

GEOMETRİK NONLİNEERİTE DURUMUNDA YEREL EĞRİLİKLİ ÖRTÜKLÜ LİF İÇEREN ELASTİK ORTAMDAKİ KENDİ-KENDİNİ DENGLEYEN NORMAL GERİLMELER

Kadriye ŞİMŞEK ALAN*

*Yıldız Teknik Üniversitesi, Kimya Metalurji Fakültesi, Matematik mühendisliği Bölümü, Davutpaşa Yerleşkesi, No:127 Esenler 34010, İstanbul

ABSTRACT

In the framework of the piecewise homogeneous body model with the use of the three-dimensional geometrically nonlinear exact equations of the theory of elasticity, the method developed for the determination of the stress distribution in the unidirectional fibrous composites with locally curved fibres is used to investigate normal stresses acting along the fibers for the case where there exists the bond covering cylinder with constant thickness between fiber and matrix materials are considered The case for which the interaction between the fibres is not taken into account is studied. The numerous numerical results related to the stress distribution in considered body and the influence of geometrical nonlinearity to this distribution are obtained and interpreted.

Keywords: *Fibrous composite, local curving, covering material, geometrical nonlinearity, normal stresses.*

ÖZET

Yerel eğrilikli lifler içeren tek yönlü lifli kompozitlerde gerilme yayılımının belirlenmesi için, parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde elastisite teorisinin üç-boyutlu geometrik nonlinear kesin denklemleri kullanılarak geliştirilen yöntem, lif ile matris arasında sabit kalınlıklı bir sargının olması durumuna geliştirilmiş ve lif boyunca yapılan tek yönlü yükleme altında lif, geçiş malzemesi ve matris malzemelerinin temas yüzeylerinde oluşan normal gerilmelerin araştırılmasında, lifler arasındaki etkileşimin ihmal edildiği durum için, kullanılmıştır. Geometrik nonlineeritenin bu gerilme değerlerine etkileri incelenmiş ve bunlarla ilgili çok sayıda sayısal sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: *Lifli kompozitler, yerel eğrilik, sarılı malzeme, geometrik nonlineerite, normal gerilmeler.*

1. Giriş

Tek yönlü lifli kompozit malzemelerdeki liflerin eğriliği ya malzemenin dizaynı aşamasındaki gereksinimlerden ya da teknolojik işlemler esnasında meydana gelmektedir [1-5]. Genellikle dizayn aşamasındaki gereksinimlerden dolayı oluşan eğrisellikler periyodik eğrisellikler olarak modellenirler. Dolayısıyla, tek yönlü lifli kompozit malzemelerde gerilme-şekil değiştirme durumu araştırmalarında liflerin eğriliğini dikkate almanın teorik ve uygulama açısından oldukça önemi vardır. Bu amaçla [6]'da parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde, elastisite teorisinin üç boyutlu kesin denklemleri kullanılarak tek yönlü lifli kompozitlerde, yukarıda sözü edilen gerilme durumu araştırmaları için bir yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntem liflerin eğriliğinin periyodik olması durumunda uygulanmış ve burada elde edilen sonuçlar [7]'de detaylı olarak verilmiştir.

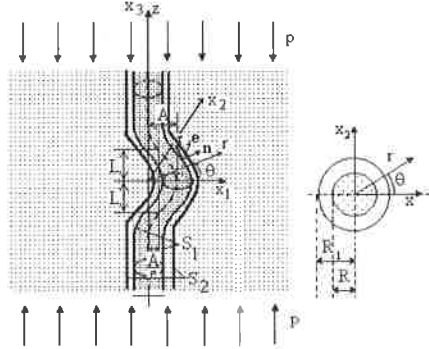
[6]'da, lif yoğunluğunun, lifler arasındaki etkileşim ihmal edilecek kadar küçük olduğu kabul edilmiştir. [8]'de bu yöntem, lifler arasındaki etkileşimin incelenmesi amacı ile, periyodik eğrilikli iki komşu lif olması durumuna geliştirilmiş ve ilgili sayısal sonuçlar verilmiştir. [6,8] yöntemi, [9]'da geometrik nonlineerite durumuna geliştirilmiş ve sonsuz elastik ortamda periyodik eğrilikli tek ve iki komşu lif olması halindeki sayısal sonuçlar verilmiştir.

Yukarıda sözü edilen araştırmaların tümü, tek yönlü lifli kompozitlerdeki liflerin eğriliğinin periyodik olması ile ilgilidir. Liflerin yerel eğrilikli olması durumuna ait az sayıda çalışma vardır [10,12]. Fakat bu araştırmalarda lineer elastisite teorisi kullanılmış ve lifler arasındaki etkileşim ihmal edilerek modelleme oluşturulmuştur. Bilinen mekaniksel düşüncelere ve [9]'da elde edilen sonuçlara göre geometrik nonlineeritenin de dikkate alınması durumuna geliştirilmiş ve sayısal sonuçlar, sıfırıncı ve birinci yaklaşım çerçevesinde kalmıştır. [15]'de ise [13]'deki yöntem lif matris arayüzünde normal gerilme değerlerinin ikinci yaklaşıma kadar elde edilmesine geliştirilmiş ve geometrik nonlineeritenin, lifin yerel eğriliğinden kaynaklanan, kendi kendini dengelemiş normal gerilmelerin yayılımına etkisini gösteren çok sayıda sayısal sonuç verilmiştir. [16]'da, yerel eğrilikli tek lif içeren sonsuz ortamdaki normal gerilmeler, lif ile matris malzemeleri arasında kalınlığı sabit bir başka malzeme olması durumunda incelenmiştir. (bu malzeme, lif ile matris malzemesi arasında bir geçiş malzemesi olabileceği gibi malzeme dizaynı gereği de olabilir.) [16]'da kompozit malzeme, yerel eğrilikli tek lif içeren sonsuz elastik cisim olarak modellenmiş ve lif, lifi saran malzeme olarak isimlendirilen geçiş malzemesi ve matris malzemelerinin temas yüzeylerinde oluşan normal gerilmeler ve bu gerilmelere geometrik nonlineeritenin etkisi ile ilgili çok sayıda sayısal sonuç verilmiş ancak bu sonuçlar birinci yaklaşım çerçevesinde kalmıştır. Sayısal sonuçların hassasiyetinin artırılması için çözüme eklenen yaklaşım sayısının artırılması gerektiği açıktır. Bu çalışmada ise, ilk kez yerel eğrilikli örtüklü lif içeren elastik ortamdaki normal gerilmeler incelenmiş, [16]'daki yöntem lif-geçiş malzemesi ve matris malzemelerinin temas yüzeylerinde oluşan normal gerilme değerlerinin ikinci yaklaşıma kadar elde edilmesine geliştirilmiştir. Kompozit malzeme, yerel eğrilikli tek lif içeren sonsuz elastik cisim olarak modellenmiş ve matris malzemelerinin temas yüzeylerinde oluşan gerilmeler ve bu gerilmelere geometrik nonlineeritenin etkisi ile ilgili çok sayıda sayısal sonuç verilmiştir.

