

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DOĞRUSAL OLMAYAN DENKLEMLERİN
VARYASYONEL İTERASYON , HOMOTOPİ PERTÜRBASYON
VE VARYASYONEL HOMOTOPİ PERTÜRBASYON YÖNTEMLERİ İLE
ÇÖZÜMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşe DEMİRTAŞ

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Emanullah HİZEL

Mayıs 2014

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DOĞRUSAL OLMAYAN DENKLEMLERİN
VARYASYONEL İTERASYON , HOMOTOPİ PERTÜRBASYON
VE VARYASYONEL HOMOTOPİ PERTÜRBASYON YÖNTEMLERİ İLE
ÇÖZÜMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Ayşe DEMİRTAŞ
(509091022)**

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Emanullah HİZEL

Mayıs 2014

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 509091022 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Ayşe DEMİRTAŞ**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “**DOĞRUSAL OLMAYAN DENKLEMLERİN VARYASYONEL İTERASYON , HOMOTOPİ PERTÜRBASYON VE VARYASYONEL HOMOTOPİ PERTÜRBASYON YÖNTEMLERİ İLE ÇÖZÜMLERİ**” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr.Emanullah HIZEL**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Mustafa BAYRAM**
Yıldız Teknik Üniversitesi

Yrd.Doç. Dr. Mehmet Ali KARACA
İstanbul Teknik Üniversitesi

Teslim Tarihi : **05 Mayıs 2014**
Savunma Tarihi : **20 Mayıs 2014**

Aileme,

ÖNSÖZ

Öncelikle kendisi ile çalışmaktan gurur duyduğum; bu çalışmanın hazırlanmasında düşünce ve önerilerinden yararlandığım, rehberliğini ve ilgisini esirgemeyen çok kıymetli danışman hocam sayın Prof. Dr. Emanullah Hızıl'e minnet ve şükranlarımı sunarım. Rehberliğinden ve tecrübelerinden yararlandığım Yrd. Doc. Dr. Mehmet Ali KARACA ve Dr. Bülent Nafi ÖRNEK Hocam'a ve tez çalışmalarım için göstermiş oldukları hoşgörü ve anlayış için Yaz Bilgi Sistemlerindeki müdürlerime ve çalışma arkadaşlarıma da sonsuz teşekkürler. Ayrıca yüksek lisans eğitimim süresince destek ve emeği ile hep yanımda olan sevgili arkadaşım Arş. Gör. Burcu BEKTAŞ'a da teşekkürü bir borç bilirim.

Mayıs 2014

Ayşe DEMİRTAŞ

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖNSÖZ	iii
İÇİNDEKİLER	ix
ŞEKİL LİSTESİ	xi
ÖZET.....	xiii
SUMMARY	xv
1. GİRİŞ	1
1.1 Tezin Amacı.....	2
1.2 Literatür Araştırması.....	2
2. YÖNTEMLER VE TEOREMLER	7
2.1 Varyasyonel İterasyon Metodu Hakkında Temel Bilgiler.....	7
2.1.1 Varyasyonel İterasyon Metodu.....	10
2.1.2 Varyasyonel İterasyon Metodunun Uygulamaları.....	15
2.2 Homotopi Pertürbasyon Metodu.....	19
2.2.1 Homotopi Kavramı.....	20
2.2.2 Pertürbasyon Teorisinin Genel Tanımı ve Tarihçesi.....	20
2.2.3 Homotopi Pertürbasyon Metodunun Tanımı ve Uygulamalar.....	21
2.2.4 Denklemin Çözümü İçin Homotopi Pertürbasyon Metodu.....	25
2.3 Varyasyonel Homotopi Pertürbasyon Metodu.....	29
3. YÖNTEMLER ÜZERİNE ÇALIŞMAMIZ.....	32
3.1 Benjamin-Bona-Mahony(BBM) Denkleminin VIM ile Çözümü.....	32
3.2 HPM ile (2+1) Boyutlu Broer Kaup Sisteminin Çözümü.....	35
3.3 HPM ile Solitary Denkleminin Çözümü.....	39
3.4 Benjamin-Bona-Mahony(BBM) Denkleminin VHPM ile Çözü.....	44
4. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	49
KAYNAKLAR	51
ÖZGEÇMİŞ	55

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil2.1: Fonksiyon, küçük varyasyonu ve sınır koşullarını sağlayan değişim.....	8
Şekil2.2: f ve g arasında homotopi.....	18
Şekil3.1 $-5 < x < 5$ ve $0 < t < 2$ aralığındaki u analitik çözümünün grafiği	33
Şekil3.2 $-5 < x < 5$ ve $0 < t < 2$ aralığındaki u yaklaşık çözümünün grafiği.	33
Şekil3.3 $10 < x < 20$ ve $10 < y < 20$ aralığındaki u analitik çözümünün grafiği.....	36
Şekil3.4 $10 < x < 20$ ve $10 < y < 20$ aralığındaki $u = u_1 + u_2 + u_3$ yaklaşık çözümünün grafiği	36
Şekil3.5 $10 < x < 20$ ve $10 < y < 20$ aralığındaki v analitik çözümünün grafiği	37
Şekil3.6 $10 < x < 20$ ve $10 < y < 20$ aralığındaki $v = v_1 + v_2 + v_3$ yaklaşık çözümünün grafiği	37
Şekil3.7 $-5 < x < 5$ ve $-5 < y < 5$ aralığındaki u analitik çözümünün grafiği	40
Şekil3.8 $-5 < x < 5$ ve $-5 < y < 5$ aralığındaki $u = u_1 + u_2 + u_3$ yaklaşık çözümünün grafiği	41
Şekil3.9 $-5 < x < 5$ ve $-5 < y < 5$ aralığındaki v analitik çözümünün grafiği	41
Şekil3.10 $-5 < x < 5$ ve $-5 < y < 5$ aralığındaki $v = v_1 + v_2 + v_3$ yaklaşık çözümünün grafiği	42
Şekil3.11 $-5 < x < 5$ ve $0 < t < 2$ aralığındaki u analitik çözümünün grafiği	45
Şekil3.12 $-5 < x < 5$ ve $0 < t < 2$ aralığındaki $u = u_1 + u_2$ yaklaşık çözümünün grafiği	46

DOĞRUSAL OLMAYAN DENKLEMLERİN VARYASYONEL İTERASYON , HOMOTOPİ PERTÜRBASYON VE VARYASYONEL HOMOTOPİ PERTÜRBASYON YÖNTEMLERİ İLE ÇÖZÜMLERİ

ÖZET

Bu çalışmanın amacı, son zamanlarda yaygın olarak kullanılan varyasyonel iterasyon, homotopi pertürbasyon ve varyasyonel homotopi pertürbasyon metodlarını kullanarak bazı doğrusal ve doğrusal olmayan problemlerin çözümlerini elde etmek ve bu çözümlerin analitik çözümler ile karşılaştırmasını yapmaktır.

Doğrusal olmayan diferansiyel denklemin integrallenebilmesi veya analitik çözümünün varlığının gösterilebilmesi için bazı ölçütler geliştirilmiştir. Bu çalışma süresince bu ölçütlerden en çok kullanılanlardan olan varyasyonel iterasyon, Homotopi pertürbasyon ve varyasyonel homotopi pertürbasyon yöntemleri incelenmiştir.

Varyasyonel iterasyon yöntemi doğrusal olmayan problemlerin yaklaşık çözümünü bulmada kullanılır. Bu metotta problemler başlangıç koşulları ile birlikte verilir. Varyasyonel teorisi yoluyla Lagrange parametresi belirlenerek çözüme ulaşılır. Homotopi pertürbasyon doğrusal ve doğrusal olmayan adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin, integral denklemlerinin çözümü için uygulanabilmektedir. Bu yöntemde Homotopi tekniğine göre $p \in [0,1]$ parametresi ile homotopi kurulur. Bu parametre küçük bir parametre olarak düşünülür. Bilinen Pertürbasyon yöntemlerini ve topolojideki homotopinin avantajlarını kapsayan bu yöntem, kolaylıkla çözülebilecek basit problemlere dönüştürülerek çözüm elde edilebilmektedir. Bu yöntem doğrusal olmayan dalga denklemlerine, başlangıç değer problemlerine, doğrusal olmayan salınım denklemlerine ve integral denklemlerine uygulanabilmektedir. Pek çok durumda bu metot çabuk bir şekilde seri çözüm vermektedir.

Son zamanlarda geliştirilen varyasyonel homotopi pertürbasyon metodu ise varyasyonel iterasyon ve homotopi pertürbasyon yöntemlerinin birleştirilmesinden oluşan bir yöntemdir. Bu yeni yöntem ile doğrusal ve doğrusal olmayan denklemlerin analitik veya yaklaşık çözümleri için herhangi bir kısıtlayıcı varsayım ve doğrusallaştırma gerektirmeden analitik çözüme yakın çözümler bulmak mümkündür.

Bu tez çalışması 4 bölümden oluşmaktadır. Tezin ilk bölümü giriş ve varyasyonel iterasyon metodu, homotopi pertürbasyon metodu ve varyasyonel homotopi pertürbasyon yöntemi ile ilgili literatür araştırmalarından oluşmaktadır. 2.bölümde varyasyonel iterasyon, homotopi pertürbasyon ve varyasyonel homotopi pertürbasyon metodlarının teorik altyapısına değinilmiş ve bu metodlarla ilgili örneklere yer verilmiştir.

3. bölümde ise Benjamin-Bona-Mahony (BBM) denkleminin varyasyonel iterasyon ve varyasyonel homotopi pertürbasyon metodları ile çözümüne ayrıca (2+1) boyutlu Broer-kaup Sistemi ve Soliter Dalga çözümlerinin homotopi pertürbasyon yöntemi ile Sagamath programını kullanarak yapmış olduğumuz çalışmalara yer verilmiştir. 4.bölüm bu yöntemlerle yapmış olduğumuz çalışmalar sonrasındaki çıkarımlarımızdan oluşan sonuç bölümüdür.

SOLUTIONS OF NON-LINEAR EQUATIONS BY VARIATIONAL ITERATION, HOMOTOPY PERTURBATION AND VARIATIONAL HOMOTOPY PERTURBATION

SUMMARY

Engineering and physical sciences in many problems resulting from mathematical models, nonlinear includes differential equations. It is therefore essential differential equation nonlinear analytical or numerical solutions are extremely important in order to obtain. This type of equation, except for a very limited number of those who have a large majority of his analytical solutions. This is why solutions nonlinear equation numerical methods or analytical approach using methods check. Nonlinear problems to find solutions for about a variety of numerical and analytical approach procedures have been developed. But numerical methods, general solution does not enough information about analytical approach methods, there has been to the fore.

An equation is said to be nonlinear when it involves terms of degree higher than 1 in the unknown quantity. These terms may be polynomial or capable of being broken down into Taylor series of degrees higher than 1. Nonlinear equations cannot in general be solved analytically. In this case, therefore, the solutions of the equations must be approached using iterative methods. The principle of these methods of solving consists in starting from an arbitrary point – the closest possible point to the solution sought – and involves arriving at the solution gradually through successive tests.

The purpose of this study, the variational iteration is widely used recently, homotopy perturbation and the variational perturbation methods using some homotopy linear and non-linear problems, solutions, and these solutions is to make a comparison of the analytical solutions.

Non-linear integral differential equation can be obtained or developed some criteria in order to be represented in the presence of the analytical solution. This work is the most used this criteria for the duration of the variational Iteration, homotopy perturbation and variational homotopy perturbation.

Variational iteration method is a new technique developed in 1997. The solution of non-linear partial differential equations, especially very effective. This is supplied with the initial conditions problems's nowhere. The variational theory by determining a solution reached through Lagrange parameter. The selection of initial conditions will affect the rate of the analytical solution, it is important to approach.

Variational iteration method has been favourably applied to various kinds of nonlinear problems. The main property of the method is in its flexibility and ability to solve nonlinear equations accurately and conveniently. In this paper recent trends and developments in the use of the method are reviewed. Major applications to nonlinear wave equation, nonlinear fractional differential equations, nonlinear oscillations and nonlinear problems arising in various engineering applications are surveyed. The confluence of modern mathematics and symbol computation has posed a challenge to developing technologies capable of handling strongly nonlinear equations which cannot be successfully dealt with by classical methods. Variational iteration method is uniquely qualified to address this challenge. The flexibility and adaptation provided by the method have made the method a strong candidate for approximate analytical solutions.

The variational iteration method is particularly suitable for solving this kind of problems. Approximate initial/boundary conditions and point boundary initial/conditions are also discussed, with the variational iteration method being capable of recovering the correct initial/boundary conditions and finding the solutions simultaneously.

The variational iteration method is remarkably effective for solving differential equations of the fifth order. Four iterations are enough to obtain very highly accurate solution. The results show that the variational iteration method is a powerful mathematical tool for finding the numerical solutions of differential equations.

Homotopy perturbation method (HPM), founded in 1998 by Ji-Huan He. He, and the concept of homotopy perturbation technique when creating a method of nonlinear problems, easy solution linear problems. It is well known that these methods, in the 1990s the resulting methods are basically serial solutions. Be in the form of a series of solutions and, in some cases, solutions can be obtained, this closed forms, methods and popular among scientists working in different branches have different interpretations of the solutions a huge advantage. Homotopy perturbation linear and non-linear ordinary and partial differential equations, integral equations to solve can be applied. According to this method in the Homotopy technique with the parameter homotopy is established.

The homotopy perturbation method (HPM) is a series expansion method used in the solution of nonlinear partial differential equations. The method employs a homotopy transform to generate a convergent series solution of differential equations. This gives flexibility in the choice of basis functions for the solution and the linear inversion operators while still retaining a simplicity that makes the method easily understandable from the standpoint of general perturbation methods.

This parameter is considered to be a small parameter. Known advantages of this method of covering the methods and Perturbation in the topology can be fixed easily, homotopy's simple problems in the converted solution can be achieved. This method of nonlinear wave equations, initial value problems, nonlinear oscillation equations and integral equations can be applied. In many cases, this method provides a quick way to serial solution.

The homotopy perturbation method (HPM) is a series expansion method used in the solution of nonlinear partial differential equations. The method employs a homotopy transform to generate a convergent series solution of differential equations. This gives flexibility in the choice of basis functions for the solution and the linear inversion operators (as compared to the Adomian decomposition method), while still retaining a simplicity that makes the

method easily understandable from the standpoint of general perturbation methods. The HPM was introduced by Ji-Huan He of Shanghai University in 1998. The HPM is a special case of the homotopy analysis method (HAM) developed by Liao Shijun in 1992. The HAM uses a so-called convergence-control parameter to guarantee the convergence of approximation series over a given interval of physical parameters.

Recently developed the variational homotopy perturbation method is a method of combining variational Iteration and homotopy perturbation Methods. This new method with linear and non-linear equations to approximate solutions to analytical or any restrictive assumption that it is possible to find solutions to the analytical solution without requiring close and linearization.

We use this method for solving higher dimensional initial boundary value problems with variable coefficients. The developed algorithm is quite efficient and is practically well suited for use in these problems.

Variational homotopy perturbation method has a very simple solution procedure and absorbs all of the positive features of variational iteration and homotopy perturbation methods and is highly compatible with the diversity of the physical problems. In this work, we will use variational homotopy perturbation method to solve equations with initial and boundary conditions. The proposed algorithm provides the solution in a rapid convergent series which may lead to the solution in a closed form. This paper considers the effectiveness of the variational homotopy perturbation method in solving equations.

This thesis consists of four parts. The first part of the thesis contains entry and variational iteration, Homotopy perturbation and Variational homotopy perturbation method with the corresponding literature surveys. 2. section variational iteration, homotopy perturbation and the variational homotopy perturbation methods theoretical framework are addressed and these methods are relevant examples. 3. section is Benjamin-Bona-Mahony equation (BBM) variational iteration and variational perturbation methods, with the resolution of the homotopy and $(2 + 1)$ -dimensional Broer-Kaup Solitary Wave solutions of the system and the homotopy perturbation method with the Sagamath using the program that we have done the studies. 4. we have done studies of these methods after the chapter conclusions of the result.

1. GİRİŞ

Mühendislik ve fiziki bilimlerin birçok alanında ortaya çıkan problemlerin matematiksel modelleri, nonlinear diferensiyel denklemler içerir. Bu sebeple nonlinear diferensiyel denklemlerin analitik veya sayısal çözümlerinin elde edilebilmesi son derece önemlidir. Bu tür denklemlerin, çok sınırlı sayıda olanları hariç büyük bir çoğunluğunun analitik çözümleri bulunamaz. Bu yüzden nonlinear denklemlerin çözümleri sayısal yöntemler ya da analitik yaklaşım yöntemleri kullanılarak hesaplanabilmektedir.

Nonlinear problemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için çok çeşitli sayısal ve analitik yaklaşım metodları geliştirilmiştir. Ancak sayısal yöntemler, genel çözüm hakkında yeterli bilgi vermediğinden analitik yaklaşım metodları ön plana çıkmıştır. Bu metodlardan en bilineni pertürbasyon metodudur. Bu metod pertürbasyon miktarı olarak adlandırılan küçük parametrelerin varlığına dayanır. Ancak pek çok nonlinear problem bu tür parametreler içermez.

Küçük parametreler içermeyen yöntemlerde denklemin farklı yerlerine eklenen yapay parametreler kullanılır. Ancak bu parametreleri denkleme yerleştirmek son derece teknik bir iştir ve çoğu zaman yakınsama yavaş olur ya da hiç yakınsama olmaz. Ayrıca bu yöntemler yakınsaklık aralığını ayarlamaya izin vermez ve nonlinearlik güçlü ise yaklaşım bozulabilir.

