

KENAR ÇATLAĞI İÇEREN ANİZOTROP DİKDÖRTGEN KALIN PLAĞIN DELAMİNASYONU

Nazmiye YAHNİOĞLU* ve Esra Eylem KARATAŞ**

*YTÜ, Kimya-Metalürji Fakültesi, Matematik Mühendisliği Bölümü, Davutpaşa Yerleşim
Birimi, 34210 Esenler, İSTANBUL,

**YTÜ, İnşaat Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Davutpaşa Yerleşim Birimi,
34210 Esenler, İSTANBUL

ABSTRACT

In this study, the delamination buckling problem for the thick rectangular plate made from composite material is studied. It is supposed that the plate has a rectangular edge crack and edge-surface of that has an initial infinitesimal imperfection. The development of this initial imperfection with an external compressive loading acting on the surfaces of crack is studied by the use of the three-dimensional geometrically non-linear field equations of the Theory of Elasticity for an anisotropic bodies. For the determination of the values of the critical forces the initial imperfection criteria is used. The corresponding boundary-value problems are solved by employing boundary form perturbation technique and FEM. The numerical results on the critical force are presented.

Keywords: Buckling delamination, edge crack, thick plate, finite elements method.

ÖZET

Bu çalışmada, kompozit malzemeden yapılmış dikdörtgen kalın plâğa ait delaminasyon burkulma problemi incelenmiştir. Plağın dikdörtgen kenar çatlağına ve bu çatlağın yüzeylerinin başlangıçta çok küçük eğintiye sahip olduğu kabul edilmektedir. Çatlak yüzeylerine etkiyen dış basınç kuvveti altında, bu yüzeylerdeki başlangıç eğintinin gelişimi, anizotrop cisim için üç boyutlu Elastisite Teorisinin lineer olmayan alan denklemleri yardımıyla incelenecektir. Kritik kuvvetin değerinin belirlenmesinde “başlangıç eğinti kriteri” kullanılacaktır. Uygun sınır değer problemleri sınır tipli pertürbasyon tekniği ve sonlu elemanlar yöntemi (FEM) uygulanarak çözülecektir. Kritik kuvvetin sayısal değerleri verilecektir.

Anahtar Kelimeler: Delaminasyon burkulması, kenar çatlağı, kalın plak, sonlu elemanlar yöntemi

1.GİRİŞ

Bilindiği gibi yapı elemanlarının mukavemetini etkileyen faktörlerden belkide en tehlikelisi yapının içerdiği çatlaklardır. Özellikle gevrek malzemeden yapılmış yapı elemanlarında çeşitli nedenlerle oluşmuş mevcut çatlaklar, dış etkilerin beklenmeyen değerlerinde bile bu yapı elemanlarının ani ve önlenemez kırılmasına sebep olmaktadır. Bu nedenle pek çok bilim dalındaki araştırmacılar, yapı elemanlarının kırılmasına ait problemlerin incelenmesinde “kritik parametrelerin” belirlenmesine yönelik yoğun olarak çalışmaktadırlar. Bu konuda bazı çalışmalar [1-15] kaynaklarında verilmiştir.

Ele alınan bu çalışmada dikdörtgen kenar çatlağı içeren kompozit kalın plağın yerel delaminasyon burkulma problemi teorik olarak incelenmiştir. Belirtilen problemin matematiksel modeli, üç boyutlu elastisite teorisinin lineer olmayan kesin denklemleri çerçevesinde yapılmış ve kritik burkulma yükünün değerinin belirlenmesinde “başlangıç eğinti kriteri” kullanılmıştır. Bu kriter gere, çatlak yüzeylerinin başlangıçta çok küçük eğrilige sahip olduğu kabul edilmektedir. Bu eğintilerin, plağın karşılıklı iki kenarından normal doğrultuda etki eden dış basınç kuvveti etkisinde büyüyerek sonsuza gitmesine sebep olan dış basınç kuvvetinin değeri kritik burkulma yükü olarak kabul edilmektedir. İncelemeler, dış yükleme altında dikdörtgen kenar çatlağın yapı içerisinde kalan kenarlarında oluşan gerilme yığılmasının, ele alınan problemin geometrik ve malzeme parametre değerleri için kritik gerilme yığılması çarpanından (SIF) küçük olduğu kabulü altında yapılmıştır. Ele alınan sınır değer problemi sınır formu pertürbasyon yöntemi ve sonlu elemanlar yöntemi (FEM) kullanılarak çözülmüştür.