2. Problemin Formülasyonu

Yerel eğrilikli sarılı tek lif içeren sonsuz elastik ortam şematik olarak Şekil 1'de gösterilmiştir. Bu çalışmada, lifin yüzeyine dik kesitlerinin lif boyunca değişmeyen R

yarıçaplı daire olduğunu, geçiş malzemesinin de şekilde gösterilen $R_1 - R = h$ kalınlığının lif



Şekil 1. Malzemenin geometrik yapısı ve seçilen kordinatlar

boyunca sabit olduğunu ve cismin, sonsuzda lif yönünde (Ox_3 (Oz) yönünde) p yoğunluklu düzgün dağılmış normal kuvvetler etkisinde olduğunu varsayacağız. Şekil 1' de gösterilen $Ox_1x_2x_3$ kartezyen, $O\theta z$ silindirik koordinat takımlarını ele alalım ve bu koordinatların Lagrange koordinatları olduklarını belirtelim. İncelemelerimizi lif, geçiş malzemesi ve matrisin farklı lineer elastik malzemelerden oluştuğunu varsayıp, sürekli ortamlar mekaniğinin kesin üç boyutlu geometrik nonlinear denklemlerini kullanarak yapalım. Lifin başlangıç küçük eğriliğini

$$x_1 = A \exp\left(-\left(\frac{x_3}{L}\right)^2\right) \cos\left(m \frac{x_3}{L}\right) = \varepsilon L \exp\left(-\left(\frac{x_3}{L}\right)^2\right) \cos\left(m \frac{x_3}{L}\right) = \varepsilon \delta(x_3); \quad \varepsilon = \frac{A}{L} \quad (1)$$

şeklinde elde edilir [17]. Buradaki ε parametresi, $L > A$ kabulü ile $\varepsilon = \frac{A}{L}$ ($0 \leq \varepsilon < 1$)'dir.

Lif ile lifli saran malzeme ara yüzeyini S_1 , lifli saran malzeme ile matris malzemesi ara yüzeyi S_2 ile gösterirsek, bu yüzeylerin denklemleri lif-en kesitinin sağladığı koşullardan yararlanarak

$$r_k = r_k(\delta(t_s), \theta), \quad z_k = t_s - \varepsilon \delta'(t_s) r(t_s) \sin \theta + \varepsilon^2 \delta(t_s) \delta'(t_s), \quad \delta'(t_s) = \frac{d\delta(t_s)}{dt_s} \quad (2)$$

$$n_{r,\theta} = n_{r,\theta}(\delta(t_s), \theta) \quad (2)$$

şeklinde yazılabilir. İleride sırası ile life ve geçiş malzemesine ait olan büyüklükleri (2), (3) ve matrise (sonsuz elastik ortama) ait olan büyüklükleri ise (1) üst indisi ile göstereceğiz. Lif, geçiş malzemesi ve sonsuz elastik ortamda aşağıdaki alan denklemleri sağlanır.

$$\nabla_i \left[\sigma^{(k)in} (g'_i + \nabla_n u^{(k)j}) \right] = 0, \quad 2\varepsilon^{(k)}_{jm} = \nabla_j u^{(k)}_m + \nabla_m u^{(k)}_j + \nabla_j u^{(k)n} \nabla_m u^{(k)}_n, \quad (3)$$

$$\sigma^{(k)}_{(in)} = \lambda^{(k)} e^{(k)}_{(in)} + 2\mu^{(k)} \varepsilon^{(k)}_{(in)}, \quad e^{(k)} = \varepsilon^{(k)}_{(rr)} + \varepsilon^{(k)}_{(\theta\theta)} + \varepsilon^{(k)}_{(zz)} \quad (3)$$

S_k yüzeyleri üzerinde ideal temas koşullarının sağlandığını kabul ederek ve bu koşulları

$$\sigma^{(k)in} (g'_i + \nabla_n u^{(k)j}) \Big|_{S_q} n_j = \sigma^{(3)in} (g'_i + \nabla_n u^{(3)j}) \Big|_{S_q} n_j, \quad u^{(k)}_i \Big|_{S_q} = u^{(3)}_i \Big|_{S_q}, \quad k=1,2 \quad (4)$$

biçiminde yazalım. Ele alınan durumda aşağıdaki sınır koşullarının sağlandığını varsayacağız.

$$\sigma^{(k)}_{zz} \xrightarrow{r_q \rightarrow \infty} p, \quad \sigma^{(k)}_{\theta\theta} \xrightarrow{r_q \rightarrow \infty} 0 \quad (ij) \neq zz, \quad |x_3| \rightarrow \infty \text{ iken } \left| \delta(x_3) \right|, \left| \frac{d\delta(x_3)}{dx_3} \right| \rightarrow 0 \quad (5)$$

