



YAPI MEKANİĞİNDE DEĞİŞİM YÖNTEMLERİ

A.Yalçın AKÖZ¹ ve Atilla ÖZÜTOK²

¹T.C. Maltepe Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi İnşaat Bölümü, İstanbul

²Selçuk Üniversitesi, Mühendislik- Mimarlık Fakültesi, İnşaat Müh. Bölümü, Konya

SUMMARY

The aim of this study is to demonstrate the role of modern variationel theory in structural mechanics. Here shell theory is chosen as a representative problem. Variational theory not only provide unified formulation of diverse field but also serve to obtain approximate solutions.

ÖZET

Bu çalışmanın amacı modern değişim yöntemlerinin yapı mekaniği problemlerindeki rolünü gösterebilmektir. Kabuk teorisi örnek olarak seçilmiştir. Değişim metotları sadece karmaşık alanın denklemlerini bütün hale getirmekle kalmaz aynı zamanda yaklaşık çözümü de sağlar..

GİRİŞ.

Bu çalışmada yapı mekaniği problemlerinin çözüm yöntemleri ve bu alandaki gelişmeler ele alınacaktır. Önce çubuk, plak ve kabuklara ait matematik model

$$Lu = f \quad (1)$$

operatörü ile belirlenir. Operatör sınır koşullarını da içeren diferansiyel denklem veya diferansiyel denklem takımından oluşur. Burada u alan değişkenlerini, f ise dış kuvvetleri gösteren vektörlerdir. Alan denklemleri, kinematik bağıntılar, denge denklemleri, bünye bağıntıları ve sınır koşullarından oluşur. Değişken sayısı ve operatörün büyüklüğü çubuk, plak ve kabuklar için farklılık gösterir. 1960'lı yıllarda alan denklemlerini oluşturmak ve kapalı çözümlerini elde etmek uğraş alanı idi.

Sistematik diferansiyel denklem çözüm yöntemlerinden birisi taşıma matrisi yöntemidir. Bu konuda Prof. Dr. Mustafa İNAN'ın "Başlangıç değerler yöntemi" adlı kitabı temel kaynaklardan birisidir [1]. Alan denklemlerinin türevleri ile kendileri arasındaki ilişkiyi belirleyen diferansiyel geçiş matrisinin öz değerlerindeki katlılık halleri ve öz vektörler sayısının katlılık sayısına eşit olmaması hallerinde ileri matris yöntemleri gerekir. Bu halleri Prof. Dr. Vural CİNEMRE'nin "Linear algebra"[2] kitabında bulmak mümkündür.

Diğer bir çözüm yöntemi de enerji yöntemidir. Enerji yöntemleri hakkında kaynaklardaki eserler önerilir [3]. Enerji yönteminin yapı mekaniğinde üç ayrı işlevini irdelemekte yarar vardır:

- Kesin çözüm
- Yaklaşık çözüm
- Alan denklemlerinin özellikle sınır koşullarının bulunması [4]

π Toplam potansiyel enerji (TPE) kesin çözümlerde kolaylık sağlar. Ne yazık ki bu yöntem sadece, iç enerjinin düğüm noktaları yer değiştirmelerine bağlı olarak ifade edilebildiği; eksenel yük taşıyan kafes sistem tipi yapılarda kullanılabilir.

Ancak lateral yük taşıyan hiperstatik eğilme elemanlarında π TPE'yi kullanma olanağı yoktur. Çünkü iç enerji v elastik enerjisinin ikinci türevinin integrali ile hesaplanabilir. Elastik eğri de bilinmediği için iç enerji ve π hesaplanamaz. Bu problem bütün yük tiplerinde kullanılmak üzere π Eşdeğer Toplam Potansiyel Enerjisinin (ETPE) ortaya atılması ile aşılmıştır[5]. Böylece lateral yük etkisindeki taşıyıcı sistemler de düğüm noktalarının yer değiştirmeleri cinsinden kolaylıkla çözülebilmektedir.

Sayısal yöntemlerdeki çalışmalar, uçak sanayindeki jet motorların kullanılması ile ortaya çıkan daha güçlü uçak gövdelerinin elde edilme gereksinimi yeni hesap yöntemlerinin arayışını hızlandırdı. 1940-1960 yıllar arasında matris metotları gelişti. O yıllarda kullanılmaya başlayan rijitlik matrisleri ve esneklik matrislerine dayalı sonlu elemanlar halen kullanılmaktadır. Sonlu eleman deyimi ilk kez Clough, R.W., tarafından kullanılmış[6]. Sonlu elemanlarda alan denklemlerine dayalı bir fonksiyonele ihtiyaç vardır. İşin en önemli kısmı bu fonksiyonele ulaşmaktır.

Daha sonra π TPE ilkesi sadece geometrik büyüklükler cinsinden problemlerin çözümünde çok yaygın olarak kullanılan bir yöntem haline gelmiştir. Bu yöntem iç kuvvetlere ulaşmakta yeterli değildir. Titreşim problemleri için halen başarı ile kullanılabilen bir yöntemdir. İç kuvvetleri de elde edebilmek için karışık sonlu elemanlar için Hellinger –Reissner ve Hu-Washizu ilkeleri kullanılmıştır[7]. Verilen diferansiyel denklemlerden fonksiyonele geçmek için Mikhlin teoremi, basit, doğrusal ve kendine eş sistemler için kullanılabilen bir yöntemdir. Ancak kapsamlı problemler için yeterli değildir. Son yıllarda karışık sonlu elemanlarda zayıf formülasyon yöntemi yaygın olarak kullanılmaktadır[8].

Günümüzde çözülecek problemlerin büyüklüğü sayısal çözüm yöntemlerini zorunlu kılmaktadır. Sayısal çözüm yöntemleri içinde de sonlu elemanlar yöntemi öne çıkmaktadır. Yukarıda adları verilen sonlu elemanlarda kullanılan yöntemlerin değişik açılardan eksikleri bulunmaktadır. Örneğin kayma kilitlenmesi, sayısal işlemlerdeki fazlalık, tamlik ve süreklilik koşullarını sağlayacak interpolasyon fonksiyonlarının kolay bulunamaması veya bulunan fonksiyonlarla kapalı işlem yapma güçlüğü gibi bir çok neden sayılabilir. Bunların dışında, karmaşık olan problemlerde, bazı kabullerle elde edilen alan denklemlerinin birbiri ile uyumlu (consistent) olması gerekmektedir. Uyumluluk konusu ilk kez Goldenweizer tarafından ortaya atılmış ve konunun önemi Morris tarafından da vurgulanmıştır[9-10] Potansiyellik koşulu kanımızca uyumluluk (consistency) koşulunun ifadesidir. Kabuk alan denklemlerinin uyumluluğu hakkında görüşümüz [11] da yayımlanmıştır.

Bu konuşmanın başlıca iki amacı vardır. Birincisi: Alan denklemleri belli ise, bu denklemlerin uyumlu olduğunu gösterdikten sonra sınır koşullarını ve fonksiyoneli üretmektir. Bu işlemler Gâteaux türevi yöntemi ile yapılabilir [12]. Bütün bilinmeyenleri ve sınır koşullarını

da içeren fonksiyonel sonlu eleman yönteminde kullanılırsa, işlem kolaylıklarının yanı sıra doğru sonuçlara hızla ulaşılmaktadır. Ayrıca kullanılan tek ve çift eleman sayısına göre doğru sonuçlara alttan ve üstten yaklaştığı bir çok problemde gözlenmiştir. Bu yöntem, yaklaşık otuz yıldır, İTÜ İnşaat Fakültesi Mekanik Anabilim Dalında, doğrusal, doğrusal olmayan, elastik, viskoelastik bünye yapıları birçok problemde kullanılmıştır[13-25]. Yöntemin özellikleri, topluca sonuçlar bölümünde verilecektir.

