

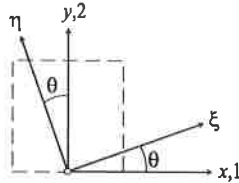
KEYFİ DOĞRULTUDA ORTOTROP PASTERNAK ZEMİNİNE OTURAN MİNDLİN PLAĞINDA SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ

Akif KUTLU* ve Mehmet H. OMURTAG*

*İTÜ, İnşaat Fakültesi, Mekanik Anabilim Dalı, Maslak, İstanbul.

GİRİŞ

Birçok mühendislik yapısında taşıyıcı sistemin oluşturulmasında kullanılan plak elemanlara örnek olarak yapı sistemlerinde kullanılan döşemeler ve temeller, sıvı basıncına maruz çelik plaklardan oluşan gemi elemanları, modern hava taşıtlarının parçaları, çeşitli türbin ve silo tarzı yapı elemanları sayılabilirler (Timoshenko ve Krieger [1]). Plak- zemin etkileşimi ise yapı-zemin etkileşimi problemlerinin önemli bir kısmını oluşturmakta ve bu alanda literatürde birçok çalışmaya rastlanmaktadır (Uğurlu ve ark. [2]). Esasında oldukça karmaşık olan yapı-zemin etkileşim problemi geliştirilen mekanik modeller vasıtasıyla mühendislik açısından kabuledilebilir sonuçlar elde edilebilmektedir. İlk olarak düşey ayrık yaylar biçiminde Winkler [3] modeli geliştirilmiştir. Daha sonra çeşitli iki parametrelili modeller gündeme gelmiştir. Bunlar içerisinde en yaygın olarak kullanılan Pasternak [4] modelidir. Bu modelde yaylar arasında bir kayma etkileşimi olduğu varsayılmaktadır. Pasternak zeminin en önemli özelliği zemindeki ortotropi özelliğini yansıtabilmesidir. Bugüne kadarki yapılan çalışmalarda zemin ortotropi doğrultularının plak eksen takımıyla çakışması hali göz önüne alınmıştır. Bu çalışmada diğer çalışmalardan farklı olarak zemindeki ortotropinin keyfi bir doğrultuda olması durumu için (plak eksen takımlarıyla çakışmaması hali) alan denklemleri düzenlenerek, plak-zemin etkileşimini gözetecek bir özgün fonksiyonel üretilmiştir. Daha sonra plak serbest titreşim problemi karışık sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak incelendi. Plak teoremi olarak nispeten kalın plaklar için Mindlin tarafından önerilmiş plak kesitinde sabit kayma açısı halini göz önüne alan model kullanılmıştır (Kutlu ve Omurtag [5])



Şekil 1: Global koordinat takımı ve Pasternak zemininde ortotropi doğrultusu
((x,y) ya da (1,2) plak global koordinatları, (ξ,η), zemin ortotropi doğrultuları)

MATEMATİKSEL FORMÜLASYON

Elastik Zemin

Çalışmada global koordinat takımı (x,y) ya da (1,2), zemin ortamındaki ortotropiyi ifade eden (ξ,η) koordinat takımı, ve bu koordinatlar arasındaki θ açısı Şekil (1) deki gibidir. Bu

durumda G_ξ ve G_η zemindeki ξ ve η doğrultularındaki kayma modülü değerleri, u_1, u_2 ve u_3 ise x_1, x_2 ve x_3 doğrultularındaki plak yer değiştirmeleri olmak üzere, tarif edilen ortotropi koordinatlarından global koordinatlara geçişte, kesme kuvveti için kullanılacak dönüşüm bağıntılarından plak zemin etkileşiminde zeminden plağa aktarılan basıncı temsil eden p değeri zemin elemanında yazılacak düşey denge denklemi,

$$p = ku_3 - G_\xi (\cos^2 \theta u_{3,11} + 2 \cos \theta \sin \theta u_{3,21} + \sin^2 \theta u_{3,22}) - G_\eta (\sin^2 \theta u_{3,11} - 2 \sin \theta \cos \theta u_{3,21} + \cos^2 \theta u_{3,22}) \quad (1)$$

biçiminde elde edilir (Kutlu [6]).

