

Hiperelastik Malzemeden Yapılmış Basit Kirişlerin Geometrik Lineer Olmayan Statik Analizi

Şeref Doğuşcan AKBAŞ, Turgut KOCATÜRK

Yıldız Teknik Üniversitesi, İnşaat Fakültesi, İnşaat Müh. Böl., İstanbul
sakbas@yildiz.edu.tr, kocaturk@yildiz.edu.tr

ÖZET

Bu çalışmada, düzgün yayılı izleyici olmayan (non-follower) yük etkisi altındaki hiperelastik malzemeden yapılmış basit kirişlerin geometrik lineer olmayan statik davranışı incelenmektedir. İki adet kiriş göz önüne alınmış olup kirişler için mesnet koşulları izleyen şekildedir: 1) Bir ucu sabit mesnetli, diğer ucu hareketli mesnetli kiriş. 2) Her iki ucu sabit mesnetli kiriş. Kirişlerin incelenmesinde düzlem sürekli ortam kabulü yapılmıştır. Kirişlerin malzemesi homojen, izotrop ve hiperelastiktir. Bu çalışmada, kirişin sonlu eleman modelinde, iki boyutlu dörtgensel (quadratic) 12 düğüm noktalı toplam Lagrangian sonlu elemanlar modeli kullanılmıştır. Bu lineer olmayan sonlu eleman problemi Newton-Raphson ardışık yaklaşım (iterasyon) yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Newton Raphson yönteminde, sürekli ortama ilişkin denge denklemlerinin lineerleştirilmesi gereklidir ki bu sürekli ortam formundaki virtüel iş prensibinin lineerleştirilmesi yolu ile gerçekleştirilebilir. Bu çalışmada, büyük yer değiştirmelerin ve büyük dönmelerin normal gerilme ve kayma gerilmelerinin kiriş yüksekliği boyunca dağılımı üzerindeki etkisi detaylı olarak incelenmiştir. Yatay ve düşey doğrultularda çeşitli sayıda sonlu elemanlar alınarak yakınsama çalışmaları yapılmıştır. Sayısal sonuçlar göstermektedir ki geometrik lineer olmayan durum kirişin statik cevapları üzerinde önemli düzeyde etkilidir.

Anahtar Kelimeler: Geometrik lineer olmayan, basit kirişler, Sonlu elemanlar yöntemi, Toplam Lagrangian

ABSTRACT

This paper focuses on the geometrically non-linear static analysis of simple beams made of hyperelastic material subjected to a non-follower transversal uniformly distributed load. The material of the beam is assumed as isotropic and hyperelastic. In this study, finite element model of the beam is constructed by using total Lagrangian finite element model of two dimensional continua for a twelve-node quadratic element. The considered highly non-linear problem is solved by using incremental displacement-based finite element method in connection with Newton-Raphson iteration method. In order to use the solution procedures of Newton-Raphson type, there is need to linearized equilibrium equations, which can be achieved through the linearization of the principle of virtual work in its continuum form. In the study, the effect of the large deflections and rotations on the displacements and the normal stress and the shear stress distributions through the thickness of the beam is investigated in detail. The convergence study is performed for various numbers of finite elements. A few of the obtained results are compared with the previously published results. Numerical results show that geometrical nonlinearity plays very important role in the static responses of the beam.

Keywords: Geometrically non-linear, simple beams, Finite Element analysis, Total Lagrangian

