

HOMOJEN OLMAYAN (FGM) ÇUBUK, DİSK VE SİLİNDİRLERİN LAPLACE TRANSFORMASYONU İLE ZORLANMIŞ TİTREŞİM ANALİZİ

K. ÇELEBİ

Makine Mühendisliği Bölümü
Çukurova Üniversitesi
01330 Adana

İ. KELEŞ

Makine Mühendisliği Bölümü
Mustafa Kemal Üniversitesi
31200 Hatay

N. TÜTÜNCÜ

Makine Mühendisliği Bölümü
Çukurova Üniversitesi
01330 Adana

ÖZET

Fonksiyonel Derecelendirmiş Malzemelerden (FGM) yapılmış çubuk, silindir ve disk yapı elemanlarının dinamik davranışı incelenmiştir. Çubuklarda uç noktadan yükleme sonunda oluşan aksel deplasmanlar ve silindirlerde dinamik iç basınçtan dolayı oluşan radyal deplasmanlar hesaplanmıştır. Çözümler Laplace uzayında elde edilmiş ve gerçek zaman uzayına ters dönüşüm modifiye edilmiş Durbin metodu ile yapılmıştır. FGM modellerde kullanılan inhomojenlik parametresinin dinamik davranışı belirleyici olduğu ve bu parametrenin artmasıyla deplasman genliklerinin azaldığı gözlemlenmiştir.

ABSTRACT

Dynamic response of structural elements such as bars, cylinders and disks made of Functionally Gradient Materials (FGM) are examined. Axial displacement of the bar loaded at the free end and radial displacement of the cylinder subjected to dynamic uniform internal pressure are calculated. The solutions are obtained in the Laplace space and the inverse transformation into the real time domain is performed using modified Durbin's method. The inhomogeneity parameter used in FGM models is found to be effective in the response of the material such that increasing the inhomogeneity parameter consistently caused a decrease in the amplitude of displacements.

1.GİRİŞ

Malzeme mühendisliği alanındaki gelişmeler, Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler (standart terminoloji ile FGM) den yapı elemanları imalatını mümkün kılmıştır. İlk olarak, 1980'lerde Japon bilim adamları tarafında geliştirilen FGM ler, aslında, malzeme özellikleri sürekli olarak değişen kompozit malzemelerdir. Yüksek sıcaklığa maruz kalan yüzeylerin mukavemetinin takviye edilmesi amacıyla kullanıma giren FGM ler, zaman içinde, aşınmaya karşı yüksek mukavemetli elemanlarda ve çatlak oluşması ve ilerlemesini engelleyici ortamlar oluşturulmasında kullanılmaya başlanmıştır [1-3].

Dinamik eksenel yük altındaki FGM çubuklar ve dinamik basınç altındaki FGM silindirler, diskler, tek boyutlu titreşim problemleri başlığı altında incelenebilir. Bu konularda yapılan çok sayıda çalışma, serbest titreşim analizi ve zorlanmış titreşimin analizlerinde, ağırlıklı olarak, sonlu elemanlar yöntemi ve benzeri nümerik yöntemleri ihtiva etmektedir [4-11].

Zorlanmış titreşim analizleri çok yaygın olarak mode süperpozisyon metodu ile yapılmıştır. Bilindiği üzere, bu metotta, önce serbest titreşim analizi yapılır, tabii frekanslar ve mode şekilleri tespit edilir ve Duhamel İntegrali ile zorlanmış titreşim davranışı elde edilir. Tabii frekansları da genel olarak nümerik metotlarla bulmak mümkün olur. Bu analizde istenen hassasiyete ulaşmak için çok sayıda frekans kullanılması icap edebilir. Laplace transformasyonu da sık kullanılan bir metottur. Kısmi diferansiyel denklemler, bu yolla, adi diferansiyel denklemlere dönüştürülüp Laplace uzayında çözülebilir. Burada asıl önemli husus Laplace uzayından gerçek zaman uzayına dönüştür. Çözümleri ortogonal fonksiyonlardan oluşan seriler şeklinde kabul eden yöntemler yaygın olarak kullanılmakta olup, yoğun nümerik çalışma gerektirmektedir.

