

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**SONSUZ METAL PLAKA ÜZERİNDE SABİT HIZLA GİDEN ISISAL
KAYNAĞIN MEYDANA GETİRDİĞİ DALGA PATERNLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Devrim TARHAN

Anabilim Dalı : Fizik

Programı : Fizik Mühendisliği

MAYIS 2002

**SONSUZ METAL PLAKA ÜZERİNDE SABİT HIZLA GİDEN İSİSAL
KAYNAĞIN MEYDANA GETİRDİĞİ DALGA PATERNLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Devrim TARHAN
(509991412)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 13 Mayıs 2002
Tezin Savunulduğu Tarih : 30 Mayıs 2002**

**Tez Danışmanı : Doç. Dr. Nazmi POSTACIOĞLU
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Ahmet TOGO GİZ (İ.T.Ü.)
Prof. Dr. Mevlüt TEYMÜR (İ.T.Ü.)**

MAYIS 2002

ÖNSÖZ

Tez çalışmalarımın her aşamasında engin bilgilerinden yararlandığım çok değerli bilim insanı Doç. Dr.Nazmi POSTACIOĞLU'na ve hayatım boyunca bana maddi, manevi desteklerini esirgemeyen aileme sonsuz teşekkür ederim.

Mayıs 2002

Devrim TARHAN

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ	iv
SEMBOL LİSTESİ	v
ÖZET	vi
SUMMARY	vii
1. GİRİŞ	1
2. SICAKLIK DAĞILIMI	3
2.1 Giriş	3
2.2 Sıcaklık Dağılımı	3
3. ISISAL GERİLMELER	6
3.1 Deformasyon	6
3.2 İzotropik Cisimler İçin Denge Denklemi	7
4. BÜKÜLME DALGALARI	12
4.1 Bükülme Dalgaları	12
4.2 Yüzey Dalgaları	13
4.3 İnce Plaka Yaklaşımı	13
4.4 Dispersiyon Bağıntısı	14
4.5 Dalga Paternleri	15
5. SONUÇ VE TARTIŞMALAR	19
KAYNAKLAR	20
ÖZGEÇMİŞ	21

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 1.1	Sonsuz metal plaka üzerinde sabit hız ile giden noktasal kaynak.	1
Şekil 3.1	İkinci tür Bessel fonksiyonu.	9
Şekil 4.1	Bükülme dalgaları, ince plaka yaklaşımı ve yüzey dalgalarının dispersiyon bağıntıları.	14
Şekil 4.2	Entegrasyonu aldığımız kontur.	16
Şekil 4.3a	Meydana gelen dalga paterni.	17
Şekil 4.3b	Meydana gelen dalga paterni.	18
Şekil 5.1	Meydana gelen dalga paternlerinin kontur gösterimi.	19

SEMBOL LİSTESİ

x	: Gidişin yönü.
V_0	: Gidiş hızı.
h	: Tabakanın kalınlığı.
c_v	: Sabit hacimde özgül ısı.
z	: Sıfır olduğu durumda tabakanın serbest yüzeyi.
ρ	: Metal plakanın yoğunluğu.
T	: Sıcaklık.
k_i	: Isısal iletkenlik.
K_n	: İkinci tür Bessel Fonksiyonu.
δ_{ij}	: Kroniker Delta.
β_0	: Peclet sayısı.
$\delta(x)$	: Delta Fonksiyonu.
σ	: Poisson oranı.
E	: Young modülü.
K	: İzotermal sıkıştırılabilirlik.
α	: Isısal Genleşme.
η	: Dikey yer değiştirmede ortalama derinlik.
$\bar{T}$	: Düzeltilmiş sıcaklık.
$\nabla_H'^2$	: Yatay koordinatlardaki Laplasyen.
Q	: Sıcaklık kaynağının meydana getirdiği ısı.
J	: Sıcaklık yoğunluğu.
u_{ik}	: Deformasyon tansörü.
σ_{ik}	: Gerilme tansörü.
k_l	: Boyuna dalganın dalga vektörü.
k_T	: Enine dalganın dalga vektörü.
c_l	: Boyuna dalganın hızı.
c_T	: Enine dalganın hızı.

SONSUZ METAL TABAKA ÜZERİNDE SABİT HIZLA GİDEN ISISAL KAYNAĞIN MEYDANA GETİRDİĞİ DALGA PATERNLERİ

ÖZET

Sabit hız ile ilerleyen noktasal kaynağın yarattığı gerilmeler uzun zamandan beri incelenmektedir. Sabit hız ile ilerleyen kaynağın ürettiği ısısal gerilmeler, kaynak yapma işlemlerinde sorun yarattığı için 1950 yıllarından incelenmektedir. Yer değiştirmeler kaynağın çerçevesinde zamandan bağımsız olarak alınmıştır. Plaka çerçevesine geçildiği takdirde bu ısısal yer değiştirmeler ivmeye sebebiyet verirler. Bu ivmeden kaynaklanan gerilmeler plakadaki bükülme dalgaları için güden kuvvet gibi davranacaklardır. Bu dalgaların frekansları, uzun dalga limitinde dalga sayısının karesi ile orantılıdır.

Burada z koordinatı serbest yüzeylere dik yöndür. Serbest yüzeylerde ısı kaybını ihmal ederek sıcaklık dağılımı bulmak istersek, noktasal ısı kaynağı dağılımını z yönünde kosinüs serisi ile temsil etmek gerekecektir. Bu serini elemanlarının serbest yüzeylerde z yönündeki türevleri sıfırdır. Serinin çift elemanları, plakanın alt ve üst serbest yüzeylerinin ortasındaki nötr düzleme göre simetrik ısıtmaya tekabül ederler ve bundan dolayı bükülmelere neden olmazlar. Serinin tek elemanları ise antisimetrik olduklarından bükülmeye neden olurlar. Oseen türü bir dönüşüm yaparak sabit hızla ilerleyen kaynakların çerçevesinde ısı akış denklemi, Helmholtz Denklemine dönüşebilir. Bu denklemin, ısı kaynağı üzerinde uygun Neuman sınır şartını sağlayan çözümü ikinci türden bir Bessel Fonksiyonu ile eksponansiyel fonksiyonun çarpımı olduğu görülür. Bu çalışmada plaka içindeki sıcaklık dağılımının ikinci tür Bessel Fonksiyonu şeklinde olacağı farz edilmektedir. Bu bir kısıtlama değildir, çünkü sonsuzda eksponansiyel olarak sıfıra giden herhangi bir fonksiyon, bu tür Bessel Fonksiyonlarının integrali olarak ifade edilebilir. Bu elastik problemin çözümü yine Bessel Fonksiyonları cinsinden bulunabilir. Bu neticenin ısısal kaynaklar üzerinde uygun sınır şartlarının sağlanması içini homojen denklemin çözümlerini eklemek zorundayız.

Bu ısısal kaynaklar çerçevesinde bulduğumuz statik çözümü plakanın çerçevesine dönüştürdüğümüzde, plaka içindeki elemanların dikey ivmeye uğrayacağı görülür. Bu ivmenin uyaracağı bükülme dalgalarının dispersiyon bağıntısı bütün dalga boyları için hesaplanmıştır. Eğer ısı kaynağının hızı yüzey dalgasınınkinden küçükse dispersif bükülme dalgaları meydana gelir. Dalga boyu tabakanın kalınlığından çok büyükse dispersif bükülme dalgalarının frekansı dalga sayısının karesi ile orantılı olur. Bu limit durumunda ısısal kaynağın meydana getirdiği dalgalar, gidiş doğrultusuyla 90° derece açı yapar ve bu sonuç gidiş hızından bağımsızdır.