Fonksiyonel ve Sonlu Eleman

Denklem (1) deki basınç ifadesi kullanılarak plak-zemin etkileşimi için gerekli özgün fonksiyonel elde edilmiştir. Bu amaçla potansiyel operatör ilkesi ve Gâteaux türevinden yararlanılmıştır. Elde edilen fonksiyonel karışık sonlu eleman yöntemi ile çözüme uygun ve gerekli sınır koşullarını da içerisinde barındıran bir yapıdadır. Karışık sonlu eleman formülasyonu 13 değişkeni barındırmaktadır. Bunlar; x, y , ve z eksenleri doğrultusunda yer değiştirmeler (u_1, u_2, u_3), iki eksen etrafındaki kesit dönmeleri (Ω_1, Ω_2) iki eğilme (K, M) bir burulma (T) moment, iki eksenel kuvvet (P, N), iki kesme kuvveti (F, H) ve bir düzlem içi kesme (Q) kuvvetidir. Söz konusu formülasyonun karışık yapıda olması (kuvvet ve yer değiştirme türü büyüklükleri bir arada barındırması) sebebiyle problem doğrudan bir öz-değer çözümüne dönüştürebilmek için sistem sonlu eleman matrisine bir indirgenme işlemi uygulanarak gerilme bileşkesi türü değişkenler denklem takımından elenmişlerdir. Elde edilen indirgenmiş matris böylece löz-değer problemi için gerekli yapıya dönüştürülmüştür. Matematiksel formülasyonda nispeten kalın plakların hesabı söz konusu iken önemli bir parametre olan plak dönel eylemsizlikleri bu çalışmada kütle matrisi hesabında kullanılmıştır. Daha hassas sonuçlar elde edebilmek için yayılı kütle matrisi formülasyonu kullanıldı. Sayısal çözümler için 4 düğüm noktalı dikdörtgen elemanlardan yararlanıldı. İzoparametrik seçilen sonlu elemanlar üzerinde 2×2 Gauss şeması kullanılarak integraller sayısal olarak hesaplandı. Düğüm noktasında belirlenecek olan bilinmeyenler cinsinden plak üzerindeki serbest değişkenler şekil fonksiyonları yardımı ile tarif edildi. Bu şekilde plak serbest değişkenleri fonksiyonelin içerisine yerleştirilmiş olurlar. Daha sonra denklem takımını elde etmek üzere fonksiyonelin düğüm noktası bilinmeyenlerine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenir. Bu şekilde her bir elemandan elde edilen denklem takımları birleştirilerek sistem matrisi oluşturulur ve son aşamada denklem takımının çözümüne gidilir.

Bu çalışmada çözülecek örneklere, tamamen özgün olmaları nedeniyle, bunlara karşılık gelecek problemler literatürde mevcut değildir. O nedenle karşılaştırmalar keyfi doğrultuda zemin ortotropisinin özel bir hali olan, izotrop zemin çözümlerini içeren çalışmalarla yapılmıştır. Söz konusu çalışmalar kesin çözüm (Xiang ve ark. [7]) ve 3 boyutlu sayısal çözüm öneren çalışmalardır (Zhou ve ark. [8]). Karşılaştırmalarda basit mesnetli ve ankastre mesnetli olacak şekilde farklı plak sınır koşulları göz önüne alınmıştır (Bakınız Tablo 1). İnce ve nispeten kalın plak yanında daha kalın plaklar için de literatürde sunulan çözümler için karşılaştırmalar yapılmıştır (Bakınız Tablo 2). Farklı zemin parametreleri dikkate alınarak matematiksel modelin fiziksel sınırları üzerinde de durulmuştur.

Tablo 1: CCCC sınır koşullu plakta boyutsuz frekans değerleri

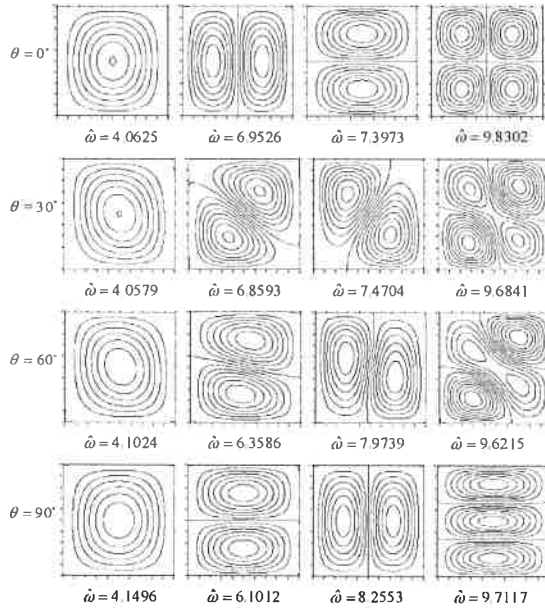
h/a	Φ_1	Φ_2	Yöntem	$\hat{\omega}_{1,1}$	$\hat{\omega}_{1,2}, \hat{\omega}_{2,1}$	$\hat{\omega}_{2,2}$	
0.1	10^2	10	Bu çalışma	6×6 ağ	3.8439	6.9515	9.5996
				10×10 ağ	3.7895	6.8229	9.3949
				16×16 ağ	3.7721	6.7875	9.3423
			Zhou ve ark. [8]	3.7748	6.8041	9.3762	
			10^3	10	Bu çalışma	6×6 ağ	3.9855
	10×10 ağ	3.9825				6.0146	8.2274
	16×16 ağ	3.9813				6.0116	8.2261
	Zhou ve ark. [8]	4.8164			7.4134	9.8160	