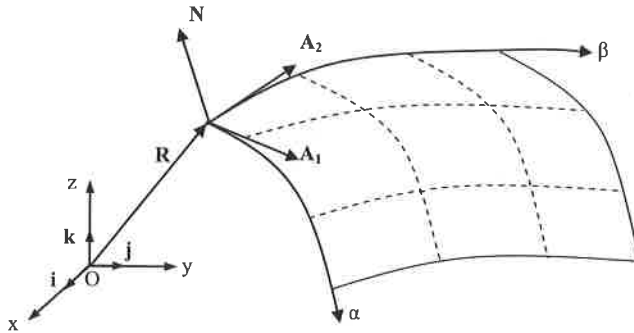
İkincisi: Kabuklara ait gelişmeleri kaynaklarda bulmak mümkündür[26-27]. Kalın kabuk problemlerine ait bağıntılar, lateral kayma gerilmelerinin elde edilmesi, doğrusal olmayan problemlerin alan denklemleri, ihmal edilen üçüncü moment denkleminin kullanılması gibi konularda çalışmak için alan denklemlerinin bağımsız olarak kurulması gerekir. Bu çalışmada ayrıca kabuk denklemlerinin özellikle şekil değiştirme bağıntılarının sürekli ortam kavramları ile çıkarımının bu konuda çalışacaklara ışık tutacağı inancı ile, kabuk alan denklemleri genel kabuklar için elde edilecek ve Gâteaux Diferansiyeli Yöntemi ile Fonksiyonel bulunacaktır. Bu fonksiyonelin yapı mekaniğindeki çubuk, plak, ve genel kabuklara uygulanabildiği teorik ve sayısal çözümlerle gösterilecektir.

KABUK ELEMANLARININ GEOMETRİSİ

Keyfi bir yüzey üzerindeki her noktanın yerini O merkezli ortogonal Kartezyen koordinat takımında tanımlayan vektör

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\alpha, \beta) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (2)$$

şeklindedir. Şekil 1 de gösterildiği gibi α , β yüzeyin eğrisel koordinatları, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ kartezyen koordinatın baz vektörleridir[28].



Şekil 1 Eğrisel koordinatlar

α ve β parametrelerine göre $\mathbf{R}$ konum vektörünün kısmi türevleri

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\alpha} = \mathbf{R}_{,1} = \mathbf{A}_1, \quad \frac{d\mathbf{R}}{d\beta} = \mathbf{R}_{,2} = \mathbf{A}_2 \quad (3)$$

dir. Burada eğrisel koordinatların ortogonalite koşulu $\mathbf{A}_1 \perp \mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 = 0$ gereği orta yüzey üzerindeki iki nokta arasındaki dS yay elemanını boyu

$$dS^2 = d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R} \rightarrow dS^2 = A_{11} d\alpha^2 + A_{22} d\beta^2 \quad (4)$$

şeklinde yazılabilir. Burada A_{ij} yüzey ölçüm tansörüdür ve

$$A_{11}=A_1^2 \quad , \quad A_{22}=A_2^2 \quad , \quad A_1=\|\mathbf{A}_1\| \quad , \quad A_2=\|\mathbf{A}_2\| \quad (5)$$

baz vektörlerin skaler çarpımı ile elde edilir. Bu tansörler yüzey koordinatlarının dönüşümlerinde gereken koşulları yerine getirirler. (4) denklemini yüzeyin *birinci ana formu* olarak adlandırılır.

Yüzeyin herhangi bir noktasındaki birim normal vektörü Şekil 2 de görüldüğü gibi yüzeye diktir. $\mathbf{N}$ birim normal vektörü

$$N = \frac{\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2}{\|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2\|} = \frac{\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2}{A_1 \cdot A_2} \quad (6)$$

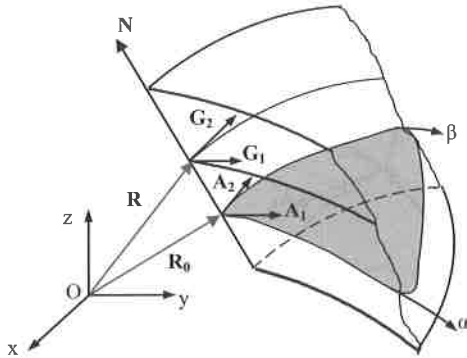
olarak elde edilir. Gerekli işlemler yapılırsa kabuğun *ikinci ana formu*

$$\frac{1}{R} = \frac{N_{,1} A_1 d\alpha^2 + N_{,2} A_2 d\beta^2}{A_{11} d\alpha^2 + A_{22} d\beta^2} \quad (7)$$

olarak elde edilir.

ŞEKİL DEĞİŞTİRMELER

Şimdiye kadar kabuk kalınlığını göz önüne almadığımız için kabuk yüzeyini belirleyen konum vektörünü $\mathbf{R}$ ile göstermiştik.

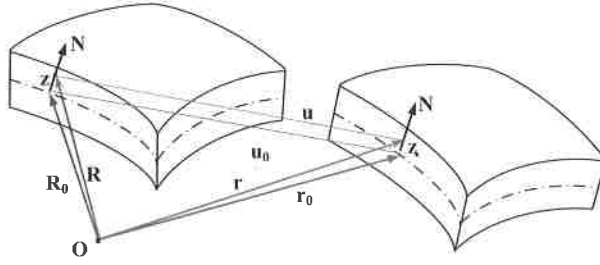


Şekil.2 Kabuk geometrisi

Bundan sonra kabuk kalınlığını göz önüne alacağımız için orta düzlemi gösteren vektör R_0 ile keyfi bir noktadaki konum vektörünü ise R ile göstereceğiz. Konum ve baz vektörleri Şekil 2 de görülmektedir.

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{A}_1 \left(1 + \frac{z}{R_1} \right), \quad \mathbf{G}_2 = \mathbf{A}_2 \left(1 + \frac{z}{R_2} \right), \quad \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \alpha} = \mathbf{G}_1, \quad \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \beta} = \mathbf{G}_2 \quad (8)$$

Bir noktadaki şekil değiştirme, birbirine sonsuz küçük uzaklıkta keyfi iki nokta arasındaki yay boyları kareleri arasındaki farkla ölçülür (Şekil 3).



Şekil.3 Yer değiştirme vektörü

Şekil değiştirmeden önceki yay boyu:

$$dS^2 = d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R} = G_{KL} dX_K dX_L \quad (9)$$

dir. Şekil değiştirmeden sonraki yay boyu

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = (\mathbf{G}_K + \mathbf{U}_{,K})(\mathbf{G}_L + \mathbf{U}_{,L}) dX_K dX_L \quad (10)$$

bulunur. Bu yay boyu ayrıca

$$ds^2 = C_{KL} dX_K dX_L \quad (11)$$

şeklinde de yazılabilir. C_{KL} ye Green deformasyon tansörü adı verilir. İki yay boyu arasındaki fark ise şekil değiştirmenin ölçüsü olarak kullanılır [29].

