

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**SPİN CAMLARINDA ALT KRİTİK BOYUT VE DONMUŞ
OLASILIK DAĞILIMININ ÖLÇEKLENMESİ: ARA
BOYUTLARDA RENORMALİZASYON-GRUBU ÇÖZÜMÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Aşlı TUNCER ÖZDEMİR**

Anabilim Dalı : FİZİK MÜHENDİSLİĞİ

Programı : FİZİK MÜHENDİSLİĞİ

HAZİRAN 2007

**SPİN CAMLARINDA ALT KRİTİK BOYUT VE DONMUŞ
OLASILIK DAĞILIMININ ÖLÇEKLENMESİ: ARA
BOYUTLARDA RENORMALİZASYON-GRUBU ÇÖZÜMÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Aşlı TUNCER ÖZDEMİR
(509041101)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 7 Mayıs 2007
Tezin Savunulduğu Tarih : 11 Haziran 2007**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. A. Nihat BERKER
Diğer Jüri Üyeleri Yard. Dr. Alkan KABAKÇIOĞLU (KOÇ Ü.)
Doç. Dr. Haluk ÖZBEK (İ.T.Ü.)**

HAZİRAN 2007

ÖNSÖZ

Lisans ve yüksek lisans öğrenimim sırasında ve tez çalışmalarım boyunca gösterdiği her türlü destek ve yardımdan dolayı çok değerli hocam Prof.Dr.A.Nihat BERKER'e en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını esirgemeyen aileme teşekkürü borç bilirim.

Haziran, 2007

Aslı TUNCER ÖZDEMİR

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ	iv
SEMBOL LİSTESİ	vi
ÖZET	vii
SUMMARY	viii
1. GİRİŞ	1
2. SPİN CAMI NEDİR ?	2
2.1. Bunalım Nedir ?	2
2.2. Ising Spin Camları	3
2. HİYERARŞİK ÖRGÜLER	4
3.1. Kaotik Spin Camı	5
3.2. Anizotropik Sistemler	6
3.3. Karışık Sistemler	7
3.3.1. Paramanyetik faz evrimi	10
3.3.2. Ferromanyetik faz evrimi	11
3.3.3. Spin camı fazı evrimi	12
4. KULLANILAN HİYERARŞİK MODELLER	13
4.1. Model Set-1	13
4.2. Model Set-2	14
5. SONUÇLAR VE TARTIŞMA	16
KAYNAKLAR	22
EKLER	25
ÖZGEÇMİŞ	26

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1 : Spin Cam – Bunalım Tanımı	3
Şekil 3.1 : Hiyerarşik Model. Burada uzunluk ölçeklenme faktörü, $b = 2$, hacim ölçeklenme faktörü $b^d = 6$ 'dır. Modelin boyutu ise $d = \ln 6 / \ln 2$ ve $d = 2,58$ olarak hesaplanır. Ok yönünde kurulan sistem, ok yönünün tersine hesaplanır	4
Şekil 3.2 : Bunalımlı hiyerarşik model [22].....	5
Şekil 3.3 : Paralel, birbiri içine girmiş iki grafik $d = 2$ boyutlu hiyerarşik örgüyü temsil etmektedir. (K_x, K_y) ikilisinden biri sıfıra götürülürse boyut $d=1$ 'e düşmekte, $K_x = K_y$ durumunda ise iki yöndeki etkileşimler eşit olacağından sistem $d = 2$ boyutta isotropik olacaktır [23]	6
Şekil 3.4 : Renormalizasyon gubu dönüşümü öncesi ve sonrası bağların ve olasılık dağılımlarının durumu.	7
Şekil 3.5 : Desimasyon işlemine örnek. K_{12} ve K_{23} ilk etkileşim değerleri, K' son etkileşim değeri.....	8
Şekil 3.6 : Paramanyetik fazda olasılık dağılımlarının renormalizasyon döngü sayısının artmasıyla evrimleşmesi. Sırasıyla (a), (b) ve (c) grafikleri artan renormalizasyon sayısına karşılık gelen olasılık dağılımlarıdır	10
Şekil 3.7 : Ferromanyetik fazda olasılık dağılımlarının renormalizasyon döngü sayısının artmasıyla evrimleşmesi. Sırasıyla (a), (b) ve (c) grafikleri artan renormalizasyon sayısına karşılık gelen olasılık dağılımlarıdır. Başlangıçta baskın olan taraftaki etkileşime doğru dağılımın evrildiği görülmektedir	11
Şekil 3.8 : Spin camı fazında olasılık dağılımlarının renormalizasyon döngü sayısının artmasıyla evrimleşmesi. Sırasıyla (a), (b) ve (c) grafikleri artan renormalizasyon sayısına karşılık gelen olasılık dağılımlarıdır. Grafik kendi içinde tekrar işleminin sayısı arttıkça iki uçtan K' 'nin $\pm \infty$ yönlerine doğru genişlemektedir.	12
Şekil 4.1 : Kullanılan Hiyerarşik Model Seti-1.(Bu modeller için b , uzunluk ölçeği 3 dür.)	13
Şekil 4.2 : Kullanılan Hiyerarşik Model Seti-2, Model-Set-1'de olduğu gibi b ,uzunluk ölçeği 3 dür.....	14
Şekil 5.1 : Model Set-1 için $d=2.63$ 'te olasılık dağılımının spin-camı fazında evrimleşmesi.....	16
Şekil 5.2 : Model Set-1 için $d=2.63$ 'te olasılık dağılımının paramanyetik fazda evrimleşmesi.....	17
Şekil 5.3 : Her iki model set için 9 ayrı sistem çözüldüğünde elde edilen spin cam geçişi sıcaklığına göre boyut d faz diyagramı. Kesikli çizgiler ile gösterilen eğri model set-1'e; düz çizgi ile gösterilen eğri model set-2' ye aittir. Her iki model set için de spin camı faz geçişinin görülmeye başlandığı alt kritik boyut d_{AK} , 2.63 olarak görülmektedir. Model set-2 deki sistem için spin camı faz	

	geçiş model set-1'e göre daha düşük sıcaklıklarda başlamaktadır. Spin camı faz geçiş sıcaklığına göre boyut d faz diyagramı.	18
Şekil 5.4	: Model set-1 ve Model set-2 de $d=2.63$ için, spin cam geçiş sıcaklığının olasılık p 'ye göre diyagramı. Kesikli çizgi ile gösterilen eğri, Model set-1(d) sistemine; düz çizgi ile gösterilen eğri, Model set-2 (b) sistemine aittir.....	19
Şekil 5.5	: $d = 2.46$ için Model set-1(c)'nin faz diyagramı.....	20
Şekil 5.6	: Her iki model set için çözülen sistemlerde kuyu üsteli y 'nin boyut d 'ye göre faz diyagramı üst üste gelmektedir. Model set-2'deki sistemlerdeki çözümler $d = 2.63, 2.89$ ve 3.09 değerlerine karşılık gelen y değerlerini kapsamaktadır. Grafiğin doğrusal karakteri göz önüne alındığında, kesikli çizgiyle grafik devam ettirildiğinde, d eksenini kestiği noktanın yaklaşık 2.5 değerinde olduğu ve bulunan $d = 2.46$ alt kritik boyutu ile tutarlılık gösterdiği görülmektedir.....	21

SEMBOL LİSTESİ

β	: $1/k_B T$
k_B	: boltzman sabiti
T	: sıcaklık
H	: hamiltonyen
K	: etkileşim sabiti
s	: spin
p	: olasılık
Z	: bölüşüm fonksiyonu
b	: uzunluk ölçekleme faktörü
d	: boyut
y	: kuyu kritik üsteli

SPİN CAMLARINDA ALT KRİTİK BOYUT VE DONMUŞ OLASILIK DAĞILIMININ ÖLÇEKLENMESİ: ARA BOYUTLARDA RENORMALİZASYON - GRUBU ÇÖZÜMÜ

ÖZET

Bu çalışmada Spin Camı Faz Geçişi'nin kaybolduğu alt kritik boyut d_{AK} , 2 ve 3 arası boyutlarda, kesin çözüm kabul eden hiyerarşik örgüler kullanılarak incelenmiştir. Çözülen 9 ayrı sistemin verilerine göre, d_{AK} 'nin 2.46 olduğu belirlenmektedir. Çözümler karışık ferromanyetik ve antiferromanyetik yerel etkileşmelerin dağılımının ölçeklenmesiyle, 200 dağılım niceliğinin renormalizasyon grubu akışlarından çıkarılmıştır.

Çalışmayı iki bölüme ayırmak mümkündür. Birinci bölümde Spin camlar ile ilgili genel bilgiler verildikten sonra, tez içinde, bunalım, hiyerarşik örgüler, ve kaotik spin camlar ile ilgili bilgilerin verildiği bölümler yer alır.

Ara boyutlarda spin camlar için kurulan iki ayrı hiyerarşik model seti tanımlandıktan sonra bu setlere dahil olan farklı boyutlardaki modeller gösterilmiştir. Bu iki ayrı grup modellerinin boyut ve diğer karakteristikleri hakkında bilgi verilmiştir.

Renormalizasyon-Grubu yöntemi kullanılarak yapılan hesaplarda görülen paramanyetik, ferromanyetik ve spin camı fazı hakkında detaylı bilgiler verilmiş, bu teori kullanılarak geliştirilen hesap açıklanmıştır.

