



XVII. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ
5-9 Eylül 2011, Fırat Üniversitesi, Elazığ

DEĞİŞKEN KESİTLİ DİKDÖRTGEN İNCE PLAKLARIN SONLU FARKLAR YÖNTEMİ İLE ANALİZİ

Mustafa Halûk Saraçoğlu¹
Dumlupınar Üniversitesi
Kütahya

Yunus Özçelikörs²
Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Eskişehir

Mehmet Tevfik Bayer³
Dumlupınar Üniversitesi
Kütahya

ÖZET

Bu çalışmada; değişken kesitli düzgün yayılı yük etkisindeki izotrop dikdörtgen ince plaklar sonlu farklar yöntemi kullanılarak incelenmiştir. Bu plaklar dört kenarından basit mesnetlenmiştir. Değişken kesitli plak probleminin çözümü için kurulan diferansiyel denklemler değişken katsayılar içermektedir. Örnek olarak literatürde yer alan, plak kalınlık değişiminin ikinci dereceden beş farklı fonksiyon ile modellendiği izotrop bir plak problemi dikkate alınmıştır. Plak problemleri boyutsuzlaştırılarak geliştirilen bilgisayar programında sonlu farklar yöntemi ile nümerik olarak çözülmüştür. Elde edilen sonuçlar tablolar halinde sunulmuş ve referans sonuçlar ile mukayese edilmiştir.

GİRİŞ

Bu çalışmada; değişken kesitli düzgün yayılı yük etkisindeki izotrop dikdörtgen ince plaklar sonlu farklar yöntemi kullanılarak incelenmiştir. Bu plaklar dört kenarından basit mesnetlenmiştir. Bu durumda mesnetlerde çökmelere izin verilmezken dönmelere izin verilmektedir.

Çok özel yükleme halleri dışında plaklarda oluşan gerilme dağılımı düzgün değildir. Malzemenin tasarruf edilmesi için gerilmenin az olduğu yerlerde plak kalınlığının azaltılması yoluna gidilebilir. Sabit kesitli plaklara göre daha düşük ağırlığa sahip olan değişken kesitli plaklar yaygın olarak yüksek performanslı kara, deniz, hava ve uzay araçlarının birçok türünde kullanılırlar.

Plaklarla ilgili pek çok çalışma olmasına rağmen değişken kesitli plaklarla ilgili çok fazla sayıda çalışma mevcut değildir. Değişken kesitli plakların diferansiyel denge denklemlerinin elde edilmesinde, plak kalınlığının ani değişmediği durumlarda sabit kesitli plaklar için elde edilen denklemlerin kullanılabileceği Timoshenko ve Woinowsky-Krieger tarafından ifade edilmiştir[5].

¹ Yrd. Doç. Dr., İnşaat Müh. Böl., E-posta: mhsaracoglu@dpu.edu.tr

² Prof. Dr., İnşaat Müh. Böl., E-posta: yunuso@ogu.edu.tr

³ Prof. Dr., İnşaat Müh. Böl.

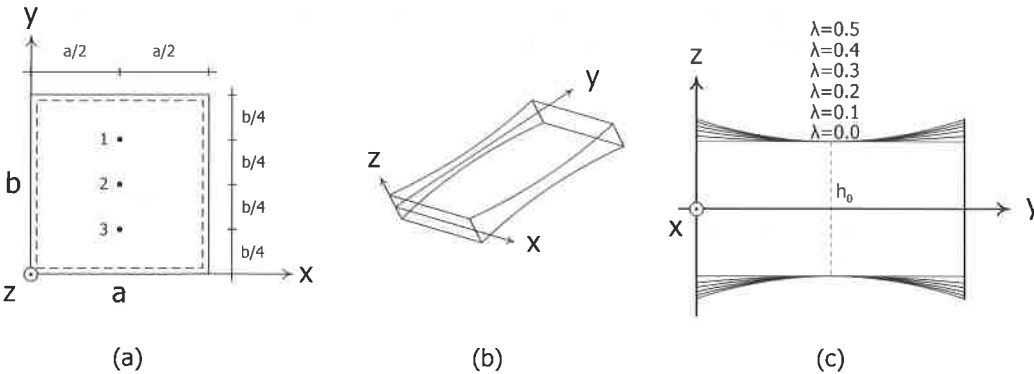
Değişken kesitli dikdörtgen izotrop ince plak çözümü ile ilgili bazı çalışmalar günümüz kitaplarında bir ya da birkaç bölüm şeklinde yer almaktadır. Fertis'in "Nonlinear Mechanics" isimli eserinde D plak rijitliğinin değişim fonksiyonu ve türevlerini kullanarak diferansiyel denklemler ortaya konulmuştur. Bu diferansiyel denklemler sabit kalınlıklı ancak farklı olarak yüklenmiş bir plâğa karşılık gelmektedir[4].

Zenkour, ikinci dereceden kalınlık değişimine sahip ince dikdörtgen izotrop plakları da incelediği makalesinde çözümleri kesin olarak hesaplamıştır. Kapalı form çözümler geliştirdiği çalışmasında sonuçları tablo ve grafiklerle sunmuştur[3].