2.PROBLEMİN MATEMATİKSEL MODELİ

Problemin çözüm bölgesi (Şekil 1),

$$(\Omega - \Omega') \quad (1)$$

burada,

$$\Omega = \{0 \leq x_1 \leq \ell_1, 0 \leq x_2 \leq h, 0 \leq x_3 \leq \ell_3\}$$

$$\Omega' = \{(\ell_1 - \ell_{01})/2 < x_1 < (\ell_1 + \ell_{01})/2, x_2 = h_A \pm 0, 0 \leq x_3 \leq \ell_{03}\} \quad (2)$$

dir. (2) de $\ell_{01}(\ell_{03})$ çatlağın Ox_1 (Ox_3) doğrultusundaki uzunluğunu göstermektedir. Çatlak yüzeylerinin önceden çok küçük “eğrilige” sahip olduğu ve bu eğriliklerin $x_1 = \ell_1/2$ düzlemine göre simetrik olduğu kabul edilmektedir. Çatlak yüzeylerinin denklemi

$$x_2^{\pm} = h_A + \varepsilon f^{\pm}(x_1, x_3), \quad \ell_1/2 - \ell_{01}/2 < x_1 < \ell_1/2 + \ell_{01}/2, 0 \leq x_3 \leq \ell_{03} \quad (3)$$

şeklinde yazılabilir. Burada ε ($\varepsilon \ll 1$), çatlak yüzeylerinin başlangıçta sahip olduğu kabul edilen eğintinin derecesini gösteren boyutsuz küçük bir parametredir. (3)’deki $f(x_1, x_3)$ fonksiyonunun,

$$\begin{aligned} f^{+}(x_1, x_3) &= -f^{-}(x_1, x_3) \\ f^{\pm}((\ell_1 - \ell_{01})/2, x_3) \Big|_{0 \leq x_3 \leq \ell_{03}} &= f^{\pm}((\ell_1 + \ell_{01})/2, x_3) \Big|_{0 \leq x_3 \leq \ell_{03}} = 0, \\ \frac{df^{\pm}((\ell_1 - \ell_{01})/2, x_3)}{dx_1} \Big|_{0 \leq x_3 \leq \ell_{03}} &= \frac{df^{\pm}((\ell_1 + \ell_{01})/2, x_3)}{dx_1} \Big|_{0 \leq x_3 \leq \ell_{03}} = 0 \\ f^{\pm}(x_1, \ell_{03}) \Big|_{\ell_1/2 - \ell_{01}/2 < x_1 < \ell_1/2 + \ell_{01}/2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\left. \frac{df^{\pm}(x_1, \ell_{03})}{dx_3} \right|_{\ell_1/2 - \ell_{01}/2 < x_1 < \ell_1/2 + \ell_{01}/2} = 0 \quad (4)$$

özelliklerini sağladığı kabul edilmektedir. Plak ve çatlak geometrisi Şekil 1'de gösterilmektedir. Bu bölgede sağlanan alan denklemleri, transversal izotrop malzeme için bünye denklemleri ve şekil değiştirme-yer değiştirme ilişkileri sırasıyla,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sigma_{jn} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right) \right] = 0,$$

$$\sigma_{11} = A_{11}\varepsilon_{11} + A_{12}\varepsilon_{22} + A_{13}\varepsilon_{33}, \quad \sigma_{22} = A_{12}\varepsilon_{11} + A_{22}\varepsilon_{22} + A_{23}\varepsilon_{33},$$

$$\sigma_{33} = A_{13}\varepsilon_{11} + A_{23}\varepsilon_{22} + A_{33}\varepsilon_{33}, \quad \sigma_{23} = 2A_{44}\varepsilon_{23}, \quad \sigma_{13} = 2A_{55}\varepsilon_{13}, \quad \sigma_{12} = 2A_{66}\varepsilon_{12},$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \right), \quad i,j=1,2,3 \quad (5)$$

ve sınır koşulları

$$u_2|_{x_1=0; \ell_1} = u_2|_{x_3=\ell_3} = 0, \quad \left[\sigma_{1n} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right) \right] n_1 \Big|_{x_1=0; \ell_1} = p,$$