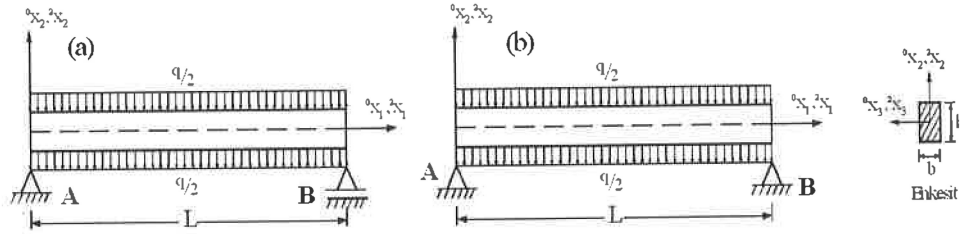
1. GİRİŞ

Son yıllarda teknolojideki büyük değişim ile yüksek hızlı ve fakat hafif yapılara olan ihtiyaç kirişlerin lineer olmayan teorilerinin kullanımını gerekli hale getirmiştir. Örneğin, ticari araçlarda kullanılan yaprak yayların incelenmesi kirişlerin lineer olmayan teorileri çerçevesinde olmalıdır. Son 50 yılda, özellikle uzay mühendisliğinde, robotikte ve çeşitli üretimlerde oluşan gelişmeler ile sayısal olarak çözülebilen lineer olmayan modellerin kullanılması kaçınılmaz hale gelmiştir. Çünkü kirişlerin büyük yer değiştirme problemlerinin eliptik integraller kullanılarak elde edilen kapalı çözümleri sınırlıdır. Kapalı çözümlere ilişkin bazı çalışmalar izleyen paragrafta verilmiştir: Chucheeesakul ve diğerleri [5,6], yer değiştirmiş durumdaki yay uzunluğu değişen, moment değişimi etkisi altındaki kirişleri eliptik integral yöntemi, shooting optimizasyon yöntemi ve sonlu elemanlar yöntemini kullanarak incelemiştir. Wang ve diğerleri [2], tekil yük etkisindeki, değişken yer değiştirmiş yay uzunluklu, bir ucu sabit mesnetli, diğer ucu sürtünmesiz hareketli mesnetli kirişlerin büyük yer değiştirme problemlerini incelemiştir. He ve diğerleri [8], benzer bir problemi, sadece sürtünmesiz hareketli mesnetli sürtünme mesneti olarak çözmüştür. Sayısal çalışmalardan bazıları izleyen paragraflarda verilmiştir. Kapania ve Li [4] sonlu şekil değiştirme ve dönmeleri dahil ederek kesin eğri kiriş elemanlarının formüllerini elde etmiş ve bunları kullanmışlardır. Al Saddar ve Al Rawi [1] genel düşey ve yatay yönlerde etkiyen sürekli ve süreksiz dış yayılı yükler etkisi altındaki prizmatik ve prizmatik olmayan narin konsol kirişlerin büyük yer değiştirmelerini incelemek için quasi-lineer sonlu farklar yöntemi geliştirmiştir. Li ve Zhou [7], düzgün yayılı izleyici (follower) yük etkisindeki bir ucu mafsallı diğer ucu ankastre mesnetli kirişlerin burkulma sonrası davranışlarını, kesin matematiksel model türeterek ve sayısal sonuçlar için shooting yöntemini kullanarak incelemiştir.

Reddy [3] düzgün yayılı yük etkisindeki konsol bir kirişin statik incelemesini 8 düğüm noktalı dörtgensel (quadratic) elemanlar kullanılarak gerçekleştirmiştir.

2. TEORİ VE FORMÜLASYON

Hiperelastik ve izotrop malzemeden yapılmış bir basit kirişin maddesel veya Lagrangian koordinat sistemi $(^0x_1, ^0x_2, ^0x_3)$ ve uzaysal ya da Euler koordinat sistemi $(^2x_1, ^2x_2, ^2x_3)$ Şekil 1(a) ve Şekil 1(b)'de gösterilmiştir. Ele alınan kirişlerden birinin bir ucu sabit mesnetli, diğer ucu hareketli mesnetli, diğerinin ise her iki ucu da sabit mesnetlidir. Kirişler şekil 1a ve b de gösterildiği gibi düzgün yayılı izleyici olmayan (non-follower) yük etkisindedirler.



Şekil 1. (a) Üniform yayılı yük etkisinde Bir ucu sabit mesnetli, diğer ucu hareketli mesnetli kiriş (b) Üniform yayılı yük etkisinde her iki ucu sabit mesnetli kiriş

Problemlerin çoğu için yönetici eşitliklerin çıkarılması çok zor değilken bunların kesin inceleme yöntemleriyle çözümü çok güç bir işlemdir. Bu tip problemlerde sayısal inceleme yöntemleri alternatif çözüm araçları olmaktadır. Bilindiği gibi nümerik yöntemlerin kullanımıyla diferansiyel eşitlikler cebirsel eşitlikler sistemine dönüştürülebilir ki bu eşitlikler sistemi de bilgisayarlar kullanılarak çözülebilir. Ele alınan problem lineer olmayan bir problemdir.

Lineer problemler bile geometri ve malzeme karmaşıklıklarından dolayı kesin olarak çözülemeyebilmektedirler. Fakat sayısal yöntemler kullanılarak yaklaşık çözümler elde etmek göreceli olarak daha kolaydır. Bernoulli-Euler kiriş teorisi çerçevesinde özel sınır ve yükleme koşulları için bazı çözümler vardır. Bununla birlikte iki ya da üç boyutlu sürekli ortam yaklaşımı çerçevesindeki bir lineer olmayan problemin kesin çözümü mümkün değildir. İncelenen basit kirişlerde, kiriş iki boyutlu sürekli ortam olarak ele alınmıştır. Çalışmada, 12 düğüm noktalı dörtgensel (quadratic) elemanın toplam Lagrangian formülasyonu üzerine temellendirilen iki boyutlu ortamın toplam Lagrangian sonlu eleman modeli kullanıldı. İki boyutlu sürekli ortam problemi için toplam Lagrangian formülasyonlarının çözümünde, bilinen önceki çözümlerden hareketle küçük adımlı artımsal yük yaklaşımı kullanıldı. Bilindiği gibi, tüm yükün tek adımda etkilmesi durumunda çözüm ancak lineer olmamanın yumuşak olması halinde mümkündür. Ayrıca artımsal işlem yolunun takibi aşırı sayıda iterasyon sayısını indirgemede ve fiziksel olarak doğru yolu izlemeye faydalıdır. Burada artımsal işlem yolu ile birlikte Newton-Raphson ardışık yaklaşım yöntemi kullanılmış olup n inci yük artımında i inci iterasyon için çözüm izleyen formda elde edilir:

$$d\mathbf{u}_n^i = (\mathbf{K}_T^i)^{-1} \mathbf{R}_{n+1}^i \quad (2.1)$$

Bilindiği gibi ardışık yaklaşım yöntemlerinin temel felsefesi, artıklar vektörünü çok küçük bir ζ_{tol} ile tanımlanan kıyaslama parametresinden küçük kılmak çözümü elde etmektir. Bu çalışmada kıyaslama parametresi izleyen şekilde alınmıştır:

$$\sqrt{\frac{[(d\mathbf{u}_n^{i+1} - d\mathbf{u}_n^i)^T (d\mathbf{u}_n^{i+1} - d\mathbf{u}_n^i)]^2}{[(d\mathbf{u}_n^{i+1})^T (d\mathbf{u}_n^{i+1})]^2}} \leq \zeta_{tol} \quad (2.2)$$