Çalışmanın ikinci bölümünde ölçeklenme sonucu elde edilen 200 dağılım niceliğinin renormalizasyon-grubu akışlarından çıkarılan sonuçları, her iki ayrı model sistemi için farklı boyutlarda bulunmuştur. Bu bölümde iki ayrı cins modelin, boyuta göre spin cam geçişi sıcaklığı diyagramı ve diğer sonuçlar yer almaktadır.

Farklı model ve boyut özellikleri için yapılan analizler sonucunda elde edilen değerler, grafiklerle birlikte sunulmuştur. Araştırmacıların bu konu üzerinde yapmış olduğu çalışmalardan elde ettikleri sonuçlara da yer verilmiştir. En son bölümde, yapılan çalışma ile ilgili bir değerlendirme bulunmaktadır.

RESCALING OF LOWER CRITICAL DIMENSION AND FROZEN PROBABILITY DISTRIBUTION FOR SPIN GLASSES: RENORMALISATION-GROUP SOLUTIONS FOR NON-INTEGER DIMENSIONS

SUMMARY

In this study, d_{AK} , which is lower critical dimension of spin glass phase transition, is obtained by using hierarchical lattices between 2 and 3 dimensions. According to solved nine different systems, d_{AK} was obtained as 2.46. The solutions were obtained from renormalization-group flows of 200 distribution quantities.

The study can be separated two sections. In the first section, there is some information about spin glasses, and frustration, hierarchical lattices, chaotic spin glasses parts.

The hieararchical lattices in non-integer dimensions were defined and two different model-sets were setteled.

In calculations of these models by using renormalization-group theory, paramagnetic, ferromagnetic and spin glass phase were defined.

There are some diagrams in last section, and there are some results about some different studies. In this study, the lower critical dimension of spin glass phase transition, d_{AK} is found between 2 and 3 non-integer dimensions by using hierarchical lattices. This lattices have absolute solutions. According to data of 9 different system, the lower critical dimension is found as 2.46 by using renormalisation-group theory. The results is found from renormalisation-group flows of 200 distribution quantities by rescaling distribution of mixed ferromagnetic and antiferromagnetic local interactions.

1. GİRİŞ

Bu çalışmada, tamsayı boyutlarda (d), bilinen çalışmalar doğrultusunda, spin camı fazının kaybolduğu alt kritik boyutun 2 olduğu ve boyutun değerinin 3 olduğu durumda spin camı fazının ortaya çıktığı noktasından hareketle, spin camı fazının 2 ile 3 tamsayı boyut değerleri arası değerlerde gözlenip gözlenemeyeceği, ve eğer spin camı fazı bu ara değerlerde ortaya çıkıyorsa nasıl bir karakteristik gösterdiği incelenmek istenmiştir.

Kurulan hiyerarşik modellerden yararlanılarak, renormalizasyon-grubu yöntemi ile spin camı fazının kaybolduğu alt kritik boyut değerinin, bir ara boyut olan yaklaşık 2.5 olduğu bulunmuştur.

Hesaplamalar için iki ayrı tip hiyerarşik model kullanılmış ve 2 ile 3 arası boyutlarda, birinci tip model, yedi boyut değeri için; ikinci tip model ise dört boyut değeri için çözülmüştür. Çözümler, karışık ferromanyetik ve antiferromanyetik yerel etkileşmelerin dağılımının ölçeklenmesiyle, 200 dağılım niceliğinin renormalizasyon-grubu akışlarından çıkarılmıştır.

Spin camı fazının görülmeye başlandığı ara boyutun her iki tip model için de aynı, 2.63 değerinde, olduğu bulunmuştur. Bu boyut için her iki modelin spin camı faz geçişi eğrisi incelendiğinde, model set-2'de (Şekil 4.2), model set-1'e (Şekil 4.1) göre daha düşük sıcaklık değerlerinde spin camı fazının görülmeye başlandığı gözlenmiştir. Şekil 5.5'te, model set-1 için spin camı fazının kaybolduğu ilk ara boyut değerinde ($d = 2.46$) faz geçiş grafiği elde edilmiştir. Bu model için, boyut değerinin artması durumunda spin camı fazının nasıl ortadan kaybolduğuna ilişkin bir veri elde edilmiştir.

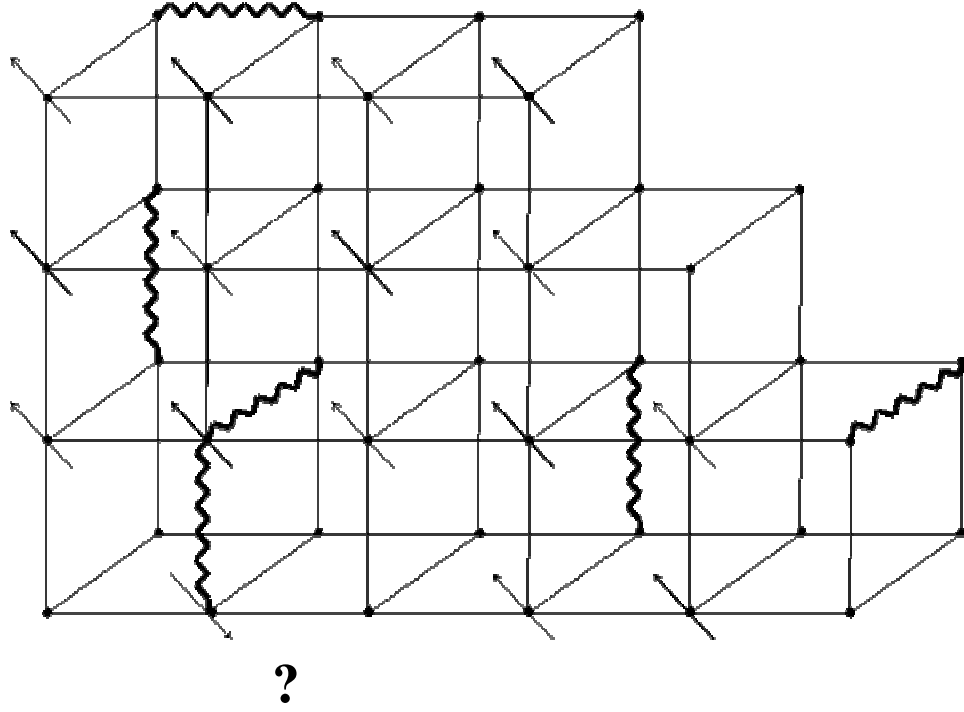
Son olarak, Şekil 5.6'da, her iki model set için de, daha sonra bahsedilecek olan kuyu üsteli y 'nin boyut d ile değişimini gösteren grafik bir doğru olarak elde edilmiş ve bu iki doğrunun üst üste geldiği görülmüştür. Burada grafiğin d eksenini kestiği noktanın 2.5 civarında oluşu yukarıda bahsedilen alt kritik boyut değerini ($d = 2.46$) desteklemektedir.

2. SPİN CAMLARI

Ferromanyetik bağlar arasına rastgele antiferromanyetik bağlar yerleşmesiyle oluşan sistem spinlerin rastgele yönlerde donmaları sonucu bir spin camı sistemidir. Spin camı fazında zamana göre düzen, konumuna göre deterministik bir kaos altında düzensizlik, yani toplamında rastgele donmuşluk vardır. Burada konuma göre bir rastgelelik mevcuttur. Ferromanyetik bağlar arasına yerleşen antiferromanyetik bağlar sistemde ‘bunalım’, kararsız bir durum, oluşturur.

2.1. Bunalım Nedir?

Aşağıdaki kübik örgüde düz çizgiler ferromanyetik bağları, zig-zag çizgiler antiferromanyetik bağları temsil etmektedir. Bir spin ferromanyetik bağ ile bağlı olduğu komşusu ile aynı spin yöneliminde; antiferromanyetik bağ ile bağlı olduğu komşusu ile ters spin yöneliminde enerjiyi düşürür. Spin camlarında, rastgele yerleşen antiferromanyetik bağlar sonucu, aşağıdaki modelde de görüldüğü gibi tüm spinler yerleştirildiğinde soru işaretli noktadaki spin üst ve sağ yan komşuna göre spin-yukarı; sol yan komşusuna göre ise spin-aşağı olmalıdır. Bu durumda temel enerji seviyesinde bir dejenerelik söz konusudur. Buradan yola çıkarak ‘bunalım’ (frustration), bütün bağların tatmin olamaması durumu olarak tanımlanabilir. Temel enerji seviyesine bakıldığında spin-yukarı ve spin-aşağı durumları için aynı değer mevcut olmaktadır. Bu da temel enerji seviyesinde dejenereliği işaret eder.



Şekil 2.1: Spin Cam – Bunalım Tanımı

2.2. Ising Spin Camları

Ising spin camları,

$$-\beta H = \sum_{\langle ij \rangle} K_{ij} s_i s_j \quad (2.1)$$

hamiltonyeni ile tanımlanmakta olup her i noktasında $s_i = \pm 1$ dir . Bağ kuvveti K_{ij} , $1-p$ olasılıkla $+K$ ve p olasılıkla $-K$ değerindedir ve $\langle ij \rangle$ her spin noktası için en yakın komşu spinler üzerinden toplamayı belirtir. Sistem $p = 0$ limiti için tamamen ferromanyetik; $p = 1$ limiti için tamamen antiferromanyetik olmaktadır [1].