Bu çalışmada zaman uzayına geçiş için geliştirilmiş Durbin metodu kullanılacaktır. Fast Fourier Transformasyonu (FFT) algoritmasına dayanan bu metodun hızı ve verimliliği literatürdeki çalışmalarda kanıtlanmıştır. Laplace uzayından zaman uzayına geçiş analitik olarak Residue analizi ile sadece basit yükleme şartlarında yapılabilir. Durbin metodu ile yapılacak çalışmada ise sürekli fonksiyon olarak ifade edilen yükler yanında impulsif yükler ve nokta nokta verilen diskritize yükler altındaki davranışlar da hızlı ve hassas olarak belirlenebilmektedir.

2. DİNAMİK EKSENEL YÜKLÜ ÇUBUĞUN SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ

Eksenel yük altında, kesit alanı koordinata göre değişen bir çubuğun davranışı aşağıdaki diferansiyel denklem ile verilir.

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{E(x)} \frac{\partial E(x)}{\partial x} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\rho(x)}{E(x)} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (1)$$

Denklem (1)'i boyutsuz olarak ifade etmek istersek

$$\frac{\partial^2 v(\eta,\tau)}{\partial \eta^2} + \frac{1}{E(\eta)} \frac{\partial E(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial v(\eta,\tau)}{\partial \eta} = c^2 \frac{\rho(\eta)}{E(\eta)} \frac{\partial^2 v(\eta,\tau)}{\partial \tau^2} \quad (2)$$

şeklinde olur, burada $c^2 = E/\rho$ olup, "c" deplasman yayılma hızıdır. Bu işlem için aşağıdaki boyutsuz değişkenler kullanılmıştır.

$$v(\eta, \tau) = \frac{u(x, t)}{L}, \quad \eta = \frac{x}{L}, \quad \tau = \frac{ct}{L} \quad (3)$$

Denklem (2), yoğunluk ρ ve elastisite E 'nin formuna bağlı olarak, değişken katsayılı bir denklem olduğundan genel çözümü yoktur. Özel bazı $\rho(\eta)$ ve $E(\eta)$ formları için çözülebilir. Bu çalışmada $\rho(\eta) = \rho_0 (1 + a\eta)^2$ ve $E(\eta) = E_0 (1 + a\eta)^2$ şeklindeki ifadeler incelenmiştir.

2.1 $\rho(\eta) = \rho_0 (1 + a\eta)^2$ ve $E(\eta) = E_0 (1 + a\eta)^2$ ifadeleri için çözümler

Bu durumda Denklem (2)

$$\frac{\partial^2 v(\eta, \tau)}{\partial \eta^2} + \frac{2a}{(1+a\eta)} \frac{\partial v(\eta, \tau)}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 v(\eta, \tau)}{\partial \tau^2} = 0 \quad (4)$$

şeklini alır.

Diferansiyel denklem ve sınır şartları Laplace uzayında

$$y''(\eta, p) + \frac{2a}{(1+a\eta)} y'(\eta, p) - p^2 y(\eta, p) = 0 \quad (5-a)$$

$$y(0, p) = 0, \quad \frac{\partial y(1, p)}{\partial \eta} = 0 \quad (5-b)$$

formunu alır. Bu safhada serbest titreşim analizi sonucu doğal frekans değerlerini bulabilmemiz için denklem (5-a)'da ki Laplace parametresi "p", $i\alpha$ olarak değiştirilerek

$$y''(\eta, p) + \frac{2a}{(1+a\eta)} y'(\eta, p) + \alpha^2 y(\eta, p) = 0 \quad (6)$$

elde edilir. Burada

$$y(\eta, p) = \frac{z}{(1+a\eta)} \quad (7)$$

değişken dönüşümü yapılarak denklem (6) z cinsinden

$$z'' + \alpha^2 z = 0 \quad (8)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemin çözümü

$$z = A_1 \cos k\eta + A_2 \sin k\eta \quad (9)$$

olup, k parametresi

$$k^2 = \alpha^2 = -p^2 \quad (10)$$

şeklinde tanımlanmıştır. (7) deki transformasyon hatırlanarak $y(\eta, p)$ aşağıdaki gibi elde edilir:

$$y(\eta, p) = \frac{1}{(1+a\eta)} (A_1 \cos k\eta + A_2 \sin k\eta) \quad (11)$$