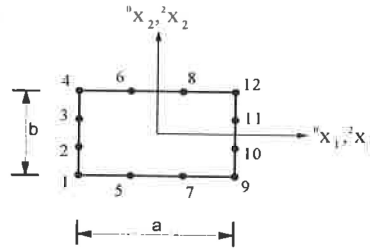
Ardışık yaklaşımların bir serisi

$$\mathbf{u}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{u}_{n+1}^i + d\mathbf{u}_{n+1}^i = \mathbf{u}_n + \Delta\mathbf{u}_n^i \quad (2.3)$$

verir. Burada

$$\Delta\mathbf{u}_n^i = \sum_{k=1}^i d\mathbf{u}_n^k \quad (2.4)$$

dır.



Şekil 2. 12 düğüm noktalı dörtgensel (quadratic), iki boyutlu eleman

12 düğüm noktalı dörtgensel (quadratic) eleman için iki boyutlu sürekli ortamın toplam Lagrangian sonlu eleman modeli durumunda i inci iterasyonda kullanılacak olan teğet rijitlik matrisi $\mathbf{K}_T^i$, çözüm artım vektörü $d\mathbf{u}_n^i$ ve artık vektörü $\mathbf{R}_{n+1}^i$ izleyen şekilde verilir:

$$d\mathbf{u}_n^i = \begin{Bmatrix} \{\bar{\mathbf{u}}\} \\ \{\bar{\mathbf{v}}\} \end{Bmatrix}^i \quad \mathbf{K}_T^i = \begin{bmatrix} [K^{11L}] + [K^{11N}] & [K^{12L}] \\ [K^{21L}] & [K^{22L}] + [K^{22N}] \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_{n+1}^i = \begin{Bmatrix} \{ {}^2F^1 \} - \{ {}^1F^1 \} \\ \{ {}^2F^2 \} - \{ {}^1F^2 \} \end{Bmatrix} \quad (2.5 \text{ a,b,c})$$

Burada görülen K_{ij}^{11L} , K_{ij}^{12L} , K_{ij}^{22L} , $K_{ij}^{11NL} = K_{ij}^{22NL}$, ${}^2F_i^1$ ve ${}^2F_i^2$ büyüklükleri Reddy [3] ve Akbaş [8] tarafından verilmiş olup bu büyüklükler içinde kullanılan ${}^2f_{0x_1}$, ${}^2f_{0x_2}$ kütle kuvvetleridir, ${}^2t_{0x_1}$, ${}^2t_{0x_2}$ yüzey kuvvetleridir. Bunlar 0x_1 ve 0x_2 doğrultularındadırlar. Ayrıca yine söz konusu ifadelerde kullanılan gerilmeler olan ${}^1S_{11}$, ${}^1S_{22}$, ${}^1S_{12}$ büyüklükleri cismin C_1 konumundaki ikinci Piola-Kirchhoff gerilme tensörünün bileşenleridir. Göz önüne alınan malzeme hiperelastikdir. Bu durumda ikinci Piola-Kirchhoff gerilme tensörü (Şekil değiştirmemiş birim alandaki dönüştürülmüş mevcut kuvvet: Bu tensör Cauchy gerilme tensörü simetrik olduğunda simetriktir.) ve Green-Lagrange genleme tensörü arasındaki ilişki izleyen şekilde kabul edilir:

$${}^1_0\mathbf{S} = \begin{Bmatrix} {}^1_0S_{11} \\ {}^1_0S_{22} \\ {}^1_0S_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_0C_{11} & {}_0C_{12} & 0 \\ {}_0C_{12} & {}_0C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & {}_0C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^1_0E_{11} \\ {}^1_0E_{22} \\ 2 {}^1_0E_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

Burada ${}_0C_{ij}$ cismin C_0 konumundaki indirgenmiş bünye tensörünün bileşenleridir. İndirgenmiş bünye tensörü matris formda izleyen şekilde yazılır:

$${}_0\mathbf{C} = \begin{bmatrix} {}_0C_{11} & {}_0C_{12} & 0 \\ {}_0C_{12} & {}_0C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & {}_0C_{66} \end{bmatrix}, \quad {}_0C_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad {}_0C_{12} = {}_0C_{21} = \frac{\nu E}{1-\nu^2}, \quad {}_0C_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad {}_0C_{66} = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.7 \text{ a,b})$$