Nonlinearlik güçlü de olsa yaklaşık analitik çözüm bulabilen yöntemler arasında homotopi pertürbasyon ve varyasyonel iterasyon metodunun önemli yeri vardır.

He, 2000 yılında geliştirdiği homotopi pertürbasyon metodu ile tüm bu güçlükleri ortadan kaldırmıştır. Bu yöntem kullanılarak çok çeşitli nonlinear problemlerin yaklaşık çözümleri elde edilmiştir. Bu yöntem topolojinin temel kavramlarından biri olan homotopi kavramını ve klasik pertürbasyon metodunu kullanarak oluşturulmuştur. Bu yöntem de pertürbasyon yöntemleri gibi parametre içerir. Ancak bu parametreyi denkleme yerleştirmek oluşturulan homotopi sayesinde son derece kolaydır.

Gömülü parametre denkleme yerleştirildikten sonra klasik pertürbasyon metodu kullanılarak yaklaşık analitik çözüme ulaşılabilir.

Varyasyonel iterasyon metodu ise homotopi pertürbasyon metodundan daha önce geliştirilmiş bir metottur. Aynı homotopi pertürbasyon metodunda olduğu gibi bu yöntem de önceki yöntemlerin sahip olduğu kısıtlamaları ortadan kaldırır. Her türlü probleme uygulanabilir ve yaklaşımı hızlıdır. Diğer tüm yöntemlerin aksine uygulanacağı problemlerin küçük parametreler içermesi ya da dışarıdan eklenmesi gerekmez. Bu yöntemde genel bir Lagrange çarpanı ile oluşturulan düzeltme fonksiyoneli kullanılır. Başlangıç koşullarından yola çıkarak sürekli yinelemeler sonucu yaklaşık analitik çözüm oluşturulur. Son zamanlarda geliştirilen varyasyonel homotopi pertürbasyon metodu ise varyasyonel iterasyon ve homotopi pertürbasyon yöntemlerinin birleştirilmesinden oluşan bir yöntemdir. Bu yeni yöntem ile doğrusal ve doğrusal olmayan denklemlerin analitik veya yaklaşık çözümleri için herhangi bir kısıtlayıcı varsayım ve doğrusallaştırma gerektirmeden analitik çözüme yakın çözümler bulmak mümkündür.

1.1 Tezin Amacı

Mühendislik ve fiziki bilimlerin birçok alanında ortaya çıkan problemlerin matematiksel modelleri, nonlinear diferensiyel denklemler içerir. Bu sebeple nonlinear diferensiyel denklemlerin analitik veya sayısal çözümlerinin elde edilebilmesi son derece önemlidir. Bu tür denklemlerin, çok sınırlı sayıda olanları hariç büyük bir çoğunluğunun analitik çözümleri bulunamaz. Bu yüzden nonlinear denklemlerin çözümleri sayısal yöntemler ya da analitik yaklaşım yöntemleri kullanılarak hesaplanabilmektedir.

Bu tez çalışmasında nonlinear denklemlerin çözümleri için varyasyonel iterasyon, homotopi pertürbasyon ve varyasyonel homotopi pertürbasyon yöntemlerinin incelenmesi ve bu yöntemlerin analitik çözüme yaklaşımlarının değerlendirilmesi ve Benjamin-Bona-Mahony (BBM) denkleminin varyasyonel iterasyon ve varyasyonel homotopi pertürbasyon metodları ile çözümüne ayrıca (2+1) boyutlu Broer-kaup Sistemi ve Soliter Dalga çözümlerinin homotopi pertürbasyon yöntemi ile çözülmesi amaçlanmıştır. Bu çözümler için Sagamath isimli web tabanlı programın kullanılmıştır.

1.2 Literatür Araştırması

Varyasyonel İterasyon Yöntemi ile ilgili literatürde yer alan çalışmalar

Varyasyonel iterasyon yöntemi ile ilgili literatür tarandığında, geliştirildiği tarihten bu yana pek çok bilim insanı tarafından bu metotla ilgili yüzlerce yayın yapıldığı gözlemlenmiştir. Bu yayınlar içerisinde seçilen bazı makaleler kronolojik sırayla aşağıda verilmiştir.

2000 yılında He, metodu otonom adi diferansiyel denklem sistemlerine uygulamıştır [1]. Abdou ve Soliman, 2004 yılındaki çalışmalarında metodu, Burger denklemini çözmek için kullanmışlardır [2]. Soliman 2005 yılında yaptığı çalışmada, metodu genelleştirilmiş düzenli uzun dalga denklemi için yaklaşık çözüm elde etmekte kullanmıştır [3]. Yine 2005 yılında Abdou ve Soliman, birleşik Schrodinger-KdV, genelleştirilmiş KdV ve sığ su denklemleri gibi lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin üç tipini çözmek için metodu uygulamışlardır [4]. 2006 yılında Momani, sınır değer problemlerinin bir sınıfı için bu metodu kullanmıştır [5]. Momani, 2006 yılında yapmış olduğu bir diğer çalışmada, Helmholtz kısmi diferansiyel denklemini çözmek için bu metodu uygulamıştır [6]. Abassy, 2007 yılında yayınlanan makalesinde, doğrusal olmayan denklemlerin kapalı şeklindeki çözümlerini elde etmek için Laplace dönüşümü ve Pade tekniğini birlikte uygulayarak varyasyonel iterasyon metodunu geliştirmiştir [7]. Biazar, 2007 yılında yayınladığı makalesinde, metodu değişken katsayılı dördüncü mertebeden parabolik kısmi diferansiyel denklemlere uygulamıştır [8]. He'nin 2007 yılındaki çalışması, varyasyonel iterasyon metodunun konseptlerine sade bir giriş niteliğindedir. İlk olarak Lagrange çarpanını, sınırlandırılmış varyasyonu, düzeltme fonksiyoneli gibi varyasyonel iterasyon metodundaki ana konseptleri sezgisel olarak açıklamıştır [9]. Tari, 2007 yılında düzeltme fonksiyoneline bazı bilinmeyen parametreler ekleyerek yeni bir modifiye edilmiş varyasyonel iterasyon metodu sunmuştur [10]. Tatari 2007 yılında yayınlanan makalesinde, bu metodu ikinci mertebeden başlangıç değer problemlerini çözmede kullanmıştır [11]. Wazwaz'ın 2008 yılı çalışması, metodu kullanarak lineer ve nonlineer Schrödinger denklemlerinin tam çözümlerini elde etmek üzerinedir [12]. Dehghan 2008 yılında, Cauchy reaksiyon-difüzyon probleminin çözümünü bu metodu kullanarak göstermiştir [13]. Yıldırım, 2009

yılında yayınladığı çalışmasında varyasyonel iterasyon metodunu kullanarak değişken katsayılı, farklı boyutlardaki kısmi diferensiyel denklemlerin tam çözümlerini vermiştir [14]. 2009 yılında Geng, Riccati diferensiyel denklemleri için modifiye edilmiş bir varyasyonel iterasyon metodu sunmuştur [15]. Aynı yıl Ghorbani, varyasyonel iterasyon metodunun başka bir modifikasyonunu sunmuştur [16]. Ghorbani, 2010 yılında yayınladığı bir makalesinde Riccati denklemlerinin çözümlerine ulaşmak için metottan yararlanmıştır [17]. Yine 2010 yılında Odibat, metodun yakınsaklığı üzerine bir çalışma gerçekleştirmiştir [18]. Soltani, 2010 yılı çalışmasında, Lagrange çarpanının etkili bir şekilde bulunabilmesi için lineer operatörleri seçmede çok büyük ölçüde serbestlik tanıyan yeni bir varyasyonel iterasyon algoritması sunmuştur [19].

Homotopi Pertürbasyon Yöntemi ile ilgili literatürde yer alan çalışmalar

Literatür tarandığında, Homotopi Pertürbasyon Yöntemi geliştirildiği tarihten bu yana pek çok bilim insanı tarafından bu metotla ilgili yüzlerce yayın yapıldığı gözlemlenmiştir. Bu yayınlar içerisinde seçilen bazı makaleler kronolojik sırayla aşağıda verilmiştir.

Ji-Huan He, 2004 yılındaki çalışmasında, homotopi pertürbasyon metodu ve homotopi analiz metodunun arasındaki farkları incelemiştir [20]. 2006 yılında Abbasbandy, homotopi pertürbasyon metodunu ikinci dereceden Riccati diferensiyel denklemini çözmek için kullanmıştır [21]. 2007 yılında Odibat, homotopi pertürbasyon metodunun etkili bir modifikasyonu sunmuştur [22]. Hashemi 2007 yılında yapmış olduğu çalışmasında, genelleştirilmiş Huxley denkleminin çözümünü bu metodu ve Adomian ayrıştırma metodu ile elde etmiştir [23]. 2007 yılında yayınlanan bir diğer çalışma ise Chowdhury'e aittir. Bu çalışmada, zamana bağlı Emden-Fowler tipindeki denklemlerin yaklaşık analitik çözümlerini elde etmek için yine homotopi pertürbasyon metodunu uygulamıştır [24]. Öziş, 2008 yılında homotopi pertürbasyon metodunun modifiye edilmiş formunun belirli lineer olmayan problemler için Adomian ayrıştırma metoduna karşılık geldiğini ortaya çıkarmıştır [25]. 2009 yılında ise Chun, homotopi pertürbasyon metodu ve modifiye homotopi pertürbasyon metodunu, bazı lineer olmayan yayılma denklemleri ve dalga denklemlerinin analitik davranışları için sırasıyla kullanmıştır [26]. Saadatmandi 2009 yılında, bu metodu ikinci mertebeden lineer olmayan sistemleri çözmek için

kullanmıştır [27]. Yıldırım'ın 2009 yılı çalışmasında, Cauchy reaksiyon-yayılma probleminin çözümünü homotopi pertürbasyon metodu vasıtasıyla bulmuştur [28]. Hızıl'in 2009 yılı çalışması, (2+1)-boyutlu çift Burgers sisteminin nümerik çözümü için homotopi pertürbasyon metodunu kullanması üzerinedir [29]. Son olarak 2010 yılı çalışmasında Duman, potansiyel fonksiyonu $[0,1]$ aralığı üzerinde kare integrallenebilir olduğu zaman Dirichlet sınır şartları ile Sturm-Liouville probleminin özdeğerleri ve özfonksiyonları için asimptotik formülleri homotopi pertürbasyon metodunu kullanarak bulmuştur [30].

Varyasyonel Homotopi Pertürbasyon Yöntemi ile ilgili literatürde yer alan çalışmalar

Varyasyonel iterasyon ve homotopi pertürbasyon yöntemlerinin birleştirilmesinden oluşan varyasyonel iterasyon yöntemi ile ilgili çalışmalarda aşağıda yer almaktadır.

A. Ebaid 2007 yılında doğrusal olmayan bazı evrim denklemleri ve soliteri dalga çözümleri için bu yöntemi kullanmıştır [31]. M. Matinfar, M. Ghasemi 2010 yılında Zakharove-Kuznetsov denklemleri için varyasyonel homotopi pertürbasyon yöntemini kullanmıştır [32]. Yine 2010 yılında M. Matinfar, M. Ghasemi ve Z.Raeisi doğrusal ve doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemler için varyasyonel homotopi pertürbasyon yöntemini kullanmışlardır [33].

2.YÖNTEMLER VE TEOREMLER

2.1 Varyasyonel İterasyon Metodu Hakkında Temel Bilgiler

Bu bölümde, varyasyonel iterasyon metodunun daha iyi anlaşılabilmesi için yöntem içerisinde geçen bazı temel varyasyonlar hesabı konularına kısaca değinilecektir. Varyasyonlar hesabı basitçe fonksiyoneller ile ilgilenir. Bir fonksiyonel kabaca bir fonksiyonun fonksiyonları olarak düşünülebilir.

Örneğin;

$$I[y(x)] = \int_0^{\pi} [y(x)]^2 dx \quad (2.1)$$

bir fonksiyoneldir ve genellikle köşeli parantezler ile gösterilir. Bir fonksiyon sayıların bir kümesinden bir değere tanımlanan bir dönüşümken, bir fonksiyonele fonksiyonların bir kümesinden bir değere tanımlanan bir dönüşümdür. Belirli integraller bir fonksiyonu bir değere dönüştürdüğünden fonksiyoneller genellikle integral içerir. Varyasyonel analizin çalışma alanlarından biri de bir fonksiyoneli maksimize ya da minimize eden fonksiyonu belirlemektir. Varyasyonel analizde

sıklıkla kullanılan bir fonksiyonel $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ olmak üzere

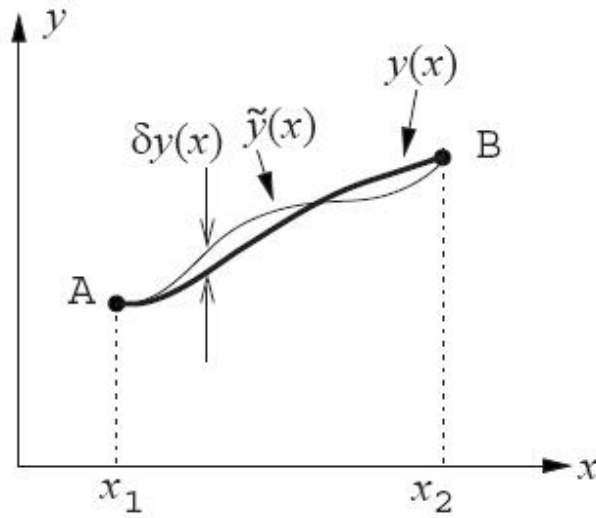
$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y(x), y'(x)) dx \quad (2.2)$$

biçimindedir. Amaç bu fonksiyoneli

$$y(x_1) = a; \quad y(x_2) = b$$

sınır koşulları altında maksimize (yada minimize) eden y fonksiyonunu bulmaktır. Bir y fonksiyonu için dy diferensiyeli, x değişkeni dx kadar değiştiğinde y fonksiyonunun ne kadar değiştiğini gösterir. Eğer x değişkeni maksimum (ya da minimum) değerini alıyorsa değişim olmayacağından $dy = 0$ olacaktır.

Benzer şekilde $I[y(x)]$ fonksiyoneli için y fonksiyonu δy kadar değiştiğinde I fonksiyonelinin ne kadar değiştiği (varyasyonu) δI ile gösterilir. Bu değişim şekil 2.1 de görselleştirilmiştir.



Şekil 2.1: Fonksiyon, küçük varyasyonu ve sınır koşullarını sağlayan değişim.

Eğer y fonksiyonu δy küçük, sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \delta y(x)$$

kadar değişiyorsa, fonksiyonelin varyasyonu

$$\delta I = I[\tilde{y}(x)] - I[y(x)]$$

olacaktır. Burada amaç δI ifadesini elde etmektir. Varsayalım ki **(2.2)** fonksiyoneli verilsin. δI değerini bulmak için ε sonsuz küçük bir değer ve σ keyfi sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\delta y(x) = \varepsilon \sigma(x)$$

varyasyonunu tanımlayalım. Buradan, $I[\tilde{y}(x)]$ ifadesinin ε cinsinden Taylor açılımı kullanılarak

$$\begin{aligned}
I[\tilde{y}(x)] &= \int_{x_1}^{x_2} F(x, y(x) + \varepsilon\sigma(x), y'(x) + \varepsilon\sigma'(x)) dx \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \left[F(x, y(x), y'(x)) + \frac{dF}{dy'} \varepsilon\sigma'(x) + \sigma(x^2) \right] dx \\
&= I[y(x)] + \varepsilon \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{dF}{dx} \sigma(x) + \frac{dF}{dy'} \sigma'(x) \right] dx + o(\varepsilon^2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
\delta I &= \varepsilon \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{dF}{dy} \sigma(x) + \frac{dF}{dy'} \sigma'(x) \right] dx + o(\varepsilon^2) \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{dF}{dy} \delta y(x) + \frac{dF}{dy'} \delta y'(x) \right] dx + o(\varepsilon^2)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Ayrıca kısmi integrasyon uygulanarak

$$\begin{aligned}
\delta I &= \varepsilon \int_{x_1}^{x_2} \frac{dF}{dy} \sigma(x) dx + \varepsilon \int_{x_1}^{x_2} \frac{dF}{dy'} \sigma(x) dx + o(\varepsilon^2) \\
&= \varepsilon \int_{x_1}^{x_2} \frac{dF}{dy} \sigma(x) dx + \varepsilon \left[\frac{dF}{dy'} \sigma(x) \right]_{x_1}^{x_2} - \varepsilon \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{dF}{dy'} \right) \sigma(x) dx + o(\varepsilon^2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan sınır koşulları $\sigma(x_1) = \sigma(x_2) = 0$ yardımıyla,

$$\begin{aligned}
\delta I &= \varepsilon \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{dF}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dF}{dy'} \right) \right] \\
\delta I &= \varepsilon \int_{x_1}^{x_2} \delta(x) \left[\frac{dF}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dF}{dy'} \right) \right] + dx + o(\varepsilon^2)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece eğer y fonksiyonu $I[y(x)]$ fonksiyonelinin maksimumu (ya da minimumu) ise $\delta I = 0$ olacaktır. Bu ise y fonksiyonunun $x \in (x_1, x_2)$ aralığında

$$\frac{dF}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dF}{dy'} \right) = 0 \tag{2.3}$$

diferensiyel denklemini sağlaması ile mümkündür. **(2.3)** denkleminde Euler-Lagrange Denklemi denir.