$$ds^2 - dS^2 = 2 E_{KL} dX_K dX_L \quad (12)$$

Burada *lagrangien* koordinatlardaki E_{KL} ifadesi

$$2 E_{KL} = \mathbf{G}_K \mathbf{U}_{,L} + \mathbf{G}_L \mathbf{U}_{,K} + \mathbf{U}_{,K} \mathbf{U}_{,L} \quad (13)$$

dir. Son terim doğrusal olmayan terimdir. Açık ifadeler burada verilmeyecektir. Eğer yer değiştirmeler birim vektörler cinsinden yazılarak Ek-1 bölümündeki türev ifadeleri kullanılırsa sonuçlara kolayca ulaşılabilir. Ancak buradan şekil değiştirmelerinin mühendislikteki karşılıklarına ulaşmak yararlı olacaktır. Denklem (12) in sol tarafı çarpanlara ayrılıp yay boyunun karesine bölünürse

$$\frac{ds_N^2 - dS_N^2}{dS_N^2} = \frac{(ds_N - dS_N)(ds_N + dS_N)}{dS_N dS_N} \quad (14)$$

elde edilir. Burada dS_N seçilmiş herhangi bir N doğrultusundaki yay boyudur. Bu keyfi doğrultudaki şekil değişiminin mühendislik tanımının

$$\varepsilon_N = \frac{ds_N - dS_N}{dS_N} \quad (15)$$

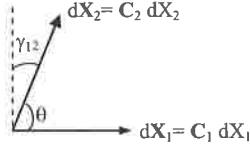
olduğunu düşünürsek $\varepsilon_N \Leftrightarrow E_{NN}$ ilişkisi Denklem (14) ün kullanılması ile

$$\frac{2 E_{NN}}{G_{NN}} = \varepsilon_N \left(\frac{ds_N - dS_N}{dS_N} + \frac{2 dS_N}{dS_N} \right) = \varepsilon_N (\varepsilon_N + 2) = \varepsilon_N^2 + 2\varepsilon_N - \frac{2 E_{NN}}{G_{NN}} = 0 \quad (16)$$

aşağıdaki gibi kurulabilir.

$$\varepsilon_N = \sqrt{1 + \frac{2 E_{NN}}{G_{NN}}} - 1 \cong \frac{E_{NN}}{G_{NN}} \quad (17)$$

Şekil 4 de dik doğrultular arasındaki γ_{12} açısı değişiminin mühendislikteki kayma tanımı olduğu hatırlanırsa



Şekil 4

$$\cos \theta \cong \gamma_{KL} = \frac{d\mathbf{x}_K \cdot d\mathbf{x}_L}{d\mathbf{x}_K d\mathbf{x}_L} = \frac{C_1 C_2}{\sqrt{C_{KK}} \sqrt{C_{LL}}} \quad (18)$$

elde edilir. Kordinat takımı ortogonal ise $G_{12} = 0$ olduğundan

$$\gamma_{KL} = \frac{2 E_{KL}}{G_K G_L} \quad (19)$$

keyfi bir kabukta ortogonal koordinat takımı kullanılmak üzere mühendislikte kullanılan doğrusal kinematik bağıntılar,

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{G_1} \left[U_{,1}^1 + U^2 \frac{A_{1,2}}{A_2} + U^3 \frac{A_1}{R_1} \right] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{G_2} \left[U_{,2}^2 + U^1 \frac{A_{2,1}}{A_1} + U^3 \frac{A_2}{R_2} \right], \quad \varepsilon_3 = \frac{\partial U^3}{\partial z} \\ \gamma_{13} &= \frac{U_{,1}^3}{G_1} + G_1 \left(\frac{U^1}{G_1} \right)_{,3}, \quad \gamma_{23} = \frac{U_{,2}^3}{G_2} + G_2 \left(\frac{U^2}{G_2} \right)_{,3} \\ \gamma_{12} &= \frac{G_2}{G_1} \left(\frac{U^2}{G_2} \right)_{,1} + \frac{G_1}{G_2} \left(\frac{U^1}{G_1} \right)_{,2} \end{aligned} \quad (20)$$

şeklinde elde edilebilir. Doğrusal olmayan kinematik bağıntılar benzer olarak denklem (13) ün üçüncü teriminden üretilebilir.

KABUK TEORİSİ

Yerdeğiştirme ve Şekil değiştirme bağıntıları

Kabuğun herhangi bir noktasındaki yerdeğiştirmesi

$$\begin{aligned} U(\alpha, \beta, z) &= u(\alpha, \beta) + \beta_1(\alpha, \beta) z + \gamma_1(\alpha, \beta) F_1(z) \\ V(\alpha, \beta, z) &= v(\alpha, \beta) + \beta_2(\alpha, \beta) z + \gamma_2(\alpha, \beta) F_2(z) \\ W(\alpha, \beta, z) &= w(\alpha, \beta) \end{aligned} \quad (21)$$

ile tanımlanabilir. Burada u , v , w kabuk ortalama yüzeyinin α , β doğrultularındaki yerdeğiştirmeleri göstermektedir. β_1 , ve β_2 dönmeleri, γ_1 , γ_2 kabuğun asal en kesitlerin kaymalarıdır. β_1 , ve β_2 dönmelerini, klasik ince kabuk teorilerinde olduğu gibi kayma meydana getirmeyen diye tanımlanabilir. Burada

$$\beta_1 = \frac{u}{R_1} - \frac{1}{A_1} w_{,\alpha} \quad \beta_2 = \frac{v}{R_2} - \frac{1}{A_2} w_{,\beta} \quad (22)$$

dir. Kabuk yüzey sınır koşullarını sağlamak üzere $F_1(z)$ ve $F_2(z)$ aşağıda gösterildiği gibi seçilmiştir.

$$F_1(z) = H_1 f(z) \quad F_2(z) = H_2 f(z) \quad (23)$$

Burada H_1 , H_2 ve $f(z)$

$$H_1 = 1 + \frac{z}{R_1} \quad H_2 = 1 + \frac{z}{R_2} \quad f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (24)$$

gibi tarif edilebilir. Benzer fonksiyonlar Bhimaradda ve diğ. [30] tarafından genel dönel kabuklar için kullanılmıştır.

Lateral kayma ifadelerinde U ve V için sadece yeni, terimler alınırsa[11]

$$U(\alpha, \beta, z) = \gamma_1(\alpha, \beta) F_1(z) \quad , \quad V(\alpha, \beta, z) = \gamma_2(\alpha, \beta) F_2(z) \quad (25)$$

lateral kayma değerleri genel kabuklar için aşağıdaki ifadelere ulaşır.

$$\gamma_{1n} = \gamma_1 H_1 \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \quad \gamma_{2n} = \gamma_2 H_2 \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \quad (26)$$

Bu değerler sınır koşullarını sağladığı gibi $z = 0$ da γ_1 ve γ_2 maksimum değerlerine ulaşır.

GERİLMELER, İÇ KUVVETLER, ve DENGİ DENKLEMLERİ

Hooke kanunu ile gerilme ve şekil değiştirme bağıntıları aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2} \{ \varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2 \} \quad , \quad \sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2} \{ \varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1 \} \quad (27)$$

$$\tau_{1n} = G \gamma_{1n} \quad , \quad \tau_{2n} = G \gamma_{2n} \quad , \quad \tau_{12} = G \gamma_{12}$$

Orta yüzeyin birim uzunluğuna etki eden iç kuvvetler,

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_{12} \\ Q_1 \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) dz \quad , \quad \begin{Bmatrix} N_2 \\ N_{21} \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{22} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} \left(1 + \frac{z}{R_1} \right) dz \quad (28)$$

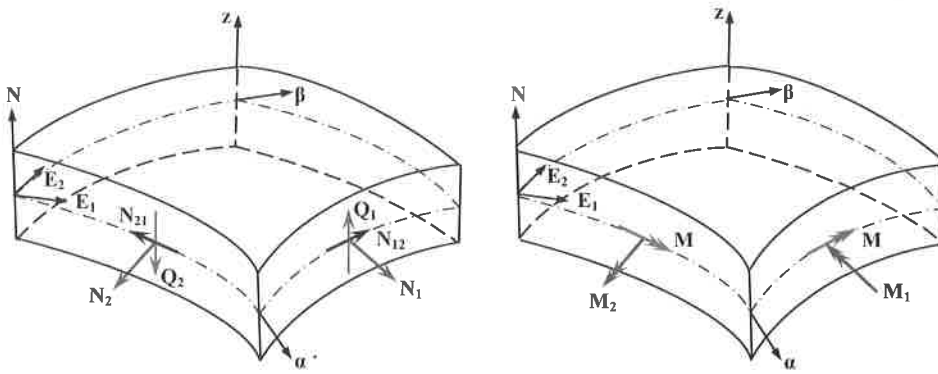
$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_{12} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} z \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) dz \quad , \quad \begin{Bmatrix} M_2 \\ M_{21} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{21} \end{Bmatrix} z \left(1 + \frac{z}{R_1} \right) dz$$

şeklinde elde edilir. Burada sonlu eleman formülasyonunda indislerden kurtulmak için aşağıda gösterilen simgeler kullanılacaktır.