İleride yapılacak araştırmalarda gerilme ve şekil değiştirme tansörlerinin fiziksel bileşenleri kullanılacaktır. Bu durumda

$$\sigma_{(ij)} = \sigma^{ij} H_i H_j = \sigma_{ij} \frac{1}{H_i H_j}, \quad \varepsilon_{(ij)} = \varepsilon_{ij} \frac{1}{H_i H_j} = \varepsilon^{ij} H_i H_j, \quad u_{(i)} = u^i H_i = u_i \frac{1}{H_i}, \quad (6)$$

formüllerinden faydalanılmaktadır. Burada $(ij) = rr, \theta\theta, zz, r\theta, rz, z\theta$, $(i) = r, \theta, z$ dir. σ^u , ε^v ve σ_v , ε_v gerilme (σ) ve şekil değiştirme (ε) tensörlerinin ele alınan silindirik koordinat takımındaki kovaryant ve kontravaryant bileşenlerini, u^i , u_i 'ler ise yer değiştirme (u) vektörünün bu koordinat takımındaki kovaryant ve kontravaryant bileşenlerini göstermektedir. (6) formülleri tensör ve vektörlerin fiziksel bileşenleri arasındaki ilişkileri göstermektedir. Bu formüllerdeki H_i 'ler ise Lamé sabitleridir. Kısalık amacıyla bundan sonra fiziksel bileşenler için parantezler kullanılmayacaktır. Yukarıda verilen formüllerde tensör notasyonu kullanılmıştır. Bu notasyon ileride de kullanılacaktır. Bunun yanında altı çizili indislere göre toplam yapılmayacaktır.

Böylece ele alınan problemin formülasyonu tamamlanmış olmaktadır. Problem, (3) denklemlerinin (4) sınır koşulları çerçevesinde çözümüne getirilmiştir.

3. Çözüm Yöntemi

Formülasyonu yapılan problemin incelenmesi için [4]'de verilmiş olan sınır-formu pertürbasyon yöntemi kullanılacaktır. Bu yöntemle göre, aranan büyüklükler, yukarıda tanımlanan ε parametresine göre seri halde aranır.

$$\sigma_{rr}^{(k)} = \sum_{q=0}^n \varepsilon^q \sigma_{rr}^{(k),q}, \dots, \varepsilon_{rr}^{(k)} = \sum_{q=0}^n \varepsilon^q \varepsilon_{rr}^{(k),q}, \dots, u_r^{(k)} = \sum_{q=0}^n \varepsilon^q u_r^{(k),q} \quad (7)$$

Ayrıca S_k ara yüzeylerinin denklemlerini oluşturan (2) ve [17]'de verilen bu yüzeylerin birim normallerinin bileşenlerini gösteren ifadeleri de ε 'nin serisi halinde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$r = R + \sum_{k=1}^n \varepsilon^k a_k(\theta, t_1), \quad z = t_1 + \sum_{k=1}^n \varepsilon^k b_k(\theta, t_1), \quad (8)$$

$$n_r = 1 + \sum_{k=1}^n \varepsilon^k c_k(\theta, t_1), \quad n_\theta = \sum_{k=1}^n \varepsilon^k d_k(\theta, t_1), \quad n_z = \sum_{k=1}^n \varepsilon^k g_k(\theta, t_1)$$

bu ifadelerde yer alan ve ε^k 'ların katsayıları olan $a_k(\theta, t_1), \dots, g_k(\theta, t_1)$ 'ler kolaylıkla elde edilebilir [17]. (3)'den, (7)'deki her bir yaklaşım için ayrı ayrı sağlanan alan denklemleri elde edilir. Bu son ifadeleri (4)'de yerine koyar ve n_r , n_θ , n_z 'lerin (8)'deki ifadeleri kullanılırsa, bazı uzun ama bilinen işlemler sonucunda, (7)'deki her bir yaklaşım için $r=R$ 'de sağlanan temas koşulları elde edilir. Bu durumda k. temas koşuluna önceki k-1. yaklaşımların tümüne ait büyüklükler dahil olmaktadır. Şimdi sıfıncı, birinci ve ikinci yaklaşımlar için elde edilen uygun denklem takımlarının ve temas koşullarının ifadelerini ele alalım.

[17]'de verildiği gibi bu durumda sıfıncı yaklaşım için aşağıdaki çözümü elde ederiz

$$\sigma_{zz}^{(1),0} = p, \quad \sigma_{zz}^{(2),0} = p \frac{E^{(2)}}{E^{(1)}}, \quad \sigma_{zz}^{(3),0} = p \frac{E^{(3)}}{E^{(1)}}, \quad \varepsilon_{zz}^{(2),0} = \varepsilon_{zz}^{(3),0} = \varepsilon_{zz}^{(1),0} = \frac{p}{E^{(1)}}, \quad u_r^{(1),0} = -\nu^{(1)} \varepsilon_{zz}^{(1),0} r, \quad (9)$$

$$u_r^{(2),0} = -\nu^{(2)} \varepsilon_{zz}^{(2),0} r, \quad u_r^{(3),0} = -\nu^{(3)} \varepsilon_{zz}^{(3),0} r, \quad u_z^{(2),0} = u_z^{(3),0} = u_z^{(1),0} = \frac{p}{E^{(1)}} z, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(3),0} = \sigma_{\theta\theta}^{(1),0} = 0,$$

$(ij)=rr, r\theta, \theta z, rz$

(9)'daki $E^{(1)}, E^{(2)}$ ve $E^{(3)}$ sırası ile matris, lif ve geçiş malzemelerinin elastisite modülleridir.

