

Kanonik Dönüşümler Grubu ve Plazma Dinamiği

Hasan Gümral

Matematik Bölümü, Yeditepe Üniversitesi
34755 Kayışdağı, İstanbul
hgumral@yeditepe.edu.tr

Özet: Poisson-Vlasov denklemleri ile verilen çarpışmasız-plazma yoğunluk fonksiyonunun dinamiği parçacıkların devinimi ve simetrileri ile ilişkilendirildi. Poisson denklemi parçacık hareketinin ayar simetrisinden kaynaklanan bir bağ koşulu olarak yazıldı. Plazma hareketinin konfigürasyon uzayı olarak parçacıkların faz uzayındaki kanonik dönüşümler grubu incelendi. Bu grubun Lie cebirinin Hamiltonyan vektör alanlarından, cebirin eşleniğinin ise parçacık faz uzayı üzerindeki kapalı olmayan bir formlardan oluştuğu gösterildi. Cebirin eşleniği üzerindeki kinetik denklemler dinamiğin Lie-Poisson indirgemesi ve Poisson denklemi ile kısıtlanmış bir varyasyonel türev yardımıyla elde edildi. Parçacıkların yeniden-adlandırılması, ya da gruptaki sağ-çarpım, simetrisi kullanılarak yapılan bu indirgeme sonucunda momentum-Poisson-Vlasov denklemlerine ulaşıldı. Plazma yoğunluğu, momentum değişkenlerinin simplektik eşleniğinin diverjansı olarak tanımlandı. Bu tanımın bir momentum gönderimi, ya da bir simetri sonucu elde edilen bağ koşulu olarak yorumlanabileceği gösterildi. Momentum-Vlasov-Poisson denklemlerinin sözkonusu simetri ile indirgenmesiyle Poisson-Vlasov denklemlerine ulaşıldı.

1 Giriş

Plazma dinamiğinin geometrisi üzerine yaptığımız bu çalışmalar [1]. kaynağın basılmamış bir bölümünün ayrıntılı incelemesi sonucu ortaya çıkmıştır. Önbilgiler ve önceki çalışmalar için [1]-[18] kaynaklarına başvurulabilir. Bu makalede, dinamiğin konfigürasyon uzayını, yani plazma parçacıklarının faz uzayındaki kanonik dönüşümler grubunu inceleyeceğiz. ϕ elektrostatik potansiyel ve f yoğunluk fonksiyonu olmak üzere

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{q}) = -e \int f(\mathbf{z}) d^3\mathbf{p} \quad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{q}} f - e \nabla_{\mathbf{q}} \phi_f \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f = 0 \quad (2)$$

ile verilen Poisson-Vlasov denklemlerinin Hamilton yapısını içeren bu çerçevedir. Öncelikle, Poisson denklemini bir momentum gönderiminin sıfır değeri olarak yazıp, Euleryan değişkenlerin dinamiği üzerinde bir bağ koşulu oluşturduğunu göstereceğiz. Bunu akılda tutarak, kanonik dönüşümler grubunun geometrisini inceleyeceğiz. Daha sonra grubun koteğit uzayından kinematik simetrilerle indirgeme yoluyla momentum-Vlasov-Poisson denklemlerini elde edeceğiz. Bir başka simetri indirgeme-siyle Vlasov-Poisson denklemlerine ve Hamilton yapısına ulaşacağız.

2 Plazmanın Çarpışmasız Devinimi

Üç boyutlu $\mathcal{Q}$ uzayındaki elektrik yüklü parçacıkların deviniminden başlayarak, plazma dinamiğinin konfigürasyon uzayının koteğit uzay $T^*\mathcal{Q}$ üzerindeki kanonik dönüşümlerden oluşan sonsuz boyutlu bir grup olduğu sonucuna varacağız. [19]. kaynakta verilen önemli makalede Arnold, ideal akışkanın dinamiğinin Hamilton (Lie-Poisson) formulasyonu için hacim koruyan türevlenebilir dönüşümlerin sonsuz boyutlu Lie grubunu kullanma düşüncesini tanıttı. Bu grubun titizlikle yapılmış sonsuz boyutlu analizi [20]. kaynakta verildi ve bulunan sonuçların kanonik dönüşümler grubuna da genişletilebileceğine işaret edildi. Kanonik dönüşümler grubunun modern simplektik topoloji çerçevesinde çalışılması hakkında [21]. kaynağı önerebiliriz. Türevlenebilir dönüşüm gruplarının değişik özellikleri, işlenişi ve uygulamaları için [22]-[24] kaynaklarına başvurulabilir.

2.1 Kinematik gösterim

$\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^3$ plazma parçacıklarının hareket ettiği konfigürasyon uzayı olsun. Koteğit demeti $T^*\mathcal{Q}$ momentum faz uzayıdır. Bu uzayın $\Omega_{T^*\mathcal{Q}} = dq^i \wedge dp_i$ kanonik iki-formu ile tanımlanan doğal bir simplektik yapısı vardır. (İki formun tanımında tekrarlanan indisler üzerinden toplama

kuralını uyguladık.) İlerleyen bölümlerde $\Omega_{T^*Q}^2$ işareti ile simplektik iki-formun $T^*T^*Q \rightarrow TT^*Q$ uzayları arasında tanımlandığı ve bir bir-formu bir vektör alanına gönderen doğal izomorfizmayı göstereceğiz [1], [2].

T^*Q üzerindeki parçacık dinamiği bir Hamilton fonksiyonu seçimiyle tam olarak tasvir edilebilir. Yerel olarak parçacıklar T^*Q üzerindeki simplektik yapıyı koruyan vektör alanlarının integral eğrilerini takip ederler. Bu tür bir eğriyi $t \rightarrow \varphi_t$ ile gösterelim.

Referans noktası ya da Lagranjyan etiket denilen bir nokta olarak $Z \in T^*Q$ verildiğinde, plazma parçacığının Euleryan koordinatlarını veya eşanlamlı olarak, t anındaki faz uzayı noktasını $z = \varphi_t(Z)$ veya $z = (q, p) = \varphi(Z, t)$ ile gösterelim. Faz uzayındaki hız zamana bağlı bir vektör olan

$$\dot{z} = \frac{d}{dt}\varphi_t(Z) = X(z, t) = X_t(\varphi_t(Z)) \quad (3)$$

tarafından tanımlanır ve bu vektör φ_t akışını üretir. φ_t kanonik bir dönüşüm olduğundan X vektörü yerel anlamda Hamiltonyandır. Bu vektörün global anlamda da Hamiltonyan olduğunu ve bu durumda $h(z, t)$ fonksiyonunun Hamilton fonksiyonu olduğunu varsayacağız. Böylece her t anında $X = X_h$ yazabileceğiz.

2.2 Kanonik dönüşümler gurubu

X_h vektör alanının T^*Q üzerindeki akışı φ_t , T^*Q uzayındaki simplektik iki-formu değişmez bırakan tüm dönüşümlerin grubu olarak tanımlanan $G = Diff_{can}(T^*Q)$ uzayının bir parametrelili elemanıdır. Referans plazma koordinatları φ_t gönderiminin tanım kümesi olarak alındığında parçacıkların hareketi tanım kümesinden değer kümesine, yani Euleryan koordinatlara bir gönderim olarak tanımlanabilir. Hareket, grubun tanım kümesi olarak T^*Q üzerinde soldan çarpma işlemiyle tanımlanmış olur. Bu ise plazmanın her bir konfigürasyonunun grubun bir elemanı ile gösterilebilmesi demektir. Grubun sağdan çarpımı soldan çarpım, yani hareket ile yer değiştirebilir ve böylece kinematik gösterimin sonsuz boyutlu simetrisini oluşturur. Bu, parçacıkların yeniden etiketlenmesi simetrisi olarak bilinir. Sol çarpım

$$G \times T^*Q \longrightarrow T^*Q : (\varphi, Z) \rightarrow L_\varphi(Z) = \varphi(Z) = z \quad (4)$$

ile verilen T^*Q daki parçacık hareketi için T^*Q üzerindeki hız vektörü X_φ ,

$$T_\varphi G = \{X_\varphi : T^*Q \rightarrow TT^*Q \mid \tau_G \circ X_\varphi = \varphi\} \quad (5)$$

olarak tanımlanan G 'nin φ noktasındaki teğet uzayının bir elemanıdır. Bu tanımda $\tau_G : TG \rightarrow G$ teğet demetinin doğal izdüşümünü göstermektedir. Tanımdan, X_φ 'nin $\varphi : T^*Q \rightarrow T^*Q$ elemanı üzerinde bir

gönderim olarak düşünüldüğü açıktır. G üzerindeki vektör alanları ise $\varphi \in G$ noktasındaki değeri $X_\varphi \in T_\varphi G$ ile verilen $X : G \rightarrow TG$ gönderimleri olarak tanımlanır. Hareket sol çarpım ile tanımlandığından hız alanı X her $\psi \in G$ için G' 'deki sağ çarpım $R_\psi : G \rightarrow G$ altında değişmez kalacaktır.