Tablo 2: SSSS sınır koşullu plakta boyutsuz frekans değerleri

h/a	Φ_1	Φ_2	Yöntem	$\hat{\omega}_{1,1}$	$\hat{\omega}_{1,2}, \hat{\omega}_{2,1}$	$\hat{\omega}_{1,3}, \hat{\omega}_{3,1}$	
0.2	10^3	10	Bu çalışma	6×6 ağ	3.8619	5.4121	7.6901
				10×10 ağ	3.8587	5.4134	7.8991
				16×16 ağ	3.8575	5.4086	7.9044
			Xiang ve ark. [7]	3.8567	5.4043	7.8938	
			Zhou ve ark. [8]	3.7111	5.2285	7.7191	
	10^5	10	Bu çalışma	6×6 ağ	17.9894	20.0520	22.6516
				10×10 ağ	17.9905	20.0874	22.5936
				16×16 ağ	17.9906	20.0915	21.9535
			Xiang ve ark. [7]	17.9910	20.0920	21.9550	
			Zhou ve ark. [8]	4.6127	7.2934	10.3140	

Kesin ve yaklaşık sunulan diğer çözümlerle yapılan karşılaştırmalar sonucunda yöntemin küçük sonlu eleman ağlarında bile oldukça yeterli sonuçlar verdiği görülmüştür. Gerekli sınırlar içerisinde burada sunulan yöntem ile karşılaştırılan yöntemler arasında son derece iyi bir uyum olduğu görülmüştür. Yeterli doğrulama ve yakınsama adımlarının yapılmasından sonra literatür için yeni olan özgün çözümler sunulmuştur. Burada amaç zemin ortotropisinin değişmesiyle plak serbest titreşiminin nasıl etkilendiği üzerinde durmaktır. Zemin ortotopi doğrultusunun değişmesi, yine zemin parametrelerinin farklı değerler alması durumları için çözümler yapılarak zeminden kaynaklanan ortotropinin plak serbest titreşimine ne ölçüde etkide bulunduğu gözlemlenmek istenmiştir. Bunun için yine serbest ve ankastre sınır koşulları farklı kombinasyonlarla kullanılarak birçok çözüm sunulmuştur. Zemin ortotropisinde etkili olacağı düşünülerek farklı zemin parametre değerleri yine birçok

ortotropi doğrultusu değeri ile birlikte kombine edilerek bir çok çözüm sunulmuş, farklı parametrelerin olay olay üzerindeki etkileri incelenmiştir. Boyutsuzlaştırılmış açılal frekans $\hat{\omega} = (\omega a^2 / \pi^2) \sqrt{\rho h / D}$, zemin parametreleri k ve G $\Phi_1 = k a^4 / D$ ve $\Phi_2 = G a^2 / D$ olacak şekilde (plak rijitliğı $D = E h^3 / [12(1 - \nu^2)]$) plak elastisite modülü $E = 25 \text{ GPa}$, poisson oranı $\nu = 0.3$, genişlik $a = 10 \text{ m}$, plak kalınlığı $h = 1 \text{ m}$ ve $\Phi_1 = 100$, $\Phi_{2(\xi)} = 10$, $\Phi_{2(\eta)} = 70$ zemin sabitleri için CCCC mesnetli plakta serbest titreşim boyutsuz açılal frekans değeri ve mod şekillerinin ortotropi açısı ile birlikte nasıl değıştiğı görölmektedir.



Şekil 2. SCSC mesnetli plakta boyutsuz frekans değeri ve mod şekilleri

KAYNAKLAR

- [1] Timoshenko, S. ve Krieger, S. W., 1959. Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill Book Company.,79-88,41-42
- [2] B. Uğurlu, A. Kutlu, A. Ergin, M.H. Omurtag, 2008. Dynamics of a rectangular plate resting on an elastic foundation and partially in contact with a quiescent Fluid, *Journal of Sound and Vibration* 317 308-328.
- [3] E. Winkler, 1867. Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit, Prag, Dominicus.
- [4] Pasternak, P.L., 1954. On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants, Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstvu i Arkhitekture, Moscow (in Russian).
- [5] Kutlu, A., Omurtag, M. H., 2009. Dynamics of Mindlin Plates Resting on Arbitrarily Orthotropic Pasternak Foundation via Mixed Finite Element Method (düzeltme yapıldı).

- [6] **Kutlu, A.**, 2007. Keyfi doğrultuda ortotrop Pasternak zeminine oturan Mindlin plaklarının serbest titreşimlerinin karışık sonlu elemanlarla analizi, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi.
- [7] **Xiang, Y., Wang, C.M., Kitipornchai, S.**, 1994. Exact vibration solution for initially stressed Mindlin plates on Pasternak Foundations, *International Journal of Mechanical Sciences*, 36(4), 311-316.
- [8] **Zhou, D., Cheung, Y.K., Lo, S.H., Au, F.T.K.**, 2004. Three-dimensional vibration analysis of rectangular thick plates on Pasternak foundation, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 59, 1313-1334.

