	0.191	0.323	0.308
	0.45	0.164	0.0050	3.81	3.3	0.089	0.323	
	0.217	0.164	0.0001	0.22	245.8	0.010	0.323	
Dolu	0.66	0.413	0.0157	8.20	0.7	0.191	0.429	0.417
	0.45	0.413	0.0050	3.81	3.3	0.089	0.437	
	0.217	0.413	0.0001	0.22	245.8	0.010	0.437	

BÖLÜM 7

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada çekme gerilmeleri almayan Winkler zeminine oturan plak-kolon sisteminin değişik dinamik etkiler altındaki davranışı incelenmiştir. Sabit kalınlıklı dairesel plağın rijit ve elastik olması durumları ayrı ayrı ele alınırken, kolonun yayılı kütleli olduğu, ayrıca yüksekliği boyunca üzerinde toplu kütleler bulunduğu kabul edilmiştir. Sistemin hareket denklemi elde edilirken plak ve kolonun hareket denklemleri ayrı ayrı yazılmıştır. Kolonun hareket denklemi çıkarılırken toplu kütlelerin dönme ataletleri de gözönüne alınmıştır. Plak ve kolonun birleşim noktasında yazılan süreklilik denklemleri ile daha önce verilen plak ve kolon hareket denklemlerinin birleştirilmesiyle sistemin hareket denklemi elde edilmiş ve sayısal çözümü yapılmıştır.

Parametrik ve sayısal sonuçların elde edildiği bu çalışmada; plak-kolon sisteminin serbest ve zorlanmış titreşimine ait sonuçlar elde edilmiş ve şekiller verilmiştir. Burada ele alınan sistem, baca, su kulesi, televizyon kulesi v.b. yapılara uygun bir model olduğundan literatürde verilen bir kısım su kulesi ve baca problemleri için çözümler yapılmıştır. Sonuçların literatürde verilenlerle uyumlu olduğu görülmüştür. Bu çözümlerde birinci moda ait serbest titreşim periyotlarının bulunması ile yetinilmiştir. İstenilirse sisteme uygun başlangıç yerdeğiştirmesi verilerek diğer modlara ait serbest titreşim periyotlarının da elde edilebileceği belirtilmiştir.

Bu çalışmada zemin-yapı etkileşimi, zemin modelindeki yayların çekme gerilmeleri ile ele alınmıştır. Buradaki model için verilen hesap yöntemi aynı ilkelerle daha değişik zemin modelleri için de kullanılabilir.

Ayrıca kolon üzerinde toplu kütleler bulunması durumunda, bunları P- δ etkisi olarak adlandırılan ve kütle kuvvetlerinin yer değiştirmeler sebebiyle etkilerinin, eleman ekseninden ortaya çıkan dışmerkezliğin sebep olduğu ilave ikinci mertebe etkiler kolon hareket denkleminde eklenebilir, ve sistem davranışı bu durum için de incelenebilir. Benzer şekilde, sonuç olarak burada ele alınan plak-kolon sistemine ait çözüm yöntemi ile baca, su kulesi v.b. yapıların zemin-yapı etkileşimi de gözönüne alınarak dinamik analizi yapılabilir.

