

14099

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ • FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEMELBAND İLETİŞİM SİSTEMLERİNDE  
KAFES KODLAMA TEKNİĞİNE DAYANAN YENİ HAT KODLARININ TASARIMI

DOKTORA TEZİ

Y.Müh.Ümit AYGÖLÜ

T.C.  
Yükseköğretim Kurulu  
Dokümantasyon Merkezi

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih:3 Kasım 1988

Tezin Savunulduğu Tarih :16 Ocak 1989

Tez Danışmanı

:Prof.Dr.Erdal PANAYIRCI

Diğer Jüri Üyeleri

:Prof.Dr.Bülent SANKUR

Doç.Metin YÜCEL

OCAK 1989

## ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanmasında uyarı ve bilgilerinden yararlandığım sayın hocam ve tez yöneticim Prof.Dr.Erdal Panayırcı'ya değerli yardım ve ilgileri için teşekkür ederim.

## İÇİNDEKİLER

|                                                                                                                 |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| ÖZET .....                                                                                                      | iv |
| SUMMARY .....                                                                                                   | v  |
| BÖLÜM 1. GİRİŞ .....                                                                                            | 1  |
| 1.1. Konuyla İlgili Çalışmalar .....                                                                            | 1  |
| 1.2. Tezde İzlenen Yol ve Getirilen Yenilikler .....                                                            | 7  |
| BÖLÜM 2. YENİ HAT KODLARININ TASARIMI .....                                                                     | 9  |
| 2.1. Kafes Kodlamalı Modülasyon Yönteminin Tanıtımı .....                                                       | 9  |
| 2.2. Kafes Kodlamalı Modülasyon Yöntemine Dayalı Hat Kodlarının Tasarımı .....                                  | 13 |
| 2.3. Kafes Yapıda Yeni Hat Kodlarının Analitik İfadeleri .....                                                  | 33 |
| 2.4. Serbest Öklid Uzaklığının Hesaplanması .....                                                               | 34 |
| 2.5. Tasarlanan Kodların Hata Başarımlarının Değerlendirilmesi .....                                            | 38 |
| BÖLÜM 3. SİSTEM HATA OLASILIKLARININ ÜST SINIRLARININ BELİRLENMESİ .....                                        | 43 |
| 3.1. Konvolüsyonel Kodlayıcılara Dayalı Hat Kodlamasının Tanımlanması ve Gösterilmesi .....                     | 45 |
| 3.2. Genelleştirilmiş Üretme İşlevinin Elde Edilmesi .....                                                      | 47 |
| 3.3. $R=1/2$ Oranlı Hat Kodlamalı Sistemlere İlişkin Hata Olasılıkları İçin Üst Sınırlar .....                  | 52 |
| 3.4. $R=3/4$ Oranlı Hat Kodlamalı Sistemlere İlişkin Hata Olasılıkları İçin Üst Sınır .....                     | 58 |
| BÖLÜM 4. TASARLANAN HAT KODLAMALI SAYISAL TEMELBAND İŞARETLERİN GÜÇ SPEKTRAL YOĞUNLUKLARININ BELİRLENMESİ ..... | 66 |
| 4.1. Güç Spektral Yoğunluğunun Hesabı .....                                                                     | 66 |
| 4.2. Kafes Yapıda Tasarlanan Hat Kodlarının Güç Spektral Yoğunlukları .....                                     | 73 |
| BÖLÜM 5. KAFES YAPIDA HAT KODLARININ SEYİRME ANALİZİ .....                                                      | 77 |
| 5.1. Giriş .....                                                                                                | 77 |
| 5.2. Bilgisayar Benzetim Sisteminin Tanıtımı .....                                                              | 79 |
| 5.3. Bilgisayar Benzetiminin Sonuçları .....                                                                    | 82 |
| BÖLÜM 6. SONUÇLAR .....                                                                                         | 85 |
| KAYNAKLAR .....                                                                                                 | 88 |

## ÖZET

Bu tezde, sayısal haberleşme sistemlerinin hata başarımlarının yükseltilmesine yönelik olarak son yıllarda ortaya atılan kafes kodlamalı modülasyon yöntemi hat kodlamalı temelband sayısal sistemlere uygulanmaktadır.  $R=n/n+1$  ( $n=1,2,3,$ ) kodlama oranları için, kaynaktan üretilen her ikili veri dizisine, kodlayıcı kafes yapısına bağlı olarak,  $2^{n+2}$  elemanlı hat kodu alfabesinden  $n+1$  uzunluklu bir üçlü  $(+,0,-)$  hat kodu karşı düşürülmektedir. Kodlayıcı sonlu durumlu bir sistem olarak ele alınmakta, kod sözcükleri temelband iletişim gereksinimlerinin sağlanması amacıyla tasarlanan bir durum geçiş modeline göre seçilerek durumlara atanmaktadır. Viterbi algoritmasıyla kod çözüleceği varsayılarak sistemin hata başarımı, kodlayıcının ürettiği üçlü simge dizileri arasındaki Öklid uzaklığı artırılarak düzeltilmekte, kafes kodlamasız duruma göre 3-4.77 dB lik kodlama kazançları sağlanmaktadır. Kafes yapıda hat kodlarının analitik olarak ifade edilebilecekleri gösterilmekte, serbest Öklid uzaklıklarının hesaplanmasını sağlayan bir algoritma verilmektedir. Doğrusal olmayan  $R=1/2$  ve  $R=3/4$  oranlı hat kodlarının, hata ağırlıkları açısından simetrik bir yapıya sahip oldukları ortaya çıkarılmakta, buna dayanarak hata olasılıkları için analitik üst sınır ifadeleri verilmektedir. Kodlar, güç spektral yoğunlukları ve seyirme başarımları açısından incelenmektedir.

## SUMMARY

### DESIGN OF NEW LINE CODES IN BASEBAND TRANSMISSION SYSTEMS BASED ON TRELLIS CODING TECHNIQUE

In recent years, "trellis coded modulation" (TCM) method for improving the error performance of band-limited digital communication systems has found a large application area in M-AM, PSK and QAM systems. The detection errors caused by the channel noise can be lowered by increasing the distance between channel signals. The trellis coded modulation method assumes the coding and modulation operations as an entity and uses the redundancy obtained by expanding the signal set in order to increase the minimum distance between coded channel signal sequences. At the receiver, the Viterbi decoder operates directly on the received channel signal sequences instead of the corresponding binary sequences. Then, the code design problem turns out to be searching the encoders with good Euclidean distance properties instead of the encoders with good Hamming distance properties. At the same information rate, important coding gains were obtained without bandwidth expansion. Signal set containing twice the necessary channel signals is used according to a finite-state encoder, thus, for M-AM, PSK and QAM systems, coding gains of 3-4 dB are obtained by means of simple trellis structure. Coding gains up to 6 dB are possible using more complex trellis codes.

In this thesis, the trellis coded modulation method is applied to the line coded baseband transmission systems. In baseband digital transmission systems, the signal to be transmitted must have zero direct-current (dc) component in order to avoid any dc power feeding over the line, must have small power spectral components at low frequencies to reduce low-frequency noise and sufficient timing content to provide the extraction of clock information. If the baseband digital signal is transmitted as a binary unipolar sequence, these requirements are not satisfied. For this purpose, line coding techniques are used. A line encoder transforms binary sequences feeded at rate  $R$  bit/sec, to its input, to  $R'$  symbol/sec rate  $L$ -level ( $L > 2$ ) sequences at its output and provides a redundancy of  $R' \log_2 L - R \log_2 2$  in information rate. This redundancy is used in order to fulfil the basic requirements cited above. Existing line encoders provide the desirable properties due to their finite-state structure without increasing the free Euclidean distance between sequences they produce. If the

Viterbi decoding is assumed, the system error performance is lower-bounded relative to the free Euclidean distance of the encoder as follows:

$$P(e) \geq N(d_s)Q(d_s/2\sigma)$$

where  $\sigma^2$  represents the variance of Gaussian noise process and  $K$  the average number of errors with distance  $d_s$ .  $Q(\cdot)$  is the Gaussian error function.

The free Euclidean distance of a trellis encoder is the minimum Euclidean distance between sequence of pairs starting at a common state in the trellis and going over distinct states until ending at a common state.  $k_{mi}$  denoting  $i$ th symbol of the codeword  $\underline{k}_m$  at the  $m$ th step, the free distance is given as

$$d_s = \min_{\{\underline{k}_m\} \neq \{\underline{k}'_m\}} \left\{ \sum_{m=1}^{n+1} d^2(k_{mi}, k'_{mi}) \right\}^{1/2}$$

Here  $d^2(\dots)$  is the squared Euclidean distance between two channel symbol.

In this work, the basic requirements for baseband digital signal transmission and the error performance improvement by increasing the number of channel signals are considered together.

The design of the new line codes based on trellis coded modulation includes the following steps:

1. For the  $R=n/n+1$  rate line encoder, the optimum choice of a  $2^{n+2}$  - element alphabet among the  $n+1$  length  $3^{n+1}$  ternary sequences (Here, the optimality is in the sense of the maximization of the free Euclidean distance and the restriction of the consecutive symbols with the same polarity). The code alphabet must contain  $2^{n+1}$  codewords with zero polarity,  $2^n$  codewords with +1 and  $2^n$  codewords with -1 polarities.

2. The partitioning of the codeword alphabet to the subsets with maximum Euclidean distance, with respect to the proposed trellis encoder model.

3. The assignment of the codewords of each state-subset to the state transitions in order to maximize the minimum distance between codewords leading to the same state.

On the other hand, the equally use of each codeword and the symmetric distance structure of the trellis encoder is important in order to reach the codes with optimum free distance. But, augmenting the state number of the encoder does not always leads to the codes with better distance properties.

In the second chapter, a codeword assignment model for the branches of the trellis encoder is proposed. According to this model, only codewords with disparities equal to -1, 0 or 1 is used and the value of the running digital sum is restricted to values -1, 0, 1. For  $R=n/n+1$ , ( $n=1, 2, 3$ ) coding rates, according to the trellis structure of the encoder, each  $n$ -length binary data sequence is encoded into a  $n+1$  length ternary (+, 0, -) line codeword chosen among the line code alphabet with  $2^{n+2}$  elements. For  $R=1/2$  and  $R=3/4$  rate line coding, codewords are chosen as ternary sequences produced at the output of the known paired-selected ternary (PST) encoder, in one and two steps, respectively. For  $R=2/3$  rate, selected codewords satisfy the symmetry and distance properties best. In all cases, some codewords are used twice. This leads to partially overlapping subsets in set partitioning and to better codes than the distinct subsets case. Thus, for the same bandwidth, with some loss in data rate, the free Euclidean distance is increased by appropriate assignments of codeword subsets to the branches of the trellis encoder. For  $R=1/2$  rate line code, the maximum value of the free distance ( $d_{\text{free}}^2=8$ ) is reached for four-state encoder and a coding gain<sup>s</sup> of 3 dB is obtained compared to the paired-selected ternary code. For  $R=2/3$  rate, an eight-state encoder give the optimum solution. The reached value of the squared free Euclidean distance is equal to 6 and a coding gain of 4.77 dB is obtained compared to the uncoded case. In  $R=3/4$  rate design, the maximum value of the free distance ( $d_{\text{free}}^2=6$ ) is realized with an eight-state encoder with parallel<sup>s</sup> transitions. Parallel transitions mean that the last bits of binary 3-bit length sequences are not affected by the trellis coding. These last bits determine which of the two codewords in the corresponding subset will be chosen. The coding gain obtained with respect to the uncoded case is 4.77 dB and 3.52 dB with respect to the PST encoder. Further in the same chapter, it is shown that the designed line codes can be analytically expressed and a new algorithm for the calculation of free Euclidean distance between line coded sequences is developed. A computer simulation is made for the baseband communication system with  $R=n/n+1$  rate TCM line encoders operating in an additive white Gaussian noise environment. When using the Viterbi decoding, the error-event probability is assumed as a performance criterion. It is assumed that an error event occurs if the Viterbi algorithm decides to a state which does not belong to the correct path. In terms of the error curves, it is shown that  $R=n/n+1$  ( $n=1, 2, 3$ ) rate TCM line encoded systems have better error performance than the corresponding uncoded cases.

For the convolutional codes, the free Hamming distance and the upper bounds on the error probabilities are determined based on the state transition diagram of the encoder. Because of the linearity of these binary codes the all-zero sequence can be assumed as the correct code sequence. The generating function obtained from the state transition diagram provide the distance, step length

and the number of bit errors of any incorrect sequence compared to the correct sequence. For the nonlinear trellis codes, these properties can not be obtained by the same simple approach. For a nonlinear encoder, the Euclidean distance between any incorrect sequence and the correct sequence is generally dependent upon the correct sequence. In other words, the all-zero sequence can not be assumed as the correct sequence without loss of generality. Then, the evaluation of the upper bounds on error probabilities necessitates the analysis of very complex diagrams specially at high encoder state numbers.

In Chapter 3, a method for computation of the upper bounds on error-event and bit-error probabilities of nonlinear trellis codes with the same complexity as the linear trellis codes is generalized for the new line encoders which have partially distinct and partially overlapping state-subsets. It is shown that  $R=1/2$  and  $R=3/4$  rate line encoders satisfy the error weight profile equivalency condition necessitated by this method. For these encoders, the modified generating functions are obtained from a signal-flow graph with state number equal to the state number of their trellis diagram and the analytical expressions for the error upper bounds are calculated. For  $R=1/2$  rate encoder which has higher coding redundancy, an upper bound of  $10^{-5}$  for error-event probability is reached at a signal to noise ratio equal to 7.8 dB. Same error bound is reached at 13.3 dB for  $R=3/4$  rate encoder.

Chapter 4 is concerned with the evaluation of power spectral densities for the new line codes proposed. For each  $R=n/n+1$  ( $n=1,2,3$ ) rate, it is aimed at determine the code with minimum spectral components at low frequencies among codes having equal and maximum free distances. For  $R=1/2$  rate, the encoder having minimal components at low frequencies is chosen among four encoders with equal and maximum free distance. For  $R=2/3$  and  $R=3/4$  rates, in spite of the fact that there are more than one encoder with maximum free distance, their power spectras are equal. The TCM line encoders are also compared with known line encoders. The bipolar encoder power spectra is the best at low frequencies. The new line encoders have smaller spectral components at these frequencies with respect to 4B3T, FOMOT, MS43 encoders. Only  $R=1/2$  rate TCM encoder has smaller components than the PST encoder at frequencies around zero.

In Chapter 5, the jitter performance of the base-band transmission systems with line encoders based on trellis coded modulation method, is analysed. Usually, the analytical approach is not practical for the codes having complex statistical properties such as our case. Therefore, in order to obtain the clock information, the base-band transmission system including the TCM line encoders and a timing circuit is simulated by a computer program. The timing circuit is formed by a square-law device

followed by a narrow band filter tuned to the symbol repetition frequency. For  $R=n/n+1$  ( $n=1,2,3$ ) rate line encoder, the root-mean-square jitter curves with respect to the roll-off factor ( $\alpha$ ) of the transmitting/receiving filters and to the quality factor of the narrow band filter, are obtained. The jitter performances of  $R=1/2$  and  $R=3/4$  rate encoders are very close to each another and are superior to the  $R=2/3$  rate encoder specially at small values of  $\alpha$ .



## BÖLÜM 1. GİRİŞ

Son yıllarda sayısal iletişim sistemlerinin, bandı sınırlı kanallardaki hata başarımlarının artırılmasına yönelik "kafes kodlamalı modülasyon" ("trellis coded modulation") yöntemi, çok düzeyli genlik modülasyonu (M-AM), faz kaydırmalı anahtarlama (PSK), dik genlik modülasyonu (QAM) gibi modülasyon türlerini içeren sistemlerde geniş bir uygulama alanı bulmuştur. Kanal işaretlerinin işaret uzayında birbirlerinden uzak seçilmesi, kanal gürültüsü nedeniyle alıcıda oluşan sezme hatalarını azaltmaktadır. Kafes kodlamalı modülasyon yöntemi, işaret kümesini genişleterek sağlanan fazlalığın kodlanmış işaret dizileri arasındaki minimum Öklid uzaklığını artırmada kullanılması ilkesine dayanmaktadır. Bu tezde, kafes kodlamalı modülasyon yöntemi, ilk kez, hat kodlamasına uygulanmaktadır.

### 1.1. Konuyla İlgili Çalışmalar

Bandı sınırlı sayısal haberleşme sistemlerinin hata olasılıkları, işaret gücü artırılarak azaltılabilmektedir. Güç sınırlaması altında ise, işaret aralığı başına bit sayısı artırılarak (hata düzeltme kodlaması) hata olasılığını düşürmek olanaklıdır. Bunun sonucunda, ya band genişliği artacak ya da iletim hızında belli bir azalma olacaktır. Değişik bir yaklaşım, ilk kez, Ungerboeck[1],[2],[3] tarafından ortaya atılmıştır. Kafes kodlamalı modülasyon olarak adlandırılan bu yöntemde kodlama ve modülasyon işlemleri bir bütün olarak düşünülmektedir. Kanal işaretleri kümesini genişleterek elde edilen fazlalık, "konvolüsyonel kodlayıcılarda"[4] olduğu gibi, sonlu sayıda durum ve durum geçişlerini içeren kafes yapıda kodlayıcılara bağlı olarak, işaret dizileri arasındaki serbest Öklid uzaklığını artırmak amacıyla kullanılmaktadır. Bu yolla, sabit band genişliği için, kafes kodlamasız durumda belli bir işaret

-gürültü oranında sağlanamayan hata başarımlarına aynı iletim hızında erişilebilmektedir. Alıcıda, klasik hata düzeltme kodlarından farklı olarak, Viterbi[5] kod çözücü, doğrudan kanal çıkışındaki modülasyonlu işareti işlemektedir. Bu nedenle, kafes kodlayıcı yapısındaki durum geçişleri, ikili kod sözcükleri yerine modülasyonlu kanal işaretleri cinsinden belirlenmekte ve konvolüsyonel kodlayıcılardaki serbest Hamming uzaklığı[4] yerine serbest Öklid uzaklığı başarımlar ölçütü olarak belirlenmektedir. Ungerboeck[1], [2], M-AM, PSK ve QAM sistemler için, kafes kodlamasız durumda gereken işaret sayısının iki katı sayıda elemandan oluşan işaret kümeleri seçerek, basit kafes yapılarla 3-4 dB'lik kodlama kazançları sağlamış, daha karmaşık kafes yapılarla 6 dB'e kadar kazançlar elde edilebildiğini göstermiştir.

Daha sonra, Calderbank ve Mazo[6] kafes kodları analitik olarak ifade etmişler, çok düzeyli darbe genlik modülasyonlu kafes kodlar için basit ifadeler bulmuşlardır. Bu ifadelere dayanarak, modülasyonlu işaretlerin eşit aralıklı seçilmemeleri durumunda, Ungerboeck'ünkilere göre kodlama kazancının biraz daha artırılabilirdiğini göstermişlerdir.

Aynı yazarlar[7],[8], kafes kodların başarımları için durum sayısına, işaret boyutuna bağlı genel üst sınırlar hesaplamışlardır.

Taylor ve Chan[9], sekiz durumlu,  $R=2/3$  oranlı 8-PSK kafes kodunun, bilgisayar benzetimi yardımıyla, doğrusal olmayan bandı sınırlı uydu kanalları için bit hata olasılıklarını işaret-gürültü oranına bağlı olarak elde etmişlerdir.

Biglieri[10], kafes kodlarda serbest Öklid uzaklığının ve simge hata olasılığının üst sınırının hesaplanmasına ilişkin bir yöntem vermiştir. Kodlayıcı durum sayısının iki katı sayıda durum kapsayan bir durum geçiş

diyagramının aktarım işlevinin hesabına dayalı bu yöntem ancak az sayıda durumlu kodlar için elverişli olmaktadır. Aynı makalede Biglieri, doğrusal olmayan bantı sınırlı uydu kanallarında, 16-PSK işaretlerin, 16-QAM ve 12/4 PSK (iki genlik düzeyli) işaretlere göre daha üstün oldukları sonucuna varmıştır.

Wilson et al.[11], 16-PSK modülasyonlu  $R=3/4$  oranlı kafes kodlarını  $2^n$  ( $n=1,2,3,4,5$ ) durum sayısı için optimize etmişler ve kodlamasız 8-PSK sisteme göre 4.8 dB'e kadar kodlama kazançları sağlamışlardır. Yazarlar, bu kodları Ungerboeck'ün önerdiği 16-QASK kodlarla doğrusal olmayan bantı sınırlı kanallardaki başarımları açısından kıyaslamışlar, QASK kodların eşit ortalama enerji koşulu altında PSK kodlarına göre üstünlüklerine karşın PSK kodların doğrusal olmayan kuvvetlendirme koşullarında üstün olduklarını ortaya koymuşlardır.

Wilson[12], 8-PSK işaret kümesini kodlama aralığında iki kez kullanarak, 64 elemanlı bir kod alfabesi oluşturmuş ve bu yolla  $R=5/6$  oranlı bir kafes kodlayıcı tasarlamıştır. Spektral verimlilik[38] açısından bu kod (5 bit/2 simge),  $R=2/3$  oranlı 8-PSK koda (2 bit/1 simge) göre daha iyi,  $R=3/4$  oranlı 16-PSK koda (3 bit/1 simge) göre ise daha kötüdür.

Lee-Fang Wei[13],[14],  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  taşıyıcı faz belirsizliklerinden etkilenmeyen kodların tasarımıyla ilgilenmiş,  $180^\circ$  belirsizlik için doğrusal,  $90^\circ$  ve  $270^\circ$  belirsizlikler için doğrusal olmayan yapıda ikili kodlayıcılar tasarlayarak, ikili dizilerden kanal işaretlerine uygun eşlemelerle bu tür belirsizliklerin etkilerinin ortadan kaldırılabilceğini göstermiştir.

Çok boyutlu işaret gösterilimleri, kodlayıcı karmaşıklığı, taşıyıcı faz belirsizliklerine duyarlılık gibi açılardan iki boyutlu gösterilimlere göre üstün olmaktadır. Bu alanda yapılan çalışmalarda, Calderbank ve Sloane[15]

dört boyutlu, 8 durumlu kafes kodlayıcılar tasarlamışlar, Lee-Fang Wei[16] ise 4, 8 ve 16 boyutlu işaret gösterilimlerini ve ilişkin kodlayıcı yapılarını incelemiştir.

Divsalar et al.[17], simetrik olmayan (asimetrik) işaret gösterilimleriyle klasik anlamda düzgün simetriye sahip gösterilimlere göre daha iyi serbest Öklid uzaklıklı kodlar elde edilebileceğini göstermişlerdir.

Ungerboeck'ün kanal işaretleri kümesini bölmeleyerek kod tasarım yöntemine alternatif olabilecek, "lattice" ve "coset" kavramlarına dayalı bir tasarım yöntemi, Calderbank ve Sloane [18] tarafından ortaya konmuştur. Bu yöntem, özellikle, karmaşık yapıda kodların tasarımında yarar sağlamaktadır.

Kafes kodlamalı modülasyon tekniğinin temelband iletişim sistemlerine uygulanmasına ilişkin bir çalışma, Wolf ve Ungerboeck[19] tarafından "kısmi-yanıtlı" (partial-response) kanallar için yapılmış, bu yazarlar, aynı band genişliğinde, belli bir iletim hızı kaybına karşılık sistem hata başarımının düzeltilebileceğini göstermişlerdir.

Yaklaşık on yıllık bir geçmişe sahip kafes kodlamalı modülasyon tekniği, günümüzde artık CCITT standartlarına[20],[21] geçmiş, özellikle yüksek hızlı modemlerde başarımlarının ötelenmesini sağlamıştır.

Bu referans çalışmaları, kafes kodlamalı modülasyon yönteminin uygulamalarının taşıyıcılı sayısal iletişim sistemleri üzerinde yoğunluk kazandığını ortaya koymaktadır. Bu tezde, kafes kodlamalı modülasyon yöntemine dayanarak, hata başarımları yüksek hat kodlamalı sistemlerin tasarımı amaçlandığından, burada, temelband iletişimde karşılaşılan sorunların çözülmesine yönelik olarak şimdiye dek yapılmış çalışmaların da ele alınması uygun olacaktır.

Temelband sayısal iletişim sistemlerinde, iletilecek işaretlerin, hattan doğru akım gücü taşınmaması için doğru akım bileşenlerinin sıfır olması, alçak frekans gürültüsünün etkisini azaltmak için güç spektral bileşenlerinin bu frekanslarda küçük olması ve yeterli zamanlama bilgisine sahip olması istenir. Temelband sayısal işaretlerin tek yönlü ikili darbeler biçiminde iletilmesi durumunda bu özellikler sağlanamaz. Uzun 0 dizileri ve sıfıra dönüşsüz uzun 1 dizileri yineleyicilerde ve alıcıda zamanlama hatalarına neden olurlar. Ayrıca, doğru akım bileşenleri ve alçak frekanslardaki yüksek spektral enerjileri alternatif akım bağlaşmalı hatlarda istenmez. Bu problemlerin çözülmesi amacıyla, hat kodlaması yöntemlerinden yararlanılır[22],[23],[24],[25].

Bir hat kodlayıcısı, girişine  $R$  (ikili sayı/sn) hızıyla gelen ikili dizileri çıkışında belli bir kurala göre  $R'$  (Simge/sn) hızıyla hatta iletilen  $L > 2$  düzeyli dizilere dönüştürür. Dönüşüm, enformasyon iletim hızında  $R' \log_2 L - R \log_2 2$  (bit/sn) veya yüzde olarak  $r = [(R'/R) \log_2 L - 1] 100$  kadar bir "fazlalık" (redundancy) sağlar. Bu fazlalık, sonlu durumlu bir yapıya sahip kodlayıcıda hat işaretinin istenen özellikleri sağlaması amacıyla kullanılır.

"Sayısal toplam değişimi" (digital sum variation) kodlanmış bir hat dizisinde art arda gelebilen aynı kutuplu darbe sayısı olarak tanımlanır ve kod tasarımıyla olabildiğince küçük tutulur. "Akan sayısal toplam" (running digital sum) ise herhangi bir kodlama adımında kodlayıcının doğru akım bileşeninin değerini gösterir. Doğru akım bileşeninin sıfır ortalama değeri çevresindeki değişimleri, hat işaretinde simgelerarası girişime neden olurlar, dolayısıyla, bu değişimleri sınırlamak tasarım açısından önemlidir. Chang et al.[26] simgelerarası girişimi akan sayısal toplam kavramına dayandırarak, Bayes karar kurallı[4] varsayımı altında simge hata olasılığını minimum yapan bir kod tasarım yöntemi geliştirmişlerdir.

Gerçekleştirme kolaylığı nedeniyle en çok kullanılan hat kodları üç düzeylidirler (pozitif, sıfır ve negatif düzeyler). Bu tür kodlar, düzeylerin enformasyon sığalarının tümü kullanılmadığından "sözde-üçlü kodlar" (pseudo-ternary codes) olarak adlandırılırlar[27],[28]. Sözde-üçlü kodlardan en bilineni "iki kutuplu" (bipolar) ya da AMI kodlardır. Doğrusal yapıdaki bu kodlamada, ikili dizideki sıfırlar "0 volt" olarak, birler ise bir önceki bire ilişkin darbenin zıt yönünde bir darbeye dönüştürülerek iletilirler. Uzun 0 dizilerinin yeterli zamanlama bilgisi taşıyamaması bu kodun başlıca sakıncasını oluşturur[22]. Buna önlem olarak, yüksek yoğunluklu iki kutuplu kodlar (HDBn) ortaya atılmıştır[24]. Bu kodlarda  $n+1$  tane art arda gelen 0 dan  $n+1$  inci 0 bir önceki darbeye aynı yönde bir darbeye dönüştürülür.

Doğrusal olmayan hat kodlarında, kodlanmış dizi ikili veri dizisinden doğrusal bir ilişki yardımıyla elde edilemez. PST (paired-selected ternary) kodunda[22],[29] iki bitlik ikili diziler iki moda bağlı olarak, aynı kutuplu, art arda gelen darbeleri ve 0'ları sınırlandıracak biçimde, yine iki bitlik üç düzeyli sözcüklere dönüştürülür. Bu kod için sayısal toplam değişimi 3'dür. Doğrusal olmayan hat kodları arasında, dört bitlik ikili dizileri üç bitlik üç düzeyli sözcüklere dönüştürerek darbe oranında belli bir azalma sağlayan, buna karşılık diğer hat gereksinimleri ve hata başarımı açısından PST koduna göre daha kötü sonuçlar veren üç modlu 4B3T[30], MS43[23], dört modlu FOMOT[31] kodları sıralanabilir. Sayısal toplam değişimi 4B3T kodunda 7, MS43 ve FOMOT kodlarında 5'dir. Bunun sonucunda, daha karmaşık devreler gerektirmelerine karşın MS43 ve FOMOT kodların başarımları 4B3T kodundan daha iyidir[22],[24].