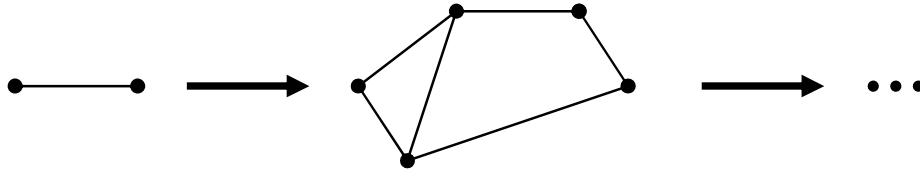
Herhangi bir örgüde alınan bir model için, sistemin n defa ölçeklenmesiyle, $n \rightarrow \infty$ limitinin verilmiş olması durumunda fiziksel sistemin sonuçları bulunur [1]. Ising spin camlarına ilişkin çözülmüş örnek modeller mevcuttur [1]. Son yıllarda yapılan çalışmalarla replika metod, dualite ve simetri argumanları [1-7] kombinasyonu Ising model çözümünde önemli bulgular sağlar.

3. HİYERARŞİK MODELLER

Serbestlik dereceleri arasındaki etkileşime denk gelen bir bond'un (boğuk) veya bir grafiğin kendini, içinde sonsuz kere tekrarlamasıyla oluşan, kesin çözümü olan modellerdir [8-10]. Kurulan model, renormalizasyon-grubu yöntemi ile çözüldüğünde sonsuz sistemin çözümüne ulaşılmış olur. Oluşan sonsuz büyüklükteki sistemin kesin çözümü baştaki bond veya grafik modelin kesin çözümüdür. Örnek olarak bunalım [11], spin-cam [12], random-bond [13] and random-field [14], Schrödinger denklemi [15], örgü-titreşim [16], dinamik ölçeklenme [17], kompleks faz diyagramları [18], direkt-yol [19] ve aperioidik manyetikler [20] vs. hiyerarşik örgülerle çözülebilmektedir.

Hiyerarşik modellerde: b , uzunluk ölçeklenme faktörü, kendini tekrarlayan grafiğin bir ucundan diğer ucuna gidilen en kısa yol üzerindeki bond sayısına eşittir. Hacim ölçeklenme faktörü, b^d , kendini tekrarlayan grafiğin toplam bond sayısıdır.

Buradan d , sistem boyutu aşağıdaki örnekte de görüldüğü gibi hesaplanabilmektedir. Diğer bir taraftan, bir hiyerarşik model bazı sıfır ve sonsuz etkileşimlere de olanak sağlayan sıradan örgü gibi de düşünülebilir [3]. Hiyerarşik model, site-site etkileşimi sıfırdan farklı olduğunda, bir site komşuları üzerinden tüm site'larla etkileşeceğinden, bir dış alana daha duyarlı hale gelir. Böylece paramanyetik fazda, sonsuz sıcaklık hariç tüm sıcaklık değerlerinde sonsuz duyarlılık (susceptibility) görülür [3, 21].



Şekil 3.1: Hiyerarşik Model. $b = 2$, $b^d = 6$ 'dır. Boyut $d = 2,58$ Olarak Hesaplanır.

Burada uzunluk ölçeklenme faktörü iki spin noktasını birleştirdiğinden dolayı, 2 değerini alır. Ok yönünde sistem kurulurken bir sonraki adımda spin noktalarını bağlayan toplam bağ sayısının 6 olduğu görülür. Buradan hacim ölçeklenme faktörü 6'dır. Sistemin boyutu ise $d=2,58$ olarak kolaylıkla hesaplanabilmektedir.

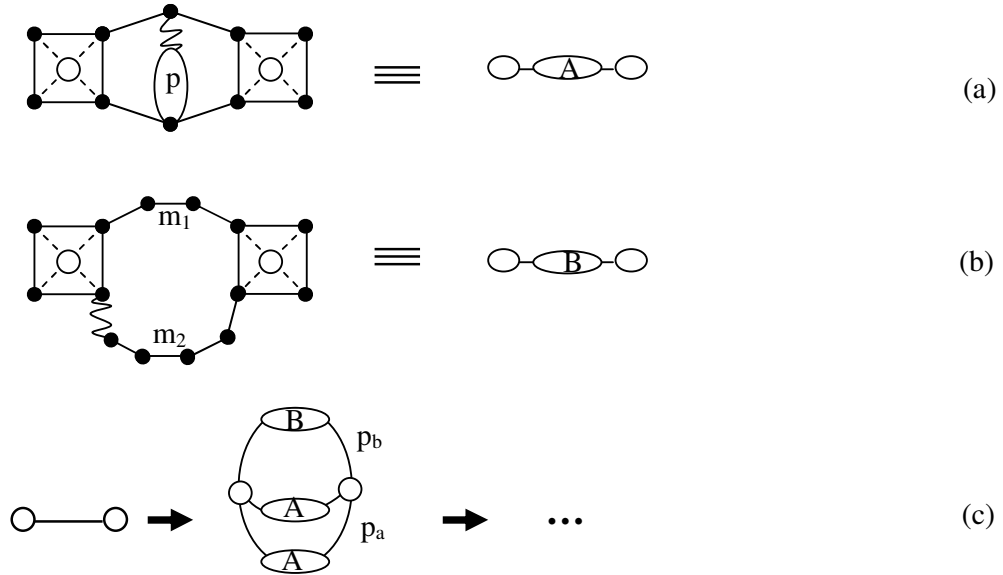
Şekil 3.1’de de görüldüğü gibi ok yönünde kurulan hiyerarşik sistem, ok yönünün tersi yönünde hesaplanır.

3.1. Kaotik Spin Camları

Aşağıdaki örnekte görülen bunalımlı hiyerarşik modelde, her nokta (site), $s_i = \pm 1$ Ising serbestlik derecesine sahiptir. Düz çizgiler ferromanyetik etkileşimleri $-\beta H_{ij} = K s_i s_j$, dalgalı çizgiler, bunalıma sebep olan sonsuz antiferromanyetik etkileşimleri göstermektedir. Kesikli çizgiler, projeksiyon operatörünü temsil etmektedir. Şekil 3.2 (a)’da ve (b)’deki birimler gerçek spin camlarındaki farklı mikroskopik geometrilere karşılık gelirler. p_a ve p_b nin kendini paralel biçimde bağlarla tekrar etmesi sonucu oluşan (c)’nin, p_a ’nın veya m_1 ile temsil olan temel durum dejenereliğinin artmasıyla düzensizliğe eğilimi artabilmektedir. Buradan efektif boyut,

$$d = \ln [p_a(12 + p) + p_b(8 + m_1 + m_2)] / \ln 3 \quad (3.1)$$

şeklinde artar [22].



Şekil 3.2: Bunalımlı Hiyerarşik Model [22]

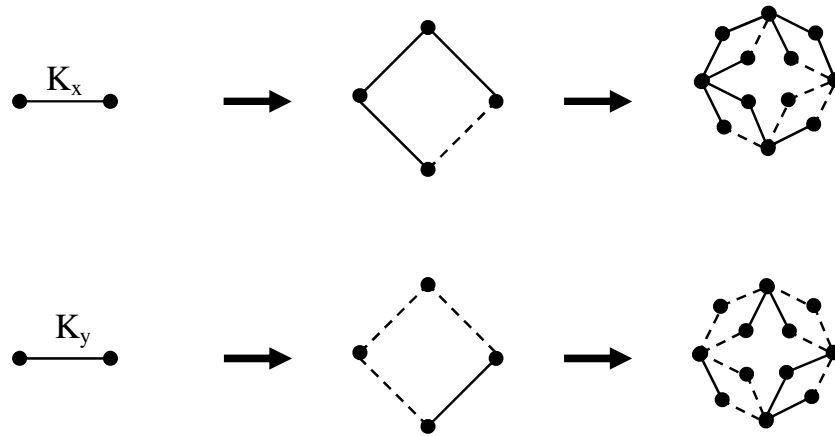
Düzensizliğe eğilim arttıkça kaotik renormalizasyon-grup yörünge (trajectory) ortaya çıkar. Bir ölçekten bakıldığında farklı başka bir ölçekte farklı gözlenen kaotik spin camına rastlanır.

3.2. Anizotropik Sistemler

Anizotropik hiyerarşik modellerle temsil edilen anizotropik sistemlerin, kuruluş yönüne zıt yönde desimasyon (seyreltme) yapılarak elde edilen tekrarlama bağıntıları ile renormalizasyon-grubu yöntemi kesin çözümü yapılabilmektedir.

Bir yönde anizotropi (uniaxial) ve tam anizotropi her yön boyunca farklı bağların bulunması durumunda görünür. Ising manyetikler (mıknatıslar), XY manyetikler ve perkolasyon (sızma) sistemler anizotropik olmaları durumunda, farklı yönlerde farklı bağlara sahiptirler ve renormalizasyon grubu yöntemiyle çözülerek, bu sistemlerin global faz diyagramları, kübik bir kare örgü için elde edilebilmektedir [23, 24, Ek1].