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_{12} \\ Q_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ L_1 \\ S \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} N_2 \\ N_{21} \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N \\ L_2 \\ Q \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K \\ T_1 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} M_2 \\ M_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M \\ T_2 \end{Bmatrix} \quad (29)$$

Kuvvet yer değiştirme ilişkilerine burada ihtiyaç olmadığı için integral ifadeler burada verilmemiştir.

Şekil 5 deki iç kuvvetler ve dış yükler altında kabuk elemanının orta yüzeyine etki eden iç kuvvetler ve momentler vektörel olarak ifade edilecektir. İç kuvvetlere ait vektörel ifade



Şekil 5 Kabuk elemanda pozitif kuvvet ve moment bileşenleri

$$\frac{\partial T_1}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial T_2}{\partial \beta} d\beta + q A_1 A_2 d\alpha d\beta = 0$$

$$T_1 = (N_1 E_1 + N_{12} E_2 + Q_1 N) A_2 d\beta$$

$$T_2 = (N_{21} E_1 + N_2 E_2 + Q_2 N) A_1 d\alpha$$

(30)

şeklindedir. Açık biçimleri yazılırsa,

$$\frac{\partial(N_1 A_2)}{\partial \alpha} + A_{1,2} N_{12} + \frac{\partial(N_{21} A_1)}{\partial \beta} - A_{2,1} N_2 + A_1 A_2 \left(\frac{Q_1}{R_1} + q_1 \right) = 0$$

$$-A_{1,2} N_1 + \frac{\partial(N_2 A_1)}{\partial \beta} + A_{2,1} N_{21} + \frac{\partial(A_2 N_{12})}{\partial \alpha} + A_1 A_2 \left(\frac{Q_2}{R_2} + q_2 \right) = 0$$

(31)

$$\frac{\partial(A_2 Q_1)}{\partial \alpha} + \frac{\partial(A_1 Q_2)}{\partial \beta} - A_1 A_2 \left(\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} \right) + A_1 A_2 q_3 = 0$$

şeklinde elde edilir. Burada İlk endis, kuvvetin etkidiği normalin paralel olduğu eksen, ikincisi kendisinin paralel olduğu eksen gösterir. Kuvvetlerin işaret kuralı ise, sol kesite etkiyen kuvvetler eksenlerle çakışmaz ise, sağ kesite etkiyenler eksenlerle çakışırsa pozitifdir.

Moment vektörüne ait ifade,

$$\frac{\partial \mathbf{M}_1}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \mathbf{M}_2}{\partial \beta} d\beta - (\mathbf{T}_1 \times \mathbf{E}_1) A_1 d\alpha - (\mathbf{T}_2 \times \mathbf{E}_2) A_2 d\beta = 0$$

$$\mathbf{M}_1 = (M_1 \mathbf{E}_2 - M_{12} \mathbf{E}_1) A_2 d\beta$$

$$\mathbf{M}_2 = (-M_2 \mathbf{E}_1 + M_{21} \mathbf{E}_2) A_1 d\alpha \quad (32)$$

şeklinde. Açık biçimleri yazılırsa,

$$\frac{\partial (M_{12} A_2)}{\partial \alpha} - A_{1,2} M_1 + \frac{\partial (M_2 A_1)}{\partial \beta} + A_{2,1} M_{21} - Q_2 A_1 A_2 = 0$$

$$\frac{\partial (M_1 A_2)}{\partial \alpha} + A_{1,2} M_{12} + \frac{\partial (M_{21} A_1)}{\partial \beta} - A_{2,1} M_2 - Q_1 A_1 A_2 = 0 \quad (33)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $z > 0$ için $\tau_{\alpha\beta} > 0$ ise M_{12} pozitifdir.

KEYFİ GEOMETRİYE SAHİP KABUKLARA AİT FONKSİYONEL

Alan Denklemleri ve Fonksiyonelin Elde Edilmesi

Daha önceki bölümde sözü edilen sekiz kinematik ve beş denge denkleminin yanı sıra kabuğun dinamik ve geometrik sınır koşulları,

$$-\mathbf{R} + \hat{\mathbf{R}} = 0, \quad -\mathbf{M} + \hat{\mathbf{M}} = 0, \quad \mathbf{\Omega} - \hat{\mathbf{\Omega}} = 0, \quad \mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}} = 0 \quad (34)$$

şeklinde sembolik olarak yazılabilir. Sınır koşullarının açık ifadeleri varyasyonel işlemler sonunda elde edilecektir. (34) denklemindeki şapkalı terimler sırasıyla sınırlarda bilinen $\mathbf{R}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{\Omega}$, $\mathbf{u}$ kuvvet, moment, dönme, ve yerdeğiştirme vektörlerine karşı gelmektedir.

Kabuklar için sınır koşullarını da içerecek şekilde alan denklemleri operatör formda yazılabilir.

$$\mathbf{Q} = \mathbf{L} \mathbf{y} - \mathbf{f} \quad (35)$$

$\mathbf{Q}$ operatörü, burada verilmeyecektir. Amaç yöntem hakkında fikir vermektir. İsteyen okuyucular için en basit çubuk probleminden genel kabuklara kadar değişik problemler için kaynakta verilen çalışmalar önerilir. Bu çalışmada kabuklar için elde edilen fonksiyonelin bütün yapı mekaniği problemlerinde kullanılabileceğini gösterdikten sonra fonksiyonelin kullanımını açıklamak olacaktır. Amaca uygun *Gâteaux diferansiyeli* metodu kullanılmıştır. Bu metoda ait geniş kullanımı ve açıklamaları [14] de yer almaktadır. Burada basitlik için temel kavram ve tanımları verilecektir. $\mathbf{Q}$ operatörünün *Gâteaux türevi* şu şekilde tanımlanmaktadır [12],

$$d\mathbf{Q}(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}) = \left. \frac{\partial \mathbf{Q}(\mathbf{y} + \tau \bar{\mathbf{y}})}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} \quad (36)$$

Burada τ bir skalerdir. Eğer $\mathbf{Q}$ sürekli bir operatörse ve $\langle d\mathbf{Q}(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}) \rangle$ gibi Gâteaux diferansiyeli varsa ve

$$\langle d\mathbf{Q}(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}), \mathbf{y}^* \rangle = \langle d\mathbf{Q}(\mathbf{y}, \mathbf{y}^*), \bar{\mathbf{y}} \rangle \quad (37)$$

eşitliği sağlanıyorsa $\mathbf{Q}$ operatörü potansiyeldir. Burada parantez içerisindeki ifadeler iç çarpımı göstermektedir. Bu tanım kullanılarak iç çarpımlar yapılırsa denklem (35) deki $\mathbf{Q}$ operatörünün potansiyel olduğu görülür ve sınır koşulları da;

$$\begin{aligned} [\mathbf{R}, \mathbf{u}] &= [A_1 L, u]_\beta + [A_2 P, u]_\alpha + [A_2 L, v]_\alpha + [A_1 N, v]_\beta + [A_2 S, w]_\alpha + [A_1 Q, w]_\beta \\ [\mathbf{M}, \Omega] &= [A_2 K, \Omega_1]_\alpha + [A_1 T, \Omega_1]_\beta + [A_2 T, \Omega_2]_\alpha + [A_1 M, \Omega_2]_\beta + [A_2 S, w]_\alpha + [A_1 Q, w]_\beta \end{aligned} \quad (38)$$

şeklinde elde edilir. Sınır koşulları mekanik açıdan önemlidir. Bütün bu terimler sınır kuvvetleri tarafından yapılan işi tanımlamaktadır. Bu durumda alan denklemlerine karşı gelen I fonksiyoneli

$$I(\mathbf{y}) = \int_0^1 [\mathbf{Q}(s\mathbf{y}), \mathbf{y}] ds \quad (39)$$

şeklinde hesaplanabilir [12]. Burada s bir skalerdir.