G' 'de sağ çarpım altında değişmez kalan vektör alanlarının uzayını, ϕ gönderimi boyunca itme operatörü $(R_\phi)^*$ 'ı kullanarak $\{X \mid (R_\phi)^*X = TR_\phi \circ X \circ \phi^{-1} = X \ \forall \phi \in G\}$ şeklinde tanımlarsak, bu uzay T^*Q' 'da özdeşlik dönüşümüne karşılık gelen G' 'nin birim elemanındaki teğet uzaya izomorfiktir. Eğer X_h, T^*Q' 'da $\Omega_{T^*Q}^i(dh)$ şeklinde de gösterilebilen ve φ akışına sahip bir Hamiltonyan vektör alanı ise, her $\varphi \in G$ noktasında sözkonusu izomorfizma

$$X_h \rightarrow X_h \circ \varphi \quad \forall X_h \in T_{id}G \quad (6)$$

olarak tanımlanır. Bu durumda G' 'nin Lie cebiri

$$\mathfrak{g} = (\mathcal{X}_{ham}(T^*Q) ; -[,]) \quad (7)$$

T^*Q üzerindeki tüm Hamiltonyan vektör alanları uzayında $[,]$ ile gösterilen Jacobi-Lie parantezi ile verilir [2]. (6). denklemdaki izomorfizma gerçekte Lagranjyan ve Euleryan hızlar arasındaki

$$X_\varphi(\mathbf{Z}, t) = X_h(\mathbf{z}, t) = (X_h \circ \varphi_t)(\mathbf{Z}) \quad (8)$$

ilişkisinden başka birşey değildir. Eğer φ gönderimini (ξ, η) şeklinde ayırırtırsak, bu ilişki koordinatlarda

$$X_\varphi(\mathbf{Z}, t) = \dot{\xi}^i(\mathbf{Z}) \frac{\partial}{\partial q^i} + \dot{\eta}_i(\mathbf{Z}) \frac{\partial}{\partial p_i} = \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \dot{p}_i \frac{\partial}{\partial p_i} = X_h(\mathbf{z}, t). \quad (9)$$

şeklinde yazılabilir. Hamiltonyan vector alanını, bir sabit ekleme dışında tam olarak belirlenebilen Hamilton fonksiyonu ile $X_h \rightarrow h$ biçiminde özdeşleştirirsek ve Jacobi-Lie parantezi ile Poisson parantezi arasındaki

$$[X_h, X_k] = -X_{\{h,k\}_{T^*Q}} \quad (10)$$

ilişkiyi kullanırsak, Lie cebiri ile T^*Q üzerinde kanonik Poisson parantezi ile donatılmış fonksiyonlar arasında $\mathfrak{g} \simeq (\mathcal{F}(T^*Q); \{ , \}_{T^*Q})$ Lie cebiri izomorfizmasını elde ederiz.

Lie cebiri $\mathfrak{g} = \mathcal{X}_{ham}(T^*Q)$ 'nin eşlenik uzayını T^*Q üzerinde kapalı olmayan bir-form yoğunluklarından oluşturduğumuz

$$\mathfrak{g}^* = \{\Pi_{id} \otimes d\mu \in \Lambda^1(T^*Q)/d\mathcal{F}(T^*Q) \otimes Den(T^*Q)\} \quad (11)$$

vektör uzayı olarak tanımlayalım. Burada $d\mu \in Den(T^*Q)$ hacim elemanı T^*Q üzerinde bir altı-formdur. Her $z \in T^*Q$ noktasında altı-formlar uzayı $\Lambda^6(T^*Q)$ bir boyutludur ve simplektik hacim elemanı $d\mu = \Omega_{T^*Q}^3$ bu uzay için bir baz olarak kabul edilebilir. Bu tanımlarla $\mathfrak{g}$ ve $\mathfrak{g}^*$ arasında L^2 -normuna göre aşağıdaki eşleniklik ilişkisi tanımlanabilir

$$\begin{aligned} \langle X_h, \Pi_{id} \otimes d\mu \rangle &= \int_{T^*Q} \langle X_h(z), \Pi_{id}(z) \rangle d\mu(z) \\ &= - \int_{T^*Q} \langle \Pi_{id}^\sharp(z), dh(z) \rangle d\mu(z) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{T^*Q} [-\nabla_z \cdot (h(z)\Pi_{id}^\sharp(z)) + h(z)\nabla_z \cdot (\Pi_{id}^\sharp(z))] d\mu(z) \\ &= \int_{T^*Q} h(z)\nabla_z \cdot \Pi_{id}^\sharp(z) d\mu(z) \end{aligned} \quad (13)$$

$$= \langle h(z), \nabla_z \cdot \Pi_{id}^\sharp(z) \rangle. \quad (14)$$

İntegral içindeki eşleniklik sonlu boyutlu T^*Q uzayı üzerindedir. Üçüncü satırda uygun sınır koşulları varsayarak diverjans terimini attık. Son satırdan, cebir ile eşleniği arasındaki bu ilişkinin $\nabla_z \cdot (\Pi_{id}^\sharp) \neq 0$ koşulunun sağlandığı durumda asla sıfır olmayacağı açıktır. Bu durumda, cebirin fonksiyon uzayı ile özdeşleştirilmesinin eşlenik uzayın T^*Q üzerindeki hacim yoğunlukları uzayı $Den(T^*Q)$ ile özdeşleştirilmesini olanaklı kıldığı görülür. Hacim yoğunluğunu yukarıdan sıfır olmadığını bildiğimiz büyük-
lük

$$f(z) = \nabla_z \cdot (\Pi_{id}^\sharp) = \frac{\partial \Pi_i(z)}{\partial p_i} - \frac{\partial \Pi^i(z)}{\partial q^i} \neq 0 \quad (15)$$

olarak tanımlamak, bize cebirin eşleniği ile yoğunluklar arasında tek taraflı bir ilişki verir

$$\Pi_{id} \in \mathfrak{g}^* \longrightarrow f d\mu \in Den(T^*Q).$$

Yoğunluk fonksiyonunun simetri ve momentum gönderimi çerçevesinde kesin bir şekilde elde edilebileceğini daha sonra göstereceğiz. Yukarıdaki özdeşleştirmeler Lie cebiri ile eşleniği arasındaki ilişkiyi Hamilton ve yoğunluk fonksiyonları arasındaki

$$\langle h, f \rangle = \int_{T^*Q} h(z)f(z) d\mu(z) \quad (16)$$

çarp-ve-integralini al şeklindeki ilişkiye dönüştürür ki burada hangisinin Hamilton hangisinin yoğunluk fonksiyonu olduğuna karar verebilmek olanaksızdır.

$d\Pi_{id} \neq 0$ olduğundan eşlenik uzayı Hamiltonyan olmayan vektör alanlarının uzayı

$$(\mathfrak{g}^*)^\sharp = \{ \Pi_{id}^\sharp = \mathcal{O}_{T^*Q}^\sharp(\Pi_{id}) \in TT^*Q \mid \Pi_{id} \in \Lambda^1(T^*Q) \}$$

olarak tanımlamak da olasıdır. Bu durumda, plazma yoğunluk fonksiyonunun tanımına göre Hamiltonyan vektör alanları toplama işlemine göre eşlenik uzayın simetrilerini oluşturacaktır. Ayrıca, TT^*Q teğet uzayı, bir vektör uzayı olarak cebiri ve eşleniğini oluşturan altuzayların toplamı olarak $\mathfrak{g} \oplus (\mathfrak{g}^*)^\sharp$ şeklinde yazılabilecektir. Genelleştirilmiş ve geometrik anlamda Legendre dönüşümlerine uygun bir zemin oluşturan bu teğet uzayının ve yukardaki ayrışmasının incelenmesini daha sonraki çalışmalarımıza bırakarak konfigürasyon uzayının geometrisini incelemeyi sürdürüelim.