Aşağıdaki örnek sistemde görülen K_x ve K_y etkileşimleri sırasıyla düz çizgilerle gösterilen ferromanyetik etkileşimleri ve kesikli çizgilerle gösterilen antiferromanyetik etkileşimleri temsil etmektedirler. Başlangıçta $d = 2$ boyutlu (x ve y yönlerinde) olan sistem, $K_x = 0$ veya $K_y = 0$ limitinde tek yönde etkileşmeye sahip olacak ve bir boyuta düşecektir. Etkileşmelerin birbirine eşit olması durumunda ise sistem, iki boyutlu izotropik sisteme dönüşür.

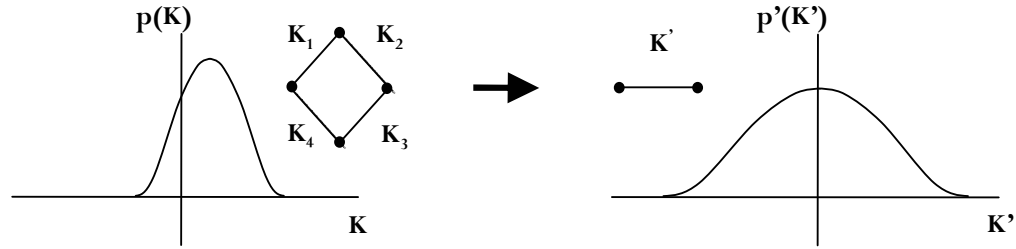


Şekil 3.3: Paralel, Birbiri İçine Girmiş İki Grafik $d = 2$ Boyutlu Hiyerarşik Örgüyü Temsil Etmektedir. (K_x, K_y) İkilisinden Biri Sıfıra Götürülürse Boyut $d=1$ 'e Düşmekte, $K_x = K_y$ Durumunda ise İki Yöndeki Etkileşmeler Eşit Olacağından Sistem $d = 2$ Boyutta İzotropik Olacaktır [23].

3.3. Karışık Sistemler

Donmuş rastgele bağların katıldığı sistem karışık sistem olarak anılmaktadır. Burada renormalizasyon grubu dönüşümü yapılmadan önce sistemdeki etkileşimler aşağıdaki örnek modelde K_1 , K_2 , K_3 , K_4 şeklinde gösterilmiştir. Rastgeleliğin olasılığı renormalizasyon grubu dönüşümü öncesinde, K_i bağlarının olasılık dağılımı $p(K_i)$ ile gösterilmiştir. Hiyerarşik örgü oluşturulması işlemine ters olarak her bir grafik yerine renormalize olmuş yeni bağ gelmektedir. Bu durumda K' renormalizasyon sonrası etkileşimi gösterdiği gibi $p'(K')$ de bu durumdaki olasılık dağılımını gösterir.

Şekil 3.4 'de de görüldüğü gibi dağılım renormalizasyon grubu dönüşümüyle değişmektedir.



Şekil 3.4: Renormalizasyon Grubu Dönüşümü Öncesi ve Sonrası Bağların ve Olasılık Dağılımlarının Durumu.

Renormalizasyon grubu dönüşümü öncesi, K_1 , K_2 , K_3 , K_4 ve sonrası K' bağ değerleri arasında $K' = R(K_1, K_2, K_3, K_4)$ şeklinde bir ilişki bulunmaktadır. Yerel tekraralama bağıntısı,

$$K'_{ij} = R(\{K_{ij}\}) \quad (3.2)$$

şeklinde daha genel olarak tanımlanabilir. Saf sistemlerde K , i ve j ye bağlı değildir. Bunun yanında, olasılık dağılımları arasındaki ilişki renormalize sistemin yeni dağılımı renormalizasyon dönüşümü öncesi sistemin $P(K_{ij})$ değerine bağlı olarak aşağıdaki gibidir:

$$P'(K'_{ij}) = \int \left[\prod_{ij}^{i'j'} dK_{ij} P(K_{ij}) \right] \delta(K'_{ij} - R(\{K_{ij}\})). \quad (3.3)$$

Spin camı probleminde, başlangıç dağılımı biri 1-p olasılıkla K'da, diğeri p olasılıkla -K'da iki histogramın birleşimidir.

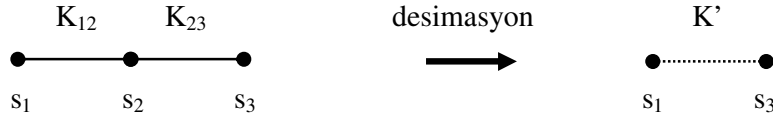
Bond kümelerini veya bondları paralel birleştirme işlemi için 'bond-moving', R_{bm} ; bondları ucuca ekleme için 'decimation', R_{dc} işlemi uygulanmaktadır.

$$R_{bm}(K_{i_1 j_1}, K_{i_2 j_2}) = K_{i_1 j_1} + K_{i_2 j_2} \quad (3.4)$$

İki bond arasındaki 'bond-moving' ilişkisi yukarıdaki şekilde ifade edilmekte olup, etkileşim ifadesi,

$$\tilde{K}_{ij} = \sum_{n=1}^{b^{d-1}} K_{i_n j_n} \quad (3.5)$$

dir. İki bond arasındaki 'decimation' ilişkisi için aşağıdaki örnekten yararlanılırsa,



s_2 spini üzerinden toplam yapılarak, oluşan yeni durumda aradaki etkileşim değeri (K) de değişmiştir. s_1 , s_2 ve s_3 değerleri başlangıç için ± 1 değerinde olsun. Buradan Z ve Z' aşağıda gösterilmekte olup, sırasıyla desimasyon öncesi ve sonrası bölüşüm fonksiyonunu göstermektedir.

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\{s_2\}} e^{-\beta H} = \sum_{\{s_2\}} e^{-\sum_{\langle ij \rangle} K_{ij} s_i s_j} = \sum_{\{s_2\}} e^{-[K_{12} s_1 s_2 + K_{23} s_2 s_3]} \\ &= e^{-[K_{12} s_1 + K_{23} s_3]} + e^{-[-K_{12} s_1 - K_{23} s_3]} \end{aligned}$$

$$Z' = e^{K' s_1 s_3},$$

renormalizasyon-grubu kuramına göre desimasyon sonrasında bölüşüm fonksiyonu değişmez kalır. Buna göre,

$$Z = Z',$$

eşitliğinden hareketle, s_1 ve s_2 değerleri için dört olası durum aşağıda gösterilmektedir.

$$R(+, +) = e^{-[K_{12}+K_{23}]} + e^{-[-K_{12}-K_{23}]} = e^{-K'}$$

$$R(+, -) = e^{-[K_{12}-K_{23}]} + e^{-[-K_{12}+K_{23}]} = e^{K'}$$

$$R(-, +) = e^{-[-K_{12}+K_{23}]} + e^{-[+K_{12}-K_{23}]} = e^{K'}$$

$$R(-, -) = e^{-[-K_{12}-K_{23}]} + e^{-[+K_{12}+K_{23}]} = e^{-K'}$$

$$\frac{R(+, +)}{R(+, -)} = \frac{2 \cosh(K_{12} + K_{23})}{2 \cosh(K_{12} - K_{23})} = e^{-2K'},$$

yukarıdaki oranlama için gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$K' = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\cosh(K_{12} + K_{23})}{\cosh(K_{12} - K_{23})} \right]$$

ifadesi elde edilir. Aşağıda desimasyon için daha genel bir ifade verilmektedir.

$$R_{dc}(K_{i_1 j_1}, K_{i_2 j_2}) = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{\cosh(K_{i_1 j_1} + K_{i_2 j_2})}{\cosh(K_{i_1 j_1} - K_{i_2 j_2})} \right] \quad (3.6)$$

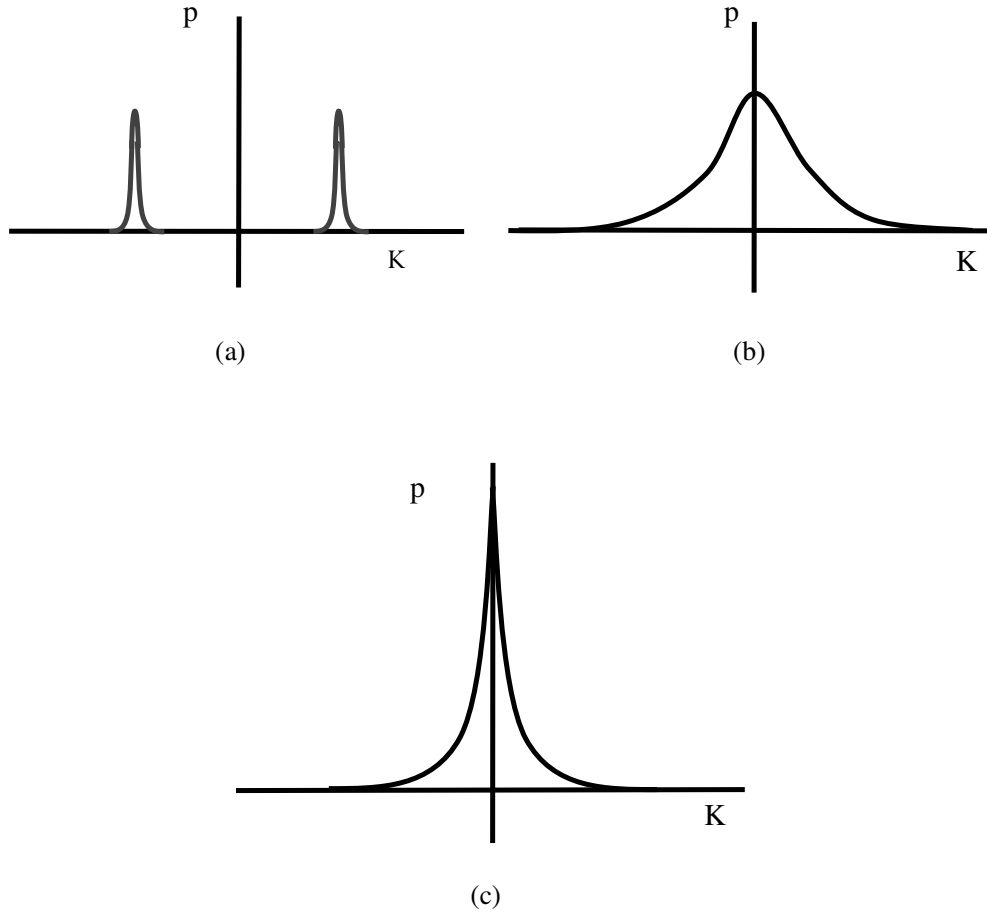
ve etkileşim ifadesi, Migdal-Kadanoff yaklaşımı kullanılarak [25, 26] R_{dc} ‘decimation’ ifadesinden yola çıkılarak $K'_{ij} = R(\{K_{ij}\})$ tekrarlarba bağıntısı bulunur,