$$\left[\sigma_{jn} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right) \right] n_j \Big|_{x_1=0; \ell_1} = 0 \quad (j \neq 1 \text{ için})$$

$$\left[\sigma_{jn} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right) \right] n_j \Big|_{x_3=\ell_3} = 0 \quad (j \neq 2 \text{ için})$$

$$\left[\sigma_{jn} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right) \right] n_j \Big|_{x_3=0} = 0, \quad \left[\sigma_{jn} \left(\delta_i^n + \frac{\partial u_i}{\partial x_n} \right) \right] n_j^{\pm} \Big|_{\substack{x_2^{\pm} = h_A + \varepsilon f^{\pm}(x_1, x_3) \\ (\ell_1 - \ell_{01})/2 < x_1 < (\ell_1 + \ell_{01})/2 \\ 0 < x_3 < \ell_{03}}} = 0$$

$$i,j;n=1,2,3. \quad (6)$$

şeklinde verilebilir. Yukarıda verilen denklem veya bağıntılarda σ_{ij} gerilme tansörü bileşenlerini; ε_{ij} şekil değiştirme tansörü bileşenlerini; u_i 'ler ($i, j=1,2,3$) yer değiştirme vektörü bileşenlerini ve $n_j^{\pm}$ çatlak yüzeylerine ait birim normal vektörün bileşenlerini göstermektedir. (3) denklemini kullanarak, $n_j^{\pm}$ için:

$$\begin{aligned}
n_1^\pm &= \frac{\pm \varepsilon \frac{\partial f^\pm(x_1, x_3)}{\partial x_1}}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial f^\pm(x_1, x_3)}{\partial x_1} \right)^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial f^\pm(x_1, x_3)}{\partial x_3} \right)^2}}, \\
n_2^\pm &= \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial f^\pm(x_1, x_3)}{\partial x_1} \right)^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial f^\pm(x_1, x_3)}{\partial x_3} \right)^2}}, \\
n_3^\pm &= \frac{\pm \varepsilon \frac{\partial f^\pm(x_1, x_3)}{\partial x_3}}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial f^\pm(x_1, x_3)}{\partial x_1} \right)^2 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial f^\pm(x_1, x_3)}{\partial x_3} \right)^2}} \quad (7)
\end{aligned}$$

elde edilir. $\varepsilon^2 \left[\left(\frac{\partial f^\pm(x_1, x_3)}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f^\pm(x_1, x_3)}{\partial x_3} \right)^2 \right] \ll 1$ olduğu kabul edilirse, buna dayanarak, (7) deki denklemler ε 'na bağlı kuvvet serisi olarak ifade edilebilir:

$$n_1^\pm = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k+1} n_{1k}^\pm(x_1, x_3), \quad n_2^\pm = \pm 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k} n_{2k}^\pm(x_1, x_3), \quad n_3^\pm = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k+1} n_{3k}^\pm(x_1, x_3). \quad (8)$$

(8) deki $n_{1k}^\pm(x_1, x_3)$, $n_{2k}^\pm(x_1, x_3)$ ve $n_{3k}^\pm(x_1, x_3)$ katsayılarına ait ifadeler uzun olduğundan burada yer verilmemiştir. Akbarov [8], Akbarov ve Yahnioglu [10], Akbarov ve diğerleri [9], Akbarov ve Rzayev [11,12,13], Rzayev ve Akbarov [14] çalışmalarında verildiği gibi aranan büyüklükler küçük parametre ε 'na göre seri formunda yazılabilir;

$$\{\sigma_{ij}; \varepsilon_{ij}; u_i\} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \{\sigma_{ij}^{(q)}; \varepsilon_{ij}^{(q)}; u_i^{(q)}\}. \quad (9)$$

(9) ifadeleri, (5) ve (6) da yerine yazılır ve ε 'nın kuvvetlerine göre gruplaştırılırsa, bu parametrenin kuvvetlerine göre kapalı denklemler sistemi ve sınır koşulları elde edilir. Elde edilen seri-sınır değer problemlerinin her biri kendisinde önce gelen sınır-değer problemlerine ait değerleri içermektedir. Her bir sınır değer problemi, elde edildiği ε 'nın derecesine göre isimlendirilecektir örneğin, sıfırıncı, birinci vb. sınır değer problemi (yaklaşımı).