YÖNTEM

Sonlu farklar yöntemi, yaklaşık bir yöntem olup diferansiyel denklemlerin kapalı çözümleri elde edilemediğinde kullanılır. Bu yöntemde diferansiyel denklemin sağlanması yaklaşıktır fakat sınır şartlarının gerçekleşmesinde bir kesinlik vardır. Değişken kesitli plak probleminin yönetici diferansiyel denklemi, çözüm için kurulan sonlu fark ağı noktalarında sonlu farklar yöntemi kullanılarak ağ noktalarındaki çökmeler cinsinden lineer bir denkleme dönüştürülür. Ancak değişken kesitli plak probleminin çözümü için kurulan bu yönetici denklem değişken katsayılar içermektedir. Bu durumda sonlu farklar yöntemi ile lineer denklemlere dönüştürülen ifadelerde de değişken katsayılar yer almaktadır. Bu değişken katsayılar sonlu farklar ağ noktalarındaki plak rijitliği veya plak rijitliğinin birinci veya ikinci türevleridir. Bu türevler de komşu ağ noktalarındaki rijitlikler cinsinden sonlu farklar yöntemi kullanılarak tarif edilirler. Bu şekilde değişken katsayıları da tarif edilmiş olan ağ noktalarındaki çökmeler cinsinden ifade edilen lineer denklem takımı çözülerek ağ noktalarındaki bilinmeyen w çökmeleri hesaplanır. Bu çökme değerleri kullanılarak ağ noktalarındaki gerilmeler ve momentler elde edilir.

Değişken Kesitli İzotrop İnce Plakların Analizi



Şekil 1. a) Dört kenarından basit mesnetli dikdörtgen plak,
b) İkinci dereceden kalınlık değişimi olan plak,
c) Çeşitli lamda değerlerine göre plak kesitleri.

z - ekseninin tersi yönünde etki eden q düzgün yayılı yükünü taşıyan Şekil 1'deki gibi değişken kesitli izotrop dikdörtgen ince plâğa ait yönetici kısmi diferansiyel denklem şu şekildedir:

$$D(w_{,xxxx} + 2w_{,xxyy} + w_{,yyyy}) + 2D_{,y}(w_{,xxy} + w_{,yyy}) + D_{,yy}(\nu w_{,xx} + w_{,yy}) = q$$

Burada D değişken plak rijitliğidir. İzotrop plak malzemesinin elastisite modülü E, Poisson oranı ν , değişken plak kalınlığı h olmak üzere bu rijitlik şu şekilde tarif edilir:

$$D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$$

Yukarıdaki yönetici diferansiyel denklemde yer alan plak rijitliğinin türevleri ile çökmenin türevleri sonlu farklar yöntemi kullanılarak komşu ağ noktasındaki değerler cinsinden yazılarak ağ noktalarındaki çökmeler cinsinden yazılan denklem takımı çözülerek w çökmeleri hesaplanır. Hesaplanan w çökmeleri kullanılarak sonlu fark ağ noktalarındaki çökmelerin ikinci türevleri sonlu farklar yöntemi yardımıyla hesaplanarak klasik plak teorisine göre birim şekil değiştirmeler aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$$

Hesaplanan bu birim şekil değiştirmeler ve malzeme matrisi kullanılarak plakta ağ noktalarında oluşan gerilmeler aşağıdaki gibi elde edilirler. Birim şekil değiştirmeler ve gerilmeler z koordinatının lineer fonksiyonlarıdır. En büyük normal gerilmeler plağın alt yüzeyinde oluşacağından plağın alt yüzeyinde ağ noktalarında $z = -h/2$ koordinatlarına sahip noktalarda σ_x, σ_y gerilmeleri hesaplanır.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Eğilme momentleri ise klasik plak teorisine göre şekil değiştirme bağıntıları cinsinden yukarıda ifade edilen gerilmelerin plak kalınlığına göre entegralinin alınması ile aşağıdaki gibi elde edilir.

$$M = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma z dz$$

Sonuç olarak ağ noktalarındaki momentler aşağıdaki gibi tarif edilir. Bu tarifte yer alan ağ noktalarına ait çökmelerin ikinci türevleri sonlu farklar yöntemi yardımıyla hesaplanır ve aşağıdaki tariflere yerleştirilerek momentler hesaplanır.

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D & \nu D & 0 \\ \nu D & D & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$$

Ağ noktalarındaki çökmeler, gerilmeler ve momentler hesaplandığında değişken kesitli izotrop ince plakların analizi tamamlanmış olur.