Kullanımına örnek vermek amacıyla A ve B noktalarını birleştiren en kısa yolu bulmaya çalışalım. Açıkça, bu yol iki noktayı birleştiren bir doğrudur. Bu sonuca, varyasyonel analiz kullanarak ulaşalım. A ve B noktalarını birleştiren bir y eğrisi alalım. Bu eğrinin uzunluğu

$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y(x), y'(x)) dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx \quad (2.4)$$

olacaktır. I , y fonksiyonunun bir fonksiyoneli ve I fonksiyonelinin minimumu Euler-Lagrange denklemini sağlamalıdır. Ayrıca, F açıkça x ya da y ifadesine bağlı olmadığından

$$\frac{dF}{dy} = 0 \text{ ve } \frac{dF}{dy'} = \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}$$

olarak alınabilir. Böylece, Euler-Lagrange denklemi

$$-\frac{d}{dx} \left(\frac{y'(x)}{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}} \right) = 0$$

olarak elde edilir. Bu denklemin çözümünden c keyfi bir sabit olmak üzere

$$y'(x) = c$$

elde edilir ki bu y fonksiyonunun bir doğru olduğunu gösterir.

2.1.1 Varyasyonel İterasyon Metodu

1978 yılında, Inokuti ve arkadaşları nonlinear denklemlerin çözümü için genel bir Lagrange çarpanı metodu önermişlerdir. Bu metot, L lineer, N nonlinear operatör olmak üzere

$$Lu + Nu = f(x) \quad (2.5)$$

genel nonlinear denkleminin x_0 noktasındaki değerini düzeltmek için u_0 , $Lu = 0$ denkleminin çözümü olmak üzere,

$$u_c(x_0) = u_0(x_0) + \int_a^b \lambda (Lu_0(x) + Nu_0(x) - f) dx \quad (2.6)$$

düzeltilme formülünü yazabileceğimizi söyler. Burada λ genel Lagrange çarpanıdır ve varyasyonel analiz yöntemleri kullanılarak hesaplanabilir. Varyasyonel iterasyon metodu, bu metodun He tarafından geliştirilmesiyle elde edilmiştir [1]. He, (2.6) denklemini, u_0 fonksiyonunu ilk yaklaşımı olarak alarak

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda (Lu_n(s) + N\tilde{u}_n(s) - f(s)) ds \quad (2.7)$$

biçiminde bir iterasyon metoduna dönüştürmüştür. Burada u_n , n yaklaşık çözüm, $\tilde{u}_n$ ise kısıtlanmış varyasyondur. Yani $\delta\tilde{u}_n = 0$ olacaktır. Ayrıca (2.7) denkleminde düzeltilme fonksiyoneli adı verilir. Bu fonksiyonele varyasyon uygularsak $\delta u_n(0) = 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &= \delta u_n(x) + \delta \int_0^x \lambda(x, s) (Lu_n(s) + N\tilde{u}_n(s) - f(s)) ds \\ &= \delta u_n(x) + \int_0^x \delta \lambda(x, s) (Lu_n(s) - f(s)) ds = 0 \end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan, oluşan Euler-Lagrange problemi çözülerek Lagrange çarpan $\lambda(x, s)$ belirlenir. Ardından, başlangıç koşullarını sağlayacak şekilde bir u_0 ilk yaklaşım fonksiyonu seçilir ve bu değerler (2.7) iterasyon formülünde yerlerine yazılarak u_n , $n = 1, 2, \dots$ yaklaşımları bulunur. Sonuç olarak çözüm $u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ ile verilir.

Metodun işleyişini anlayabilmek için aşağıdaki lineer problemin çözümünü, varyasyonel iterasyon metodunu kullanarak bulalım:

Örnek 2.1 [34]

$$\begin{cases} u'' + u = \cos t \\ u(0) = 1, u'(0) = 0 \end{cases}$$

sabit katsayılı lineer homojen olmayan başlangıç değer problemini ele alalım. Bu denkleme karşılık gelen düzeltme fonksiyoneli

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda(t,s) \{u''(s) + \tilde{u}_n(s) - \cos(s)\} ds \quad (2.8)$$

biçiminde yazılabilir. Bu fonksiyoneli kararlı yapmak için varyasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} u_{n+1}(t) &= \delta u_n(t) + \delta \int_0^t \lambda(t,s) \{u''(s) - \cos(s)\} ds \\ &= \delta u_n(t) + \int_0^t \left\{ \left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} \lambda(t,s) \right] \delta u_n(s) \right\} ds - \frac{\delta}{\delta s} \lambda(t,s) \delta u_n(s) \Big|_{s=t} + \lambda(t,s) \delta u'_n(s) \Big|_{s=t} \\ &= \left(1 - \frac{\delta}{\delta s} \lambda(t,s) \Big|_{s=t} \right) \delta u_n(t) + \lambda(t,s) \Big|_{s=t} \delta u'_n(t) + \int_0^t \left\{ \left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} \lambda(t,s) \right] \delta u_n(s) \right\} ds = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan Euler-Lagrange denklemi

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} \lambda(t,s) = 0$$

ve başlangıç koşulları

$$\lambda(t,s) \Big|_{s=t} = 0, \quad 1 - \frac{\delta}{\delta s} \lambda(t,s) \Big|_{s=t} = 0$$

biçiminde bulunur. Bu problem çözülerek $\lambda(t,s) = s - t$ sonucuna ulaşılır. Lagrange çarpanı (2.2.4) denkleminde yerine yazılarak iterasyon formülü,

$$\delta u_{n+1}(t) = \left[1 - \lambda''(t) + \frac{2}{t} \lambda(t) \right] \delta u_n(t) + \delta \lambda(t) u'_n(t) + \int_0^t \delta u_n \left[\lambda''(s) - 2 \frac{s \lambda'(s) - \lambda(s)}{s^2} \right] ds \quad (2.9)$$

olarak belirlenir. İlk yaklaşım fonksiyonu a, b sabitler olmak üzere

$$u_0(t) = at + b$$

şeklinde alınabilir. İlk yaklaşım fonksiyonunun problemin başlangıç koşullarını sağlaması gerektiğinden, $a = 0, b = 1$ bulunur. O halde $u_0(t) = 1$ olmalıdır. Böylece (2.9) iterasyon formülünden ikinci yaklaşım,

$$\begin{aligned}
u_1(t) &= u_0(t) + \int_0^t (s-t) \{u_0''(s) + u_0(s) - \cos(s)\} ds \\
&= 1 + \int_0^t (s-t) \{1 - \cos s\} ds = 2 - \frac{t^2}{2} - \cos t
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Üçüncü yaklaşım fonksiyonu u_2 , (2.9) iterasyon formülünde u_1 fonksiyonunun yerine yazılmasıyla elde edilir. Ancak burada u_1 fonksiyonundaki $\cos t$ ifadesi yerine $x=0$ noktası civarındaki seri açılımının ilk birkaç terimini almak, sonraki hesaplamaları kolaylaştıracaktır. O halde,

$$u_1(t) = 2 - \frac{t^2}{2} - \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \frac{t^6}{720}\right) = 1 - \frac{t^4}{24} + \frac{t^6}{720}$$

alalım. Buradan hesaplamalara devam edilerek

$$\begin{aligned}
u_2(t) &= 1 - \frac{t^4}{24} + \frac{t^6}{720} - \frac{t^8}{20160} \\
u_3(t) &= 1 - \frac{t^4}{24} + \frac{t^6}{720} - \frac{t^8}{13440}
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Bu sonuç problemin analitik çözümü olan

$$u(t) = \cos t + \frac{t}{2} \sin t$$

fonksiyonunun seri açılımının ilk dört terimiyle aynıdır.

Metot, kullanıcıyı ilk yaklaşım fonksiyonunu seçmekte özgür bırakır. Örneğin bu problemde ilk yaklaşım olarak istersek problemin homojen kısmının çözümü olan

$$u_0^*(t) = \cos t$$

fonksiyonunu da alabiliriz. Bu durumda

$$\begin{aligned}
u_1^*(t) &= u_0^*(t) + \int_0^t (s-t) \{u_0''(s) + u_0^*(s) - \cos s\} ds \\
&= \cos t - \int_0^t (s-t) \{\cos s\} ds \\
&= \cos t - \cos t + 1 = 1
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Dikkat edilirse

$$u_1^*(t) = u_0(t)$$

olarak bulundu. Yani, ilk yaklaşım fonksiyonunun bu seçimi, sonuca yaklaşımı bir adım geciktirmiş oldu. Ancak bu her problemde böyle olacağı anlamına gelmemelidir. İlk yaklaşım fonksiyonunun seçimi, yaklaşımı olumlu olarak da etkileyebilir. Ayrıca varyasyonel iterasyon metodunun başarısı, u_0 ilk yaklaşım fonksiyonunun seçimi kadar Lagrange çarpanının belirlenmesine de bağlıdır. Aslında, Lagrange çarpanı, denklemde yer alan en yüksek mertebeli türev hariç, diğer tüm terimlere kısıtlı varyasyon uygulanarak genellenebilir. Bunun için

$$\frac{d^m u}{dx^m} + Lu + Nu = f(x)$$

diferensiyel denklemini ve $y^{(k)}(x_0) = y_k$, $k = 0, 1, 2, \dots, m$ genel başlangıç koşullarını ele alalım. Buradan düzeltme fonksiyoneli

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda \left(\frac{d^m u}{dx^m} + L\tilde{u}_n(s) + N\tilde{u}_n(s) - f(s) \right) ds$$

biçiminde alırsak, varyasyon uygulandığında

$$\delta u_{n+1}(x) = \delta u_n(x) + \delta \int_0^x \lambda(x, s) \left(\frac{d^m u}{dx^m} \right) ds$$

olup; buradan Lagrange çarpanı

$$\frac{(-1)^m}{(m-1)!} (s-x)^{m-1}, \quad m \geq 1 \quad (2.10)$$

olarak bulunabilir. Dikkat edilirse yukarıdaki örnekte $m = 2$ olduğundan Lagrange çarpanı $\lambda = s - x$ bulunmuştur.

2.1.2 Varyasyonel İterasyon Metodunun Uygulamaları

Bu bölümde, varyasyonel iterasyon metodunu, bazı lineer ve nonlinear adi ve kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerini bulmak için nasıl kullanılacağına, örnek ile değineceğiz.

Örnek 2.2 [34]

$$\begin{cases} u'' - 6u^2 + 6 = 0 \\ u(0) = 2, u'(0) = 0 \end{cases}$$

sabit katsayılı nonlinear homojen olmayan başlangıç değer problemini ele alalım. Bu denkleme karşılık gelen düzeltme fonksiyoneli

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda(t, s) \{u_n''(s) - 6u_n^2(s) + 6\} ds \quad (2.11)$$

biçiminde alınırsa (2.10) eşitliğinden Lagrange çarpanı

$$\lambda(t, s) = s - t$$

olarak bulunur. Lagrange çarpanı (2.11) denkleminde yerine yazılarak iterasyon formülü,

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t (s - t) \{u_n''(s) - 6u_n^2(s) + 6\} ds \quad (2.12)$$

olarak belirlenir. İlk yaklaşım fonksiyonu, a, b sabitler olmak üzere yine

$$u_0(t) = at + b$$

şeklinde alınabilir. İlk yaklaşım fonksiyonunun problemin başlangıç koşullarını sağlaması gerektiğinden $a = 0, b = 1$ bulunur. O halde (2.12) iterasyon formülünden ikinci yaklaşım,

$$u_1(t) = u_0(t) + \int_0^t (s - t) \{u_0''(s) - 6u_0^2(s) + 6\} ds = 2 - 18 \int_0^t (s - t) ds = 2 + 9t^2$$

olarak elde edilir.

Üçüncü yaklaşım fonksiyonu u_2 , (2.12) iterasyon formülünde u_1 fonksiyonunun yerine yazılmasıyla

$$u_2(t) = 2 + 9t^2 + 18t^4 + \frac{81}{5}t^6$$

biçiminde elde edilir. Hesaplamalara devam edilerek

$$u_3(t) = 2 + 9t^2 + 18t^4 + \frac{153}{5}t^6 + \frac{1438}{35}t^8 + \frac{1026}{25}t^{10}$$

sonucuna ulaşılır. Bu problemin seri çözümü ise

$$u(t) = 2 + 9t^2 + 18t^4 + \frac{153}{5}t^6 + \frac{1674}{35}t^8 + \frac{12438}{175}t^{10} + o(t^{12})$$

biçimindedir. Metodu uygulamaya devam ettikçe elde edilen sonuçlar analitik çözüme yakınsayacaktır. Metodun başarısı Lagrange çarpanının seçimiyle alakalı olduğundan, her problem için (2.9) eşitliğini kullanmak doğru olmayabilir.

Örneğin;

$$u''(t) + \frac{2}{t}u'(t) + f(t, u) = g(t)$$

genel Lane-Emden denklemi için düzeltme fonksiyoneli

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda(s) \left[u_n''(s) + \frac{2}{s}u_n'(s) + \tilde{f}(s, u_n) - \tilde{g}(s) \right] ds$$

biçiminde alır ve varyasyon uygularsak

$$\delta u_{n+1}(t) = \delta u_n(t) + \delta \int_0^t \lambda(s) \left[u_n''(s) + \frac{2}{s}u_n'(s) \right] ds$$

elde ederiz ki bu,

$$\delta u_{n+1}(t) = \left[1 - \lambda''(t) + \frac{2}{t}\lambda'(t) \right] \delta u_n(t) + \delta \lambda(t) u_n'(t) + \int_0^t \delta u_n \left[\lambda''(s) - 2 \frac{s\lambda'(s) - \lambda(s)}{s^2} \right] ds$$

olup buradan Euler-Lagrange denklemi ve yan koşulları

$$\lambda''(t) - 2 \frac{t\lambda'(t) - \lambda(t)}{t^2} = 0$$

$$\lambda(t) = 0, \quad 1 - \lambda'(t) + \frac{2}{t} \lambda(t) = 0$$

olarak bulunur. Böylece Lagrange çarpanı, $\lambda(s) = \frac{s^2}{t} - s$ biçiminde hesaplanır.

2.2 Homotopi Pertürbasyon Metodu:

2.2.1 Homotopi Kavramı

Homotopi kavramı, 1895 yılında Henri Poincaré tarafından “*Analysis Situs*, Journalde l'École Polytechnique ser 2, 1 (1895) pages 1-123.” adlı makalede tanıtılmıştır. Homotopi, diferansiyel topolojinin önemli konularından biridir. Bu kavram daha sonra homotopinin temellerini oluşturmuştur. İki dönüşüm arasındaki homotopinin genel tanımı ise ilk olarak 1911 yılında L.E.J. Brouwer tarafından verilmiştir. İki matematiksel obje, biri diğerine sürekli olarak deforme oluyorsa *homotopiktirler* denir.

2.4.1 Tanım [36] $f : X \rightarrow Y, g : X \rightarrow Y$ sürekli dönüşümler, $I = [0,1]$ olsun. Her $x \in X$ için $H(x,0) = f(x)$ ve $H(x,1) = g(x)$ eşitliklerini sağlayan bir $H : X \times I \rightarrow Y$ sürekli dönüşümü varsa f ve g **homotopiktir** denir. Bu durumda H dönüşümüne f ve g arasında bir **homotopidir** denir.

2.4.1 Örnek [36] $X = Y = \mathbb{R}^n$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $f(x) = x$, $g(x) = 0$ biçiminde tanımlansın. $H : \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $H(x,t) = (1-t)f(x)$ ile tanımlanan H dönüşümü f ve g arasında bir homotopidir. İki fonksiyon arasında birden fazla homotopi tanımlanabilir. $H(x,t) = (1-t^2)f(x)$ ile tanımlanan $H(x,t) = (1-t^2)f(x)$ $H_1 : \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dönüşümü de f ve g arasında yine bir homotopidir.

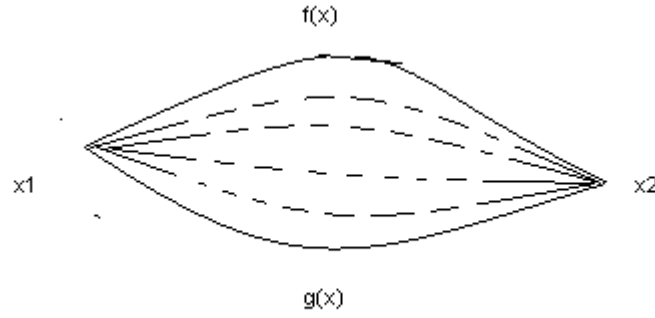
2.4.2 Örnek [36] $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ sürekli dönüşümler olsun. $H : X \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$, $H(x, 0) = f(x)$ ve $H(x, 1) = g(x)$ biçiminde tanımlanan H dönüşümü f ve g arasında bir homotopidir. Yani f ve g homotopiktir.

2.4.2 Tanım $f : X \rightarrow Y$ sürekli dönüşümü sabit bir dönüşüme homotopik ise f 'ye **null-homotopiktir** denir.

Bazı durumlarda homotopinin kısıtlanmış bir tipi göz önüne alınır. Bu kısıtlama altında bir alt kümenin deformasyonla sabit kalması istenir. Uç noktaları aynı x_1 ve x_2 olan basit f ve g yayları göz önüne alınsın. Yukarıda belirtilen yöntemle göre; 2.2. Şekilde gösterildiği gibi, ortadaki yay ailesinin her elemanının aynı x_1 ve x_2 uç noktalarına sahip olması şartıyla f , g 'ye sürekli deforme olsun. Bu durumda f ve g dönüşümleri, x_1 ve x_2 'yi kapsayan bir alt kümeye göre homotopiktir denir . Bu tanım aşağıdaki biçimde ifade edilir.