Bilinen hat kodlayıcıları, sonlu durumlu yapılarıyla, temelband kanal gereksinimlerini sağlayan kodlanmış dizileri oluştururken, bu diziler arasındaki Öklid uzaklığını artırmazlar. Oysa, Viterbi[5] algoritmasıyla kod

çözüleceği varsayımı altında, sistem hata başarımı kodlayıcının ürettiği diziler arasındaki serbest Öklid uzaklığına bağlı olarak alttan sınırlanır. bu bilgilerin ışığında, bu tezde, kafes kodlamalı modülasyon tekniğine dayanarak, temelband iletişime uygunluğun yanında yüksek hata başarımı üç düzeyli (+,0,-) hat kodlarının tasarımı amaçlanmıştır.

## 1.2. Tezde İzlenen Yol ve Getirilen Yenilikler

Çalışmanın ikinci bölümünde, kafes kodlamalı modülasyon tekniği açıklanarak  $R=n/n+1$  ( $n=1,2,3$ ) oranlı kafes yapıda hat kodlarının tasarımıyla ilgili temel kavramlar tanımlanmaktadır. Her kodlama oranı için optimum kod alfabesi belirlenerek, kod sözcüklerinin kafes kodlayıcının durum geçişlerine atanmasında, temelband iletişim gereksinimleri açısından akan sayısal toplamın -1,0 ve 1 değerleriyle sınırlı kalmasını sağlayan bir kodlayıcı modeli verilmiştir. Bu modele dayanarak, kodlayıcının ürettiği üçlü diziler arasındaki serbest Öklid uzaklığını maksimum yapacak biçimde tasarım yoluna gidilmiştir. Kafes yapıda hat kodlarının analitik olarak ifade edilebileceği gösterilmiş, serbest Öklid uzaklıklarının hesaplanmasında geçerli bir algoritma verilmiştir. Bu kodların hata başarımları bilgisayar benzetimi yardımıyla incelenmiş, kafes kodlamasız aynı oranlı kodlarla kıyaslanarak üstünlükleri ortaya konmuştur.

Üçüncü bölümde, kafes yapıda tasarlanan, doğrusal olmayan hat kodlarının hata olasılıkları ve bit hata olasılıkları için üst sınırlar araştırılmıştır. Bu olasılıklar için üst sınırlar doğrusal kafes kodlarda (konvolüsyonel kodlar) durum diyagramından elde edilen üretme işlevine dayanarak verilebilmektedir. Doğrusal olmayan kafes kodlar için üretme işlevinin elde edilmesi genel olarak, oldukça karmaşık diyagramların çözümlenmesini gerektirmektedir. Ancak, tasarlanan  $R=1/2$  ve  $R=3/4$  oranlı hat kodlarının, kodlayıcı durumlarına atanan kod sözcük alt

kümelerinin, hata ağırlığı açısından belirli simetri özellikleri gösterdiği ortaya çıkarılmış ve bu durumda üretme işlevleri, doğrusal kafes kodlardakine eşit karmaşıklıkta elde edilmiştir. Bu işlevler yardımıyla, hata olasılıkları için üst sınır bağıntıları belirlenmiş ve hata üst sınır eğrileri elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, kodların güç spektral yoğunlukları hesaplanmış, her kodlama oranı için, aynı maksimum serbest Öklid uzaklığını veren kodlar arasından alçak frekanslarda minimum spektral bileşenlere sahip kodun seçilmesi amaçlanmıştır.

Beşinci bölümde, gürültülü bir sayısal haberleşme sisteminin bilgisayar benzetimine dayanarak, tasarlanan hat kodlarının seyirme analizi yapılmıştır. Kanal band genişliğine ve zamanlama devresindeki süzgeç yapısına bağlı olarak kodların bağıl seyirme eğrileri çıkarılmıştır.

## BÖLÜM 2. YENİ HAT KODLARININ TASARIMI

### 2.1. Kafes Kodlamalı Modülasyon Yönteminin Tanıtımı

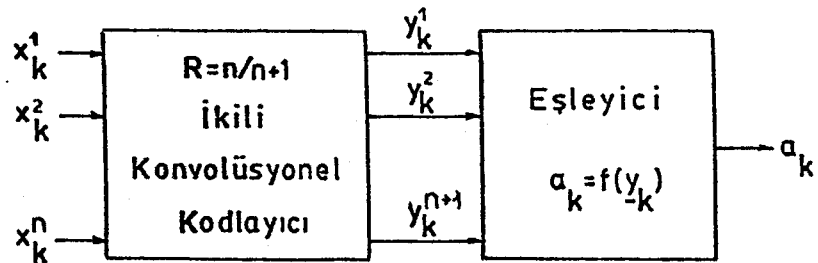
Sayısal haberleşme sistemlerinin tasarımı, temel amaçlardan biri sistem hata başarımının yüksek tutulmasıdır. Hata sezme ve düzeltme özelliği, iletilecek işarete kanal kodlaması uygulanarak kazandırılır. Klasik kanal kodlayıcıları,  $n$  bitlik ikili veri dizilerini,  $m-n$  tane kontrol biti ekleyerek  $m$  ( $m > n$ ) uzunluklu ikili kod sözcüklerine dönüştürürler. Kodlanmış ikili diziler arasındaki Hamming uzaklıkları kod çözücüde karar verme işlemini belirlediğinden kod tasarımının temel ölçütü olmaktadır. Daha sonra, kodlanmış ikili bilgi, türlü sayısal modülasyon yöntemlerinden (PSK, QAM, vb.) biriyle modüle edilerek kanala uygulanır. Dizi uzunluğunun artması sonucu söz konusu olabilecek veri iletim hızı kaybı, modülasyon hızı ve dolayısıyla band genişliği artırılarak engellenebilir. Band sınırlaması altında ise kanal işaretleri kümesi genişletilerek aynı amaca ulaşılabilir. Genişletilmiş işaret kümesi yardımıyla tasarım, kodlama ve modülasyon işlemleri ayrı ayrı düşünüldüğünde başarılı olamamaktadır. Bunun bir nedeni, alıcıda, demodülasyon ve kod çözme işlemlerinin ayrı ayrı yapılması sonucunda, kod çözücüden önce, demodülasyon sırasında donanım yoluyla karar verme hatalarının getirdiği bilgi kayıplarıdır. Diğerisi ise "Hamming Uzaklık Ölçütü"ne [4] göre bağımsız olarak tasarlanmış bir ikili kodlayıcının çıkışlarının kanal işaretlerine karşı düşürülmesinin, kanal işaretlerinin işaret uzayında birbirlerine olan uzaklıklarını artırmamasıdır.

Kafes kodlamalı modülasyon tekniğinde kanal kodlaması ve modülasyon işlemleri bir bütün olarak ele alınmaktadır. Ungerboeck [1], [2], [3], band sınırlaması altında, kullanılacak modülasyonlu işaret sayısını gereğinden fazla

olarak bilgi iletim hızının sabit tutulabileceğini ve bu yolla kodlama kazancı sağlanabileceğini, Shannon'un [4] kanal sığası teoremine dayanarak göstermiştir.

Kodlayıcının, ikili kod sözcükleri arasındaki Hamming uzaklığı yerine modülasyonlu kanal işaretleri arasındaki Öklid uzaklığını artıracak biçimde tasarlanması ve alıcıda, kanal çıkış işaretlerinin demodülasyon yoluyla ikili dizilere dönüştürüldükten sonra çözülmesi yerine, kod çözücünün, doğrudan, kanal çıkış işaretlerini çözecek biçimde tasarlanması yukarıda sözü edilen problemlerin ortadan kalkmasını sağlamaktadır.

Kafes kodlamasız durumda, işaret aralığı başına  $n$  uzunluklu her ikili dizi,  $2^n$  kanal işaretinden birine karşı düşürülerek modüle edilebilmektedir. Kafes kodlamalı tasarımda ise, Ungerboeck [1],  $n$  uzunluklu her diziyi, kodlayıcı durumlarına bağlı olarak  $2^{n+1}$  kanal işaretinden birisine karşı düşürmektedir. Bu amaçla,  $n$  uzunluklu ikili dizileri  $n+1$  uzunluklu ikili dizilere dönüştüren  $R=n/n+1$  oranlı bir konvolüsyonel kodlayıcı kullanılmakta ve  $n+1$  uzunluklu diziler de  $2^{n+1}$  kanal işaretiyle bire bir eşlenmektedir (Şekil 2-1). Sonuçta, bilgi akışı içerisinde,



Şekil 2-1. "Kafes Kodlamalı Modülasyon"da kodlayıcı yapısı

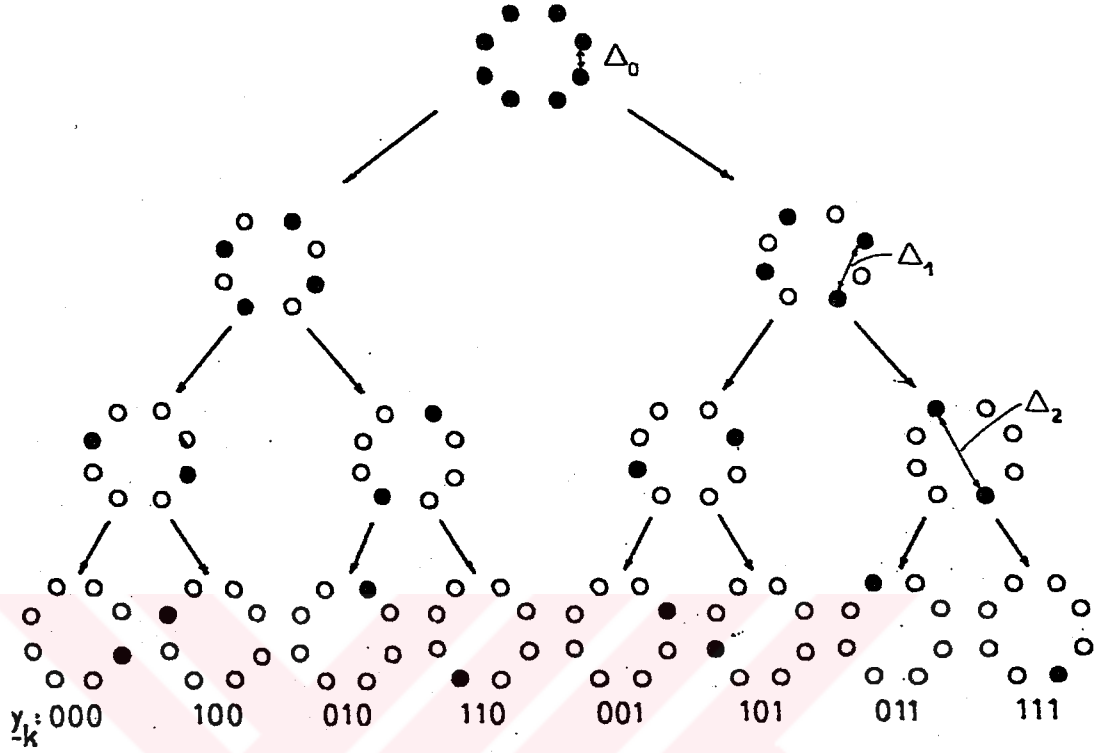
aynı  $n$  uzunluklu ikili dizi, kendisinden önceki dizilere bağlı olarak, farklı kanal işaretlerine karşı düşürülmektedir.

İkili konvolüsyonel kodların çözülmesinde kullanılan Viterbi algoritması [5], kafes kodlamalı modülasyon yönteminde de, alınan gürültülü işaret dizisine en yakın kanal giriş dizisini belirlemede kullanılmaktadır. Alıcıda, gürültülü işaretlerin Viterbi algoritması ile çözülecek olması, bir sonraki alt bölümde açıklanacağı gibi, hata olasılığının kodlanmış işaret dizileri arasındaki serbest Öklid uzaklığı ile sınırlanması olgusunu getirmektedir. Bu nedenle, iyi hata başarımına sahip kodların tasarımı bu uzaklığın artırılması ilkesine dayanmaktadır.

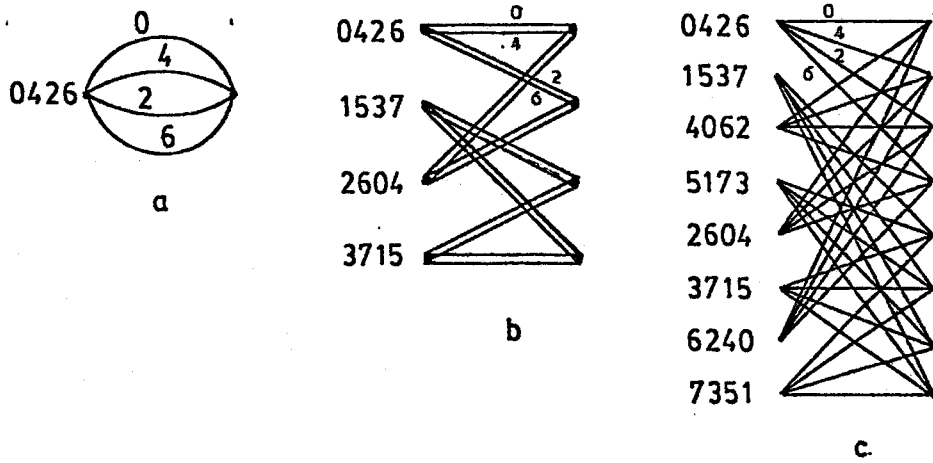
Ungerboeck[1], kafes yapılı kodları, "küme ayrıştırarak eşleme" (mapping by set partitioning) olarak adlandırdığı kurala göre tasarlamaktadır. Bu kurala göre, gerektiğinden iki kat fazla elemandan oluşan kanal işaretleri kümesi, belli bir simetri altında, aralarındaki Öklid uzaklığı giderek artacak biçimde, giderek daha az elemanlı alt kümelere bölünmektedir. Şekil 2-2 de 8-PSK modülasyonu için kanal işaretlerinin ayrıştırılması görülmektedir.

Daha sonra, oluşturulan bu alt kümeler, seçilen kafes yapının durum geçişlerine, kodlayıcının üreteceği kanal işareti dizileri arasındaki serbest Öklid uzaklığı maksimum olacak biçimde atanmaktadır. Bu işlem sırasında, bütün kanal işaretlerinin eşit sayıda kullanılmasına, simetrik bir yapı oluşturulmasına, kalkış ve varış durumlarına atanan alt kümelerin maksimum uzaklıklı olmasına dikkat edilmektedir.

Ungerboeck, 8-PSK modülasyonlu sistemler için, 4, 8 ve 16 durumlu kafes yapılara dayanarak elle tasarladığı kodlarla, kafes kodlamasız 4-PSK sistemine göre, sırasıyla, 3, 3.6 ve 4.1 dB lik kodlama kazançları sağlamıştır [1]. Kafes kodlamasız 4-PSK ve 4 ve 8 durumlu kafes kodlamalı 8-PSK sistemlerinin kodlayıcı yapıları Şekil 2-3'de verilmiştir.



Şekil 2-2. 8-PSK işaret kümesinin ayrıştırılması ( $\Delta_0 < \Delta_1 < \Delta_2$ )



Şekil 2-3. (a) Kodlamasız 4-PSK, (b) 4 durumlu 8-PSK, (c) 8 durumlu 8-PSK kodlayıcı yapıları

## 2.2. Kafes Kodlamalı Modülasyon Tekniğine Dayalı Yeni Hat Kodlarının Tasarımı

Darbe kod modülasyonlu sayısal haberleşme sistemleri, sürekli bilgi işaretlerinin örneklenmesi, kuantalanması ve kodlanması aşamalarını kapsar. Elde edilen, temelbandda, sıfır frekans çevresinde bileşenlere sahip, ikili sayılardan oluşan kodlanmış veri dizisi, doğrudan iletilecek kanala uygulanamaz. Kanal, band geçiren bir spektrum bölgesindeyse, ikili veri dizisiyle sürekli bir sinüsoidal taşıyıcının genlik, faz veya frekansı modüle edilerek (genlik, faz veya frekans kaydırmalı anahtarlama) bilginin ilişkin frekans bölgesine taşınması sağlanır. Kanal temelbandda ise, temelband iletimin getirdiği sınırlamalar göz önüne alınmalıdır. Bu sınırlamalar, iletilecek işaretin;

- a) doğru akım bileşeninin olmaması,
- b) alçak frekanslarda taşınacak enerjinin düşük olması,
- c) yeterli zamanlama bilgisi sağlayacak düzeyde sıfır geçişlerinin olması,
- d) geçersiz kod sözcüklerinin işletim sırasında belirlenebilme özelliğinin olması, biçiminde sıralanabilir [22],[24].

Güç spektrumunun sıfır frekansında sıfır, alçak frekanslarda ise küçük bileşenlere sahip olmasının gereği, hatlarda alçak frekans gürültüsünün bastırılması ve güç beslemesinin sağlanması amacıyla transformatör ya da kondansatörlü alternatif bağlaşma devrelerinin kullanımından kaynaklanmaktadır. Yüksek frekanslarda ise, zayıflama ve çapraz karışım (crosstalk) etkileri daha etkin olmaktadır. Bu nedenle, çok yüksek frekanslarda taşınan enerji de düşük tutulmalıdır. Yineleyicilerde ve alıcıda, zamanlama işareti, genellikle ekonomik nedenlerle, bilgi işaretinin kendisinden doğrusal olmayan bir zamanlama devresi yardımıyla elde edilir. Bu amaçla, kanaldan iletilecek bilgi işaretinin, zamanlama bilgisinin yitirilmesine neden

olan etkilerden arınmış olması gerekir.

Yukarıda belirtilen problemlerin çözülmesiyle ikili kodlanmış bilgi dizisinin temelband kanala uygun biçime dönüştürülmesi işlemi hat kodlaması olarak adlandırılır. Hat kodlamasında, kodlama düzeyi sayısı artırıldığı gibi, kod alfabesi de yukarıda belirtilen iletim gereksinimlerini sağlamak amacıyla genişletilir. Kod sözcükleri, kodlayıcı doğru akım düzeyini sıfırda dengeleyecek biçimde iki veya daha fazla moda paylaştırılır. Örneğin, üç düzeyli hat kodlarından iki kutuplu (bipolar) ve PST (paired-selected ternary) koduna ilişkin alfabeler Tablo 2-1'de verilmiştir. Hat kodlamasından beklenen diğer bir özellik, sistem hata olasılığının küçük olmasıdır.

Tablo 2-1. (a) İki kutuplu kodlayıcı: Her ikili 1'den sonra mod değişir, (b) PST kodlayıcı: Her ikili 01 veya 10'dan sonra mod değişir.

| İKİLİ<br>DİZİ | A<br>MODU | B<br>MODU |
|---------------|-----------|-----------|
| 0             | 0         | 0         |
| 1             | +         | -         |

(a)

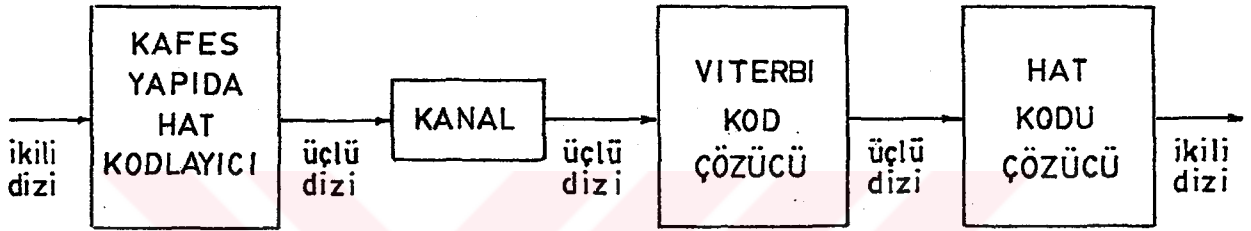
| İKİLİ<br>DİZİ | A<br>MODU | B<br>MODU |
|---------------|-----------|-----------|
| 00            | -+        | --        |
| 01            | 0+        | 0-        |
| 10            | +0        | -0        |
| 11            | +-        | +-        |

(b)

Bu tezde, Bölüm 2.1'de tanıtılan, kanal işaretleri kümesini genişleterek kafes kodlama yardımıyla sistem hata başarımının artırılması yöntemi hat kodlamasına uygulanmıştır. Gerek gerçekleştirmede sağladığı kolaylıklar açısından gerekse kafes kodlamalı modülasyon tekniğine yatkınlığı nedeniyle kod sözcükleri üç düzeyli (+,0,-) simgelerden oluşturularak temelband sayısal iletişimin gerektirdiği yapıda hat kodları aynı zamanda yüksek hata başarımları sağlayacak biçimde tasarlanmıştır. Kodlayıcı, sonlu

durumlu bir sistem olarak varsayılmış ve girişine uygulanan  $n$  bit uzunluklu ikili dizilere, konvolüsyonel kodlayıcılarda kullanılan kafes yapılarına bağlı olarak  $n+1$  uzunluklu üçlü hat kodu sözcüklerini karşı düşürecek biçimde tasarlanmıştır[32],[33].

Ele alınan temelband sayısal iletişim sisteminin blok yapısı Şekil 2-4'de görülmektedir.



Şekil 2-4. Hat kodlamalı temelband iletişim sistemi

Kanalın toplamsal beyaz Gauss gürültüsüyle modelendiği varsayılırsa, alıcıda Viterbi algoritmasıyla kod çözüleceğinden sistem hata olasılığı (error-event probability) "serbest uzaklık"la ( $d_s$ , free distance) alttan sınırlanmıştır[4]:

$$P(e) \geq N(d_s)Q(d_s/2\sigma) \quad (2.1)$$

Burada,  $\sigma^2$  toplamsal Gauss gürültüsünün varyansını,  $N(d_s)$ ,  $d_s$  uzaklıklı hata olaylarının ortalama sayısını göstermektedir.  $Q(.)$  Gauss hata işlevidir:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-\alpha^2/2) d\alpha \quad (2.2)$$

Viterbi kod çözücünün, klasik konvolüsyonel kodlayıcılarda olduğu gibi kanal çıkış dizilerine karşı düşen

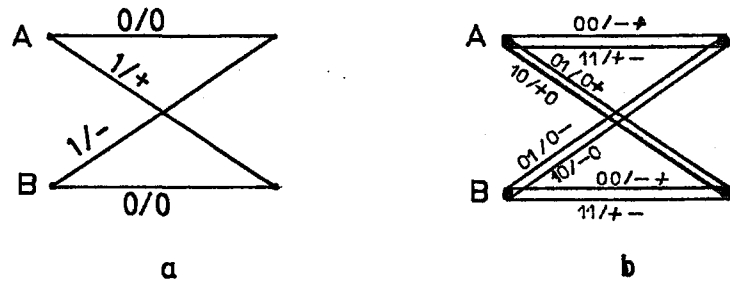
ikili diziler yerine doğrudan kanal çıkış dizilerini işlediği varsayılmaktadır. Bu nedenle, (2.1) de  $d_s$  büyüklüğü, serbest Hamming uzaklığı yerine serbest Öklid uzaklığını göstermektedir. Diğer bir deyişle, sistem hata başarımını artıracak kodlayıcıların tasarım ölçütü, Hamming uzaklığı yerine Öklid uzaklığı olarak belirlenmektedir.

**Tanım 2.1.** Kafes yapıda bir hat kodlayıcısı için serbest Öklid uzaklığı, aynı herhangi bir durumdan başlayan, ortak herhangi bir durumda bitene dek hiç bir ortak durumda buluşmayan kod sözcük dizileri arasında bulunabilecek minimum Öklid uzaklığıdır.  $k_{mi}$ , m. adımda  $\underline{k}_m$  sözcüğünün i. simgesini göstermek üzere, serbest Öklid uzaklığı,

$$d_s = \min_{\{\underline{k}_m\} \neq \{\underline{k}'_m\}} \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} d^2(k_{mi}, k'_{mi}) \right\}^{1/2} \quad (2.3)$$

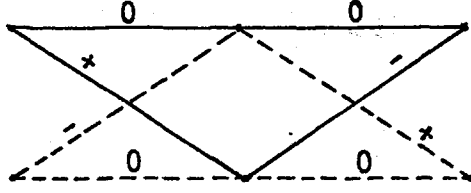
biçiminde tanımlanır. Bu ifadede,  $d^2(...)$  iki kanal simgesi arasındaki karesel Öklid uzaklığını göstermektedir.

Tablo 2-1'de verilen iki kutuplu ve PST kodlayıcıları her mod bir duruma karşı düşürülmek üzere Şekil 2-5'deki kafes yapılarla gösterilebilir.



Şekil 2-5. (a) İki kutuplu ve (b) PST kodlayıcıların kafes gösterilimi

(2.1) tanımından yararlanarak, iki kutuplu kodlayıcı için karesel serbest Öklid uzaklığının 2'ye eşit olduğu kolayca görülebilir (Şekil 2-6).



Şekil 2-6. İki kutuplu kodlarda minimum uzaklıklı dizi çiftleri ( $d_s^2=2$ )

PST kodlayıcı için ise karesel serbest Öklid uzaklığı, durum değiştiren paralel geçişler arasında olup yine 2'ye eşittir.

Tasarlanacak kodlarda, (2.1) de verilen hata olasılığını azaltabilmek için,  $d_s$  ile gösterilen serbest Öklid uzaklığının artırılması amaçlanmaktadır.

$n$  uzunluklu ikili dizilere karşı düşürülebilecek  $n+1$  uzunluklu farklı üçlü dizilerin toplam sayısı  $3^{n+1}$  dir. Ancak, kod alfabesi olarak, bu dizilerin belirli özellikleri sağlayan bir alt kümesinin alınması yeterli olmaktadır. Kodlanmış diziler arasındaki Öklid uzaklığının artırılmasının yanında iletilecek işaretin temelband kanala uygun biçime sokulması da amaçlandığından, kafes kodlamadan yararlanabilmek için kod alfabelerinin  $2^{n+2}$  elemanlı olması gerekmektedir (Bölüm 2.1'de tanıtılan kodlarda yalnız Öklid uzaklığının artırılması amaçlandığından  $2^{n+1}$  kanallı işareti yeterli olmaktadır). Kanal kodlayıcısından istenen özellikler arttıkça, doğal olarak, kodlama işlemine katılacak fazlalığın (redundancy) artırılması gerekmektedir.

**Tanım 2.2.** Bir hat kodlayıcısına ilişkin sayısal toplam değişimi (STD), (digital sum variation),

$$Z_{i_1, i_2} = \sum_{i=i_1}^{i_2} k_i \quad (2.4)$$

olmak üzere,

$$STD = \max_{i_1, i_2} \{Z_{i_1, i_2}\} \quad (2.5)$$

değerine eşittir.

Tanım 2.3.  $n+1$  uzunluklu bir  $\underline{k}_m = (k_{m1}, k_{m2}, \dots, k_{mn}, k_{m(n+1)})$  üçlü dizisinin işaret değeri (disparity)

$$d(\underline{k}_m) = \sum_{i=1}^{n+1} k_{mi} \quad (2.6)$$

olarak tanımlanır.

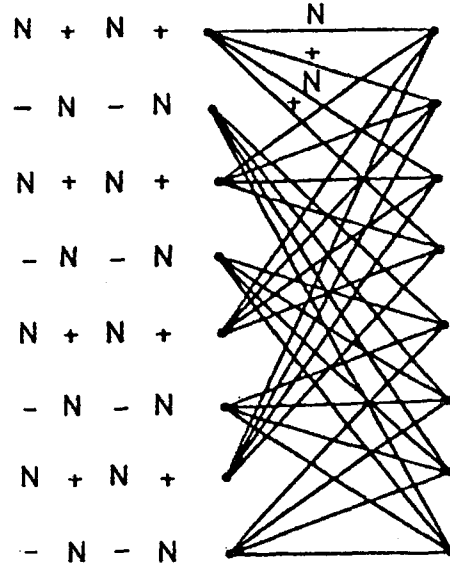
Tanım 2.4. Bir hat kodlayıcısının,  $m$ . kodlama adımı için akan sayısal toplam ( $AST_m$ ), (running digital sum) değeri

$$AST_m = \sum_{i=1}^{n+1} k_{mi} + AST_{m-1} \quad (2.7)$$

biçiminde tanımlanır.

Kod alfabelerinin, yalnız  $-1, 0$  ve  $1$  işaret değerli kod sözcüklerinden oluşturulduğu varsayıldığından, bu tezde, kafes kodlayıcısının durum geçişlerine kod sözcüklerinin atanması için Şekil 2-7'de görülen model önerilmektedir.

Bu model yardımıyla, tasarlanan kodlayıcılar için, her kodlama adımında akan sayısal toplamın olurlu değerleri  $-1, 0$  ve  $1$  ile sınırlandırılmıştır. Kod alfabelerinin alt kümelere parçalanmaları bu modele uygun biçimde gerçekleştirilmiştir. Durum geçişleri atanacak kod sözcükleri açısından eşdeğer değildir. Hat kodlamasının temel amaçlarının sağlanması için getirilen bu kısıtlama sonucunda, kafes yapıdaki durum geçişlerinin yarısı sıfır işaret değerli, dörtte biri  $+1$ , dörtte biri de  $-1$  işaret



Şekil 2-7. Hat kodlamasının temel özelliklerinin gerçekleştirilmesini sağlayan; durumlara sözcük atama modeli ( $N$ , sıfır işaret değeri;  $+$ , 1 işaret değeri;  $-$ ,  $-1$  işaret değeri bir sözcüğü göstermektedir). Sekiz durumlu kodlayıcı için verilen bu yapı, farklı durum sayılarına da uyarlanabilir.

değerli kod sözcüklerine ayrılmıştır. Buna bağlı olarak, her kod sözcüğünün eşit sayıda kullanılması amacıyla, kod alfabelerinin toplam  $2^{n+2}$  elemanlarının yarısı sıfır, dörtte biri  $+1$  ve dörtte biri de  $-1$  işaret değerli sözcüklerden oluşturulmuştur.