Uygulamalar

Bu çalışmada örnek olarak, x- eksen yönündeki genişliği a, y- eksen yönündeki uzunluğu b ve z- eksen yönündeki değişken kalınlığı h olan dört kenarından basit mesnetli, düzgün yayılı yükle yüklü, izotrop dikdörtgen ince plaklar ele alınmıştır. Plakın y- eksen yönündeki kalınlık değişimi aşağıdaki fonksiyonla tanımlanmıştır[3].

$$h=h_0 \left[1+\lambda (2(y/b)-1)^2 \right]$$

Burada h_0 Şekil 1c’de görüldüğü gibi plak orta noktasının kalınlığıdır. λ plak kalınlığını düzenleyen bir parametredir. λ ’nın sıfır olması plak kalınlığının sabit olması demektir. Bu çalışmada beş farklı λ değerleri için hesaplar yapılmıştır. Örnek olarak ele alınan değişken kesitli izotrop ince plak, ikinci dereceden kalınlık değişimine sahiptir. Bu çalışmada çökmeler, gerilmeler ve birim uzunluktaki momentler aşağıdaki şekilde boyutsuzlaştırılmıştır[1].

$$\bar{w}' = \frac{E h_0^3}{q_0 a^4} w$$

$$\bar{M}_x' = \frac{1}{q_0 a^2} M_x$$

$$\bar{M}_y' = \frac{1}{q_0 a^2} M_y$$

$$\bar{\sigma}_x' = \frac{h_0^2}{q_0 a^2} \sigma_x$$

$$\bar{\sigma}_y' = \frac{h_0^2}{q_0 a^2} \sigma_y$$

Örnek plak problemlerinin alındığı referansta[3] ise boyutsuz çökme $\bar{w}$, plak orta noktasının eğilme rijitliği D_0 ve 100 çarpanı kullanılarak aşağıdaki şekilde tarif edilmiştir:

$$\bar{w} = \frac{100 D_0}{q_0 a^4} w$$

$\nu = 0.3$ alınarak ve aşağıdaki D_0 tarifi kullanılarak bu iki boyutsuz çökme arasında aşağıdaki ilişki yazılır:

$$D_0 = E h_0^3 / 12 (1 - \nu^2)$$

$$\bar{w} = (100/10.92) \bar{w}'$$

Benzer şekilde referansta[3] tarif edilen $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y$ boyutsuz gerilmeleri ile birim uzunluktaki $\bar{M}_x, \bar{M}_y$ boyutsuz moment tarifleri ile bu çalışmada kullanılan ilgili boyutsuz büyüklükler arasında da aşağıdaki ilişkiler yazılır:

$$\bar{\sigma}_x = (10/10.92) \bar{\sigma}_x'$$

$$\bar{\sigma}_y = (10/10.92) \bar{\sigma}_y'$$

$$\bar{M}_x = 10 \bar{M}_x'$$

$$\bar{M}_y = 10 \bar{M}_y'$$

Bu çalışmada örnek plaklar çözülürken; önce kabul edilebilir hassaslıkta çözüm veren sonlu fark ağı bölüm sayısı tespit edilir. Bunun için plağın çeyreği analiz edilir. Çeyrek plağın y doğrultusundaki $b/2$ uzunluğu m 'ye bölünürken, x doğrultusundaki $a/2$ genişliği de n 'ye bölünür. Bu şekilde oluşturulacak ağı kare veya kareye yakın şekillenmesi sağlanır. m bölüm sayısı 5,10,15,... veya 16,32,48,..., v.s. şeklinde büyütülerek oluşan sonlu fark ağlarına göre çeyrek plağın ağı noktalarındaki çökmeler hesaplanır. Hesaplanan bu boyutsuz çökmelerden plağın orta noktasına ait boyutsuz $\bar{w}'_0$ çökmesi ile m bölüm sayısı kullanılarak oluşturulan grafik yardımıyla m bölüm sayısına karar verilir. Bu çalışmada kabul edilebilir hassaslıkta çözüm veren m bölüm sayısı, elde edilen eğrinin eğiminin 10^{-6} değerine ulaştığı nokta olarak kabul edilmiştir[1]. Bu m değeri kullanılarak sonlu fark ağı oluşturulur ve her bir ağı noktasındaki çökme değerleri bulunur. Bu boyutsuz çökmeler kullanılarak her bir ağı noktasındaki boyutsuz gerilmeler ve birim uzunluktaki boyutsuz momentler hesaplanır.

Bu çalışmada örnek olarak çözülen tüm problemlerde kabul edilebilir bir hassaslıkta çözüm veren m bölüm sayısı önce tespit edilmekle beraber bununla ilgili olarak yalnızca Örnek1'de ($b/a=4.0$, $\lambda=0.2$) durumu için yukarıda anlatılan grafik Şekil2'de çizilmiş, diğer örnekler için ise çizilen benzer grafiklere burada yer verilmemiştir.