Çubuğun uçları sabit-serbest ise sınır şartları $y(0, p) = 0$ ve $\frac{\partial y(1, p)}{\partial \eta} = 0$ şeklindedir ve bu

şartların uygulanması ile

$$k = \frac{a}{(1+a)} \tan k \quad (12)$$

sonucu elde edilir. Denklem (12)'yi sağlayan k değerlerine k_n denirse, tabii frekanslar α_n denklem (10)'dan aşağıdaki gibi bulunur:

$$\alpha_n^2 = k_n^2$$

Tablo 1. $a=0,1,2$ doğal frekansları vermektedir. $a=0$ alındığında homojen durum oluşmaktadır ve sonuçlar literatürdeki [12] sonuçlar ile aynıdır.

Tablo 1. $\rho(\eta) = \rho_0 (1 + a\eta)^2$ ve $E(\eta) = E_0 (1 + a\eta)^2$ için doğal frekanslar

	$a = 0$	$a = 1$	$a = 2$
α_1	1.57079	1.165561	0.967402
α_2	4.71239	4.604216	4.567452
α_3	7.85398	7.789883	7.768373
α_4	10.9956	10.949943	10.934681
α_5	14.1372	14.101725	14.089886
α_6	17.2788	17.249781	17.240109
α_7	20.4204	20.395842	20.387664
α_8	23.5619	23.540708	23.533624
α_9	26.7035	26.684801	26.678553
α_{10}	29.8451	29.828369	29.822779

3. DİNAMİK EKSENEL YÜKLÜ ÇUBUĞUN ZORLANMIŞ TİTREŞİM ANALİZİ

Dinamik yükleme altında denklem (5-b)'de verilen sınır şartları

$$y(0, p) = 0, \quad \frac{\partial y(1, p)}{\partial \eta} = L \left\{ \frac{P(\tau)}{A_0 E(1)} \right\} = \frac{1}{E_0 (1+a)^2 A_0} L\{P(\tau)\} \quad (13)$$

formunu alır. Diferansiyel denklem (11) ifadesindeki A_1 , ankastre uçtaki deplasman şartı ile sıfır olur ve kalan kısım

$$y(\eta, p) = A_2 \frac{\sin[k\eta]}{(1+a\eta)} \quad (14)$$

şeklinde dir. Diğer uçtaki sınır şartının uygulanması ile

$$\frac{\partial y(1, p)}{\partial \eta} = A_2 \left(\frac{k \cos[k](1+a) - a \sin[k]}{(1+a)^2} \right) = \frac{L\{P(\tau)\}}{A_0 E_0 (1+a)^2} \quad (15)$$

elde edilir. Değişik yük fonksiyonları için A_2 sabiti bulunur ve (14) numaralı ifade de yerine konularak, eksenel deplasman Laplace uzayında tamamıyla tespit edilmiş olur:

$$y(1, p) = \frac{L\{P(\tau)\}}{E_0 A_0 (1+a\eta)} \frac{\sin[k\eta]}{k \cos[k](1+a) - a \sin[k]} \quad (16)$$

4. DİNAMİK İÇ BASINCA MARUZ SİLİNDİRİN SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ

İç yarıçapı a ve dış yarıçapı ka (k sabit) olan kalın cidarlı bir silindir(veya disk) düşünelim. Silindir Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme'den (FGM) yapılmış ve izotropik olsun.