Burada indirgenmiş bünye tensörünün bileşenleri Young modülü E , ve Poisson oranı ν cinsinden izleyen şekilde yazılmıştır. Green-Lagrange genleme tensörü iki boyutlu katı sürekli ortam durumunda yer değiştirmeler cinsinden izleyen şekilde ifade edilir:

$${}^1_0\mathbf{E} = \begin{Bmatrix} {}^1_0E_{11} \\ {}^1_0E_{22} \\ 2 {}^1_0E_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial {}^0x_1} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial {}^0x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial {}^0x_1} \right)^2 \right] \\ \frac{\partial v}{\partial {}^0x_2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial {}^0x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial {}^0x_2} \right)^2 \right] \\ \frac{\partial u}{\partial {}^0x_2} + \frac{\partial v}{\partial {}^0x_1} + \left(\frac{\partial u}{\partial {}^0x_1} \frac{\partial u}{\partial {}^0x_2} + \frac{\partial v}{\partial {}^0x_1} \frac{\partial v}{\partial {}^0x_2} \right) \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

Sonlu elemanın yer değiştirme alanları düğüm yer değiştirmeleri cinsinden izleyen şekilde ifade edilebilir:

$$u = (\psi_1 \cdot u_1 + \psi_2 \cdot u_2 + \psi_3 \cdot u_3 + \psi_4 \cdot u_4 + \psi_5 \cdot u_5 + \psi_6 \cdot u_6 + \psi_7 \cdot u_7 + \psi_8 \cdot u_8 + \psi_9 \cdot u_9 + \psi_{10} \cdot u_{10} + \psi_{11} \cdot u_{11} + \psi_{12} \cdot u_{12}) \quad (2.9 \text{ a})$$

$$v = (\psi_1 \cdot v_1 + \psi_2 \cdot v_2 + \psi_3 \cdot v_3 + \psi_4 \cdot v_4 + \psi_5 \cdot v_5 + \psi_6 \cdot v_6 + \psi_7 \cdot v_7 + \psi_8 \cdot v_8 + \psi_9 \cdot v_9 + \psi_{10} \cdot v_{10} + \psi_{11} \cdot v_{11} + \psi_{12} \cdot v_{12}) \quad (2.9 \text{ b})$$

12 düğüm noktalı dörtgensel (quadratic) eleman için yaklaşım fonksiyonları Akbaş [8] tarafından verilmiş olup burada yeniden yazılmayacaktır.

Rijitlik matrisinde görülen integralin sayısal hesaplamaları beş noktalı Gauss kuralı kullanılarak gerçekleştirilecektir. Gerçek gerilme, yani şekil değiştirmiş konumdaki gerilme, şekil değiştirmiş birim alandaki mevcut kuvvet (son durum kuvveti) olarak ifade edilir. Cauchy gerilme tensörü bileşenleri ${}^2\sigma_{ij}$ ve ikinci Piola-Kirchhoff gerilme tensörü bileşenleri ${}^2S_{ij}$ arasındaki ilişki izleyen şekilde yazılabilir:

$${}^2\sigma_{ij} = \frac{{}^2\rho}{\rho} \frac{\partial^2 x_i}{\partial^0 x_p} \frac{\partial^2 x_j}{\partial^0 x_q} {}^2S_{pq} \quad (2.10)$$

Burada ${}^0\rho$ ve ${}^2\rho$ sırasıyla C_0 ve C_2 konumlarındaki malzeme kütle yoğunluklarını temsil ederler. ${}^0\rho$ ve ${}^2\rho$ arasındaki ilişki izleyen şekildedir:

$${}^0\rho = {}^2\rho {}^2J \quad (2.11)$$

Burada 2J , şekil değiştirme gradyen tensörü ${}^2\mathbf{F}$ nin determinantıdır (veya dönüşümün Jacobieni) ve izleyen şekilde tariflenir:

$${}^2J = \det({}^2\mathbf{F}) = \left| \frac{\partial^2 x_i}{\partial^0 x_j} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x_1}{\partial^0 x_1} & \frac{\partial^2 x_1}{\partial^0 x_2} \\ \frac{\partial^2 x_2}{\partial^0 x_1} & \frac{\partial^2 x_2}{\partial^0 x_2} \end{vmatrix} \quad (2.12)$$

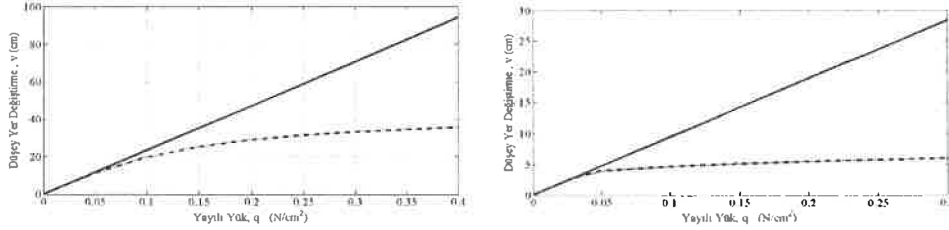
Şekil değiştirme öncesindeki bir maddesel çizgi $d\mathbf{L}$, şekil değiştirmeden sonraki $d\mathbf{l}$ çizgisine izleyen şekilde dönüşür ($d\mathbf{l}, d\mathbf{L}$ ile aynı maddeyi içermektedir.):