Sıfırıncı yaklaşım sonucunda elde edilen sınır değer problemi göz önüne alındığında, ele alınan sınır koşulları ve $\delta_i^n + \partial u_i^{(0)} / \partial x_n \approx \delta_i^n$ için çözüm kolayca yazılabilir. Buna göre sıfırıncı yaklaşıma ait çözümden gerilme fonksiyonları;

$$\sigma_{11}^{(0)} = p, \quad \sigma_{ij}^{(0)} = 0 \quad \text{for } ij \neq 11 \quad (10)$$

olur.

Birinci yaklaşıma ait denklem ve bağıntılar;

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sigma_{ji}^{(1)} + \sigma_{jn}^{(0)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_n} \right] = 0, \quad \varepsilon_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_i} \right) \quad (11)$$

$$\begin{aligned} u_2^{(1)} \Big|_{x_1=0; \ell_1} &= 0, \quad u_2^{(1)} \Big|_{x_3=\ell_3} = 0, \\ \left[\sigma_{11}^{(1)} + \sigma_{11}^{(0)} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0; \ell_1} &= \left[\sigma_{13}^{(1)} + \sigma_{11}^{(0)} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} \right] \Big|_{x_1=0; \ell_1} = 0, \\ \sigma_{3i}^{(1)} \Big|_{x_3=0} &= \sigma_{3i}^{(1)} \Big|_{x_3=\ell_3} = \sigma_{33}^{(1)} \Big|_{x_3=\ell_3} = 0, \quad \sigma_{2i}^{(1)} \Big|_{x_2=0; h} = 0, \quad i=1,2,3 \\ \sigma_{2i}^{(1)} \Big|_{\substack{x_2^\pm = h_A \pm 0 \\ (\ell_1 - \ell_0)/2 < x_1 < (\ell_1 + \ell_0)/2 \\ 0 < x_3 < \ell_3}} &= \mp \sigma_{11}^{(0)} \frac{\partial f^\pm}{\partial x_1} \delta_i^1, \quad i=1,2,3. \end{aligned} \quad (12)$$

bulunur. (11) de $\sigma_{jn}^{(0)}$ sıfırcı yaklaşımına ait gerilmeleri göstermektedir. Belirtelim ki (5)-(12) de bilinen notasyonlar kullanılmıştır.

Ele alınan delaminasyon burkulma probleminin incelenmesinde, çatlak yüzeylerinin başlangıçta sahip olduğu kabul edilen küçük eğintilerin dış basınç kuvveti etkisinde büyüyerek sonsuza gitmesine neden olan dış basınç kuvveti değerinin belirlenmesi istenildiğinden, yukarıda verilen seri-sınır değer problemlerinden sadece sıfırcı ve birinci yaklaşıma ait sınır değer problemlerinin çözümü yeterli olmuştur. Çünkü, her bir yaklaşım için bulunan alan denklemlerinin homojen kısmı birbiriyle aynen çakışmakta, sadece homogen olmayan kısımları (denklemin sağ tarafları) birbirinden farklılaşmaktadır. Aranan kritik değer ise denklemler takımının katsayılar matrisini tekil yapan değer olarak belirlendiğinden, 2. ve sonraki yaklaşımlar kritik parametrelerin değerini değiştirmemektedir. 2. ve sonraki yaklaşımların göz önüne alınması, gerilme yayılımının hassaslaştırılmasında etkindir. Amacımız burkulmaya sebep olan kritik dış basınç kuvvetinin değerini belirlemek olduğu için hesaplamalar sıfırcı ve birinci yaklaşım çerçevesinde sınırlandırılmıştır.