Elastisite modülü $E(r) = E_0 r^\beta$ ve kütle yoğunluğu $\rho(r) = \rho_0 r^\beta$ şeklinde radyal yönde değişmekte olduğunu kabul edelim. Hooke kanunu

$$\begin{aligned}\sigma_r &= C_{11}\varepsilon_r + C_{12}\varepsilon_\theta = C_{11}^0 r^\beta \varepsilon_r + C_{12}^0 r^\beta \varepsilon_\theta \\ \sigma_\theta &= C_{12}\varepsilon_r + C_{11}\varepsilon_\theta = C_{12}^0 r^\beta \varepsilon_r + C_{11}^0 r^\beta \varepsilon_\theta\end{aligned}\quad (17)$$

şeklinde olup kalın cidarlı uzun bir silindir (düzlem şekil değiştirme) için

$$C_{11}^0 = \frac{E_0(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}, \quad C_{12}^0 = \frac{E_0\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} \text{ dir. İnce bir disk (düzlem gerilme) için ise}$$

$$C_{11}^0 = \frac{E_0}{1-\mu^2}, \quad C_{12}^0 = \frac{E_0\mu}{1-\mu^2} \text{ olur. Burada } \mu \text{ Poisson oranıdır ve sabit kabul edilmiştir.}$$

Denge denklemi

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho_0 r^\beta \frac{d^2 u}{dr^2} \quad (18)$$

ve yukarıda verilen elastik sabitler kullanılarak radyal deplasman denklemi aşağıdaki hali alır.

$$\frac{r^2 d^2 u}{dr^2} + r \frac{du}{dr} m_1 + m_2 u = \frac{r^2}{c^2} \frac{d^2 u}{dt^2} \quad (19)$$

$$\text{burada } c^2 = \frac{C_{11}^0}{\rho_0}, m_1 = \beta + 1, m_2 = \frac{\mu\beta}{(1-\mu)} - 1 \text{ dır.}$$

Sınır şartları

$$\sigma_r|_{r=a} = 0 \quad \sigma_r|_{r=ka} = 0 \text{ olur.} \quad (20)$$

aşağıdaki boyutsuz değişkenler kullanılarak:

$$v = \frac{u}{a}, \quad x = \frac{r}{a}, \quad \tau = \frac{ct}{a}$$

Dinamik davranışı idare eden denklem

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{m_1}{x} \frac{dv}{dx} + \frac{m_2}{x^2} v = \frac{d^2 v}{d\tau^2} \quad (21)$$

olur ve sınır şartları aşağıdaki şekli alır:

$$\sigma_r|_{x=1} = 0 \quad \sigma_r|_{x=k} = 0 \quad (22)$$

Başlangıç şartları $\tau = 0$ için

$$v = 0 \text{ ve } \frac{\partial v}{\partial \tau} = 0 \text{ alınarak Denklem (21) Laplace uzayında}$$

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{m_1}{x} \frac{dV}{dx} + \left(\frac{m_2}{x^2} - p^2\right)V = 0 \quad (23)$$

olarak elde edilir. p Laplace parametresi yerine $i\omega$ koyarak Denklem(23) ün çözümü

$$V(x, \omega) = x^\varphi (C_1 J_n(\omega x) + C_2 Y_n(\omega x)) \quad (24)$$

şeklinde dir. Burada n ve φ parametreleri

$$\varphi = -\frac{\beta}{2}, \quad n = \sqrt{1 - \frac{\mu\beta}{1-\mu} + \frac{\beta^2}{4}} \text{ olarak tanımlanmıştır.}$$

Sınır şartları uygulanarak aşağıdaki determinant elde edilir:

$$\begin{vmatrix} [Y_n(w)S_1 - wJ_{n-1}(w)] & [Y_n(w)S_1 - wY_{n-1}(w)] \\ [Y_n(wk)S_1 - wkJ_{n-1}(wk)] & [Y_n(wk)S_1 - wkY_{n-1}(wk)] \end{vmatrix} = 0 \quad (25)$$

burada $S_1 = (n - m - \varphi)$ and $m = \frac{C_{12}}{C_{11}}$ dir. Bu determinantın kökleri tabii frekansları verir.