$\mathfrak{g}$ ve $\mathfrak{g}^*$ uzaylarının eşleşmesini Lie grubunun teğet ve koteğit demetlerinin eşleşmesine genişletmek için öncelikle koteğit demetini tanımlamamız gerekir. G grubunun φ noktasındaki kovektör uzayı olan $\Lambda_\varphi^1 G$ 'nin Π_φ ile göstereceğimiz bir elemanı φ üzerinde bir gönderim olarak tanımlarsak

$$\Lambda_\varphi^1 G = \{ \Pi_\varphi : T^*Q \mapsto T^*T^*Q, \pi_G \circ \Pi_\varphi = \varphi \} \quad (17)$$

G üzerindeki bir-form alanı $\Pi : G \longrightarrow \Lambda^1 G$ şeklinde bir kesit olarak gösterilebilir, öyle ki; her $\varphi \in G$ için bu alanın değeri $\Pi_\varphi \in \Lambda_\varphi^1 G$ olur. $G = Diff_{can}(T^*Q)$ üzerindeki bir-form yoğunluklarının uzayı

$$T_\varphi^* G = \{ \Pi_\varphi \otimes d\mu \in \Lambda_\varphi^1 G \otimes Den(T^*Q) \} \quad (18)$$

φ noktasındaki koteğit uzayı oluşturur. $\varphi \in G$ noktasındaki teğet ve koteğit uzaylarının doğal eşleşmesi

$$\langle X_\varphi, \Pi_\varphi \otimes d\mu \rangle = \int_{T^*Q} \langle X_\varphi(Z), \Pi_\varphi(Z) \rangle d\mu(Z) \quad (19)$$

halini alır. Grubun cebiri üzerindeki etkisi $Ad_\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, T^*Q 'daki Hamiltonyan vektör alanlarının ötelenmesi olarak

$$\begin{aligned} Ad_\varphi(X_h) &= \varphi_*(X_h) = T_{id}(L_\varphi \circ R_{\varphi^{-1}}) \circ X_h \\ &= T_{\varphi^{-1}} L_\varphi \circ T_{id} R_{\varphi^{-1}} \circ X_h \\ &= T\varphi \circ X_h \circ \varphi^{-1}. \end{aligned} \quad (20)$$

ile tanımlanır. Cebirin kendi eşleniğindeki etkisi olan $(Ad_\varphi)^* : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ gönderimi ise $Ad_{\varphi^{-1}}$ gönderiminin (12). denklemde tanımlanan eşlemeye göre eşleniği olan $Ad_{\varphi^{-1}}^*$ gönderimi ile tanımlanır ve bir-formların ötelenmesi olarak

$$Ad_{\varphi^{-1}}^*(\Pi_{id}) = \varphi_*(\Pi_{id}) = T_{id}^*(R_\varphi \circ L_{\varphi^{-1}}) \circ \Pi_{id} \quad (21)$$

ile verilir. Birim elemanda türev alınarak cebirin kendisi üzerindeki ad_{X_h} etkisi ile eşlenik uzayı üzerindeki $ad_{X_h}^*$ etkisinin $X_h \in T^*Q$ şeklindeki Hamiltonyan vektör alanlarının Lie türeviyle tanımlandığı görülür. Başka bir deyişle, $X_h, X_k \in \mathfrak{g}$ ve $\Pi_{id} \in \mathfrak{g}^*$ verildiğinde, $\mathcal{L}_{X_h}$ ile gösterilen Lie türevinin $\mathfrak{g}$ veya $\mathfrak{g}^*$ uzaylarında etki ettiğine bakılarak $ad_{X_h} \in T_{X_h}\mathfrak{g}$ veya $ad_{X_h}^* \in T_{X_h}\mathfrak{g}^*$ şeklindeki teğet vektörleri olarak yorumlanması olasıdır.

Gruptaki sağ çarpımın T_ψ^*G teğet uzayındaki görünümü

$$T_{\varphi \circ \psi^{-1}}^* R_\psi(\Pi_\varphi) = \Pi_\varphi \circ \psi^{-1} \quad (22)$$

şeklinde. $\psi = \varphi$ için bu çarpım Π_φ bir-formunun $\Pi_{id} \equiv \Pi_\varphi \circ \varphi^{-1}$ ile göstereceğimiz birim eleman üzerine ötelenmesini verir. Tanım olarak Π_{id} Hamiltonyen vektör alanları cebirinin eşleniği olan $\mathfrak{g}^*$ uzayının bir elemanıdır. Sol çarpım ile verilen plazma hareketinin koteğit uzayındaki formülasyonu için sağ çarpım altında değişmez kalan momentum gönderimi $\mathbf{J}_L : T^*G \rightarrow \mathfrak{g}^*$ tanımdan başlanarak

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{J}_L(\Pi_\varphi) \otimes d\mu, X_h \rangle &= \langle \Pi_\varphi \otimes d\mu, X_h \rangle \\ &= \langle \Pi_\varphi \otimes d\mu, T_{id}R_\varphi \circ X_h \rangle \\ &= \langle T_{id}^*R_\varphi \circ \Pi_\varphi \otimes d\mu, X_h \rangle \\ &= \langle \Pi_\varphi \circ \varphi^{-1} \otimes d\mu, X_h \rangle \\ &= \langle \Pi_{id} \otimes d\mu, X_h \rangle \end{aligned} \quad (23)$$

şeklinde hesaplanırsa $\mathbf{J}_L(\Pi_\varphi) = \Pi_{id} \in \mathfrak{g}^*$ olduğu sonucuna varılır.

3 Bağ Koşulu Olarak Poisson Denklemi

Euleryan dinamik üzerindeki kısıtların ya da bağ koşullarının geometrik yapılarla ilişkilendirilebilecek bir takım ayar simetrileri sonucu elde edilen momentum gönderimleri olarak ifade edilebilecekleri genel indirgeme kuramının bir sonucudur. Buna göre, Poisson denkleminin, bir toplam grubu olarak görülebilecek Q 'daki fonksiyonların uzayı $\mathcal{F}(Q)$ 'nun parçacık hareketinin faz uzayı T^*Q üzerinde etkisiyle elde edilen simetri dönüşümlerine karşılık gelen bir momentum gönderimi olduğunu göstereceğiz.

3.1 Momentum gönderimi olarak Poisson denklemi

T^*Q 'daki kanonik simplektik yapı bu uzayın lif değişkenlerinin Q üzerindeki tam-bir-formlarla ötelenmesi altında değişmez kalır. Bu dönüşümler kanonik Hamilton yapısının ayar dönüşümleridir. T^*Q uzayını $\Lambda^1(Q)$ ile göstereceğimiz Q üzerindeki bir-formlar uzayı ile özdeşleştirirsek, söz konusu ayar değişmezliği fonksiyonların, bir başka deyişle sıfır-formların

$$\Lambda^0(Q) \times \Lambda^1(Q) \rightarrow \Lambda^1(Q) : (\phi(q), p \cdot dq) \rightarrow p \cdot dq + d\phi(q) \quad (24)$$

ile verilen Hamiltonyan etkisi olarak gösterilebilir. Dış türev operatörü $d : \Lambda^0(Q) \rightarrow \Lambda^1(Q)$, cebirsel açıdan, fonksiyonların toplam cebirinden bir-formların toplam cebirine içine-Lie-cebiri-izomorfizması olarak yorumlanabilir. Her içine-Lie-cebiri-izomorfizmasının eşleniği bir momentum gönderimi olduğundan

$$\mathbf{J}_{\mathcal{F}(Q)} : \Lambda^2(Q) \rightarrow \text{Den}(Q) \quad (25)$$

elde ederiz. Burada, iki-form uzayı $\Lambda^2(Q)$ ve yoğunluklar uzayı $\text{Den}(Q)$ (yani iç-formlar) L^2 -normuna göre $\Lambda^1(Q)$ ve $\Lambda^0(Q)$ uzaylarının eşleniği olarak alınabilir. Q 'daki bir Riemann metriğinin Hodge eşleniği operatörü $*$ 'ı kullanarak $\Lambda^2(Q)$ ile $\Lambda^1(Q)$ uzaylarını özdeşleştirebiliriz. Bu durumda momentum gönderimi hesabı

$$\langle \mathbf{J}_{\mathcal{F}(Q)}(\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q}, *d\phi(\mathbf{q})), \phi(\mathbf{q}) \rangle = \int_Q *d\phi(\mathbf{q}) \wedge d\phi(\mathbf{q}) = - \int_Q \phi(\mathbf{q}) d*d\phi(\mathbf{q}) \quad (26)$$