WAVE PATTERN PRODUCED BY AN HEAT SOURCE MOVING WITH CONSTANT VELOCITY ON THE TOP OF AN INFINITE PLATE

SUMMARY

Thermal stresses produced by a heat source moving with constant velocity have been studied since 1950 see Nowacki. In this study, the relation between heat flow and stresses has been studied. Within the frame of linear, isotropic elasticity theory, the wave pattern produced by a point heat source moving with constant velocity on the top of an infinite plate is computed. In the frame of heat source, the thermal displacements are independent of time in other words they are stationary. Returning to the frame of plate, the thermal displacements become an explicit function of time. Inertial forces arising from this acceleration cause flexural waves. The frequency of these waves is proportional to the square of the wave number if the wavelength is much larger than the thickness of the sheet. Angular frequency of flexural waves is proportional to the square of wave number, when wave number goes to zero. When it goes to infinity, angular frequency is proportional to wave number.

The heat loss through the free surface is neglected. We expand the point heat source in Fourier series with respect to cosines series in the z direction. Derivative of these series with respect to z on the free surfaces is zero. Even components of series amount to symmetrical heating according to in the middle plane. Carrying out an Oseen like transformation, heat flow equation becomes inhomogeneous Helmholtz equation. The solution of this equation which satisfies Neuman boundary condition is product of modified Bessel Function ($K_0(n\pi r/h)$) and exponential function. K_0 is the modified Bessel function of the second kind and zero order. In the plate heat distribution is considered as modified Bessel Function. This function goes to zero in the infinite.

The flexural waves excited by the inertial forces are steady in the frame of the moving heat source. The dispersion relation is computed for all wave lengths. If the velocity of heat source is smaller than that of surface waves, dispersive flexural waves occur. If the wave length is bigger than the thickness of plate, frequency of flexural waves is proportional to the square of wave number. In this limiting case it is found that the crest of the waves makes an angle of 90° degrees with the travel direction and this result is independent of the travel speed as long as the parabolic approximation remains valid for the dispersion relation of flexural waves.

Üniversitesi	: İstanbul Teknik Üniversitesi
Enstitüsü	: Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	: Fizik
Programı	: Fizik Mühendisliği
Tez Danışmanı	: Doç. Dr. Nazmi POSTACIOĞLU
Tez Türü ve Tarihi	: Yüksek Lisans – Mayıs 2002

ÖZET

SONSUZ METAL PLAKA ÜZERİNDE SABİT HIZLA GİDEN ISISAL KAYNAĞIN MEYDANA GETİRDİĞİ DALGA PATERNLERİ

Devrim TARHAN

Lineer, izotropik elastisite teorisi çerçevesinde sonsuz metal tabaka üzerinde sabit hız ile ilerleyen ısısal kaynağın meydana getirdiği dalga paternleri hesaplandı. Başlangıç koşullarına bağlı olan geçici etkiler ve dalgaların sönümleri ihmal edildi. Eğer ısısal kaynağın gidiş hızı, yüzey dalgalarının hızından küçükse, dispersif bükülme dalgaları meydana gelir. Dalga boyu tabakanın kalınlığından çok büyükse, dispersif bükülme dalgalarının frekansı dalga sayısının karesiyle orantılıdır. Bunun sonucu olarak dalga tepesi, gidiş yönüyle 90 derece açı yapar. Bu sonuç, yukardaki şartların getirdiği kısıtlamalar dahilinde ısısal kaynağın gidiş hızından bağımsızdır.

Anahtar Kelimeler: Noktasal sıcaklık kaynak, Bükülme dalgaları, Dalga paterni

Bilim Dalı Sayısal Kodu: 404

University : İstanbul Technical University
Institute : Institute of Science and Technology
Science Programme : Physics
Programme : Physics Engineering
Supervisor : Assoc. Prof. Nazmi POSTACIOĞLU
Degree Awarded and Date : M.Sc. – May 2002

ABSTRACT

WAVE PATTERN PRODUCED BY AN HEAT SOURCE MOVING WITH CONSTANT VELOCITY ON THE TOP OF AN INFINITE PLATE

Devrim TARHAN

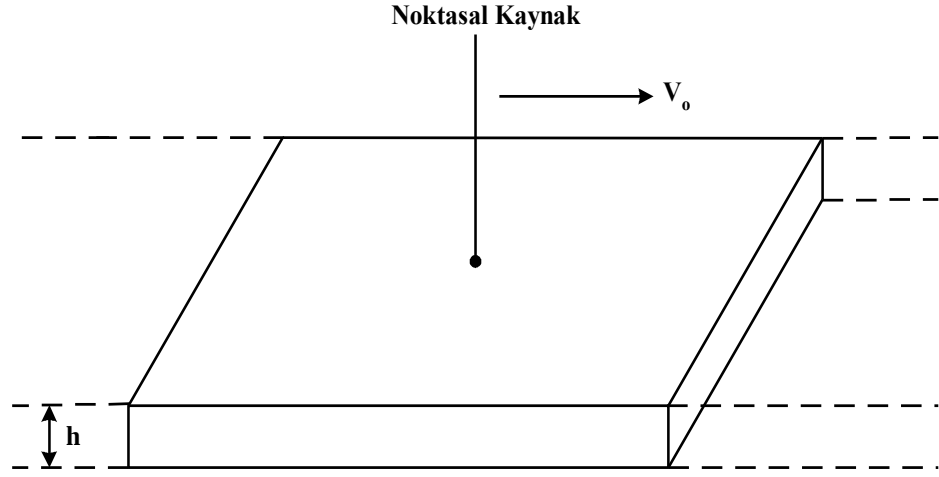
Within the frame of linear, isotropic elasticity theory the wave pattern produced by a heat source moving with constant velocity on the top of an infinite plate is computed. The transient effects associated with the initial conditions and the damping of the waves are neglected. If the travel speed of the heat source is smaller than the velocity of the surface waves, the dispersive flexural waves will be excited. The frequency of these waves is proportional to the square of the wave number if the wavelength is much larger than the thickness of the sheet. In this limiting case it is found that the crest of the waves makes 90^0 degrees with the travel direction and this result is independent of the travel speed as long as the parabolic approximation remains valid for the dispersion relation of flexural waves.

Keywords: Point Heat Source, Flexural Waves, Wave Pattern

Science Code: 404

1. GİRİŞ

Literatürde sabit hız ile ilerleyen noktasal kaynağın yarattığı gerilmeler uzun zamandan beri incelenmektedir [1]. Nowacki bu problemi iki ve üç boyutta incelemiştir. Üç boyuttaki durumda, elastik ortam olarak yarı uzayı almıştır. Bunun sonlu kalınlıklı plakaya genelleştirilmesi de yapılmıştır [2]. Bu çalışma lineer ve izotropik çerçevede yapılmıştır. Şekil 1.1 de görüldüğü gibi sonsuz metal plaka üzerinde sabit hızla giden noktasal ısı kaynağıımız, düzlem üzerinde düzleme dik olarak hareket etmektedir. Burada h plakanın kalınlığıdır.