2.4.3. Tanım $f : X \rightarrow Y$, $g : X \rightarrow Y$ sürekli dönüşümler, $A \subseteq X$ olsun. Eğer her $t \in I$ ve her $x \in A$ için $H(a, t) = f(a) = g(a)$ olacak biçimde bir $H : X \times I \rightarrow Y$ homotopisi varsa f ve g **dönüşümleri A alt kümesine göre homotopiktir** denir.

2.4.4. Tanım f ve g , $I = [0, 1]$ aralığından X 'e tanımlanan sürekli dönüşümler olmak üzere; f ve g aynı x_0 başlangıç, x_1 bitiş noktalarına sahipler ve her $s, t \in I$ için $H(s, 0) = f(s)$ ve $H(s, 1) = g(s)$, $H(0, t) = x_0$ ve $H(1, t) = x_1$ olacak biçimde sürekli bir $H : I \times I \rightarrow X$ dönüşümü varsa H 'ye f ve g **arasında yol homotopisi** denir. f , g topolojide yol olarak adlandırıldıklarından oluşturulan homotopiye yol homotopisi denir.



Şekil 2.2: f ve g arasında bir homotopi

İlk koşul, H 'nin f ve g arasında bir homotopi olduğunu, ikinci koşul ise her t için $f_1(s) = H(s, t)$ denklemi ile tanımlanan f_1 yolunun x_0 'dan x_1 'e giden bir yol olduğunu belirtir. Başka bir deyişle, ilk koşul, H 'nin f 'den g 'ye deformasyonun sürekli bir yolunu temsil ederken ikinci koşul, yolun uç noktalarının deformasyon boyunca sabit kaldığını belirtir.

2.2.2 Pertürbasyon Teorisinin Genel Tanımı ve Tarihçesi

Pertürbasyon teorisi tam olarak çözülemeyen bir problemin yaklaşık çözümünü bulmak için kullanılan matematiksel metotlar içerir. Eğer problem, bir “küçük” terim eklenerek tam olarak çözülebilen probleme formüle ediliyorsa probleme pertürbasyon teorisi uygulanabilir. Pertürbasyon teorisi, problemin çözümünü, tam olarak çözülebilen problemden sapmayı ölçen bir “küçük” parametrenin kuvvet serisi cinsinden bulmayı amaçlar. Kuvvet serisindeki ilk terim, tam olarak çözülebilen problemin çözümü iken, diğer terimler, çözümde başlangıç problemine göre sapmayı tanımlarlar. A çözümüne yaklaşım için aşağıdaki küçük parametreye göre açılan (burada parametre ε 'dur) seri verilsin:

$$A = \varepsilon^0 A_0 + \varepsilon^1 A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots$$

Bu örnekte A_0 tam olarak çözülebilen başlangıç probleminin bilinen çözümünü ve $A_1, A_2, \dots$, bir sistematik yöntemle iteratif olarak bulunan daha yüksek dereceden çözümleri gösterir. ε 'un çok küçük olması durumunda, yukarıdaki serinin yakınsak olması, küçük ε değeri için bulunan daha yüksek dereceden çözümlerin daha az önemli olduğu anlamına gelir. Bir yaklaşık pertürbasyon çözümü, seriyi bir yerden sonra kesip, genelde sadece ilk iki terimi, başlangıç çözümü ve “birinci derece”

pertürbasyon düzeltmesini, bırakarak elde edilir. ε çok küçük olmasına rağmen, bazı problemlerde çözüm yakınsak olmayabilir. Birçok önemli problemde küçük pertürbasyonların verilmesi, çözümlerin niceleyici ve niteleyici özelliklerini ortaya koyar fakat bu özellikler, pertürbe edilmeyen problemlerin çözümlerinkilerden oldukça farklı olabilirler.

Örneğin;

$$u' + u - \varepsilon = 0, u(0) = 1$$

ve

$$u' - u - \varepsilon = 0, u(0) = 1$$

denklemleri göz önüne alınsın. Birinci denklemin çözümü $u(t) = \varepsilon + (1 - \varepsilon)e^{-t}$ iken pertürbe edilmemiş denklemin çözümü $u_0(t) = e^{-t}$ 'dir. $\varepsilon \ll 1$ olduğunda $|u(t) - u_0(t)| \leq \varepsilon$ için pertürbasyon çözümünün doğruluğu yüksektir. İkinci denklem için ise pertürbe edilmemiş problemin çözümü $u_0(t) = e^t$ 'dir ve $|u(t) - u_0(t)| = \varepsilon |1 - e^t|$ elde edilir. Burada, $t > 1$ olduğunda u_0 , denklemin yaklaşık çözümü olarak düşünülemez.

Pertürbasyon metotları, orjinal problemin, tam olarak çözmeye yetecek kadar basitleştirilmiş formuyla başlar. Genel yöntem, fen ve mühendislikte çok kullanılan matematiksel bir araçtır: basitleştirilmiş bir problemle başlamak ve aşamalı olarak düzeltmeler eklerken düzeltilmiş problemin giderek gerçeği temsil eden formüle yaklaşmasını sağlamak.

Hemen hemen bütün pertürbasyon metotları, bir denklemde küçük bir parametrenin olması gerektiği varsayımına dayanır. Bu küçük parametre varsayımı, pertürbasyon tekniklerinin uygulamalarını önemli ölçüde kısıtlar. Nonlineer problemlerin özellikle kuvvetli nonlineerliğe sahip olanların hepsinde küçük parametreler yoktur. Bir küçük parametrenin belirlenmesi zor ve özel teknikler gerektirir. Küçük parametrenin uygun seçimi ideal sonuçlar vermesine rağmen, uygunsuz seçimi de ciddi anlamda kötü sonuçlara yol açabilir. Uygun bir küçük parametre bulunsa bile, çoğu durumda, pertürbasyon metotları ile bulunan yaklaşık çözümler, sadece parametrenin küçük değerleri için geçerlidir. Örneğin, çoklu ölçek methoduyla (the method of multiple scales) çözülen yaklaşımlar, sistem parametresi küçük olduğu sürece geçerlidir.

Fakat yaklaşımlara da tamamen güvenilmez çünkü parametrenin ne kadar küçük olması gerektiğine dair bir kriter yoktur. Buna rağmen pertürbasyon teorisi, birçok dönemde, birçok farklı alanda kullanılmıştır. 20. Yüzyılın sonunda, kuantum fiziğinde pertürbasyon teorisi ile ilgili göze çarpan memnuniyetsizlik, sadece açılımda ikinci dereceden öteye gitmedeki zorlukları içermesi değil aynı zamanda pertürbatif açılımın yakınsak olup olmadığı hakkındaki sorularla da karşı karşıya kalınmasıdır. Bu da pertürbasyon metotlarının sınırlamaları olduğunu gösterir.

Pertürbasyon metotlarının kısıtlı olması, tam olarak çözülebilen modellerin çalışıldığı non-pertürbatif analiz alanına büyük bir ilgi duyulmasına yol açmıştır. Bu alandaki prototipik modeller; kuvvetli nonlinearliğe ve ilginç çözümlere sahip KDV denklemi ve sonsuz derecede pertürbasyon uygulanılsa bile pertürbasyon teorisi ile çözüme ulaşamayan solitonlardır.

Bu bölümde, topolojideki homotopi kavramı ile pertürbasyon tekniğini birleştirerek pertürbasyon metotlarının dezavantajlarını ortadan kaldıran ve sadece zayıf nonlinear denklemler için değil aynı zamanda kuvvetli nonlinearliğe sahip denklemler için de elde edilen çözümlerin, tüm çözüm bölgesinde geçerli olduğu, yarı analitik bir metot olan homotopi pertürbasyon metodu tanıtılacaktır.

2.2.3 Homotopi Pertürbasyon Metodunun Tanımı ve Uygulamaları

Homotopi, diferansiyel topolojinin önemli bir konusudur. Bir nonlinear cebirsel denklemin bütün köklerini bulmak için homotopi teknikleri uygulanabilir. Bunu göstermek için aşağıdaki denklem göz önüne alınsın:

$$f(x) = 0, x \in \mathbb{R} \quad (2.13)$$

Bu denklemde homotopiyi uygulayabilmek için, $p \in [0,1]$ bir gömme (embedding) parametresi, x_0 (2.13) denklemi'nin başlangıç yaklaşımı olmak üzere aşağıdaki $H : \mathbb{R} \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ homotopisi kurulabilir.

$$H(\xi, p) = pf(\xi) + (1-p)[f(\xi) - f(x_0)] = 0, \xi \in \mathbb{R}, p \in [0,1] \quad (2.13.a)$$

veya

$$H(\xi, p) = f(\xi) - f(x_0) + pf(x_0) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad p \in [0, 1] \quad (2.13.b)$$

Bu denklemlerden

$$H(\xi, 0) = f(\xi) - f(x_0) \quad (2.14)$$

$$H(\xi, 1) = f(\xi) = 0 \quad (2.15)$$

olduğu açıktır.

$p = 0$ 'dan $p = 1$ 'e değıştikçe, $H(\xi, p)$ değeri $f(\xi) - f(x_0)$ 'dan $f(\xi)$ 'ye değışir.

Bu bir topolojik deformasyondur. $f(\xi) - f(x_0)$ ve $f(\xi)$ de homotopiktirler.

$0 \leq p \leq 1$ olduğundan gömme (embedding) parametresi “küçük parametre” olarak düşünülebilir. Pertürbasyon tekniğı uygulanarak, (2.14) denkleminin çözümü aşağıdaki gibi p 'nin bir kuvvet serisi olarak yazılabilir;

$$\xi = \xi_0 + p\xi_1 + p^2\xi_2 + \dots \quad (2.16)$$

p parametresi 1 'e yakınsarken (2.13.a,b) denklemleri, (2.13) denkleminin karşı gelir ve (2.16) serisi, (2.13) denkleminin bir yaklaşık çözümü olur ve çözüm

$$x = \lim_{p \rightarrow 1} \xi = \xi_0 + \xi_1 + \xi_2 + \dots \quad (2.17)$$

olarak bulunur. (2.14) denkleminin yaklaşık çözümünü elde etmek için $f(\xi)$ fonksiyonu, ξ_0 noktası civarında Taylor serisine açılır;

$$f(\xi) = f(\xi_0) + f'(\xi_0)(p\xi_1 + p^2\xi_2 + \dots) + \frac{1}{2!} f''(\xi_0)(p\xi_1 + p^2\xi_2 + \dots)^2 + \dots \quad (2.18)$$

(2.18) eşitliğı, (2.13.b) eşitliğinde yerine konup, p 'nin kuvvetlerine göre katsayılar eşitlenerek

$$p^0 = f(\xi_0) - f(x_0) = 0 \quad (2.19)$$

$$p^1 = f'(\xi_0)\xi_1 + f(x_0) = 0 \quad (2.20)$$

$$p^2 = f'(\xi_0)\xi_2 + \frac{1}{2!}f''(\xi_0)\xi_1^2 = 0 \quad (2.21)$$

$$p^3 = f'(\xi_0)\xi_3 + \frac{1}{2!}f''(\xi_0)2\xi_1\xi_2 + \frac{1}{3!}f'''(\xi_0)\xi_1^3 = 0 \quad (2.22)$$

⋮

denklemleri elde edilir. İlk dört denklemden ξ_1, ξ_2, ξ_3 çözümlere

$$\xi_1 = -\frac{f(x_0)}{f'(\xi_0)}, \quad (2.23)$$

$$\xi_2 = -\frac{f''(\xi_0)\xi_1^2}{2!f'(\xi_0)} = -\frac{f''(\xi_0)}{2!f'(\xi_0)}\left(\frac{f(x_0)}{f'(\xi_0)}\right)^2, \quad (2.24)$$

ve

$$\xi_3 = -\frac{f''(\xi_0)\xi_1\xi_2}{f'(\xi_0)} - \frac{f'''(\xi_0)\xi_1^3}{3!f'(\xi_0)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{f''(\xi_0)}{f'(\xi_0)}\right)^2\left(\frac{f(x_0)}{f'(\xi_0)}\right)^3 + \frac{f'''(\xi_0)}{6f'(\xi_0)}\left(\frac{f(x_0)}{f'(\xi_0)}\right)^3 \quad (2.25)$$

bulunur.

$p=1$ iken birinci dereceden yaklaşık çözüm

$$x = \xi_0 + \xi_1 = \xi_0 - \frac{f(\xi_0)}{f'(\xi_0)} \quad (2.26)$$

biçiminde elde edilir. Bu çözüm

$$x_{n+1} = \xi_n - \frac{f(\xi_n)}{f'(\xi_n)}, \quad (2.27)$$

iterasyon formülü kullanılarak da yazılabilir. **(2.20)** denklemi'nin bir çözümü olan $\xi_0 = x_0$ da **(2.27)** denkleminde yerine konularak

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (2.28)$$

Newton İterasyon formülü elde edilir. Benzer olarak ikinci dereceden yaklaşık çözüm

$$x = \xi_0 + \xi_1 + \xi_2 \quad (2.29)$$

biçimindedir ve iterasyon formülüyle

$$x_{n+1} = \xi_n - \frac{f(\xi_n)}{f'(\xi_n)} - \frac{f''(\xi_n)}{2!f'(\xi_n)} \left(\frac{f(\xi_n)}{f'(\xi_n)} \right)^2 \quad (2.29.a)$$

veya

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(x_n)}{2!f'(x_n)} \left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right)^2 \quad (2.29.b)$$

şeklinde gösterilir. Üçüncü yaklaşık çözüm ise

$$x = \xi_0 + \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \quad (2.30)$$

olduğundan iterasyon formülüyle

$$x_{n+1} = \xi_n - \frac{f(\xi_n)}{f'(\xi_n)} - \frac{f''(\xi_n)}{2!f'(\xi_n)} \left(\frac{f(\xi_n)}{f'(\xi_n)} \right)^2 - \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{f''(\xi_n)}{f'(\xi_n)} \right)^2 - \frac{f'''(\xi_n)}{6f'(\xi_n)} \right\} \left(\frac{f(\xi_n)}{f'(\xi_n)} \right)^3 \quad (2.31.a)$$

veya

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(x_n)}{2!f'(x_n)} \left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right)^2 - \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)} \right)^2 - \frac{f'''(x_n)}{6f'(x_n)} \right\} \left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right)^3 \quad (2.31.b)$$

ile verilir.

3.3 Örnek [35]

$f(x) = x^2 + x - 2 = 0$ ikinci dereceden polinomunun çözümleri Homotopi pertürbasyon metodu kullanılarak aşağıdaki gibi bulunur; $x_0 = 0$ başlangıç çözümü ile başlanır ve

$$f(\xi_0) - f(x_0) = (\xi_0 - x_0)(\xi_0 + x_0 + 1) = 0$$

denklemini çözülürse; $\xi_0^{(1)} = 0$ ve $\xi_0^{(2)} = -1$ çözümleri bulunur. Bu çözümler ikinci dereceden yaklaşık çözüm için (2.29.a) iterasyon formülünde yerine konularak

$$x_1^{(1)} = \xi_0^{(1)} - \frac{f(\xi_0^{(1)})}{f'(\xi_0^{(1)})} - \frac{f''(\xi_0^{(1)})}{2f'(\xi_0^{(1)})} \left(\frac{f(\xi_0^{(1)})}{f'(\xi_0^{(1)})} \right)^2 = \frac{f(0)}{f'(0)} - \frac{f''(0)}{2f'(0)} \left(\frac{f(0)}{f'(0)} \right)^2 = -2$$

$$x_1^{(2)} = \xi_0^{(2)} - \frac{f(\xi_0^{(2)})}{f'(\xi_0^{(2)})} - \frac{f''(\xi_0^{(2)})}{2f'(\xi_0^{(2)})} \left(\frac{f(\xi_0^{(2)})}{f'(\xi_0^{(2)})} \right)^2 = \frac{f(1)}{f'(1)} - \frac{f''(1)}{2f'(1)} \left(\frac{f(1)}{f'(1)} \right)^2 = 1$$

$x_1^{(1)} = -2$, $x_1^{(2)} = 1$ çözümleri elde edilir. Bulunan çözümler denklemin tam çözümleridir.

2.2.4 Denklemin Çözümü İçin Homotopi Pertürbasyon Metodu

A genel bir diferansiyel operatör, B bir sınır operatörü, $f(r)$ bilinen bir analitik fonksiyon, G , W bölgesi'nin sınırı olmak üzere, aşağıdaki nonlinear diferansiyel denklem göz önüne alınsın;

$$A(u) - f(r) = 0, \quad r \in \Omega. \quad (2.32)$$

Sınır koşulları;

$$B(u, \partial u / \partial n) = 0, \quad r \in \Gamma, \quad (2.33)$$

A operatörü, L lineer ve N nonlinear operatör olmak üzere; L ve N gibi iki parçaya ayrılabilir. (2.32) denklemini aşağıdaki biçimde yeniden yazılabilir ;

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0 \quad (2.34)$$

Homotopi tekniğini kullanarak, $v: \Omega \times [0,1] \rightarrow R$ olmak üzere; $p \in [0,1]$ 'nin bir gömme parametresi, u_0 'ın (2.32) denkleminin sınır koşullarını sağlayan başlangıç yaklaşımı olduğu, (2.32.a) veya (2.32.b) denklemlerini sağlayan bir $H(v(r, p), p) = 0$ homotopisi oluşturulur.

$$H(v(r, p), p) = (1-p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0 \quad p \in [0,1] \quad (2.32.a)$$

veya

$$H(v(r, p), p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(v) - f(r)] = 0 \quad p \in [0,1] \quad (2.32.b)$$

(2.32.a) veya (2.32.b) denklemlerinden

$$H(v(r,0),0) = L(v) - L(u_0) = 0 \quad (2.33)$$

ve

$$H(v(r,1),1) = A(v) - f(r) = 0 \quad (2.34)$$

denklemleri elde edilir.

p parametresinin, $p = 0$ 'dan $p = 1$ 'e değişimi, $v(r, p)$ çözüm serisinin, $u_0(r)$ başlangıç yaklaşımından, denklemin çözümü olan $u(r)$ 'ye değişimini verir. Buna topolojide deformasyon denir. Ayrıca $L(v) - L(u_0) = 0$ ve $A(v) - f(r) = 0$ denklemlerine de "homotopiktirler" denir. Eğer $p; (0 \leq p \leq 1)$ gömme (embedding) parametresi "küçük parametre" olarak düşünülürse, klasik pertürbasyon tekniği uygulanarak, (2.34) denkleminin çözümü p 'nin kuvvet serisi olarak yazılabilir;

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 \dots \quad (2.35)$$

p parametresi 1'e yakınsarken (2.35) denklemi'nin yaklaşık çözümü ;

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 \dots \quad (2.36)$$

olarak bulunur.