Böylece,  $n+1$  uzunluklu üçlü dizilerin uygun olanlarının kod sözcüğü olarak seçilmesiyle, kanal giriş dizisinde aynı işaretli ardışıl darbelerin sayısı oldukça sınırlı tutulmuş, Şekil 2-7'deki kafes kodlayıcı modelinin de yardımıyla, kodlayıcı doğru akım düzeyi kaymaları sınırlandırılmış ve dolayısıyla simgelerarası girişim başarımları 4B3T, MS43, FOMOT gibi bilinen hat kodlarına göre üstün kılınmıştır.

Diğer yandan, aynı band genişliği için, veri hızında belli bir azalmaya karşılık, kod sözcüklerinin durum

geçişlerine kodlayıcının serbest Öklid uzaklığı maksimum olacak biçimde atanmasıyla, sistem hata başarımı bilinen tüm hat kodlarına göre iyileştirilmektedir.

Hat kodlarının kafes kodlamalı modülasyon tekniğine göre tasarımı şu aşamaları kapsamaktadır:

1-  $R=n/n+1$  oranlı hat kodlayıcısı için  $2^{n+2}$  elemanlı alfabenin,  $n+1$  uzunluklu  $3^{n+1}$  tane üçlü (+,o,-) dizi arasından,  $2^{n+1}$  tanesi sıfır işaret değerli,  $2^n$  tanesi +1 ve  $2^n$  tanesi -1 işaret değerli olacak biçimde optimum seçimi (Burada optimum olma, kodlayıcı serbest Öklid uzaklığını maksimum yapma ve kodlanmış dizilerde ardışıl aynı işaretli simge sayısını olabildiğince kısıtlama anlamındadır).

2- Kod sözcükleri kümesinin, önerilen kafes kodlayıcı modeline uygun olarak, maksimum Öklid uzaklıklı alt kümelere parçalanması.

3- Kodlayıcı durumlarına karşı düşürülen alt kümelerdeki kod sözcüklerinin, her duruma varan sözcükler arasındaki minimum Öklid uzaklığı maksimum olacak biçimde durum geçişlerine atanması.

Ayrıca, tasarım sırasında her kod sözcüğünün aynı miktarda kullanılması ve durumlara atanan alt kümelerde minimum uzaklık açısından simetrik bir yapı oluşturulması, iyi serbest uzaklıklı kodlara erişmede önemli olmaktadır.

Bu koşullar altında tasarlanan  $R=1/2$ ,  $R=2/3$  ve  $R=3/4$  oranlı yeni hat kodları aşağıda verilmektedir.

#### 2.2.1. Kafes Kodlamalı Modülasyon Tekniğine Dayalı $R=1/2$ Oranlı Hat Kodu Tasarımı

$1/2$  oranlı kodlayıcıya ilişkin alfabe, Tablo 2-1 (b) de verilen PST kodlayıcının ürettiği tüm iki simgeli

üçlü dizileri kapsamaktadır (Tablo 2-2). 8 kod sözcüğünden

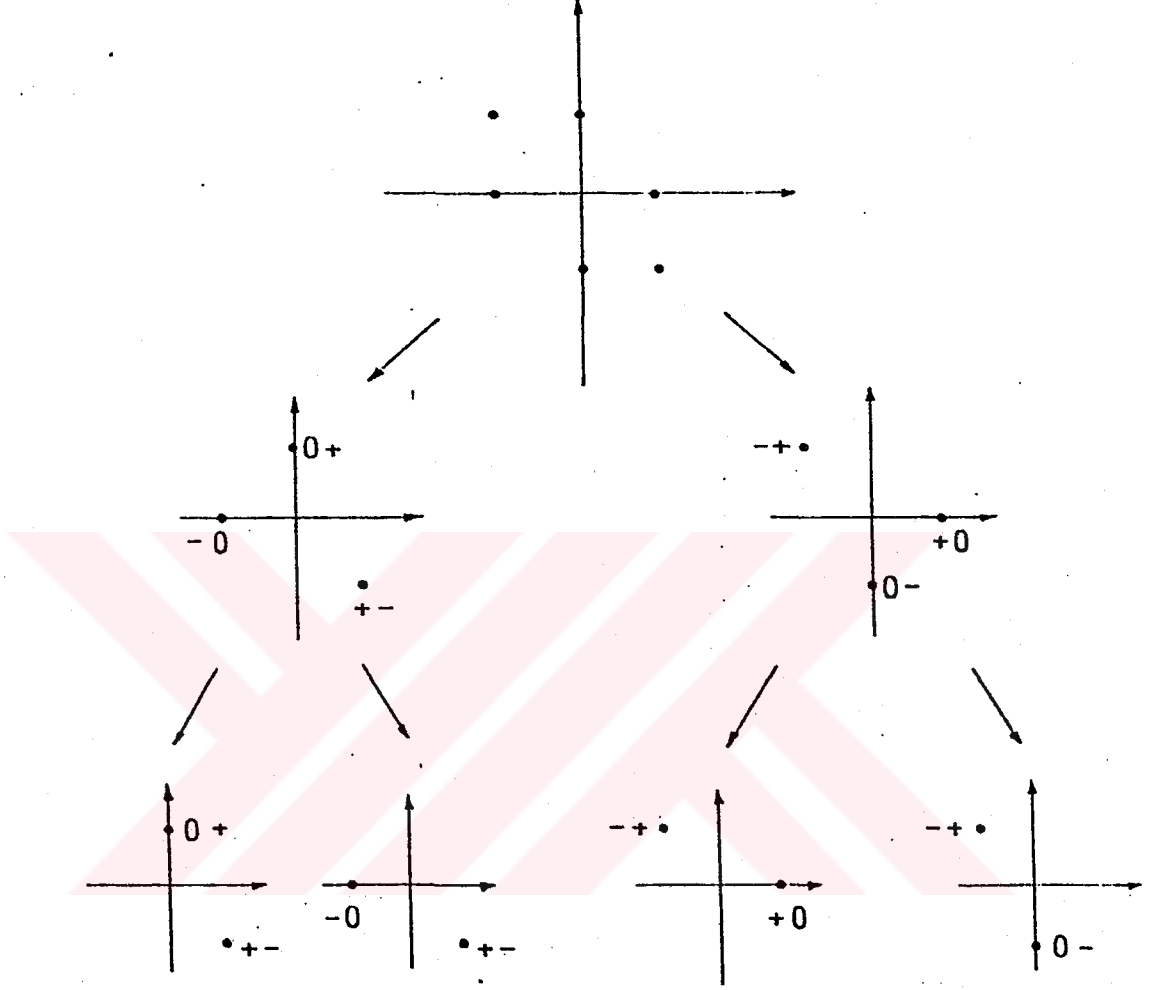
Tablo 2-2.  $R=1/2$  oranlı hat kodu alfabesi

|       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|
| 0 + - | 2 - 0 | 4 - + | 6 0 - |
| 1 0 + | 3 + - | 5 + 0 | 7 - + |

dördünün sıfır işaret değerli olması gerektiğinden, +- ve -+ dizileri ikişer kez kullanılmıştır. Bunlar dışındaki sıfır işaret değerli tek dizi 00, ardışıl aynı işaret değerli iki simge kapsadığından ve ulaşılan serbest uzaklık açısından yetersiz kaldığından seçilmemiştir.

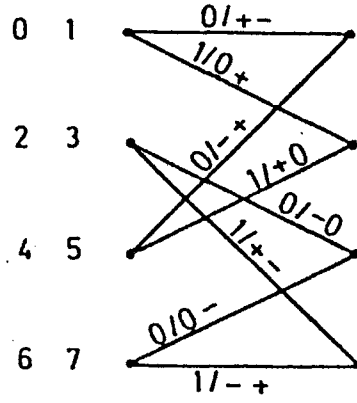
Kod alfabesi, aralarındaki karesel Öklid uzaklığı 5 olan iki elemanlı alt kümelere parçalanmıştır. Her alt kümede, sözcük atama modeline uygun olarak bir sıfır işaret değerli, bir de +1 veya -1 işaret değerli sözcük bulunmaktadır (Şekil 2-8).

Elde edilen alt kümeler, kısmen ayrık kısmen ortak elemanlıdırlar. Bu özellik, +- ve -+ sözcüklerinin ikişer kez kullanılması nedeniyle gerçekte farklı sözcük sayısının 8 değil 6 olmasından kaynaklanmaktadır. Ungerboeck'ün[1] tasarladığı kodlarda işaret uzayı daima  $2^{n+1}$  farklı elemandan oluşmakta ve ayrık alt kümelere parçalanmaktadır. Ungerboeck kodlarından daha iyi kafes kodların elde edilebilirliğini inceleyen Forney et al.[34], bazı durumlarda, işaret uzayını kısmen ayrık kısmen ortak elemanlı alt kümelere parçalama yoluyla bütünüyle ayrık alt kümelere dayalı kodlamaya göre az da olsa bir kazancın sağlanabileceğini 80 elemanlı bir işaret kümesi ve iki durumlu bir kafes kodlayıcı için göstermişlerdir. Hat kodlamasında, kullanılabilir üçlü dizilerin sınırlılığı nedeniyle, bu durum kendiliğinden oluşmaktadır.

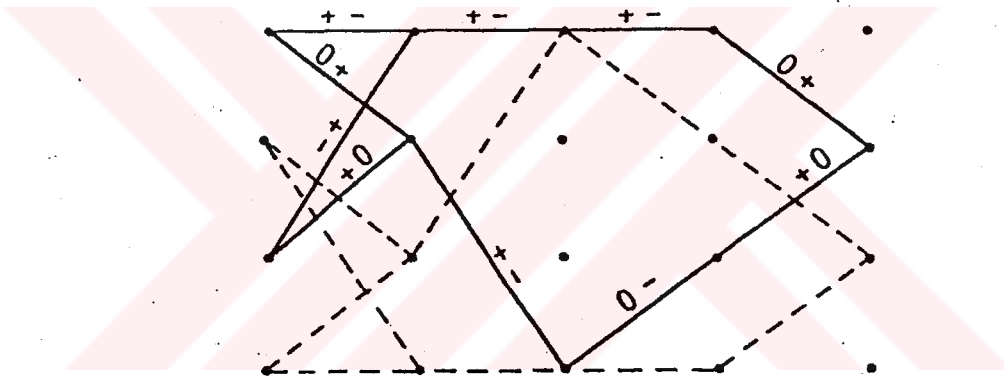


Şekil 2-8.  $R=1/2$  oranlı hat kodunun alt kümelere parçalanması

$R=1/2$  oranı için serbest Öklid uzaklığının en yüksek değerine 4 durumlu kafes kodlayıcı için erişilmektedir (Şekil 2-9). Bu kodlayıcı için karesel serbest Öklid uzaklığı 8'dir (Şekil 2-10). Bu tezde tasarlanan hat kodlarının karesel serbest Öklid uzaklıklarının hesaplanmasını sağlayan bir algoritma Bölüm 2.4'de verilmiştir.

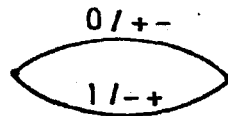


Şekil 2-9.  $R=1/2$  oranlı kodlayıcısının kafes yapısı



Şekil 2-10. Karesel serbest Öklid uzaklığı 8 olan dizi çiftleri

Temelband iletim gereksinimleri bir yana bırakılırsa, kafes kodlamasız olarak serbest Öklid uzaklığını maksimum yapan çözüm, aynı  $R=1/2$  oranı için Şekil 2-11'de



Şekil 2-11.  $R=1/2$  oranı için kafes kodlamasız hat kodlayıcısı

görülmektedir. Bu durumda, karesel serbest Öklid uzaklığı 8 dir. Ancak ortalama güçler göz önüne alındığında (2.8) den 1.25 dB lik bir kodlama kazancı sağlandığı görülmektedir.

$$\text{Kodlama Kazancı [dB]} = 10 \log_{10} \left[ \frac{(d_s^2/P_k)_{\text{kafes kodlamalı}}}{(d_s^2/P)_{\text{kafes kodlamasız}}} \right] \quad (2.8)$$

Burada  $P$  ve  $P_k$ , sırasıyla, kafes kodlamasız ve kafes kodlamalı durumlarda darbe aralığı başına ortalama gücü göstermektedir.

PST kodlayıcıyla kıyaslandığında, (2.9) da tanımlanan ve hız değişimini de göz önüne alan kodlama kazancı (HDKK) 3 dB olarak elde edilmektedir.

$$\text{HDKK [dB]} = 10 \log_{10} \left[ \frac{(d_s^2/P_k)_{\text{kafes kodlamalı}}}{(d_s^2/P)_{\text{kafes kodlamasız}}} \right] - 10 \log_{10} \left( \frac{1}{R} \right) \quad (2.9)$$

Bu kodlama kazançları, yüksek işaret-gürültü oranlarında asimtotik olarak yaklaşılan kazançlardır.

#### 2.2.2. Kafes Kodlamalı Modülasyon Tekniğine Dayalı $R=2/3$ Oranlı Hat Kodu Tasarımı

Bu kodlayıcı iki bitlik ikili dizilere üç simgeden oluşan üçlü (+,0,-) kod sözcükleri karşı düşürmektedir. Kod alfabesi dördü +1, dördü -1 ve sekizi 0 işaret değerli 16 sözcükten oluşmaktadır (Tablo 2-3). Kanal gereksinimleri açısından uygun olmayan 000 dizisi sayılmazsa, sıfır işaret değerli üç simgeli üçlü dizilerin toplam sayısı altıdır. Ardışıl sıfırları engelleme, simetri ve dolayısıyla uzaklık açısından diğerlerine göre üstünlük sağladığından +0- ve -0+ dizileri ikişer kez kullanılmıştır. 1 ve -1 işaret değerli sözcükler de aynı özellikler göz önüne alınarak seçilmiştir.

Tablo 2-3. R=2/3 oranlı hat kodu alfabesi ve  $d^2=6$  karesel uzaklıklı alt kümeleri

| N |   |   |   | + |   |   |   | -  |   |   |   | N  |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|----|---|---|---|----|---|---|---|
| 0 | + | 0 | - | 4 | 0 | 0 | + | 8  | + | - | - | 12 | + | 0 | - |
| 1 | 0 | - | + | 5 | + | + | - | 9  | - | 0 | 0 | 13 | - | + | 0 |
| 2 | + | - | 0 | 6 | + | 0 | 0 | 10 | - | - | + | 14 | 0 | + | - |
| 3 | - | 0 | + | 7 | - | + | + | 11 | 0 | 0 | - | 15 | - | 0 | + |

R=2/3 oranlı kodlayıcıda, her durumda  $2^2=4$  farklı ikili diziyile karşılaşılabileceğinden 4 çıkış tanımlamak gerekmektedir. Hat kodlarının istenen iletim özelliklerinin sağlanması amacıyla Şekil 2-7'de ortaya konan sözcük atama modelinden görüldüğü gibi bu dörtlü çıkışlar, N+N+ veya -N-N biçiminde gösterilen, iki 0 iki +1 veya iki 0 iki -1 işaret değerli sözcüklerden oluşan alt kümelerdir. Durumlara ilişkin bu alt kümelerin oluşturulmasında kod sözcükleri "Uzaklık Matrisi"nden yararlanılmıştır (Tablo 2-4).

**Tanım 2.5.**  $\underline{k}_m$  ve  $\underline{k}_p$  herhangi iki kod sözcüğü olmak üzere, bir kod alfabesine ilişkin Uzaklık Matrisi, elemanları

$$d^2(\underline{k}_m, \underline{k}_p) = \sum_{i=1}^{n+1} d^2(k_{mi}, k_{pi}) \quad (2.10)$$

karesel Öklid uzaklıkları olan, boyutu kod alfabesindeki toplam kod sözcük sayısına eşit bir kare matristir. (2.10) da  $m \geq 1$ ,  $M \geq n$  olup M toplam kod sözcük sayısını göstermektedir.

Tablo 2-4. R=2/3 oranlı hat kodu uzaklık matrisi

|   |    | N |   |   |   | + |   |   |   | -  |    |    |    | N  |    |    |    |
|---|----|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
|   |    | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| N | 0  |   | 6 | 2 | 8 | 5 | 1 | 1 | 9 | 1  | 5  | 9  | 1  | 0  | 6  | 2  | 8  |
|   | 1  |   |   | 2 | 2 | 1 | 9 | 3 | 5 | 5  | 3  | 1  | 5  | 6  | 6  | 8  | 2  |
|   | 2  |   |   |   | 6 | 3 | 5 | 1 | 9 | 1  | 5  | 5  | 3  | 2  | 8  | 6  | 6  |
|   | 3  |   |   |   |   | 1 | 9 | 5 | 1 | 9  | 1  | 1  | 5  | 8  | 2  | 6  | 0  |
| + | 4  |   |   |   |   | 6 | 2 | 2 | 6 | 2  | 2  | 4  | 5  | 3  | 5  | 1  |    |
|   | 5  |   |   |   |   |   | 2 | 8 | 4 | 6  | 12 | 2  | 1  | 5  | 1  | 9  |    |
|   | 6  |   |   |   |   |   |   | 6 | 2 | 4  | 6  | 2  | 1  | 5  | 3  | 5  |    |
|   | 7  |   |   |   |   |   |   |   |   | 12 | 2  | 4  | 6  | 9  | 1  | 5  | 1  |
| - | 8  |   |   |   |   |   |   |   |   | 6  | 8  | 2  | 1  | 9  | 5  | 9  |    |
|   | 9  |   |   |   |   |   |   |   |   |    | 2  | 2  | 5  | 1  | 3  | 1  |    |
|   | 10 |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    | 6  | 9  | 5  | 9  | 1  |    |
|   | 11 |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    | 1  | 3  | 1  | 5  |    |
| N | 12 |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    | 6  | 2  | 8  |    |
|   | 13 |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    | 2  | 2  |    |
|   | 14 |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    | 6  |    |
|   | 15 |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |

Tablo 2-4 de verilen uzaklık matrisinin [N,+] alt matrisi

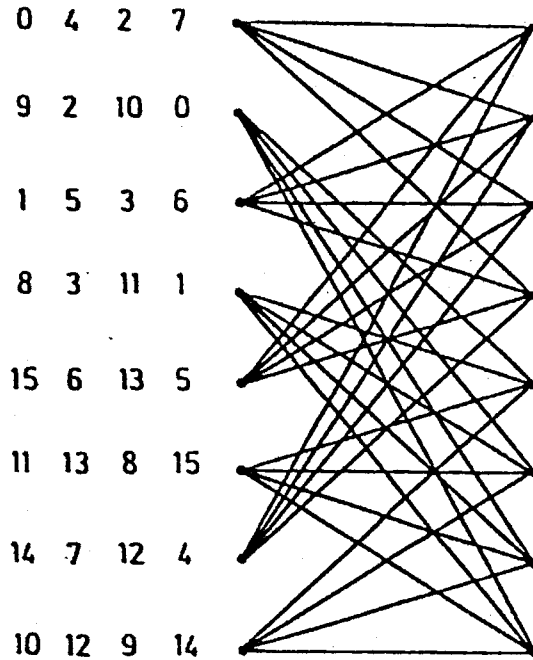
$$[N,+] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & 9 \\ 1 & 9 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \\ 1 & 9 & 5 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

olup, bu alt matrise dayanarak iki 0 ve iki +1 işaret değerli sözcükten oluşan, elemanları maksimum uzaklıklı {0,2,4,7} ve {1,3,5,6} alt kümeleri elde edilmektedir. Aynı biçimde, [N,-] alt matrisinden iki 0 ve iki -1 işaret

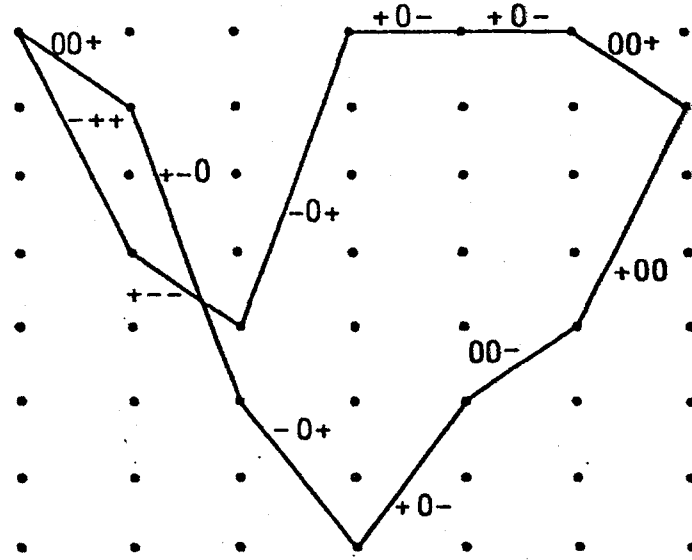
değerli sözcükten oluşan  $\{0,2,9,10\}$  ve  $\{1,3,8,11\}$  alt kümeleri seçilmektedir.  $[+,N]$  alt matrisinden  $\{4,7,12,14\}$  ve  $\{5,6,13,15\}$  alt kümeleri,  $[-,N]$  matrisinden de  $\{8,11,13,15\}$  ve  $\{9,10,12,14\}$  alt kümeleri belirlenmektedir. Böylece, karesel Öklid uzaklığı  $d^2(\underline{k}_m, \underline{k}_p)=1$ ,  $\forall m,p$  olan kod sözcüklerinin aynı alt kümeye düşmesi engellenmekte ve her durum için kodlamanın başlangıç adımının maksimum uzaklıklı kod sözcükleri arasından seçilen sözcüklerle gerçekleştirilmesi sağlanmaktadır.

Bu alt kümelerdeki sözcüklerin kodlayıcı kafes yapısındaki durum geçişlerine atanması sonucunda aynı duruma varan dörtlü kod sözcükleri arasındaki minimum Öklid uzaklıkları belirlenmektedir. Tasarımda, serbest Öklid uzaklığının artırılması amaçlandığından, sözcüklerin durum geçişlerine atanması sırasında, varış durumlarına ilişkin dört elemanlı varış alt kümelerinin maksimum uzaklıklı sözcüklerden oluşması sağlanmaktadır.

$R=2/3$  oranlı kodlama için erişilen maksimum karesel serbest Öklid uzaklığı 6 olup, sekiz durumlu kodlayıcı yardımıyla elde edilmektedir (Şekil 2-12, 2-13).

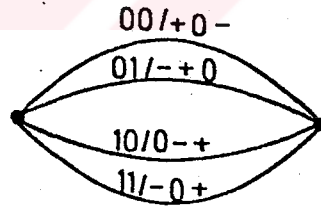


Şekil 2-12.  $R=2/3$  oranlı hat kodlayıcısı kafes yapısı



Şekil 2-13.  $d_s^2=6$  karesel serbest Öklid uzaklıklı kod dizi çifti örneği

Kafes kodlamasız durumda, doğru akım bileşenini yok etmek amacıyla 0 işaret değerli sözcüklerden oluşturulan kodlayıcı için karesel serbest Öklid uzaklığının erişilebilen maksimum değeri yalnızca 2'dir (Şekil 2-14).



Şekil 2-14. Kafes kodlamasız  $R=2/3$  oranlı hat kodlayıcısı

Kafes kodlamalı modülasyon tekniğiyle tasarlanan kodlayıcının sağladığı kodlama kazancı (2.8) den 4.77 dB olarak elde edilir.

### 2.2.3. Kafes Kodlamalı Modülasyon Tekniğine Dayalı $R=3/4$ Oranlı Hat Kodu Tasarımı

$R=3/4$  oranlı hat kodlayıcısına ilişkin kod alfabesi

$2^{n+2}=32$  kod sözcüğünden oluşmaktadır (Tablo 2-5). Bu sözcüklerden 16'sı 0, 8'i +1 ve 8'i de -1 işaret değerlidir. Dört simgeli  $3^4=81$  farklı üçlü diziden 15'i 0 işaret değerlidir. Bunlardan oooo, oo+-, oo-+, +-oo, -+oo dizileri art arda gelen 0 sayısını 2 ile sınırlamak amacıyla kullanılmamıştır. Buna karşılık, ++--, -++-, +---, -++- sözcükleri ikişer kez kullanılmıştır. +1 ve -1 işaret değerli sözcükler de gerek temelband hat gereksinimleri gerekse simetri ve uzaklık özellikleri açısından en uygun olanlardır. Bu kodlayıcıda, art arda gelen + ve ard arda gelen - simge sayıları da 2 ile sınırlı olup kod alfabesi PST kodlayıcının iki adımda ürettiği tüm dizileri kapsamaktadır.

Tablo 2-5. R=3/4 oranlı hat kodu alfabesi ve  $d^2=10$  karesel uzaklıklı alt kümeleri

| N                    | +                    | -                     | N                     |
|----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 0 - + - +<br>+ 0 0 - | 4 + - 0 +<br>- + + 0 | 8 - 0 + -<br>0 - - +  | 12 0 - 0 +<br>- + + - |
| 1 + - + -<br>0 + - 0 | 5 0 + - +<br>+ 0 + - | 9 + - 0 -<br>- + - 0  | 13 - 0 + 0<br>+ - - + |
| 2 - + + -<br>+ 0 - 0 | 6 + - + 0<br>- + 0 + | 10 - 0 - +<br>0 - + - | 14 0 - + 0<br>- + - + |
| 3 + - - +<br>0 + 0 - | 7 0 + + -<br>+ 0 - + | 11 + - - 0<br>- + 0 - | 15 - 0 0 +<br>+ - + - |

Kodlayıcı üç bitlik ikili simgelere dört simgeli üçlü diziler karşı düşüreceğinden her kodlayıcı durumu için  $2^3=8$  olurlu giriş söz konusudur. Bu nedenle, her kodlayıcı durumuna 8 kod sözcüğü karşı düşecektir. Serbest Öklid uzaklığının erişilebilen maksimum değeri, paralel geçişler içeren kafes yapı yardımıyla sağlanmaktadır.

Paralel geçişlerin anlamı, üç bitlik ikili giriş dizilerinin son bitlerinin durum geçişlerinin belirlenmesi açısından etkisiz olmasıdır. Kafes kodlamada etkisiz bu bitler yalnızca o paralel geçişle ilişkin üçlü kod sözcük çiftinden hangisinin üretileceğini belirlemektedir. Paralel geçişlerin, kodlayıcının serbest Öklid uzaklığını kısıtlaması için bu geçişlere karşı düşen kod sözcük çiftleri arasındaki uzaklık, yeterince büyük olmalıdır. Bu amaçla, Tablo 2-5'de verilen kod alfabesi, aralarındaki karesel Öklid uzaklığı 10 olan, aynı işaret değerli iki sözcükten oluşan alt kümelere parçalanmış ve on tabanında numaralanmıştır. Bu alt kümeler paralel geçişlere atanacak kod sözcük çiftlerine karşı düşmektedir.

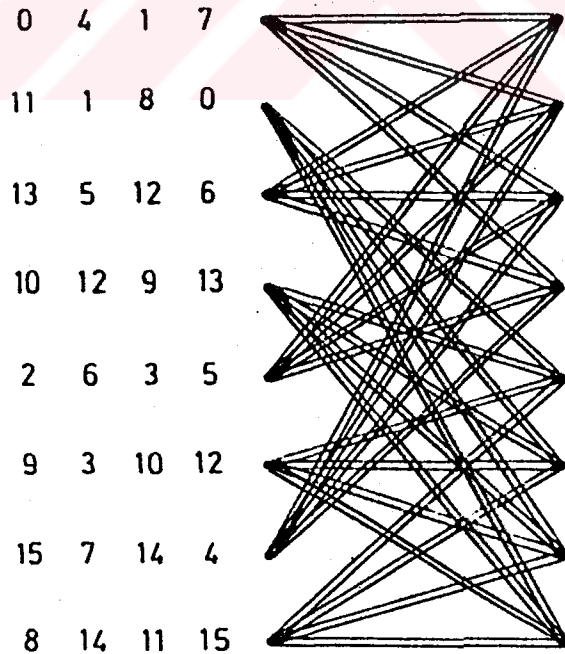
Her biri dört paralel geçiş alt kümesinden, dolayısıyla 8 kod sözcüğünden oluşan kodlayıcı durumlarına ilişkin alt kümeler,  $R=2/3$  hat kodunun tasarımında olduğu gibi, yine uzaklık matrisine dayanarak belirlenmektedir. Farklı olarak, burada uzaklık matrisi paralel geçiş alt kümeleri arasında tanımlanmıştır (Tablo 2-6).