şeklini alır. Buradan momentum gönderiminin

$$\mathbf{J}_{\mathcal{F}(Q)}(\mathbf{p} \cdot d\mathbf{q}, *d\phi(\mathbf{q})) = -d * d\phi(\mathbf{q}) \in \text{Den}(Q)$$

olduğu görülür.

$\mathcal{F}(Q)$ toplam grubunun etkisi T^*Q üzerinde tanımlı nesnelere; örneği: kanonik dönüşümlere, bunların cebirine ve cebirin eşleniğine vb; genişletilebilir. Poisson denklemini momentum gönderimi ile tanımlanan bir bağ koşulu olarak yazma amacımıza uygun olarak tartışmayı $\mathcal{F}(Q)$ 'nın T^*Q üzerindeki fonksiyonların uzayı $\mathcal{F}(T^*Q)$ üzerindeki etkisinin incelenmesi ile sınırlayacağız. Momentum gönderimini yine uygun bir içine-Lie-cebiri-izomorfizması olarak göstermek uygun olacaktır. $\mathcal{F}(T^*Q)$ 'yu Poisson parantezi ile donatılmış ve Hamilton vektör alanları cebirine izomorfik olan bir Lie cebiri olarak düşünüyoruz. Bu cebirin eşlenik uzayı $\text{Den}(T^*Q)$ 'dur. $\text{Den}(T^*Q)$ 'da simplektik hacim elemanı $d\mu(\mathbf{z}) = \Omega_{T^*Q}^3$ ile verilen bazı kullanırsak, bu baz $\mathcal{F}(Q)$ grubunun etkisi altında değişmez kalacağından, grup etkisini basitçe bileşke işlemini kullanarak

$$\mathcal{F}(Q) \times \text{Den}(T^*Q) \rightarrow \text{Den}(T^*Q) : f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) d\mu(\mathbf{z}) \rightarrow f(\mathbf{q}, \mathbf{p} - \nabla\phi(\mathbf{q})) d\mu(\mathbf{z})$$

ile gösterebiliriz. Tanımları kullanarak

$$\langle \mathbf{J}_{\mathcal{F}(Q)}(f(\mathbf{z}) d\mu(\mathbf{z})), \phi(\mathbf{q}) \rangle = - \int_{T^*Q} f(\mathbf{z}) \phi(\mathbf{q}) d\mu(\mathbf{z}) \quad (27)$$

ile verilen momentum gönderiminin $\mathbf{J}_{\mathcal{F}(Q)} : \text{Den}(T^*Q) \rightarrow \text{Den}(Q)$, Q üzerinde

$$\mathbf{J}_{\mathcal{F}(Q)}(f(\mathbf{z}) d\mu(\mathbf{z})) = - \int_{T^*Q} f(\mathbf{z}) d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{q} \quad (28)$$

ile verilen hacim yoğunluğu olduğu hesaplanır. $\mathcal{F}(\mathcal{Q})$ 'nın $\Lambda^1(\mathcal{Q})$ ve $\mathcal{F}(T^*\mathcal{Q})$ üzerindeki etkileri birleştirilerek aradığımız

$$\mathbf{J}_{\mathcal{F}(\mathcal{Q})} : \Lambda^2(\mathcal{Q}) \times \text{Den}(T^*\mathcal{Q}) \longrightarrow \text{Den}(\mathcal{Q})$$

momentum gönderiminin

$$\mathbf{J}_{\mathcal{F}(\mathcal{Q})}(*d\phi(\mathbf{q}), ef(\mathbf{z})d\mu(\mathbf{z}); \phi(\mathbf{q})) = -(\nabla^2\phi(\mathbf{q}) + e \int f(\mathbf{z}) d^3\mathbf{p}) d^3\mathbf{q} \quad (29)$$

olduğu görülmüştür. Bu gönderimin sıfır değeri Poisson denklemini verir. Bu değer, $\Lambda^2(\mathcal{Q}) \times \text{Den}(T^*\mathcal{Q})$ çarpım uzayında ve (ϕ, f) Euleryan değişkenlerindeki dinamik için bağ koşulu oluşturur. Yani,

$$\begin{aligned} & \mathbf{J}_{\mathcal{F}(\mathcal{Q})}^{-1}(0)/\mathcal{F}(\mathcal{Q}) \\ &= \left\{ (\phi, f) \in \Lambda^2(\mathcal{Q}) \times \text{Den}(T^*\mathcal{Q}) \mid \nabla^2\phi(\mathbf{q}) + e \int f(\mathbf{z}) d^3\mathbf{p} = 0 \right\} \end{aligned}$$

Lie-Poisson dinamiğinin yaşadığı indirgenmiş uzaydır. Bu uzay, $\Lambda^1(\mathcal{Q}) \times \mathfrak{g}$ Lie cebirinin eşleniği olan $\Lambda^2(\mathcal{Q}) \times \mathfrak{g}^*$ uzayının bir altuzayıdır ve çarpımın ilk faktöründe sıfır Poisson parantezi vardır. Böylece, başlangıçtaki Lie grubumuzun $\mathcal{F}(\mathcal{Q}) \times \text{Diff}_{can}(T^*\mathcal{Q})$ olması gerektiği ve bu çarpımda fonksiyonların kanonik dönüşümlere lif koordinatlarında öteleme yapma şeklinde etki ettiği sonucuna ulaşırız. Yani, Poisson-Vlasov denklemlerinin gerçek konfigürasyon uzayı $\mathcal{F}(\mathcal{Q}) \otimes \text{Diff}_{can}(T^*\mathcal{Q})$ ile göstereceğimiz yarı-çarpım grubudur. Bu görüş, Poisson-Vlasov denklemlerinin Maxwell-Vlasov denklemlerinden ışık hızının sonsuza gittiği limit durumunda elde edilebilmesine olanak tanır. Elektromanyetik alanda çarpışmasız hareket eden yüklü parçacıkların dinamiğini veren Maxwell-Vlasov denklemleri için konfigürasyon uzayı, $\mathcal{A}$ vektör potansiyelleri uzayı olmak üzere, $\mathcal{F}(\mathcal{Q}) \otimes \mathcal{A} \times \text{Diff}_{can}(T^*\mathcal{Q})$ 'dır [25], [26], [10], [18], [3]. Fiziksel birimler iliştiyerek sözkonusu limiti

$$e\mathcal{F}(\mathcal{Q}) \otimes \frac{1}{c} \mathcal{A} \times \text{Diff}_{can}(T^*\mathcal{Q}) \xrightarrow{c \rightarrow \infty} \mathcal{F}(\mathcal{Q}) \otimes \text{Diff}_{can}(T^*\mathcal{Q})$$

şeklinde yazabiliriz.

3.2 Kısıtlı varyasyonel türev

Poisson denklemini plazma yoğunluk fonksiyonu gibi Euleryan değişkenlere göre varyasyonel türev üzerinde bir bağ koşulu olarak kullanmak istiyoruz.