Sıfıncı yaklaşım için elde edilen çözüm, diğer kabuller ve ikinci yaklaşım için elde edilecek sağ taraf fonksiyonlarının çok küçük değer üreteceklerinden ihmal edilebileceği dikkate

alınırsa, birinci ve ikinci yaklaşım için denge denklemleri, tansör ve vektörlerin fiziksel bileşenleri cinsinden aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k)q}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k)q}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k)q}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr}^{(k)q} - \sigma_{\theta\theta}^{(k)q}) + \sigma_{zz}^{(k)0} \frac{\partial^2 u_r^{(k)q}}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k)q}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(k)q}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k)q}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^{(k)q} + \sigma_{zz}^{(k)0} \frac{\partial^2 u_\theta^{(k)q}}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k)q}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k)q}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k)q}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz}^{(k)q} + \sigma_{zz}^{(k)0} \frac{\partial^2 u_z^{(k)q}}{\partial z^2} &= 0, \quad q=1,2 \end{aligned} \quad (10)$$

Bu denklemler üç boyutlu lineerize edilmiş elastisite denklemleri ile çakışmaktadır. Benzer şekilde, şekil değiştirme yerdeğiştirme ilişkileri aşağıdaki hale gelirler.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^{(k)q} = \frac{\partial u_r^{(k)q}}{\partial r}, \quad \varepsilon_{r\theta}^{(k)q} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(k)q}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^{(k)q}}{\partial r} - \frac{u_\theta^{(k)q}}{r} \right), \quad \varepsilon_{rz}^{(k)q} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z^{(k)q}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(k)q}}{\partial z} \right), \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(k)q} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(k)q}}{\partial \theta} + \frac{u_r^{(k)q}}{r}, \quad \varepsilon_{\theta z}^{(k)q} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta^{(k)q}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(k)q}}{\partial \theta} \right), \quad \varepsilon_{zz}^{(k)q} = \frac{\partial u_z^{(k)q}}{\partial z}, \quad q=1,2 \end{aligned} \quad (11)$$

Sıfırıncı yaklaşım için elde edilen çözüm dikkate alınırsa birinci yaklaşıma ait [17]'de verilen temas koşulları aşağıdaki gibi elde edilirler.

$$\begin{aligned} [\sigma_{rr}]_{3,1}^{k,1} = 0, \quad [\sigma_{r\theta}]_{3,1}^{k,1} = 0, \quad [\sigma_{rz}]_{3,1}^{k,1} = (\sigma_{zz}^{(1)0} - \sigma_{zz}^{(2)0}) \Big|_{(r,\theta,z)} \frac{d\delta(t_*)}{dt_3} \cos \theta, \\ [u_r]_{3,1}^{k,1} = 0, \quad [u_\theta]_{3,1}^{k,1} = 0, \quad [u_z]_{3,1}^{k,1} = 0, \quad k=1,2 \end{aligned} \quad (12)$$

Birinci yaklaşımla ilgili [17]'de verilen temas koşullarını, (10), (11) ve ikinci yaklaşımla ilgili [17]'de verilen temas koşullarını, (10), (11) denklemlerini çözmek için [14]'de verilen aşağıdaki gösterilimleri kullanacağız.

$$\begin{aligned} u_r^{(k)q} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \psi^{(k)q} - \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \chi^{(k)q}; \quad u_\theta^{(k)q} = -\frac{\partial}{\partial r} \psi^{(k)q} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z} \chi^{(k)q}, \\ \Delta_1^{(k)} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ u_z^{(k)q} = (\lambda^{(k)} + \mu^{(k)})^{-1} \left((\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)}) \Delta_1^{(k)} + (\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k)0}) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \chi^{(k)q}; \quad q=1,2. \end{aligned} \quad (13)$$

Buradaki $\psi^{(k)q}, \chi^{(k)q}$ fonksiyonları aşağıdaki denklemleri sağlarlar.

$$\left(\Delta_1^{(k)} + (\xi_1^{(k)})^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi^{(k)q} = 0; \quad \left(\Delta_1^{(k)} + (\xi_2^{(k)})^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\Delta_1^{(k)} + (\xi_1^{(k)})^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \chi^{(k)q} = 0 \quad (14)$$

[17]'de verilen temas koşullarındaki $\xi_i^{(k)}$ ($k=1,2; i=1,2,3$)'ler sabittirler ve aşağıdaki şekilde belirlenirler.

$$\xi_1^{(k)} = \sqrt{\frac{\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k)0}}{\mu^{(k)}}}, \quad \xi_2^{(k)} = \sqrt{\frac{\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k)0}}{\mu^{(k)}}}, \quad \xi_3^{(k)} = \sqrt{\frac{\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k)0}}{\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)}}} \quad (15)$$

Birinci yaklaşımla ilgili denklemlere ve bunları çözmek için kullanacağımız gösterilimlere

$$\bar{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-isz} dz \quad (16)$$

ile verilen üstel Fourier dönüşümü uygular, ilgili sınır koşullarındaki sağ taraf fonksiyonlarını da dikkate alarak (14) ile verilen diferansiyel denklemlerin Fourier dönüşümlü hallerini

çözersek, bu yaklaşımların Fourier dönüşümlerinin değerlerini belirlerken kullanacağımız $\overline{\psi}^{(k),1}, \overline{\chi}^{(k),1}$ ve $\overline{\psi}^{(k),2}, \overline{\chi}^{(k),2}$ fonksiyonlarını aşağıdaki gibi belirleriz.