He'nin homotopi pertürbasyon metodunun başlıca avantajlarından biri, pertürbasyon denkleminin topolojideki homotopi kavramını kullanarak, serbestçe birçok farklı şekilde oluşturulabilmesidir. Bu çalışmada homotopi pertürbasyon metodu, değişken katsayılı ısı-tipi ve dalga-tipi modellere uygulanmıştır.

3.2.2 Örnek [35]

Sınır koşulları:

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = e^t \quad (2.37)$$

başlangıç koşulu:

$$u(x,0) = x^2, \quad (2.38)$$

olan

$$u_t = \frac{1}{2}x^2 u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (2.39)$$

bir-boyutlu başlangıç ve sınır değer problemi homotopi pertürbasyon metodu ile aşağıdaki gibi çözülür.

He'nin homotopi pertürbasyon metoduna göre, aşağıdaki homotopi oluşturulur:

$$H(v, p) = \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} - p\left(\frac{1}{2}x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial u_0}{\partial t}\right) = 0 \quad (2.40)$$

Çözüm serisi

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + \dots \quad (2.41)$$

biçimindedir. (2.38) başlangıç koşulu göz önüne alınarak $u_0(x, t) = x^2$ seçilip, u_0 ve (2.41) denklemi, (2.40) denkleminde yerine konup p 'nin aynı kuvvetlerinin katsayıları eşitlenerek, aşağıdaki diferansiyel denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} p^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} = 0 & v_0(x, t) &= x^2, \\ p^1 &= \frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{1}{2}x^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - \frac{\partial u_0}{\partial t}, & v_1(x, 0) &= 0, \\ p^2 &= \frac{\partial v_2}{\partial t} = \frac{1}{2}x^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}, & v_2(x, 0) &= 0 \\ p^3 &= \frac{\partial v_3}{\partial t} = \frac{1}{2}x^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} & v_3(x, 0) &= 0, \\ p^4 &= \frac{\partial v_4}{\partial t} = \frac{1}{2}x^2 \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2}, & v_4(x, 0) &= 0, \\ &\vdots & & \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$p^n = \frac{\partial v_n}{\partial t} = \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2 v_{n-1}}{\partial x^2}, \quad v_n(x, 0) = 0, \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

$\vdots$

Sistem çözülerek

$$v_0(x, t) = x^2, \quad v_1(x, t) = x^2 t,$$

$$v_2(x, t) = \frac{x^2 t^2}{2!}, \quad v_3(x, t) = \frac{x^2 t^3}{3!},$$

$$v_4(x, t) = \frac{x^2 t^4}{4!},$$

$\vdots$

$$v_n(x, t) = \frac{x^2 t^n}{n!},$$

çözümleri elde edilir.

p parametresi 1'e yakınsarken **(2.39)** denkleminin çözümü;

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots \quad (2.43)$$

olmak üzere

$$u(x, t) = x^2 + x^2 t + \frac{x^2 t^2}{2!} + \frac{x^2 t^3}{3!} + \frac{x^2 t^4}{4!} + \dots + \frac{x^2 t^n}{n!} + \dots \quad (2.44)$$

bulunur. Bulunan bu seri çözümün kapalı formu

$$u(x, t) = x^2 e^t \quad (2.45)$$

incelenen problemin tam çözümünü verir.

2.3 Varyasyonel Homotopi Pertürbasyon Metodu

Varyasyonel homotopi pertürbasyon metodu varyasyonel iterasyon ve homotopi pertürbasyon yöntemlerinin birleştirilmesinden oluşan bir yöntemdir. Bu iki yöntemde Çinli araştırmacı J. H. He tarafından geliştirilmiş ve yayınlanmıştır. Bu yeni yöntem doğrusal ve doğrusal olmayan denklemlerin analitik veya yaklaşık çözümleri için herhangi bir kısıtlayıcı varsayım ve doğrusallaştırma gerektirmez. Yeni geliştirilmiş varyasyon homotopi pertürbasyon yönteminin temel kavramını göstermek için aşağıdaki genel diferansiyel denklemi baz alabiliriz.

$$Lu + Nu = g(x) \quad (2.46)$$

L liner, N nonlinear ve $g(x)$ homojen olmayan terimler olmak üzere varyasyonel (2.46) deki iterasyonel yöntemini kullanarak aşağıdaki gibi bir düzeltme fonksiyonu oluşturulursa:

$$u_{n+1}(x) = u_{n(x)} + \int_0^t \lambda(\tau) \{Lu_n + N\tilde{u}_n - g(\tau)\} d\tau \quad (2.47)$$

$\lambda(\tau)$ genel Lagrange Çarpanı olmak üzere, homotopi (2.47) deki pertürbasyon yöntemini uygularsak

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n = u_0(x) + p \int_0^t \lambda(\tau) \left\{ N \left(\sum_{n=0}^{\infty} p^n \tilde{u}_n \right) \right\} d\tau - \int_0^t \lambda(\tau) g(\tau) d\tau, \quad (2.48)$$

homotopisini elde ederiz.

n ; n . yaklaşım, $\tilde{u}_n$ kısıtlı varyasyonel, (2.47) numaralı denklem ise düzeltme fonksiyonudur.. Geliştirilen varyasyonel homotopi yöntemine (2.47) nolu düzeltme fonksiyonuna uygulanırsa aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$u_{0+} + pu_1 + p^2u_2 + \dots = u_0 + \int_0^t \lambda(\tau) L(u_{0+} + pu_1 + p^2u_2 + \dots) + (N\tilde{u}_0 + p(\sum_{k=0}^n a_k u^k)) - \int_0^t \lambda(\tau) g(\tau) d\tau$$

Bu denklem aşağıdaki gibi ifade edilirse;

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n = u_0(\tau) + \int_0^1 \lambda(\tau) p \left[\sum_{n=0}^{\infty} p^n Lu_n + \sum_{k=0}^n a_k u^k \right] d\tau - \int_0^t \lambda(\tau) g(\tau) d\tau \quad (2.49)$$

(2.49) numaralı denklem varyasyonel iterasyon ve homotopi pertürbasyon yöntemlerinin bağlantısını gösterir. p 'nin kuvvetlerinin katsayılarla karşılaştırılması çeşitli dereceden çözümler sunar bunun uygulaması;

$$\begin{aligned} p^0 : u_0 &= u_0(\tau) - \int_0^t \lambda(\tau) g(\tau) d\tau \\ p^1 : u_1 &= \int_0^t \lambda(\tau) (Lu_0 + a_0) d\tau \\ p^2 : u_2 &= \int_1^t \lambda(\tau) (Lu_1 + a_0 + a_1 u_1) d\tau \\ &\vdots \\ p^n : u_{n+1} &= \int_n^t \lambda(\tau) (Lu_n + \sum_{k=0}^n a_k u^k) d\tau \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir.

Örnek 4.1. [36]

$\frac{\partial u}{\partial t} + \mu u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ bir boyutlu Burgers denkleminine aşağıdaki değerlere göre VHPM uygularsak;

$$\mu = 1,$$

$$u(x, 0) = c \left[1 - \tanh\left(\frac{c}{2v} x\right) \right],$$

$v > 0$, c sabit ve x $0 \leq x \leq 1$ aralığında alırsak ve düzeltme fonksiyonunu aşağıdaki gibi seçersek

$$\sum_{i=0}^{\infty} p^i u_i = u(x, 0) - p \int_0^t \left[\mu \sum_{i=0}^{\infty} p^i u_i \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=0}^{\infty} p^i u_i - v \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{i=0}^{\infty} p^i u_i \right] dT$$

p 'nin kuvvet açılımlarını aşağıdaki gibi buluruz.

$$\begin{aligned} p^0 : u_0(x, t) &= u(x, 0) = c \left[1 - \tanh\left(\frac{c}{2v} x\right) \right] \\ p^1 : u_1(x, t) &= - \int_0^t (u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} - v \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}) dT \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{c^3 t}{2v} \sec h^2\left(\frac{cx}{2v}\right) \\
p^2 : u_2(x, t) &= - \int_0^t \left(u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} - u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} - v \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_1 \right) dT \\
&= \frac{c^5 t^2}{4v^2} \tanh\left(\frac{cx}{2v}\right) \sec h^2\left(\frac{cx}{2v}\right) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + \dots$$

Genel çözümün denkleminde ;

$$u(x, t) = c \left[1 - \tanh\left(\frac{c}{2v}(x - ct)\right) \right]$$

sonucu elde edilir.

3. YÖNTEMLER ÜZERİNE ÇALIŞMALARIMIZ

3.1 Benjamin-Bona-Mahony(BBM) Denkleminin Varyasyonel İterasyon Yöntemi ile çözümü:

$$\begin{cases} u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0 \\ u(x, 0) = \frac{3}{8} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{6}\right) \end{cases}$$

başlangıç koşulu ile verilen Benjamin-Bona-Mahony (BBM) denklemine varyasyonel iterasyon yöntemini uygulayıp, uyguladığımız yöntem ile bulmuş olduğumuz yaklaşık çözümü denklemin analitik çözümü olan

$$u(x, t) = \frac{3}{8} \operatorname{sech}^2\left(\frac{x}{6} - \frac{9t}{48}\right)$$

çözümü ile karşılaştırarak her bir iterasyon adımını ve bu adımlardaki analitik çözüme yaklaşıma oranlarını bulalım.

BBM denklemine karşılık gelen düzeltme fonksiyoneli

$$u_{n+1}(t) = u_n(x, t) + \int_0^t \lambda(u_x(x, \vartheta) + \tilde{u}_x(x, \vartheta) + u\tilde{u}_x(x, \vartheta) - \tilde{u}_{xxt}(x, \vartheta))d\vartheta$$

biçiminde alınırsa

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda(L u_n(\vartheta) + N u_n(\vartheta) - f(\vartheta))d\vartheta$$

yaklaşımından Lagrange çarpanı $\lambda = -1$ olarak bulunur.

$$u_0 = \frac{3}{8} \operatorname{sech}^2(x/6),$$

$$\begin{aligned}
u_1 = & \frac{3}{8} \sec h^2(x/6) + \frac{1}{8} \sec h^2(x/6) \tanh(x/6) \frac{11t^2 \cosh(x/3) \operatorname{sech}^8(x/6)}{2048} + \frac{3}{64} \\
& + \sec h^4(x/6) \tanh(x/6) \\
u_2 = & \frac{3}{8} \sec h^2(x/6) - \frac{29t^2 \sec h^8(x/6)}{1536} - \frac{t^2 \cosh(x) \operatorname{sech}^8(x/6)}{1536} - \frac{t \sinh(x/2) \operatorname{sech}^7(x/6)}{384} \\
& - \frac{5t^3 \sinh(x/2) \operatorname{sech}^{11}(x/6)}{12288} + \frac{\operatorname{sech}^7(x/6) \sinh(5x/6)}{1152} + \frac{7t^3 \operatorname{sech}^{11}(x/6) \sinh(5x/6)}{73728} \\
& + \frac{t^3 \operatorname{sech}^{11}(x/6) \sinh(7x/6)}{36864} + \frac{t \operatorname{sech}^2(x/6) \tanh(x/6)}{8} + \frac{3t \operatorname{sech}^4(x/6) \tanh(x/6)}{64} \\
& - \frac{49t \operatorname{sech}^6(x/6) \tanh(x/6)}{1152} - \frac{5t^3 \operatorname{sech}^{10}(x/6) \tanh(x/6)}{4608}
\end{aligned}$$

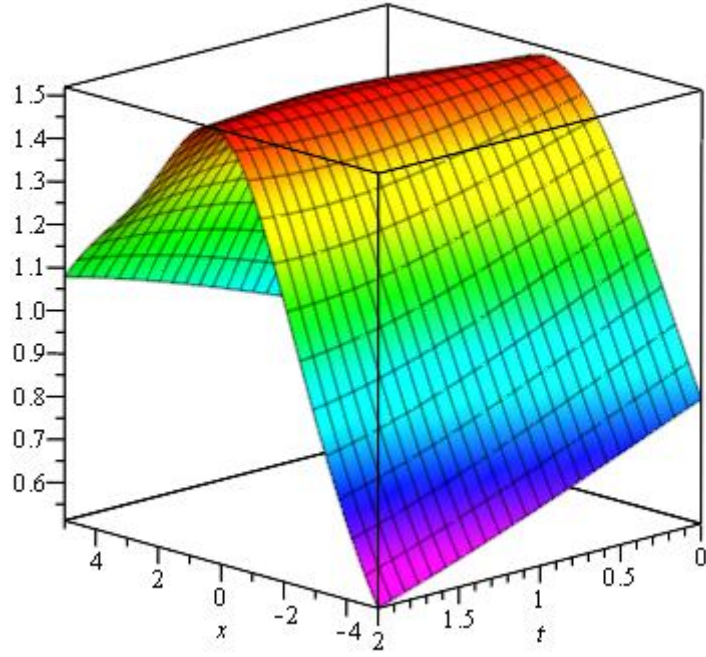
Burada u_0 , u_1 , u_2 çözümleri sagamath programı kullanılarak elde edilmiştir.

Bulmuş olduğumuz ilk 3 iterasyon adımının gerçek çözüm ile karşılaştırması Tablo 1 de verilmiştir. Gerçek ve nümerik çözümlere ait grafikler ise karşılaştırma tablosunun altında yer almaktadır.

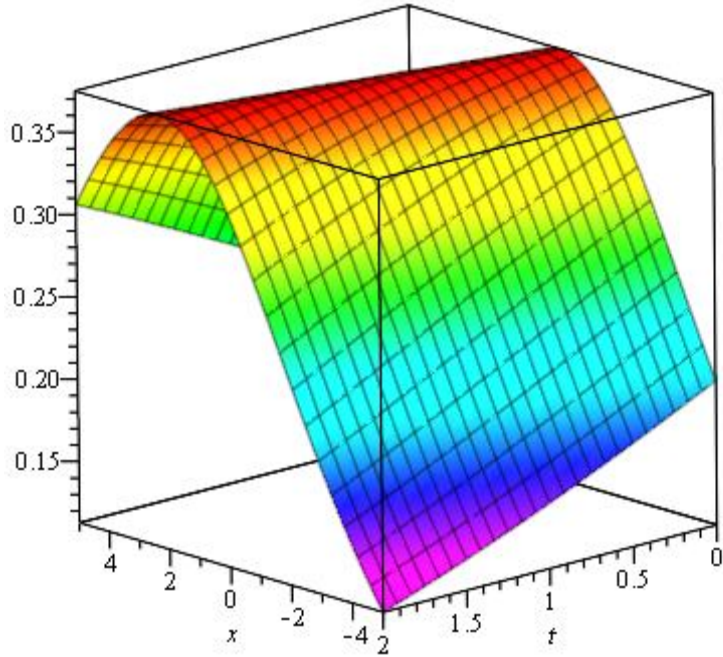
Benjamin-Bona-Mahony (BBM) sayısal çözümünü varyasyonel iterasyon yöntemi ile incelediğimiz zaman varyasyonel iterasyon yönteminin ilk üç adımında gerçek çözüme çok yakın oranda yaklaşıldığı görüldü. İlk üç adımlik iterasyon bizim için yeterli oldu iterasyon adımı arttıkça yaklaşık çözümden uzaklaşıldığı görüldü.

Çizelge3.1: $t = 0.3$ anında $u(x, t)$ için analitik ve gerçek çözümlerinin Karşılaştırılması

İterasyon Adımları	Analitik Çözüm	Yaklaşık Çözüm	Hata oranı
1	0.3744130480984604	0.3749087945773747	0.132
2	0.3748031288271494	0.3753474930952519	0.145
3	0.3749853519439612	0.3755732140104781	0.157
4	0.3749593128390916	0.3755850140915104	0.167
5	0.3747250693480553	0.3753824958262723	0.175
5	0.3742831414788761	0.3749658146647877	0.182
7	0.3736345089609346	0.3743356821947829	0.188
8	0.3727806066352829	0.3734933651596483	0.191
9	0.3717233177235947	0.3724406803001826	0.193
10	0.3704649650298208	0.3711799850738664	0.193



Şekil3.1 $-5 < x < 5$ ve $0 < t < 2$ aralığındaki u analitik çözümünün grafiği.