Tablo 2-6. R=3/4 oranlı hat kodu uzaklık matrisi

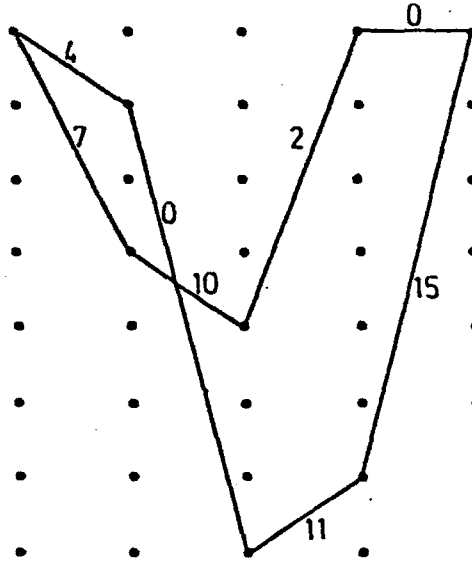
|   |    | N |   |   |   | + |   |   |   | - |   |    |    | N  |    |    |    |
|---|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|
|   |    | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| N | 0  |   | 2 | 2 | 2 | 3 | 1 | 1 | 3 | 5 | 1 | 1  | 3  | 6  | 6  | 0  | 2  |
|   | 1  |   |   | 2 | 2 | 5 | 1 | 1 | 3 | 5 | 1 | 1  | 3  | 6  | 6  | 2  | 0  |
|   | 2  |   |   |   | 2 | 1 | 6 | 5 | 1 | 1 | 3 | 5  | 1  | 0  | 2  | 6  | 6  |
|   | 3  |   |   |   |   | 1 | 3 | 5 | 1 | 1 | 3 | 5  | 1  | 2  | 0  | 6  | 6  |
| + | 4  |   |   |   |   |   | 6 | 2 | 2 | 2 | 4 | 6  | 2  | 1  | 1  | 3  | 3  |
|   | 5  |   |   |   |   |   |   | 2 | 2 | 4 | 2 | 2  | 6  | 5  | 5  | 1  | 1  |
|   | 6  |   |   |   |   |   |   |   | 6 | 6 | 2 | 2  | 4  | 3  | 3  | 1  | 1  |
|   | 7  |   |   |   |   |   |   |   |   | 2 | 6 | 4  | 2  | 1  | 1  | 5  | 5  |
| - | 8  |   |   |   |   |   |   |   |   |   | 6 | 2  | 2  | 1  | 1  | 3  | 3  |
|   | 9  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   | 2  | 2  | 5  | 5  | 1  | 1  |
|   | 10 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    | 6  | 3  | 3  | 1  | 1  |
|   | 11 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    | 1  | 1  | 5  | 5  |
| N | 12 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    | 2  | 2  | 2  |
|   | 13 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    | 2  | 2  |
|   | 14 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    | 2  |
|   | 15 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |

Tablo 2-6'da verilen uzaklık matrisinin  $[N,+]$  alt matrisinden  $\{0,1,4,7\}$  ve  $\{2,3,5,6\}$  biçiminde iki 0, iki +1 işaret değerli  $(N+N+)$  sözcük çiftlerinden oluşan iki alt küme elde edilmektedir.  $[N,-]$  alt matrisinden ise ikisi 0 ikisi -1 işaret değerli  $(-N-N)$  kod sözcük çiftlerinden oluşan  $\{0,1,8,11\}$  ve  $\{2,3,9,10\}$  alt kümeleri sağlanmaktadır.  $[+,N]$  alt matrisi de  $\{8,11,14,15\}$  ve  $\{9,10,12,13\}$  alt kümelerini vermektedir. Bu alt kümeler. Şekil 2-7' de önerilen kodlayıcı durumlarına sözcük atama modeline uygun yapıda olup her kümedeki sözcükler maksimum uzaklıklı seçilmişlerdir. Kodlayıcı durumlarına ilişkin alt kümelerin, o duruma ilişkin durum geçişlerine atanmasında yine aynı duruma varan sekiz kod sözcüğü arasındaki minimum Öklid uzaklığının maksimum yapılması amaçlanmıştır.

$R=3/4$  oranlı hat kodu için karesel serbest Öklid uzaklığının erişilebilen en yüksek değeri 6 olup sekiz durumlu kafes kodlayıcı için sağlanmaktadır (Şekil 2-15 - 16).

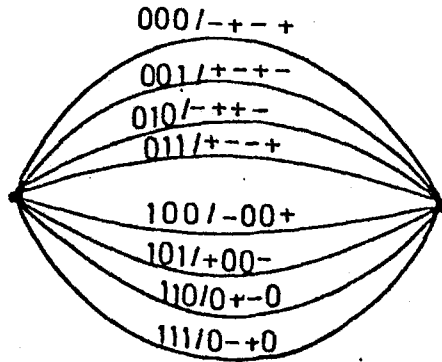


Şekil 2-15.  $R=3/4$  oranlı hat kodlayıcısı kafes yapısı



Şekil 2-16.  $d_s^2=6$  karesel serbest Öklid uzaklıklı kod dizi çifti örneği

Kafes kodlamasız, tek durumlu  $R=3/4$  hat kodu alfabesi 0 işaret değerli, 8 kod sözcüğünden oluşmaktadır (Şekil 2-17) ve karesel serbest Öklid uzaklığının erişilebilen en yüksek değeri 2 dir. Kodlama kazancı (2.8) den 4.77 dB dir. PST koduyla kıyaslandığında, (2.9) dan 3.52 dB lik bir kazanç sağlandığı görülmektedir.



Şekil 2-17. Kafes kodlamasız  $R=3/4$  oranlı hat kodlayıcısı

### 2.3. Kafes Yapıda Yeni Hat Kodlarının Analitik İfadeleri

Kafes kodlamalı modülasyon tekniğiyle tasarlanan hat kodlarında,  $n$  uzunluklu her ikili veri dizisi, bu  $n$  ikili sayıya ve  $2^v$  durumlu bir kodlayıcı için  $v$  tane önceki ikili sayıya bağlı olarak  $n+1$  uzunluklu bir üçlü hat kodu sözcüğüne dönüştürülmektedir.

$m$ . kodlama adımında,  $i$ . kod simgesi,

$$k_{mi} = f(a_{mn}, a_{m(n-1)}, \dots, a_{m1}, a_{(m-1)n}, \dots, a_{(m-1)(n-v+1)})$$

$$1 \leq i \leq n+1 \quad (2.11)$$

işleviyle belirlidir. Burada  $a_{mj}$ , ( $1 \leq j \leq n$ ),  $m$ . kodlama adımında  $j$ . ikili girişi göstermektedir.  $n+v$  değişkene bağlı bu gerçel değerli işlev

$$k_i = x_0 + \sum_{i=1}^{n+v} x_i a_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ j>i}}^{n+v} x_{ij} a_i a_j + \dots + x_1 \dots x_{n+v} a_1 a_2 \dots a_n$$

$$(2.12)$$

biçiminde yazılabilir [6].  $2^{n+v}$  tane sabitin ( $x_0, x_i, x_{ij}, \dots$ ) değeri, önce tüm  $a_i$  leri 0, sonra her  $j \neq i$  için  $a_i = 1$ ,  $a_j = 0$  seçerek ve ardından her  $k \neq i, j$  için  $a_i = 1$ ,  $a_j = 1$ ,  $a_k = 0$  alıp işlemi bu şekilde sürdürerek iteratif yolla hesaplanabilir.  $b_i = 1 - 2a_i$  ( $a_i = 0$  veya 1 yerine  $b_i = -1$  veya 1) dönüşümü yardımıyla (2.12) ye göre daha uygun bir ifade elde edilmektedir.

$$k_i = x_0 + \sum_{i=1}^{n+v} x_i b_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ j>i}}^{n+v} x_{ij} b_i b_j + \dots + x_1 \dots x_{n+v} b_1 b_2 \dots b_n$$

$$(2.13)$$

Bir örnek olarak, önceki alt bölümde tasarlanan  $R=1/2$  oranlı hat kodu, (2.9) yardımıyla,

$$\underline{k} = f(b_1, b_2, b_3) = (k_1, k_2)$$

$$= \frac{1}{4} (-b_1 + b_2 + b_3 + 3b_1 b_2 b_3, -b_1 + b_2 - b_3 - 3b_1 b_2 b_3) \quad (2.14)$$

vektörel biçiminde ifade edilebilmektedir. Burada  $b_1$  girişi,  $b_2b_3$  de kodlayıcı durumunu göstermektedir. Örneğin, kodlayıcı 00 durumunda iken ( $b_2=1$ ,  $b_3=1$ ) 1 girişi için ( $b_1=-1$ ) çıkış  $k=(01)$  kod sözcüğüdür (0+).

Tasarlanan diğer hat kodları ( $R=2/3$  ve  $R=3/4$ ) için de, (2.9) yardımıyla analitik ifadeler elde edilmektedir. Ancak bunlar çok karmaşık ve uzun olduklarından burada verilmemiştir.

#### 2.4. Serbest Öklid Uzaklığının Hesaplanması

Serbest Öklid uzaklığı, toplamsal beyaz Gauss gürültüsüyle modellenen bir kanaldan iletilen ve Viterbi algoritmasına[5] dayanarak "Maksimum-Likelihood" karar kuralına göre çözülen kafes yapıda kodların hata başarımlarının bir ölçütü olmaktadır. dolayısıyla, kod tasarımında bu uzaklığın belirlenmesi son derece önemlidir.

Kafes yapıdaki ikili konvolüsyonel kodlarda, serbest Hamming uzaklığı[4] söz konusu olup, bu uzaklık, aradışıl[35] ya da Maksimum-Likelihood [5] kod çözme algoritmalarından yararlanarak hesaplanabilmektedir. Bunlar, arama işlemini tek yönlü olarak gerçekleştirebilen algoritmalarlardır. Daha hızlı çalışan çift yönlü bir algoritma Bahl et al.[36] tarafından verilmiş ve Larsen[37] tarafından düzeltilmiştir. Tüm bu algoritmalar, konvolüsyonel kodların doğrusallık özelliklerine dayandığından, genelliği bozmadan, tüm sıfır dizisini doğru dizi varsayarak, tüm sıfır durumundan kalkıp ara adımlarda tüm sıfır durumuna uğramadan tüm sıfır durumuna varan herhangi uzunluktaki, minimum Hamming ağırlıklı, diziyi aramaktadırlar.

Kafes kodlamalı modülasyon tekniğine dayanarak tasarlanan kodlar, ikili konvolüsyonel kodlayıcıyı izleyen doğrusal olmayan bir eşlemeyi kapsamaktadır ve kafes diyagramda durum geçişleri doğrudan eşlenen kanal işaretlerince belirlenmektedir. Bu doğrusal olmayan işlem, genel

olarak, kanal işaretleri arasındaki serbest Öklid uzaklığının belirlenebilmesi için herhangi bir ortak durumda biten, ara adımlarda hiç bir ortak durum kapsamayan her uzunluktaki dizi çiftlerinin göz önüne alınmasını gerektirmektedir.

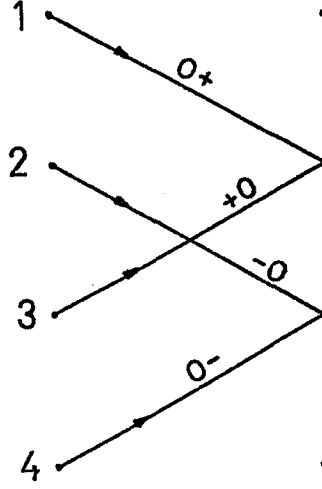
Bölüm 2.2'de kafes yapıda tasarlanan hat kodları da doğrusal değildir. Ancak bu kodlar, tasarımda kullanılan durumlara kod sözcük atama modeli (Şekil 2-7) ve yalnız -1,0,1 işaret değerli sözcüklerin kullanılması nedeniyle simetrik bir yapı göstermektedirler. Durumlara atanan kod sözcük alt kümeleri arasındaki minimum Öklid uzaklığı, belli bir simetriyle ya 0 ya da 1 olmaktadır. Kafes yapının, kod sözcük alt kümeleri arası uzaklık açısından gösterdiği bu uyumlu yapı, serbest Öklid uzaklığının hesaplanmasında aşağıdaki algoritmayı geçerli kılmaktadır:

1.ADİM) Aynı duruma varan kod sözcük çiftlerinden minimum uzaklıklı olan veya olanlara ilişkin kalkış durum çiftlerini belirle,

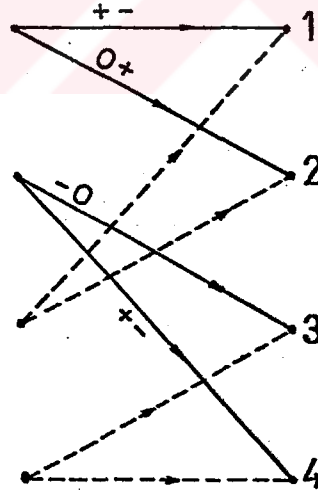
2.ADİM) Aynı durumdan kalkan kod sözcük çiftlerinden minimum uzaklıklı çifte ilişkin varış durum çiftini belirle, 1.adımda bulunan çiftlerden biriyle çakışıyorsa dur,

3.ADİM) Varılan durumlardan kalkan sözcükler arasından biri bir durumdan diğeri öbür durumdan kalkan minimum uzaklıklı sözcük çiftinin vardığı durum çiftini belirle, 1. adımda bulunan çiftlerden biriyle çakışıyorsa dur, yoksa 3.adımı yinele.

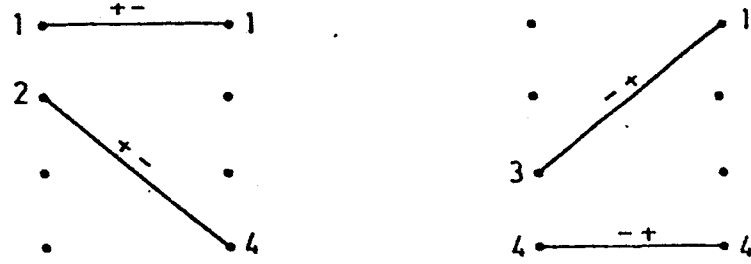
Algoritmanın işleyişi, bir örnek olarak,  $R=1/2$  oranlı hat kodu için Şekil 2-18- 19, 20, 21'de açıklanmaktadır.



Şekil 2-18. 1.adım: Aynı durumda biten, minimum Öklid uzaklıklı kod sözcük çiftleri için kalkış durum çiftleri: (1,3) ve (2,4), ( $d^2=2$ ).



Şekil 2-19. 2.adım: Aynı durumdan kalkan minimum Öklid uzaklıklı kod sözcük çiftleri için varış durum çiftleri: (1,2) ve (3,4), ( $d^2=5$ ). 1.adımda belirlenen durum çiftleriyle çakışma yok.



Şekil 2-20. 3.adım: Her iki durum için ((1,2) ve (3,4)), minimum uzaklıklı kod sözcük çiftlerinin varış durumları (1,4) dır ( $d^2=0$ ). 1.adımda belirlenen durum çiftleriyle çakışma yok.



Şekil 2-21. 3.adımın yinelenmesi: (1,4) durum çiftinden kalkan minimum uzaklıklı sözcük çiftinin varış durum çiftleri (1,3) veya (2,4), ( $d^2=1$ ) olup her ikisi de 1.adımda belirlenen çiftlerle çakışmaktadır.

Elde edilen minimum Öklid uzaklıklı ( $d_s^2=8$ ) dizi çiftleri Şekil 2-10'da görülmektedir.

## 2.5. Tasarlanan Kodların Hata Başarımlarının Değerlendirilmesi

Gürültülü bir haberleşme kanalı için, kafes yapıda kodlayıcıların hata olasılıklarının analitik olarak incelenmesi, genel olarak, oldukça güç bir problemdir. Bu nedenle, kafes yapıda kodlayıcı kullanan ve Viterbi algoritmasına[5] dayanarak kod çözme işlemini gerçekleştiren bu tür sistemlerin hata başarımlarının incelenmesinde, yaygın olarak, bilgisayar benzetiminden yararlanılmaktadır. Tasarlanan yeni hat kodları için de, Viterbi kod çözücünün hata olasılığı başarımlar ölçütü olarak kabul edilerek bir bilgisayar benzetimi yapılmıştır.

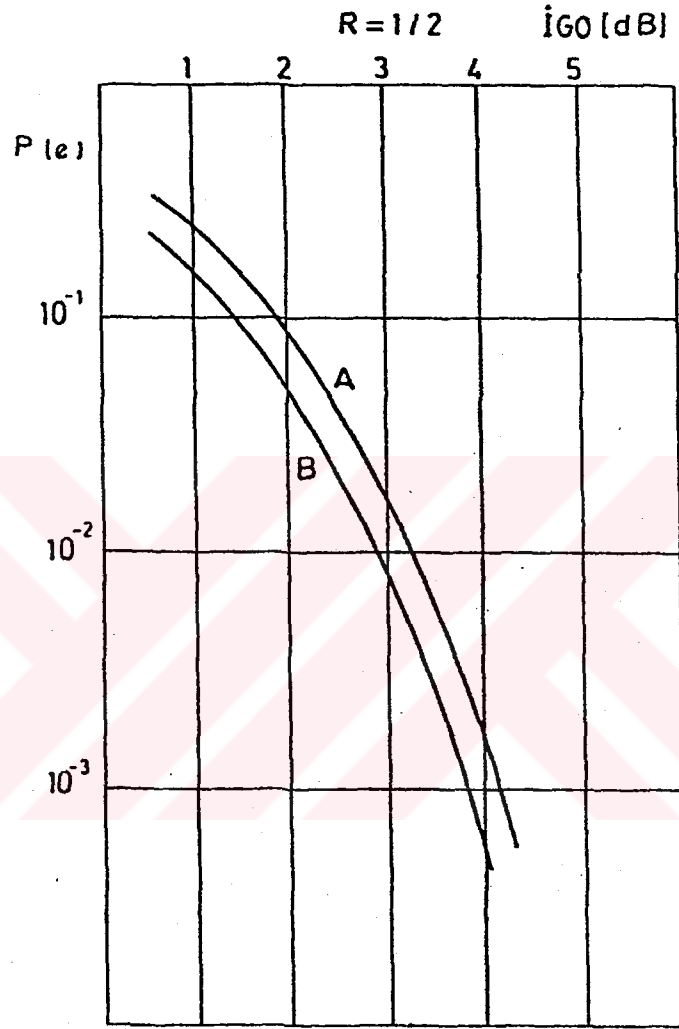
$\underline{k}_m$ ,  $R=n/n+1$  oranlı hat kodlayıcısı tarafından m. kodlama adımında kanaldan iletilen üçlü  $(+,0,-)$ ,  $n+1$  simgelik bir kod sözcüğü olsun.  $\underline{w}_m$ ,  $n+1$  toplamsal beyaz Gauss gürültüsü örneğini göstermek üzere alıcıya gelen  $n+1$  uzunluklu simge dizisi  $\underline{r}_m = \underline{k}_m + \underline{w}_m$  olacaktır. Viterbi kod çözücü,  $\sum |\underline{r}_m - \underline{k}_m|$  birikmiş Öklid uzaklık değerlerini minimum yapmak ve kafes yapı üzerinde minimum uzaklıklı optimum yolu bulmak amacıyla, her m kodlama adımında alınan  $\underline{r}_m$  dizisine dayanarak, her kodlayıcı durumu için bir  $|\underline{r}_m - \underline{k}_m|$  minimum Öklid uzaklıklı geçiş dalı ve bu dala ilişkin kalkış durumunu (survivor) belirlemektedir. Burada  $\underline{k}_m$ , kodlayıcının m. adımda gönderdiği kod sözcüğünün, kod çözücü tarafından kestirilen karşılığıdır.

Benzetimde, 6 kodlama adımı için  $6n$  uzunluklu rastgele üretilen ikili dizilere, kafes yapıda hat kodlayıcılarına dayanarak,  $6(n+1)$  üçlü simgeden oluşan diziler karşı düşürülmektedir. Kanal sıfır ortalama toplamsal beyaz Gauss gürültüsü ile modellenmiştir. Viterbi kod çözücü doğru diziye ait olmayan bir duruma karar verdiğinde bir hata olayı olduğu varsayılmıştır. Paralel geçişli,  $R=3/4$  oranlı hat kodu için kod çözme işlemi, Viterbi algoritmasından önce, paralel geçiş alt kümelerinin çözülmesi aşamasını kapsamaktadır. Bu işlem sırasında, kafes kodlayıcının

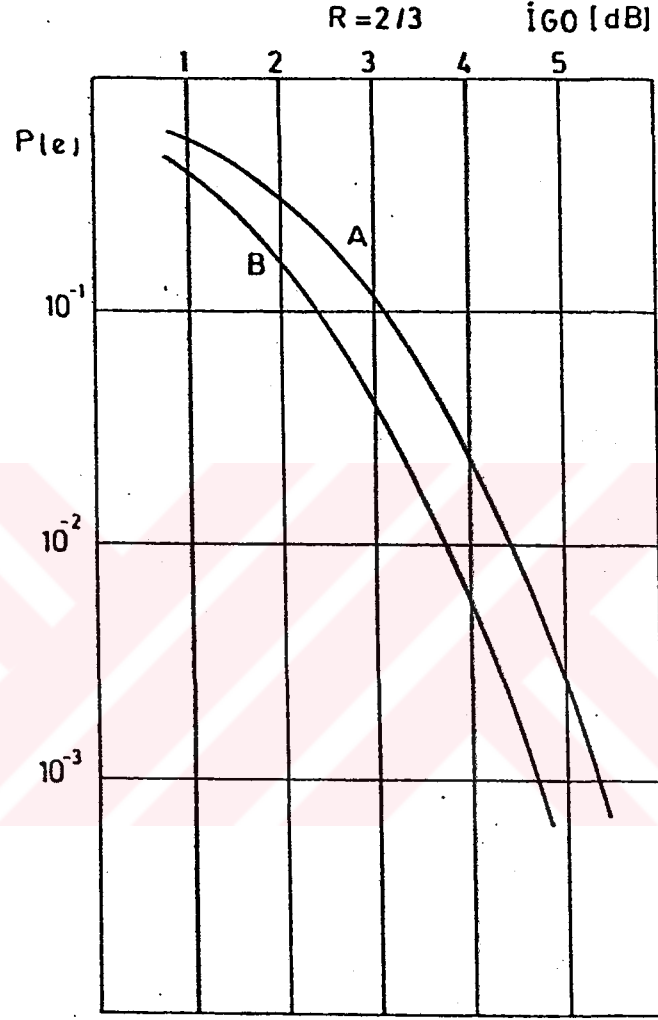
her paralel geçiş alt kümesinde, alıcıya gelen diziye en yakın kod sözcüğü seçilmekte ve Viterbi kod çözücüde yalnız bu seçilen sözcükler göz önüne alınmaktadır.

6 adımlı kodlama, iletim ve kod çözme işlemleri, gürültünün varyansı değiştirilerek sağlanan her işaret-gürültü oranı için 500 kez yinelenerek bir hata olasılığı değeri belirlenmiştir. Bu işlem de 10 kez yinelenip ortalama hata olasılığı alınarak, o işaret-gürültü oranı için hata olasılığına yaklaşma yoluna gidilmiştir.

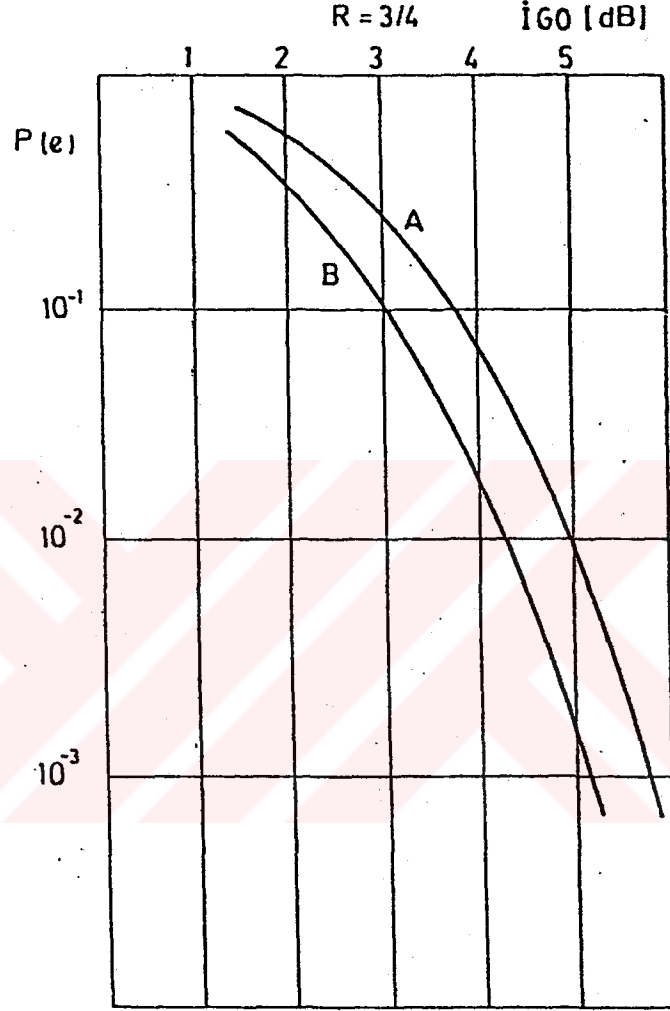
Bölüm 2.2'de, kafes kodlama kazancını belirlemek amacıyla göz önüne alınan kafes kodlamasız  $R=n/n+1$  oranlı üçlü kodlar için de yine bilgisayar benzetimi yardımıyla hata olasılığı eğrileri elde edilmiştir. İşaret-gürültü oranına bağlı olarak,  $R=1/2$ ,  $R=2/3$  ve  $R=3/4$  oranları için kafes kodlamalı modülasyon tekniğine dayanarak tasarlanan hat kodlarının kafes kodlamasız duruma göre üstünlükleri Şekil 2-22, 23, 24'de verilen hata eğrilerinden görülmektedir. Bu eğrilerde, işaret gücü, üçlü kod simgesi başına ortalama normalize güç olarak alınmaktadır.



Şekil 2-22.  $R=1/2$  oranlı hat kodu için işaret-gürültü oranına bağlı olarak hata olasılığının değişimi (A: kafes kodlamasız, B: kafes kodlamalı durum)



Şekil 2-23.  $R=2/3$  oranlı hat kodu için işaret-gürültü oranına bağlı olarak hata olasılığının değişimi (A: kafes kodlamasız, B: kafes kodlamalı durum)



Şekil 2-24.  $R=3/4$  oranlı hat kodu için işaret-gürültü oranına bağlı olarak hata olasılığının değişimi (A: kafes kodlamasız, B: kafes kodlamalı durum)

### BÖLÜM 3. SİSTEM HATA OLASILIKLARININ ÜST SINIRLARININ BELİRLENMESİ

Bu bölümde, kafes kodlamalı modülasyon tekniğine dayanarak tasarlanan hat kodlamalı sistemlerin hata olasılıklarının ve bit hata olasılıklarının üst sınırlarının belirlenmesi amaçlanmıştır.

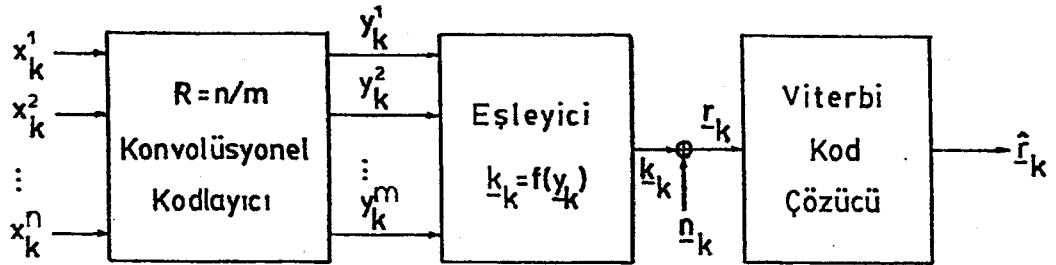
İkili dizileri,  $R=n/m$ ,  $m>n$  oranında, daha uzun ikili dizilere dönüştüren konvolüsyonel kodların serbest Hamming uzaklıkları ve hata başarımları, kafes gösterilime göre kapalı bir yapıdaki durum diyagramına dayanarak belirlenebilmektedir [4], [38], [39]. Konvolüsyonel kodların doğrusal olmaları nedeniyle, her uzunluktaki kod dizilerinin "tüm-sıfır" (all-zero) dizisine olan uzaklıkları kümesi, bu dizilerin herhangi bir kod dizisine olan uzaklıkları kümesine özdeştir. Bu durumda, tüm sıfır dizisi genelliği bozmaksızın doğru dizi olarak kabul edilebilmektedir. Kodlayıcının ürettiği dizilerin tüm sıfır dizisine uzaklığını, adım ve hatalı bit sayısını içeren bir işaret akış çizgesinin aktarım işlevi, "üretme işlevi" (generating function) olarak adlandırılmaktadır. Üretme işlevi, konvolüsyonel kodlayıcının serbest Hamming uzaklığının, serbest uzaklıklı dizi çifti sayısının ve dizi çiftleri arasındaki tüm uzaklıkların hesaplanmasını sağlamaktadır. Bu yolla tüm doğru ve hatalı dizi çiftleri hatalı bit sayılarıyla belirlenebilmektedir. Yine bu işlev yardımıyla konvolüsyonel kodlamalı sistemlerin hata ve bit hata olasılıkları için üst sınırlar verilebilmektedir. Hata olasılığı, Viterbi kod çözücünün hatalı bir karar sonucu doğru diziden ayrılarak hatalı bir kod dizisine karar vermeye başlaması olasılığı olarak, bit hata olasılığı ise karar verilen ikili veri dizisinde beklenen hatalı bit sayısının dizideki toplam bit sayısına oranı olarak tanımlanmaktadır.