$$d\mathbf{l} = {}^2\mathbf{F} d\mathbf{L} \quad (2.13)$$

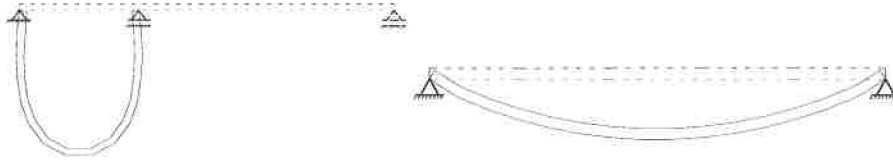
3. SAYISAL SONUÇLAR

Bilinen birleştirme işlemlerinin kullanımıyla eşitlik (2.1) de verilen teğet rijitlik matrisi, 12 düğüm noktalı dörtgensel (quadratic) eleman için toplam Lagrangian formülasyonu üzerine temellendirilen iki boyutlu sürekli ortamın toplam Lagrangian sonlu eleman modeline ilişkin eleman rijitlik matrislerinin kullanımıyla elde edilir. Sayısal hesaplamalarda beş noktalı Gauss integral kuralı kullanılmıştır. Kirişlerin uzunluğu $L = 100 \text{ cm}$, genişliği $b = 1 \text{ cm}$ ve yüksekliği $h = 2 \text{ cm}$ alınmıştır. Hiperelastik malzeme için Young modülü $E = 8300 \text{ N/cm}^2$, Poisson oranı $\nu = 0.2$ alınmıştır. 0x_1 ve 0x_2 doğrultularında çeşitli sayılarda sonlu elemanlar alınarak yakınsama çalışmaları yapılmış olup 0x_1 doğrultusundaki sonlu eleman sayısı $m = 30$ ve 0x_2 doğrultusundaki sonlu eleman sayısı $n = 8$ olduğunda göz önüne alınan gerilmeler ve yer değiştirmeler için çok iyi değerler elde edilmiştir. Bu yüzden sayısal hesaplamalarda 0x_1 doğrultusundaki sonlu eleman sayısı $m = 30$ ve 0x_2 doğrultusundaki sonlu eleman sayısı $n = 8$ alınmıştır. Şekil 3a ve Şekil 3b, yükteki artışın lineer ve lineer olmayan çözümlerin düşey yer değiştirme değerleri arasındaki farkta artışa yol açtığını göstermektedir. Yükteki artışın lineer çözümün düşey yer değiştirmeleri üzerinde daha fazla etkili olduğu görülmüştür. Bu durum izleyen şekilde açıklanabilir: Lineer durumda dış yüklerin kuvvet kolu veya dış bileşke kuvvet kolu dış yükün şiddeti ile değişmez ve bu yüzden yer değiştirmeler dış yüklere lineer olarak bağlıdır. Bununla birlikte lineer olmayan durumda, dış yükün şiddeti ile dış yüklerin kuvvet kolu değişir ve dış yükün şiddeti artarken dış yüklerin kuvvet kolu azalır. Ayrıca kuvvetler artarken kiriş konumu düşeye yakın bir hal almaya başlar ve bu yüzden kiriş konumu düşeye yakın olan belli yük düzeyinden sonra yükteki artış yer değiştirmelerde belirli

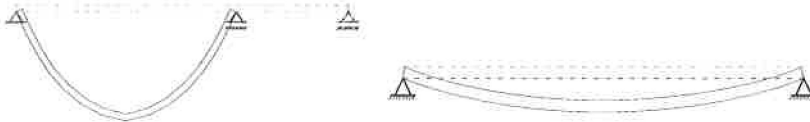
bir artışa neden olmaz. Bu durum kiriş için yer değiştirmiş durumu gösteren Şekil 4 ve Şekil 5’de görülmektedir. Böylesi yüklerden sonra eğilme rijitliği etkinliğini kaybetmekte, eksenel rijitlik önem kazanmaktadır.



Şekil 3. Geometrik lineer ve geometrik lineer olmayan durumlar için yük- $(L/2, 0)$ noktasındaki düşey yer değiştirme eğrisi (a) Bir ucu sabit mesnetli, diğer ucu hareketli kiriş, (b) Her iki ucu sabit mesnetli kiriş



Şekil 4. $q = 3 \text{ N/cm}^2$ için yer değiştirmiş konum (a) bir ucu sabit mesnetli, diğer ucu hareketli mesnetli kiriş, (b) her iki ucu sabit mesnetli kiriş



Şekil 5. $q = 0.25 \text{ N/cm}^2$ için yer değiştirmiş konum (a) bir ucu sabit mesnetli, diğer ucu hareketli mesnetli kiriş, (b) her iki ucu sabit mesnetli kiriş