Bu aşamada plazma yoğunluk fonksiyonu f ile elektrostatik potansiyel ϕ_f fonksiyonunu ilişkilendiren Poisson denkleminin Green fonksiyonu tarafından tanımlanan

$$\phi_f(q, t) = e \int_{T^*Q} K(\mathbf{q}|\mathbf{q}') f(\mathbf{z}') d\mu(\mathbf{z}') \quad (30)$$

çözümünü anımsayalım [9]. Euleryan büyüklüğe örnek olarak da Lie-Poisson formülasyonunda karşımıza çıkacak olan

$$H_{LP}(f) = \int_{T^*Q} f(\mathbf{z}) h_f(\mathbf{z}) d\mu(\mathbf{z}) \quad (31)$$

Hamilton fonksiyoneli alalım. Bu fonksiyoneldeki yoğunluğa bağlı görünen

$$h_f(\mathbf{z}) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} e \phi_f(\mathbf{q}) \quad (32)$$

fonksiyonu parçacık dinamiğini düzenleyen Hamilton fonksiyonu h ile potansiyel terimdeki çarpım faktörü dışında aynıdır. (31) ve (32). denklemler ile verilen Hamilton fonksiyoneli plazmanın toplam enerjisinin Euleryan koordinatlardaki ifadesidir. Green fonksiyonu çözümü kullanılarak şu sonuç kolaylıkla elde edilebilir.

Lemma 1

$$\frac{\delta H_{LP}(f)}{\delta f} = \frac{1}{2m} p^2 + e \phi_f(\mathbf{q}) = h$$

Poisson-Vlasov sisteminin Poisson kısmının Hamilton fonksiyonelinin varyasyonu hesabında kinematik bağ koşulu olarak yer aldığını gördük. Dinamiği veren Vlasov kısmının ise Euleryan değişkenlerde kanonik olmayan Hamilton sistemi olarak ortaya çıktığını sonraki bölümlerde göreceğiz. Farklı Euleryan değişkenlerde eşdeğer bir dinamik formülasyon elde etmek için de aynı bağ koşulunu kullanmak gerekir. Bu tür değişkenlerin önde gelenlerinden birisi Hamilton vektör alanları cebirinin eşlenik uzayının T^*Q üzerindeki yoğunluklar uzayı ile özdeşleştirilmesi sonucu ortaya çıkar. Dinamiğin, momentum değişkenleri olan $\Pi_{id} \in \mathfrak{g}^*$ koordinatlarındaki daha temel formülasyonunda Hamilton fonksiyoneli

$$H_{LP}(\Pi_{id}) = \int_{T^*Q} \langle \Pi_{id}(\mathbf{z}), X_{h_f}(\mathbf{z}) \rangle d\mu(\mathbf{z}) \quad (33)$$

ile verilir. Bu fonksiyonelin (15). denklem ile verilen dönüşüm altında $H_{LP}(f)$ fonksiyoneline eşdeğer olduğunu göstermek olasıdır. Kısıtlı varyasyonel türev kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Lemma 2

$$\frac{\delta H_{LP}(\Pi_{id})}{\delta \Pi_{id}} = X_h$$

4 Dinamiğin Momentum Formulasyonu

Bilinen Lie-Poisson indirgemesini G grubu için uygulayacağız [32], [11]. Bu indirgeme T^*Q üzerindeki kapalı-olmayan-bir-formlarla özdeşleştirdiğimiz Lie cebirinin eşlenik uzayındaki dinamik denklemleri verir. Poisson denkleminin yüklediği koşul ile birlikte $\mathfrak{g}^*$ üzerinde dejenere bir Hamilton fonksiyonelinin seçimi $\Pi_{id} \in \mathfrak{g}^*$ değişkenlerinde Vlasov denkleminin elde edilmesiyle sonuçlanır.

4.1 Lie-Poisson dinamiği

Eşlenik uzay $\mathfrak{g}^*$ 'in elemanlarının koteğit uzay T^*G' 'de grubun sağ-etkisi altında değişmez kalacak şekilde genişletilmesi $\mathfrak{g}^*$ 'in sözkonusu elemanlarının momentum gönderimi $\mathbf{J}_L(\Pi_\varphi) = \Pi_{id}$ ile bileşkesi alınarak elde edilebilir. Özel olarak, $\mathfrak{g}^*$ 'da tanımlı herhangi bir $H : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyoneli için sağ-değişmez genişletme

$$H^R = H \circ \mathbf{J}_L, \quad H^R(\varphi, \Pi_\varphi) = H(\Pi_{id}) = H(\Pi_\varphi \circ \varphi^{-1}) \quad (34)$$

ile tanımlanan bir $H^R : T^*G \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonelidir. $\Pi_\varphi = \Pi_{id} \circ \varphi$ alıp zincir kuralı uygulayarak türevlerini

$$\delta H^R = \frac{\delta H^R}{\delta \varphi} \delta \varphi + \frac{\delta H^R}{\delta \Pi_\varphi} \delta \Pi_\varphi = \frac{\delta H^R}{\delta \Pi_{id}} \frac{\delta \Pi_{id}}{\delta \varphi} \delta \varphi + \frac{\delta H^R}{\delta \Pi_{id}} \frac{\delta \Pi_{id}}{\delta \Pi_\varphi} \delta \Pi_\varphi$$

olarak hesaplayabiliriz. Eğer $\Pi_{id}(\mathbf{z}) = \Pi_a(\mathbf{z}) dz^a \otimes d\mu(\mathbf{z}) = (\Pi_i(\mathbf{z}) dq^i + \Pi^i(\mathbf{z}) dp_i) \otimes d\mu(\mathbf{z})$ yazılırsa $(\delta \Pi_{id} / \delta \Pi_\varphi)|_{id} = 1$ ve

$$\frac{\delta \Pi_{id}}{\delta \varphi}|_{id} = \frac{\delta}{\delta \varphi}(\Pi_a(\mathbf{z}) dz^a \otimes d\mu(\mathbf{z}))|_{id} = -d\vec{\Pi}(\mathbf{z}) \otimes d\mu(\mathbf{z})$$

olur. Burada $\vec{\Pi}_{id}$ ile Π_{id} bir-formunun bileşenlerini gösterdik. Böylece, sağ-değişmez bir fonksiyonelin türevlenmesi için

$$\frac{\delta H^R}{\delta \Pi_\varphi}|_{id_G} = \frac{\delta H}{\delta \Pi_{id}}, \quad \frac{\delta H^R}{\delta \varphi}|_{id_G} = -\left(\frac{\delta H}{\delta \Pi_{id}} \cdot \nabla_z\right) \vec{\Pi}_{id} \quad (35)$$

kurallarını elde ederiz. Bunları kullanarak T^*G üzerindeki kanonik Poisson parantezinin birim elemandaki değerini hesaplayabiliriz. T^*G üzerindeki kanonik Poisson parantezinin sağ-değişmez genişletme ile indirgenmesi $\mathfrak{g}^*$ üzerinde (+)Lie-Poisson parantezini verir, bir başka gösterimle $\{F^R, G^R\}_{T^*G} \mapsto \{F, G\}_{+L,P}$ olur. Aşağıdaki sonucu elde ederken şuna gereksinim duyacağız: Eğer X kanonik anlamda Hamiltonyan vektör alanı ise, herhangi bir k fonksiyonu için $X(k)$ bir tam diverjanstır.

Önerme: $\Pi_{id} \in \mathfrak{g}^*$ ve $[,]$ parantezi $\mathfrak{g}$ üzerindeki Jacobi-Lie parantezi olsun. $\delta H / \delta \Pi_{id}$ türevi $\mathfrak{g}^*$ 'nin bir elemanı sayılmak üzere, $\mathfrak{g}^*$ üzerindeki Lie-Poisson parantezi

$$\{H(\Pi_{id}), K(\Pi_{id})\}_{L,P} = \int_{T^*Q} \Pi_{id}(z) \cdot \left[\frac{\delta H}{\delta \Pi_{id}(z)}, \frac{\delta K}{\delta \Pi_{id}(z)} \right] d\mu(z) \quad (36)$$

ile verilir.