Tablo 2. $\mu=0.3$, $k=2$ için doğal frekanslar

w	$\beta = -5.0$	$\beta = -2.0$	$\beta = 0.0$	$\beta = 2.0$	$\beta = 5.0$
w_1	0.77435	0.69407	0.63563	0.58309	0.52547
w_2	3.43985	3.20181	3.21793	3.37244	3.81886
w_3	6.44802	6.31356	6.31999	6.40331	6.66578
w_4	9.53698	9.44508	9.44910	9.50538	9.68579
w_5	12.65115	12.58161	12.58455	12.62695	12.76368
w_6	15.77602	15.72016	15.72249	15.75647	15.86638
w_7	18.90638	18.85972	18.86165	18.89000	18.98183
w_8	22.03991	21.99987	22.00151	22.02583	22.10466
w_9	25.17544	25.14037	25.14180	25.16309	25.23214
w_{10}	28.31231	28.28112	28.28239	28.30131	28.36273

Tablo 2. çeşitli β değerleri için doğal frekansları vermektedir. Burada ilk frekans değerlerinde inhomojenlik parametresi (β) artarken doğal frekans değerlerinin azaldığı açıkça görülmektedir. Diğer frekans değerlerinde ise tam tersi bir durum ortaya çıkmaktadır. $\beta = 0$ alındığında homojen durum oluşmaktadır ve sonuçlar literatürdeki [13] sonuçlar ile aynıdır.

5. DİNAMİK BASINCA MARUZ SİLİNDİRİN ZORLANMIŞ TİTREŞİM ANALİZİ

Dinamik iç basınca maruz kalan kalın cidarlı bir silindir ele alınarak, $P_1(\tau) = P_0(1 - \cos(\gamma\tau))$ yük tipi uygulanacaktır. Sınır şartları aşağıdaki şekilde olur:

$$\sigma_r|_{x=l} = -P(\tau) \quad \sigma_r|_{x=k} = 0 \quad (26)$$

Laplace uzayında bu şartlar

$$\bar{\sigma}_r|_{x=l} = L(-P(\tau)) \quad \bar{\sigma}_r|_{x=k} = 0 \quad (27)$$

şeklini alır. Denklem (23) ün çözümü :

$$V(x, p) = x^\varphi (C_1 I_n(px) + C_2 K_n(px)) \quad (28)$$

şeklinde olup p Laplace parametresi, I ve K Bessel fonksiyonlarıdır. Sınır şartları kullanılarak C_1 ve C_2 sabitleri bulunur ve Laplace uzayında çözüm :

$$V(x, p) = -\frac{P_1(p)}{C_{11}} x^\beta \frac{F(p)}{G(p)} \quad (29)$$

şeklinde oluşur. Burada

$$F(p) = [K_n(pk)S_1 + pkK_{n-1}(pk)]I_n(px) - [I_n(pk)S_1 - pkI_{n-1}(pk)]K_n(px) \quad (30)$$

ve

$$G(p) = [K_n(pk)S_1 + pkK_{n-1}(pk)][I_n(p)S_1 - pI_{n-1}(p)] - [K_n(p)S_1 + pK_{n-1}(p)][I_n(pk)S_1 - pkI_{n-1}(pk)] \quad (31)$$

Aynı işlem adımları tekrarlanarak impulsif dikdörtgen yük altındaki deplasman ifadeleri çıkartılabilir. Ayrıca gerilmeler de standart Hooke kanunu ile hesaplanabilir. Problemdeki elastik sabitlerin düzlem gerilme halindeki olarak alınması durumunda iç basınç altındaki disk probleminin çözümü elde edilmiş olur.