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}^{(1),1} &= \overline{A}_1^{(1)}(s) K_1(\xi_1^{(1)} s \frac{r}{L}) \sin \theta \\
\overline{\chi}^{(1),1} &= i \left[\overline{A}_2^{(1)}(s) K_1(\xi_2^{(1)} s \frac{r}{L}) + \overline{A}_3^{(1)}(s) K_1(\xi_3^{(1)} s \frac{r}{L}) \right] \cos \theta \\
\overline{\psi}^{(2),1} &= \overline{A}_1^{(2)}(s) I_1(\xi_1^{(2)} s \frac{r}{L}) \sin \theta, \\
\overline{\chi}^{(2),1} &= i \left[\overline{A}_2^{(2)}(s) I_1(\xi_2^{(2)} s \frac{r}{L}) + \overline{A}_3^{(2)}(s) I_1(\xi_3^{(2)} s \frac{r}{L}) \right] \cos \theta \\
\overline{\psi}^{(3),1} &= \left[\overline{A}_1^{(3)}(s) I_1(\xi_1^{(3)} s \frac{r}{L}) + \overline{B}_1^{(3)}(s) K_1(\xi_1^{(3)} s \frac{r}{L}) \right] \sin \theta \\
\overline{\chi}^{(3),1} &= i \left[\overline{A}_2^{(3)}(s) I_1(\xi_2^{(3)} s \frac{r}{L}) + \overline{A}_3^{(3)}(s) I_1(\xi_3^{(3)} s \frac{r}{L}) + \overline{B}_2^{(3)}(s) K_1(\xi_2^{(3)} s \frac{r}{L}) + \overline{B}_3^{(3)}(s) K_1(\xi_3^{(3)} s \frac{r}{L}) \right] \cos \theta \quad (17) \\
\overline{\psi}^{(1),2} &= \overline{A}_{12}^{(1)}(s_1) K_2(\xi_1^{(1)} s_1 \frac{r}{L}) \sin 2\theta \\
\overline{\chi}^{(1),2} &= i \left\{ \overline{A}_{20}^{(1)}(s_1) K_0(\xi_2^{(1)} s_1 \frac{r}{L}) + \overline{A}_{30}^{(1)}(s_1) K_1(\xi_3^{(1)} s_1 \frac{r}{L}) + \right. \\
&\quad \left. \left[\overline{A}_{22}^{(1)}(s_1) K_2(\xi_2^{(1)} s_1 \frac{r}{L}) + \overline{A}_{32}^{(1)}(s_1) K_2(\xi_3^{(1)} s_1 \frac{r}{L}) \right] \cos 2\theta \right\} \\
\overline{\psi}^{(2),2} &= \overline{A}_{12}^{(2)}(s_1) I_2(\xi_1^{(2)} s_1 \frac{r}{L}) \sin 2\theta, \\
\overline{\chi}^{(2),2} &= i \left\{ \overline{A}_{20}^{(2)}(s_1) I_0(\xi_2^{(2)} s_1 \frac{r}{L}) + \overline{A}_{30}^{(2)}(s_1) I_1(\xi_3^{(2)} s_1 \frac{r}{L}) + \right. \\
&\quad \left. \left[\overline{A}_{22}^{(2)}(s_1) I_2(\xi_2^{(2)} s_1 \frac{r}{L}) + \overline{A}_{32}^{(2)}(s_1) I_2(\xi_3^{(2)} s_1 \frac{r}{L}) \right] \cos 2\theta \right\} \\
\overline{\psi}^{(3),2} &= \left[\overline{A}_{12}^{(3)}(s_1) I_2(\xi_1^{(3)} s_1 \frac{r}{L}) + \overline{B}_{12}^{(3)}(s_1) K_2(\xi_1^{(3)} s_1 \frac{r}{L}) \right] \sin 2\theta \\
\overline{\chi}^{(3),2} &= i \left\{ \overline{A}_{20}^{(3)}(s_1) I_0(\xi_2^{(3)} s_1 \frac{r}{L}) + \overline{A}_{30}^{(3)}(s_1) I_1(\xi_3^{(3)} s_1 \frac{r}{L}) + \overline{B}_{20}^{(3)}(s_1) K_0(\xi_2^{(3)} s_1 \frac{r}{L}) + \overline{B}_{30}^{(3)}(s_1) K_1(\xi_3^{(3)} s_1 \frac{r}{L}) \right. \\
&\quad \left. \overline{B}_{30}^{(3)}(s_1) K_1(\xi_3^{(3)} s_1 \frac{r}{L}) + \left[\overline{A}_{22}^{(3)}(s_1) I_2(\xi_2^{(3)} s_1 \frac{r}{L}) + \overline{A}_{32}^{(3)}(s_1) I_2(\xi_3^{(3)} s_1 \frac{r}{L}) + \overline{B}_{22}^{(3)}(s_1) K_2(\xi_2^{(3)} s_1 \frac{r}{L}) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \overline{B}_{32}^{(3)}(s_1) K_2(\xi_3^{(3)} s_1 \frac{r}{L}) \right] \cos 2\theta \right\} \quad (18)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $I_n(x)$ sanal argümanlı Bessel fonksiyonu ve $K_n(x)$ Macdonald fonksiyonlarıdır. Ayrıca Fourier dönüşüm parametresi olarak (17)'de s , (18)'de s_1 kullanılmıştır. (17)-(18) fonksiyonları ilgili yaklaşımların sınır-değer problemlerinde kullanılır ve böylece ulaşılabilecek lineer denklemler takımı çözümlürse, ulaşılmak istenen gerilmelerin birinci ve ikinci yaklaşımlarının Fourier dönüşümlü durumlarını hesaplamaya

yarayacak büyüklükler belirlenmiş olur. Asıl gerilme değerlerine ulaşmak için, örneğin $\sigma_{xx}^{(1)}$ için aşağıda verilen ters Fourier dönüşümü uygulanır.

$$\sigma_{xx}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\sigma}_{xx}^{(1)} e^{i\omega z} d\omega \quad (19)$$

4. Sayısal Sonuçlar ve Değerlendirme

Birinci yaklaşımla ilgili olan lineer denklemler sistemi çözüldüğünde elde etmek istediğimiz gerilme büyüklüklerinin s Fourier parametresine bağlı Fourier Dönüşümlü değerleri bulunmuş olur. Gerçek değerlere ulaşmamız için kullanmamız gereken Ters Fourier Dönüşümündeki $\int_{-\infty}^{\infty} (.) d\omega$ integral, büyüklüklerin tek veya çift olmalarından dolayı $\int_0^{\infty} (.) d\omega$ haline gelmiş olur.