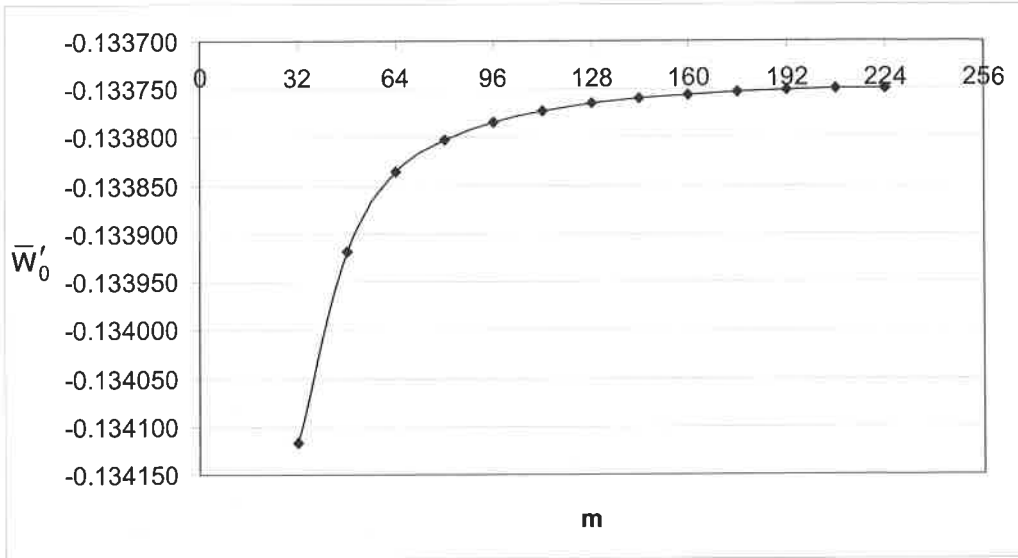
Örnek1: Bu örnekte ele alınan değişken kesitli izotrop plakların çözümünde kullanılan sonlu farklar ağını verecek n ve m sayılarını belirlemek için önce aşağıdaki çalışma yapılır.

Örnek olarak ($b/a=4.0$, $\lambda=0.2$) olduğunda bu bölüm sayılarını elde edebilmek için Şekil2'deki ($\bar{w}'_0 - m$) grafiği çizilir. Bu grafikte $\bar{w}'_0$ plağın orta noktasının boyutsuz çökmesini göstermektedir ve (-) işaretine sahiptir. m sayısı da $b/2$ uzunluğunun kaç parçaya bölündüğünü gösteren sayıdır. Bu örnekte m sayısı, 16,32,48,... gibi artırılarak sonlu fark ağı oluşturulmuş ve Şekil2'deki grafik çizilmiştir. Bu grafiğin çiziminde verilen m sayıları kullanılarak Tablo1'deki $\bar{w}'_0$ boyutsuz çökmeleri referans[1]'de geliştirilen program kullanılarak hesaplanmıştır. Bu grafik incelendiğinde $m=96$ noktasında grafiğin eğiminin 0.766×10^{-6} değerine ulaşarak 10^{-6} eğiminin de altına düştüğü görülmektedir. Bu noktada hesaplanan plak orta noktasına ait boyutsuz çökme ($\bar{w}'_0 = -0.133785$) değerine sahip olmaktadır. Bu boyutsuz çökmenin kabul edilebilir hassaslıkta bir çökme olduğu kabul edilmiştir.

Tablo 1

Değişken kesitli plağın m bölüm sayısına göre hesaplanan $\bar{w}'_0$ orta nokta boyutsuz çökme değerleri ($b/a=4.0$, $\lambda=0.2$)

$n \times m$	n	m	$\bar{w}'_0$	eğim
256	8	32	-0.134117	
576	12	48	-0.133918	1.24E-05
1024	16	64	-0.133835	5.21E-06
1600	20	80	-0.133803	1.98E-06
2304	24	96	-0.133785	1.14E-06
3136	28	112	-0.133773	7.66E-07
4096	32	128	-0.133765	5.19E-07
5184	36	144	-0.133760	2.61E-07
6400	40	160	-0.133757	2.28E-07
7744	44	176	-0.133754	1.98E-07
9216	48	192	-0.133752	9.22E-08
10816	52	208	-0.133750	1.10E-07
12544	56	224	-0.133749	7.80E-08

Şekil 2: Değişken kesitli plağın ($\bar{w}'_0 - m$) grafiği ($b/a=4.0, \lambda=0.2$)

Dört kenarından basit mesnetli, düzgün yayılı yükü yüklü değişken kesitli dikdörtgen ince izotrop plakların ortaya konulan sonlu farklar modeline göre ve referansta[1] geliştirilen bilgisayar programı kullanılarak orta noktasındaki boyutsuz $\bar{w}$ çökmeleri, birim uzunluktaki $\bar{M}_x$ ve $\bar{M}_y$ boyutsuz eğilme momentleri Tablo2'de gösterildiği şekilde hesaplanmıştır. Bu çalışmada hesaplanan boyutsuz $\bar{w}$ çökmeleri z- eksenini tersi yönünde hesaplandığından (-) işaretlidir. Ancak referanslardaki işaret ile uyum sağlaması için ilgili tablolarda (-) işaretine yer verilmemiştir. Burada λ parametre değeri 0.2 olarak alınmıştır. Aynı tabloda referansta[3] hesaplanan değerler de yer almaktadır.