Şekil 1.1 Sonsuz metal plaka üzerinde sabit hız ile giden noktasal kaynak.

Isı, plaka içinde homojen olarak yayılmadığı için plakada deformasyona sebep oluyor. Bu çalışmada bu ısısal yayılmadan kaynaklanan ısısal gerilmeler incelendi. Gerilmelerden meydana gelen kuvvetlerin oluşturduğu bükülme dalgaları hesaplanmıştır.

Bütün bu çalışmada yer değiştirmeler kaynağın çerçevesinde zamandan bağımsız olarak alınmıştır. Plaka sistemine geçildiği taktirde yer değiştirmeler ivmeye sebebiyet verirler. Bu çalışmada bu ivmenin uyardığı elastik dalgaları hesaplamayı hedefliyoruz. Yalnız sıcaklık dağılımı ile gerilmeler arasında çiftleşme ihmal edilmiştir. Bu sıcaklık dağılımına tekabül eden ısısal gerilmeler hesaplandı.

Sonlu kalınlıkta plakanın üzerinde noktasal bir kaynak yeteri kadar hızlı geçirildiği zaman, üst tabakalar aşağısına göre daha fazla ısınır. Eğer plakanın üst yüzeyinin alt yüzeye göre daha fazla ısıtıldığı göz önünde bulundurulursa, plakanın büküleceği

görürecektir. Isı akışı denkleminin boyutsal analizinden sıcaklığın h kalınlığındaki plakayı kat etmesi için gereken sürenin mertebesi $h^2 \rho c_v / k_i$ dir. Burada ρ yoğunluk, c_v özgül ısı, k_i ısısal iletkenlik katsayısıdır. Eğer bu süre içinde yatay olarak kat ettiği mesafe kalınlıktan çok daha fazla ise üst tabakanın alta göre fazla ısınması doğaldır. Bu da plakanın bükülmesine neden olacaktır.

2. SICAKLIK DAĞILIMI

2.1 Giriş

Enerjinin korunumu denklemi :

$$\frac{DT}{Dt} + \text{div} \mathbf{J} = 0 \quad (2.1)$$

Eğer sıcaklık kaynağımız var ise meydana getirdiği ısı

$$Q = c_v \rho \frac{DT}{Dt} + \text{div} \mathbf{J} \quad (2.2)$$

şeklinde olur.

Burada $dm = \rho dV$ dır. $\mathbf{J} = -k_i \mathbf{grad} T$ ve $\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \mathbf{grad} T$ ifadelerini denklem (2.2)'de yerine koyduğumuz zaman sıcaklık dağılımı denklemini (2.3)'ü elde ederiz. Burada $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ ve $\mathbf{v} = V_0 \mathbf{e}_x$ dır.

2.2 Sıcaklık Dağılımı

Sıcaklık dağılımı, ısı kaynağının bulunduğu çerçevede zamandan bağımsızdır.

$$c_v \rho V_0 \frac{\partial}{\partial x'} T - k_T \nabla'^2 T = Q \quad (2.3)$$

Burada Q ısı kaynağı, V_0 ısı kaynağının hızı, x kaynağın gidiş yönü olmak üzere $x' = x - V_0 t$ 'dır. Ayrıca ∇'^2 da $\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ifadesine eşittir. Oseen türü bir dönüşüm yaparak $T' = T \exp(\beta_0 x' / h)$ diye yeni bir sıcaklık tanımlanabilir. Burada β_0 Peclet sayısıdır ve $V_0 h \rho c_v / 2k_i$ 'ye eşittir. Bu dönüştürülmüş sıcaklık, denklem (2.3) içine konulduğu zaman homojen olmayan Helmholtz Denklemini sağlayacaktır.

$$\nabla'^2 T_0 - (\beta_0^2 / h^2) T_0 = -Q \exp(\beta_0 x' / h) / k_i \quad (2.4)$$

Plakanın serbest yüzeyine uygulanan noktasal sıcaklık kaynağını aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$Q = 2Q_0 \delta(x') \delta(y) \delta(z - h) \quad (2.5)$$

Burada Q_0 kaynağın şiddeti, iki katsayısı ise buradaki Dirac fonksiyonlarının sadece $0 < z < h$ bölgesinde entegre edildiğinden dolayı konmuştur. Isı kaynağı z yönünde Fourier serisi ile açılarak

$$Q = \frac{Q_0}{h} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cos(n\pi z / h) \right) \delta(x') \delta(y) \quad (2.6)$$

elde edilir. $z = h$ plakanın üst yüzeyine karşılık gelir. Aynı şekilde düzeltilmiş sıcaklık $\tilde{T}$ de kosinüs serisi cinsinden açılabilir.

$$\tilde{T}_0 = \frac{Q_0}{2\pi h k_T} \left(K_0(\beta_0 r' / h) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cos(n\pi z / h) K_0(\beta_n r' / h) \right) \quad (2.7)$$

(2.7) denkleminde K_0 , sıfır mertebeli ikinci tür düzeltilmiş Bessel fonksiyonudur. Bu Bessel fonksiyonu,

$$(\nabla_H'^2 - \beta_n^2 / h^2) K_0(\beta_n r' / h) = -2\pi \delta(x') \delta(y) \quad (2.8)$$

iki boyutta Helmholtz denklemini (2.8)'i sağlamaktadır. Yani $\frac{-1}{2\pi} K_0$, Helmholtz operatörüne tekabül eden Green fonksiyonudur.

$$T = \frac{Q_0}{2\pi h k_T} \left(K_0(\beta_0 r' / h) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cos(n\pi z / h) K_0(\beta_n r' / h) \right) \exp(-\beta_0 x' / h) \quad (2.9)$$

Burada β_n efektif Peclet sayısıdır ve $\sqrt{\beta_0^2 + (n\pi)^2}$ ile ifade edilir. (2.9) denkleminde serbest yüzeydeki ısı kaybı ihmal edilmektedir. Bu sıcaklık dağılımı serbest

yüzeylerde doğru sınır şartlarını sağlamaktadır i.e. $z = 0$, $z = h$ ve $r \neq 0$ için $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$

olur. Seri (2.9) denkleminde tek terimler, orta düzleme göre simetrik olmayan sıcaklık dağılımına tekabül ederler ve plakanın bükülmesine yol açarlar. Çift terimler ise sadece düzlemsel gerilmeye katkıda bulunurlar. Düzlemsel gerilme problemi daha önce incelenmiştir.