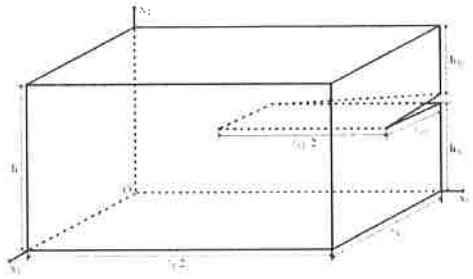
3. SONLU ELEMEN FORMÜLASYONU

Ele alınan problemin birinci aşamasına ait sonlu eleman formülasyonu,

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega - \Omega'} & \left[\left(\sigma_{11}^{(1)} + \sigma_{11}^{(0)} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} \right) \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} + \left(\sigma_{12}^{(1)} + \sigma_{11}^{(0)} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} \right) \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} + \sigma_{21}^{(1)} \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} + \sigma_{22}^{(1)} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} + \right. \\ & \left. \left(\sigma_{13}^{(1)} + \sigma_{11}^{(0)} \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x_1} \right) \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_3} + \sigma_{31}^{(1)} \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x_1} + \sigma_{32}^{(1)} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} + \sigma_{23}^{(1)} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_3} + \sigma_{33}^{(1)} \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x_3} \right] dx_1 dx_2 dx_3 - \end{aligned}$$

$$\int_0^{\ell_{03}} \int_{(\ell_1 - \ell_{01})/2}^{(\ell_1 + \ell_{01})/2} \sigma_{11}^{(0)} \frac{\partial f^-}{\partial x_1} u_1^{(1)} \bigg|_{x_2=h_A-0} dx_1 dx_3 - \int_0^{\ell_{03}} \int_{(\ell_1 - \ell_{01})/2}^{(\ell_1 + \ell_{01})/2} \sigma_{11}^{(0)} \frac{\partial f^+}{\partial x_1} u_1^{(1)} \bigg|_{x_2=h_A+0} dx_1 dx_3 \quad (14)$$

fonksiyoneli ve Ritz tekniği yardımıyla yapılmıştır.



Şekil 1: Ele alınan dikdörtgen kalın plak ve plağın bazı geometrik verileri

Sonlu eleman çözümü için, çözüm bölgesi sonlu adet alt bölgeye yani, sonlu elemana (Ω_k), $k=1,2,\dots,M$) ayrıklaştırılır. Yani,

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^M \Omega_k \quad (15)$$

dir. Sonlu eleman ayrıklaştırmasında sekiz nodlu dikdörtgen prizmatik sonlu elemanlar kullanılmıştır [17]. Çözüm için yer değiştirme esaslı sonlu elemanlar yöntemi kullanıldığından, her bir sonlu elemanda aranan yer değiştirme fonksiyonu polinom kabul edilir. Bu fonksiyonun, nodlardaki yer değiştirme ve şekil fonksiyonları ile ifadesi;

$$u^{(k)} \approx N^{(k)} a^{(k)}, \quad k=1,2,\dots,M \quad (16)$$

seçilir. (16)'da, $a^{(k)}$, $N^{(k)}$ ve $u^{(k)}$ matrisleri

$$\begin{aligned} (a^{(k)})^T &= \{u_{11}^k, u_{21}^k, u_{31}^k, u_{12}^k, u_{22}^k, u_{32}^k, \dots, u_{18}^k, u_{28}^k, u_{38}^k\} \\ (N^{(k)})^T &= \begin{Bmatrix} N_1^k & 0 & 0 & N_2^k & 0 & 0 & \dots & N_8^k & 0 & 0 \\ 0 & N_1^k & 0 & 0 & N_2^k & 0 & \dots & 0 & N_8^k & 0 \\ 0 & 0 & N_1^k & 0 & 0 & N_2^k & \dots & 0 & 0 & N_8^k \end{Bmatrix} \\ (u^{(k)})^T &= \{u_1^k(x_1, x_2, x_3), u_2^k(x_1, x_2, x_3), u_3^k(x_1, x_2, x_3)\} \end{aligned} \quad (17)$$

dir [17]. (17)'de k indisi uygun büyüklüklerin Ω_k elemanına ait olduğunu, $a^{(k)}$ vektörünün bileşenleri ise Ω_k elemanın nodlarındaki aranan yer değiştirmeleri göstermektedir. (16) ifadesi, (14) fonksiyoneliinde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa;

$$K a = r \quad (18)$$

cebirsal denklem sistemi elde edilir [17]. (18) eşitliklerinde K Rijidlik matrisidir ve k . sonlu eleman (Ω_k) için bu matrisin elemanları:

$$K_{ij}^{(k)} = \iiint_{\Omega_k} (B_j^k)^T D^k B_i^k d\Omega_k, \quad \begin{aligned} i, j &= 1, 2, \dots, 8 \\ k &= 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (19)$$

(19) da,

$$\mathbf{B}_j^{(k)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x_1} & \frac{\partial N_j}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x_2} & \frac{\partial N_j}{\partial x_1} \end{pmatrix}, j=1,2,\dots,8 \quad (20)$$

ifadelerinden belirlenir.