Aşağıdaki denklemde de görüldüğü gibi renormalizasyon dönüşümü uygulanmış sistemin pozitif K değerleri ortalaması, renormalizasyon dönüşümü uygulanmamış sistemin pozitif K değerleri ortalamasına b^y gibi bir faktör ile bağılıdır. Burada y , kritik kuyu üsteli; b daha önce de bahsedilen uzunluk ölçeklenme sabitidir.

$$\overline{K_+}' = b^y \overline{K_+} \quad (3.7)$$

3.3.1. Paramanyetik Faz Evrimi

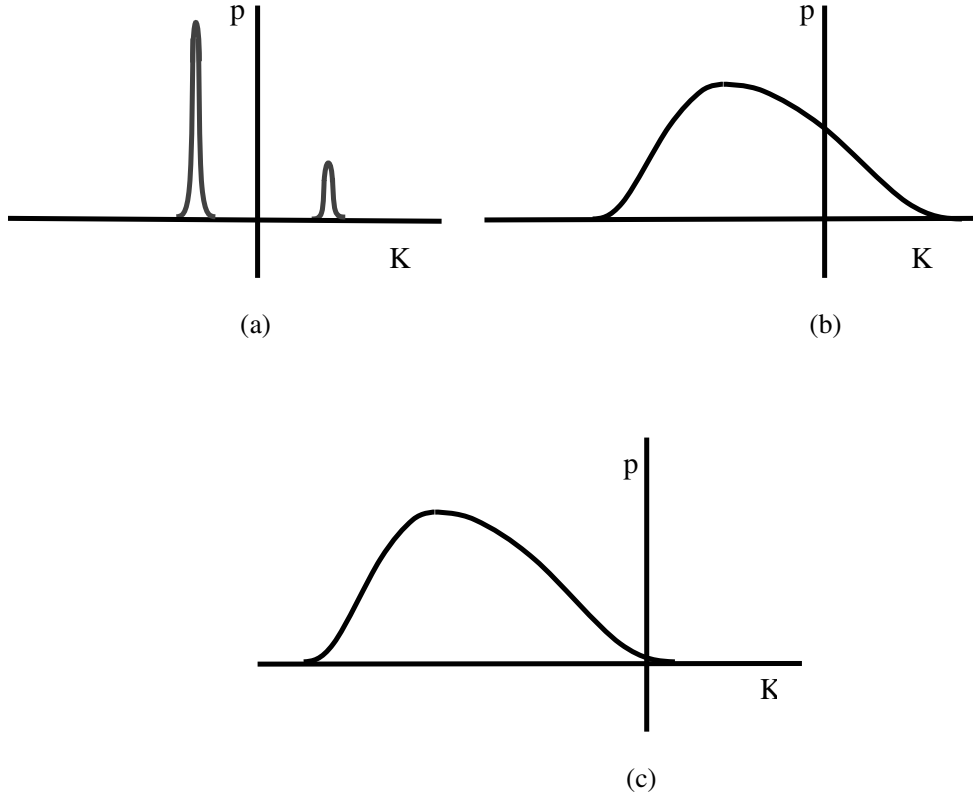
Paramanyetik fazda, eşit miktarda farklı cins etkileşim içeren dağılım karakteri $\pm K$ 'de iki pik şeklinde görülmektedir. Renormalizasyon-grubu yöntemi uygulanan modelde, bu başlangıç değerleri kullanılarak n sayıda tekrarlanan işlem sonucunda, n sayısının sırasıyla Şekil 3.5 (b)'de ve Şekil 3.5 (c)'de artmasına bağlı olarak bulunan olasılık dağılımları aşağıda görülmektedir.



Şekil 3.5: Paramanyetik Fazda Olasılık Dağılımlarının Renormalizasyon Döngü Sayısının Artmasıyla Evrimleşmesi. Sırasıyla (a), (b) ve (c) Grafikleri Artan Renormalizasyon Sayısına Karşılık Gelen Olasılık Dağılımlarıdır.

3.3.2. Ferromanyetik Faz Evrimi

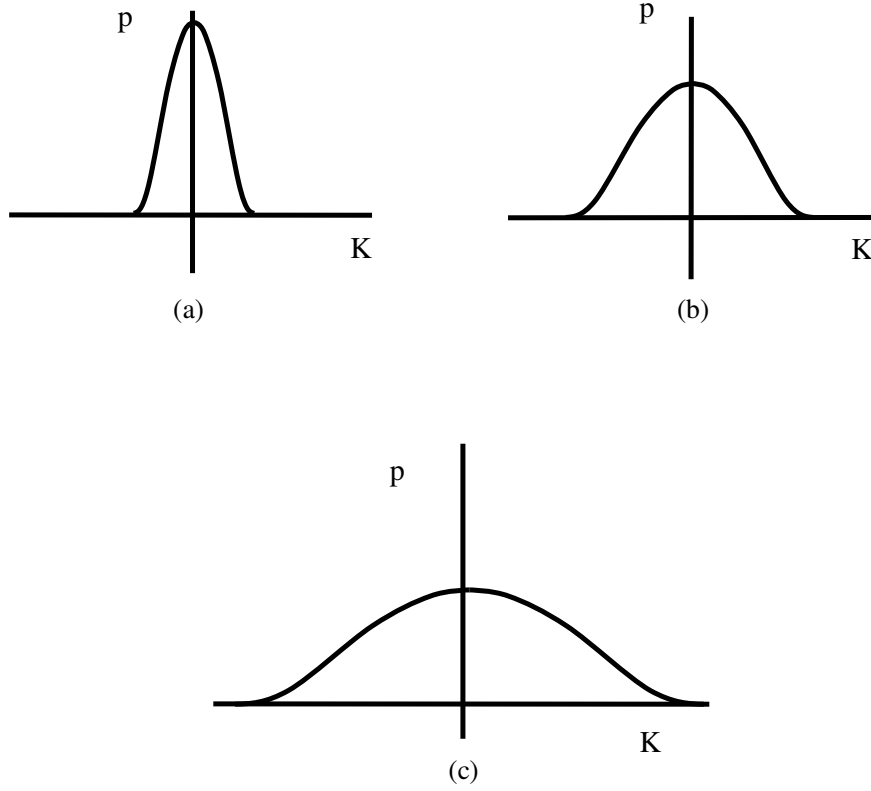
Ferromanyetik fazda, farklı iki etkileşimden biri daha baskın olarak görülmektedir. Paramanyetik faz evrimine benzer biçimde n sayısı arttırılarak sırayla daha büyük n 'ye sahip Şekil 3.6 (a), Şekil 3.6 (b)'de ve Şekil 3.6 (c)'de bulunan olasılık dağılımlarının karakteristik yapısı ve evrimi aşağıda görülmektedir.



Şekil 3.6: Ferromanyetik Fazda Olasılık Dağılımlarının Renormalizasyon Döngü Sayısının Artmasıyla Evrimleşmesi. Sırasıyla (a), (b) ve (c) Grafikleri Artan Renormalizasyon Sayısına Karşılık Gelen Olasılık Dağılımlarıdır. Başlangıçta Baskın Olan Taraftaki Etkileşime Doğru Dağılımın Evrildiği Görülmektedir.

3.3.3. Spin Camı Fazı Evrimi

Farklı iki etkileşimden biri donmuş halde bulunan spin camında paramanyetik fazın aksine olasılık dağılımı grafiği iki uçtan genişleyen bir karakter sergilemektedir..