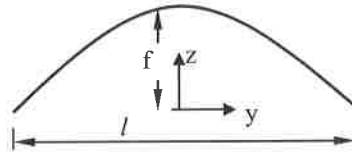
$$\begin{aligned} \mathbf{I}(\mathbf{y}) &= -[A_2 u_{,\alpha}, P] - [u_{,\beta}, A_1 L] - [A_{2,\alpha} u, N] + [A_{1,\beta} L, u] \\ &\quad - [S, A_2 w_{,\alpha}] - [A_2 L, v_{,\alpha}] + [A_{2,\alpha} L, v] + \left\langle S, \frac{u}{R_1} \right\rangle - \langle S, \Omega_1 \rangle \\ &\quad - [A_1 N, v_{,\beta}] - [P A_{1,\beta}, v] - [Q, A_1 w_{,\beta}] - \langle Q, \Omega_2 \rangle + \left\langle Q, \frac{v}{R_2} \right\rangle - \left\langle \frac{P}{R_1}, w \right\rangle \\ &\quad - \left\langle \frac{N}{R_2}, w \right\rangle + \langle q_1, u \rangle + \langle q_2, v \rangle + \langle q_n, w \rangle - [A_2 K, \Omega_{1,\alpha}] + [A_{1,\beta} \Omega_1, T] \\ &\quad - [A_1 T, \Omega_{1,\beta}] - [M A_{2,\alpha}, \Omega_1] - [A_2 \Omega_{2,\alpha}, T] - [A_1 \Omega_{2,\beta}, M] \\ &\quad - [K A_{1,\beta}, \Omega_2] + \frac{1}{B(1-\nu^2)} \left\{ \frac{1}{2} \langle P, P \rangle - \nu \langle P, N \rangle + \frac{1}{2} \langle N, N \rangle \right\} \\ &\quad + [T A_{2,\alpha}, \Omega_2] + \frac{1}{D(1-\nu^2)} \left\{ \frac{1}{2} \langle K, K \rangle - \nu \langle K, M \rangle + \frac{1}{2} \langle M, M \rangle \right\} \\ &\quad + \frac{1}{B(1-\nu)} \langle L, L \rangle + \frac{1}{D(1-\nu)} \langle T, T \rangle + \frac{6}{5B(1-\nu)} \{ \langle S, S \rangle + \langle Q, Q \rangle \} \\ &\quad + [\mathbf{R}, (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}})]_\epsilon + [\mathbf{M}, (\Omega - \hat{\Omega})]_\epsilon + [\hat{\mathbf{R}}, \mathbf{u}]_\sigma + [\hat{\mathbf{M}}, \Omega]_\sigma \end{aligned} \quad (40)$$

Bu çalışmada alan denklemlerine karşı gelen *keyfi geometriye sahip kabuklar* için geçerli olan fonksiyonel elde edilmiştir. Yukarıdaki fonksiyonelden görüldüğü üzere herhangi bir yapının geometrisi belli ise (A_1, A_2) baz vektörleri büyüklükleri ile (R_1, R_2) eğrilik yarıçaplarının bilinmesi yeterli olacaktır.

UYGULAMALAR

Bu bölümde geliştirilmiş olan keyfi geometriye sahip kabuklar için elde edilen fonksiyonelin, genel anlamda çubuk, plak ve kabuk problemlerine uygulanmasına ait örnekler incelenmiştir. Parabolik geometri mühendislik uygulamalarında sıkça kullanılmasından dolayı Parabolik silindirik (PRSH52) kabuk elemanı ile çubuk, plak ve kabuk problemleri çözülmüş ve daha sonra dairesel silindirik (CRSH52) kabuk elemanına ait örneklerin çözümleri verilmiştir.

Şekil 6 de gösterildiği gibi f parabolün sarkması, ℓ parabolün açıklığı olmak üzere $m = f/\ell$ oranı parabolün basıklığını göstermektedir. Basıklık oranı m azaldıkça parabolik silindirik kabuk, bir plağa, ve parabolik kiriş de doğru eksenli bir kirişe dönüşmektedir.



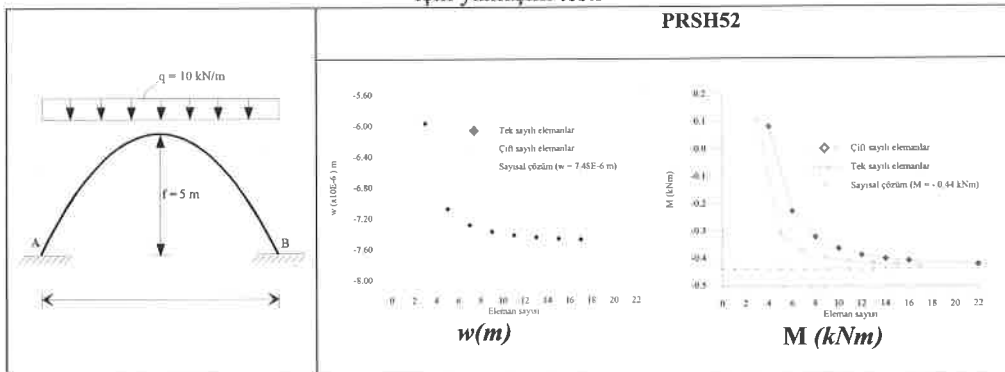
Şekil 6 Parabolün geometrisi

Şekil 6 de gösterildiği gibi doğru eksenli kiriş ile parabolik kirişe ait malzeme özellikleri boyutları ve yükü $E = 20 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, $\ell = 10 \text{ m}$, $h = 0.50 \text{ m}$, $b = 0.20 \text{ m}$, $f = 0.01 \text{ m}$, $q = 10 \text{ kN/m}$ dir. Düzgün yayılı yükle yüklü, iki ucu ankastre (CC), iki ucu basit mesnetli (SS), ve bir ucu ankastre diğer ucu serbest (CF) olan değişik mesnet tiplerine ait maksimum yer değiştirmeler, momentler Tablo 1 ve Tablo 2 de verilmiştir.

Tablo 1. Değişik mesnet tiplerine ait doğru eksenli kirişler

	Mak. çökme $w(m)$		Mak. moment $M (kNm)$	
	PRSH52	Kesin çözüm	PRSH52	Kesin çözüm
CC	1.29×10^{-3}	1.25×10^{-3}	40.955	41.667
SS	6.36×10^{-3}	6.25×10^{-3}	124.8	125
CF	0.60×10^{-1}	0.60×10^{-1}	500	500

Tablo 2. İki ucu ankastre mesnetli parabolik kirişin tepe noktasındaki çökme, moment için yaklaşım testi



Tablo 2 de görüldüğü gibi, tek veya çift sayılı elemanlara bağlı olarak elde edilen sonuçların üstten ve alttan doğru sonuçlara yaklaştığı gözlenmektedir.