(18) cebrik denklem sisteminin çözümünden nodlardaki yer değiştirmeler bulunur. Buna göre $Ox_1 = 0; \ell_1$ yüzeylerinden etkiyen düzgün yayılı normal dış basınç kuvveti etkisinde, çatlak yüzeylerinin başlangıçta sahip olduğu kabul edilen küçük eğintilerin (veya yüzey noktalarının yer değiştirmesinin) büyüterek “sonsuz” gitmesi durumuna karşı gelen kritik burkulma yükünün değeri ardışık işlemler sonucunda belirlenir [15].

Belirtelim ki, ele alınan problemin sayısal çözümünde kullanılan bütün algoritma ve programlar tarafımızca yapılmıştır.

4. SAYISAL ÇÖZÜM

Plak malzemesinin birbirini tekrarlayan iki izotrop, homojen levhadan oluşmuş çok katlı kompozit malzeme olduğu kabul edilmektedir. Bu malzemelerin sırayla λ_1, λ_2 Lamé sabitleri; μ_1, μ_2 Kayma modülleri; E_1, E_2 Young Modülleri, ν_1, ν_2 Poisson oranları ve kompoziti oluşturan bileşenlerin hacim oranları η_1, η_2 ile gösterilmiştir. Problemin $x_1 = \ell/2$ ’ye göre simetri özelliğinden yararlanılarak, çözüm bölgesi Ox_1 yönünde 20, Ox_2 yönünde 12, Ox_3 yönünde 20 dikdörtgen prizmatik sonlu eleman olacak şekilde toplam, 4800 dikdörtgen prizmatik sonlu elemana ayrıklaştırılmıştır. Ele alınan durumda sonlu eleman modellenmesi 5793 düğüm noktası (nod) ve 16567 serbestlik derecesi (NDOF) içermektedir. Belirtelim ki, çözüm bölgesinin sonlu eleman ayrıklaştırması, pek çok sonlu eleman ağı için bulunan değerlerin literatürdeki uygun değerlere en iyi yaklaşımı sağlayan sonlu eleman ağı arasından seçilmiştir.

Ele alınan problem için yapı elemanının malzemesi, simetri eksen Ox_2 olan transversal izotrop malzeme olarak modellenmiştir. Bu durumda, kompozit malzemenin normalize edilmiş mekanik sabitleri, aşağıdaki bilinen formüller yardımı ile elde edilir [16].

$$\begin{aligned} A_{23} &= A_{12} = \lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 - \eta_1 \eta_2 \left(\lambda_1 - \lambda_2 \frac{(\lambda_1 + 2\mu_1) - (\lambda_2 + 2\mu_2)}{(\lambda_1 + 2\mu_1)\eta_2 + (\lambda_2 + 2\mu_2)\eta_1} \right) \\ \frac{1}{2} (A_{11} + A_{12}) &= (\lambda_1 + 2\mu_1)\eta_1 + (\lambda_2 + 2\mu_2)\eta_2 - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(\lambda_1 + 2\mu_1)\eta_2 + (\lambda_2 + 2\mu_2)\eta_1} \\ \frac{1}{2} (A_{11} - A_{13}) &= \eta_1 \mu_1 + \eta_2 \mu_2, \quad A_{11} = A_{33}, \\ A_{66} &= A_{44} = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 \eta_2 + \mu_2 \eta_1}, \quad A_{55} = \eta_1 \mu_1 + \eta_2 \mu_2, \\ (A_{22}) &= (\lambda_1 + 2\mu_1)\eta_1 + (\lambda_2 + 2\mu_2)\eta_2 - \eta_1 \eta_2 \frac{((\lambda_1 + 2\mu_1) - (\lambda_2 + 2\mu_2))^2}{(\lambda_1 + 2\mu_1)\eta_2 + (\lambda_2 + 2\mu_2)\eta_1} \end{aligned} \quad (21)$$