Kanıt: Sağ-etkiyle genişletilmiş rastgele iki fonksiyonelin kanonik Poisson parantezini hesaplayacağız.

$$\begin{aligned} & \{H^R, K^R\}_{T^*G}(id, \Pi_{id}) \\ &= \left\langle \frac{\delta H^R}{\delta \varphi}, \frac{\delta K^R}{\delta \Pi_{\varphi}} \right\rangle \Big|_{id} - \left\langle \frac{\delta K^R}{\delta \varphi}, \frac{\delta H^R}{\delta \Pi_{\varphi}} \right\rangle \Big|_{id} \\ &= \left\langle \left(\frac{\delta K}{\delta \Pi_{id}} \cdot \nabla_z \right) \Pi_{id}, \frac{\delta H}{\delta \Pi_{id}} \right\rangle - \left\langle \left(\frac{\delta H}{\delta \Pi_{id}} \cdot \nabla_z \right) \Pi_{id}, \frac{\delta K}{\delta \Pi_{id}} \right\rangle \\ &= \int_{T^*Q} \left\{ \frac{\delta H}{\delta \Pi_{id}} \cdot \left(\frac{\delta K}{\delta \Pi_{id}} \cdot \nabla_z \right) \Pi_{id} - \frac{\delta K}{\delta \Pi_{id}} \cdot \left(\frac{\delta H}{\delta \Pi_{id}} \cdot \nabla_z \right) \Pi_{id} \right\} (z) d\mu(z) \\ &= \int_{T^*Q} \left\{ \left(\frac{\delta K}{\delta \Pi_{id}} \cdot \nabla_z \right) \left(\frac{\delta H}{\delta \Pi_{id}} \cdot \Pi_{id} \right) - \left(\frac{\delta H}{\delta \Pi_{id}} \cdot \nabla_z \right) \left(\frac{\delta K}{\delta \Pi_{id}} \cdot \Pi_{id} \right) \right\} (z) d\mu(z) \\ &\quad - \int_{T^*Q} \Pi_{id}(z) \cdot \left\{ \left(\frac{\delta K}{\delta \Pi_{id}} \cdot \nabla_z \right) \frac{\delta H}{\delta \Pi_{id}} - \left(\frac{\delta H}{\delta \Pi_{id}} \cdot \nabla_z \right) \frac{\delta K}{\delta \Pi_{id}} \right\} (z) d\mu(z). \end{aligned}$$

Son ifadedeki birinci integral bir tam-diverjanstır ve her zaman varsaydığımız uygun sınır koşulları altında yok olur. İkinci integral ise

$$\{H^R, K^R\}_{T^*G}(id, \Pi_{id}) \simeq \int_{T^*Q} \Pi_{id}(z) \cdot \left[\frac{\delta H}{\delta \Pi_{id}}, \frac{\delta K}{\delta \Pi_{id}} \right] (z) d\mu(z)$$

şeklinde yazılabilir ve indirgenmiş Poisson parantezini verir. ■

$\mathfrak{g}^*$ üzerindeki Lie-Poisson dinamiği aşağıdaki şekilde yazılabilir.

Önerme: $\mathfrak{g}^*$ 'daki Lie-Poisson yapısına göre Hamiltonyan vektör alanları

$$\frac{d\Pi_{id}}{dt} = -ad_{\delta H / \delta \Pi_{id}}^*(\Pi_{id}) = \mathcal{L}_{\delta H / \delta \Pi_{id}}(\Pi_{id}) = J_{LP}(\Pi_{id}) \cdot \frac{\delta H}{\delta \Pi_{id}} \quad (37)$$

şeklinde (36). denklemdeki Lie-Poisson parantezini tanımlayan Hamilton operatörü, $\frac{d\Pi_j}{dq^i} \cdot \Pi_j = \frac{d\Pi_j}{dq^i} + \Pi_j \frac{d}{dq^i}$ vb olmak üzere,

$$J_{LP}(\Pi_{id}) = \begin{pmatrix} \Pi_i \frac{d}{dq^j} + \frac{d}{dq^i} \cdot \Pi_j & \Pi^i \frac{d}{dq^j} + \frac{d}{dp_i} \cdot \Pi_j \\ \Pi_i \frac{d}{dp_j} + \frac{d}{dq^i} \cdot \Pi^j & \Pi^i \frac{d}{dp_j} + \frac{d}{dp_i} \cdot \Pi^j \end{pmatrix} \quad (38)$$

ifadesi ile verilir.

(38) operatörünün L^2 -normuna göre ters-eşlenik olduğu açıktır. Jacobi özdeşliğini sağlanması ise operatörün inşasından elde edilebilecek bir sonuçtur [29], [27]. $J_{L,P}(\Pi_{id})$ operatörünün (36). denklemle verilen Lie-Poisson parantezi ile ilişkisi de sağdaki diverjans teriminin integrasyon sonucu yok olduğu

$$\Pi_{id} \cdot \left[\frac{\delta H}{\delta \Pi_{id}}, \frac{\delta K}{\delta \Pi_{id}} \right] = \frac{\delta H}{\delta \Pi_{id}} \cdot J(\Pi_{id}) \left(\frac{\delta K}{\delta \Pi_{id}} \right) - \nabla_z \cdot \frac{\delta K}{\delta \Pi_{id}} (\Pi_{id} \cdot \frac{\delta H}{\delta \Pi_{id}})$$

ifadesi ile verilir.

Hamilton operatörü $J_{L,P}(\Pi_{id})$ Lie cebiri $\mathfrak{g}$ 'nin X_h gibi bir elemanını bu elemanı $\mathfrak{g}^*$ 'deki eşlenik etkinin sonsuz-küçük üretici olan $ad_{X_h}^*$ elemanına götüren

$$J_{L,P}(\Pi_{id}) : \mathfrak{g} \longrightarrow (-ad_{\mathfrak{g}}^* : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*)$$

bir fonksiyon olarak görülebilir. Yani, $\Pi_{id} \in \mathfrak{g}^*$ 'dan geçen eşlenik yörüngeyi $\mathcal{O}(\Pi_{id}) = \left\{ Ad_{\varphi^{-1}}^*(\Pi_{id}) = \varphi_*(\Pi_{id}) \mid \varphi \in G \right\}$ ile gösterirsek, $J_{L,P}$ operatörü teğet uzayları arasında

$$J_{L,P} : TT^*Q \longrightarrow T\mathcal{O} \subseteq T\mathfrak{g}^* \subseteq TT^*T^*Q$$

şeklinde bir gönderim olarak yorumlanabilir.

4.2 Momentum değişkenlerinde Vlasov denklemi

Lie-Poisson çerçevesinde, Poisson-Vlasov denklemleri G 'nin sağ-etkisi ile verilen kinematik simetrleri üreten Hamilton fonksiyoneliinden elde edilir. Bu fonksiyonel G 'nin koteğit uzayına taşınmış sol etkisi için momentum gönderimi aracılığıyla tanımlanan

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_L(X_k)(\Pi_{id}) &= \langle \mathbf{J}_L(\Pi_{\varphi}) \otimes d\mu, X_k \rangle \\ &= \langle T_{id}^* R_{\varphi} \circ \Pi_{\varphi} \otimes d\mu, X_k \rangle \\ &= \int_{T^*Q} \langle \Pi_{id}(\mathbf{z}), X_k(\mathbf{z}) \rangle d\mu(\mathbf{z}) \end{aligned} \quad (39)$$

momentum fonksiyonu ile verilir. Burada X_k Lie cebiri $\mathfrak{g}$ 'nin herhangi bir elemanıdır. Lie cebiri ve eşleniğinin eşleşmesi teğet ve koteğit uzayların eşleşmesine genişletildiğinde, sağ-değişmez bir vektör alanı $X \in TG$ için (39). denklemdeki eşleşmenin T^*G üzerinde sağ-değişmez fonksiyoneller ürettiği görülür. Yani, T^*G üzerindeki Lagranjyan koordinatlardaki devinimin Hamilton fonksiyoneli sağ-değişmezdir. Poisson denkleminin zorladığı bağ koşulundan dolayı Lie cebirinden seçilmesi gereken uygun

Hamiltonyan vektör alanı (32). denklem tarafından verilen ve h_f fonksiyonuna karşılık gelen alan olarak bulunur.