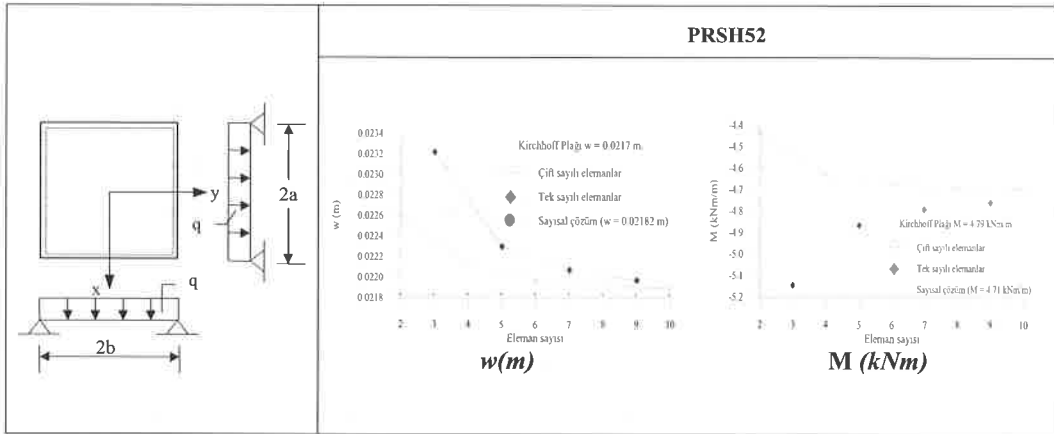
Kenarlarından Basit Mesnetli, Düzgün Yayılı Yüke Maruz Plak

Bu çalışmada geliştirilen PRSH52 kabuk elemanı ile bir çok çalışmada ele alınan dört kenarından basit mesnetli, düzgün yayılı yüke maruz plak çözümü yapılmıştır. Problemin boyutları, yükü ve malzeme özellikleri sırasıyla $2a=2b=10$ m, $f = 0.01$, $h = 0.1$ m, $q = 1$ kPa, $E = 20$ GPa, $\nu = 0.3$ olarak alınmıştır. Eleman sayısı artırılarak yapılan çözümlerde orta noktanın çökme moment değerlerinin kesin çözüme yaklaşımları Tablo 3 de verilmiştir.

Dairesel Silindirik Kabuk

Geliştirilen CRSH52 kabuk elemanın performansı, bir çok mevcut çalışmada çözümü yapılan kabuk çatı probleminde denenmiştir. Çözümü karşılaştırılan diğer örneklerden tamamen kinematik farklılığa sahiptir. Tablo 4 de geometrisi verilen üniform daireSEL silindirik kabuk, $q = 4.393$ kN/m² kendi ağırlığı altında uçlarındaki diyaframlara mesnetlenmiştir. Malzeme özellikleri ve boyutları sırasıyla $\nu = 0.3$, $E = 20$ GPa, $L_x = 15.64$ m, $h=0.0762$ m, $\theta = 40^\circ$ dir.

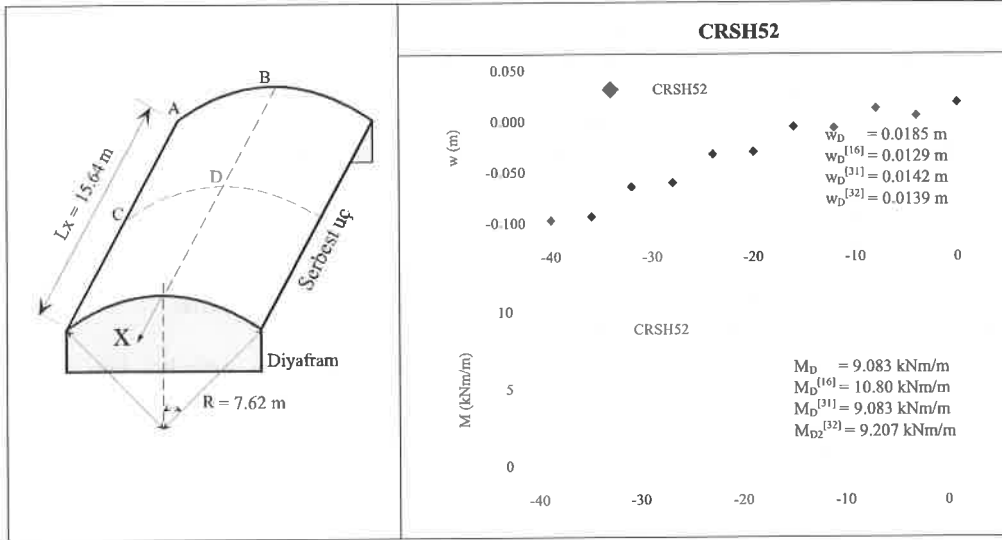
Tablo 3. Kenarlarından basit mesnetli, düzgün yayılı yüke maruz Plak



Elde edilen bu formülasyon titreşim problemlerine de uygundur. Bunlara ait örnek çözümleri

Dört kenarından basit mesnetli (SSSS) ve bir kenarı ankastre diğer kenarları serbest(CFFF) olan kare plak için titreşim analizi yapılmıştır. Malzemenin geometrik özellikleri $E = 20$ GPa, $\nu = 0.30$, $L = 2a = 2b = 10$ m, $f = 0.01$ m ve $\rho = 2400$ kg/m³ olarak alınmıştır. Geliştirilen programın sonuçları Leissa [23] tarafından elde edilen analitik sonuçlarla, ve Gâteaux diferansiyeli metodu kullanılarak yapılan çözümlerle karşılaştırılmıştır [16,24]. Frekans parametreleri Tablo 5 de de verilmiştir.

Tablo 4. Uçlarından diyafram olarak mesnetlenmiş dairesel silindirik kabuğun CD boyunca yerdeğiştirme ve iç kuvvetlerin değişimi



Tablo 5 SSSS ve CFFF kare plak için frekans parametreleri $\omega_{mn} = \omega_{mn} L^2 \sqrt{\rho h/D}$

Frekans Parametreleri	PRSH52 Mod şekilleri	Referans Çözümler
SSSS ω_{11}	19.774	19.738 [33] 19.911 [22] 19.703 [34]
SSSS ω_{12}	49.088	49.349 [23] 50.112 [17] 49.069 [24]
SSSS ω_{22}	78.340	78.958 [23] 80.090 [17] 78.354 [24]
CSSS ω_{11}	3.472	3.440 [31]
CSSS ω_{22}	21.150	21.090 [31]