3. İSİSAL GERİLMELER

3.1 Deformasyon

Deformasyondan önce bir cisimde herhangi bir noktanın yer vektörü $\vec{r}$ (bileşenleri $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$) olsun. Deformasyondan sonra herhangi bir koordinatlar sisteminde cisim içindeki her nokta genellikle yer değiştirir. Bir nokta alalım. Bu noktanın yer vektörü $\vec{r}$ olsun., deformasyondan sonra yer vektörü de $\vec{r}'$ olsun. Meydana gelen deformasyon $\vec{r}' - \vec{r}$ olacaktır. Deformasyonu u_i ile gösterirsek, u_i elemanı

$$u_i = x_i' - x_i \quad (3.1)$$

olur. Deformasyon tansörü, lineer çerçevede

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (3.2)$$

(3.2) ifadesine eşittir. Silindirik koordinatlarda deformasyon tansörü aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\begin{aligned} u_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad u_{\phi\phi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r}, \quad u_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ 2u_{\phi z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial z}, \quad 2u_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}, \quad 2u_{r\phi} = \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Bu halde gerilme tansörünü, deformasyon tansörü cinsinden ifadesini yazarsak

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{(1 + \sigma)} \left(u_{ik} + \frac{\sigma}{1 - 2\sigma} u_{ll} \delta_{ik} \right) \quad (3.4)$$

(3.4) denkleminde eşit olduğu görülür. Burada E , Young modülü; σ , Poisson oranı; δ_{ik} ise kroneker deltasıdır. Sıcaklık değişimiyle meydana gelen gerilme tansörü, deformasyon tansörü cinsinden

$$\sigma_{ik} = -K\alpha(T - T_0)\delta_{ik} + Ku_{ll}\delta_{ik} + 2\mu(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}) \quad (3.5)$$

ifade edilir[5].

3.2 İzotropik Cisimler İçin Denge Denklemi

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = -K\alpha \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (3.6)$$

Burada ρ yoğunluk, u yer değiştirme, σ_{ik} stres tensörüdür. (3.6) denkleminin sağ tarafı ise sıcaklıktan gelen terimdir. K izotermal sıkıştırılabilirlik, α ise ısısal genişleme katsayısıdır. (3.2) ve (3.4) denklemini yukarıdaki (3.6) denkleminde yerine koyarsak

$$\rho \frac{\partial^2 u_{ii}}{\partial t^2} + \frac{E}{2(1+\sigma)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \right) u_i + \frac{E\sigma}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_l} = - \frac{E\alpha}{3(1-2\sigma)} \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (3.7)$$

denklemini elde ederiz.

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{grad} \mathbf{div} \mathbf{u} - \mathbf{curl} \mathbf{curl} \mathbf{u} \quad (3.8)$$

(3.8) denklemini (3.7) denkleminde kullanırsak izotropik cisimler için denge denklemini elde ederiz.

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} - \frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \mathbf{grad} \mathbf{div} \mathbf{u} + \frac{E}{2(1+\sigma)} \mathbf{curl} \mathbf{curl} \mathbf{u} = - \frac{E\alpha \mathbf{grad} T}{3(1-2\sigma)} \quad (3.9)$$

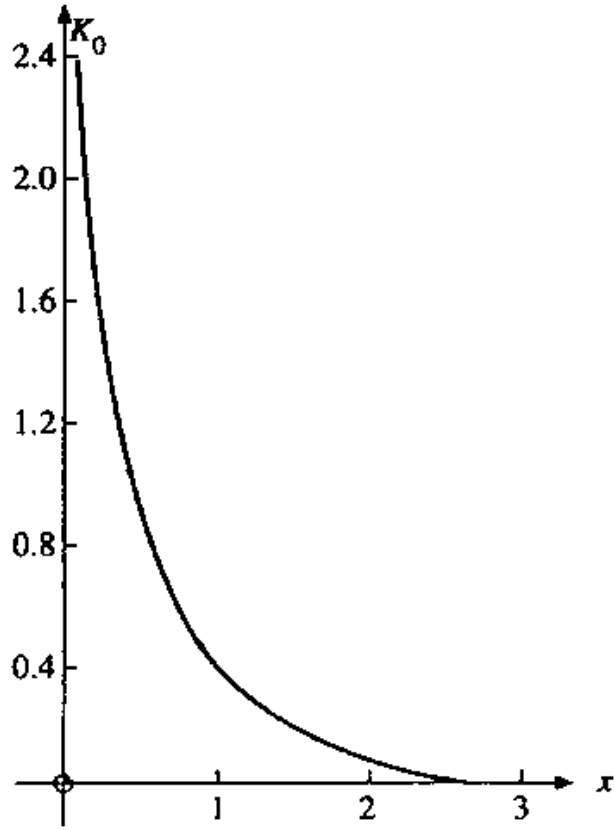
Bastıran kuvvet ve teğetsel kuvvetler olmadığına göre serbest yüzeylerde sınır koşulları ($z = 0$ ve $z = 0$)

$$\sigma_{rz} = \sigma_{\phi z} = \sigma_{zz} = 0 \quad (3.10)$$

Termal yer değiştirmeyi iki kısma ayırabiliriz: $\mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{u}^{(2)}$, $\mathbf{u}^{(1)}$ için önerilen çözüm:

$$\mathbf{u}_n^{(1)} = A_n \mathbf{grad} [K_0(n\pi r'/h) \cos(n\pi z/h)] + B_n K_0(n\pi r'/h) \sin(n\pi z/h) \mathbf{e}_z \quad (3.11)$$

(3.11) çözümü serbest yüzeylerde $\sigma_{rz} = \sigma_{\phi z} = 0$ sınır şartlarını sağlamaktadır. $\mathbf{u}^{(1)}$, denklem (3.9)'daki eylemsizliği temsil eden $\rho \ddot{\mathbf{u}}$ ihmal edildiği takdirde sağlamaktadır. Eğer sıcaklık dağılımı $K_0(n\pi r/h) \cos(n\pi z/h)$ şeklinde olsaydı $\mathbf{u}^{(1)}$ 'i bulmak daha kolay olacaktı. Sıcaklık dağılımının daha karmaşık olması bir sınırlama getirmemektedir çünkü elastisite denklemlerinin lineer olması göz önünde tutularak ve sonsuzda sıfıra giden herhangi bir iki değişkenli fonksiyon bu tür Bessel fonksiyonlarının süper pozisyonu şeklinde ifade edilebileceğinden dolayı problemi sadece $T \propto K_0(n\pi r/h) \cos(n\pi z/h)$ için çözmek yeterlidir. Aşağıda ikinci tür Bessel fonksiyonu olan $K_0(r)$ 'in grafiği görülmektedir.



Şekil 3.1 İkinci Tür Bessel Fonksiyonu.

Şekil 3.1 de görüldüğü gibi $K_0(r)$ ikinci tür Bessel fonksiyonu sonsuzda sıfıra gitmektedir. $f(\mathbf{r})$ herhangi iki değişkenli bir fonksiyon olsun.

$$f(\mathbf{r}) = \frac{-1}{2\pi} \int d^2 r_0 K_0(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|) g(\mathbf{r}_0) \quad (3.12)$$

Yukarıdaki denklemde her iki tarafın eşitliğini sağlamak için g 'yi $\left[\nabla_H^2 - \left(\frac{n\pi}{h} \right)^2 \right] f(\mathbf{r})$ olarak seçmek yeterlidir. ∇_H^2 , yatay koordinatlardaki

laplasyendir. Helmholtz operatörünün Green Fonksiyonu ise $\frac{-1}{2\pi} K_0(n\pi r / h)$ dır.