Şekil3.2 $-5 < x < 5$ ve $0 < t < 2$ aralığındaki $u = u_1 + u_2 + u_3$ yaklaşık çözümünün grafiği

3.2 Homotopi Pertürbasyon Yöntemi ile (2+1) Boyutlu Broer Kaup sisteminin Çözümü

$$\begin{cases} u_{yt} + 2v_{xx} + (u^2)_{xy} - 3u_{xxy} = 0 \\ v_t + v_{xx} + 2(uv)_x = 0 \end{cases}$$

(2+1) Boyutlu Broer-Kaup sisteminin analitik çözümü

$$u(x, y, t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x + y + t},$$

$$v(x, y, t) = -\frac{1}{(x + y + t)^2},$$

ve başlangıç koşulları;

$$u = u_0(x, y, t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x + y},$$

$$v = v_0(x, y, t) = -\frac{1}{(x + y)^2}$$

olarak verilen (2+1) boyutlu Broer-Kaup sisteminin çözümü sagamath programı kullanılarak aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$u_0(x, y, t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x + y},$$

$$v_0(x, y, t) = -\frac{1}{(x + y)^2},$$

$$u_1(x, y, t) = 1/3t((3x + 3y - 4)/(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) + 4/(x + y)^3)$$

$$v_1(x, y, t) = 4t((1/(x + y) - 0.5)/(x + y)^3 - 1/(x + y)^4)$$

$$u_2(x, y, t) = -1/2t^2((15x + 15y - 16)/(x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5) - 9/(x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4) + 16/(x + y)^5) + 6/5t^2((5x + 5y - 8)/(x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5) + 8/(x + y)^5) + 1/2t^2(2x + 2y - 3)/(x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4) - 3/2t^2/(x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4)$$

$$\begin{aligned}
v_2(x, y, t) = & -12t^2(1/(x+y)-0.5)((1/(x+y)-0.5)/(x+y)^4 - 1/(x+y)^5) \\
& + 24t^2((1/(x+y)-0.5)/(x+y)^5 - 1/(x+y)^6) + t^2((x^2 + 2xy + y^2) \\
& (3x+3y-4)/(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)^2 - 1/(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) \\
& + 4/(x+y)^4/(x+y)^2 - 4t^2((1/(x+y)-0.5)/(x+y)^3 - 1/(x+y)^4) \\
& /(x+y)^2 + 2/3t^2((3x+3y-4)/(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) + 4/(x+y)^3/(x+y)^3
\end{aligned}$$

$$u(x, y, t) = u_0 + u_1 + u_2$$

$$v(x, y, t) = v_0 + v_1 + v_2$$

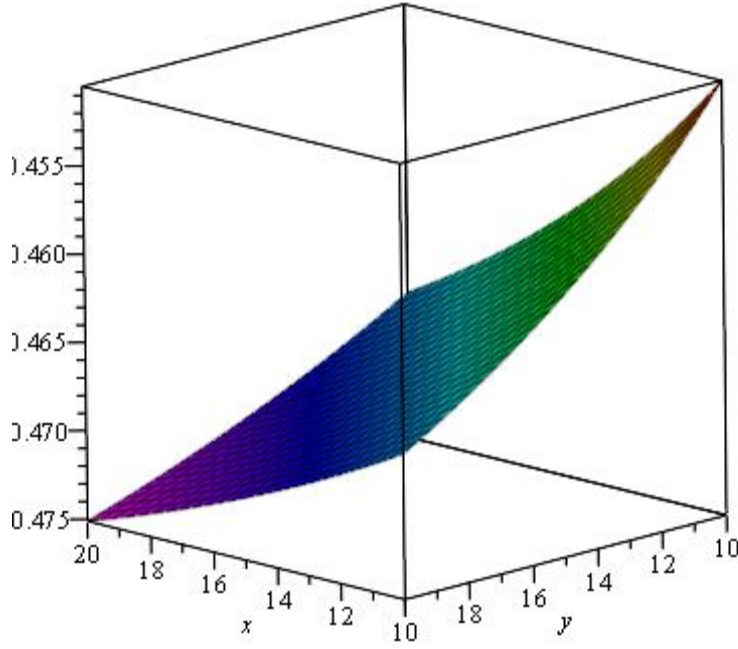
Çözümleri ele alınarak analitik çözüm ve numerik çözümün yaklaşım oranlarının karşılaştırmaları Çizelge 3.2 de şekilsel olarak karşılaştırılmaları ise grafiklerle gösterilmiştir.

Çizelge3.2: $x = 10, y = 10, t = 0.002$ anındaki v için analitik çözümün ve yaklaşık çözümün karşılaştırılması.

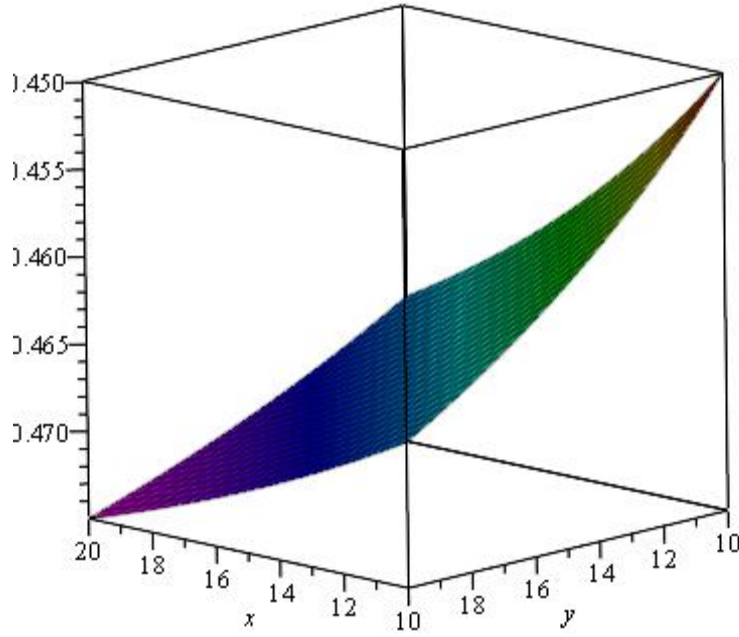
İterasyon Adımları	Analitik Çözüm	Yaklaşık Çözüm	Hata Oranı
1	-0.0020657400963	-0.0020664914111	0.03637024883
2	-0.0017358217954	-0.0017364004991	0.03333888958
3	-0.0014790623840	-0.0014795175501	0.03077396504
4	-0.0012753280078	-0.0012756924393	0.02857551064
5	-0.0011109629777	-0.0011112592740	0.02667022257
6	-0.0009764404411	-0.0009766845817	0.02500312529
7	-0.0008649501412	-0.0008651536829	0.02353218017
8	-0.0007715192115	-0.0007716906792	0.02222469156
9	-0.0006924478844	-0.0006925936783	0.02105484782
10	-0.0006249375046	-0.0006250625046	0.02000200015

Çizelge3.3: $x = 10, y = 10, t = 0.002$ anındaki u için analitik çözümün ve yaklaşık çözümün karşılaştırılması.

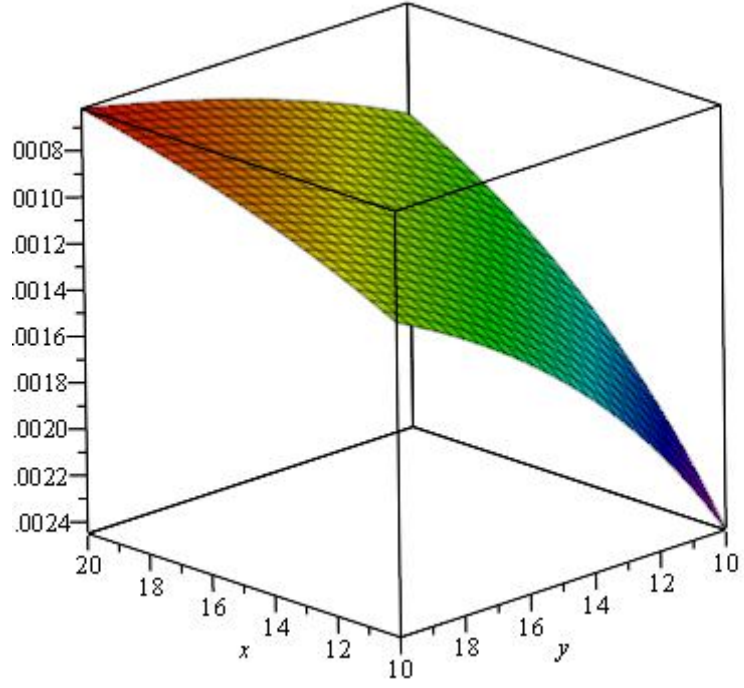
İterasyon Adımları	Analitik Çözüm	Yaklaşık Çözüm	Hata Oranı
1	-0.454549586401	-0.454541321938	0.001818165305
2	-0.458336805266	-0.458329860822	0.001515140048
3	-0.461541419891	-0.461535502731	0.001282043072
4	-0.464288265124	-0.464283163083	0.001098895067
5	-0.466668888741	-0.466664444296	0.000952376421
6	-0.468751953003	-0.468748046753	0.000833329864
7	-0.470589965296	-0.470586505089	0.000735291417
8	-0.472223765346	-0.472220678927	0.000653592637
9	-0.473685595495	-0.473682825412	0.000584793613
10	-0.475001249938	-0.474998749937	0.000526314405



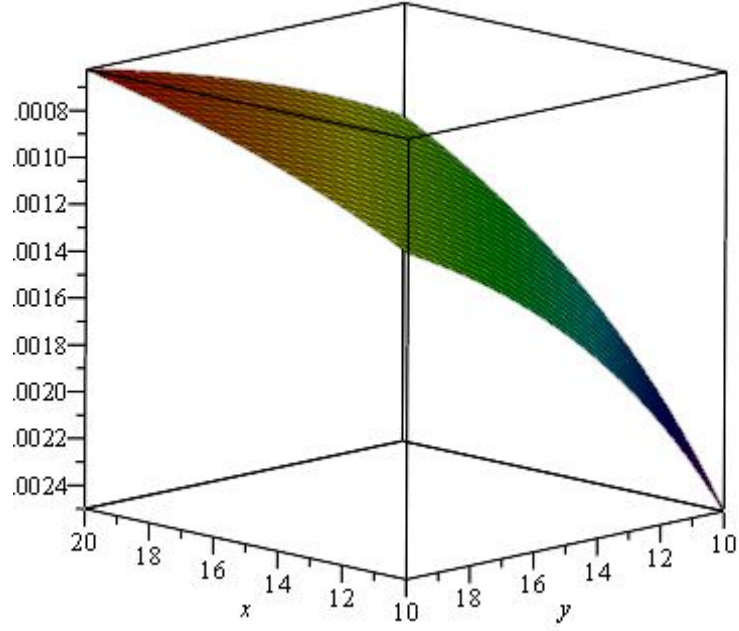
Şekil3.3 $10 < x < 20$ ve $10 < y < 20$ aralığındaki u analitik çözümünün grafiği



Şekil3.4 $10 < x < 20$ ve $10 < y < 20$ aralığındaki $u = u_1 + u_2 + u_3$ yaklaşık çözümünün grafiği



Şekil3.5 $10 < x < 20$ ve $10 < y < 20$ aralığındaki v analitik çözümünün grafiği



Şekil3.6 $10 < x < 20$ ve $10 < y < 20$ aralığındaki $v = v_1 + v_2 + v_3$ yaklaşık çözümünün grafiği

3.3 Homotopi Pertürbasyon Yöntemi İle Solitary Denkleminin Çözümü

$$u(x, y, t) = -\frac{1}{2} + \tanh(x + y + t),$$

$$v(x, y, t) = 1 - \tanh^2(x + y + t)$$

analitik çözümleri yukarıdaki gibi olan (2+1) BK denkleminin homotopi pertürbasyon yöntemi ile yaklaşık çözümü için aşağıdaki başlangıç koşullarını alarak çözümünü yaparsak;

$$u_0 = \tanh(x + y) - 0.5,$$

$$v_0 = 1 - \tanh(x + y)^2,$$

$$u_1 = -\frac{2}{3}t(3x + 3y + 8(3e^{(-2x-2y)} + 3e^{(-4x-4y)} + 2) / 3e^{(-2x-2y)} + 3e^{(-4x-4y)} + e^{(-6x-6y)} + 1) + 6e^{(-2x-2y)} / (e^{(-2x-2y)} / (2e^{(-2x-2y)} + e^{(-4x-4y)} + 1) - 12e^{(-4x-4y)} / (3e^{(-2x-2y)} + 3e^{(-4x-4y)} + e^{(-6x-6y)} + 1) - 4 / (3e^{(-2x-2y)} + 3e^{(-4x-4y)} + e^{(-6x-6y)} + 1) - 12 / (e^{(-2x-2y)} + 1) + 3 \log(e^{(-2x-2y)} + 1) - 3 \log(\cosh(x + y))),$$

$$v_1 = 2(\tanh(x + y)^2 - 1)(2 \tanh(x + y) - 1) \tanh(x + y) - 2(\tanh(x + y)^2 - 1) \tanh(x + y)^2 t,$$

$$v_2(x, y, t) = 4 / 3(\tanh(x + y)^2 - 1)t^2(3x + 3y + 8(3e^{(-2x-2y)} + 3e^{(-4x-4y)} + 2) / (3e^{(-2x-2y)} + 3e^{(-4x-4y)} + e^{(-6x-6y)} + 1) + 6e^{(-2x-2y)} / (2e^{(-2x-2y)} + e^{(-4x-4y)} + 1) - 12e^{(-4x-4y)} / (3e^{(-2x-2y)} + 3e^{(-4x-4y)} + e^{(-6x-6y)} + 1) - 4 / (3e^{(-2x-2y)} + 3e^{(-4x-4y)} + e^{(-6x-6y)} + 1) - 12 / (e^{(-2x-2y)} + 1) + 3 \log(e^{(-2x-2y)} + 1) - 3 \log(\cosh(x + y))) \tanh(x + y) - 2((\tanh(x + y)^2 - 1)(2 \tanh(x + y) - 1) \tanh(x + y) - 2((\tanh(x + y)^2 - 1) \tanh(x + y)^2 (\tanh(x + y)^2 - 1)t^2 + 2(\tanh(x + y)^2 - 1)t^2(16(3e^{(-2x-2y)} + 3e^{(-4x-4y)} + 2)(e^{(-2x-2y)} + 2e^{(-4x-4y)} + e^{(-6x-6y)})) / (3e^{(-2x-2y)} + 3e^{(-4x-4y)} + e^{(-6x-6y)} + 1))^2 - 16(e^{(-2x-2y)} + 2e^{(-4x-4y)})) / (3e^{(-2x-2y)} + 3e^{(-4x-4y)} + e^{(-6x-6y)} + 1) - 4e^{(-2x-2y)} / (2e^{(-2x-2y)} + e^{(-4x-4y)} + 1))$$