SONUÇLAR

- Kabuk teorisindeki mevcut eksiklikleri gidermek üzere çalışmalara gereksinim olduğu inancı ile, ve bu konuda çalışmaya başlayacaklara ışık tutmak umudu ile kabuk şekil değiştirmeleri genel koordinatlarda sürekli ortamlar anlayışı ile açıklanmıştır.
- Lateral kaymaları da içeren genel kabuklara ait fonksiyonelin, genel keyfi kabukların yanı sıra eğrisel çubuklar ve plaklara da sayısal olarak uygulanabildiği gösterilmiştir. Sayısal örneklerle gösterilen fonksiyonelin çok amaçlı kullanımı, teorik olarak ta fonksiyonel daha önce yaptığımız bir çalışmadaki Reissner plakları için elde ettiğimiz fonksiyoneli vermiştir[21].
- Gâteaux türevinin getirdiği avantajlar daha önceki bir yayında genişçe tartışılmıştır [11]. Doğrusal ve doğrusal olmayan problemler için, Kullanılan alan denklemlerinin aynı kaynaktan üretildiğini diğer bir deyişle denklemlerin uyumluluğunu gösterir.
- Sınır koşullarının üretilmesini sağlar.
- Doğrusal çarpım fonksiyonları, tamlık ve süreklilik koşullarını sağladığı için işlem kolaylığı vardır. Bu nedenle kapalı eleman denklemleri kolaylıkla elde edilir.
- Çok doğru sonuçlar verir. Tek elemanla konsol kirişte kesin sonuç alınmıştır [14]. Ayrıca çözümlerin doğru sonuçlara tek ve çift elemanlar için alttan ve üstten yaklaşım yaptığı birçok örnekte gözlenmiştir.
- Kayma kilitlemesi yoktur.
- Kabuk denklemlerinin ortogonal olmayan koordinatlarda yazılması ve bunlara ait fonksiyonelin üretilmesi yararlı olacaktır.
- Üçüncü moment denge denkleminin yürürlüğe konmasını sağlamak, kabuk teorilerindeki aksaklığı gidermesi bakımından yararlı olacaktır.

KAYNAKLAR

- [1] **M. İnan**, Elasto- Mekanikte Başlangıç Değerleri Metodu ve Taşıma Matrisi (İTÜ İnşaat Fakültesi Yayını, İTÜ Kütüphanesi, (1964)
- [2] **V. Cinemre**, Linear Algebra, İTÜ, İnş. Fakültesi Matbaası,(1989)
- [3] **A.Y. Aköz**, 'Enerji Yöntemleri ve Yapı Sistemleri', Birsan Yayınevi,(2005)
- [4] **A. D Keer**,On the derivation of well posed boundary value problem in structural mechanics, Int. J. Solid Structures, Vol.12 pp 1-11,(1975),
- [5] **A.Y. Aköz**, 'Eşdeğer Toplam potansiyel Enerji', XV. Ulusal Mekanik Kongresi, 57-66, 3-7 Eylül, Isparta, (2007).
- [6] **R.W. Clough**, Finite element methods in plane stress analysis, Proceeding Society of Civil Engineers, (1960).
- [7] **K. Washizu** Variational methods in elasticity and plasticity Pergamon Press 1975
- [8] **J. N. Reddy**, An Introduction to The Finite Element Method, McGraw-Hill, International editions. (1985)
- [9] **A.L. Goldenveizer**,,,Theory of Elastic Thin Shells, Pergamon Press, NewYork,(1961).
- [10] **A. J.Morris**, Deficiency in current finite elements for thin shell applications, Int. J. Solids Structures, **9**, 331-346,(1973).

- [11] **A.Y. Aköz, and A. Özütok,**, A functional for shells of arbitrary geometry and a mixed finite element method for parabolic and circular cylindrical shells. *Int. J. For Numer. Meth. Engng.*, **47**, 1933-1981, (2000)
- [12] **J. T. Oden ve. J. N. Reddy**, *Variational Methods in Theoretical Mechanics*, Springer-Verlag, (1976)
- [13] **A. Y. Aköz**, Çubuklar İçin Yeni Enerji Fonksiyonelleri ve Uygulamaları, IV. Ulusal Mekanik Kongresi, Eylül 1985, 100-112, (1985)
- [14] **A. Y. Aköz, M. H Omurtag, ve A.N. Doğruoğlu,**, The mixed finite element formulation for three dimensional bars, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **28**, 225-234. (1991),
- [15] **M. H Omurtag, ve A.Y Aköz**, Mixed finite element formulation of eccentrically stiffened cylindrical shells, *Comp.& Struc.* **42**, 751-768. (1992).
- [16] **M. H Omurtag. ve. A.Y ,Aköz**, Compatible cylindrical shell element for stiffened cylindrical shells in a mixed finite element formulation, *Comp.& Struc.* **49**, 363-370, (1993)
- [17] **M.H. Omurtag, ve A.Y. Aköz**, Isoparametric mixed finite element formulation of orthotropic cylindrical shells, *Computers & Structures*, **55**(5), 915-924., (1995).
- [18] **A.Y. Aköz, ve F. Kadioğlu**, The mixed finite element solution of circular beam on elastic foundation, *Comp.& Struc.* **60**, 643-651. (1996),
- [19] **N. Eratlı, ve A.Y, Aköz** The mixed finite element formulation for the thick plates on elastic foundations, *Comp.& Struc.* **65**, 515-529., (1997).
- [20] **A.Y, Aköz**, Functional for Kármán plates and its application, (In Turkish), VI. National Applied Mechanics Meeting, Kirazlıyayla-Turkey, pp.74-85. (1989,
- [21] **A.Y Aköz, ve N. Eratlı**, A sectorial element based on Reissner plate theory, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol.9, No.6-, 519-540, (2000),
- [22] **M.H Omurtag, A.Özütok, A.Y Aköz, ve Y, Özçelikörs**, Free vibration analysis of Kirchhoff plates resting on elastic foundation by mixed finite element formulation based on Gâteaux differential, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **40**, 295-317, (1997).
- [23] **F. Kadioğlu ve A.Y. Aköz** The mixed finite element for quasi-static and Dynamics analysis of viscoelastic Timoshenko beams, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **44**, 1909-1932, (1999)
- [24] **N. Eratlı**, Free Vibration Analysis of Circular, Annular and Annular Sectorial Plates, *An Bulletin of the Technical University of Istanbul, An Inter disciplinary Journal of Physical and Engineering Sciences.*, **53**(1), 23-49. (2003).
- [25] **N. Eratlı, ve A.Y.Aköz**, Free vibration analysis of Reissner plates by mixed finite element, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol.13, No. 3, 277-298, (2002)
- [26] **H.Kraus**, *Thin elastic shells*, John Wiley & Sons, Inc., New York (1967).
- [27] **V.V. Novozhilov**, *Thin Shell theory*, P. Noordhoff LTD, Groningen. (1964).
- [28] **D.J Struik**, *Differential Geometry*, Addison-Wesley Inc. , (1961)
- [29] **A. C Eringen**, *Mechanics of Continua*, John Wiley & Sons. , (1967)
- [30] **A. Bhimaraddi, A.J. Carr, ve. P.J. Moss**, Shear deformable finite element for the analysis of general shells of revolution, *Comp.& Struc.* **31**, No: 3, 299-308. (1989)
- [31] **W. Altman ve. F. Iguti**, A thin cylindrical shell finite element based on a mixed formulation, *Comp.& Struc.* **6**, 149-155, (1976)
- [32] **M. E. Laursen, M.P. Neilsen, ve M. Gellert**, Application of a new stress finite element to analysis of shell structures, *Comp.& Struc.* **7**, 751-757. (1977)
- [33] **A.W. Leissa**, *Vibration of plates* NASA SP-160., (1969).
- [34] **N, Eratlı, ve A.Y.AKÖZ**, Free vibration analysis of Reissner plates by mixed finite element (1999)

Ek-1

CHRISSTOFFEL SEMBOLLERİ VE VEKTÖR TÜREVLERİ

Şekil değiştirme ifadeleri yer değiştirmelerin türevleri bulunarak elde edilir. Bir vektör baz vektörleri cinsinden ifade edildiği için şekil değiştirmeleri elde etmeden önce baz vektörlerin türevlerini bilmek gerekir. Bir vektörün türevi yine bir vektör olacağı için türev vektörleri baz vektörleri cinsinden aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{1,1} &= \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix} \mathbf{A}_1 + \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix} \mathbf{A}_2 + a \mathbf{N} \\ \mathbf{A}_{1,2} &= \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{Bmatrix} \mathbf{A}_1 + \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{Bmatrix} \mathbf{A}_2 + b \mathbf{N} \\ \mathbf{A}_{2,2} &= \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{Bmatrix} \mathbf{A}_1 + \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{Bmatrix} \mathbf{A}_2 + c \mathbf{N} \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