Bu taktirde Helmholtz operatörü, (3.12) denkleminin iki tarafına tatbik edildiği zaman aynı ifade elde edilecektir.

$$\left[\nabla_H^2 - n^2 \pi^2 / h^2 \right] \left(f(\mathbf{r}) + \frac{1}{2\pi} \int d^2 r_0 K_0(n\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|) g(\mathbf{r}_0) \right) \equiv 0 \quad (3.13)$$

Yukarıdaki ifade $n^2 \pi^2 / h^2 > 0$ için bütün düzlemde sıfır olduğundan ve parantezin içindeki ifadenin bütün düzlemde sonlu olması, Green Teoremine göre parantezin içinin her yerde sıfır olması gerekir. Notasyonu ağırlaştırmamak için çalışmanın geri kalan kısmında sıcaklık dağılımı $T = K_0(n\pi r / h) \cos(n\pi z / h)$ olarak alınacaktır. Hakiki sıcaklık dağılımının bu tür fonksiyonların süper pozisyonu ile elde edileceğini gösterdik.

$$\mathbf{grad} T = \frac{\partial T}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (3.14)$$

denklemini kullanıp serbest yüzeyler için sınır şartlarını kullanırsak (3.11) denklemindeki A_n ve B_n katsayılarını buluruz. Elastik denklemin $r \neq 0$ için B_n katsayısının aşağıdaki şekilde olması halinde geçerlidir.

$$B_n = \frac{2\alpha(1+\sigma)}{3n\pi} h \quad (3.15)$$

$\sigma_{zz} = 0$ sınır şartından A_n bulunur.

$$A_n = \frac{h^2 \alpha}{n^2 \pi^2} \frac{(1+\sigma)}{3} \quad (3.16)$$

Bu çözümde σ_{rr} , $r \rightarrow 0$ için $\frac{1}{r^2}$ gibi ıraksamaktadır.

$$\sigma_{rr}^{(1)} = \frac{Eh\alpha}{n\pi 3} \cos\left(\frac{n\pi}{h} z\right) \frac{1}{r^2} - \frac{E\sigma\alpha}{3(1-2\sigma)} \ln\left(\frac{n\pi}{h} r\right) \cos\left(\frac{n\pi}{h} z\right) \quad (3.17)$$

Bu ıraksamayı önlemek için

$\mathbf{u}^{(1)}$, $r = 0$ dışında elastik denge denkleminin çözümü olan

$$C_n \{ \mathbf{grad} [(z - h/2) \ln(r)] - 2 \ln(r) \mathbf{e}_z \} \quad (3.18)$$

eklenir. Eğer $C_n = -24 A_n / (h \pi^2 n^2)$ olarak alınırsa $\sigma_{rr} = \sigma_{rr}^{(1)} + \sigma_{rr}^{(2)}$, in birinci momenti $\frac{1}{r^2}$ gibi ıraksamaz. Çünkü $\sigma_{rr}^{(2)}$ 'deki $\frac{1}{r^2}$ 'nin katsayısı ile $\sigma_{rr}^{(1)}$ 'deki katsayılar birbirlerini yok ederler. σ_{rr} ' in birinci momenti $\int_0^h dz (z - h/2) \sigma_{rr}$ dir. $u_z^{(1)}$ ($r \gg h$) için asimptotik olarak $-C_n \ln(r)$ gibi davranmaktadır. Bu davranış Nowacki [1]'in ince levhalar için ürettiği yaklaşımla tutarlıdır. Sıcaklık dağılımında kullanılan Bessel fonksiyonu $K_0(n\pi r'/h)$, $h \rightarrow 0$ limitinde $\frac{2h^2}{n^2\pi} \delta(x')\delta(y)$ 'ye dönüşmektedir. [1]' e göre

$$\nabla_H'^2 \eta(x', y) + \frac{\alpha}{3} (1 + \sigma) \tau(x', y) = 0 \quad (3.19)$$

burada η nötr düzlemin dikey yer değiştirmesi ve τ sıcaklığın birinci momentidir.

$$\tau = 12 / h^3 \int_0^h dz (z - h/2) T \quad (3.20)$$

Bu çalışmada $\tau = \frac{24}{hn^2\pi^2} \times \frac{2h^2}{n^2\pi} \delta(x)\delta(y)$ olduğundan dolayı yukarıdaki (3.19) Poisson denkleminin çözümü $\frac{8h}{n^4\pi^4} \alpha(1 + \sigma) \ln(r')$ dır. Logaritmanın başına gelen katsayı daha önceden bağımsız olarak hesap ettiğimiz C_n ile aynıdır.

4. BÜKÜLME DALGALARI

4.1 Bükülme Dalgaları

Hesap etmiş olduğumuz $\mathbf{u}^{(1)}$ yer değiştirmesi ısı kaynağının bulunduğu çerçevede durağandır. Plakanın çerçevesine geçildiği taktirde ivme $V_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \mathbf{u}^{(1)}$ kadar olacaktır.

Sonuç olarak denge denklemimiz aşağıdaki şekilde olur.

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \mathbf{grad} \text{div} \mathbf{u}^{(2)} + \frac{E}{2(1+\sigma)} \mathbf{curl} \text{curl} \mathbf{u}^{(2)} = -\rho U_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \mathbf{u}^{(1)} \quad (4.1)$$

Bükülme dalgaları için önerilen çözüm:

$$\mathbf{u}_{bükülme} = e^{i\omega t} \left(\gamma_1 \mathbf{grad} \left(\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \sinh(k_l(z - \frac{h}{2})) \right) + \gamma_2 \mathbf{curl} \left(\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \cosh(k_T(z - \frac{h}{2})) \mathbf{k} \times \mathbf{e}_z \right) \right) \quad (4.2)$$

(4.2) de görüldüğü gibi dalga, hem enine dalga hem de boyuna dalga olarak ilerler. Burada $\mathbf{k}$, yatay düzlemde dalga vektörüdür. $k_l = \sqrt{k^2 - \omega^2 / c_l^2}$, $k_T = \sqrt{k^2 - \omega^2 / c_T^2}$, $c_l = \sqrt{E(1-\sigma) / (\rho(1+\sigma)(1-2\sigma))}$, $c_T = \sqrt{E / (2\rho(1+\sigma))}$ 'dir. c_l boyuna dalganın hızı, c_T ise enine dalganın hızıdır. Yüzeyde serbest sınır koşullarını $\sigma_{zx} = \sigma_{zz} = 0$ uygularsak iki tane denklem elde ederiz. Bu matris biçiminde yazılıp determinantı sıfıra eşitlenirse dispersiyon denklemi elde edilir.

$$\begin{aligned} & 2k^2 k_l(\omega) k_T(\omega) \cosh[k_l(\omega)h/2] \sinh[k_T(\omega)h/2] \\ & - (k^2 + k_T^2(\omega)) \left[\frac{1-\sigma}{1-2\sigma} k_l^2(\omega) - \frac{\sigma}{1-2\sigma} k^2 \right] \\ & \cosh[k_T(\omega)h/2] \sinh[k_l(\omega)h/2] = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

4.2 Yüzey Dalgaları

Yüzey dalgaları bir çeşit elastik dalgadır. Yüzeyin içine girmeksizin yüzeyde ilerler. Bu dalgalar için hareket denklemi aşağıdaki formdadır [5].