Doğrusal olmayan kafes kodlar için, yukarıda belirtilen, serbest uzaklığa ve hata sınırlarına ilişkin bilgiler doğrusal kodlarda olduğu kadar kolay elde edilememektedir. Bunun temel nedeni, doğrusal olmayan kodlarda, doğru bir diziyle, hatalı bir dizi arasındaki uzaklığın doğru diziye bağlı olmasıdır. Diğer bir deyişle, tüm sıfır dizisi doğru dizi kabul edilerek kodun özellikleri çıkarılamamaktadır. Son yıllarda, kafes kodlamalı modülasyon yönteminin ortaya atılmasıyla doğrusal olmayan kafes kodlar üzerine yaygın araştırmalar başlamıştır. Şimdiye kadar, doğrusal olmayan kafes kodlarda, hata olasılığına ve bit hata olasılığına üst sınır getirmeye yönelik iki yöntem önerilmiştir. Bunlardan Biglieri'nin[10] yaklaşımında  $v$ , kodlayıcı belleğini göstermek üzere,  $2^v$  durumlu kafes kodlayıcı durum diyagramından, tüm olurlu doğru dizilerle tüm olurlu hatalı dizileri karşılaştırmak amacıyla, her durum çiftini bir durum varsayan  $2^{2v}$  durumlu bir işaret akış çizgesi elde edilmektedir. İşaret akış çizgesinin aktarım işlevi olan "genelleştirilmiş" üretme işlevi, hata başarımlarının bulunmasında kullanılmaktadır. Çizgedeki durum sayısının  $v$  yerine  $2v$  ile üstel olarak artması bu yöntemin kullanılabilirliğini az sayıdaki durumlu basit kodlarla sınırlamaktadır. Zehavi ve Wolf'un[40] yaklaşımı, hata ve bit hata olasılıklarının hesaplanmasını  $2^v$  durumlu diyagramlara dayanarak sağlaması açısından daha pratiktir. Ancak bu yöntem, yalnızca belirli simetri özellikleri gösteren kodlar için uygulanabilir niteliktedir. Bununla birlikte, Ungerboeck'ün[1],[2],[3], Calderbank ve Mazo'nun[6] tasarladığı kodların söz konusu simetri özelliklerini sağlaması nedeniyle bu yaklaşım önem kazanmaktadır.

Tezin bu bölümünde, ikinci yaklaşım genelleştirilerek tasarlanan hat kodlarının hata olasılıkları için üst sınırlar hesaplanmıştır. Bu amaçla, bundan sonraki alt bölümde, konvolüsyonel kodlayıcılara dayalı hat kodlamasının analitik yapısı ortaya konmuştur.

### 3.1. Konvolüsyonel Kodlayıcılara Dayalı Hat Kodlamasının Tanımlanması ve Gösterilimi

Hat kodlayıcı ve kod çözücünden oluşan temelband iletişim sisteminin incelememize uygun biçimdeki blok diyagramı Şekil 3-1'de verilmiştir.



Şekil 3-1. Hat kodlamalı temelband iletişim sistemi

$R=n/m$ ,  $m>n$  oranlı konvolüsyonel kodlayıcı;  $k=0,1,2, \dots$  kodlama adımını göstermek üzere, her  $k$  için,  $n$  uzunluklu  $\underline{x}_k = [x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^n]$  ikili giriş dizisine,  $m$  uzunluklu  $\underline{y}_k = [y_k^1, y_k^2, \dots, y_k^m]$  ikili çıkış dizisini karşı düşürmektedir. Burada,  $x_j^i$  ve  $y_j^i$ ,  $j$ . kodlama adımında, sırasıyla giriş ve çıkış dizilerinin  $i$ . ikili sayılarını göstermektedir. Giriş dizisi,

$$X(D) = [X^1(D), X^2(D), \dots, X^n(D)] \quad (3.1)$$

sonlu gösterilimine dönüştürülürse, burada

$$X^i(D) = x_0^i + x_1^i D + x_2^i D^2 + \dots \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.2)$$

olarak verilir. Çıkış dizisi de,

$$Y^j(D) = y_0^j + y_1^j D + y_2^j D^2 + \dots \quad 1 \leq j \leq m \quad (3.3)$$

olmak üzere

$$Y(D) = [Y^1(D), Y^2(D), \dots, Y^n(D)] \quad (3.4)$$

gösterilimiyle ifade edilebilir. Buna göre konvolüsyonel kodlama işlemi

$$Y(D) = X(D)G(D) \quad (3.5)$$

denklem takımıyla belirlenir. Burada  $G(D)$  üreteç çokterimlilerinden oluşan  $n \times m$  boyutlu bir matristir ve

$$G_i^j(D) = g_{oi}^j + g_{1i}^j D + g_{2i}^j D^2 + \dots \quad 1 \leq i \leq n \quad \text{ve} \quad 1 \leq j \leq m \quad (3.6)$$

olmak üzere

$$G(D) = \begin{bmatrix} G_1^1(D) & G_1^2(D) & \dots & G_1^m(D) \\ G_2^1(D) & G_2^2(D) & \dots & G_2^m(D) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_n^1(D) & G_n^2(D) & \dots & G_n^m(D) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

biçiminde gösterilir. Kodlayıcının "kısıtlanmış uzunluğu" (constraint length)

$$v = \sum_{i=1}^n \max_j [G_i^j(D) \text{ çokterimlisinin derecesi}] \quad (3.8)$$

olarak tanımlanır.  $v$ , konvolüsyonel kodlayıcılarda, gerekli bellek sayısını belirleyen bir büyüklüktür.

Eşleyici, her adımda, o adıma ilişkin,  $m$  uzunluklu  $\underline{y}_k$  ikili çıkış dizisine,  $n+1$  uzunluklu bir üçlü hat kodu sözcüğünü karşı düşünerek kanaldan iletmektedir:

$$\underline{k}_k = f(\underline{y}_k) \quad (3.9)$$

Kanal, toplamsal beyaz Gauss gürültüsüyle modellenmekte olup, kanal çıkışında, her adım için  $\underline{n}_k = [n_k^1, n_k^2, \dots, n_k^{n+1}]$  toplamsal gürültü dizisini göstermek üzere,

$$\underline{r}_k = \underline{k}_k + \underline{n}_k \quad (3.10)$$

dizisi elde edilmektedir. Alıcıda, Viterbi kod çözücü, Maksimum-Likelihood karar kuralına göre  $\{r_k\}$  dizisine en yakın üçlü diziye karar vermektedir.

### 3.2. Genelleştirilmiş Üretme İşlevinin Elde Edilmesi

Hata ve bit hata olasılıklarının üst sınırlarının belirlenmesinde yararlanılacak "genelleştirilmiş" (modified) üretme işlevi yalnız doğrusal konvolüsyonel kodlayıcılara dayalı kafes kodlar için geçerli olmaktadır. İkili konvolüsyonel kodlayıcının doğrusallığının getirdiği basitleştirme olanakları sonucunda, bu tezde tasarlanan doğrusal olmayan kafes kodlar için aşağıda açıklanacak belirli koşulların sağlanması durumunda üretme işlevi,  $2^{2^v}$  yerine  $2^v$  durumlu, yani gerçek durum geçiş diyagramındaki durum sayısına eşit sayıda durumlu bir diyagram yardımıyla elde edilebilmektedir. İlk kez, birbirleriyle arakesi olmayan iki alt kümeli bir alfabeye dayalı 4-AM kodu için Zehavi ve Wolf[40] tarafından kullanılan bu yöntem, burada genelleştirilerek, kısmen farklı kısmen ortak elemanlı ve ikiden çok alt kümeler içeren alfabeye sahip  $R=1/2$  ve  $R=3/4$  oranlı hat kodları için de geçerli çözümlere olanak sağladığı gösterilmiştir. İncelemeye gerekli tanımların verilmesiyle başlanmaktadır.

Tanım 3.1.  $e_k = (e_k^1, e_k^2, \dots, e_k^m)$ ,  $m$  uzunluklu herhangi bir ikili dizi olsun. Konvolüsyonel kodlayıcı çıkışı  $y_k = (y_k^1, y_k^2, \dots, y_k^m)$  nın ve dolayısıyla  $k_k = f(y_k)$  hat kodu sözcüğünün,  $e_k$  ya göre "karesel Öklid hata ağırlığı",  $k e_k$ ,  $e_k$  ya karşı düşen hat kodu sözcüğü olmak üzere,

$$\begin{aligned} d^2(y_k, e_k) &= d^2\{f(y_k), f(y_k \oplus e_k)\} = \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} d^2(k_{ki}, k_{ki} \oplus e_{ki}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.2. A bir hat kodu alfabesinin herhangi bir alt kümesi olsun. Verilen bir  $\underline{e}_k$  dizisine göre A kümesinin "ağırlık profili" (weight profile)

$$F(A, \underline{e}_k, W) = \sum a_{\alpha} W^{\alpha} \quad (3.12)$$

olarak tanımlanır. Burada  $a_{\alpha}$ , A kümesinde,  $\underline{e}_k$  dizisine göre karesel Öklid hata ağırlıklı kod sözcük sayısını göstermekte olup W uzaklıkla ilgili bir parametredir. Toplam,  $\underline{e}_k$  ya göre karesel Öklid hata ağırlıklarının olurlu tüm değerleri üzerinden alınmaktadır.

$R=n/m$  oranlı konvolüsyonel kodlara ilişkin, aşağıdaki lemmalarda verilen iki özellik, üretme işlevinin hesaplanması açısından önemlidir. Bu lemmalar ve ardından verilecek teoremler[40] da verilenlerin genelleştirilmiş biçimleridir.

Lemma 1: Bir  $R=n/m$ ,  $m>n$  oranlı konvolüsyonel kodlayıcı verildiğine göre, tüm sıfır durumundan, olurlu  $2^n$  tane m uzunluklu ikili çıkış dizileri, modülo 2 vektörel toplama işlemi altında bir grup oluşturur ( $G_0$ ). Diğer durumlara ilişkin  $2^n$  er tane m uzunluklu ikili çıkış dizisinden oluşan  $2^v-1$  alt küme, bu grubun birer kosetidirler ( $G_i$ ,  $i=1,2,\dots,2^v-1$ ).

Tanıt: Tüm sıfır durumunda, m tane ikili çıkış bitinin her biri, n tane ikili girişin bir alt kümesinin modülo 2 toplamından oluşacaktır. n uzunluklu herhangi iki giriş dizisinin modülo 2 vektörel toplamı yine bir giriş dizisi olup, bu toplama ilişkin çıkış dizisi, doğrusallık nedeniyle her bir giriş dizisine karşı düşen çıkış dizilerinin toplamından oluşan diziye özdeş olacaktır. Bu nedenle,  $2^n$  tane m uzunluklu ikili çıkış dizisinden oluşan bu alt küme, modülo 2 vektörel toplama işlemi altında kapalılık ve birleşme özellikleri göstermektedir. Tüm sıfır giriş dizisine karşı düşen tüm sıfır çıkış dizisi,  $2^n$  tane m uzunluklu çıkış dizisinin oluşturduğu bu alt kümenin

etkisiz elemanı olup her çıkış dizisi kendisinin ters elemanıdır. Bu özelliklere sahip tüm sıfır durumuna ilişkin  $2^n$  tane  $m$  uzunluklu ikili çıkıştan oluşan küme, konvolüsyonel kodlayıcı çıkış kümesinin oluşturduğu grubun bir alt grubudur ( $G_0$ ). Diğer kodlayıcı durumlarında,  $m$  tane ikili çıkışın her biri,  $n$  tane ikili girişin tüm sıfır durumunda belirtilen aynı alt kümesiyle artık tüm sıfırdan farklı olan kodlayıcı belleğinin bir alt kümesinin modülo 2 toplamından oluşacaktır. Her durum için kodlayıcı belleği giriş  $n$ -dizisinden bağımsız ve sabit olduğundan  $m$  uzunluklu  $2^n$  çıkış dizisinden oluşan her küme, tüm sıfır durumuna ilişkin alt grup oluşturan kümenin elemanlarına sabit bir  $m$  uzunluklu dizinin modülo 2 aritmetiğinde vektörel olarak eklenmesiyle elde edilmektedir. Bu nedenle, bu durumlara ilişkin  $2^v-1$  tane çıkış alt kümesi tüm sıfır durumuna ilişkin alt grubun kosetleridir ( $G_i$ ,  $i=1,2,\dots,2^v-1$ ).

Lemma 2. Tüm sıfır durumuna ilişkin hat kodu sözcükleri alt kümesi  $A_0$  ile, diğer durumlara ilişkin hat kodu sözcükleri alt kümeleri de  $A_i$ ,  $i=1,2,\dots,2^v-1$  ile gösterilsin. Buna göre, doğru ve hatalı bir dizi çifti arasındaki ikili hata dizisi,  $k$ . kodlama adımında  $\underline{e}_k$  ise, iki durum söz konusu olabilir:

a)  $\underline{e}_k \notin G_0$  ise doğru ve hatalı ikili dizilere karşı düşen kod sözcükleri aynı durum alt kümesinin elemanlarıdır.

b)  $\underline{e}_k \in G_i$ ,  $i=1,2,\dots,2^v-1$  ise doğru ve hatalı ikili dizilere karşı düşen kod sözcükleri farklı durum alt kümelerinin elemanlarıdır.

Tanıt:  $G_0$  alt grubu kapalılık özelliğine sahip olduğundan,  $\underline{e}_k$  hata dizisi, ancak ve ancak  $G_0$ 'a ait ise, bu alt gruba veya bu alt grubun elemanlarına sabit bir dizi eklenerek oluşturulan herhangi bir kosetine ilişkin bir doğru diziyeye eklendiğinde, hatalı dizi, bu doğru diziyeye aynı alt kümeye ait olacaktır.

Bu özelliklerin ışığı altında aşağıdaki teorem geçerli olmaktadır.

Teorem 3.1. İkili konvolüsyonel kodlayıcılardan doğrusal olmayan eşleme yoluyla elde edilmiş kafes kodlar, her  $\underline{e}_k$  için

$$F(A_0, \underline{e}_k, W) = F(A_1, \underline{e}_k, W) = \dots = F(A_{2^v-1}, \underline{e}_k, W) \quad (3.13)$$

koşulunu sağlıyorsa, olurlu tüm doğru dizilerle tüm hatalı diziler arasındaki Öklid uzaklıkları,  $2^v$  durumlu bir genelleştirilmiş durum diyagramı yardımıyla hesaplanabilir.

Tanıt: Kodlamanın i. adımında doğru ve hatalı dizilerin aynı durumdan kalktıkları varsayılırsa,  $2^n$  olurlu doğru diziye karşılık  $2^n-1$  farklı  $\underline{e}_i$  hata dizisi söz konusu olacaktır. Hatanın bu ilk adımında, Lemma 2(a) nedeniyle daima tüm sıfır durumundan kalkan  $\underline{e}_i$  hata dizisi,  $A_j$ , doğru ve hatalı dizilerin kalkış durumlarını göstermek üzere,  $F(A_j, \underline{e}_i, W)$  hata ağırlık profiline sahiptir. Buna göre, işaret akış çizgesinde  $\underline{e}_i$  ikili çıkışı  $LF(A_j, \underline{e}_i, W)I^r$  ile gösterilecektir. Burada, L ve I, sırasıyla, dizi uzunluğu ve bit hatasıyla ilgili soyut terimler olup r,  $\underline{e}_i$  hata dizisine karşılık, ikili giriş dizisindeki hatalı bit sayısını göstermektedir. Herhangi bir k. adımda, doğru ve hatalı dizilerin farklı durumlarda oldukları varsayılırsa  $\underline{e}_k$  ya ilişkin hata ağırlık profili doğru dizinin bulunduğu duruma bağlı olarak  $F(A_0, \underline{e}_k, w)$ ,  $F(A_1, \underline{e}_k, w)$ , ...,  $F(A_{2^v-1}, \underline{e}_k, w)$  değerlerinden biri olacaktır. Ancak, teoremden,  $\underline{e}_k$  nın değeri ne olursa olsun bu ağırlıklar tüm  $A_j$ ,  $j=0,1, \dots, 2^v-1$  ler için birbirine eşit varsayıldığından, akış çizgesinde  $\underline{e}_k$  ya ilişkin geçiş  $LF(A, \underline{e}_k, w)I^r$  yazılabilecektir. Burada A herhangi bir duruma ilişkin hat kodu sözcükleri alt kümesini göstermektedir.

Sonuçta,  $F(A, \underline{e}_k, w)$  hata ağırlık profilleri kodlayıcı durumlarına ilişkin hat kodu sözcükleri alt kümelerinden bağımsız kılındığından olurlu tüm  $\underline{e}_k$  hata dizilerini

içeren  $2^v$  durumlu ikili konvolüsyonel kodlayıcı akış çizgesi, tüm hata ağırlıklarının gösteriliminde yeterli olacaktır.

Tanım 3.3. Bir kafes kodlayıcıya ilişkin genelleştirilmiş üretme işlevi

$$T(W, L, I) = \sum_{\alpha, i, j} a_{\alpha, i, j} L^i I^j W^\alpha \quad (3.14)$$

olarak tanımlanır [40]. Burada  $a_{\alpha, i, j}$ ,  $\alpha$  karesel Öklid hata ağırlıklı,  $i$  uzunluklu,  $j$  veri biti hatalı, hata olaylarının sayısıdır.

Teorem 3.2. Teorem 3.1'i sağlayan herhangi bir kafes kodlayıcının hata olasılığı

$$P_e \leq Q((d_{SN}^2 E_s / 2N_o)^{1/2}) \exp(d_{SN}^2 E_s / 4N_o) T(W, L, I) \Big|_{\substack{L=2^{-n} \\ W=\exp(-E_s/4N_o) \\ I=1}} \quad (3.15)$$

ve bit hata olasılığı

$$P_{b/n} \leq \frac{1}{n} Q((d_{SN}^2 E_s / 2N_o)^{1/2}) \exp(d_{SN}^2 E_s / 4N_o) \frac{\partial T(W, L, I)}{\partial I} \Big|_{\substack{L=2^{-n} \\ W=\exp(-E_s/4N_o) \\ I=1}} \quad (3.16)$$

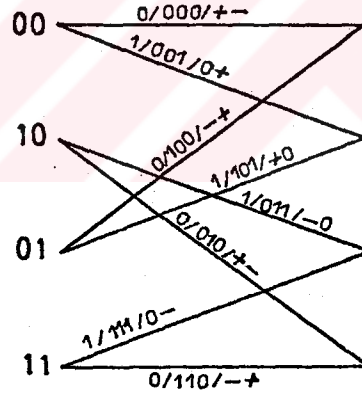
ilişkileriyle üstten sınırlıdır. Burada,  $E_s$  hat kodu sözcüğü başına ortalama enerjiyi göstermek üzere  $d_{SN}^2 = d_s^2 / E_s$  normalize karesel serbest Öklid uzaklığıdır. Ayrıca, bu ifadelerde,  $T(W, L, I)$  işlevindeki  $\alpha$  uzaklıkları yerine  $\beta = \alpha / E_s$  normalize değerleri kullanılmalıdır.

Bu teoreme ilişkin tanıt, [40] de verilmiş biçimiyle geçerli olup buraya alınmamıştır.

### 3.3. $R=1/2$ Oranlı Hat Kodlamalı Sistemlere İlişkin Hata Olasılıkları İçin Üst Sınırlar

Bu alt bölümde, ikinci bölümde tasarlanan  $R=1/2$  oranlı hat kodunun Teorem 3.1'de verilen simetri koşullarını sağladığı gösterilmiş ve Teorem 3.2'ye dayanarak, bu kodlamayı içeren sistemlerin hata ve bit hata olasılıkları için, üst sınırlar hesaplanmıştır.

$R=1/2$  oranlı hat kodunda, kodlayıcı alfabesi, hata düzeltmenin yanında temelband kanal gereksinimlerinin de sağlanması amacıyla  $2^{n+2}=8$  elemanlı seçilmiştir. Her hat kodu sözcüğünün konvolüsyonel kodlanmış bir ikili dizinin karşılığı olabilmesi için, hat kodlaması,  $n/n+2=1/3$  oranlı bir konvolüsyonel kodlayıcıya dayandırılmalıdır.  $R=1/2$  oranlı hat kodu için böyle bir kodlayıcının kafes yapısı Şekil 3-2 de verilmiştir.



Şekil 3-2.  $R=1/2$  oranlı hat kodlayıcısının  $1/3$  oranlı konvolüsyonel kodlayıcıya dayandırılarak gerçekleştirilmesi

00 durumunda, konvolüsyonel kodlayıcının ikili çıkışları  $\{000,001\}$  alt grubunu oluşturmaktadır. 10 durumuna ilişkin çıkışlar  $\{010,011\}$ , 00 durumunda alt grup oluşturan kümenin elemanlarına 010 dizisi modülo 2 vektörel toplam anlamında eklenerek elde edilmektedir. Benzer biçimde, 01 durumuna ilişkin ikili çıkışlar 00 durumuna ilişkin

kümenin elemanlarına 101 dizisi eklenerek, 11 durumuna ilişkin çıkışlar da 00 durumuna ilişkin kümenin elemanlarına 111 dizisi eklenerek elde edilmektedir. Bu nedenle, 10,01,11 durumlarına ilişkin alt kümeler 00 durumuna ilişkin alt grubun kosetleridir.

Hat kodu sözcüklerinin  $\underline{e}_k$  hata dizisine göre karesel Öklid hata ağırlık değerleri,  $d^2(\underline{y}_k, \underline{e}_k)$  lar, (3.11) den hesaplanmış ve Tablo 3-1'de verilmiştir.

Tablo 3-2'de, kodlayıcı durumlarına ilişkin hat kodu sözcükleri alt kümelerinin  $(A_0, A_1, A_2, A_3)$ ,  $\underline{e}_k$  ikili hata dizisinin olurlu tüm değerlerine göre ağırlık profilleri görülmektedir. Bu büyüklükler (3.12) den elde edilmektedir. Tablo 3-2'den varılan sonuç, 1/3 oranlı konvolüsyonel koda dayandırılmış  $R=1/2$  oranlı hat kodu için,  $\underline{e}_k$  hata dizisi ne olursa olsun,

$$F(A_0, \underline{e}_k, W) = F(A_1, \underline{e}_k, W) = F(A_2, \underline{e}_k, W) = F(A_3, \underline{e}_k, W) \quad (3.17)$$

eşitliklerinin geçerli olduğudur. Bu durumda, Teorem 3.1'e göre, bu hat kodlayıcısı için, olurlu tüm doğru dizilerle, tüm hatalı diziler arasındaki Öklid uzaklıkları, Şekil 3-3 de verilen genelleştirilmiş işaret akış çizgesi yardımıyla hesaplanabilir. Bu çizgenin aktarım işlevi olan genelleştirilmiş üretme işlevi (3.18) durum denklem takımı çözülerek elde edilir [4], [38]. Burada

$$\begin{aligned} \xi_{10} &= 2LW^5I \\ \xi_{01} &= 2LW^5I\xi_{10} + 2LWI\xi_{11} \\ \xi_{11} &= L(W^8+W^4)\xi_{11} + L(1+W^2)\xi_{10} \\ T(W, L, I) &= L(W^8+W^2)\xi_{01} \end{aligned} \quad (3.18)$$

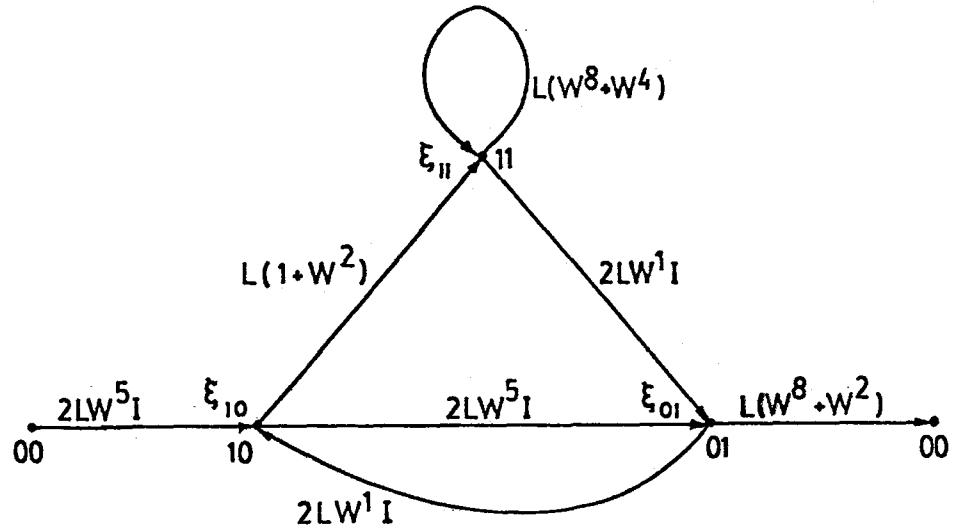
$\xi_{01}$ ,  $\xi_{10}$ ,  $\xi_{11}$  ara düğümler için yapay değişkenler olup, 00 düğüme giriş 1 olduğunda çıkış  $T(W, L, I)$  dir.  $R=1/2$  oranlı hat kodu için genelleştirilmiş üretme işlevi, (3.18) den aşağıdaki biçimde bulunur:

Tablo 3-1. R=1/2 oranlı hat kodu sözcüklerinin  $e_k$  ikili hata dizisinin tüm olurlu değerlerine karşı karesel Öklid hata ağırlıkları

|                                                                                                 | $d^2(y_k, e_k)$                      |                                                                                                 | $d^2(y_k, e_k)$                      |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------|
| $A_0 \begin{smallmatrix} + \\ o \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix}$ | $d^2(000,000)=0$<br>$d^2(001,000)=0$ | $A_0 \begin{smallmatrix} + \\ o \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix}$ | $d^2(000,100)=8$<br>$d^2(001,100)=2$ |
| $A_1 \begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} o \\ - \end{smallmatrix}$ | $d^2(011,000)=0$<br>$d^2(010,000)=0$ | $A_1 \begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} o \\ - \end{smallmatrix}$ | $d^2(011,100)=2$<br>$d^2(010,100)=8$ |
| $A_2 \begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} o \\ + \end{smallmatrix}$ | $d^2(100,000)=0$<br>$d^2(101,000)=0$ | $A_2 \begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} o \\ + \end{smallmatrix}$ | $d^2(100,100)=8$<br>$d^2(101,100)=2$ |
| $A_3 \begin{smallmatrix} o \\ - \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix}$ | $d^2(111,000)=0$<br>$d^2(110,000)=0$ | $A_3 \begin{smallmatrix} o \\ - \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix}$ | $d^2(111,100)=2$<br>$d^2(110,100)=8$ |
| $A_0 \begin{smallmatrix} + \\ o \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix}$ | $d^2(000,001)=5$<br>$d^2(001,001)=5$ | $A_0 \begin{smallmatrix} + \\ o \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix}$ | $d^2(000,101)=1$<br>$d^2(001,101)=1$ |
| $A_1 \begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} o \\ - \end{smallmatrix}$ | $d^2(011,001)=5$<br>$d^2(010,001)=5$ | $A_1 \begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} o \\ - \end{smallmatrix}$ | $d^2(011,101)=1$<br>$d^2(010,101)=1$ |
| $A_2 \begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} o \\ + \end{smallmatrix}$ | $d^2(100,001)=5$<br>$d^2(101,001)=5$ | $A_2 \begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} o \\ + \end{smallmatrix}$ | $d^2(100,101)=1$<br>$d^2(101,101)=1$ |
| $A_3 \begin{smallmatrix} o \\ - \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix}$ | $d^2(111,001)=5$<br>$d^2(110,001)=5$ | $A_3 \begin{smallmatrix} o \\ - \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix}$ | $d^2(111,101)=1$<br>$d^2(110,101)=1$ |
| $A_0 \begin{smallmatrix} + \\ o \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix}$ | $d^2(000,010)=0$<br>$d^2(001,010)=2$ | $A_0 \begin{smallmatrix} + \\ o \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix}$ | $d^2(000,110)=8$<br>$d^2(001,110)=4$ |
| $A_1 \begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} o \\ - \end{smallmatrix}$ | $d^2(011,010)=2$<br>$d^2(010,010)=0$ | $A_1 \begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} o \\ - \end{smallmatrix}$ | $d^2(011,110)=4$<br>$d^2(010,110)=8$ |
| $A_2 \begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} o \\ + \end{smallmatrix}$ | $d^2(100,010)=0$<br>$d^2(101,010)=2$ | $A_2 \begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} o \\ + \end{smallmatrix}$ | $d^2(100,110)=8$<br>$d^2(101,110)=4$ |
| $A_3 \begin{smallmatrix} o \\ - \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix}$ | $d^2(110,010)=2$<br>$d^2(111,010)=0$ | $A_3 \begin{smallmatrix} o \\ - \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix}$ | $d^2(111,110)=4$<br>$d^2(110,110)=8$ |
| $A_0 \begin{smallmatrix} + \\ o \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix}$ | $d^2(000,011)=5$<br>$d^2(001,011)=5$ | $A_0 \begin{smallmatrix} + \\ o \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix}$ | $d^2(000,111)=1$<br>$d^2(001,111)=1$ |
| $A_1 \begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} o \\ - \end{smallmatrix}$ | $d^2(011,011)=5$<br>$d^2(010,011)=5$ | $A_1 \begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} o \\ - \end{smallmatrix}$ | $d^2(011,111)=1$<br>$d^2(010,111)=1$ |
| $A_2 \begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} o \\ + \end{smallmatrix}$ | $d^2(100,011)=5$<br>$d^2(101,011)=5$ | $A_2 \begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} o \\ + \end{smallmatrix}$ | $d^2(100,111)=1$<br>$d^2(101,111)=1$ |
| $A_3 \begin{smallmatrix} o \\ - \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix}$ | $d^2(111,011)=5$<br>$d^2(110,011)=5$ | $A_3 \begin{smallmatrix} o \\ - \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} - \\ + \end{smallmatrix}$ | $d^2(111,111)=1$<br>$d^2(110,111)=1$ |