Belirtelim ki, sayısal hesaplamalar için $v_1 = v_2 = 0.3$, $\eta_1 = \eta_2 = 0.5$ alınmıştır. Diğer parametre değerleri tablolar üzerinde gösterilmiştir. Ayrıca (3)'de verilen ve çatlak yüzeylerinin başlangıçtaki eğilmesini ifade eden fonksiyon,

$$f^{\pm}(x_1, x_3) = h_A \pm A \sin^2 \left(\pi \left(x_1 - \frac{\ell_1 - \ell_{01}}{2} \right) / \ell_{01} \right) \sin^2 \left(\pi \left(x_3 - \frac{\ell_3 - \ell_{03}}{2} \right) / \ell_{03} \right) \quad (22)$$

olarak seçilmiştir.

Tablo 1. Farklı ℓ_{01}/ℓ_1 için P_{kr} değerleri
($h/\ell_1 = 0.15$; $h_A = h_u = h/2$; $\ell_3/\ell_1 = \gamma_{31} = 1$; $\ell_{03}/\ell_3 = 0.5$)

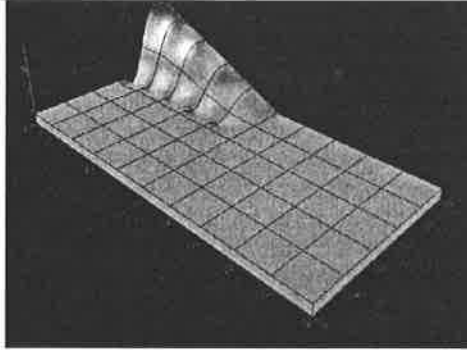
ℓ_{01}/ℓ_1	E_2/E_1	
	1	10
0.65	0.0456	0.1817
0.6	0.0492	0.1931
0.55	0.0538	0.2067
0.50	0.0595	0.2231
0.45	0.0668	0.2428
0.40	0.0760	0.2666
0.35	0.0879	0.2953
0.30	0.1033	0.3300
0.25	0.1237	0.3721
0.20	0.1511	0.4233
0.15	0.1886	0.4854

Tablo 1'de dikdörtgen çatlakın Ox_1 doğrultusundaki uzunluğu değişiminin, kritik burkulma yükü P_{kr} değerine etkisi $h/\ell_1 = 0.15$; $h_A = h_u = h/2$; $\ell_3/\ell_1 = \gamma_{31} = 1$; $\ell_{03}/\ell_3 = 0.5$ parametre değerleri için verilmektedir. Tablodaki sayısal verilerden, plak malzemesinin izotrop ($E_2/E_1 = 1$) ve anizotrop ($E_2/E_1 = 10$) olması durumlarının her ikisi için, çatlakın Ox_1 doğrultusundaki uzunluğu küçüldükçe P_{kr} değerinin monoton olarak arttığı görülmektedir. Anizotrop durumdaki kritik burkulma yükü izotrop durumdaki değerden önemli ölçüde büyüktür. Kritik burkulma yükü, kenar çatlak boyutları küçüldükçe çatlak içermeyen kalın plağa ait kritik burkulma yükü değerine yaklaşmaktadır. Çatlak yüzeylerinin yer değiştirme grafiklerinden, dış basınç kuvvetinin değeri P_{kr} değerine yaklaştıkça, yüzeyin gösterdiği burkulma modunun, denklem (22) ile verilen başlangıç eğinti formuna benzer olduğu tespit edilmiştir (Şekil 2).

Tablo 2. Farklı ℓ_{03}/ℓ_3 için P_{kr} değerleri
($h/\ell_1 = 0.15$; $h_A = h_u = h/2$; $\ell_3/\ell_1 = \gamma_{31} = 1$; $\ell_{01}/\ell_1 = 0.5$)

ℓ_{03}/ℓ_3	E_2/E_1	
	1	10
0,7	0.0541	0.2039
0,6	0.0557	0.2100
0,5	0.0584	0.2207
0,4	0.0640	0.2414
0,3	0.0777	0.2898
0,2	0.1219	0.4238