Bu integral

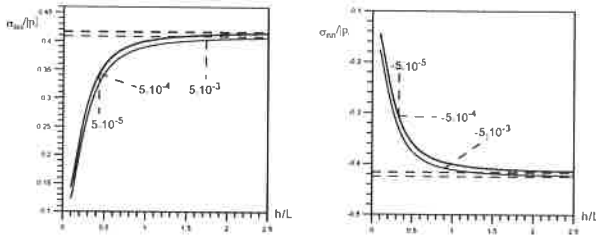
$$\int_0^{\infty} (.) d\omega \cong \int_0^{S_N} (.) d\omega = \sum_{i=0}^N \int_{S_i}^{S_{i+1}} (.) d\omega \quad (20)$$

yaklaşımıyla çözülmüştür. N ve S. değerleri yakınsaklık kriteri ile belirlenmiş parametreler olmak üzere $S_0 = 0$, $S_N = S.$, olarak kullanılmıştır. Ayrıca $\int_{S_i}^{S_{i+1}} (.) d\omega$ integralinin sayısal hesabı için 10 noktalı Gaus-Legendre sayısal integrasyon yöntemi kullanılmıştır. İkinci yaklaşım ile ilgili sınır koşullarında birinci yaklaşımla ilgili büyüklükler mevcuttur. Bu büyüklükleri elde etmek için (19) ile verilen Ters Fourier Dönüşümü kullanılır, bu temas koşullarına önceki kısımda verilen Fourier Dönüşümü uygulanır ve fonksiyonların tek veya çift olma özellikleri de dikkate alınırsa sağ tarafında bir ve iki katlı integrallerin olduğu lineer denklemler sistemine ulaşılır. Bu denklemler sistemi çözüldüğünde elde etmek istediğimiz değerlerin Fourier Dönüşümlü hesaplarında kullanacağımız bilinmeyenler elde edilmiş olacaktır. Elde etmek istediğimiz büyüklüklerin ikinci yaklaşımdaki gerçek değerlerine ulaşmak için Ters Fourier Dönüşümüne ihtiyacımız vardır. Dolayısıyla burada da bir integrasyon hesabına başvurmak gerekir. Sonuçta üç katlı integralin hesabı ile karşılaşılır. Bu hesap [17]'de ayrıntısıyla verilmiştir.

Gerilme yayılımına ait incelemeler σ_{nn} normal gerilmelere ait sayısal sonuçlar elde etmek ve bunları yorumlama kapsamında yapılmıştır. Bu gerilmeler, lif, lifi saran malzeme ve matris arakesit yüzeyleri olan $S_k (k=1,2)$ yüzeyleri üzerinde n normal vektörü doğrultusundaki gerilmelerdir. Yerel eğriliğin ihmal edilmesi durumuna karşılık gelen $\varepsilon = 0$ halinde σ_{nn} gerilmeleri σ_{xx} ile çıkarılır.

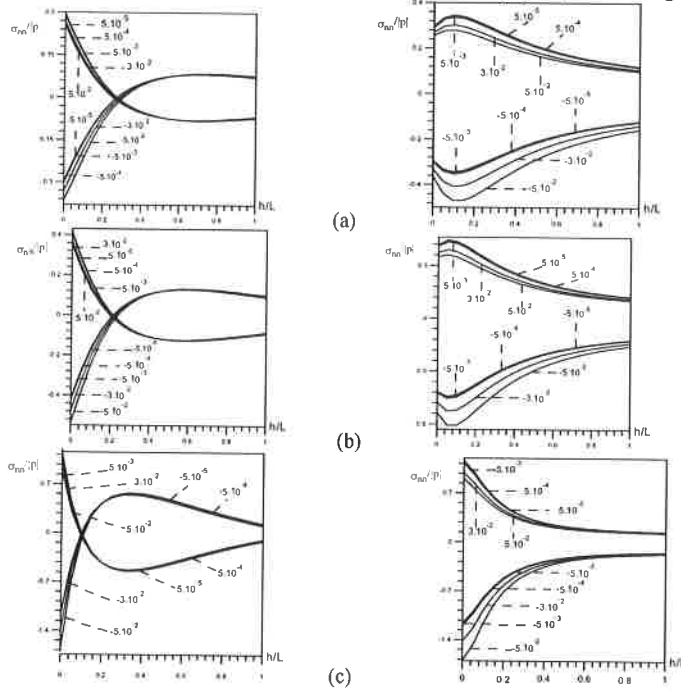
Sayısal sonuçlar için $\kappa = R/L$ ve h/L parametrelerini tanımlayalım. Verilen sayısal sonuçlar $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = \nu^{(3)} = 0.3$, $\varepsilon = 0.07$, $E^{(2)}/E^{(1)} = 50$ ve $\theta = 0$ değerleri kullanılarak elde edilmiştir. Geometrik nonlinearitenin gerilme yayılımına etkisini göstermek için $\alpha = p/E^{(1)}$ parametresi kullanılmıştır.

Şekil 2 $\sigma_{nn}/|p|$ gerilmelerinin h/L parametresine göre değişimini göstermektedir. Bu şekilde $m=1$, $E^{(1)}/E^{(3)} = 1/40$, $E^{(2)}/E^{(1)} = 50$, $\kappa = 0.1$ ve $x_i/L = 0.0$ 'dır. Bu şekilde kesikli çizgiler ile gösterilen doğrular aynı parametre değerlerinde sonsuz elastik ortamda sarılı olmayan yerel eğrilikli tek lif olması probleminde elde edilenleri [15] göstermektedir. Buradan, geçiş malzemesinin kalınlığının artırılması ile aynı parametre değerlerinde malzemenin sarılı olmayan yerel eğrilikli tek lif içermesi durumunda elde edilenlere ulaşıldığı gözlenmektedir.