Geometrik lineer incelemede kiriş üzerine etkiyen dış yüklerin yatay bileşenleri olmadığından, yani dış yükler kiriş eksenine dik olduğundan, gerilme tensörünün normal gerilme bileşenleri ${}^0\sigma_{11}$, 0x_1 eksen boyunca ${}^0x_2 = 0$ da sıfırdır. Çünkü denge eşitlikleri yer değiştirmenin olmadığı başlangıç konumu dikkate alınarak yazılmıştır. Bununla birlikte, geometrik lineer olmayan durumda yer değiştirmeler oluşurken bu çalışmada göz önüne alınan izleyici olmayan dış kuvvetler kiriş eksenine dik kalmazlar. Bu durum Şekil 4 ve 5 den görülebilmektedir. Geometrik lineer durumdaki sınır şartları mükemmel olarak sağlanır. Çünkü $m = 30$ ve $n = 8$ için $q = 8 \text{ N/cm}^2$ durumunda kirişin üst yüzeyindeki gerilme ${}^0\sigma_{22} = 3.998 \approx 4 \text{ N/cm}^2$ olmaktadır. Şimdi geometrik lineer olmayan durumdaki sınır koşullarının sağlatılması incelenecektir. Şekil değiştirmeden sonra kirişlerin üst yüzündeki bir noktanın teğet doğrultusu ile yatay doğrultu arasındaki açı eşitlik (2.13) ün kullanımı ile elde

edilir. $q = 8 \text{ N/cm}^2$, ${}^0x_1 = 100/3 \text{ cm}$ ve ${}^0x_2 = 1 \text{ cm}$ için eşitlik (2.13) ün kullanımıyla şekil değiştirmeden sonraki dL çizgisinin yatay ve düşey doğrultulardaki bileşenleri (dL çizgisi şekil değişimi öncesinde dL idi ve boyu birim boydu.) bir ucu sabit mesnetli, diğer ucu hareketli mesnetli kiriş için sırasıyla 0.1321 birim ve -0.9761 birim'dir. Bu büyüklüklerin kullanımıyla çizginin teğetinin eğimi -0.9761/0.1321 dir ve bu yüzden üst yüzün ilgili noktasının teğet doğrultusu ile yatay doğrultu arasındaki açı 82.29° dir. Düzlem gerilme durumu için gerilme dönüşümü izleyen eşitliklerin kullanımı ile gerçekleştirilebilir:

$$\left({}^2\sigma_{11} \right)_\theta = \frac{{}^2\sigma_{11} + {}^2\sigma_{22}}{2} + \frac{{}^2\sigma_{11} - {}^2\sigma_{22}}{2} \cos 2\theta + {}^2\sigma_{12} \sin 2\theta = -123.4094 \text{ N/cm}^2 \quad (2.14)$$

$$\left({}^2\sigma_{22} \right)_\theta = \frac{{}^2\sigma_{11} + {}^2\sigma_{22}}{2} - \frac{{}^2\sigma_{11} - {}^2\sigma_{22}}{2} \cos 2(\theta + 90) + {}^2\sigma_{12} \sin 2(\theta + 90) = -0.3315 \text{ N/cm}^2 \quad (2.15)$$

$$\left({}^2\sigma_{12} \right)_\theta = -\frac{{}^2\sigma_{11} - {}^2\sigma_{22}}{2} \sin 2\theta + {}^2\sigma_{12} \cos 2\theta = 4.0267 \text{ N/cm}^2 \quad (2.16)$$

Bu eşitliklerden döndürülmüş elemanın gerilmeleri $\left({}^2\sigma_{11} \right)_\theta = -123.4094 \text{ N/cm}^2$, $\left({}^2\sigma_{22} \right)_\theta = -0.3315 \text{ N/cm}^2$ ve $\left({}^2\sigma_{12} \right)_\theta = 4.0267 \text{ N/cm}^2$ olarak elde edilir. Bu değerler göstermektedir ki geometrik lineer olmayan durumda sınır koşulları sağlanır. Çünkü $dL = 1.00 \text{ cm} \rightarrow dl = 0.9878 \text{ cm}$

$$\sqrt{\left({}^2\sigma_{22} \right)_\theta^2 + \left({}^2\sigma_{12} \right)_\theta^2} = 4.0403 \cong 4/dl = 4.0494 \text{ N/cm}^2. \quad (2.17)$$

Tablo 1 ve 2 de görülen A_{x_1} ve A_{x_2} değerleri A mesnedindeki sırasıyla 0x_1 ve 0x_2 doğrultularındaki mesnet reaksiyonlarını, B_{x_1} ve B_{x_2} değerleri ise B mesnedindeki sırasıyla 0x_1 ve 0x_2 doğrultularındaki mesnet reaksiyonlarını göstermektedirler.

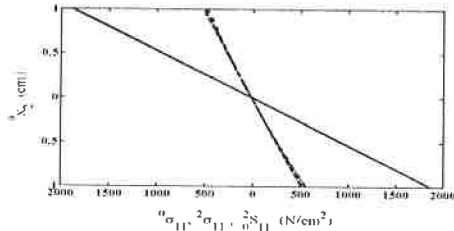
Tablo 1. Bir ucu sabit mesnetli, diğer ucu hareketli kiriş için sayısal sonuçlar

$q \text{ (N/cm}^2\text{)}$	$u_{oria} \text{ (cm)}$	$v_{oria} \text{ (cm)}$	$A_x \text{ (N)}$	$A_y \text{ (N)}$	$B_y \text{ (N)}$
0.5	-21.29	-37.22	0	25	25
1	-27.63	-40.60	0	50	50
2	-32.41	-42.91	0	100	100
4	-36.09	-44.80	0	200	200
8	-39.11	-46.64	0	400	400