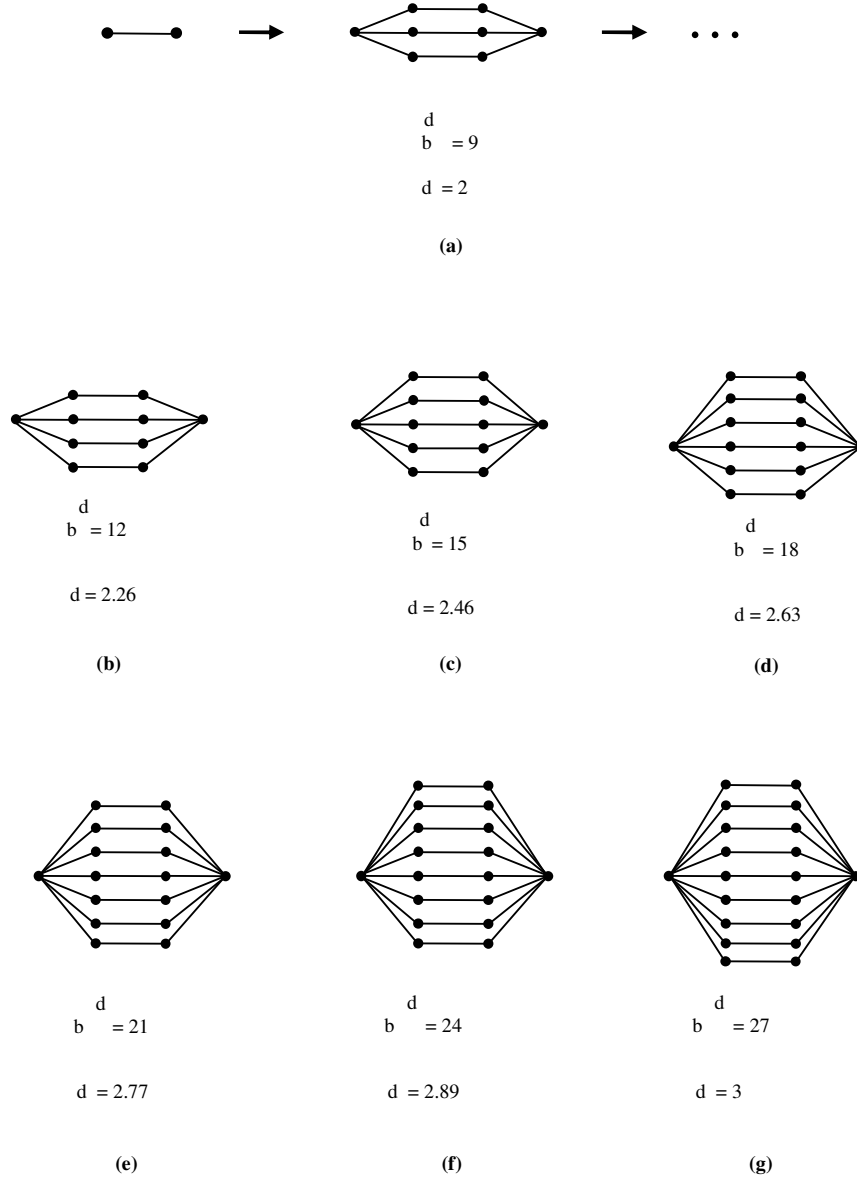


Şekil 3.7: Spin Camı Fazında Olasılık Dağılımlarının Renormalizasyon Döngü Sayısının Artmasıyla Evrimleşmesi. Sırasıyla (a), (b) ve (c) Grafikleri Artan Renormalizasyon Sayısına Karşılık Gelen Olasılık Dağılımlarıdır. Grafik Kendi İçinde Tekrar İşleminin Sayısı Arttıkça İki Uçtan K 'nın $\pm \infty$ Yönlerine Doğru Genişlemektedir.

Olasılık dağılımlarının pozitif K değerlerinin ortalaması alınıp tüm K değerlerinin bu ortalama bölünmesi durumunda, spin cam fazında, olasılık dağılım grafiği genişlemez.

4. KULLANILAN HİYERARŞİK MODELLER

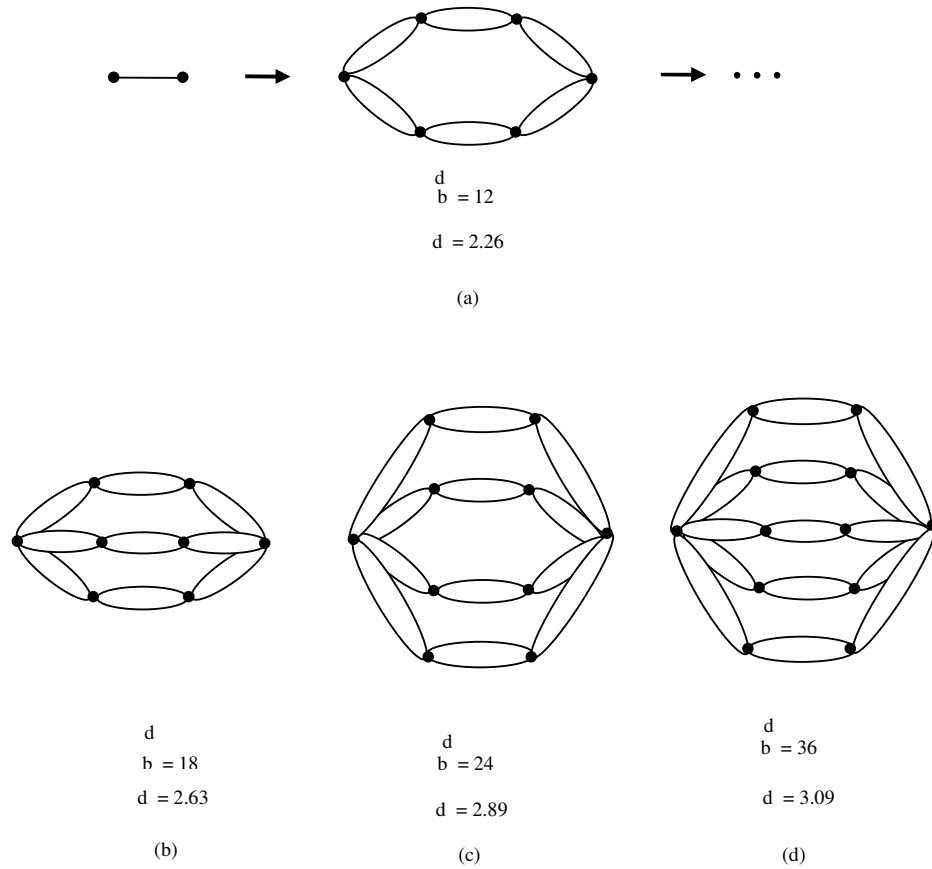
4.1. Model Set-1



Şekil 4.1: Kullanılan Hiyerarşik Model Seti-1.(Bu Modeller için b , Uzunluk Ölçeği 3 dür.)

Şekil 4.1.(a)'da, P_0 başlangıç olasılık dağılımı olmak üzere, (3.3) denklemine göre bu örgü için; (i) P_0 ve P_0 arasında bir 'decimation' yapılır, ve P_1 oluşur; (ii) P_1 ve P_0 arasında bir 'decimation' daha yapılır, ve P_2 oluşur; (iii) P_2 ve P_1 arasında 'bond-moving' yapıp Şekil 4.1.(a) oluşturulmuş olur. Diğerleri için de P_2 nin bulunmasına kadar aynı prosedür uygulanır, her bir model için bir adet üçlü zincir fazlalığı 'bond-moving' yapılmak suretiyle elde edilir.

4.2. Model Set-2



Şekil 4.2: Kullanılan Hiyerarşik Model Seti-2, Model-Set-1 de Olduğu Gibi Uzunluk Ölçeklenme Faktörü, $b = 3$ dür.

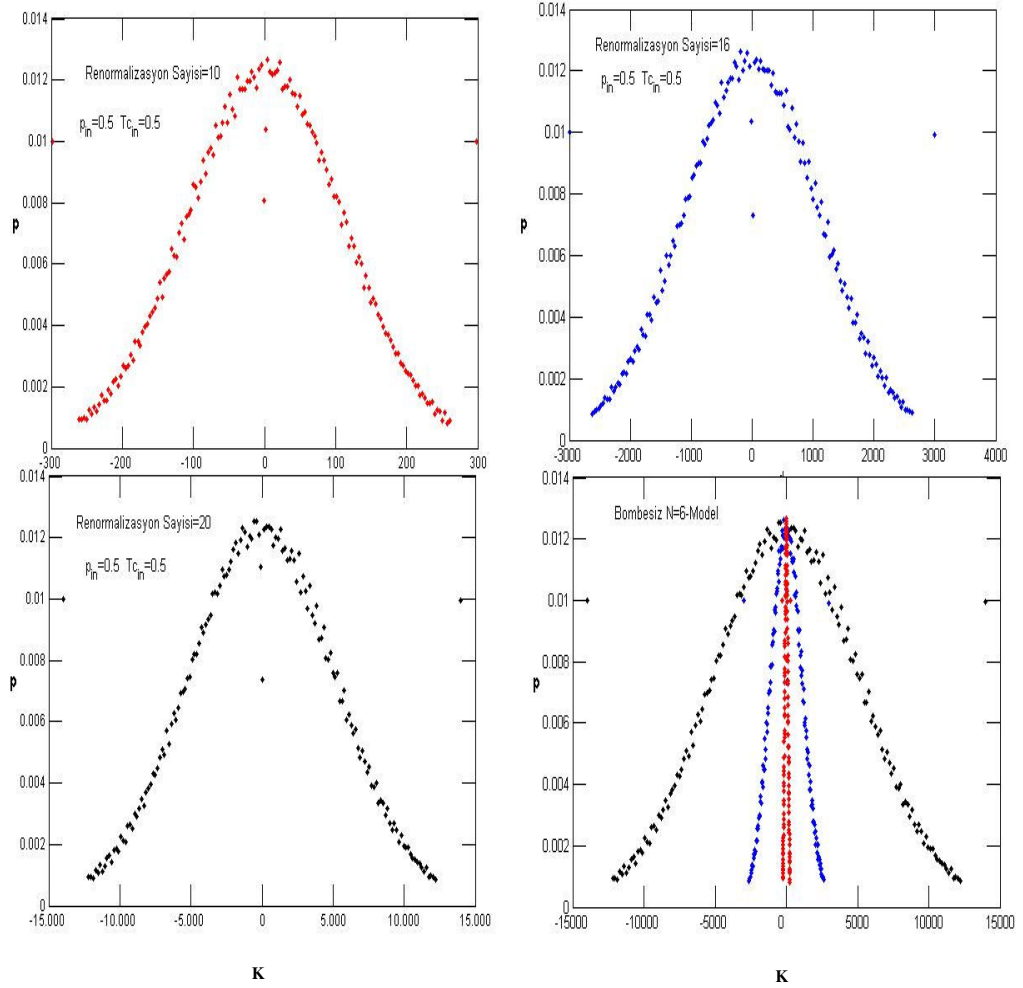
Şekil 4.2.(a)'da, P_0 başlangıç olasılık dağılımı olmak üzere, (3.3) denklemine göre bu örgü için; (i) P_0 ve P_0 arasında bir 'bond-moving' yapılır, ve P_1 oluşur; (ii) P_1 ve P_1 arasında bir 'decimation' yapılır, ve P_2 oluşur; (iii) P_2 ve P_1 arasında 'decimation'