KAYNAKLAR

- [11] GOEL, R.P., Vibrations of a beam carrying a concentrated mass, Journal of Applied Mechanics 40, 821-822, 1973.
- [12] GOEL, R.P., Free vibration of a beam-mass system with elastically restrained ends, Journal of Sound and Vibration 47, 9-14, 1976.
- [13] LEE, T.W., Vibration frequencies for a uniform beam with one end spring-hinged and carrying a mass on the other free end, Journal of Applied Mechanics 40, 813-815, 1973.
- [14] LAURA, P.A.A., POMBO, J.L., SUSEMIHL, E.A., A note on the vibration of a clamped-free beam with a mass at free end, Journal of Sound and Vibration 37, 161-168, 1974.
- [15] LAURA, P.A.A., MAURIZI, M.J., POMBO, J.L., A note on the dynamic analysis of an elastically restrained beam with a mass at the free end, Journal of Sound and Vibration 41, 397-405, 1975.
- [16] KOUNADIS, A.N., Dynamic response of cantilevers with attached masses, Journal of Engineering Mechanics Division ASCE 101, 695-706, 1975.
- [17] SWAMINADHAM, M., MICHAEL, A., A note on frequencies of a beam with heavy tip mass, Journal of Sound and Vibration 66, 144-147, 1979.
- [18] KOMENDANT, A.E., Contemporary Concrete Structures, McGraw-Hill, New York 1972.
- [19] DEMİR, H.H., On natural frequencies of beams with elastic supports, Strukturmechanik und Numerische Verfahren, K.-H. Schrader zum 60. Geburtstag, Herausgegeben von R. Diekkämper und H.J. Niemann, Verlagsgesellschaft Rudolf Müller, Köln-Braunsfeld 1982, pp. 122-139.

- [110] CIESIELSKI, R., KAWECKI, J., Utilization of experimental investigations in the process of tower structures dynamic identification, Structural Safety Evaluation Based on System Identification Approaches, Workshop in Lambrecht (FRG), 1-19, 1987.
- [111] CIESIELSKI, R., KAWECKI, J., MACIAG, E., PIERONEK, M. Methods of determination of free vibrations of tower-type structures, Euromechanics 112, 81-104, 1987.
- [121] CUNTZE, R., Der Einfluß von Eigengewicht und elastischer Einspannung auf die Biegeeigenfrequenze eines schlanken Stabes von linear veränderlicher Dicke, Der Bauingenieur 46(5), 185-186, 1971.
- [131] NAKAMURA, T., LIN, P., Earthquake response constrained design of one-dimensional distributed mass structures, Proceedings of Ninth World Conference on Earthquake Engineering, Vol.V, 1037-1042, Tokyo, 1988.
- [141] ZEMBATY, Z., On the reliability of tower-shaped structures under seismic excitations, Earthquake Engineering and Structural Dynamics 15, 761-775, 1987.
- [151] LEISSA, A.W., Vibration of plates, NASA Washington D.C., 1969.
- [161] MAGRAB, E.B., Vibration of Elastic Structural Members, Sijthoff and Nordhoff, Netherland, 1979.
- [171] CLOUGH, R.W., PENZIEN, J., Dynamics of Structures, McGraw Hill, New York, 1975.
- [181] DEMİR, H.H., Yapı Dinamiği Ders Notları, Cilt 1-2, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul, 1972.
- [191] CELEP, Z., KUMBASAR, N., Örneklerle Yapı Dinamiği ve Deprem Mühendisliğine Giriş, Sema Matbaacılık, İstanbul, 1992.
- [201] ZEYTİNCİ, A., İnce Dairesel Plakların Titreşimi için Başlangıç Koşullarını da İçeren Genel bir Yaklaşım, Doktora tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi İnşaat Fakültesi, 1980.
- [211] WOLF, J.P., Dynamic Soil-Structure Interaction, Prentice Hall, Englewoods Cliffs, 1985.