Tablo 3-2.  $R=1/2$  oranlı hat kodlayıcısında durumlara ilişkin alt kümelerin hata ağırlık profilleri

| ALT KÜME | HATA DİZİSİ | $F(A_0, e_k, w)$ | ALT KÜME | HATA DİZİSİ | $F(A_2, e_k, w)$ |
|----------|-------------|------------------|----------|-------------|------------------|
| $A_0$    | 000         | 2                | $A_2$    | 000         | 2                |
|          | 001         | $2w^5$           |          | 001         | $2w^5$           |
|          | 010         | $1+w^2$          |          | 010         | $1+w^2$          |
|          | 011         | $2w^5$           |          | 011         | $2w^5$           |
|          | 100         | $w^8+w^2$        |          | 100         | $w^8+w^2$        |
|          | 101         | $2w^1$           |          | 101         | $2w^1$           |
|          | 110         | $w^8+w^4$        |          | 110         | $w^8+w^4$        |
|          | 111         | $2w^1$           |          | 111         | $2w^1$           |
| ALT KÜME | HATA DİZİSİ | $F(A_1, e_k, w)$ | ALT KÜME | HATA DİZİSİ | $F(A_3, e_k, w)$ |
| $A_1$    | 000         | 2                | $A_3$    | 000         | 2                |
|          | 001         | $2w^5$           |          | 001         | $2w^5$           |
|          | 010         | $1+w^2$          |          | 010         | $1+w^2$          |
|          | 011         | $2w^5$           |          | 011         | $2w^5$           |
|          | 100         | $w^8+w^2$        |          | 100         | $w^8+w^2$        |
|          | 101         | $2w^1$           |          | 101         | $2w^1$           |
|          | 110         | $w^8+w^4$        |          | 110         | $w^8+w^4$        |
|          | 111         | $2w^1$           |          | 111         | $2w^1$           |



Şekil 3-3.  $R=1/2$  oranlı hat kodlayıcısının genelleştirilmiş üretme işlevinin hesaplanmasını sağlayan işaret akış çizgisi

$$T(W,L,I)=2L^2W^5(W^8+W^2)I\left[2LW^5I + \frac{2L^2WI(1+W^2)}{1-L(W^8+W^4)}\right] \quad (3.19)$$

Bu kod için sözcük başına ortalama enerji  $E_s=3/2$  olup, normalize karesel serbest Öklid uzaklığı  $d_{SN}^2=d_s^2/E_s=16/3$ '-dür. (3.19) ifadesinde de  $W$  nın kuvvetleri olan uzaklık değerleri yerine normalize  $\beta=\alpha/E_s$  değerleri yerleştirilirse normalize uzaklıklar cinsinden genelleştirilmiş üretme işlevi,

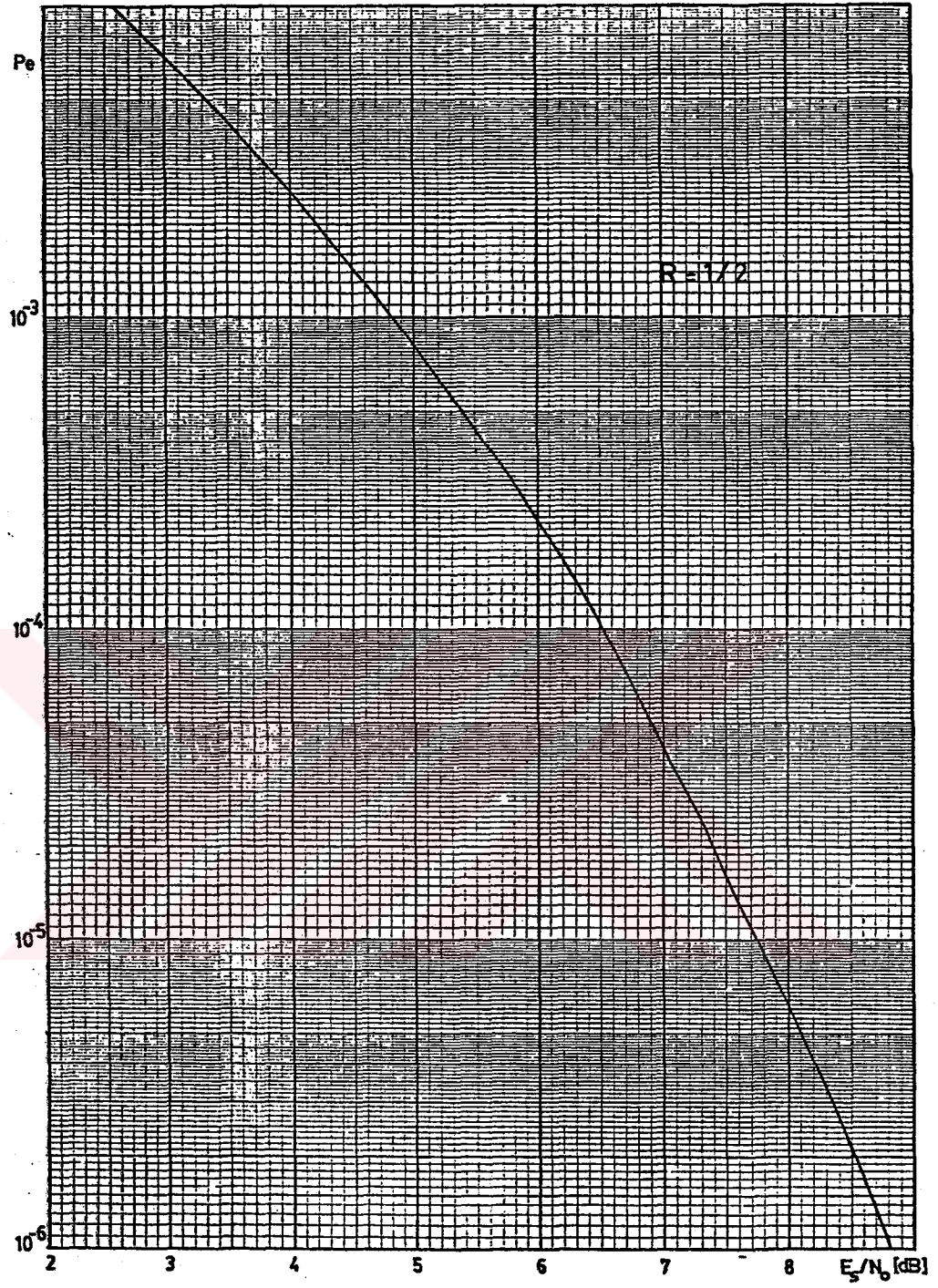
$$T(W,L,I)=2L^2W^{10/3}(W^{16/3}+W^{4/3})I\left[2LW^{10/3}I + \frac{2L^2W^{2/3}I(1+W^{4/3})}{1-L(W^{16/3}+W^{8/3})}\right] \quad (3.20)$$

biçimini alır. Bu eşitlik (3.15) ve (3.16) bağıntılarında kullanılarak hata ve bit hata olasılıkları için üst sınırlar elde edilir.  $E_s/N_0$  oranına bağlı olarak hata olasılığının üst sınırının değişimi bilgisayarda nümerik olarak hesaplanmış ve Şekil 3-4'de verilmiştir.

$T(W,L,I)$  ye ilişkin (3.19) ifadesinde pay paydaya bölünerek,

$$T(W,L,I)=4L^4W^8I^2+4L^4W^{10}I^2+4(L^3+L^5)W^{12}I^2+4(L^4+L^5)W^{14}I^2+\dots \quad (3.21)$$

yazılır. Buradan,  $R=1/2$  oranlı hat kodunun serbest Öklid uzaklığının 8 olduğu ve 4 adımda erişildiği, serbest uzaklıklı dizi çiftleri sayısının 4 olduğu görülmektedir. Bu hata dizileri için hatalı veri biti sayısı 2'dir. Kodlayıcının diğer tüm uzaklık özellikleri de bu polinomdan elde edilmektedir.

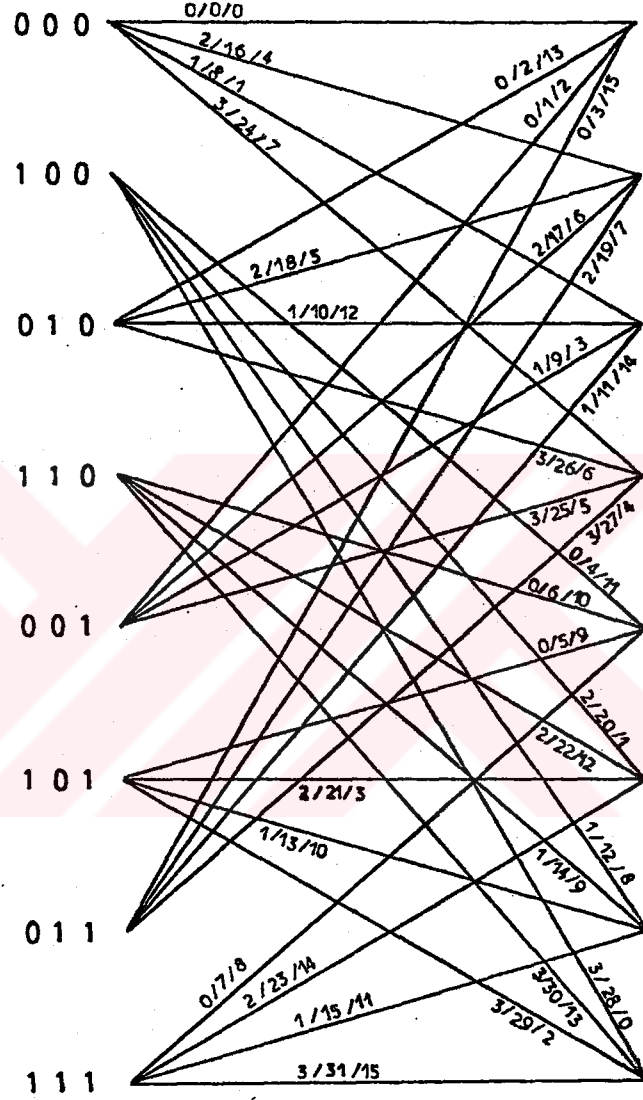


Şekil 3-4.  $R=1/2$  oranlı hat kodu için hata olasılığının üst sınırının  $E_s/N_0$  oranına bağlı olarak değişimi

### 3.4. $R=3/4$ Oranlı Hat Kodlamalı Sistemlere İlişkin Hata Olasılığı İçin Üst Sınır

Aşağıda, ikinci bölümde tasarlanan  $R=3/4$  oranlı kafes yapıda hat kodlayıcısı içeren sistemlerin hata olasılığı için bir üst sınır belirlenmektedir.

$R=3/4$  oranlı hat kodu alfabesi, her biri paralel geçişlere karşı düşürülecek biçimde 16 sözcük çiftinden oluşturulmuştur (Tablo 2-5). Kodlayıcı kafes yapısında da durumlararası tüm geçişler bir paralel geçişten oluşmaktadır (Şekil 2-15). Bu kodlayıcı için kod çözme işlemi, paralel geçiş alt kümelerinin çözülmesi ve ardından da Viterbi algoritmasıyla kod çözülmesi biçiminde iki aşamada gerçekleştirilmiştir. Burada, Viterbi kod çözücünün, hatalı kararlar vererek doğru diziden birden fazla kodlama adımı için ayrılması biçimindeki hata olasılığına, (düğüm hata olasılığı) üst sınır getirmek amaçlanmıştır. Bu nedenle, ikili giriş dizisinde, paralel geçiş alt kümelerinden hangi sözcüğün seçileceğini belirleyen ve dolayısıyla kafes kodlamayı etkilemeyen bitler göz önüne alınmamıştır. Buna göre, paralel geçiş alt kümeleri bir bütün olarak düşünülüp her durumdan 8 yerine 4 çıkış olduğu varsayılmıştır. Ancak, iki alt küme arasındaki uzaklık, tıpkı kodun tasarımıda olduğu gibi, iki alt kümenin birbirine en yakın iki hat kodu sözcüğü arasındaki uzaklık olarak tanımlandığından en kötü durum göz önüne alınmaktadır. Bu durumda, ikili girişli ve ikili çıkışlı doğrusal bir kod  $2/5$  oranı için oluşturulmuştur. Bu konvolüsyonel koda ilişkin çıkış dizileri paralel geçiş alt kümelerine karşı düşürülmüş olup,  $2^5=32$  çıkış dizisi ve 16 paralel geçiş alt kümesi olduğundan, diziler ikişer ikişer aynı bir alt kümeyle eşlenmiştir. Bu bilgileri içeren kodlayıcı kafes yapısı Şekil 3-5'de verilmiştir.



Şekil 3-5.  $R=3/4$  oranlı hat kodu için  $2/5$  oranlı konvolüsyonel koda dayalı kodlayıcı kafes yapısı. Durum geçişleri üzerindeki birinci sayı iki bitlik ikili girişin ondalık karşılığı, ikinci sayı beş bitlik ikili çıkışın ondalık karşılığı, üçüncü sayı ise paralel geçiş alt kümelerinin Tablo 2-5'de verilen numaralarını göstermektedir.

Paralel geçiş alt kümelerine karşı gelen ikili çıkışların,  $\underline{e}_k$  hata dizisinin olurlu  $2^5=32$  değerine göre karesel Öklid hata ağırlıkları,  $d^2(\underline{y}_k, \underline{e}_k)$  lar, (3.11) den bir bilgisayar programı yardımıyla hesaplanmıştır. Kodlayıcı durumlarına karşı düşen ve her biri 4 paralel geçiş alt kümesinin birleşiminden oluşan  $A_0, A_1, \dots, A_7$  hat kodu sözcükleri alt kümelerinin,  $\underline{e}_k$  nın olurlu tüm değerlerine göre ağırlık profilleri, (3.12) den yine bilgisayar programı yardımıyla hesaplanmış ve birbirine eşit bulunmuştur. Diğer bir deyişle,  $\underline{e}_k$  ne olursa olsun,

$$F(A_0, \underline{e}_k, W) = F(A_1, \underline{e}_k, W) = \dots = F(A_7, \underline{e}_k, W) \stackrel{\Delta}{=} F(A, \underline{e}_k, W) \quad (3.22)$$

eşitlikleri geçerlidir.  $F(A, \underline{e}_k, W)$  ağırlık profili,  $\underline{e}_k$  hata dizisine bağılı olarak Tablo 3-3'de verilmiştir. Bu sonuç, Teorem 3.1'e dayanarak,  $R=3/4$  oranlı hat kodu için genelleştirilmiş üretme işlevinin 8 durumlu bir işaret akış grafi yardımıyla hesaplanabileceğini ortaya koymaktadır.  $\underline{e}_k$  ikili geçişlerinin  $LF(A, \underline{e}_k, W)$  büyüklükleriyle gösterildiği, durum sayısı kodlayıcı durum sayısına eşit işaret akış çizgesi Şekil 3-6'da verilmiştir. Bu kodlayıcı için yalnız hata olasılığı ele alındığından, bit hata olasılığı ile ilgili  $I$  terimi kullanılmamıştır. Şekil 3-6'daki çizgede 100,010,110,001,101,011,111 durumlarına ilişkin ara durum değişkenleri, sırasıyla,  $\xi_B, \xi_C, \xi_D, \xi_E, \xi_F, \xi_G, \xi_H$  ile gösterilmektedir. Buna göre, durum denklem takımı,  $\xi_B = \xi_D$  ve  $\xi_E = \xi_G$  elde edildiğinden, (3.23) de verilen biçimde ifade edilebilir:

Tablo 3-3.  $R=3/4$  oranlı hat kodu durum alt kümelerinin tüm  $\underline{e}_k$  hata dizileri için  $F(A, \underline{e}_k, W)$ ,  $A=A_j$ ,  $v_j=0,1,2,\dots,7$  hata ağırlık profilleri

| HATA DİZİSİ, $\underline{e}_k$ | $F(A, \underline{e}_k, W)$ |
|--------------------------------|----------------------------|
| 00000                          | 4                          |
| 00001                          | $4W^2$                     |
| 00010                          | $4W^6$                     |
| 00011                          | $4W^2$                     |
| 00100                          | $2W^3+2W^5$                |
| 00101                          | $4W^1$                     |
| 00110                          | $4W^1$                     |
| 00111                          | $2W^3+2W^5$                |
| 01000                          | $4W^2$                     |
| 01001                          | $2W^2+2W^6$                |
| 01010                          | $2W^2+2W^6$                |
| 01011                          | 4                          |
| 01100                          | $2W^3+2W^5$                |
| 01101                          | $4W^1$                     |
| 01110                          | $4W^1$                     |
| 01111                          | $2W^3+2W^5$                |
| 10000                          | $2W^3+2W^5$                |
| 10001                          | $4W^1$                     |
| 10010                          | $4W^1$                     |
| 10011                          | $2W^3+2W^5$                |
| 10100                          | $4W^2$                     |
| 10101                          | $2W^2+2W^4$                |
| 10110                          | $4W^6$                     |
| 10111                          | $2+2W^2$                   |
| 11000                          | $2W^3+2W^5$                |
| 11001                          | $4W^1$                     |
| 11010                          | $4W^1$                     |
| 11011                          | $2W^3+2W^5$                |
| 11100                          | $2+2W^2$                   |
| 11101                          | $2W^2+2W^6$                |
| 11110                          | $2W^4+2W^6$                |
| 11111                          | $4W^2$                     |



$$\begin{bmatrix} 1 & -4LW & -4LW-2LW^3(1+W^2) & 0 & 0 \\ 0 & 1-2LW^2(1+W^4) & -2LW^2(1+W^4)-4L & 0 & 0 \\ -2LW^3(1+W^2)-4LW & 0 & 1 & -4LW & -2LW^3(1+W^2) \\ -4LW^2(1+W^4) & 0 & 0 & 1-2LW^2(1+W^2) & -2L(1+W^2) \\ -2L(1+W^2)(1+W^4) & 0 & 0 & -2LW^2(1+W^4) & 1-4LW^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_B \\ \xi_C \\ \xi_E \\ \xi_F \\ \xi_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2LW^3(1+W^2) \\ 4LW^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(W,L) = 4LW^6 \xi_C + 8LW^2 \xi_E \quad (3.23)$$

Ara değişkenlere ilişkin denklem takımı,  $A_{12}$  ve  $A_{21}$  0 ve 1 lerden oluşan alt matrisleri göstermek üzere,

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \underline{\xi} = \underline{B} \quad (3.24)$$

biçimine sokulursa,

$$\begin{bmatrix} -4LW & -4LW-2LW^3(1+W^2) & 1 & 0 & 0 \\ 1-2LW^2(1+W^4) & -2LW^2(1+W^4)-4L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2LW^3(1+W^2)-4LW & -4LW & -2LW^3(1+W^2) \\ 0 & 0 & -4LW^2(1+W^4) & 1-2LW^2(1+W^2) & -2L(1+W^2) \\ 0 & 0 & -2L(1+W^2)(1+W^4) & -2LW^2(1+W^4) & 1-4LW^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_C \\ \xi_E \\ \xi_B \\ \xi_F \\ \xi_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2LW^3(1+W^2) \\ 4LW^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir.  $T(W,L)$  nin hesabı için gerekli  $\xi_C$  ve  $\xi_E$  ara değişkenleri, (3.24) için geçerli

$$(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) \begin{bmatrix} \xi_C \\ \xi_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2LW^3(1+W^2) \\ 4LW^2 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$A_{12}^{-1}A_{22}A_{21} = \frac{1}{\det A_{22}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{\min} & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_{\min}/\det A_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(3.27)$$

ifadesinden  $A_{22}$  nin ters matrisi  $A_{22}^{-1}$  de  $a_{\min}$ , minörünün hesabının yeterli olduğu görülmektedir.  $A_{22}^{-1}$  de sonucu etkilemeyen elemanların yerine x işareti konmuştur.  $a_{\min}$  ve  $A_{22}$  nin determinantı hesaplanırsa,

$$a_{\min} = (1+W^2)(-2LW^2+8L^2W^4-4L^2W^2-4L^2W^6)+(1-4LW^2)$$

$$\det A_{22}=(1+W^2)(-2LW^3+4L^2W^3+8L^2W^5-4L^2W^9-16L^3W$$

$$-32L^3W^5-8L^3W^7+8L^3W^9-8L^3W^{11}+8L^3W^{13}-16L^3W^{15})$$

$$-4LW-16L^2W^7+64L^3W^5+64L^3W^9 \quad (3.28)$$

bulunur. (3.24) den,

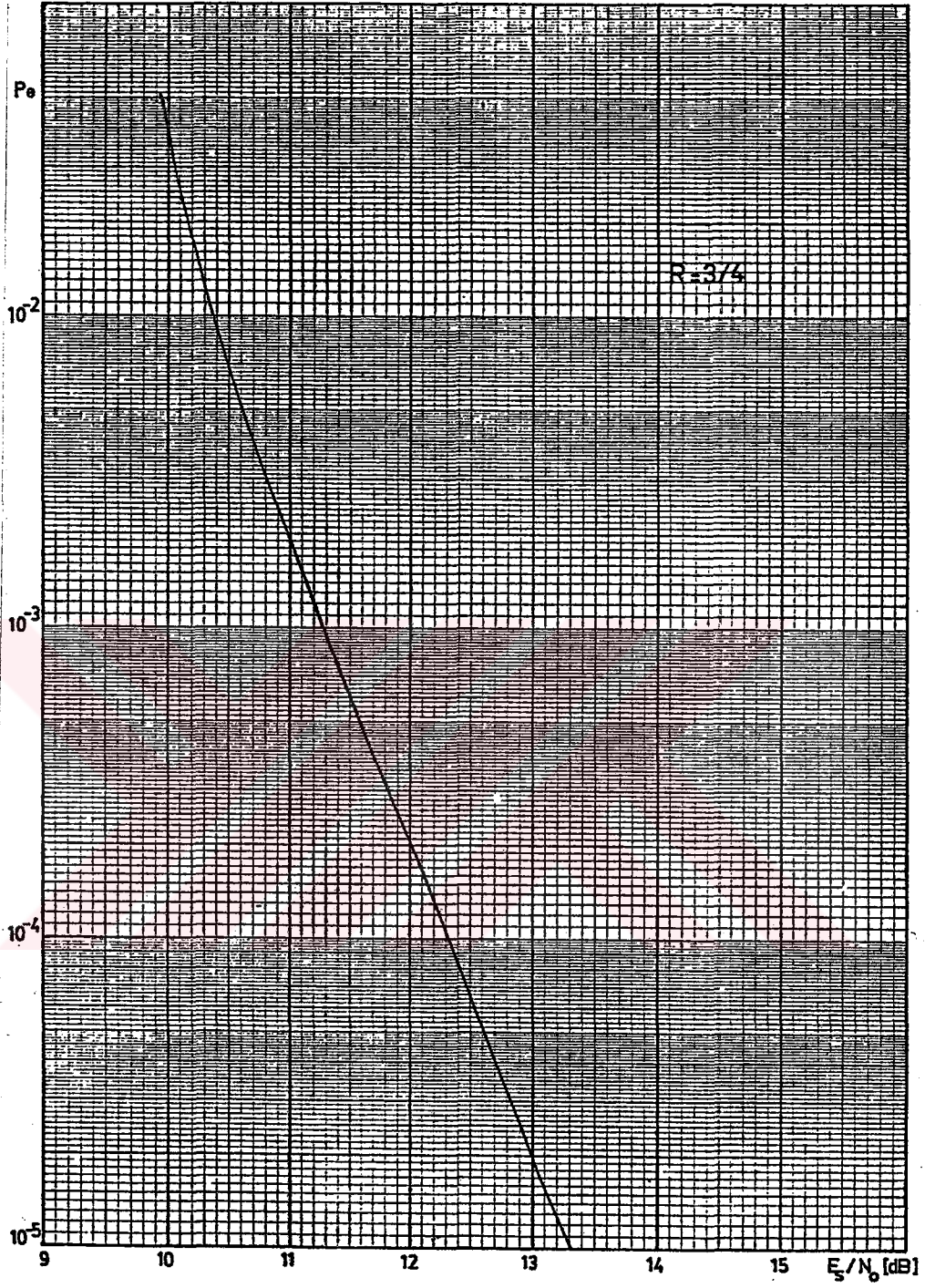
$$\det(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})= 16L^2W+4LW+(1+W^2)(2LW^3-4L^2W^5-4L^2W^9)$$

$$+ [1-2LW^2(1+W^4)](a_{\min}/\det A_{22}) \quad (3.29)$$

elde edilmektedir.  $\xi_C$  ve  $\xi_E$  ara değişken değerleri,  $T(W,L)$  nin (3.23) deki ifadesinde yerine koyularak genelleştirilmiş üretme işlevi elde edilmektedir.

$R=3/4$  oranlı hat kodu hata olasılığı için üst sınır  $T(W,L)$ , genelleştirilmiş üretme işlevi, Teorem 3.2 de verilen, (3.15) ifadesinde kullanılarak, bilgisayar yardımıyla hesaplanmıştır. Çeşitli  $E_s/N_0$  oranları için hata olasılığının üst sınırının değişimi Şekil 3-7'de verilmiştir.

$R=2/3$  oranlı hat kodunda, kodlayıcı durumlarına ilişkin  $A_0, A_1, \dots, A_7$  alt kümelerinin  $F(A_j, \underline{e}_k, W)$ ,  $j=0,1, \dots, 7$  ile gösterilen hata ağırlık profilleri, her  $\underline{e}_k$  hata dizisi için  $j$  ne olursa olsun birbirlerine eşit olmamakta, bu nedenle de Teorem 3.1'de istenen koşul gerçekleşmemektedir. Bu durumda, her  $\underline{e}_k$  hata dizisi ve belirli bir işaret-gürültü oranı için en büyük hata olasılığını veren  $F(A_j, \underline{e}_k, W)$  ağırlık profili değeri seçilerek hata olasılığı için yaklaşık bir üst sınır belirlenebilir.



Şekil 3-7.  $R=3/4$  oranlı hat kodu için hata olasılığının üst sınırının  $E_s/N_0$  oranına bağlı olarak değişimi

#### BÖLÜM 4. TASARLANAN HAT KODLAMALI SAYISAL TEMELBAND İŞARETLERİN GÜÇ SPEKTRAL YOĞUNLUKLARININ BELİRLENMESİ

İkinci bölümde açıklandığı gibi, hat kodlamasından istenen özelliklerden biri de, kodlanmış dizinin temelband kanaldan iletme uygun bir güç spektrumuna sahip olmasıdır. İletim hattı boyunca, transformatör veya kondansatör gibi alternatif akım bağlaşmalı devrelerin kullanımı nedeniyle, iletilecek işaretin doğru akım bileşeninin sıfır olması, alçak frekanslar bölgesindeki spektral bileşenlerin ise düşük tutulması istenir[22],[24]. Ayrıca bu bileşenler, hat kodunun simgelerarası girişim başarımının da bir ölçütü olmaktadır[26],[41],[42]. Bu bölümde, belli bir  $R=n/n+1$  oranı için aynı maksimum serbest Öklid uzaklığı değerine sahip birden fazla hat kodunun varlığının araştırılması ve bunların güç spektrumları açısından değerlendirilmesi amaçlanmıştır.

Güç spektral yoğunluğunun hesabı, kodlanmış dizinin özilişki işlevinin bulunmasını gerektirdiğinden oldukça karmaşık işlemler içermektedir. İlişkili kodların spektral yoğunluklarının hesabını kolaylaştıran, bilgisayarda programlamaya yatkın bir yöntem, Bosik[43] tarafından verilmiştir. Aşağıda bu yöntem açıklanmakta ve tasarlanan  $R=n/n+1$  oranlı hat kodlarının spektral yoğunluklarının bulunmasında kullanılmaktadır.