yapılır, P_3 oluşur; (iv) P_3 ve P_3 arasında ‘bond-moving’ yapılarak Şekil 4.2 (a) oluşturulmuş olur. Şekil 4.2 (b) ve (c) şıkları için de P_3 bulunmasına kadar aynı prosedür uygulanır, ve her bir model için bir adet üçlü zincir fazlalığı ‘bond-moving’ yapılmak suretiyle elde edilir. Burada dikkat edilmesi gereken durum, bu modellerin $d = 2.46, 2.77$ ve 3 boyutlarında oluşturulamıyor oluşudur.

Bu işlemleri yaparken her basamakta çıkan olasılık dağılımı noktaları artmaktadır. Renormalizasyon dönüşüm sayısını arttırdıkça bu sayı oldukça artmaktadır. Bu noktada ‘binning’ (kutulama) yapılarak iyileştirmeye gidilmiştir. Buna göre, öncelikle olasılık dağılımı, K eksenini 200 eşit parçaya ayıracak şekilde bölümlenmiştir. Aynı sütun bölmesi içinde kalan olasılıklar ortalamaları ve standart sapmaları hesaplanarak tek bir değer haline getirilmiştir. Böylece nokta sayısı düşürülmüştür. Binning prosedürü herhangi bir bond-moving veya decimation adımıdan sonra bin sayısının 512’yi geçtiği anda devreye girecek şekilde işletilmiştir. Binning işleminden sonra toplam bin sayısı 200 den fazla değildir. Toplam olasılıkların %98’ini kapsayacak şekilde binning yapılmıştır. %2 lik kısım dağılımın sağ ve sol taraflarında eşit olmak üzere dağılımlarda çöp binler olarak görülmektedir.

5. SONUÇLAR

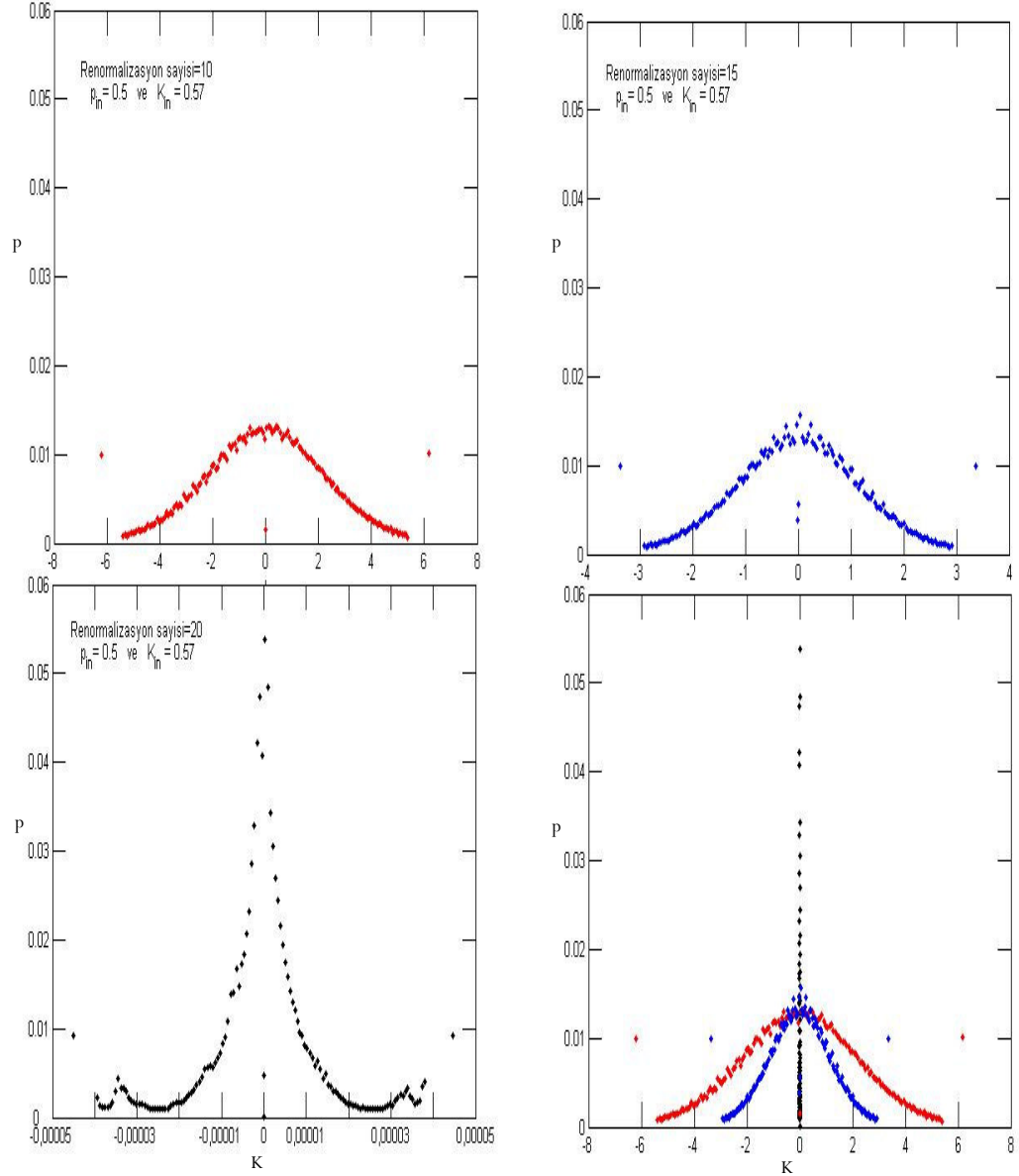
$d = 2.63$ boyutta, Model set-1 için başlangıç değeri $p_0 = 0.5$ ve $K_0 = 0.5$ olarak alınmış spin camı fazında olasılık dağılımları renormalizasyon grubu dönüşümü sayısı (n); 10, 16 ve 20 için Şekil 5.1 de gösterilmiştir. n değeri arttıkça daha önce de belirtilen iki uçtan sonsuza gitme eğilimi görülmektedir. Dağılımda, renormalizasyon grubu dönüşümü sayısı 10'dan 20'ye geçerken, 20 dönüşüm sonrası dağılımın uçlarda yaklaşık olarak 50 kat daha geniş olduğu görülmektedir.



Şekil 5.1: Model Set-1 için $d=2.63$ 'te Olasılık Dağılımlarının Spin-Camı Fazında Evrimleşmesi.

Paramanyetik faz evrimine örnek olarak, model set-1'den seçilen $d=2.63$ boyutuna sahip sistem için elde edilen dağılım evrimi aşağıda gösterilmektedir.