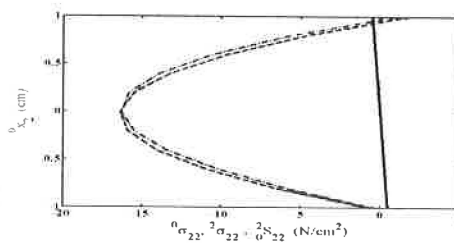
Tablo 2. Her iki ucu sabit mesnetli kiriş için sayısal sonuçlar

$q \text{ (N/cm}^2\text{)}$	$u_{oria} \text{ (cm)}$	$v_{oria} \text{ (cm)}$	$A_x \text{ (N)}$	$B_x \text{ (N)}$	$A_y \text{ (N)}$	$B_y \text{ (N)}$
0.5	0	-6.7825	103.34	-103.34	24.99	24.99
1	0	-8.1359	170.48	-170.48	49.98	49.98
2	0	-9.8384	278.01	-278.01	99.89	99.89
4	0	-11.9806	446.44	-446.44	199.99	199.99
8	0	-14.679	714.80	-714.80	399.98	399.98

Şekil 6 da kirişin orta kesitinde, bir ucu sabit, diğer ucu hareketli mesnetli basit kirişin sırasıyla a) 0x_1 doğrultusundaki normal gerilmelerinin, b) 0x_2 doğrultusundaki normal gerilmelerinin c) ${}^0x_1{}^0x_2$ düzlemindeki kayma gerilmelerinin d) lineer olmayan durumdaki asal ve maksimum kayma gerilmelerinin e) lineer durumdaki asal ve maksimum kayma gerilmelerinin kiriş yüksekliği boyunca dağılımı gösterilmektedir. Benzer şekilde, her iki ucu sabit mesnetli kiriş için de gerilme dağılımları Şekil 7 de gösterilmektedir. Burada Cauchy gerilmeleri ${}^2\sigma_{ij}$ ile, ikinci Piola-Kirchhoff gerilmeleri ${}^2S_{ij}$ ile, lineer durumdaki gerilmeler ${}^0\sigma_{ij}$ ile gösterilmiştir. Lineer durumdaki asal normal gerilmeler ${}^0\sigma_{\max}$, ${}^0\sigma_{\min}$ ve maksimum kayma gerilmesi ${}^0\sigma_{12\max}$ ile gösterilmiştir. Lineer olmayan durumdaki asal normal gerilmeler ${}^2\sigma_{\max}$, ${}^2\sigma_{\min}$ ve maksimum kayma gerilmesi ${}^2\sigma_{12\max}$ ile gösterilmiştir.



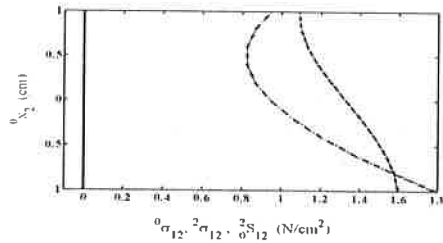
Şekil 6 a



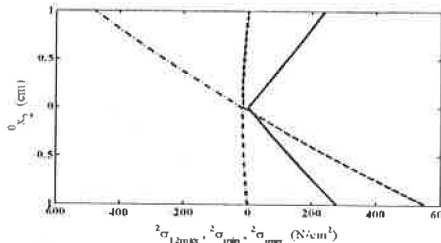
Şekil 6 b

${}^0\sigma_{11}$ (—); ${}^2\sigma_{11}$ (---); ${}^0S_{11}$ (- - -)

${}^0\sigma_{22}$ (—); ${}^2\sigma_{22}$ (---); ${}^0S_{22}$ (- - -)



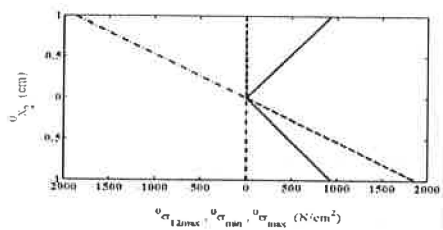
Şekil 6 c



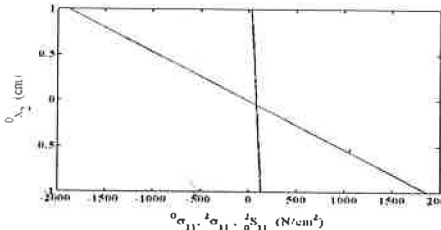
Şekil 6 d

${}^0\sigma_{12}$ (—); ${}^2\sigma_{12}$ (---); ${}^0S_{12}$ (- - -)

${}^2\sigma_{12\max}$ (—); ${}^2\sigma_{\min}$ (---); ${}^2\sigma_{\max}$ (- - -)