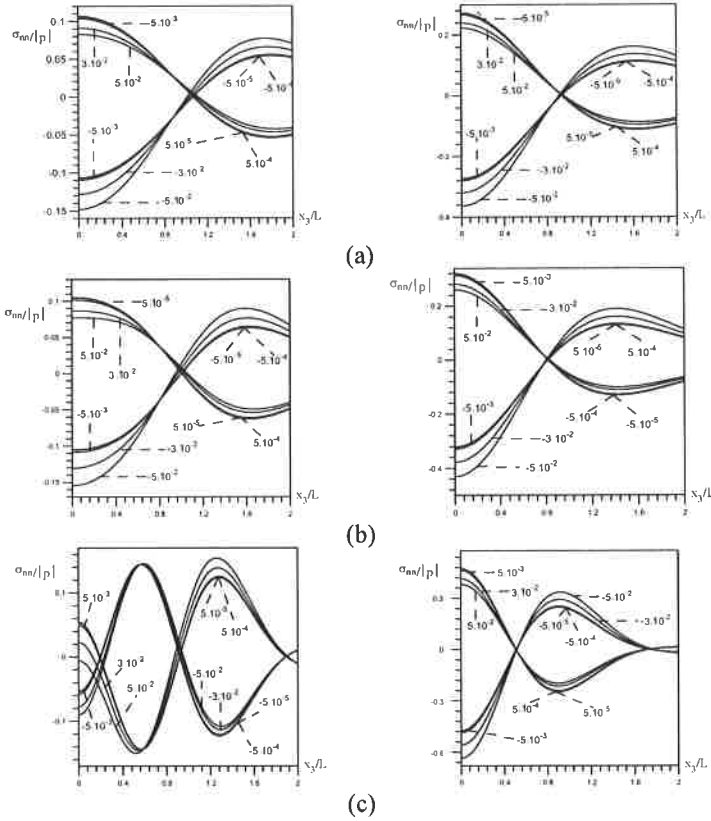
Şekil 2. $\kappa = 0.1$, $x_3/L = 0.0$, $E^{(1)}/E^{(3)} = 1/40$ ve $m=1$ değerlerinde, çeşitli α ' lar için $\sigma_{nn}/|p|$ ile h/L arasındaki bağımlılığın tek lif durumuna yakınsaması

Şekil 3 grafiğinde, $E^{(2)}/E^{(1)} = 50$, $E^{(3)}/E^{(1)} = 40$, $\kappa = 0.1$ değerinde $m = 0, 1, 3$ için $\sigma_{nn}/|p|$ ile h/L arasındaki bağımlılık ve geometrik nonlineeriteyi gösteren α 'nın buna etkisi gösterilmiştir. Beklendiği gibi, $h/L = 0$ değerinde elde edilen sayısal sonuçların sarılı olmayan tek lif problemi için elde edilenlerle [15] çakıştığı gözlenmektedir. Yine aynı şekillerden, m parametresinin değerleri büyüdükçe ara yüzlerdeki normal gerilme değerlerinin de mutlak değer olarak büyüdüğü ve geometrik nonlineeritenin etkisi olarak, $|\alpha|$ büyüdükçe her iki temas yüzeylerinde de normal gerilme değerlerinin çekme durumunda mutlak olarak arttığı, basınç durumunda mutlak olarak azaldığı izlenmektedir. Basınç durumunda, α değerlerinin, ilgili stabilite kaybı değerlerinden [2] küçük alındığını belirtelim.



Şekil 3. $\kappa = 0.1$, $x_3/L = 0.0$, $E^{(3)}/E^{(1)} = 40$ değerlerinde, çeşitli α ' lar için $\sigma_{nn}/|p|$ ile h/L arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$

Gerilme değerlerinin x_3/L parametresine göre değişimini gösteren şekil 4’de ise $E^{(3)}/E^{(1)} = 50$, $E^{(3)}/E^{(1)} = 30$ ve $h/L = 0.2$ değerinde $\sigma_{nn}/|p|$ gerilme değerleri ile x_3/L arasındaki bağımlılığa geometrik nonlineeritenin etkisini göstermektedir. Bu grafiklerden görülmektedir ki geçiş malzemesine ait olan temas yüzeyindeki gerilme değerleri $|\alpha|$ monoton olarak azaldıkça basınçta (çekmede) azalmaktadır (artmaktadır). Yine m ’nin değeri büyüdükçe gerilme değerleri de mutlak olarak büyümektedir.



Şekil 4. $\kappa = 0.1$, $E^{(3)}/E^{(1)} = 30$ değerlerinde, çeşitli α ’lar için $\sigma_{nn}/|p|$ ile x_3/L arasındaki bağımlılık (a) $m=0$, (b) $m=1$, (c) $m=3$

Tablo 1’de $x_3/L = 0$, $E^{(3)}/E^{(1)} = 50$, $\alpha = 5.10^{-3}$, $h/L = 0.2$, $\varepsilon = 0.07$ değerlerinde $\sigma_{nn}/|p|$ normal gerilmelerinin farklı m , $E^{(3)}/E^{(1)}$ ve κ parametrelerine göre değerleri verilmiştir. Bu tablodan $E^{(3)}/E^{(1)}$ büyüdükçe geçiş malzemesiyle matris yüzeyindeki gerilme değerlerinin de mutlak değerce büyüdüğü, κ değeri büyüdükçe de gerilme değerlerinin mutlak olarak azaldığı görülmektedir. Ayrıca m ’nin değeri arttıkça da gerilme değerlerinin de mutlak olarak arttığı izlenmiştir.