Önerme: *Sağ-değişmez Hamilton fonksiyoneli (33) için $\mathfrak{g}^*$ 'daki Lie-Poisson denklemleri şöyledir:*

$$\frac{d\Pi_i}{dt} = -X_h(\Pi_i) + e \frac{\partial^2 \phi_f}{\partial q^i \partial q^j} \Pi^j \quad (40)$$

$$\frac{d\Pi^i}{dt} = -X_h(\Pi^i) - \frac{1}{m} \delta^{ij} \Pi_j \quad (41)$$

Momentum-Vlasov denklemleri diye adlandıracağımız (40) ve (41). denklemler, bir sonraki bölümde gösterileceği gibi, yoğunluk değişkeninde Vlasov denklemini verir. (40) ve (41). denklemlerin elde edilmesi $H_{LP}(\Pi_{id})$ fonksiyonelinin kısıtlanmış varyasyonel türevinin ve Π_{id} bir-formunun X_h vektörüne göre Lie türevinin hesaplanması yoluyla olur.

5 Dinamiğin Yoğunluk Değişkeninde Formülasyonu

Bu bölümde $\mathfrak{g}^*$ 'daki momentum-Vlasov denklemlerinin Lie-Poisson yapısının $\mathfrak{g}^*$ uzayının tanımındaki ayar simetrisi ile indirgenmesinin plazma yoğunluk fonksiyonları uzayı olan $Den(T^*Q)$ 'daki Lie-Poisson yapısını verdiğini göstereceğiz.

Plazma yoğunluğunun tanımlanması şöyle bir gözlemden kaynaklanmaktadır: $\mathfrak{g}^*$ 'da tanımlı fonksiyonların türevlerini Lie cebiri $\mathfrak{g}$ 'nin elemanları olarak görmenin anlamı, T^*Q 'da tanımlı h, k fonksiyonlarının var olduğunu, öyle ki, (36). denklemdeki Jacobi-Lie parantezinin bu fonksiyonların Poisson parantezi olarak yazılabileceğini söylemekle eşdeğerdir. Bu durumda $\mathfrak{g}^*$ 'daki Lie-Poisson parantezi

$$\int_{T^*Q} \left(\frac{\partial \Pi_i(z)}{\partial p_i} - \frac{\partial \Pi^i(z)}{\partial q^i} \right) \{h(z), k(z)\}_{T^*Q} d\mu(z) \quad (42)$$

şeklini alır ki, cebirin eşlenik uzayı $\mathfrak{g}^*$ 'ın tanımında olduğu gibi, $\Pi_{id}^\sharp$ vektörünün diverjansının sıfırdan farklı olmasını gerektirir.

5.1 Plazma yoğunluk fonksiyonunun tanımı

Önce, (15). denklemde verildiği gibi, sözkonusu sıfırdan farklı büyüklüğü plazma yoğunluk fonksiyonu olarak tanımladığımızda bu değişkendeki Lie-Poisson yapısını elde edebileceğimizi gösterelim.

Önerme: *Bir-form yoğunlukları olarak tanımlanan $\mathfrak{g}^*$ 'daki $J_{LP}(\Pi_{id})$ operatörü ile verilen Lie-Poisson yapısı (15). denklemin tanımladığı karşılıklıla, hacim yoğunlukları uzayı $Den(T^*Q)$ 'da*

$$J_{LP}(f) = \nabla_p f \cdot \nabla_q - \nabla_q f \cdot \nabla_p \quad (43)$$

şeklindeki Hamilton operatörünün tanımladığı Lie-Poisson yapısı ile özdeşleştirilebilir.

Kanıt: (15). denklemi Euleryan değişkenler arasında bir dönüşüm olarak kabul edersek, bu dönüşüm altında $J_{LP}(\Pi_{id})$ Hamilton operatörünün nasıl değiştiğini şöyle hesaplayabiliriz: f fonksiyonunun Π_{id} bir-formu yönündeki türevi 3×6 boyutlarında ve diferansiyel operatörlerden oluşan

$$D_f(\Pi_{id}(z)) = \left(\frac{d}{dp_j} - \frac{d}{dq^j} \right) \quad (44)$$

matrisi olur. D_f ile bu operatörün L^2 -normuna göre eşleniğini gösterirsek, (38). denklemdeki Hamiltonyan operatörü

$$J_{LP}(f) = D_f(\Pi_{id}) \cdot J_{LP}(\Pi_{id}) \cdot D_f^*(\Pi_{id}) \quad (45)$$

kuralına göre dönüşür [27]. (45). denklem ile yapılacak bir hesaplama önermedeki $J_{LP}(f)$ operatörünü verir. ■

Açıkça belirtmek gerekirse, eşlenik operatör D_f^* Lie cebiri elemanlarını dönüştürmektedir. Yani, eğer H yoğunluk uzayı $Den(T^*Q)$ 'de tanımlanmış bir fonksiyonel ise, bunun türevi olan $\delta H/\delta f$ fonksiyonu T^*Q üzerinde tanımlıdır ve $D_f^*(\delta H/\delta f)$ ifadesi Lie cebiri $\mathfrak{g}$ 'de $\delta H/\delta f$ Hamilton fonksiyonunun tanımladığı Hamiltonyan vektör alanının bileşenlerini verecektir.

Yukardaki veriler kullanılarak (41). denklemdeki momentum-Vlasov denklemlerinin (2). denklemdeki Vlasov denklemini verdiği kolaylıkla gösterilebilir. Vlasov denkleminin Lie-Poisson yapısı, (43). denklemdeki operatör ile ilişkilendirilen

$$\{H(f), K(f)\}_{LP} = \int_{T^*Q} f(z) \left\{ \frac{\delta H}{\delta f(z)}, \frac{\delta K}{\delta f(z)} \right\}_{T^*Q} d\mu(z) \quad (46)$$

Poisson parantezi ile $H_{LP}(f)$ Hamilton fonksiyonu tarafından tanımlanır [25].

5.2 Momentum gönderimi olarak yoğunluk

Plazma dinamiğinin momentum değişkenlerinde ve plazma yoğunluk fonksiyonunda olmak üzere iki formülasyonu arasındaki ilişki bir momentum gönderimi kullanılarak daha belirli ve kesin hale getirilebilir.

Önerme: *Fonksiyonların toplam grubu $\mathcal{F}(T^*Q)$ 'nin $\mathfrak{g}^*$ eşlenik uzayı üzerine etkisi için elde edilen momentum gönderimi plazma yoğunluğunu tanımlar.*

Kanıt: (11). denklemde verilen $\mathfrak{g}^*$ uzayının tanımından dolayı Π_{id} bir-formu, T^*Q üzerindeki tam-bir-formlarla toplamaya göre değişmez

kalır. Bu durumda, fonksiyon uzayı $\mathcal{F}(T^*\mathcal{Q})$, $\mathfrak{g}^*$ 'in ayar grubu olur. $\mathfrak{g}$ 'nin $\mathcal{F}(T^*\mathcal{Q})$ ile özdeşleştirildiği anımsanırsa, $\mathcal{F}(T^*\mathcal{Q})$ 'nin $\mathfrak{g}^*$ üzerindeki ötelemeyle verilen etkisi, $\mathfrak{g}$ 'nin $\mathfrak{g}^*$ üzerine

$$(X_k, \Pi_{id}) \mapsto \Pi_{id} + \Omega_{T^*\mathcal{Q}}^{\sharp}(X_k) \quad (47)$$

ile verilen ve $\mathfrak{g}$ 'nin bir vektör uzayı olarak etkimesi olarak yorumlanabilecek etkisi olduğu görülür. Böylece, $\mathfrak{g}^*$ 'daki ayar dönüşümü altında eşdeğerlik sınıfı oluşturan bir-formlar için $\mathcal{F}(T^*\mathcal{Q}) \rightarrow \mathfrak{g}:k \mapsto X_k$ şeklinde bir Lie cebiri izomorfizması elde ederiz. Bir gönderim olarak bu izomorfizmanın eşleniği

$$\mathbf{J}_{tr} : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathcal{F}^*(T^*\mathcal{Q}) \equiv \text{Den}(T^*\mathcal{Q}) \quad (48)$$

plazma yoğunluğunu momentum değişkenlerinden tanımlamak için aradığımız momentum gönderimidir. Hesap için, ∇_z operatörünü dış türev operatörü d 'nin eşleniği olarak kabul ederek, tanımlardan

$$\langle \mathbf{J}_{tr}(\Pi_{id}), k \rangle = \langle \Pi_{id}, X_k \rangle = \langle \Pi_{id}, \Omega_{T^*\mathcal{Q}}^{\sharp}(dk) \rangle \quad (49)$$

$$= \langle \nabla_z \circ \Omega_{T^*\mathcal{Q}}^{\sharp} \circ \Pi_{id}, k \rangle \quad (50)$$

buluruz. Euleryan koordinat $\mathbf{z}$ 'de değerine bakıldığında (50). denklemdaki momentum gönderimi $\nabla_z \circ \Omega_{T^*\mathcal{Q}}^{\sharp} \circ \Pi_{id}$ tam olarak plazma yoğunluk fonksiyonunun (15). denklemdaki ifadesini verir. ■