6. NÜMERİK TERS LAPLACE DÖNÜŞÜM METODU

Laplace uzayında elde edilen çözümlerin zaman uzayına dönüşümü içim modifiye edilmiş Durbin'in ters dönüşüm yöntemi kullanılacaktır. Bu yöntemle elde edilen sonuçların kesin değerlerle örtüştüğü gözükmemektedir [14-15]. Bu yöntem, sonlu Fourier-Kosinüs dönüşümüne dayalı Dubner ve Abate metodunun geliştirilmiş halidir. Yöntem aşağıda özetlenmiştir [16]:

$$f(t_j) = \frac{2e^{a_j \Delta t}}{T} \left[-\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \bar{F}(a) \right\} + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} [(A(k) + iB(k)) L_k] e^{(i \frac{2\pi}{N}) jk} \right\} \right] \quad (32)$$

$$A(k) = \sum_{l=0}^L \operatorname{Re} \left\{ \bar{F}(a + i(k + lN)) \frac{2\pi}{T} \right\}$$

$$B(k) = \sum_{l=0}^L \operatorname{Im} \left\{ \bar{F}(a + i(k + lN)) \frac{2\pi}{T} \right\}$$

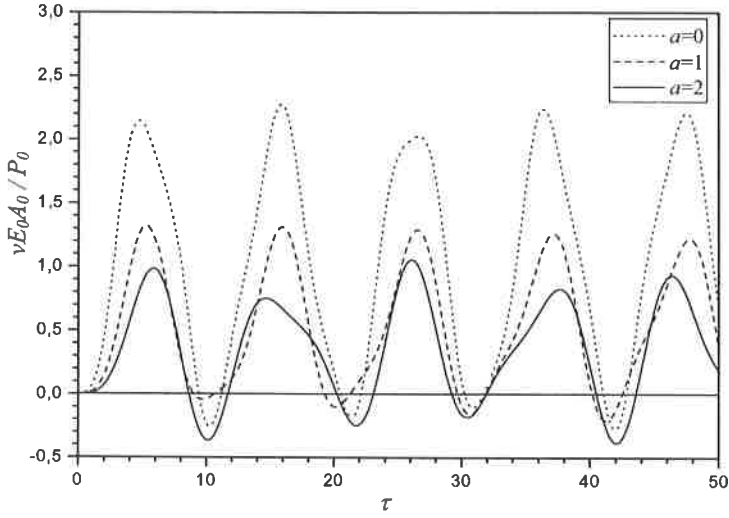
Burada “i” kompleks sayı olup, $s_k = a + i \frac{2\pi k}{T}$ k inci Laplace dönüşüm parametresini göstermektedir. T, çözüm aralığı olmak üzere, N adet eşit zaman aralığı, $t_j = j \Delta t = jT/N$, ($j = 0, 1, 2, \dots, N-1$) için $f(t)$ hesaplanmaktadır. Bu çalışmada çözülen sayısal örneklerde $aT = 6$ seçilmiştir. Lanczos (L_k) faktörü ise

$$L_k = \begin{cases} L_0 = 0 & \text{for } k = 0 \\ L_k = \frac{\sin \frac{k\pi}{N}}{\frac{k\pi}{N}} & \text{for } k > 0 \end{cases} \quad (33)$$

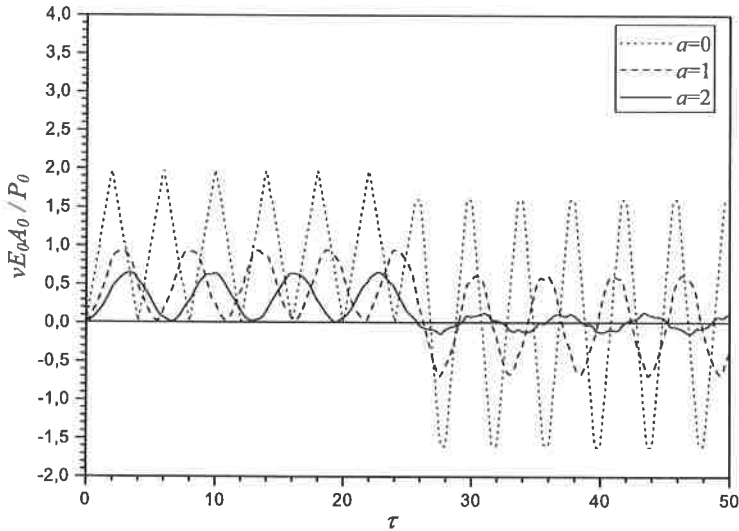
şeklindedir.