$$\begin{aligned}
& +8(e^{(-2x-2y)} + e^{(-4x-4y)})e^{(-2x-2y)} / e^{(-4x-4y)} + e^{(-6x-6y)} + 1)^2 \\
& -2e^{(-2x-2y)} / (e^{(-2x-2y)} + 1) + 16e^{(-4x-4y)} / (3e^{(-2x-2y)} + 3e^{(-4x-4y)} \\
& + e^{(-6x-6y)} + 1) - 24(e^{(-2x-2y)} + 2e^{(-4x-4y)} + e^{(-6x-6y)})e^{(-4x-4y)} / \\
& (3e^{(-2x-2y)} + 3e^{(-4x-4y)} + e^{(-6x-6y)} + 1)^2 - \sin(x+y) / \cosh(x+y) \\
& -8(e^{(-2x-2y)} + 2e^{(-4x-4y)} + e^{(-6x-6y)}) / (3e^{(-2x-2y)} + 3e^{(-4x-4y)} \\
& + e^{(-6x-6y)} + 1)^2 - 8e^{(-2x-2y)} / (e^{(-2x-2y)} + 1)^2 + 1 - 2(2(\tanh(x+y))^2 - 1) \\
& (2 \tanh(x+y) - 1) \tanh(x+y)^2 - 4(\tanh(x+y)^2 - 1) \tanh(x+y)^3 + (\tanh(x+y)^2 - 1)^2 \\
& (2 \tanh(x+y) - 1) - 2(\tanh(x+y)^2 - 1)^2 \tanh(x+y) t^2 (\tanh(x+y) - 0.5) + \\
& 4(\tanh(x+y)^2 - 1)(2 \tanh(x+y) - 1) \tanh(x+y)^3 - 2(\tanh(x+y)^2 - 1) \tanh(x+y)^4 \\
& + 2(\tanh(x+y)^2 - 1)^2 (2 \tanh(x+y) - 1) \tanh(x+y) - 42(\tanh(x+y)^2 - 1)^2 \\
& \tanh(x+y)^2 t^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2(x, y, t) = & -2t^2(x+y-176e^{(-2x-2y)} / 5e^{(-2x-2y)} + 10e^{(-4x-4y)} + 10e^{(-6x-6y)} \\
& + 5e^{(-8x-8y)} + 10e^{(-10x-10y)} + 1) + 512e^{(-2x-2y)} / 4(e^{(-2x-2y)} + 6e^{(-4x-4y)} \\
& + 4e^{(-6x-6y)} + e^{(-8x-8y)} + 1) - 360e^{(-2x-2y)} / 3(e^{(-2x-2y)} + 3e^{(-4x-4y)} + \\
& 4e^{(-6x-6y)} + 1) + 42e^{(-2x-2y)} / (2e^{(-2x-2y)} + e^{(-4x-4y)} + 1) - 448e^{(-4x-4y)} \\
& / (5e^{(-2x-2y)} + 10e^{(-4x-4y)} + 10e^{(-6x-6y)} + 5e^{(-8x-8y)} + 10e^{(-10x-10y)} + 1) \\
& + 840e^{(-4x-4y)} / (4e^{(-2x-2y)} + 6e^{(-4x-4y)} + 4e^{(-6x-6y)} + e^{(-8x-8y)} + 1) \\
& - 272e^{(-4x-4y)} / (3e^{(-2x-2y)} + 3e^{(-4x-4y)} + e^{(-6x-6y)} + 1) - 528e^{(-6x-6y)} / \\
& (5e^{(-2x-2y)} + 10e^{(-4x-4y)} + 10e^{(-6x-6y)} + 5e^{(-8x-8y)} + 10e^{(-10x-10y)} + 1) \\
& + 432e^{(-6x-6y)} / (4e^{(-2x-2y)} + 6e^{(-4x-4y)} + 4e^{(-6x-6y)} + e^{(-8x-8y)} + 1) \\
& - 216e^{(-8x-8y)} / (5e^{(-2x-2y)} + 10e^{(-4x-4y)} + 10e^{(-6x-6y)} + 5e^{(-8x-8y)} \\
& + 10e^{(-10x-10y)} + 1) - 40 / (5e^{(-2x-2y)} + 10e^{(-4x-4y)} + 10e^{(-6x-6y)} + \\
& 5e^{(-8x-8y)} + 10e^{(-10x-10y)} + 1) + 128 / (4e^{(-2x-2y)} + 6e^{(-4x-4y)} + 4e^{(-6x-6y)} \\
& + e^{(-8x-8y)} + 1) - 120 / (3e^{(-2x-2y)} + 3e^{(-4x-4y)} + e^{(-6x-6y)} + 1) + 28 / (2e^{(-2x-2y)} \\
& + e^{(-4x-4y)} + 1) + 10 / (e^{(-2x-2y)} + 1) - 22 / (e^{(-2x-2y)} + 1)^2 + 16 / (e^{(-2x-2y)} + 1)^3 \\
& + \log(e^{(-2x-2y)} + 1) - \log(\cosh(x+y))) - 16t^2(e^{(-2x-2y)} / (5e^{(-2x-2y)} + 10e^{(-4x-4y)} \\
& + 10e^{(-6x-6y)} + 5e^{(-8x-8y)} + e^{(-10x-10y)} + 1) - 3e^{(-4x-4y)} / (5e^{(-2x-2y)} \\
& + 10e^{(-4x-4y)} + 10e^{(-6x-6y)} + 5e^{(-8x-8y)} + e^{(-10x-10y)} + 1) - 3e^{(-6x-6y)} \\
& / (5e^{(-2x-2y)} + 10e^{(-4x-4y)} + 10e^{(-6x-6y)} + 5e^{(-8x-8y)} + e^{(-10x-10y)} + 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +e^{(-8x-8y)} / (5e^{(-2x-2y)} + 10e^{(-4x-4y)} + 10e^{(-6x-6y)} + 5e^{(-8x-8y)} \\
& +e^{(-10x-10y)} + 1) + 4t^2 (e^{(-2x-2y)} / 4e^{(-2x-2y)} + 6e^{(-4x-4y)} + 4e^{(-6x-6y)} \\
& +e^{(-8x-8y)} + 1) - 2(e^{(-4x-4y)} / 4e^{(-2x-2y)} + 6e^{(-4x-4y)} + 4e^{(-6x-6y)} \\
& +e^{(-8x-8y)} + 1) + 3e^{(-6x-6y)} / (4e^{(-2x-2y)} + 6e^{(-4x-4y)} + 4e^{(-6x-6y)} \\
& +e^{(-8x-8y)} + 1) - 8((2e^{4x} \log(2) + e^{4x})e^{4y} + e^{(6x+6y)} \log(2) + e^{(2x+2y)} \log(2))t^2 \\
& / e^{(8x+8y)} + 4e^{(6x+6y)} + 6e^{(4x+4y)} + 4e^{(2x+2y)} + 1) - 16t^2 (e^{(-4x-4y)} / \\
& / 4e^{(-2x-2y)} + 6e^{(-4x-4y)} + 4e^{(-6x-6y)} + e^{(-8x-8y)} + 1)
\end{aligned}$$

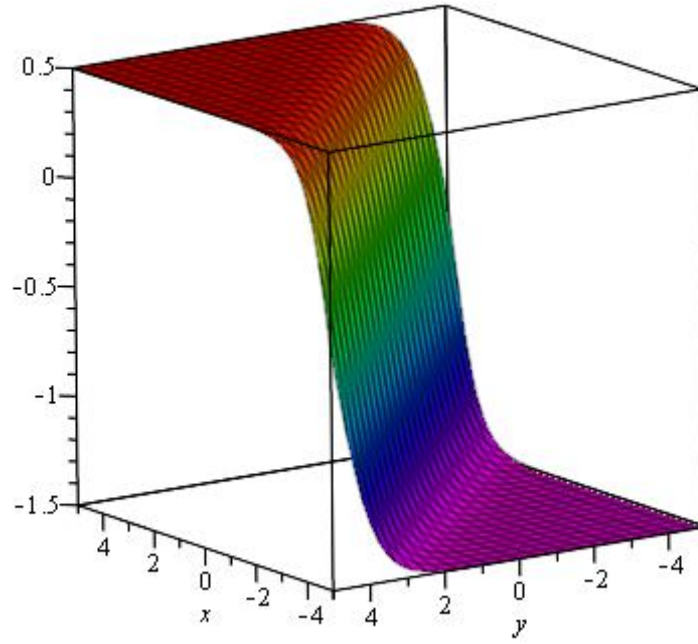
Olarak u_0, u_1, u_2 çözümlerini sagamath programını kullanarak bulduk. Burdan bulduğumuz yaklaşık çözüm ve analitik çözüm grafikler ve Tablo ile aşağıda karşılaştırılmıştır.

Çizelge3.3: $x=10, y=10, t=0.003$ anındaki v için analitik çözümün ve yaklaşık çözümün karşılaştırılması.

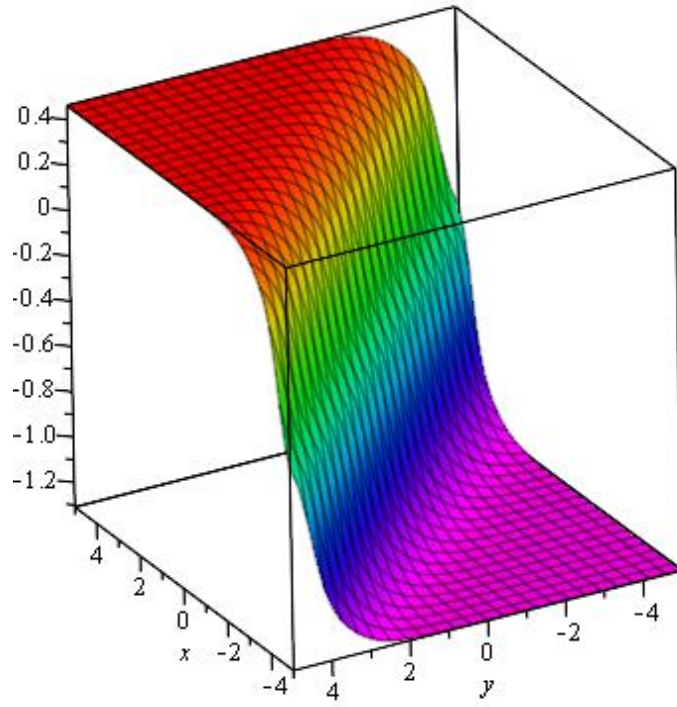
İterasyon Adımları	Analitik Çözüm	Yaklaşık Çözüm	Hata Oranı
1	0.96179832893	0.960278721894	0.157996431328
2	0.999996000011	0.999995977819	0.0221914652798
3	0.960280847218	0.961800416589	0.158242182514
4	0.854336454938	0.856940836132	0.304842568725
5	0.710048773599	0.713110226318	0.431160905104
6	0.557570959586	0.560544946332	0.000833329864
7	0.418696185734	0.421258542871	0.611984829338
8	0.304004194388	0.306041276622	0.670083594667
9	0.215388143121	0.216921243725	0.711785050829
10	0.149973063033	0.151084499089	0.741090455315

Çizelge3.4: $x=10, y=10, t=0.003$ anındaki u için analitik çözümün ve yaklaşık çözümün karşılaştırılması.

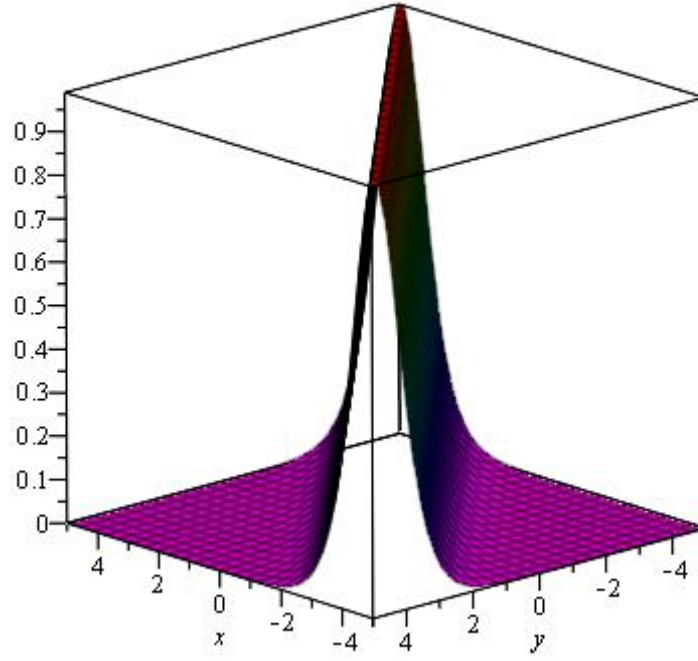
İterasyon Adımları	Analitik Çözüm	Yaklaşık Çözüm	Hata Oranı
1	0.499331976287	0.496548036946	0.557532758523
2	0.499987760706	0.497209094213	0.555746902418
3	0.499999775828	0.497221205976	0.555714219593
4	0.499999995894	0.497221427812	0.555713620995
5	0.499999999925	0.497221431875	0.555713610031
6	0.499999999999	0.497221431949	0.55571360983
7	0.500000000000	0.497221431951	0.555713609827
8	0.500000000000	0.497221431951	0.555713609827
9	0.500000000000	0.497221431951	0.555713609827
10	0.500000000000	0.497221431951	0.555713609827



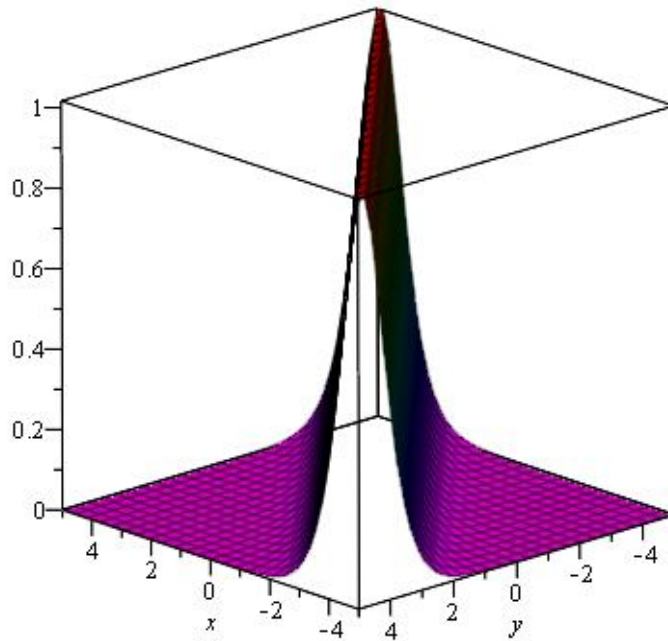
Şekil3.7 $-5 < x < 5$ ve $-5 < y < 5$ aralığındaki u analitik çözümünün grafiği



Şekil3.8 $-5 < x < 5$ ve $-5 < y < 5$ aralığındaki $u = u_1 + u_2 + u_3$ yaklaşık çözümünün grafiği



Şekil3.9 $-5 < x < 5$ ve $-5 < y < 5$ aralığındaki v analitik çözümünün grafiği



Şekil3.10 $-5 < x < 5$ ve $-5 < y < 5$ aralığındaki $v = v_1 + v_2 + v_3$ yaklaşık çözümünün grafiği

3.4 Benjamin-Bona-Mohony Denkleminin varyasyonel homotopi pertürbasyon yöntemi ile çözülmesi:

$$\begin{cases} u_t + u_x + uu_x - u_{xxx} = 0 \\ u(x, 0) = \frac{3}{8} \sec h^2\left(\frac{x}{6}\right) \end{cases}$$

başlangıç koşulu ile verilen Benjamin-Bona-Mahony (BBM) denkleminin varyasyonel homotopi yöntemini uyguluyarak.

$$u(x, t) = \frac{3}{8} \sec h^2\left(\frac{x}{6} - \frac{9t}{48}\right)$$

analitik çözümüne yaklaştırmaya çalışalım.

Varyasyonel homotopi pertürbasyon yöntemini uygulayarak;

$$u_{n+1}(t) = u_n + \int_0^t \lambda(\tau) [u_{nt} + u_{nx} + u_n u_{nx} - u_{xxx}] d\tau$$

Düzeltilme fonksiyonumuzu ;

$$\delta u_{n+1}(x, t) = \delta u_n(x, t) + \int_0^t \lambda(\tau) [\delta u_{nt} + \delta u_{nx} + \delta u_n u_{nx} - \delta u_{xxx}] d\tau$$

yukarıdaki şekilde yazarsak;

$$\begin{aligned} \delta u_{n+1}(x, t) &= \delta u_n(x, t) + \lambda(\tau) \delta u_n(x, t) \Big|_{n=0}^t - \lambda(\tau) \delta u_{xxx}(x, t) \Big|_{n=0}^t \\ &- \int_0^t \{ \lambda'(n) \delta u_n - \lambda'(n) \delta u_{nx} + \delta u_{nx} + \delta u_n u_{nx} \} d\tau \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece

$$\begin{cases} 1 + \lambda(n) \Big|_{n=t} = 0 \\ \lambda' = 0 \end{cases} \rightarrow \lambda = -1$$

bulunur.

$$u_{n+1}(t) = u_n(x, t) - \int_0^t \lambda(\tau) \{ u_{nt}(x, n) + u_{nx}(x, n) + u_n u_{nx}(x, n) - u_{xxx}(x, n) \} dn$$

Yukarıdaki düzeltme fonksiyonumuza homotopi uygular isek

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} p^i u_i &= f(x) - p \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=0}^{\infty} p^i u_i + \left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i u_i \right) \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=0}^{\infty} p^i u_i - \frac{\partial u}{\partial x^2} \\ &\left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \sum_{i=0}^{\infty} p^i u_i \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ p^0 &= u_0(x, x) = u(x, 0) = \frac{3}{8} \sec h^2(x / 6) = f(x, y) \end{aligned}$$

$$(p^0 u_0 + p u_1 + p^2 u_2 + p^3 u_3) = f(x, y) - p \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} (p^0 u_0 + p u_1 + p^2 u_2 + p^3 u_3) +$$

$$(p^0 u_0 + p u_1 + p^2 u_2 + p^3 u_3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (p^0 u_0 + p u_1 + p^2 u_2 + p^3 u_3) - \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial t} (p^0 u_0 + p u_1 + p^2 u_2 + p^3 u_3)$$

$$u_0 + p u_1 + p^2 u_2 + p^3 u_3 = f(x, y) - p \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} (u_0 + p u_1 + p^2 u_2 + p^3 u_3) +$$

$$(u_0 + p u_1 + p^2 u_2 + p^3 u_3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (u_0 + p u_1 + p^2 u_2 + p^3 u_3) - \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial t} (u_0 + p u_1 + p^2 u_2 + p^3 u_3)$$

$$= f(x, y) - \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} (p u_0 + p^2 u_1 + p^3 u_2 + p^4 u_3) + (p u_0 + p^2 u_1 + p^3 u_2 + p^4 u_3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (u_0 + p u_1 + p^2 u_2 + p^3 u_3) - \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial t} (u_0 p + p^2 u_1 + p^3 u_2 + p^4 u_3)$$

$$(\frac{\partial u_0}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial x} u_1 + p^2 \frac{\partial}{\partial x} u_2 + p^3 \frac{\partial}{\partial x} u_3)$$

$$= f(x, y) = \int_0^t p u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + p^2 u_0 \frac{\partial}{\partial x} u_1 + p^3 u_0 \frac{\partial}{\partial x} u_2 + p^4 u_0 \frac{\partial}{\partial x} u_3 + p^2 u_1 \frac{\partial}{\partial x} u_0 +$$

$$p^3 u_1 \frac{\partial}{\partial x} u_1 + p^4 u_1 \frac{\partial}{\partial x} u_2 + p^5 u_1 \frac{\partial}{\partial x} u_3 + p^3 u_2 \frac{\partial}{\partial x} u_0 + p^4 u_2 \frac{\partial}{\partial x} u_1 + p^5 u_2 \frac{\partial}{\partial x} u_2 +$$

$$p^6 u_2 \frac{\partial}{\partial x} u_3 + p^4 u_3 \frac{\partial}{\partial x} u_0 + p^5 u_3 \frac{\partial}{\partial x} u_1 + p^6 u_3 \frac{\partial}{\partial x} u_2 + p^6 u_4 \frac{\partial}{\partial x} u_2 + p \frac{\partial u_0}{\partial x} + p^2 \frac{\partial}{\partial x} u_1$$

$$+ p^3 \frac{\partial}{\partial x} u_2 + p^4 \frac{\partial}{\partial x} u_3 - p \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial t} u_0 - p^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial t} u_1 - p \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial t} u_2 - p^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial t} u_3$$