- [22] WOLF, J.P., Soil-Structure Interaction Analysis in Time Domain, Prentice Hall, Englewoods Cliffs, 1988
- [23] TIMOSHENKO, S.P., WOINOWSKY-KRIEGER, S., Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill, New York, 1959.
- [24] WEITSMAN, Y., On foundations that react in compression only, Journal of Applied Mechanics ASME 37,1019-1930, 1970.
- [25] WESTBROOK, D.R., Contact problems for the elastic beam, Computers and Structures, 15(4),473-479, 1982.
- [26] PAVLOVIC M.N., TSIKKOS, S., Beams on quasi-Winkler foundations, Engineering Structures 4, 113-118, 1982.
- [27] CHOROS, J., ADAMS, G.G., A steadily moving load on an elastic beam resting on a tensionless Winkler foundation, Journal of Applied Mechanics ASME 46, 175-180, 1979.
- [28] ADAMS, G.G., BOGY, D.B., Steady solutions for moving loads on elastic beam with one-sided constraints, Journal of Applied Mechanics ASME, 42, 800-804, 1975.
- [29] VILLAGGIO, P., A free boundary value problem in plate theory, Journal of Applied Mechanics ASME 50, 297-302, 1983.
- [30] CELEP, Z., Rectangular plates resting on a tensionless elastic foundation, Journal of Engineering Mechanics ASCE 114, 2083-2092, 1988.
- [31] DEMPSEY, J. P., LI, H., Rectangular plates on unilateral edge supports: Part 1. Theory and numerical analysis, Journal of Applied Mechanics ASME 53, 146-150, 1986.
- [32] DEMPSEY, J. P., LI, H., Rectangular plates on unilateral edge supports: Part 2. Implementation; Concentrated and uniform load, Journal of Applied Mechanics ASME 53, 151-156, 1986.
- [33] SALAMON, N. J., PAWLAK, T. P. MAHMOUD, F. F., Plates in unilateral contact with simple supports: Pressure loading, Journal of Applied Mechanics ASME 53, 141-145, 1986.

- [134] ASCIONE, L., OLIVITO, R. S., Unbonded contact of a Mindlin plate on an elastic half-space, *Meccanica* 20, 49-58, 1985.
- [135] OHTOMO, K., IWATATE, T., Proposal of analytical method on foundation uplift considering the damping effect, *Proceedings of Ninth World Conference on Earthquake Engineering*, Vol. VIII, 227-282, Tokyo, 1988.
- [136] CELEP, Z., Circular plates on a tensionless Winkler foundation, *Journal of Engineering Mechanics ASCE* 114, 1723-1738, 1988.
- [137] ASCIONE, L., GRIMALDI, A., Unilateral contact between a plate and an elastic foundation, *Meccanica* 19, 223-233, 1984.
- [138] SELVADURAI, A. P. S., Elastic contact between a flexible circular plate and a transversely isotropic elastic halfspace, *International Journal of Solids and Structures* 16, 167-176, 1980.
- [139] CELEP, Z., TURHAN, D., AL-ZAID, R. Z., Circular elastic plates on elastic unilateral edge support, *Journal of Applied Mechanics ASME* 55, 624-628, 1988.
- [140] CELEP, Z., TURHAN, D., AL-ZAID, R. Z., Contact between a circular plate and a tensionless support, *International Journal of Mechanical Sciences* 30, 733-741, 1988.
- [141] KAMIYA, N., Circular plates resting on bimodulus and no-tension foundations, *Journal of Mechanical Division ASCE* 6, 1161-1164, 1977.
- [142] KAMIYA, N., Nonlinear deformations of flat elastic plates on bimodulus and no-tension foundations, *Res.Rep.Fac.Eng.Mie Univ.*, 2, 19-28, 1977.
- [143] KARASEV, S.N., Contact problem for a circular plate on an elastic foundations, *PMM* 43(2), 330-334, 1979.
- [144] CELEP, Z., MALAIKA, A., HUSSEIN, A., Forced vibration of a beam on a tensionless foundation, *Journal of Sound and Vibration* 128(2), 235-246, 1989.