##### 4.1. Güç Spektral Yoğunluğunun Hesabı

Hat kodlamalı bir dizinin istatistiksel yapısı hat kodlayıcısının girişindeki ikili dizinin ve kodlayıcının istatistiksel yapısına bağlıdır. Genellikle, ikili simgelerin, birbirinden istatistiksel bağımsız, eşit olasılıklı üretildikleri varsayılır. Kodlanmış simgelerden oluşan

dizi,  $g(t)$  taşıyıcı darbe biçimini,  $T$  darbe gönderme aralığını göstermek üzere,

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} k_i g(t-nT) \quad (4.1)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada,  $iT < t < (i+1)T$  aralığında kod sözcüğünün simge değerini gösteren  $k_i$  nin olurlu değerleri  $\{-1,0,1\}$  dir.  $k_i$  rastlantı değişkeninin geniş anlamda durağan olduğu varsayılırsa, özilişki işlevi  $R(r) = E[k_i k_{i+r}]$  olarak tanımlanır. Hat kodlamalı işaretin özilişki işlevi de,

$$R_x(t+\tau, t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} R(j-i) g(t+\tau, iT) g(t-jT) \quad (4.2)$$

biçimindedir. Genel durumda, bu işlev hem  $t$  hem de  $\tau$  ya bağlı olduğundan işaret geniş anlamda durağan değildir. Ancak işlev  $t$  ye göre  $T$  ile periyodik olduğundan işaret "periyodik durağan"dır (cyclostationary) [44], [45]. Periyodik durağan işaretlerin istatistiksel ortalamalarının ve özilişki işlevlerinin  $T$  periyodu boyunca zaman ortalamaları alınarak durağan kabul edilebilirler. Buna göre, ortalama değer sabit, özilişki işlevi de yalnız  $\tau$  ya bağlı duruma gelir:

$$\hat{m}_x = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} m_x(t) dt$$
$$\hat{R}_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_x(t+\tau, t) dt \quad (4.3)$$

Bu yaklaşımda,  $x(t)$  rastlantı sürecinin fazı ( $\theta$ ),  $T$  periyodu boyunca düzgün dağılımlı bir rastlantı değişkeni olarak kabul edilmektedir:

$$\hat{x}(t) = x(t+\theta)$$

$$p_{\theta}(\alpha) = \begin{cases} 1/T & |\alpha| \leq T/2 \\ 0 & |\alpha| > T/2 \end{cases} \quad (4.4)$$

Burada  $p_{\theta}$ ,  $\theta$  nin olasılık yoğunluk işlevidir [45]. Sonuçta, "ortalama" güç spektral yoğunluğu,

$$\hat{S}_x(f) = \frac{1}{T} |G(f)|^2 \left[ R(0) + 2 \sum_{r=1}^{\infty} R(r) \cos 2\pi r f T \right] \quad (4.5)$$

biçiminde hesaplanabilmektedir [44]. Burada  $G(f)$ ,  $g(t)$  darbe biçimi işlevinin Fourier dönüşümü olup  $R(r)$  özilişki işlevini göstermektedir.

Kodlayıcının  $[iT, (i+1)T]$  aralığında,  $S_j$  durumunda olma olasılığı

$$P(s_i = S_j) = P(S_j) \quad j=1, 2, \dots, 2^v \quad (4.6)$$

ile ve  $s_i = S_j$  iken  $k_i$  nin  $K_{\ell}$ ,  $\ell = -1, 0, 1$  ve  $k_{i+r}$  nin  $K_m$ ,  $m = -1, 0, 1$  değerini alma olasılığı

$$P(k_i = K_{\ell}, k_{i+r} = K_m | s_i = S_j) = \Pr(K_{\ell}, K_m | S_j) \quad (4.7)$$

ile gösterilsin. Buna göre özilişki işlevi,  $R(r)$ ,

$$R(r) = \sum_{j=1}^{2^v} P(S_j) \sum_{\ell=-1}^1 \sum_{m=-1}^1 K_{\ell} K_m \Pr(K_{\ell}, K_m | S_j) \quad (4.8)$$

biçiminde yazılır.  $[iT, (i+1)T]$  aralığında, bir kod sözcüğünün  $p$ . simgesinde bulunma olasılığı  $p=1, 2, \dots, n+1$  olmak üzere  $1/n+1$  olduğundan,

$$\Pr(K_{\ell}, K_m | S_j) = \sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{n+1} \Pr(K_{\ell}, K_m | S_j, p) \quad (4.9)$$

ilişkisi geçerlidir. (4.9), (4.8) de yerine koyulursa,

$$R(r) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{2^v} P(S_j) \sum_{p=1}^{n+1} \sum_{\ell=-1}^1 \sum_{m=-1}^1 K_\ell K_m \Pr(K_\ell, K_m | S_j, p) \quad (4.10)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} R_{s_j}(p, p+r) &= \sum_{\ell=-1}^1 \sum_{m=-1}^1 K_\ell K_m \Pr(K_\ell, K_m | S_j, p) \\ &= E_{s_j} \{ k_p, k_{p+r} \}, \quad p=1, 2, \dots, n+1 \end{aligned} \quad (4.11)$$

olarak tanımlanırsa, (4.10)

$$R(r) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{2^v} P(S_j) \sum_{p=1}^{n+1} R_{s_j}(p, p+r) \quad (4.12)$$

biçimine dönüşür. Burada,  $R_{s_j}(p, p+r)$  işlevinde  $p$  ve  $r$  değerleri  $k_p$  ve  $k_{p+r}$  üçlü sözcük simgelerinin ait oldukları kod sözcüklerindeki bağıl yerlerini belirlemektedir. Ayrıca,  $R_{s_j}(p, p+r)$  işlevi,  $r$  nin farklı aralıklarda değer almasına bağlı olarak aşağıdaki gibi hesaplanır:

a)  $r=0$  için

$$R_{s_j}(p, p) = \sum_{\ell=-1}^1 K_\ell^2 P(K_\ell | S_j, p) \quad (4.13)$$

$$P(K_\ell | S_j, p) = P(k_p = K_\ell | s_p = S_j)$$

b)  $r=1, 2, \dots, n+1$  için

$p \leq n+1-r$  ise  $k_p$  ve  $k_{p+r}$  aynı kod sözcüğüne ait olacaktır:

$$R_{S_j}(p, p+r) = \sum_{\ell=-1}^1 \sum_{m=-1}^1 K_{\ell} K_m \Pr(K_{\ell}, K_m | S_j, p) \quad (4.14a)$$

$p > n+1-r$  ise  $k_p$  ve  $k_{p+r}$  art arda gelen iki kod sözcüğüne ait olacaktır:

$$R_{S_j}(p, p+r) = \sum_{\ell=-1}^1 \sum_{m=-1}^1 K_{\ell} K_m \sum_{t=1}^{2^v} P(K_{\ell}, S_t | S_j, p) \cdot P(K_m | S_t, p+r-n-1) \quad (4.14b)$$

Burada,  $P(K_{\ell}, S_t | S_j, p) = P(k_p = K_{\ell}, k_{p+n+1} = S_t | s_p = S_j)$  olarak tanımlanır.

c)  $r = n+2, n+3, \dots, 2(n+1)$  için

$p \leq 2(n+1)-r$  ise  $k_p$  ve  $k_{p+r}$  art arda gelen iki kod sözcüğüne ilişkin simgeler olacaktır:

$$R_{S_j}(p, p+r) = \sum_{\ell=-1}^1 \sum_{m=-1}^1 K_{\ell} K_m \sum_{t=1}^{2^v} P(K_{\ell}, S_t | S_j, p) \cdot P(K_m | S_t, p+r-n-1) \quad (4.15a)$$

$p > 2(n+1)-r$  ise  $k_{p+r}$ ,  $k_p$  nin ait olduğu kod sözcüğünden iki sonraki kod sözcüğüne ait olacaktır:

$$R_{S_j}(p, p+r) = \sum_{\ell=-1}^1 \sum_{m=-1}^1 K_{\ell} K_m \sum_{t=1}^{2^v} P(K_{\ell}, S_t | S_j, p) \cdot \sum_{u=1}^{2^v} P_1(S_u | S_t) P(K_m | S_u, p+r-2(n+1)) \quad (4.15b)$$

Burada,  $P_1(S_u | S_t) = P(s_{p+n+1} = S_u | s_p = S_t)$  olarak tanımlanır.

d)  $r=Q(n+1)+1, Q(n+1)+2, \dots, (Q+1)(n+1)$   $Q \geq 2$  için

$p \leq (Q+1)(n+1)-r$  ise  $k_{p+r}$ ,  $k_p$  nin ait olduğu kod sözcüğünden  $Q$  sonraki kod sözcüğüne ait olacaktır:

$$R_{s_j}(p, p+r) = \sum_{\ell=-1}^1 \sum_{m=-1}^1 K_{\ell} K_m \sum_{t=1}^{2^v} P(K_{\ell}, S_t | S_j, p) \cdot \sum_{u=1}^{2^v} P_{Q-1}(S_u | S_t) P(K_m | S_u, p+r-Q(n+1)) \quad (4.16a)$$

$p > (Q+1)(n+1)-r$  ise  $k_{p+r}$ ,  $k_p$  nin ait olduğu kod sözcüğünden  $Q+1$  sonraki kod sözcüğüne ait olacaktır:

$$R_{s_j}(p, p+r) = \sum_{\ell=-1}^1 \sum_{m=-1}^1 K_{\ell} K_m \sum_{t=1}^{2^v} P(K_{\ell}, S_t | S_j, p) \cdot \sum_{u=1}^{2^v} P_Q(S_u | S_t) P(K_m | S_u, p+r-(Q+1)(n+1)) \quad (4.16b)$$

Burada,  $P_Q(S_u | S_t) = \sum_{i=1}^{2^v} P_{Q-1}(S_i | S_t) P_1(S_u | S_i)$   $Q \geq 2$  olarak tanımlanmaktadır.

Sonuç olarak,  $R_{s_j}(p, p+r)$  işlevleri (4.13-16) eşitliklerinden bulunarak (4.12) de kullanılıp  $R(r)$  özilişki işlevi elde edilmektedir.  $R(r)$  değerleri (4.5) de yerleştirilerek de, istenen  $\hat{S}_x(f)$  ortalama güç spektral yoğunluğu hesaplanmaktadır.

Güç spektral yoğunluğunun hesabında kullanılan ve kodlayıcının istatistiksel yapısını ortaya koyan olasılıklar şunlardır:

a) Durum Geçiş Olasılıkları

$$P_1(S_u | S_t) = P(s_{p+1}=S_u | s_p=S_t) \quad u, t=1, 2, \dots, 2^v \quad (4.17)$$

Bu geçiş olasılığı,  $S_t$  durumundan  $S_u$  durumuna geçiş sayısı,  $S_t$  durumundan toplam çıkış sayısına bölünerek bulunur. Tasarlanan paralel geçişsiz  $R=n/n+1$  oranlı hat kodları için bu olasılık ya 0 ya da  $1/2^n$  dir. Paralel geçişli  $R=3/4$  oranlı kod için ise ya 0 ya da  $1/2^{n-1}$  dir.

b) Durum Olasılıkları

$$P(S_j) = P(s_i=S_j) \quad j=1,2,\dots,2^v \quad (4.18)$$

$S_j$  durumunda olma olasılığı,

$$\sum_{n=1}^{2^v} P(S_n)P(S_j|S_n) = P(S_j) \quad j=1,2,\dots,2^v \quad (4.19)$$

denklem takımından doğrusal bağımsız  $2^v-1$  tanesi ve

$$\sum_{j=1}^{2^v} P(S_j) = 1 \quad (4.20)$$

ilişkisi kullanılarak özölür. Tasarlanan hat kodları için durumlar eşit olasılıklıdır.

c) Simge Olasılıkları

$$P(K_\ell | S_j, p) = P(k_p=K_\ell | s_p=S_j) \quad \begin{array}{l} j=1,2,\dots,2^v \\ p=1,2,\dots,n+1 \\ \ell=-1,0,1 \end{array} \quad (4.21)$$

Bu olasılıklar,  $S_j$  durumundan çıkışlara karşı düşen kod sözcüklerinin p. hanelerinde  $K_\ell$  simgesi olanların sayısının bu durumdan toplam çıkış sayısına bölünmesiyle elde edilir.

d) Simge Birleşim Olasılıkları:

$$Pr(K_\ell, K_m | S_j, p) = P(k_p=K_\ell, k_{p+r}=K_m | s_i=S_j) \quad \begin{array}{l} j=1,2,\dots,2^v \\ i=1,2,\dots,n+1 \\ \ell, m=-1,0,1 \\ r \leq n+1-p \end{array} \quad (4.22)$$

$S_j$  durumundan çıkışlara karşı düşen kod sözcüklerinden  $p$ . ve  $p+r$ . hanelerinde, sırasıyla,  $K_\ell$  ve  $K_m$  simgeleri olanların sayısının bu durumdan toplam çıkış sayısına oranı bu olasılığı vermektedir.

e) Koşullu Durum Geçiş Olasılıkları

$$P(K_\ell, S_t | S_j, p) = P(k_p = K_\ell, s_{p+n+1} = S_t | s_p = S_j) \quad (4.23)$$

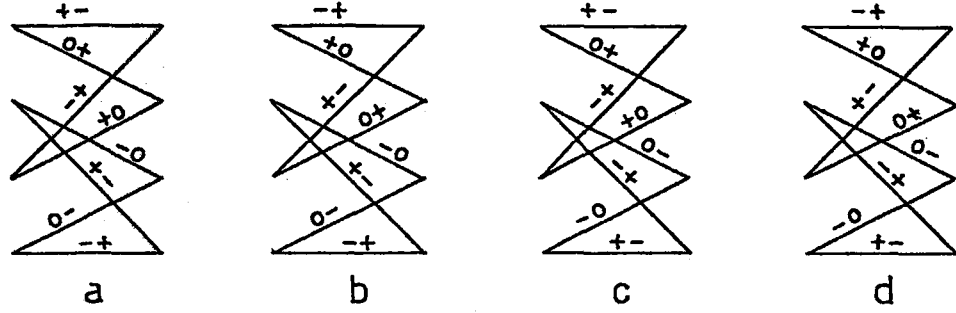
$$\begin{aligned} j, t &= 1, 2, \dots, 2^V \\ p &= 1, 2, \dots, n+1 \\ \ell &= 1, 0, 1 \end{aligned}$$

Bu olasılıklar,  $S_j$  durumundan çıkıp  $S_t$  durumuna varan geçişlere karşı düşen ve  $p$ . hanelerinde  $K_\ell$  simgesi olan kod sözcük sayısı, bu durumdan toplam çıkış sayısına bölünerek elde edilir.

İkinci bölümde tasarlanan  $R=n/n+1$  oranlı kodlayıcılara ilişkin yukarıda tanımlanan istatistikler, özilişki işlevleri ve bunlara bağlı olarak (4.5) ile verilen güç spektral yoğunlukları, geliştirilen bir bilgisayar programı yardımıyla hesaplanmıştır. Sonuçlar aşağıdaki alt bölümde verilmektedir.

#### 4.2. Kafes Yapıda Tasarlanan Hat Kodlarının Güç Spektral Yoğunlukları

$R=1/2$  oranlı hat kodu için eşit ve maksimum serbest Öklid uzaklıklı ( $d_s^2=8$ ) dört kodlayıcı, güç spektral yoğunlukları açısından ele alınmıştır (Şekil 4-1). Bu kodlayıcılar için özilişki işlevinin sıfırdan farklı değerleri Tablo 4-1'de,  $R(r)$  in bu değerlerine dayanarak elde edilen güç spektral yoğunlukları da Şekil 4-2'de verilmiştir. Sıfıra yakın frekanslar için, Şekil 4-1a'daki kodlayıcının minimum spektral bileşenlere sahip olduğu görülmektedir.

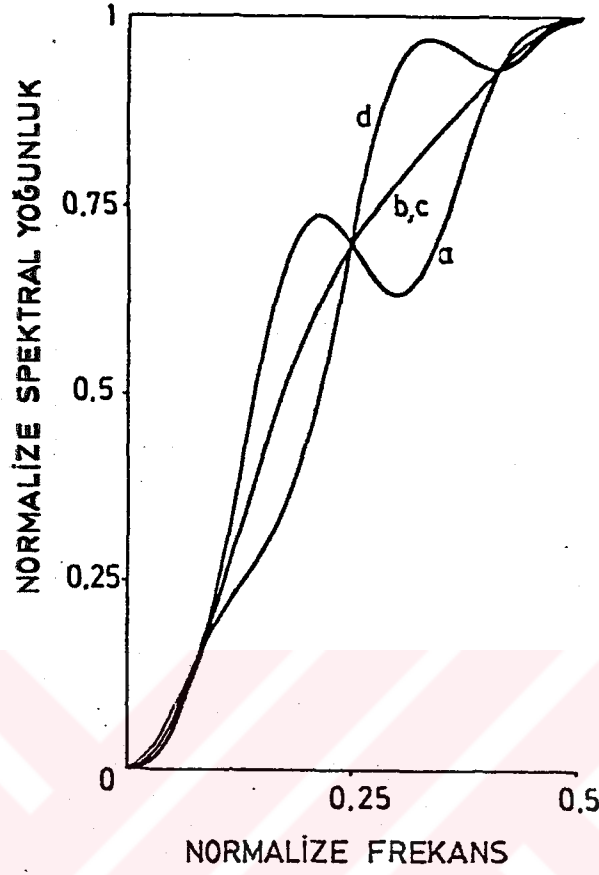


Şekil 4-1.  $R=1/2$  oranlı maksimum ve eşit serbest Öklid uzaklıklı 4 hat kodlayıcısı

Tablo 4-1, Şekil 4-1(a)-(d)'de verilen  $R=1/2$  oranlı hat kodları için  $R(r)$  özilişki işlevinin  $r$ 'ye bağlı olarak aldığı değerler,  $r>5$  için  $R(r)$  tüm kodlarda sıfırdır.

| KOD        | r | 0    | 1        | 2       | 3        | 4 | 5        |
|------------|---|------|----------|---------|----------|---|----------|
| (a)        |   | 0,75 | -0,25    | -0,0625 | -0,09375 | 0 | 0,03125  |
| (b) ve (c) |   | 0,75 | -0,28125 | -0,0625 | -0,03125 | 0 | 0        |
| (d)        |   | 0,75 | -0,3125  | -0,0625 | 0,03125  | 0 | -0,03125 |

$R=2/3$  oranlı, eşit ve maksimum serbest Öklid uzaklıklı hat kodlayıcıları güç spektrumları açısından birbirlerine eşdeğer bulunmuştur. Bu sonuç,  $R=3/4$  oranlı hat kodlayıcıları için de geçerlidir. Bu kodlayıcılar için özilişki işlevlerinin sıfırdan farklı değerleri Tablo 4-2 de verilmiştir.



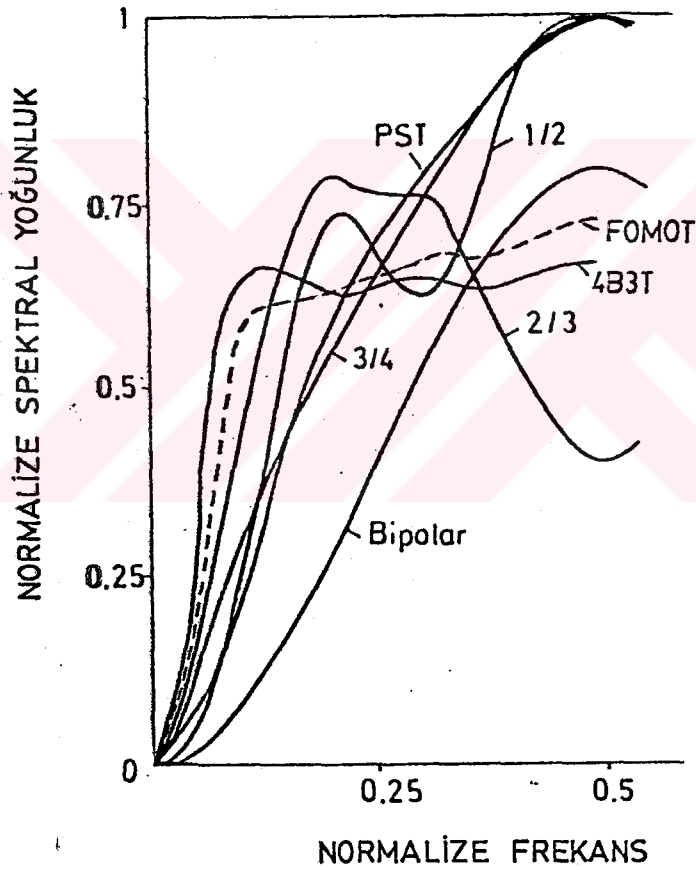
Şekil 4-2. Maksimum serbest Öklid uzaklıklı ( $d_s^2=8$ ),  $R=1/2$  oranlı hat kodlarının güç spektral yoğunlukları

Tablo 4-2.  $R=2/3$  ve  $R=3/4$  oranlı hat kodlayıcıları için  $R(r)$  özilişki işlevlerinin  $r$  ye bağlı olarak aldığı değerler,  $r>8$  için  $R(r)$  değerleri sıfırdır.

| KOD | $r$    | 0       | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       | 6       | 7       | 8 |
|-----|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---|
| 2/3 | 0,6666 | -0,0833 | -0,1875 | -0,0416 | -0,0260 | 0       | 0,0104  | 0       | -0,0052 |   |
| 3/4 | 0,75   | -0,2695 | -0,0390 | -0,0273 | -0,0156 | -0,0117 | -0,0078 | -0,0039 | 0       |   |

$R(r)$  özilişki işlevinin bu değerleri yardımıyla (4.5) den hesaplanan,  $R=2/3$  ve  $R=3/4$  oranlı kodlara ilişkin güç spektral yoğunlukları Şekil 4-3'de görülmektedir. Ayrıca, Şekil 4-3'de bilinen iki kutuplu, PST, 4B3T, FOMOT gibi hat kodlarının spektral yoğunluklarıyla da bir kıyas-

lama yapılmıştır. Sıfıra yakın frekanslarda, iki kutuplu kod en düşük spektral bileşenlere sahip olmasına karşın, tasarlanan kafes yapıda hat kodları 4B3T ve FOMOT kodlarına göre daha düşük genlikli bileşenler içermektedir. Yalnız  $R=1/2$  oranlı kafes yapıda hat kodu, sıfıra yakın frekanslarda, PST koduna göre daha üstündür.

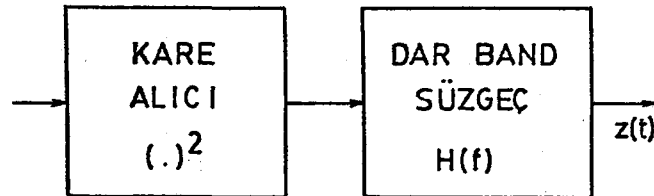


Şekil 4-3. Kafes yapıda tasarlanan ve bilinen hat kodlarının güç spektral yoğunlukları

## BÖLÜM 5. KAFES YAPIDA HAT KODLARININ SEYİRME ANALİZİ

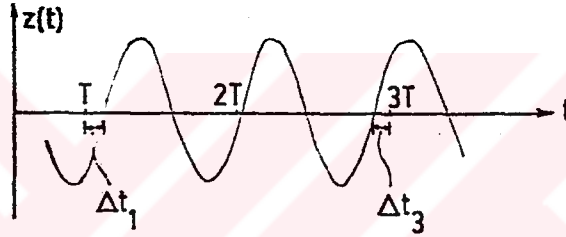
### 5.1. Giriş

Sayısal iletişim sistemlerinin başarımları açısından, yineleyicilerin ve alıcının, örnekleme anlarının belirlenmesine ilişkin doğru "zamanlama bilgisine" (timing information) sahip olması oldukça önemlidir. Genellikle, ayrı bir periyodik zamanlama işaretini bilgi işaretiyle çoğullayarak kanaldan göndermek yerine bu işaretin, alıcıda, "zamanlama devresi" olarak adlandırılan devreler yardımıyla elde edilmesi yeğlenir[22]. Birinci yöntemin ek devreler gerektirmesi nedeniyle pahalı olmasına karşın, ikinci yöntemde zamanlama dalgasının periyodik yapısının çeşitli nedenlerle bozulması söz konusudur. Hat kodlamalı bir işaret için, en basit ve yaygın olarak kullanılan bir zamanlama devresi,  $T$  darbe yineleme periyodunu göstermek üzere, doğru akım bileşeninin sıfır olması nedeniyle spektrumda bulunmayan  $1/T$  frekanslı bir spektral bileşenin oluşmasını sağlayan bir kare alıcı ve çıkışında periyodik zamanlama dalgasını verecek,  $1/T$  frekansına akordlu bir dar band süzgeçten oluşur (Şekil 5-1).



Şekil 5-1. Hat kodlamalı temelband iletişim sistemi için zamanlama devresi

Zamanlama devresi, yaklaşık sinüsoidal bir yapıda olup sıfır geçişleri alıcının örnek alma anlarına karşı düşmektedir. Veri dizisinin istatistiksel yapısına, darbe biçimlendirme süzgeçlerinin yapısına ve band genişliklerine, haberleşme kanalının band genişliğine ve kanal gürültüsüne bağlı olarak zamanlama dalgasının sıfır geçişlerinde "zamanlama seyirmesi" (timing jitter) olarak adlandırılan faz kaymaları oluşur[46] (Şekil 5-2). Zamanlama seyirmesi, alıcıda, örnekleme anlarını dolayısıyla sistem başarımını etkilemektedir.



Şekil 5-2. Seyirmenin zamanlama dalgasına etkisi

Bir rastlantı süreci olan zamanlama dalgası  $z(t)$  nin karesel beklenen değeri yine periyodik olup  $z(t)$  nin sıfır geçişlerinde minimumdan geçecektir. Bu minimum değerler ne kadar küçük olursa, zamanlama dalgasının sıfır geçişleri, ortalama sıfır geçişi  $t_0 + kT$  ye o kadar yakın olacaktır.  $\Delta t$ ,  $t_0$  a göre faz kaymalarını göstermek üzere, darbe yinelenme aralığı başına efektif faz kaymaları, yaklaşık bir bağıntıyla verilebilir[46]:

$$\left(\frac{\Delta t}{T}\right)_{\text{efektif}} = \frac{1}{T} \frac{\{E[z^2(t_0)]\}^{1/2}}{|t_0 \text{ da ortalama eğim}|} \quad (5.1)$$

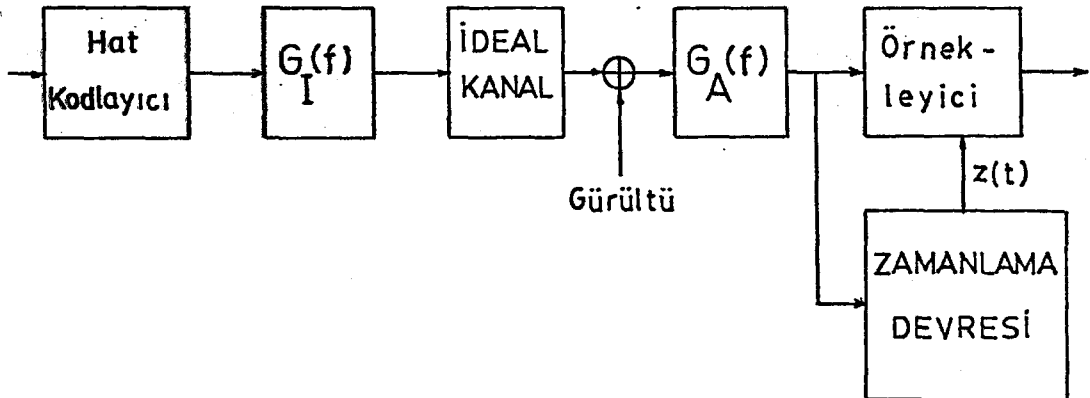
Burada  $t_0$ ,  $E[z(t)] = 0$  eşitliğini sağlamakta olup,  $t=t_0$  da ortalama eğim,

$$\left[ \frac{d}{dt} E \{z(t)\} \right]_{t=t_0} \quad (5.2)$$

olarak tanımlıdır. (5.1) bağıntısı, seyirmenin T ye göre çok küçük olduğu durumlarda yeterli bir yaklaşıklık olmaktadır. Bu bağıntı yardımıyla kullanışlı analitik ifadelerle ulaşmak, zamanlama dalgasının karesel beklenen değerinin hesaplanmasında ortaya çıkan güçlükler nedeniyle oldukça güçtür. İstatistiksel bağımsız veri dizisi varsayımı altında analitik bir ifade[46] da verilmiştir. İki kutuplu kodlar için zamanlama seyirmesinin analitik yapısı[47] de incelenmiştir. Daha karmaşık istatistiksel özelliklere sahip kodlar için analitik yaklaşım anlamını yitirmektedir. Bu nedenle, bu bölümde, kafes yapıda tasarlanan  $R=n/n+1$  oranlı hat kodlarının zamanlama bilgisi açısından başarımları bilgisayar benzetimi yardımıyla incelenmiştir.