Buradan da p 'nin kuvvetleri

$$p^0 u_0 = \frac{3}{8} \sec h^2(x/6) = f(x, y)$$

$$p^1 u_1 = - \int_0^t u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial t} u_1$$

$$p^2 u_2 = - \int_0^t u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial t} u_1$$

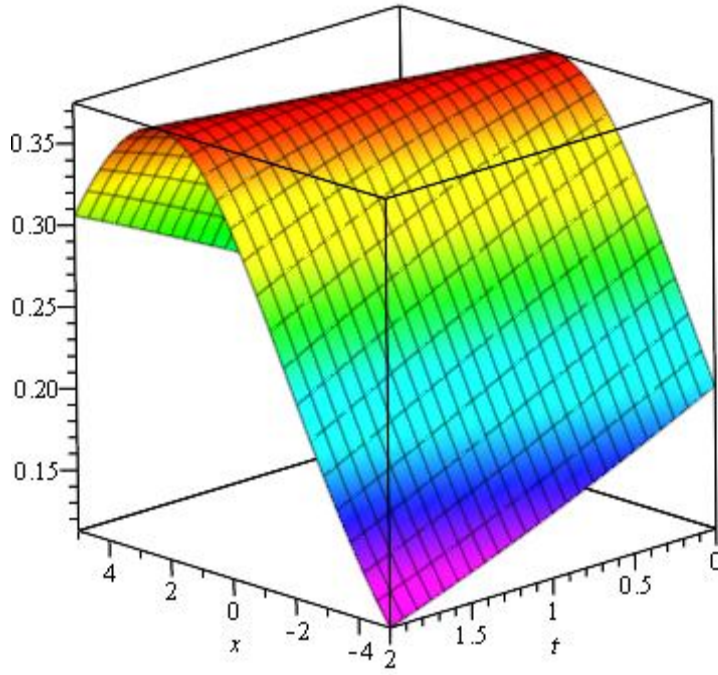
$$p^2 u_3 = - \int_0^t u_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial t} u_2$$

olarak bulunur. Bu bulunan p 'nin kuvvetleri sagamath programı tarafından hesaplatılınca aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

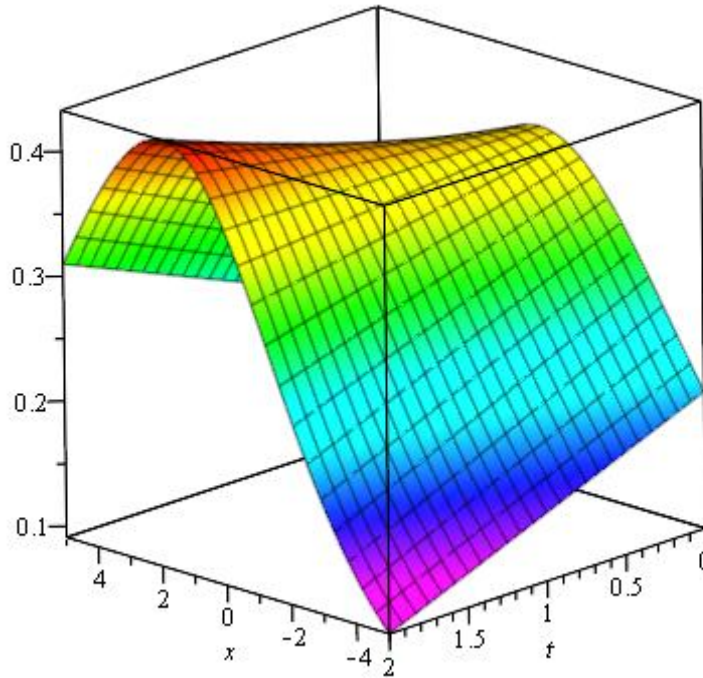
$$\begin{aligned}
u_0 &= \frac{3}{8} \sec h\left(\frac{1}{6}x\right)^2 \\
u_1 &= \frac{3}{64} \sec h\left(\frac{1}{6}x\right)^4 \tanh\left(\frac{1}{6}x\right)t + \frac{1}{8} \sec h\left(\frac{1}{6}x\right)^2 \tanh\left(\frac{1}{6}x\right)t \\
u_2 &= \frac{1}{9216} \left(\frac{1}{\cosh\left(\frac{1}{6}x\right)^8} \right) (t(-192 \sinh\left(\frac{1}{6}x\right) \cosh\left(\frac{1}{6}x\right)^3 + 128 \sinh\left(\frac{1}{6}x\right) \cosh\left(\frac{1}{6}x\right)^5 \\
&\quad - 360 \sinh\left(\frac{1}{6}x\right) \cosh\left(\frac{1}{6}x\right) + 384t \cosh\left(\frac{1}{6}x\right)^6 - 558t \cosh\left(\frac{1}{6}x\right)^2 - 189t)) \\
u_3 &= \frac{1}{165888} \frac{1}{\cosh\left(\frac{1}{6}x\right)^{11}} (t(2592 \cosh\left(\frac{1}{6}x\right)^6 \sinh\left(\frac{1}{6}x\right)t^2 \\
&\quad - 10368t^2 \cosh\left(\frac{1}{6}x\right)^4 \sinh\left(\frac{1}{6}x\right) - 10611t^2 \cosh\left(\frac{1}{6}x\right)^2 \sinh\left(\frac{1}{6}x\right) \\
&\quad - 2430t^2 \sinh\left(\frac{1}{6}x\right) + 256 \cosh\left(\frac{1}{6}x\right)^8 \sinh\left(\frac{1}{6}x\right) - 2304 \sinh\left(\frac{1}{6}x\right) \cosh\left(\frac{1}{6}x\right)^6 \\
&\quad 3600 \sinh\left(\frac{1}{6}x\right) \cosh\left(\frac{1}{6}x\right)^4 + 10080 \sinh\left(\frac{1}{6}x\right) \cosh\left(\frac{1}{6}x\right)^2 \\
&\quad + 2304t^2 \cosh\left(\frac{1}{6}x\right)^8 \sinh\left(\frac{1}{6}x\right) + 17253t \cosh\left(\frac{1}{6}x\right) - 25704t \cosh\left(\frac{1}{6}x\right)^5 \\
&\quad + 2304t \cosh\left(\frac{1}{6}x\right)^9 - 5184t \cosh\left(\frac{1}{6}x\right)^7 + 17172t \cosh\left(\frac{1}{6}x\right)^3))
\end{aligned}$$

Çizelge3.5: $x = 10, y = 10, t = 0.002$ anındaki u için analitik çözümün ve yaklaşık çözümün karşılaştırılması.

İterasyon Adımları	Analitik Çözüm	Yaklaşık Çözüm	Hata Oranı
1	0.374837286666781	0.375169999894904	0.0887620415466502
2	0.374993489658685	0.375820165073251	0.220450604440828
3	0.374941412352975	0.376254839588755	0.350301991859673
4	0.374681170416417	0.376472876335482	0.478194812158210
5	0.374213341500779	0.376473694659689	0.604027945621808
6	0.374413048098460	0.374773246960871	0.0962036083516658
7	0.374803128827149	0.375887543361122	0.289329103886165
8	0.374985351943961	0.376780161257057	0.478634512999250
9	0.374959312839092	0.377449029019568	0.663996357798228
10	0.374725069348055	0.377892740664857	0.845332105031904



Şekil3.11 $-5 < x < 5$ ve $0 < t < 2$ aralığındaki u analitik çözümünün grafiği



Şekil3.12 $-5 < x < 5$ ve $0 < t < 2$ aralığındaki $u = u_0 + u_1$ yaklaşık çözümünün grafiği

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Varyasyonel iterasyon , homotopi pertürbasyon ve varyasyonel homotopi iterasyon metodları ile ilgili yapmış olduğumuz literatür araştırmaları ve çalışmalarımız doğrultusunda varyasyonel iterasyon yöntemi ile ilgili; metodun, problemin fiziksel davranışlarını değiştirecek herhangi bir kısıtlayıcı varsayım ya da dönüşüm uygulamadığı, yaklaşık çözümü hızlı yakınsayan iterasyonlar ile hesaplamaya olanak sağladığı, diğer yaklaşım yöntemlerine nazaran, daha az hesaplama gerektirdiği tespit edilmiştir. Metod, analitik çözümü olmayan problemlerde, sadece birkaç iterasyon sonucu yaklaşık çözüme yakınsayabilmektedir. Nonlineerliği kuvvetli olan problemlerin yaklaşık çözümleri için ise daha fazla sayıda iterasyon gerektiği belirlenmiştir. Elde edilen sonuçlar ışığında metodun, her türden lineer ya da nonlinear probleme uygulanabileceği söylenebilir. Çözümlerin yakınsaması, başlangıç yaklaşımının ve Lagrange çarpanının iyi tespit edilmesiyle alakalıdır. Metodun literatürde yer alan birkaç modifikasyonu mevcuttur. Ancak metodun yakınsama hızını arttıracak daha iyi modifikasyonları geliştirilebilir.

Homotopi pertürbasyon metodu ile ilgili çalışmalar incelendiğinde ise; homotopi pertürbasyon metodu, homotopi analiz metodundaki Taylor serisi yerine pertürbasyon serisi kullanılarak sonsuz seri çözümlerini araştıran bir metottur. Homotopi pertürbasyon metodunda yakınsama, başlangıç yaklaşımının yeterince iyi seçilmesine bağlıdır. Ayrıca yakınsama homotopi yoluna da bağlıdır. Bazı araştırmacılar homotopi pertürbasyon metodunun homotopi analiz metodunun bir özel hali olduğunu iddia etmektedirler. Homotopi pertürbasyon metodunda çözüm serisinin bulunması için başlangıç yaklaşımı ve uygun homotopinin kurulması yeterlidir. Sonuç olarak metodun problemlere bağlı olarak iyi ve zayıf yönleri mevcuttur. Varyasyonel Homotopi pertürbasyon metodu ile ilgili çalışmalar incelendiğinde de; varyasyonel iterasyon ve homotopi pertürbasyon metodlarının birleştirilmesinden oluşan varyasyonel homotopi pertürbasyon yönteminde doğrusal ve doğrusal olmayan denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için herhangi bir kısıtlayıcı varsayım ve doğrusallaştırma gerektirmediği için daha hızlı ve az iterasyonda çözüme ulaşıldığı görülmüştür.

KAYNAKLAR

- [1] **He, J. H.**(2000). *Variational iteration method for autonomous ordinary differential systems*, Appl. Math. Comput., **114** (2-3) ,115-123.
- [2] **Abdou, M. A., Soliman, A. A.** (2005). *Variational iteration method for solving Burger's and coupled Burger's equations*, J. Comput.Appl. Math., **181** (2), 245-251.
- [3] **Soliman, A. A.** (2005). *Numerical simulation of the generalized regularized long wave equation by He's variational iteration method*, Math. Comput. Simul., **70**, 119-124.
- [4] **Abdou, M. A., Soliman,**(2005).*New applications of variational iteration method*, J. Comput. Appl. Math., **211**, 1-8.
- [5] **Momani, S., Abuasad, S., Odibat, Z.** (2006). *Variational iteration method for solving nonlinear boundary value problems*, Appl. Math. Comput., **183**, 1351-1358.
- [6] **Momani, S., Abuasad, S.** (2006). *Application of He's variational iteration method to Helmholtz equation*, Chaos, Solitons and Fractals, **27**, 1119-1123.
- [7] **Abassy, T. A., El-Tawil, M. A.; El-Zoheiry, H.** (2007). *Exact solutions of some nonlinear partial differential equations using the variational iteration method linked with Laplace transforms and the Pade technique*, Comput. Math. Appl., **54**, 940-954.
- [8] **Biazar, J., Ghazvini, H.** (2007).*He's variational iteration method for fourth-order parabolic equations*, Comput. Math. Appl., **54**, 1047-1054.
- [9] **He, J. H.,**(2007). *Variational iteration method - Some recent results and new interpretations*, J. Comput. Appl. Math., **207**, 3-17.
- [10] **Tari, H.** (2007). *Modified variational iteration method*, Physics Letters A, **369**, 290-293.
- [11] **Tatari, M., Dehghan, M.** (2007). *Solution of problems in calculus of variations via He's variational iteration method*, Physics Letters A, **362**, 401-406.
- [12] **Wazwaz, A. M.** (2007).*The variational iteration method for solving linear and nonlinear systems of PDEs*, Comput. Math. Appl., **54**, 895-902.
- [13] **Dehghan, M., Shakeri, F.** (2008).*Application of He's variational iteration method for solving the Cauchy reaction-diffusion problem*, J. Comput. Appl. Math., **214**, 435-446.
- [14] **Ali, A. H. A., Raslan, K. R.** (2009). *Variational iteration method for solving partial differential equations with variable coefficients*, Chaos, Solitons and Fractals, **40**, 1520-529.
- [15] **Geng, F., Lin, Y., Cui, M. A** (2009). *Piecewise variational iteration method for Riccati differential equations*, Comput. Math. Appl., **58**, 2518-2522.

- [16] **Ghorbani, A., Saberi-Nadjafi, J.** (2009). *An effective modification of He's variational iteration method*, *Nonlinear Analysis, RealWorld Applications*, **10**, 2828-2833.
- [17] **Ghorbani, A., Momani, S.** (2010). *An effective variational iteration algorithm for solving Riccati differential equations*, *Appl. Math. Let.*, **23**, 922-927.
- [18] **Odibat, Z. M.** (2010). *A study on the convergence of variational iteration method*, *Math. Comput. Model.*, **51**, 1181-1192.
- [19] **Soltani, L. A., Shirzadi, A.** (2010). *A new modification of the variational iteration method*, *Comput. Math. Appl.*, **59**, 2528-2535.
- [20] **He J.H.** (2004). *Comparison of homotopy perturbation method and homotopy analysis method*, *Applied Mathematics and Computation*, **156**(2), 527-539.
- [21] **Abbasbandy S.**(2006). *Numerical solutions of the integral equations: Homotopy perturbation method and Adomian's decomposition method*, *Applied Mathematics and Computation*, **173**, 493-500.
- [22] **Abbasbandy S.** (2006). *The application of the homotopy analysis method to nonlinear equations arising in heat transfer*, *Physics Letters A*, **360**, 109-113.
- [23] **Bataineh AS, Noorani MSM, Hashim I.** (2007). *Solutions of time-dependent Emden–Fowler type equations by homotopy analysis method*. *Phys Lett A*, **371**:72 - 82.
- [24] **M.S.H.Chowdhury & Hashim** (2007). *Analytical Solution for Cauchy Reaction-Diffusion Problems by Homotopy Perturbation Method*. *Sains Malaysiana* **39**(3), 495–504
- [25] **Ozis T., Agirseven D.**(2008). *He's homotopy perturbation method for solving heatlike and wave-like equations with variable coefficients*, *Phys. Lett. A*, **372**, 5944-5950.
- [26] **Sajid M., Hayat T.** (2009). *Comparison of HAM and HPM solutions in heat radiation equations*, *Int. Communications in Heat and Mass Transfer*, **36**, 59-62.
- [27] **Liang S., Jeffrey D.J.**(2009). *Comparison of homotopy analysis method and homotopy perturbation method through an evolution equation*, *Commun. Nonlinear. Sci.Numer. Simulat.*, doi:10.1016/j.cnsns.2009.02.016.
- [28] **Sefa Anil Sezer, Ahmet Yildirim, Syed Tauseef Mohyud-Din** (2011). *He's homotopy perturbation method for solving the fractional KdV-Burgers-Kuramoto equation*, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, Vol. **21** Iss: **4**, pp.448 – 458
- [29] **E. Hızal, S. Küçükarslan,** (2009). *Homotopy perturbation method for (2+1) dimensional coupled Burgers system*, *Non. Anal.: Real World Applications* , **10** 1932-1938
- [30] **Melda Duman,** (2010). *Asymptotic expansions for the Sturm-Liouville problem by homotopy perturbation method*, *Applied Mathematics and Computation* **216**(2): 492-496
- [31] **A.Ebaid** (2007). *Exact solitary wave solutions for some nonlinear evolution equations via Exp-function method* , *Phys.Lett.A*, **365**:213-219

- [32] **M.Matinfar,M..Ghasemi** (2010). *The variational homotopy perturbation method for Zakharove-Kuznetsov Equations*, j. of .Math. and statistics, 6(4):425-430
- [33] **M.Matinfar,M.Mahdavi and z.Raeisi** (2010). *The variational homotopy perturbation method for solving analytic treatment of linera and nonlinear ordinar differantial equations*, J.Appl.Math. and informatics, 28(3-4):845-862
- [34]**Esin İLHAN**, *Diferensiyel denklemlerin Varyasyonel iterasyon metodu ile yaklaşık analitik çözümleri*, Ahi Evran Üniversitesi Yüksek lisans tezi
- [35] **Deniz AĞIRSEVEN** , *He'nin homotopi pertürbasyon metodunun değişken katsayılı ısı-tipi ve dalga tipi denklemlere uygulanması*, Trakya Üniversitesi yüksek lisans tezi.
- [36]**M. Matinfar, M. Ghasemi** (2011). *On the solving of coupled Burgers equations, Extended Abstracts of the 19th Mathematical Seminar On Analysis and its applications*, University of Mazandaran, Babolsar, pp.254-256.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Ayşe DEMİRTAŞ

Doğum Yeri ve Tarihi: Konya / Ereğli / 04.08.1984

Adres: Yıldız Teknik Üniversitesi Teknoloji Geliştirme Bölgesi Yaz Bilgi Sistemleri, B1-105 Esenler – İSTANBUL

E-Mail: ayse-demirtas@hotmail.com.tr

Lisans: Bahçeşehir Üniversitesi, 2003 - 2008