6 Sonuçlar ve Tartışma

Parçacıkların Hamiltonyan deviniminin ayar simetrilerinin, indirgeme sonucunda, Poisson denklemi tarafından ifade edilen kinetik kısıtlamalar verdiğini gösterdik. Bu sonuç, Poisson denklemini kanonik Hamilton formalizmine göre devinen parçacıkların kinetik kuramının ayrılmaz bir parçası haline getirir.

Bir başka önemli sonuç, plazma dinamiğinin momentum ve hacim yoğunluğu değişkenleriyle formülasyonu arasındaki ilişkinin açık ve kesin olarak gösterilmesidir. Bu sonucu, bilinen Lie-Poisson indirgemesi ve bunu takiben momentum değişkenlerinin tanımında bulunan bir ayar simetrisi ile indirgeme yoluyla elde ettik.

Momentum değişkenlerindeki formülasyon hesaplamada elverişlilik sağlamanın yanısıra, fonksiyon uzayları ile özdeşleştirme sonucu geometrik yapıda ortaya çıkan karmaşıklığı da önleyici niteliktedir. Örneğin, Hamilton fonksiyonundaki değişkenler h_f ve f simetrik olarak görünmelerine karşılık, momentum formülasyonundaki X_{h_f} ve $\Pi_{id}^{\sharp}$ değişkenleri $TT^*\mathcal{Q}$ 'nin altuzayları olarak bütünüleyici nitelikteki $\mathfrak{g}$ ve $(\mathfrak{g}^*)^{\sharp}$ uzaylarına aittir. Ayrıca,

momentum formülasyonu, bir sonraki çalışmada gösterileceği gibi, parçacık dinamiği ile Lie-Poisson dinamiği arasındaki tamamen geometrik nitelikteki ilişkiyi açık ve kesin olarak ortaya koyabilmektedir [28].

7 Teşekkür

References

- [1] J. E. Marsden, T. Ratiu, Introduction to Symmetry and Mechanics, Springer (1994) Berlin.
- [2] R. Abraham, J. E. Marsden and T. Ratiu, Manifolds, Tensor Analysis, and Applications, Springer-Verlag, 2nd edition (1988) New York.
- [3] H. Cendra, D.D. Holm, M.J.W. Hoyle, J.E. Marsden, The Maxwell-Vlasov equations in Euler-Poincaré form, J. Math. Phys. 39 (1998) 3138-3157.
- [4] H. Poincaré, Théorie des tourbillons, Édition Jacques Gabay, Paris, 1890.
- [5] H. Poincaré, Sur la stabilité de l'équilibre des figures piriformes affectées par une masse fluide en rotation, Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A (1901) 333-373.
- [6] J. H. Jeans, The stability of spherical nebula, Philos. Trans. R. Soc. London, 199 (1902) 1-53.
- [7] K. Chandrasekhar, Ellipsoidal Figures of Equilibrium, Dover, New York, 1977.
- [8] P. J. Morrison and J. M. Greene, Noncanonical Hamiltonian density formulation of hydrodynamics and magnetohydrodynamics, Phys. Rev. Lett. 45 (1980) 790-794.
- [9] P. J. Morrison, Hamiltonian field description of one-dimensional Poisson-Vlasov equations, PPPL-1788, 1981.
- [10] J. E. Marsden and A. Weinstein, The Hamiltonian structure of the Maxwell-Vlasov equations, Physica D 4 (1982) 394-406.
- [11] J. E. Marsden, A grup theoretical approach to the equations of plasma physics, Canad. Math. Bull. Vol. 25(2) (1982) 129-142.
- [12] D. D. Holm and B. A. Kupershmidt, Poisson brackets and Clebsch representations for magnetohydrodynamics, multifluid plasmas, and elasticity, Physica D 6 (1983) 347-363.
- [13] A. N. Kaufman and R. L. Dewar, Canonical derivation of the Vlasov-Coulomb noncanonical Poisson structure, Cont. Math. AMS 28 (1984) 51-54.
- [14] H. Ye and P. J. Morrison, Action principles for the Vlasov equation, Phys. Fluids B 4 (1992) 771-777.

- [15] F. E. Low, A Lagrangian formulation of the Boltzmann-Vlasov equation for plasmas, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* 248 (1958) 282-287.
- [16] J. E. Marsden and P. J. Morrison, The Lagrangian representation of the Poisson-Vlasov equation, in *Proceeding of the Workshop on Mathematical Methods in Plasma Physics*, Cornell University, October, 1988.
- [17] P. J. Morrison, Poisson brackets for fluids and plasmas, in *Mathematical Methods in Hydrodynamics and Integrability in Dynamical Systems*, (La Jolla Institute, 1981) AIP Conf. Proc. 88, edited by M. Taber and Y. Treve (AIP, New York) (1982) 13-46.
- [18] J. E. Marsden, A. Weinstein, T. Ratiu, R. Schmid, R. G. Spencer, Hamiltonian systems with symmetry, coadjoint orbits and plasma physics, *Proc. IUTAM-ISIMM Symposium on Modern Developments in Analytical Mechanics*, *Atti della Accademia della Scienze di Torino* 117 (1983) 289-340.
- [19] V. Arnold, Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits *Ann. Inst. Grenoble* 16 (1966) 319-361.
- [20] D. Ebin and J. E. Marsden, Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid, *Ann. of Math.* 92 (1970) 102-163
- [21] L. Polterovich, *The geometry of the group of symplectic diffeomorphisms*, Birkhäuser (2001) Berlin.
- [22] H. D. I. Abarbanel, D. D. Holm, J. E. Marsden, T. Ratiu, Nonlinear stability analysis of stratified fluid equilibria, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* A318 (1986) 349-409.
- [23] D. D. Holm, J. E. Marsden, T. Ratiu, The Hamiltonian structure of continuum mechanics in material, inverse material, spatial and convective representations, *Séminaire de Mathématiques Supérieures*, Les Presses de L'Université de Montreal 100 (198?) 11-122.
- [24] T. Ratiu, R. Schmid, The differentiable structure of three remarkable diffeomorphism groups, *Math. Zeit.* 177 (1981) 81-100.
- [25] P. J. Morrison, The Maxwell-Vlasov equations as continuous Hamiltonian system, *Phys. Lett.* 80A (1980) 383-386.
- [26] A. Weinstein and P. Morrison, Comments on: The Maxwell-Vlasov equation as a continuous Hamiltonian system, *Phys. Lett. A* 86 (1981) 235-236.
- [27] P. J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Springer, New York, 1986.
- [28] O. Esen and H. Gümral, Geometry of plasma dynamics II: Lie algebra of Hamiltonian vector fields, (in preparation)
- [29] P. J. Morrison, Hamiltonian description of the ideal fluid, *Rev. Mod.*

- Phys. 70 (1998) 467-521.
- [30] V. Guillemin and S. Sternberg, Symplectic Techniques in Physics, Cambridge University Press (Cambridge) 1984.
 - [31] J. E. Marsden, A. Weinstein, T. Ratiu, Semidirect products and reductions in mechanics, Trans. AMS (1984) 147-177.
 - [32] J. E. Marsden and A. Weinstein, Reduction of symplectic manifolds with symmetry, Rep. Math. Phys.5 (1974) 121-130.