#### 5.2. Bilgisayar Benzetim Sisteminin Tanıtımı

Ele alınan hat kodlamalı temelband sayısal iletişim sisteminin blok diyagramı, zamanlama devresiyle birlikte Şekil 5-3'de verilmiştir. Taşıyıcı darbe biçimini belirleyen iletim ve alıcı süzgeçleri, ideal kanal için, simge-



Şekil 5-3. Hat kodlamalı temelband iletişim sistemi ve zamanlama devresi

lerarası girişim örnekleme anlarında sıfır, gürültünün etkisi de minimum olacak biçimde seçilmiştir. Nyquist kriterine göre, simgelerarası girişimin yok edilebilmesi için, eşdeğer Nyquist band genişlikli kanalın frekans yanıtı  $[-1/2T, 1/2T]$  Hz aralığında sabit ve  $T$ 'ye eşit olmalıdır[41]. İdeal kanal frekans yanıtı  $C(f)=1$  olmak üzere, toplam sistem yanıtı  $G(f)=G_I(f)G_A(f)$  için bu koşulu sağlayan ve bilgisayar benzetiminde kullanılan  $G(f)$  frekans yanıtı "yükseltilmiş kosinüs" biçimindedir:

$$G(f) = \begin{cases} T & 0 \leq f \leq \frac{1}{2T} (1-\alpha) \\ \frac{T}{2} \left[ 1 - \sin \frac{\pi}{\alpha} \left( Tf - \frac{1}{2} \right) \right] & \frac{1}{2T} (1-\alpha) \leq f \leq \frac{1}{2T} (1+\alpha) \end{cases} \quad (5.3)$$

$G(f)$ 'e ilişkin impuls yanıtı da,

$$g(t) = \frac{\sin \frac{\pi t}{T}}{\frac{\pi t}{T}} \frac{\cos \frac{\alpha \pi t}{T}}{1 - \frac{4\alpha^2 t^2}{T^2}} \quad (5.4)$$

olarak verilmektedir. Burada  $0 \leq \alpha \leq 1$  olup "düşme (roll-off) katsayısı" olarak adlandırılır. Çarpımlarının belirlenmesine karşılık,  $G_I(f)$  ve  $G_A(f)$  süzgeçlerinin seçiminde var olan serbestlik, sabit işaret gücü için, gürültü gücünün alıcı süzgeç çıkışında minimum yapılması için kullanıldığında, toplamsal beyaz Gauss gürültüsü modeli için bu süzgeçlerin birbirine özdeş olması gerektiği ortaya çıkmaktadır[41]:

$$|G_I(f)| = |G_A(f)| = |G(f)|^{1/2} \quad (5.5)$$

Bilgisayar benzetiminde, rastgele üretilen 0,1 lerden oluşan ikili diziler, ikinci bölümde tasarlanan  $R=n/n+1$  oranlı hat kodlayıcısıncı, üçlü 256 simge uzunlu-

ğunda, kodlanmış bir diziye dönüştürülmekte ve daha sonra T işaretleşme aralığı başına 8 örnek alınarak 2048 noktalı hızlı Fourier dönüşümü programı yardımıyla Fourier dönüşümü bulunmaktadır. İşaretin Fourier dönüşümü, iletim süzgecinin, belli bir  $\alpha$  düşme katsayısı için impuls yanıtından yine T aralığı başına 8 örnek olmak üzere 2048 örnek için hesaplanan Fourier dönüşümü ile çarpılıp ters Fourier dönüşümü alınarak çıkış elde edilmektedir. İletim süzgeci çıkışında diziye belli işaret-gürültü oranını sağlayan beyaz Gauss gürültüsü eklenerek benzer biçimde alıcı süzgeçten geçirilmektedir. Alıcı süzgeç çıkışında elde edilen işaret, bir kare alıcı ve bir dar band süzgeçten oluşan zamanlama devresinin girişine uygulanmaktadır.  $1/T$  merkez frekanslı dar bandlı süzgecin aktarım işlevi  $H(f)$ ,

$$h_1(t) = \frac{\pi}{QT} e^{-\frac{\pi}{QT} t} \quad 0 < t < \infty \quad (5.6)$$

bir alçak geçiren süzgecin impuls yanıtını göstermek üzere,

$$H(f) = H_1(f + \frac{1}{T}) + H_1(f - \frac{1}{T}) \quad (5.7)$$

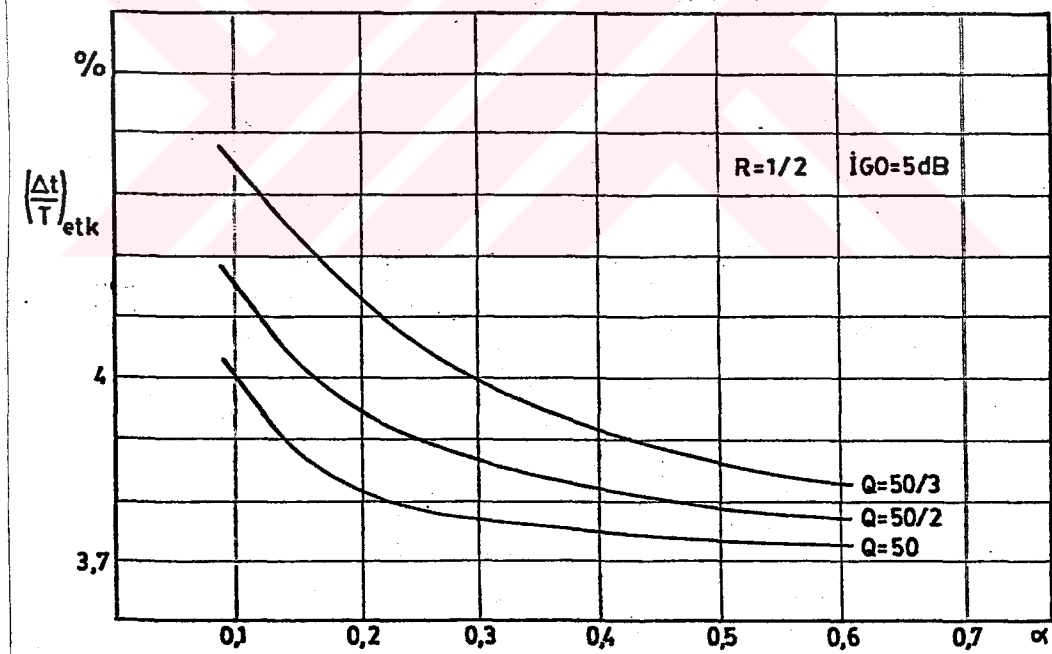
olarak alınmıştır. Burada  $H_1(f)$ ,  $h_1(t)$  nin Fourier dönüşümüdür.  $1/T$  örnekleme frekansını,  $Q$  ise süzgecin değer katsayısını göstermektedir. Zamanlama devresi çıkışında, zamanlama dalgası,  $T$  ile periyodik yaklaşık sinüsoidal bir işaret olarak elde edilmiştir.  $T$  periyodu başına 8 örnekten oluşan ayrık zamanlama dalgasının sıfır geçişlerindeki  $\Delta t_i$  kaymaları enterpolasyon yardımıyla bulunmuştur. (5.1) de verilen bağıl efektif seyirme bağıntısı, benzetim sonucunda elde edilen  $\Delta t_i$  faz kaymalarına bağlı olarak,

$$\left(\frac{\Delta t}{T}\right)_{\text{efektif}} = \frac{1}{T} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Delta t_i)^2} \quad (5.8)$$

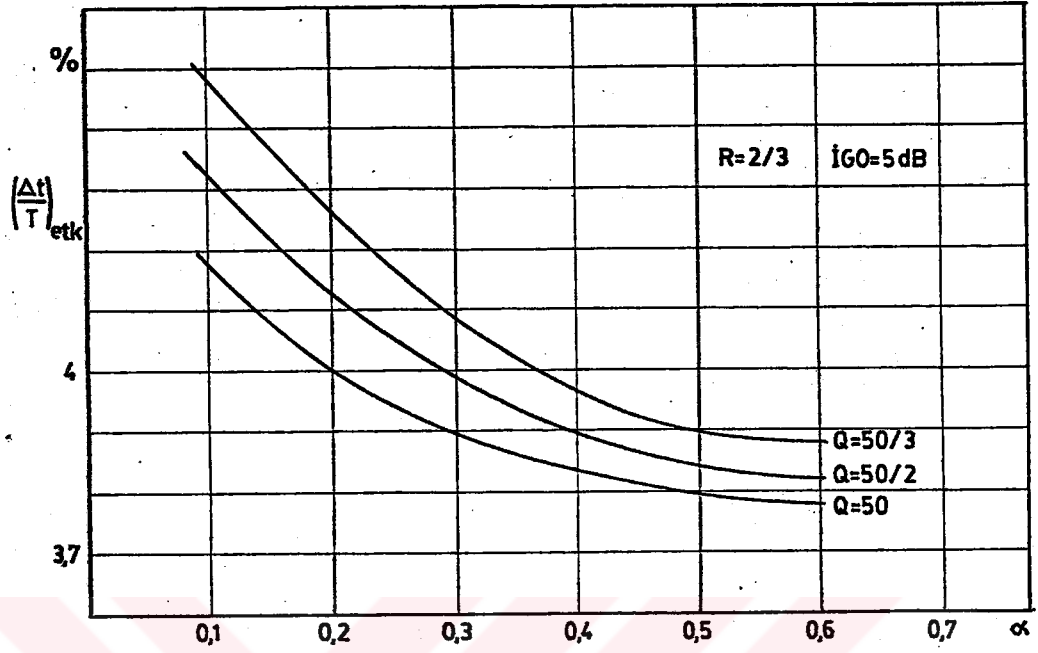
biçiminde hesaplanmıştır. Bilgisayar benzetiminde  $T=8$  ve  $N=256$  alınmıştır.

### 5.3. Bilgisayar Benzetiminin Sonuçları

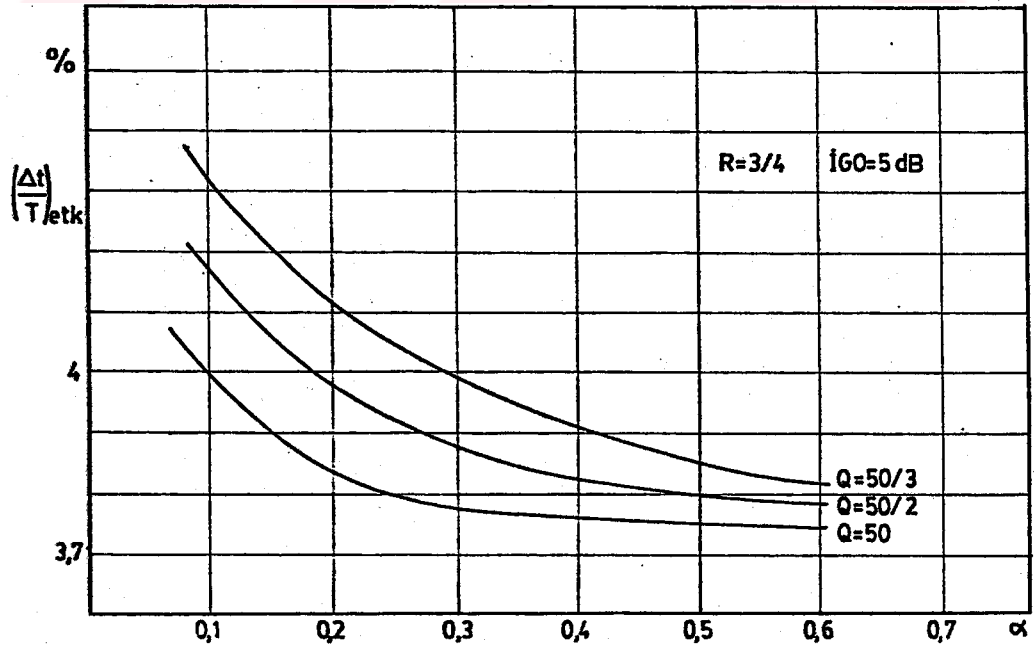
Zamanlama dalgasının sıfır geçişlerindeki seyirmenin analizine ilişkin bilgisayar benzetimleri, bu tezde tasarlanan  $R=1/2$ ,  $R=2/3$  ve  $R=3/4$  oranlı kafes yapıda yeni hat kodları için yapılmış, zamanlama çevrimindeki dar bandlı süzgecin değer katsayısı  $Q$ , sırasıyla 50, 50/2 ve 50/3 seçilerek, darbe biçimlendirme süzgeçlerinin düşme katsayısına bağlı olarak efektif seyirme eğrileri elde edilmiştir (Şekil 5-4 - 5-6). Tüm parametreler için, işaret-gürültü oranı ( $\dot{I}G0$ ), işaret gücü simge başına ortalama güç olmak üzere 5 dB seçilmiştir.



Şekil 5-4.  $R=1/2$  oranlı hat kodu için efektif seyirme eğrileri ( $\dot{I}G0=5$  dB)



Şekil 5-5.  $R=2/3$  oranlı hat kodu için efektif seyirme eğrileri ( $\text{İGO}=5\text{ dB}$ )



Şekil 5-6.  $R=3/4$  oranlı hat kodu için efektif seyirme eğrileri ( $\text{İGO}=5\text{ dB}$ )

Eğrilerden görüldüğü gibi,  $R=1/2$  ve  $R=3/4$  oranlı hat kodlarının seyirme karakteristikleri birbirlerine oldukça yakındır. Bu kodlar, seyirme başarımı açısından  $R=2/3$  oranlı koda göre, özellikle düşük  $\alpha$  değerlerinde daha üstündürler.



## BÖLÜM 6. SONUÇLAR

Bu tezde, sayısal haberleşme sistemlerinin gürültüye karşı bağışıklıklarını artırmak amacıyla ortaya atılan kafes kodlamalı modülasyon yöntemi, hat kodlamalı temelband sistemlere uygulanmıştır.

İkinci bölümde, hat kodlayıcısının kafes yapısı için temelband iletişim gereksinimlerini sağlamak amacıyla bir "durumlara kod sözcük atama" modeli önerilmiştir. Bu modele göre, yalnız -1,0,1 işaret değerli kod sözcüklerinin kullanılması öngörülmüş ve  $R=n/n+1$  oranlı bir hat kodu için serbest Öklid uzaklığını maksimum yapmak amacıyla  $n+1$  simgelik üçlü (+,0,-) kod sözcükleri arasından  $2^{n+2}$  elemanlı optimum kod alfabeleri seçilmiştir.  $R=1/2$  oranlı hat kodu için karesel serbest Öklid uzaklığının maksimum değerine ( $d_s^2=8$ ) dört durumlu kodlayıcı yardımıyla erişilmiş ve bilinen PST hat kodlayıcısına göre 3 dB'lik bir kodlama kazancı sağlanmıştır.  $R=2/3$  oranlı hat kodu için sekiz durumlu kafes yapının optimum çözümü verdiği görülmüş ve karesel serbest Öklid uzaklığı  $d_s^2=6$  olarak bulunmuştur. Böylece, aynı oranlı kafes kodlamasız duruma göre 4.77 dB'lik bir kodlama kazancı elde edilmiştir.  $R=3/4$  oranlı tasarımda ise, kodlayıcı durumları arasında paralel geçişlerin kullanılması ve 8 durumlu kodlayıcı seçilmesi sonucunda, karesel serbest Öklid uzaklığı maksimum değerine, yani  $d_s^2=6$ 'ya ulaşılmıştır. Bu kod, aynı oranlı kafes kodlamasız duruma göre 4,77 dB, PST hat koduna göre ise 3.52 dB'lik kodlama kazancı sağlamaktadır. Kafes yapıda hat kodlarının tasarımı sırasında varılan bir diğer sonuç, kodlayıcı durum sayısını artırmanın, her zaman, daha büyük serbest uzaklıklı kodların bulunmasına olanak sağlamamasıdır.  $R=4/5$  oranı için yapılan incelemede, karesel serbest Öklid uzaklığı, onaltı durumlu kafes yapı için elde edilen  $d_s^2=4$  değerinden yukarı çıkarılamamıştır.

İkinci bölümde, ayrıca, tasarlanan hat kodlarının analitik olarak ifade edilebildikleri gösterilmiş,  $R=1/2$  oranlı hat kodu için basit bir vektörel ifade elde edilmiştir.  $R=2/3$  ve  $R=3/4$  oranlı hat kodları için ise ifadelerin oldukça karmaşık ve uzun oldukları görülmüştür.

Yine bu bölümde, önerilen durumlara sözcük atama modeline bağlı olarak,  $R=n/n+1$  oranlı yeni hat kodlayıcıları ürettikleri diziler arasındaki Öklid uzaklıkları açısından belli bir simetrik yapı göstermektedir. Bu özelliğe dayanarak, bu kodların serbest Öklid uzaklıklarının hesaplanmasını sağlayan bir algoritma geliştirilmiştir.

İkinci bölümün sonunda, toplamsal beyaz Gauss gürültüsüyle modellenen bir haberleşme kanalı için, tasarlanan hat kodlayıcılarını içeren temelband iletişim sistemlerinin bilgisayar benzetimleri yapılmıştır. Benzetimde, Viterbi kod çözücünün hata olasılığı başarımla ölçüldü kabul edilerek, kafes yapıda tasarlanan hat kodlarının, kafes kodlamasız duruma göre üstünlükleri çeşitli işaret-gürültü oranları için elde edilen hata eğrileri yardımıyla ortaya konmuştur.

Üçüncü bölümde, kafes yapıda doğrusal olmayan kodların hata ve bit hata olasılıklarının üst sınırlarının, doğrusal kodlarınkine eşit karmaşıklıkta belirlenmesine yönelik bir yöntem, bu tezde tasarlanan, kısmen farklı, kısmen ortak elemanlı ve ikiden fazla durum alt kümesine sahip kodlar için genelleştirilmiştir.  $R=1/2$  ve  $R=3/4$  oranlı hat kodlarının, bu yöntemin gerektirdiği, kodlayıcı durumlarının hata ağırlık profilleri açısından eşdeğerlik koşulunu sağladığı gösterilmiş ve bu kodların hata olasılık üst sınırlarına ilişkin analitik ifadeler bulunmuştur. Çeşitli işaret-gürültü oranlarında, bilgisayar yardımıyla bu ifadeler hesaplanarak hata olasılıklarına ilişkin üst sınır eğrileri elde edilmiştir. Daha büyük kodlama fazlalığına sahip  $R=1/2$  oranlı kod için  $10^{-5}$  lik bir hata üst sınırına 7.8 dB lik bir işaret gürültü oranında erişilir-

ken  $R=3/4$  oranlı kod için aynı hata üst sınır değerine 13.3 dB lik bir işaret-gürültü oranında erişilebilmektedir.

Dördüncü bölümde, yeni hat kodlarının güç spektral yoğunluğu açısından değerlendirilmesinde, belli bir  $R=n/n+1$  oranı için eşit ve maksimum serbest Öklid uzaklıklı kodlayıcılar arasından alçak frekanslar bölgesinde en düşük spektral bileşenlere sahip kodun seçilmesi amaçlanmıştır.  $R=1/2$  oranı için aynı serbest Öklid uzaklığına sahip 4 kodlayıcıdan alçak frekanslarda en düşük bileşenlere sahip olanı seçilmiştir.  $R=2/3$  ve  $R=3/4$  oranları için ise, erişilebilen maksimum serbest Öklid uzaklığına sahip kodlayıcı sayısının birden fazla olmasına karşın, bunların güç spektral yoğunluğu açısından eşdeğer oldukları görülmüştür. Tasarlanan kodlar, bilinen hat kodlarıyla da güç spektral yoğunlukları açısından kıyaslanmıştır. İki kutuplu kod alçak frekanslarda en düşük genlikli bileşenlere sahiptir. Buna karşılık, tasarlanan kafes yapıda hat kodlarının, bu bölgedeki spektral genlikleri 4B3T, FOMOT ve MS43 kodlarına göre daha düşüktür. Yalnız  $R=1/2$  oranlı kafes yapıda hat kodu, sıfıra yakın frekanslarda PST koduna göre üstündür.

Son olarak, beşinci bölümde, tasarlanan hat kodlarının seyirme analizi yapılmıştır. Bu amaçla, gürültülü ve bandı sınırlı bir temelband kanaldan iletilen işaretin kendisinden saat bilgisi elde etmek üzere doğrusal olmayan zamanlama devresi içeren bir sayısal haberleşme sisteminin bilgisayar benzetimi yapılmıştır. İletim ve alıcı süzgeçlerinin band genişliğini belirleyen  $\alpha$  düşme katsayısının ve zamanlama devresindeki simge yineleme frekansına akordlu dar bantlı süzgecin değer katsayısının değişimine bağlı olarak,  $R=n/n+1$  oranlı her kod için ortalama seyirme eğrileri çıkarılmıştır. Bu eğrilerden,  $R=1/2$  ve  $R=3/4$  oranlı kodların yaklaşık aynı,  $R=2/3$  oranlı kodun ise bunlara göre, özellikle düşük  $\alpha$  değerlerinde, daha kötü seyirme başarımına sahip oldukları görülmüştür.

## KAYNAKLAR

- [1] UNGERBOECK, G. "Channel Coding with Multilevel/Phase Signals" IEEE Trans. on Inf. Theory vol.IT-28 January 1982.
- [2] UNGERBOECK, G. "Trellis Coded Modulation with Redundant Signal Sets, Part I: Introduction" IEEE Commun. Magazine vol.25, No.2, February 1987.
- [3] UNGERBOECK, G. "Trellis Coded Modulation with Redundant Signal Sets, Part II: State of the Art" IEEE Commun. Magazine, vol.25, No.2, February 1987.
- [4] VITERBI, A.J., OMURA, J.K. "Principles of Digital Communication and Coding" McGraw-Hill 1979.
- [5] FORNEY, G.D. "The Viterbi Algorithm" Proceedings of the IEEE, March 1973.
- [6] CALDERBANK, R., MAZO, J.E. "A New Description of Trellis Codes" IEEE Trans. on Inf. Theory, November 1984.
- [7] CALDERBANK, R., MAZO, J.E., SHAPIRO, H.M. "Upper Bounds on the Minimum Distance of Trellis Codes" Bell Syst. Tech. Journal, vol.62, October 1983.
- [8] CALDERBANK, R., MAZO, J.E., WEI, V.K. "Asymptotic Upper Bounds on the Minimum Distance of Trellis Codes" IEEE Trans. on Com. vol.33, April 1985.
- [9] TAYLOR, D.P., CHAN, H.C. "A Simulation Study of Two Bandwidth Efficient Modulation Techniques" IEEE Trans. on Com. vol.29, March 1981.
- [10] BIGLIERI, E. "High Level Modulation and Coding for Nonlinear Satellite Channels" IEEE Trans. on Com. vol.32, May 1984.
- [11] WILSON, S.G., SLEEPER, H., SCHOTTLER, P., LYONS, M. "Rate 3/4 Convolutional Coding of 16-PSK: Code Design and Performance Study" IEEE Trans. on Com. vol.32, December 1984.

- [12] WILSON, S.G. "Rate 5/6 Trellis Coded 8-PSK" IEEE Trans. on Com. vol.34, October 1986.
- [13] WEI, L.F. "Rotationally Invariant Convolutional Channel Coding with Expanded Signal Space: Part 1:  $180^\circ$ " IEEE Journal on Selected Areas in Commun. vol.2, September 1984.
- [14] WEI, L.F. "Rotationally Invariant Convolutional Channel Coding with Expanded Signal Space: Part 2: Nonlinear Codes" IEEE Journal on Selected Areas in Commun. vol.2, September 1984.
- [15] CALDERBANK, R., SLOANE, J.A. "Four Dimensional Modulation with an Eight-State Trellis Code" AT and T Technical Journal, vol.64, May-June 1985.
- [16] WEI, L.F. "Trellis Coded Modulation with Multi-dimensional Constellations" IEEE Trans. on Inf. Theory, vol.33, July 1987.
- [17] DIVSALAR, D., SIMON, M., YUEN, J. "Trellis Coding with Asymmetric Modulations" IEEE Trans. on Commun. vol.35, February 1987.
- [18] CALDERBANK, R., SLOANE, J.A. "New Trellis Codes Based on Lattices and Cosets" IEEE Trans. on. Inf. Theory, vol.33, March 1987.
- [19] WOLF, J.K., UNGERBOECK, G. "Trellis Coding for Partial-Response Channels" IEEE Trans. on Commun. vol.34, August 1986.
- [20] CCITT Study Group XVII "Recommendation V-32 for a family of 2-wire, duplex modems operating at data signalling rates of up to 9600 bit/s for use on the general switched telephone network and on leased telephone-type circuits" Document AP VIII-43-E, May 1984.
- [21] CCITT Study Group XVII "Draft Recommendation V-33 for 14400 bit/s modem standardized for use on point to point 4-wire leased telephone-type circuits" Circular No.12, COM XVII YS Geneva, May 1985.
- [22] DUC, N.Q. "Line Coding Techniques for Baseband Digital Transmission" ATR vol.9, No.1, 1975.
- [23] FRANSZKE, P.A. "Sequence-State Coding for Digital Transmission" Bell Syst. Tech. Journal, December 1968.

- [24] OWEN, F.E. "PCM and Digital Transmission Systems" McGraw-Hill, 1982.
- [25] BYLANSKI, P., INGRAM, D. "Digital Transmission Systems" Peter-Peregrinus, 1976.
- [26] CHANG, R.W.- JAKUBOW, T.M., LEON-GARCIA, A. "Line Code Design for High Capacity Baseband Digital Transmission Systems" IEEE Trans. on Commun. vol.30, July 1982.
- [27] CROISIER, A. "Introduction to Pseudo-Ternary Transmission Codes" IBM J.Res. and Dev. July 1970.
- [28] VAN GERWEN, P.J. "On the Generation and Application of Pseudo-Ternary Codes in Pulse Transmission" Philips Res. Reports, August 1965.
- [29] SIPRESS "A New Class of Selected Ternary Pulse Transmission Plans for Digital Transmission Lines" IEEE Trans. on Commun. September 1965.
- [30] JESSOP, A. "High Capacity PCM Multiplexing and Code Translation" 1968 IEE Colloquium on PCM, London, March 1968, Digest No.1968/7.
- [31] BUCHNER, J.B. "Ternary Line Signal Codes" 1974 International Zurich Seminar on Integrated Systems for Speech, Video and Data Communications, Switzerland, March 1974.
- [32] AYGÖLÜ, Ü., PANAYIRCI, E. "Hat Kodlarının Kafes Yapıda Tasarımı" Elektrik Mühendisliği II. Ulusal Kongresi, Eylül 1987.
- [33] AYGÖLÜ, Ü., PANAYIRCI, E. "Line Coding in Digital Communications Based on Trellis Coded Modulation" Bulletin of Tech. Univ. of Istanbul, vol.41, No.3, 1988.
- [34] FORNEY, G.D., GALLAGER, R.G., LANG, G.R., LONGSTAFF, F.M., QURESHI, S.U. "Efficient Modulation for Band-Limited Channels" IEEE Journal on Selected Areas in Commun. vol.2, September 1984.
- [35] FORNEY, G.D. "Convolutional Codes III: Sequential Decoding" Inf. Control, vol.25, July 1974.
- [36] BAHL, L.R., CULLUM, C.D., FRAZER, W.D., JELINEK, F. "An Efficient Algorithm for Computing Free Distance" IEEE Trans. on Inf. Theory, vol.18, May 1972.

- [37] LARSEN, K.J. "Comments on An Efficient Algorithm for Computing Free Distance" IEEE Trans. on Inf. Theory, vol.18, July 1973.
- [38] PROAKIS, J.G. "Digital Communications" McGraw-Hill, 1983.
- [39] VITERBI, A.J. "Convolutional Codes and Their Performance in Communication Systems" IEEE Trans. on Commun. vol.19, November 1971.
- [40] ZEHAVID, E., WOLF, J.K. "On the Performance Evaluation on Trellis Codes" IEEE Trans. on Inf. Theory, vol.33, March 1987.
- [41] LUCKY, R.W., SALZ, J., WELDON, E.J. "Principles of Data Communications" McGraw-hill, 1968.
- [42] PIERCE, J.R. "Some Practical Aspects of Digital Transmission" IEEE Spectrum, November 1968.
- [43] BOSIK, B.S. "The Spectral Density of a Coded Digital Signal" Bell Syst. Tech. J. vol.51, April 1972.
- [44] BENNETT, W.R. "Statistics of Regenerative Digital Transmission" Bell Syst. Tec. J. vol.37, November 1958.
- [45] GARDNER, W.A., FRANKS, L.E. "Characterization of Cyclostationary Random Signal Processes" IEEE Trans. on Inf. Theory, vol.21, January 1975.
- [46] FRANKS, L.E., BUBROUSKI, J.P. "Statistical Properties of Timing Jitter in PAM Timing Recovery Scheme" IEEE Trans. on Commun. vol.22, July 1974.
- [47] AYGÖLÜ, Ü. "Sayısal Darbe Genlik Modülasyonlu Sistemlerde Zamanlama Bilgisinin Çıkarılması ve Bipolar Kodlar için Geneleştirilmesi" İ.T.Ü. Yüksek Lisans Tezi, Ocak 1984.

## ÖZGEÇMİŞ

Ümit Aygözü, 18.1.1955'de İstanbul'da doğdu. İlk öğrenimini Şişli Talatpaşa İlkokulu'nda (1960-1965), orta öğrenimini Saint-Michel Fransız Okulu'nda (1965-1969), lise öğrenimini Galatasaray Lisesi'nde (1969-1973) tamamladı. 1978'de İstanbul Teknik Üniversitesi Elektrik Fakültesi Elektronik ve Haberleşme Bölümü'ni bitirdi. Yüksek lisans öğrenimini aynı fakültede 1981-1984 yılları arasında yaptı. Yıldız Üniversitesi Elektronik ve Haberleşme Bölümü Telekomünikasyon Anabilim Dalı'nda 1980-1986 yılları arasında uzman ve araştırma görevlisi olarak görev yaptı. 1986'dan beri aynı yerde öğretim görevlisi olarak çalışmaktadır.