Tablo2a

Dört kenarından basit mesnetli, düzgün yayılı yükü yüklü değişken kesitli dikdörtgen ince plakların orta noktasındaki boyutsuz $\bar{w}$ çökmeleri ($\lambda=0.2$)

nxm	n	m	b/a	Zenkour[3]	Bu çalışma	Bu çalışma $\times$ (100/10.92)	% Fark Zenkour[3]
900	30	30	1.0	0.3494	0.038175	0.3496	0.0572
600	20	30	1.5	0.6766	0.073918	0.6769	0.0443
800	20	40	2.0	0.9097	0.099376	0.9100	0.0330
2187	27	81	3.0	1.1415	0.124688	1.1418	0.0263
2304	24	96	4.0	1.2247	0.133785	1.2251	0.0327
2000	20	100	5.0	1.2572	0.137352	1.2578	0.0477

Tablo2b

Dört kenarından basit mesnetli, düzgün yayılı yükü yüklü değişken kesitli dikdörtgen ince plakların orta noktasındaki birim uzunluktaki $\bar{M}_x$ boyutsuz eğilme momentleri ($\lambda=0.2$)

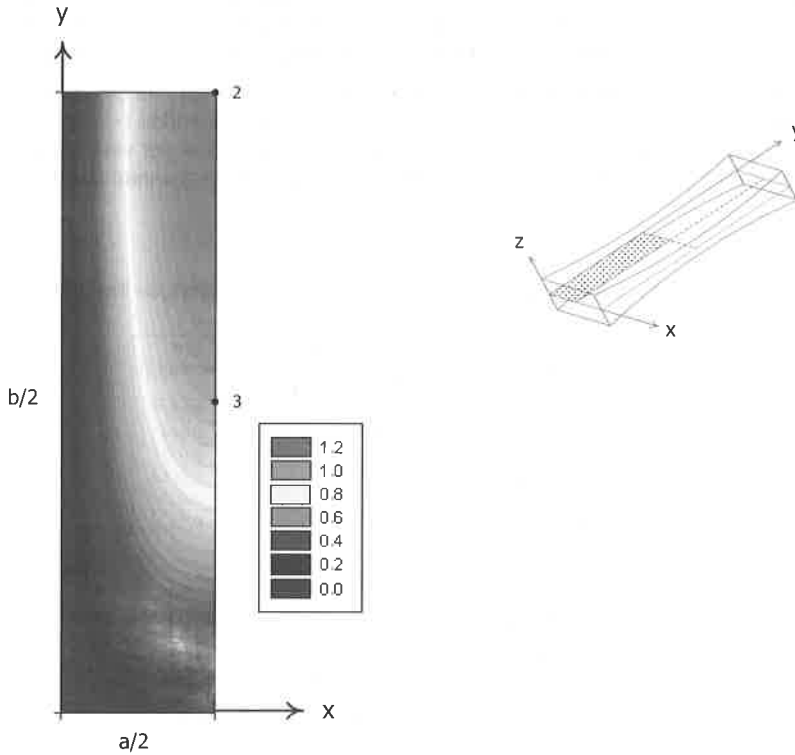
nxm	n	m	b/a	Zenkour[3]	Bu çalışma	Bu çalışma $\times$ 10	% Fark Zenkour[3]
900	30	30	1.0	0.4217	0.042177	0.4218	0.0237
600	20	30	1.5	0.7231	0.072305	0.7231	0.0000
800	20	40	2.0	0.9259	0.092581	0.9258	-0.0108
2187	27	81	3.0	1.1199	0.111987	1.1199	0.0000
2304	24	96	4.0	1.1875	0.118749	1.1875	0.0000
2000	20	100	5.0	1.2137	0.121364	1.2136	-0.0082

Tablo2c

Dört kenarından basit mesnetli, düzgün yayılı yükü yüklü değişken kesitli dikdörtgen ince plakların orta noktasındaki birim uzunluktaki $\bar{M}_y$ boyutsuz eğilme momentleri ($\lambda=0.2$)

nxm	n	m	b/a	Zenkour[3]	Bu çalışma	Bu çalışma $\times$ 10	% Fark Zenkour[3]
900	30	30	1.0	0.4510	0.045104	0.4510	0.0000
600	20	30	1.5	0.4858	0.048580	0.4858	0.0000
800	20	40	2.0	0.4667	0.046667	0.4667	0.0000
2187	27	81	3.0	0.4207	0.042073	0.4207	0.0000
2304	24	96	4.0	0.3976	0.039759	0.3976	0.0000
2000	20	100	5.0	0.3878	0.038781	0.3878	0.0000

Tablo 2a'da kabul edilebilir hassaslıkta çözüm veren sonlu fark ağında (nxm) bölüm sayıları da verilmektedir. ($b/a=4.0$) durumu için sonlu farklar ağında, incelenen çeyrek plak için ($a/2$) genişliği $n=24$ parçaya bölünürken, ($b/2$) uzunluğu da $m=96$ parçaya bölünmüştür. Bu durumda bu örnek problemin sonlu farklar yöntemi ile çözümünde 2304 ağ noktasında boyutsuz çökmeler, gerilmeler ve momentler hesaplanmıştır. Hesaplanan bu büyüklüklerden birim uzunluktaki $\bar{M}_x$ boyutsuz eğilme momentine ait kontur grafiği bir örnek olarak Şekil3'te çizilmiştir. Bu kontur grafiğinin çiziminde SigmaPlot paket programı[2] kullanılmıştır.