- [45] ASCIONE, L., BILOTTI, G., The dynamical problem of an elastic plate resting on a two-parameter foundation which does not react in tension, *Meccanica* 25, 92-98, 1990.
- [46] CELEP, Z., On the time-response of square plates on unilateral support, *Journal of Sound and Vibration* 125, 305-312, 1988.
- [47] CELEP, Z., TURHAN, D., Axisymmetric dynamic response of circular plates on tensionless elastic foundation, *Journal of Applied Mechanics ASME* 57, 677-681, 1990.
- [48] HOUSNER, G. W., The behaviour of inverted pendulum structures during earthquakes, *Bulletin of Seismological Society of America* 53, 403-417, 1963.
- [49] MEEK, J. M., Effects of foundation tipping on dynamic response, *Journal of Structural Division ASCE* 101, 1297-1311, 1975.
- [50] MEEK, J. M., Dynamic response of tipping core building, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 6, 437-454, 1978.
- [51] PSYCHARIS, I. N., Dynamics of flexible systems with partial lift-off, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 11(4), 501-521, 1983.
- [52] PSYCHARIS, I. N., An approximate method for estimating the earthquake response of structures with base uplift, *Proceedings of Ninth European Conference on Earthquake Engineering Vol.4A*, 90-99, Moscow, 1990.
- [53] PSYCHARIS, I. N., Effect of base uplift on dynamic response of SDOF structures, *Journal of Structural Engineering* 117(3), 733-754, 1991.
- [54] PSYCHARIS, I. N., JENNINGS, P. C., Rocking of slender rigid bodies allowed to uplift, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 11, 57-76, 1983.
- [55] YIM, S. C. S., CHOPRA, A. K., Earthquake response of structures with partial uplift on Winkler foundation, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 12, 263-281, 1984.

- [156] CHOPRA, A. K., YIM, S. C. S., Simplified earth-quake analysis of structures with foundation uplift, Journal of Engineering Mechanics Division ASCE 111, 906-930, 1985.
- [157] YIM, S. C. S., CHOPRA, A. K., Simplified earth-quake analysis of multistory structures with foundation uplift, Journal of Engineering Mechanics Division ASCE 111, 2708-2731, 1985.
- [158] CELEP, Z., GÜLER, K., Harmonic and seismic response of a plate-column system on a tensionless foundation, Proceedings of Ninth European Conference on Earthquake Engineering Vol.7B, 13-22, Moscow, 1990.
- [159] CELEP, Z., GÜLER, K., Çekme almayan zemin üzerindeki plak-kolon sisteminin harmonik ve deprem etkisi altındaki davranışı, TMMOB İnşaat Mühendisleri Odası Teknik Dergi, 3(1), 1992.
- [160] CELEP, Z., GÜLER, K., Dynamic response of a column with foundation uplift, Journal of Sound and Vibration 149(2), 285-296, 1991.
- [161] GÜLER, K., Elastik zemin üzerindeki plak-kolon sisteminin harmonik dış etkiler altında davranışı, VII. Ulusal Mekanik Kongresi, Antalya, 252-260, Eylül 1991.
- [162] MCLACHAN, N. W., Bessel Functions for Engineers, Clarendon Press, Oxford, 1955.
- [163] ABRAMOWITZ, M., STEGUN, I. A., Handbook of Mathematical Functions, Dover, New York, 1965.
- [164] CELEP, Z., Harmonic and seismic responses of a plate-column system on tensionless Winkler foundation, Journal of Sound and Vibration 155(1), 47-53, 1992.
- [165] ÇAKIROĞLU, A., ÖZMEN, G., Yapıların özel periyotlarının tayini, İstanbul Teknik Üniversitesi Dergisi 26(1), 1-16, 1968.
- [166] ÇAKIROĞLU, A., ÖZMEN, G., Yapıların Özel Periyotlarının Tayini ve Modların Süperpozisyonu Yöntemi, Matbaa Teknisyenleri Basımevi, İstanbul, 1977.

- [67] AYDOĞAN, M., HASGÜR, Z., Betonarme Bacalar, İstanbul Teknik Üniversitesi İnşaat Fakültesi, 1988.
- [68] BAYÜLKE, N., Silindirik kabuk ayaklı yüksek su haznesinin deprem hesabı, Deprem Araştırma Enstitüsü Bülteni 33, 69-85, 1981.