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0 \quad (4.4)$$

(4.4) denkleminde u , u_l ve u_t vektörlerinin bileşenidir. Yüzey dalgalarında ω ile k arasındaki ilişki

$$\omega = c_T k \zeta \quad (4.5)$$

şeklindedir. ζ ise denklem (4.6)'nın köküdür [5].

$$\zeta^6 + 8\zeta^4 - 8\zeta^2 \left(3 - 2 \frac{c_T^2}{c_l^2} \right) - 16 \left(1 - \frac{c_T^2}{c_l^2} \right) = 0 \quad (4.6)$$

(4.6) denkleminin bir tane reel kökü vardır. Diğer kökleri komplekstir. Bu kök de $\zeta = 0.924257$ 'ye eşittir. Yüzey dalgalarının hızı ise $c_T \zeta$ ifadesine eşittir.

4.3 İnce Plaka Yaklaşımı

Tabakanın serbest titreşimleri için denge denklemini yazarsak [5]

$$\rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{D}{h} \Delta^2 \phi = 0 \quad (4.7)$$

Δ iki boyutlu Laplasyendir. ρ yoğunluk, ϕ ise yayılan dalgadır; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}$ ve

(4.7) için önerilen çözüm;

$$\phi = c \times \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \quad (4.8)$$

Dalga vektörü $\mathbf{k}$, k_x ve k_y iki bileşene sahiptir. (4.8)'i (4.7)'de yerine koyarsak

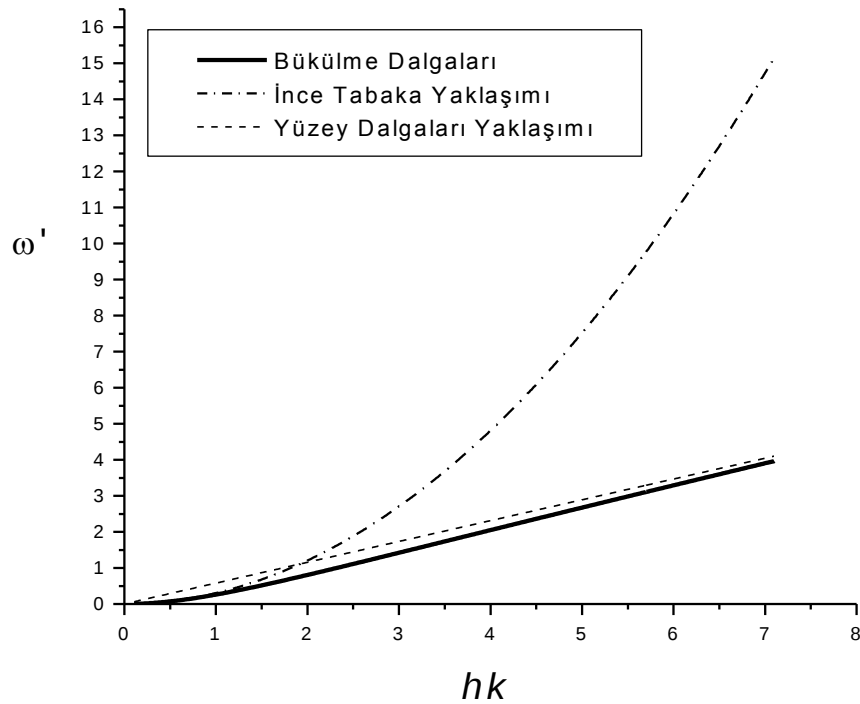
$$-\rho \omega^2 + \frac{Dk^4}{h} = 0 \quad (4.9)$$

elde ederiz. Böylece açısal frekans ile dalga sayısı arasında bir ilişki elde edilir:

$$\omega = k^2 \sqrt{(D / \rho h)} = k^2 \sqrt{\{E h^2 / 12 \rho (1 - \sigma^2)\}} \quad (4.10)$$

4.4 Dispersiyon Bağlantısı

(4.3) denklemi sayesinde bükülme dalgalarının dispersiyon bağlantısı bulunabilir. Kısa dalga boylarında ($\lambda = h$) bükülme dalgaları, yüzey dalgaları gibi davranır. Eğer $\sigma = 0.28$ olarak alınırsa yüzey dalgalarının hızı $0.924257 \times c_T$ dir. $\omega' = \omega h \sqrt{\rho / E}$ boyutsuz açısal frekans olsun [5] sayfa 101' e göre plakanın bükülme dalgaları uzun dalga boyu limitinde (ince tabaka yaklaşımı) $\omega' = (kh)^2 \sqrt{1/(12(1 - \sigma^2))}$ gibi davranmaktadır. Aşağıdaki şekilde dispersif bükülme dalgaları, yüzey dalgaları ve ince plaka yaklaşımında plakanın bükülme dalgalarının dispersiyon bağlantısı gösterilmektedir.



Şekil 4.1 Bükülme dalgaları, ince tabaka yaklaşımı ve yüzey dalgalarının dispersiyon bağlantıları.

Şekil 4.1 de görüldüğü gibi bükülme dalgalarının frekansı dalga vektörü sonsuza giderken, yüzey dalgalarının frekansına aşağıdan yaklaşmaktadır. (4.3) denkleminin köklerini sayısal çözüp şekildeki koyu çizgi ω' 'nın hk 'ya göre ilişkisini verir.

4.5 Dalga Paternleri

Denklem (4.1)'in sağ tarafı x yönünde hareket eden bir tedirgemeyi temsil etmektedir. [6]'daki yöntemi takip ederek (4.1) denkleminin sağ tarafını $\exp(\varepsilon t)$ ile çarpabiliriz. Böylece $\varepsilon > 0$ için problem ilk değer problemine dönüşmüş olur. Sonuçta $t \rightarrow -\infty$ için bütün dalgalar yok olurlar. Bükülme dalgalarından dolayı bu pertürbasyon, enerji aktarımı ile zamanla eksponansiyel olarak büyür. Problem çözüldükten sonra $\varepsilon \rightarrow 0^+$ limiti alınır. Denklem (4.1)'in z yönünde ortalamasını alıp, yatay koordinatlara göre Fourier dönüşümünü gerçekleştiriyoruz. $K_0(n\pi r'/h)$ ve $\ln(r')$ 'in Fourier dönüşümleri sırasıyla $2\pi/(n^2\pi^2/h^2 + k^2)$ ve $-2\pi/k^2$ dir. Kalınlık ortalaması alınmış denklem (4.1)'in sağ tarafının Fourier uzayında $\mathbf{k}$ bileşeninin zamana bağıllığı $\exp(\varepsilon t - ik_x V_0 t)$ şeklindedir. Sol tarafının da aynı şekilde zamana bağlı olacağı aşıkardır. (4.1)'in Fourier uzayında çözülüp, ters Fourier dönüşümü alınarak $\eta^{(2)}$ bulunabilir. $\eta^{(2)}$, dikey yer değiştirme $u_z^{(2)}$ 'in plakanın kalınlığı üzerinden ortalamasıdır.