Tablo 2’de dikdörtgen kenar çatlağın Ox_3 doğrultusundaki uzunluğunun değişiminin kritik burkulma yükü P_{kr} değerine etkisi $h/\ell_1 = 0.15$; $h_A = h_u = h/2$; $\ell_3/\ell_1 = \gamma_{31} = 1$; $\ell_{01}/\ell_1 = 0.5$ parametre değerleri için verilmektedir. Tablodaki sayısal verilerden, plak malzemesinin izotrop ($E_2/E_1 = 1$) ve anizotrop ($E_2/E_1 = 10$) olması durumlarının her ikisi için çatlağın Ox_3 doğrultusundaki uzunluğu küçüldükçe P_{kr} değerinin monoton olarak arttığı görülmektedir. Tablo 1 için yapılan değerlendirmeler Tablo 2 içinde geçerlidir. Belirtelim ki, her iki tabloda elde edilen P_{kr} değerleri için Şekil 2’de gösterilen burkulma mod tipi elde edilmiştir.



Şekil 2. Burkulma mod tipi

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde bizden yardımlarını esirgemeyen hocamız Sayın Prof. Dr. Surkay D. AKBAROV’a teşekkür ederiz.

KAYNAKLAR

- [1] Hwang, S.F., Mao, C.P., "The Delamination Buckling of Single-Fibre System and Interply Hybrid Composites" *Composite Structures*, 46, 279-287, 1999.
- [2] Short, G.J., Guild, F.J., Pavier, M.J., "The Effect of Delamination Geometry on the Compressive Failure of Composite Laminates" *Composites Science and Technology*, 61, 2075-2086, 2001.
- [3] Arman, Y., Zor, M., Aksoy, S., "Determination of Critical Delamination Diameter of Laminated Composite Plates Under Buckling Loads" *Composites Science and Technology*, 66, 2945-2953, 2006.
- [4] Guz, A.N., "Fundamentals of The Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies" Berlin, Springer-Verlag-1999.
- [5] Guz, A.N., "Fracture Mechanics of Composite Materials in Compression" Naukova Dumka, Kiev-1990.
- [6] Guz, A.N., "Nazarenko, V.M., Fracture Mechanics of Materials in Compression Along a Crack (Review). Highly Elastic Materials" *International Applied Mechanics*, 25(9), 3-32, 1989.
- [7] Guz, A.N., Nazarenko, V.M., "Fracture Mechanics of Materials in Compression Along a Crack (Review). Constructional Materials" *International Applied Mechanics*, 25(10), 3-19, 1989.
- [8] Akbarov, S.D., "On the Three Dimensional Stability Loss Problems of Elements of Constructions Fabricated From the Viscoelastic Composite Materials" *Mechanics of Composite Materials*, 34(6), 537-544, 1998.
- [9] Akbarov, S.D., Sisman, T., Yahnioglu, N., "On the Fracture of the Unidirectional Composites in Compression" *International Journal of Engineering Science*, 35(12/13), 1115-1136, 1997.
- [10] Akbarov, S.D., Yahnioglu, N., "The Method for Investigation of the General Theory of Stability Problems of Structural Elements Fabricated From the Viscoelastic Composite Materials, Composites" Part B: Engineering, 32(5), 475-482, 2001.
- [11] Akbarov, S.D., Rzaev, O.G., "Delamination of Unidirectional Viscoelastic Composite Materials" *Mechanics of Composite Materials*, 38(1), 17-24, 2002.
- [12] Akbarov, S.D., Rzaev, O.G., "On the Delamination of a Viscoelastic Composite Circular Plate" *International Applied Mechanics*, 39(3), 368-374, 2003.
- [13] Akbarov, S.D., Rzaev, O.G., "On the Buckling of the Elastic and Viscoelastic Composite Circular Thick Plate with a Penny-Shaped Crack" *European Journal of Mechanics A/Solids*, 21(2), 269-279, 2002.
- [14] Rzaev, O.G., Akbarov, S.D., "Local Buckling of the Elastic and Viscoelastic Coating Around the Penny-Shaped Interface Crack" *International Journal of Engineering Science*, 40, 1435-1451, 2002.
- [15] Hoff, N.J., "Buckling and Stability" *J. Roy. Aeron. Soc.*, 58, 1, 1954.
- [16] Cristensen, R.M., "Mechanics of Composite Materials" John Wiley and Sons, Int. New York-1979.
- [17] Zienkiewicz, O.C. ve Taylor, R.L., "The Finite Element Methods: Basic Formulation and Linear Problems" Vol. 1, 4th Ed., Mc Graw-Hill Book Company, Oxford-1989.