Burada gösterilen simgelere sadece bilinmeyen sabitler gözü ile bakmamız gerekir. Buradaki

$\begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}$ sabit *j* numaralı değişkenin *k* numaralı değişkene göre türevinin *i* numaralı bileşeni

anlamına gelir. Taşıdığı anlamın dışında sadece bulunması gereken bir sabittir. Buna *II nevi Chirsstoffel sembolü* adı verilir. Bu sabitleri elde etmek için (E.1) bağıntılarının sağ ve sol tarafları sıra ile $\mathbf{A}_1$ ve $\mathbf{A}_2$ vektörleri ile çarpılır. II nevi Chirsstoffel sembolleri $\mathbf{A}_{i,j} \mathbf{A}_k$ vektör çarpımları bilinirse elde edilmiş olur. Bulunması gereken bu çarpıma ise *I nevi Chirsstoffel sembolü* adı verilir ve aşağıdaki gibi köşeli parantez ile gösterilir.

$$[ij, k] = \mathbf{A}_{i,j} \mathbf{A}_k \quad (\text{E.2})$$

I Nevi Chirsstoffel sembolünü bulmak için iki baz vektörünü skaler olarak çarparsak bu bize metrik tansörün *ij* bileşenini verir. Bu metrik bileşenin *k* değişkenine göre türevini alırsak

$$(\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}_j)_{,k} = \mathbf{A}_{ij,k} = \mathbf{A}_{i,k} \mathbf{A}_j + \mathbf{A}_i \mathbf{A}_{j,k} \quad (\text{E.3})$$

Buradan görüldüğü gibi metrik tansör bileşenlerinin türevi iki tane I.Nevi Chirsstoffel sembolününün toplamıdır. Bu özellik kullanılarak

$$[ij, k] = \frac{1}{2} [\mathbf{A}_{ik,j} + \mathbf{A}_{jk,i} - \mathbf{A}_{ij,k}] \quad (\text{E.4})$$

elde edilir. $\mathbf{A}^i$ karşıt baz vektörü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\delta_i^j = \mathbf{A}_i \mathbf{A}^j \quad (\text{E.5})$$

Burada δ_i^j Kronekar deltası adını alır. (*i,j*) değişkenleri birbirine eşit ise (bir) eşit değil ise (sıfır) değerini alır. Baz vektörü türevleri (E.1) soldan ve sağdan bir baz vektörü ile skaler çarpılırsa sol taraf I.nevi Chirsstoffel sembolü olur. Sonra her iki taraf ta $\mathbf{A}^i$ ve $\mathbf{A}^j$ karşıt baz vektörleri ile çarpılırsa

$$[ij, k] = \begin{Bmatrix} l \\ i & j \end{Bmatrix} \mathbf{A}_l \mathbf{A}_k \quad (\text{E.6})$$

elde edilir. Bu da II. Nevi aranan Chirsstoffel sembollerini verir.

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \right\} = [ij, k] A^{kl} \quad (E.7)$$

Burada A^{kl} karşıt baz vektörlere ait metrik tansör bileşenleridir. Metrik tansörler bilinmektedir. (E.5) den I. Christoffel sembolleri

$$\begin{aligned} [11, 1] &= \frac{A_{11,1}}{2} & [11, 2] &= -\frac{A_{11,2}}{2} & [12, 1] &= \frac{A_{11,2}}{2} \\ [12, 2] &= \frac{A_{22,1}}{2} & [22, 1] &= -\frac{A_{22,1}}{2} & [22, 2] &= \frac{A_{22,2}}{2} \end{aligned} \quad (E.8)$$

Olarak elde edilirler. (E.8) den de II. Christoffel sembolünü leri:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{2} \frac{A_{11,1}}{A_{11}} & \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{2} \frac{A_{11,2}}{A_{11}} & \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} &= -\frac{1}{2} \frac{A_{22,1}}{A_{11}} \\ \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} &= -\frac{1}{2} \frac{A_{11,2}}{A_{22}} & \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{2} \frac{A_{22,1}}{A_{22}} & \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{2} \frac{A_{22,2}}{A_{22}} \end{aligned} \quad (E.9)$$

olarak elde edilirler. (E.1) deki a, b, c sembolleri, Gauss-Weingarten bağıntıları olarak bilinen aşağıdaki bağıntılardan bulunur[28]. Bütün işlemler yerine ana fikri belirtmek üzere $\mathbf{N}$ normal vektörün diklik nedeni ile $\mathbf{A}_1$ ile skaler çarpımının sıfır olduğu düşünülüp, bu ifadenin bir parametreye göre türevi alınır

$$\begin{aligned} \mathbf{N} \cdot \mathbf{A}_1 &= 0 \\ (\mathbf{N} \cdot \mathbf{A}_1)_{,1} &= \mathbf{N}_{,1} \cdot \mathbf{A}_1 + \mathbf{N} \cdot \mathbf{A}_{1,1} = 0 \\ \mathbf{N}_{,1} \cdot \mathbf{A}_1 + a &= 0 \rightarrow a = -\mathbf{N}_{,1} \cdot \mathbf{A}_1 \end{aligned} \quad (E.10)$$

bağıntısı bulunur. Şimdi II. Temel kabuk formundan

$$\frac{1}{R} = \frac{\mathbf{N}_{,1} \cdot \mathbf{A}_1 d\alpha^2 + \mathbf{N}_{,2} \cdot \mathbf{A}_2 d\beta^2}{A_{11} d\alpha^2 + A_{22} d\beta^2} \quad (E.11)$$

$$d\alpha = 1 \quad d\beta = 0, \text{ için } a = -\frac{A_{11}}{R_1} \quad (E.12)$$

elde edilir.

BAZ VEKTÖRLERİNİN TÜREVİ

Bu değişkenler baz vektörünün türevlerinin üçüncü bileşeni oldukları için alarak tablo II.Christoffel Sembol Tablosu

$\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{A_{1,1}}{A_{11}}$	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2} \frac{A_{11,2}}{A_{22}}$	$\begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix} = -\frac{A_{11}}{R_1}$	(E.13)
$\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{A_{11,2}}{A_{11}}$	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{A_{22,1}}{A_{22}}$	0	
$\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2} \frac{A_{22,1}}{A_{11}}$	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{A_{22,2}}{A_{22}}$	$\begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix} = -\frac{A_{22}}{R_2}$	
$\begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{R_1}$	0	0	
0	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{R_2}$	0	

Yer değiştirmelerin fizik bileşenlerini bulmak için birim vektörlerin türevleri önem kazanır. Bu amaçla birim baz vektörlerinin türevleri aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_{1,1} &= -\frac{A_{1,2}}{A_1} \mathbf{E}_2 - \frac{A_1}{R_1} \mathbf{N} \\
 \mathbf{E}_{1,2} &= \frac{A_{2,1}}{A_1} \mathbf{E}_2 \\
 \mathbf{E}_{2,1} &= \frac{A_{1,2}}{A_2} \mathbf{E}_1 \\
 \mathbf{E}_{2,2} &= -\frac{A_{2,1}}{A_1} \mathbf{E}_1 - \frac{A_2}{R_2} \mathbf{N} \\
 \mathbf{N}_1 &= \frac{A_1}{R_1} \mathbf{E}_1 \\
 \mathbf{N}_2 &= \frac{A_2}{R_2} \mathbf{E}_2
 \end{aligned}
 \tag{E.14}$$