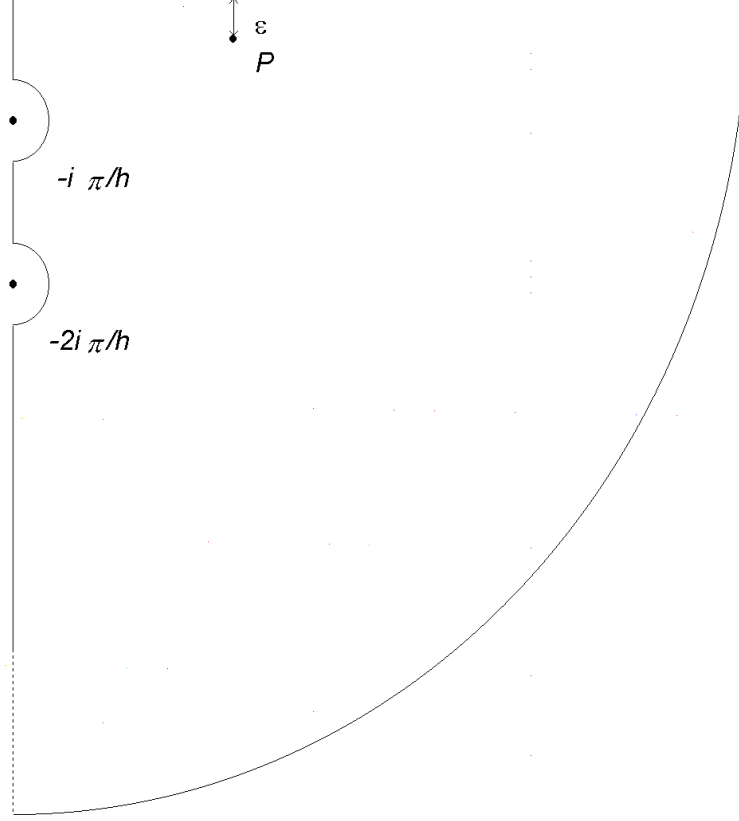
$$\eta^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \text{tek}} \left\{ \int d^2\mathbf{k} \frac{V_0^2 k_x^2 e^{ik \cdot \mathbf{r}'}}{-2V_0 \varepsilon i k_x - V_0^2 k_x^2 + \omega^2(k)} \left(\frac{-2A_n/h + 2B_n/n\pi}{n^2\pi^2/h^2 + k^2} + c_n \frac{1}{k^2} \right) \right\} \quad (4.11)$$

Entegralin $k=0$ civarında c_n/k^2 gibi ıraksaması yüzünden entegralden c_n/k^2 çıkarıp $\eta^{(2)}$ 'ye $c_n \ln(r')$ 'yi ekliyoruz. Entegrasyon için polar koordinatlar kullanırsak entegral aşağıdaki şekli alır.

$$\eta^{(2)} = \sum c_n \ln(r') + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\chi \int_0^{+\infty} k dk \exp(ikr' \cos(\chi - \xi)) \left\{ \frac{V_0^2 k^2 \cos^2(\chi)}{-2V_0 \varepsilon i k \cos(\chi) - V_0^2 k^2 \cos^2(\chi) + \omega^2(k)} \right\} \\ \times \left(\frac{-2A_n/h + 2B_n/n\pi}{n^2\pi^2/h^2 + k^2} + c_n/k^2 \right) + c_n/k^2 \quad (4.12)$$

Burada χ , $\mathbf{k}$ dalga vektörü ile x eksenini arasındaki açıdır. $\xi - \chi$ ise $\mathbf{k}$ ile $\mathbf{r}'$ arasındaki açıdır. (4.11)'deki dalga vektörü $\mathbf{k}$ π açısı kadar döndürüldüğünde, eksponansiyel fonksiyon kompleks konjugüsüne gider. Entegrasyona göre polar açısı

olan χ 'in sınırları $-\pi/2, \pi/2$ dır. k üzerinden yapılan entegrasyon, kompleks düzlemde $\cos(\chi - \xi)$ 'in işaretine bağlı olarak yukarı veya aşağı kadrandan kapatılabilir. Problem x eksenine göre simetrik olduğundan dolayı neticeyi sadece $0 < \xi < \pi$ bölgesinde hesaplayabiliriz. Aşağıda görülen şekil entegrasyonu hesapladığımız konturdur.



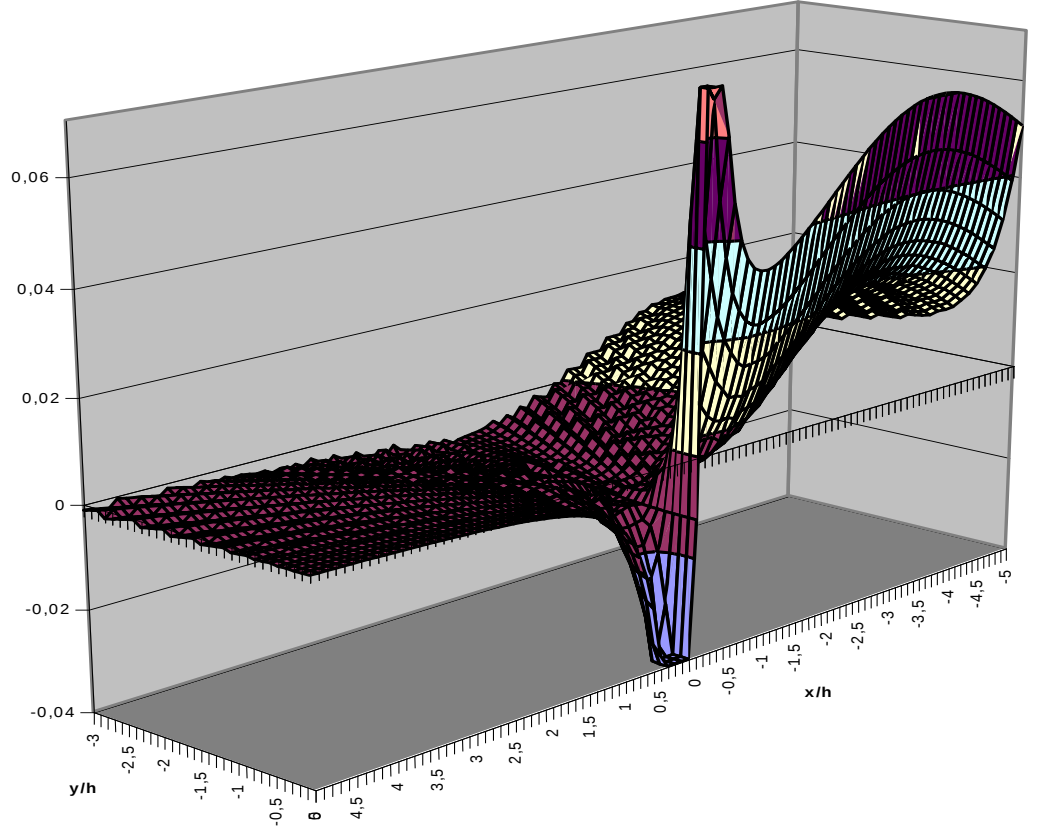
Şekil 4.2 Entegrasyonu aldığımız kontur.

$$-2V_0 \varepsilon i k \cos \chi - V_0^2 k^2 \cos^2 \chi + \omega^2(k) = 0 \quad (4.13)$$

denklemini sağlayan kutup, $\cos(\chi - \xi)$ negatif olduğu takdirde kontur içinde kalacaktır. Pozitif olduğu zaman ise entegrasyon yolu yukarıdan kapatılıp bu rezidüden katkı gelmeyecektir. Bu kutup, eğer ısı kaynağının hızı yüzey dalgasının hızından büyükse kaybolur. $K_0(n\pi r/h)$ 'in Fourier transformu imajiner ekseninde kutuplara sahiptir ama bunların integrale katkıları ihmal edilebilecek kadar küçüktür. P kutbunda k 'nün değeri yaklaşık olarak hesap ettiğimiz taktirde