Şekil 3: Değişken kesitli dikdörtgen plağın çeyreğinde birim uzunluktaki $\bar{M}_x$ boyutsuz eğilme momentine ait kontur grafiği ($b/a=4.0$, $\lambda=0.2$)

Örnek2: Plakta $x=\frac{1}{2}a$, $y=\frac{3}{4}b$ koordinatlarına sahip olan nokta "1" noktası olarak tarif

edilmektedir. Benzer şekilde $x=\frac{1}{2}a$, $y=\frac{2}{4}b$ noktası "2" noktası olarak ve $x=\frac{1}{2}a$, $y=\frac{1}{4}b$ noktası da "3" noktası olarak tanımlanmaktadır (Şekil1a). Buna göre değişken kesitli kare plakta 1, 2 ve 3 noktalarındaki boyutsuz $\bar{w}$ çökme değerleri çeşitli λ değerleri için hesaplanarak Tablo3'te gösterilmiştir. Aynı tabloda referanslarda[3,4] hesaplanan değerler de yer almaktadır.

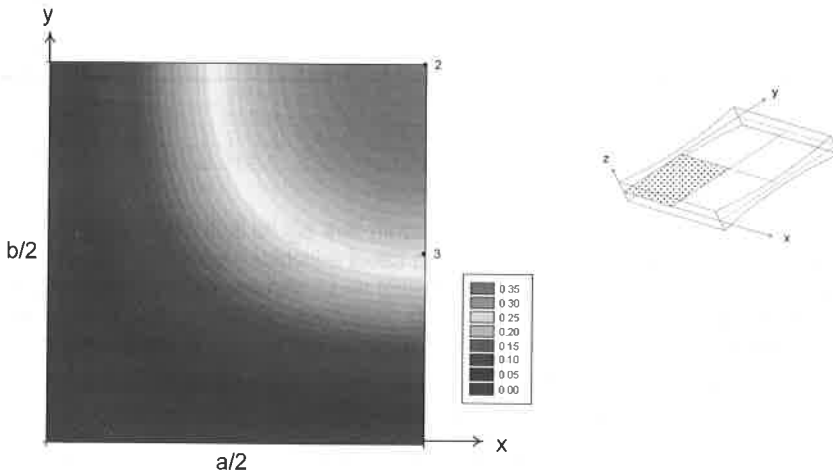
Tablo3

Değişken kesitli kare plakta 1, 2 ve 3 noktalarındaki boyutsuz $\bar{w}$ çökme değerleri

nxm	n	m	λ	Nokta	Fertis[4]	Sonlu farklar 8 X 8 [4]	Zenkour[3]	Bu çalışma	Bu çalışma $\times$ (100/10.92)	%Fark Fertis[4]	%Fark SonluFark Fertis[4]	%Fark Zenkour[3]
400	20	20	0.1	1	0.2680	0.2677	0.2680	0.029272	0.2681	0.0373	0.1494	0.0373
400	20	20	0.1	2	0.3766	0.3762	0.3765	0.041132	0.3767	0.0266	0.1329	0.0531
400	20	20	0.1	3	0.2680	0.2677	0.2680	0.029272	0.2681	0.0373	0.1494	0.0373
900	30	30	0.2	1	0.2455	0.2450	0.2448	0.026752	0.2450	-0.2037	0.0000	0.0817
900	30	30	0.2	2	0.3499	0.3492	0.3494	0.038175	0.3496	-0.0857	0.1145	0.0572
900	30	30	0.2	3	0.3455*	0.3450*	0.3448*	0.026752	0.2450	-	-	-
900	30	30	0.3	1	0.2260	0.2232	0.2239	0.024499	0.2244	-0.7080	0.5376	0.2233
900	30	30	0.3	2	0.3256	0.3206	0.3244	0.035479	0.3249	-0.2150	1.3412	0.1541
900	30	30	0.3	3	0.2260	0.2232	0.2239	0.024499	0.2244	-0.7080	0.5376	0.2233
900	30	30	0.4	1	0.2096	0.2052	0.2045	0.022474	0.2058	-1.8130	0.2924	0.6357
900	30	30	0.4	2	0.3048	0.2979	0.3012	0.033011	0.3023	-0.8202	1.4770	0.3652
900	30	30	0.4	3	0.2096	0.2052	0.2045	0.022474	0.2058	-1.8130	0.2924	0.6357
400	20	20	0.5	1	0.1962	0.1901	0.1682*	0.020658	0.1892	-3.5678	-0.4734	-
400	20	20	0.5	2	0.2863	0.2770	0.2792	0.030766	0.2817	-1.6067	1.6968	0.8954
400	20	20	0.5	3	0.1962	0.1901	0.1682*	0.020658	0.1892	-3.5678	-0.4734	-

(*) Referans[3]'te basım hatası olduğu kabul edilmiştir.

Tablo 3'te kabul edilebilir hassaslıkta çözüm veren sonlu fark ağı ile ilgili (nxm) bilgileri de yer almaktadır. Örnek olarak ($b/a=1$, $\lambda=0.2$) olduğunda kabul edilebilir hassaslıkta çözüm veren sonlu farklar ağında, incelenen çeyrek plak için ($a/2$) genişliği $n=30$ parçaya bölünürken, ($b/2$) uzunluğu da $m=30$ parçaya bölünmüştür. Bu bölüm sayıları da Şekil2'deki grafiğe benzer şekilde çizilen ($\bar{w}_0 - m$) grafiğinden elde edilmektedir. Ancak bu grafiğe bu çalışmada yer verilmemiştir. Bu durumda bu örnek problemin sonlu farklar yöntemi ile çözümünde orta düzlem üzerinde 900 ağ noktasında $\bar{w}$ boyutsuz çökmeleri hesaplanmıştır. Hesaplanan bu boyutsuz çökmelere ait kontur grafiği SigmaPlot paket programı[2] kullanılarak bir örnek olmak üzere Şekil4'te çizilmiştir.