7. NÜMERİK UYGULAMALAR

Şekil 1-2 $P_1(\tau) = P_0(1 - \cos(\gamma\tau))$ ve impulsif dikdörtgen yükleme altındaki çeşitli a değerlerine sahip çubuk için eksenel deplasmanları göstermektedir. Çubuk için inhomojenlik parametresi (a) azaldıkça tepkinin genliği artmaktadır.

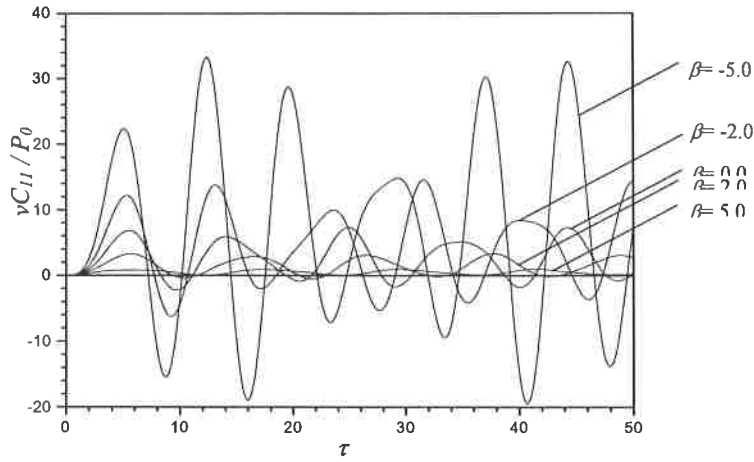


Şekil 1. $P_1(\tau) = P_0(1 - \cos(\gamma\tau))$ yüklemesi altındaki deplasman, $\gamma = 1.0$

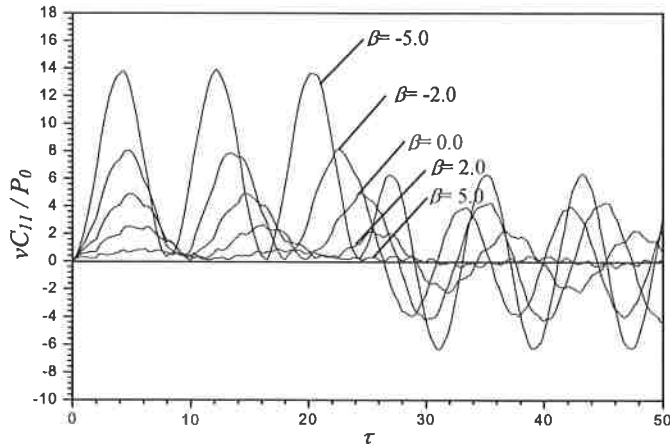


Şekil 2. $P_2(\tau) = \begin{cases} P_0, & 0 \leq \tau \leq 25.6 \\ 0, & \tau > 25.6 \end{cases}$ impulsif dikdörtgen yüklemesi altındaki deplasman

Şekil 3-4 $P_1(\tau) = P_0(1 - \cos(\gamma\tau))$ ve impulsif dikdörtgen yükleme altındaki çeşitli β değerlerine sahip silindir için radyal deplasmanları göstermektedir. Burada inhomojenlik parametresi (β) azaldıkça tepkinin genliği artmaktadır.



Şekil 3. $P_1(\tau) = P_0(1 - \cos(\gamma\tau))$ yükleme altındaki iç yüzeydeki radyal deplasman, $\gamma = 1.0$, $k=2.0$, $\beta = -5.0, -2.0, 0.0, 2.0, 5.0$



Şekil 4. $P_2(\tau) = \begin{cases} P_0, & 0 \leq \tau \leq 25.6 \\ 0, & \tau > 25.6 \end{cases}$ impulsif dikdörtgen yükleme altındaki iç yüzeydeki radyal deplasman, $k=2.0$, $\beta = -5.0, -2.0, 0.0, 2.0, 5.0$

8. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

FGM'den yapılmış çubuk ve kalın cidarlı silindir (veya disk) için serbest ve zorlanmış titreşimi Laplace transform tekniği kullanılarak araştırılmıştır. Kosinüs fonksiyon ve impulsif dikdörtgen yük olmak üzere iki dinamik yük tipi uygulanarak problem ele alınmıştır. Zaman uzayına geçiş için geliştirilmiş Durbin metodu kullanılmıştır. Hem silindir hem çubuk için inhomojenlik sabiti arttıkça genlik azalmaktadır. Sonuçlar, inhomojenlik parametresinin artışı ile bir gerilim-azalma etkisinin sağlandığını göstermiştir. Gerilim dağılımı kontrolü için, tasarım amacı ile bakıldığında, inhomojenlik parametresi kullanışlı bir tasarım parametresidir.

9. KAYNAKLAR

- [1] Yamanouchi, M., Koizumi, M., Shiota I., " Proceedings of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials", Japan-1990.
- [2] Koizumi, M., "The Concept of FGM," *Ceram. Trans., Funct. Grad. Mater.* 34 3-10, 1993.
- [3] Erdogan, F., "Fracture Mechanics of Functionally Graded Materials," *Comput. Engng.* 5 (7) 753-770, 1995.
- [4] Loy, C. T., Lam, K. Y., and Reddy, J. N., "Vibration of Functionally Graded Cylindrical Shells," *Int. J. Mech. Sci.* 41(3) 309-324, 1999.
- [5] Pradhan, S. C., Loy, C. T., Lam, K. Y., and Reddy, J. N., "Vibration Characteristics of Functionally Graded Cylindrical Shells under Various Boundary Vonditions," *Appl. Acoust.* 61(1) 111-129, 2000.
- [6] Zhou, D., Cheung, Y. K., Lo, S. H. and Au, F. T. K., "3D Vibration Analysis of Solid and Hollow Cylinders via Chebyshev-Ritz Method," *Comput. Method. Appl. M.* 192(13-14) 1575-1589, 2003.
- [7] Han, X., Liu, G. R., Xi, Z. C., and Lam, K. Y., "Transient Waves in a Functionally Graded Cylinder," *Int. J. Solids Struct.* 38(17) 3021-3037, 2001.
- [8] Ng, T. Y., Lam, K. Y., Liew, K. M., and Reddy, J. N., "Dynamic Stability Analysis of Functionally Graded Cylindrical Shells under Periodic Axial Loading," *Int. J. Solids Struct.* 38(8) 1295-1309, 2001.
- [9] Shakeri, M., Akhlaghi, M., and Hoseini, S. M., "Vibration and Radial Wave Propagation Velocity in Func. Graded Thick Hollow Cylinder," *Compos. Struct.* 76(1-2) 174-181, 2006.
- [10] Candan, S., and Elishakoff, I., "Constructing the Axial Stiffness of Longitudinal Vibrating Rod from Fundamental Mode Shape," *Int. J Solids Structure.* 38 3443-3452, 2001.
- [11] Yang, K., "A Unified Solution for Longitudinal Wave Propagation in an Elastic Rod," *J Sound Vib.* 314 307-329, 2008.
- [12] Abrate, S., "Vibration of Non-Uniform Rods and Beams", *Journal of Sound and Vibration* 185 (4) 703-716, 1995.
- [13] Ghosh, A. K., "Axisymmetric Vibration of a Long Cylinder," *J. Sound Vib.* 186(5) 711-721, 1995 .
- [14] Keleş, I., "Elastic Response Of Fgm And Anisotropic Thick-Walled Pressure Vessels Under Dynamic Internal Pressure " *ÇÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Adana*, 2007.
- [15] Temel, B., *Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Adana*, 219 s., 1995.
- [16] Narayanan, G. V., "Use of Dynamic Influence Coefficients in Forced Vibration Problems with the Aid of Fast Fourier Transform", *Computers and Structures* 9 145-150, 1977.