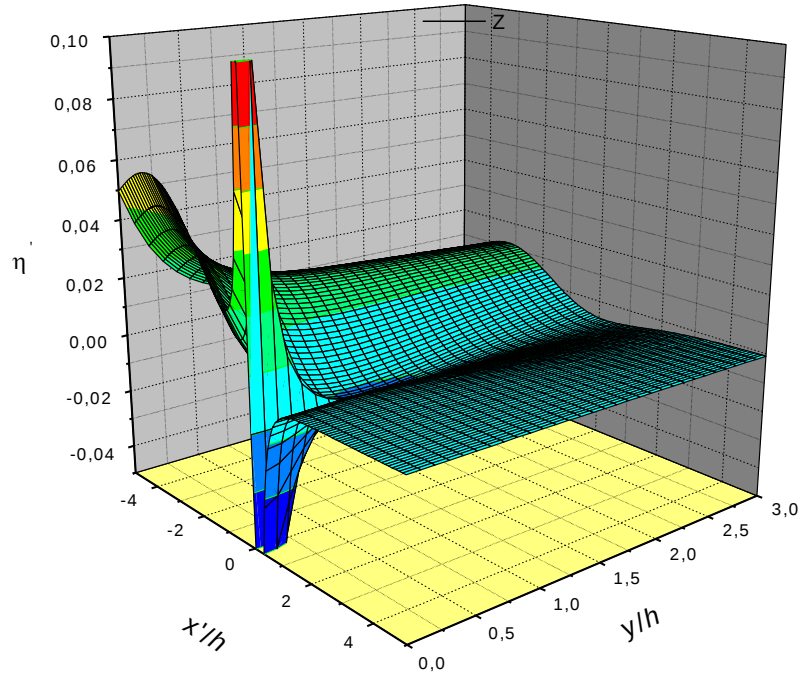
$$k \approx \frac{V_0}{h} \sqrt{\frac{12\rho(1-\sigma^2)}{E}} \cos \chi \quad (4.14)$$

ifadesini buluruz. $\exp(i \cos \chi \cos(\chi - \xi))$ 'ye göre χ , $\chi = \xi / 2 + n\pi / 2$ de durgun noktaya sahiptir. Rezidü, χ polar açısı üzerinden $-\pi / 2$ and $-\pi / 2 + \xi$ entegre edilir. Aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi dalgaanın tepesi, gidiş yönüyle yaklaşık olarak 90° derece açı yapar.



Şekil 4.3a Meydana gelen dalga paterni.

Şekil 4.3b de dalga paterninin farklı bir açıdan görünümü vardır. Bu şekilden de anlaşılacağı üzere ısı kaynağı x yönünde giderken arkasında dalga paterni meydana getirmektedir.



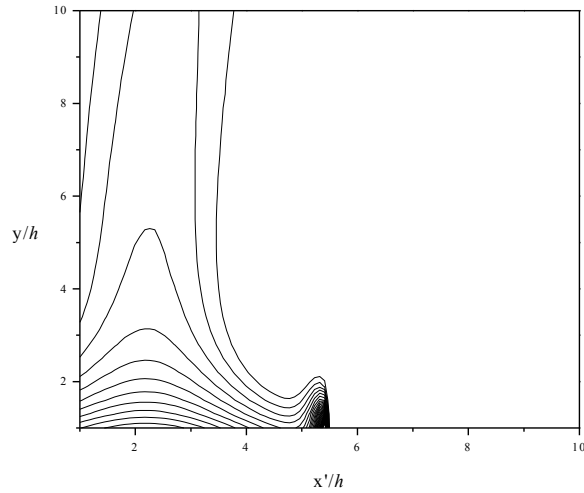
Şekil 4.3b. Meydana gelen dalga paterni.

5. SONUÇ VE TARTIŞMALAR

Denklem (4.2)'de verilen kutup üzerinde k , $\cos \chi$ ile orantılıdır. Bu durumda entegrasyon yapıldığında $\xi = \pi / 2$ için $\chi = \pi / 4$ durağan nokta olur. Bu durum açıkça şekil 4.3. de görülmektedir ve y eksenine dalganın tepesi ile çatışmaktadır. Bu çalışmada hesaplanan dalgalar ısı kaynağının bulunduğu çerçevede durağandır. Plakanın çerçevesine geçildiğinde ise açılal frekansları $k_x V_0$ olacaktır. Bükölme dalgalarının dispersiyon bağıntısı için boyuna dalga yaklaşımı kullanıldı. (4.11) denkleminde $\chi_{stationary} = -\pi / 2 + \xi / 2$ durağan nokta olur. Bundan dolayı

$$\left. \frac{d}{d\chi} \exp(i \cos \chi \cos(\chi - \xi)) \right|_{\chi_{durgun\ nokta}} = 0 \quad (5.1)$$

Bu problem, bu yönden Kelvin'in gemi dalgası probleminden farklı olur. Kelvin'in gemi dalgası problemi, su yüzeyi üzerinde sabit hızla giden cismin meydana getirdiği dalga paternidir ve dalganın tepesi gidiş doğrultusu ile yaklaşık olarak $19,8^\circ$ açı yapar. Şekil 5.1 de dalganın tepesi yaklaşık olarak 90° derece açı yapar.



Şekil 5.1 Meydana gelen dalga paternlerinin kontur gösterimi.

KAYNAKLAR

- [1] **Nowacki W**, 1962. Thermoelasticity, Oxford.
- [2] **Tsuji M, Nishitani T, Shimizu** 1996. Three dimensional coupled thermal stress in infinite plate subjected to a moving heat source, *J.Strain anal.***31** 243-247.
- [3] **Postacıoğlu N, Kapadia P, Dowden J M**, 1997. The thermal stress generated by moving elliptical weld pool in the welding of thin metal sheets, *J.Physics D Applied Phys.* **30** 2304-12.
- [4] **Postacıoğlu N, Kapadia P, Dowden J M**, 2000. Distortion generated by a moving weld pool of elliptical cross section in the welding of thin metal sheets, *J.Physics D Applied Phys.* **33** 1739-1746.
- [5] **Landau L, Lifshitz E**, 1986. Theory of elasticity, Oxford
- [6] **Whitham G. B**, 1973. Linear and nonlinear waves 409.
- [7] **Smith R.C.T**, 1951. The bending of semi infinite strip, *Austral. J. Sci. Res.* **5** 227.

ÖZGEÇMİŞ

1977’de Denizli’nin Güney İlçesinde doğdu. Orta öğretimini Denizli Anadolu Lisesinde tamamladıktan sonra 1994 yılında EGE Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümüne kayıt oldu. 1998 yılında mezun oldu. 1999 yılında YÖK’ün açmış olduğu “Yurt İçinde Lisansüstü Eğitim Yapmak Üzere Araştırma Görevliliği” sınavını kazandı. ODTÜ’de 6 ay İngilizce hazırlık gördükten sonra Harran Üniversitesi adına 35. madde ile İTÜ’ye lisansüstü eğitim yapmak için geldi. Şu anda İTÜ Fizik bölümünde çalışmalarına devam etmektedir.