Şekil 4: Değişken kesitli kare plağın çeyreğinde orta düzlemin boyutsuz $\bar{w}$ çökmelerine ait kontur grafiği ($b/a=1.0$, $\lambda=0.2$)

Örnek3: Tablo4'te ise b/a oranı 1.5 ve 2.0 alınarak λ parametre değeri 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 olarak değiştirilip hesaplanan $\bar{w}$ boyutsuz orta nokta çökmesi ve plağın alt yüzeyindeki $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y$ boyutsuz gerilmeleri yer almaktadır. Aynı tabloda referanslarda[3,4] hesaplanan değerlere de yer verilmektedir.

Tablo4a

Değişken kesitli dikdörtgen plağın orta düzleminin orta noktasındaki boyutsuz $\bar{w}$ çökmeleri

nxm	n	m	b/a	λ	Fertis[4]	Fertis Eşdeğer[4]	Zenkour[3]	Bu çalışma	Bu çalışma $\times$ (100/10.92)	%Fark Fertis[4]	%Fark Fertis Eşdeğer[4]	%Fark Zenkour[3]
600	20	30	1.5	0.1	0.7226	0.7203	0.7225	0.078910	0.7226	0.0000	0.3193	0.0138
600	20	30	1.5	0.2	0.6772	0.6681	0.6766	0.073918	0.6769	-0.0443	1.3172	0.0443
600	20	30	1.5	0.3	0.6361	0.6160	0.6342	0.069322	0.6348	-0.2044	3.0519	0.0946
600	20	30	1.5	0.4	0.5992	0.5639	0.5947	0.065087	0.5960	-0.5340	5.6925	0.2186
1035	23	45	2.0	0.1	0.9594	0.9572	0.9593	0.104781	0.9595	0.0104	0.2403	0.0208
800	20	40	2.0	0.2	0.9101	0.9016	0.9097	0.099376	0.9100	-0.0110	0.9317	0.0330
800	20	40	2.0	0.3	0.8649	0.8459	0.8634	0.094348	0.8640	-0.1041	2.1397	0.0695
450	15	30	2.0	0.4	0.8235	0.7903	0.8199	0.089693	0.8214	-0.2550	3.9352	0.1829

Tablo4b

Değişken kesitli dikdörtgen plağın alt yüzeyinin orta noktasındaki boyutsuz $\bar{\sigma}_x$ gerilmeleri

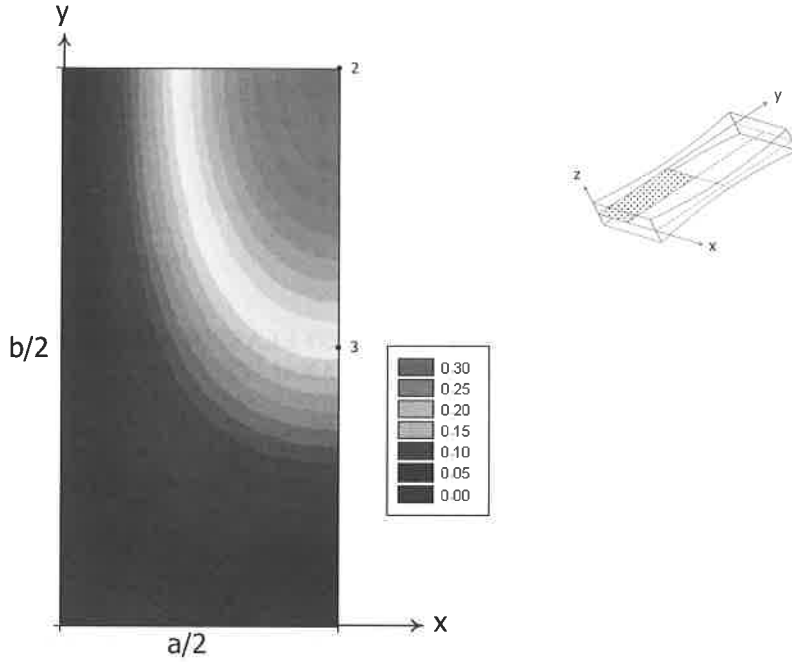
nxm	n	m	b/a	λ	Fertis[4]	Fertis Eşdeğer[4]	Zenkour[3]	Bu çalışma	Bu çalışma $\times$ (10/10.92)	%Fark Fertis[4]	%Fark Fertis Eşdeğer[4]	%Fark Zenkour[3]
600	20	30	1.5	0.1	0.4207	0.4197	0.4207	0.459310	0.4206	-0.0238	0.2144	-0.0238
600	20	30	1.5	0.2	0.3976	0.3935	0.3973	0.433832	0.3973	-0.0755	0.9657	0.0000
600	20	30	1.5	0.3	0.3765	0.3674	0.3754	0.410137	0.3756	-0.2390	2.2319	0.0533
600	20	30	1.5	0.4	0.3574	0.3412	0.3550	0.388095	0.3554	-0.5596	4.1618	0.1127
1035	23	45	2.0	0.1	0.5329	0.5320	0.5329	0.581825	0.5328	-0.0188	0.1504	-0.0188
800	20	40	2.0	0.2	0.5090	0.5053	0.5087	0.555488	0.5087	-0.0589	0.6729	0.0000
800	20	40	2.0	0.3	0.4869	0.4786	0.4861	0.530834	0.4861	-0.1643	1.5671	0.0000
450	15	30	2.0	0.4	0.4668	0.4518	0.4656	0.507673	0.4649	-0.4070	2.8995	-0.1503