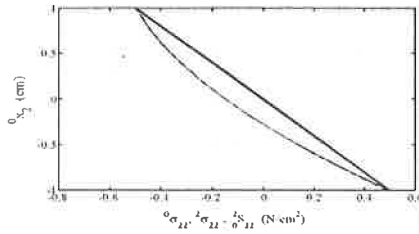
Şekil 6 e



Şekil 7 a

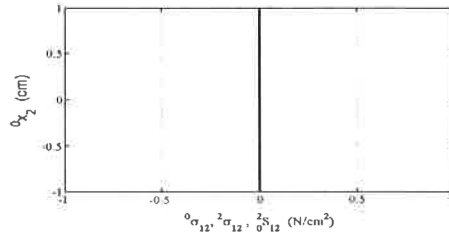
${}^0\sigma_{12\max}$ (—); ${}^2\sigma_{\min}$ (---); ${}^0\sigma_{\max}$ (- - -)

${}^0\sigma_{11}$ (—); ${}^2\sigma_{11}$ (---); ${}^0S_{11}$ (- - -)



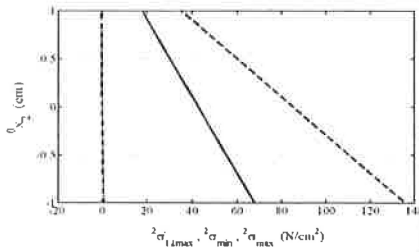
Şekil 7b

σ_{22} (—); ${}^2\sigma_{22}$ (---); ${}^2S_{22}$ (-.-)



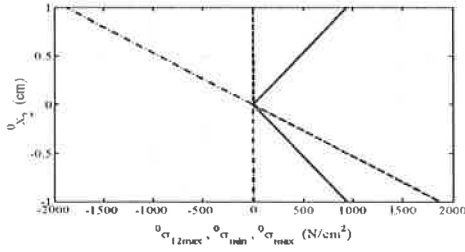
Şekil 7c

σ_{12} (—); ${}^2\sigma_{12}$ (---); ${}^2S_{12}$ (-.-)



Şekil 7d

${}^2\sigma_{12\max}$ (—); ${}^2\sigma_{12\min}$ (---); ${}^2\sigma_{12\max}$ (-.-)



Şekil 7e

$\sigma_{12\max}$ (—); $\sigma_{12\min}$ (---); $\sigma_{12\max}$ (-.-)

4. SONUÇLAR

Yükün artımına koşut olarak geometrik lineer olan ve geometrik lineer olmayan çözümler arasındaki fark çok önemli hale gelmektedir. Geometrik lineer durumda mesnetlerden birinin sabit değerinin hareketli olması durumuyla iki ucun da sabit olması durumu arasında fark olmazken geometrik lineer olmayan durumda iki hal arasındaki fark yükün artımıyla çok önemli hale gelmektedir. Yükün artımıyla iki ucu sabit mesnetli kirişteki yer değiştirmeler bir ucu sabit diğer ucu hareketli duruma göre çok önemli oranda küçük çıkmaktadır. Bu durum, iki ucu da sabit mesnetli kirişte diğer kiriş durumuna göre çok daha büyük çekme kuvvetlerinin ortaya çıkması nedeniyledir. 12 düğüm noktalı dörtgensel (quadratic) eleman kullanılması ile serbest yüzeylerdeki gerilme sınır koşulları sağlatılmış ve çok iyi gerilme diyagramları elde edilmiştir. Gerilmeler açısından bakıldığında da, yükün artımına koşut olarak geometrik lineer olma ve olmama ile mesnet durumlarının cevaplar üzerinde çok önemli düzeyde etkileri olduğu görülmüştür.

KAYNAKLAR

[1] A. Al-Sadder, R.A.O. Al-Rawi, "Finite difference scheme for large-deflection analysis of non-prismatic cantilever beams subjected to different types of continuous and discontinuous loadings", Archive of Applied Mechanics; 75: 459-473, 2006.

- [2] C.M. Wang, K.Y. Lam, X.Q. He, S. Chucheepsakul, "Large deflections of an end supported beam subjected to a point load.", *International Journal of Non-Linear Mechanics*; 32(1): 63-72, 1997.
- [3] J.N. Reddy, "An introduction to non-linear finite element analysis", Oxford University Press Inc., 2004.
- [4] R.K. Kapania, J.A. Li, "Formulation and implementation of geometrically exact curved beam elements incorporating finite strains and finite rotations.", *Computational Mechanics*; 30: 444-459, 2003.
- [5] S. Chucheepsakul, S. Buncharoen, C.M. Wang, "Large deflection of beams under moment gradient.", *Journal of Engineering Mechanics-ASCE* ; 120(9):1848-1860, 1994.
- [6] S. Chucheepsakul, S. Buncharoen, T. Huang, "Elastica of a simple variable-arc-length beam subjected to an end moment.", *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*; 121(7): 767-772, 1995.
- [7] S.R. Li, Y.H. Zhou, "Post-buckling of a hinged-fixed beam under uniformly distributed follower forces.", *Mechanics Research Communications*; ; 32: 359-367, 2005.
- [8] Ş.D. Akbaş, "Konsol bir kirişin geometrik lineer olmayan statik incelenmesi", *Y.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek lisans tezi*, 7-8, 10-11, 2009.
- [9] X.Q. He, C.M. Wang, K.Y. Lam, "Analytical bending solutions of elastica with one end held while the other end portion slides on a friction support.", *Archive of Applied Mechanics*; 67: 543-554, 1997.