Tablo 1. $x_3/L = 0$, $E^{(2)}/E^{(1)} = 50$, $\alpha = 5.10^{-3}$, $h/L = 0.2$, $\varepsilon = 0.07$ değerlerinde Çeşitli m , $E^{(3)}/E^{(1)}$ ve κ 'lar için $\sigma_{xx}/|p|$ 'nın değerleri

m	κ	$\frac{E^{(3)}}{E^{(1)}} = 20$		$\frac{E^{(3)}}{E^{(1)}} = 30$		$\frac{E^{(3)}}{E^{(1)}} = 40$	
0	0.1	0.1662	0.2182	0.1065	0.2728	0.0503	0.3216
	0.2	0.1373	0.1630	-0.6597	0.3382	-1.5030	0.4033
	0.3	0.1066	0.1177	-0.0923	0.2350	-0.6161	0.2640
	0.4	0.0909	0.0912	-0.0673	0.1672	-0.5079	0.1841
1	0.1	0.2055	0.2630	-0.0920	0.1289	-0.4908	0.1407
	0.2	0.1514	0.1735	-0.6205	0.3753	-1.3706	0.4400
	0.3	0.1157	0.1209	-0.2535	0.2363	-0.7769	0.2630
	0.4	0.1056	0.0939	-0.2470	0.1638	-0.7120	0.1796
3	0.1	0.3685	0.4235	-0.2565	0.1266	-0.6852	0.1380
	0.2	0.1994	0.1933	-0.6719	0.4931	-1.2625	0.5427
	0.3	0.1983	0.1351	-0.9966	0.2079	-1.6660	0.2255
	0.4	0.2761	0.1191	-1.1263	0.1291	-1.8010	0.1419

Tablo 2. $x_3/L = 0$, $E^{(2)}/E^{(1)} = 50$, $E^{(3)}/E^{(1)} = 20$, $\alpha = 5.10^{-3}$, $h/L = 0.2$, $\varepsilon = 0.07$, $m=1$ değerlerinde Çeşitli κ 'lar için $\sigma_{xx}/|p|$ 'nın birinci ve ikinci yaklaşım değerleri

κ	Yak No.	$\sigma_{xx}/ p $	
0.1	1	0.2055	0.2630
	2	0.1254	0.2977
0.2	1	0.1514	0.1735
	2	0.2833	0.2039
0.3	1	0.1157	0.1209
	2	0.2415	0.1448
0.4	1	0.1056	0.0939
	2	0.1998	0.1129

Kaynaklar

- [1] Tarnopolsky Yu.M., Jigun I.G. and Polyakov V.A., "Spatially-reinforced composite materials", Handbook, Mashinostroyeniya, Moscow, 1987 (in Russian).
- [2] Guz A.N., "Failure mechanics of composite materials in compression". -Kiev: Naukova Dumka, 1990. -630 p. (in Russian.)
- [3] Kelly A., "Composite Materials: impediments do wider use and some suggestions to overcome these", In Proceeding Book ECCM-8, 3-6 June 1998, Napoles-Italy, Vol.I, 15-18.
- [4] Akbarov, S.D. and Guz, A.N., "Mechanics of Curved Composites", -Kluwer Academic Publishers, 2000-464p.

- [5] Guz A.N., "On one two-level model in the mesomechanics of compression fracture of Cracked Composites", *Int. Appl. Mech.*, 2003, 39, N0:3, 274-285.
- [6] Akbarov, S.D. and Guz, A.N. "Method of Solving Problems in the Mechanics of Fiber Composites With Curved Structures", *Soviet Applied Mechanics*, -1985-March-p.777-785.
- [7] Akbarov, S.D. and Guz, A.N., "Mechanics of curved composites (piecewise homogenous body model)", *Int. Appl. Mech.*, 2002, 38, N0:12, 1415-1439.
- [8] Kosker R. and Akbarov, S.D., "Influence of the interaction between two neighbouring periodically curved fibers on the stress distribution in a composite material", *Mechanics of Composite Materials*, 2003, Vol.39, No. 2, 165-176.
- [9] Akbarov, S.D. and Kosker R., "On a stress analysis in the infinite elastic body with two neighbouring curved fibers", *Composites Part B: Engineering*, 2003, 34/2, 2003, 143-150.
- [10] Djafarova E.K., "On the solution method of the stress-strain state problems in the fibrous composites with locally curving structures", *Tr. Nauch. Konf. Molod. Uchyon. In-ta Mekhan. AN Ukr.*, Kiew, 1992.-Part I. -p.39-44 (in Russian).
- [11] Djafarova E.K., "Distribution of self-equilibrated stresses in fibrous composite materials with local curving in the structures", *Dep. In VINITI*, N 2166-B94, 07.09.1994. -34p (in Russian).
- [12] Djafarova E.K., "Stress state in composite materials with local curving fibers", *Dissertation for the degree of Candidate of Physico-Mathematical Sciences. Inst. Methem. And Mekhan. AN Azerb. Republ. Baku*, 1995. -110p. (in Russian).
- [13] S. D. Akbarov, R.Kosker and K. Simsek, "Stress Distribution In An Infinite Elastic Body With A Locally Curved Fiber In A Geometrically Nonlinear Statement" *Mechanics of Composite Materials*, 41 (4): 291-302, July, 2005.
- [14] Guz, A.N. "Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies", -Springer, 1999-555p.
- [15] Köşker, R ve Şimşek, K., "Geometrik Nonlineerite Durumunda Yerel Eğrilikli Lif İçeren Elastik Ortamdaki Normal Gerilmeler Hakkında", *Sigma Mühendislik Ve Fen Bilimleri Dergisi*, 2006/3-p.97-108.
- [16] Köşker, R ve Şimşek, K., "Yerel Eğrilikli Örtüklü Lif İçeren Elastik ortamdaki normal Gerilmeler", *Sigma Mühendislik Ve Fen Bilimleri Dergisi*, 2007/3-p.223-235.
- [17] Şimşek, K., "Yerel Eğrilikli Örtüklü Tek Lif ve Sarılı Tek Lif İçeren Sonsuz Ortamların Gerilme durumuna Ait Nonlinear Sınır Değer Problemleri ", *Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, YTÜ.*,2006