Tablo4c

Değişken kesitli dikdörtgen plağın alt yüzeyinin orta noktasındaki boyutsuz $\bar{\sigma}_y$ gerilmeleri

nxm	n	m	b/a	λ	Fertis[4]	Fertis Eşdeğer[4]	Zenkour[3]	Bu çalışma	Bu çalışma $\times$ (10/10.92)	%Fark Fertis[4]	%Fark Fertis Eşdeğer[4]	%Fark Zenkour[3]
600	20	30	1.5	0.1	0.2707	0.2711	0.2707	0.295592	0.2707	0.0000	-0.1475	0.0000
600	20	30	1.5	0.2	0.2667	0.2683	0.2669	0.291481	0.2669	0.0750	-0.5218	0.0000
600	20	30	1.5	0.3	0.2619	0.2655	0.2628	0.286850	0.2627	0.3055	-1.0546	-0.0381
600	20	30	1.5	0.4	0.2561	0.2628	0.2585	0.281830	0.2581	0.7809	-1.7884	-0.1547
1035	23	45	2.0	0.1	0.2559	0.2564	0.2560	0.279509	0.2560	0.0391	-0.1560	0.0000
800	20	40	2.0	0.2	0.2562	0.2582	0.2564	0.280004	0.2564	0.0781	-0.6971	0.0000
800	20	40	2.0	0.3	0.2554	0.2599	0.2563	0.279754	0.2562	0.3132	-1.4236	-0.0390
450	15	30	2.0	0.4	0.2536	0.2617	0.2558	0.278895	0.2554	0.7098	-2.4073	-0.1564

Tablo 4'te kabul edilebilir hassaslıkta çözüm veren sonlu fark ağı ile ilgili (nxm) bilgileri de yer almaktadır. Örnek olarak (b/a=2, $\lambda=0.4$) olduğunda kabul edilebilir hassaslıkta çözüm veren sonlu farklar ağında, incelenen çeyrek plak için (a/2) genişliği n=15 parçaya bölünürken, (b/2) uzunluğu da m=30 parçaya bölünmüştür. Bu bölüm sayıları da Şekil2'deki grafiğe benzer şekilde çizilen ($\bar{w}'_0 - m$) grafiğinden elde edilmektedir. Ancak bu grafiğe bu çalışmada yer verilmemiştir. Bu durumda bu örnek problemin sonlu farklar yöntemi ile çözümünde 450 ağı noktasında $\bar{w}$ boyutsuz çökmeleri ile plağın alt yüzeyindeki $\bar{\sigma}_x$ ve $\bar{\sigma}_y$ boyutsuz gerilmeleri hesaplanmıştır. Hesaplanan bu değerlerden $\bar{\sigma}_y$ boyutsuz gerilmelerine ait kontur grafiği SigmaPlot paket programı[2] kullanılarak bir örnek olmak üzere Şekil5'te çizilmiştir.



Şekil 5: Değişken kesitli dikdörtgen plağın çeyreğinin alt yüzeyinde etki eden $\bar{\sigma}_y$ boyutsuz gerilmesine ait kontur grafiği
($b/a=2.0$, $\lambda=0.4$)

SONUÇ

Bu çalışmada, ikinci dereceden kalınlık değişimine sahip değişken kesitli izotrop dikdörtgen ince plakların statik analizi için sonlu farklar yöntemi kullanılmıştır. İncelenen plaklar, basit mesnetli olup düzgün yayılı yüklerle yüklenmiştir. Geliştirilmiş olan bilgisayar programından[1] elde edilen sonuçlar ile literatürde[3,4] yer alan kapalı form çözümler karşılaştırılmıştır. Buna göre; sonlu farklar yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçların literatürdeki sonuçlar ile büyük bir uyum içerisinde olduğu görülmüştür.

KAYNAKLAR

- [1] Saraçoğlu M.H., *Değişken Kesitli Kompozit Çapraz Tabakalı Plakların Sonlu Farklar Metodu ile Gerilme ve Şekil Değiştirme Analizi*, Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, 2010
- [2] SigmaPlot for Windows Version 11.0 Build 11.0.0.77
<http://www.systat.com/products/sigmaplot/>
- [3] Zenkour A.M., *An exact solution for the bending of thin rectangular plates with uniform, linear and quadratic thickness variations*, International Journal of Mechanical Sciences, 45(2), 295-315, 2003.
- [4] Fertis D.G., *Nonlinear Mechanics*, FL:CRC Press, 2nd. ed., 1998.
- [5] Timoshenko S.P. and Woinowsky-Krieger S., *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill Book Company, 1959.