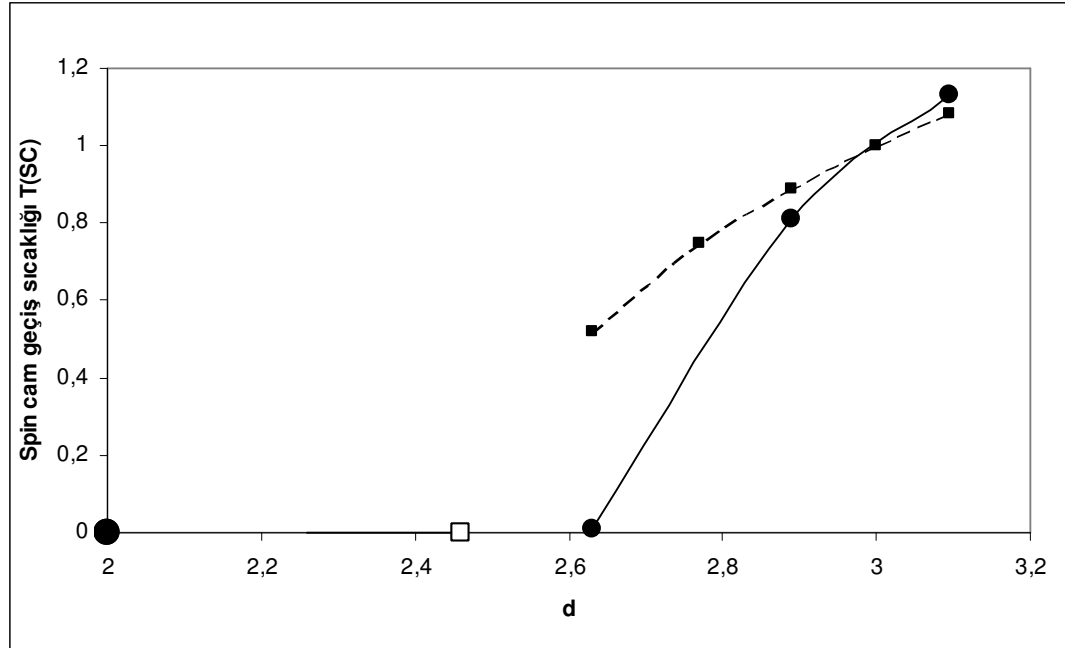
Renormalizasyon grubu dönüşüm sayısı n 'nin; 10, 15, ve 20 değeri için yapılan denemelerde n değeri büyüdükçe, bin sınırları K ölçeğinde daralıp dikey yönde genişlemektedir ve sonunda bir delta fonksiyonuna dönüşmektedir.



Şekil 5.2: Model Set-1 için $d=2.63$ 'te Olasılık Dağılımlarının Paramanyetik Fazda Evrimleşmesi.

Çözülen dokuz ayrı sistem için spin cam geçişi sıcaklığının $T(SC)$, boyut d 'ye göre faz diyagramı Şekil 5.3 de görülmektedir. Spin cam fazının görülmeye başlandığı alt kritik boyut d_{AK} , her iki ayrı model için de 2.46 olarak bulunmakta ve 2 olarak bilinen alt kritik boyut için tamsayı olmayan bir alt kritik boyut bulunması dolayısıyla yeni bir tanım getirmektedir. Model set-1 de (a), (b) ve (c) sistemleri için spin camı fazına rastlanmamıştır. Benzer şekilde model set-2'de (a) sistemi için hiyerarşik örgü, renormalizasyon grubu yöntemi ile çözüldüğünde spin camı fazı gözlenmemiş ve burada da alt kritik boyut 2.46 olarak belirlenmiştir.

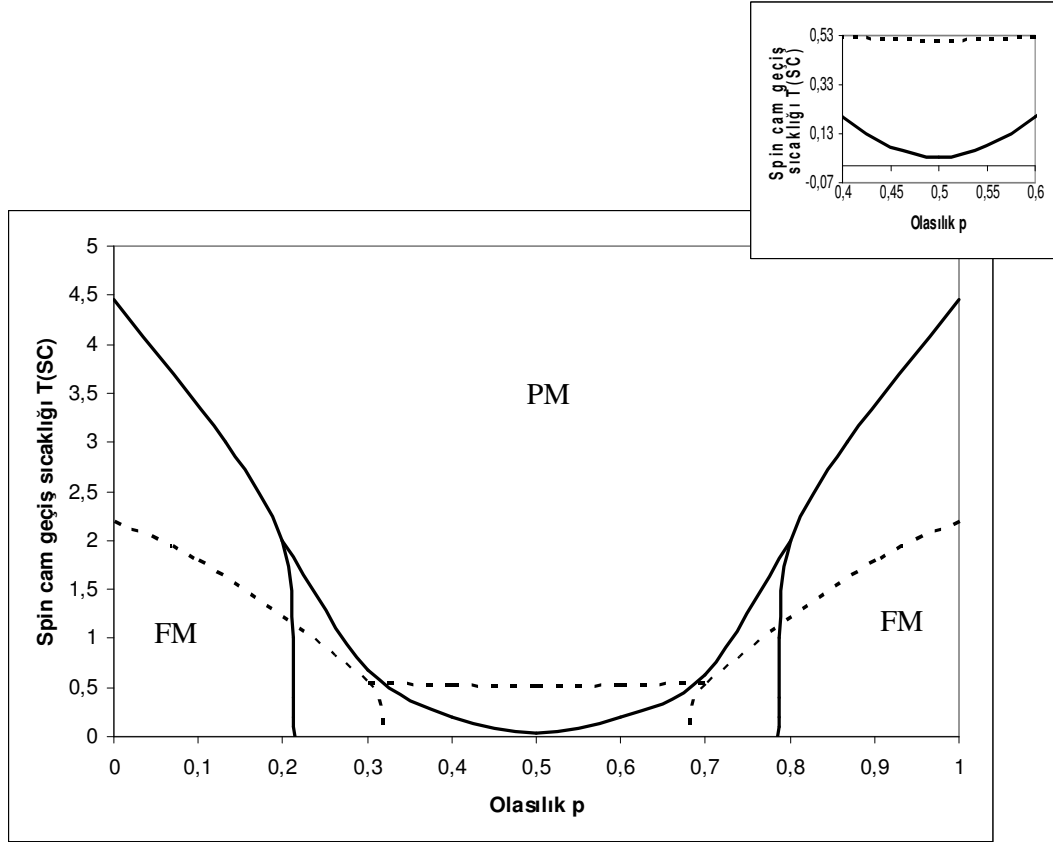
Kesin çözüm kabul eden hiyerarşik örgüler kullanılarak incelenen spin camı faz geçişi, aşağıdaki grafikte de görüldüğü gibi, 2 ile 3 arası boyutlarda, ilk defa olarak gözlenmiştir.



Şekil 5.3: Her İki Model Set İçin Dokuz Ayrı Sistem Çözüldüğünde Elde Edilen Spin Cam Geçiş Sıcaklığına Göre Boyut d Faz Diyagramı. Kesikli Çizgiler ile Gösterilen Eğri Model Set-1'e; Düz Çizgi ile Gösterilen Eğri Model Set-2'ye Aittir. Her İki Model Set İçin de Spin Camı Faz Geçişinin Görülmeye Başlandığı Alt Kritik Boyut d_{AK} , 2.63 Olarak Görülmektedir. Model Set-2'deki Sistem İçin Spin Camı Faz Geçiş Sıcaklıkları Model Set-1'e Göre Daha Düşük Sıcaklıklarda Başlamaktadır.

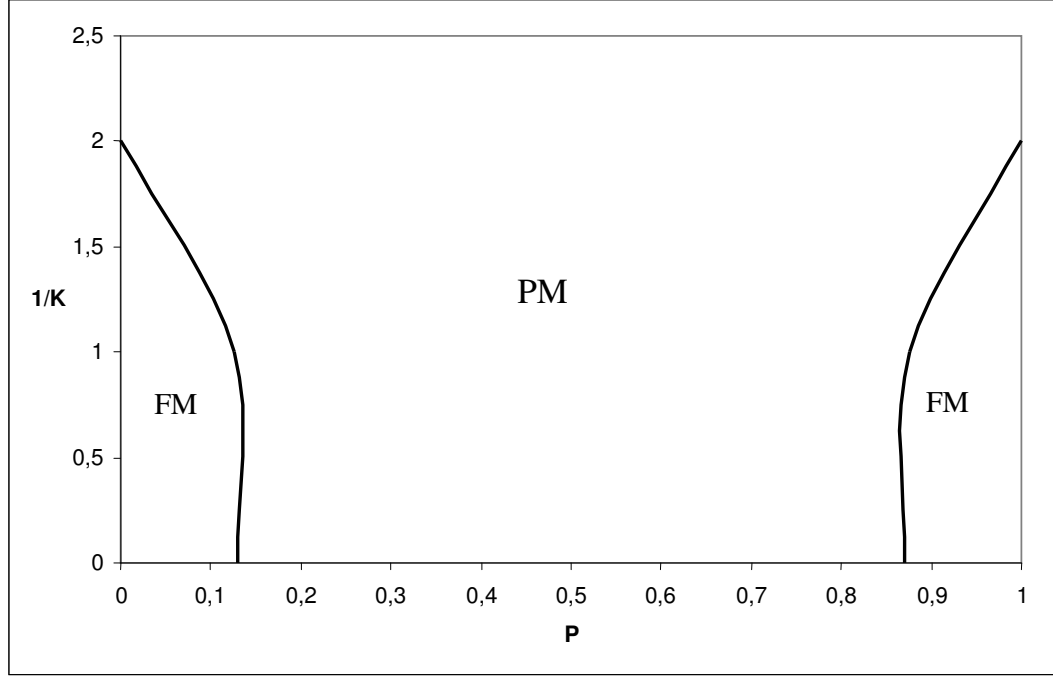
Şekil 5.3'te belirtilen spin camı faz geçiş sıcaklığı, $T(SC)$, $1/K$ 'ya eşittir, burada K , etkileşimi ifade eder. $d = 2$ için gösterilen nokta, daha önce bilinen alt kritik boyutu belirtir.

Şekil 5.3'teki faz diyagramından hareketle her iki model set için spin camı fazının görülmeye başlandığı ara boyut $d = 2.63$ için, faz diyagramları aşağıdaki gibi elde edilmiştir. Grafikte, faz diyagramları, model set-2 (b) sistemi için düz çizgi ile model set-1 (d) sistemi için kesikli çizgilerle gösterilmiştir.



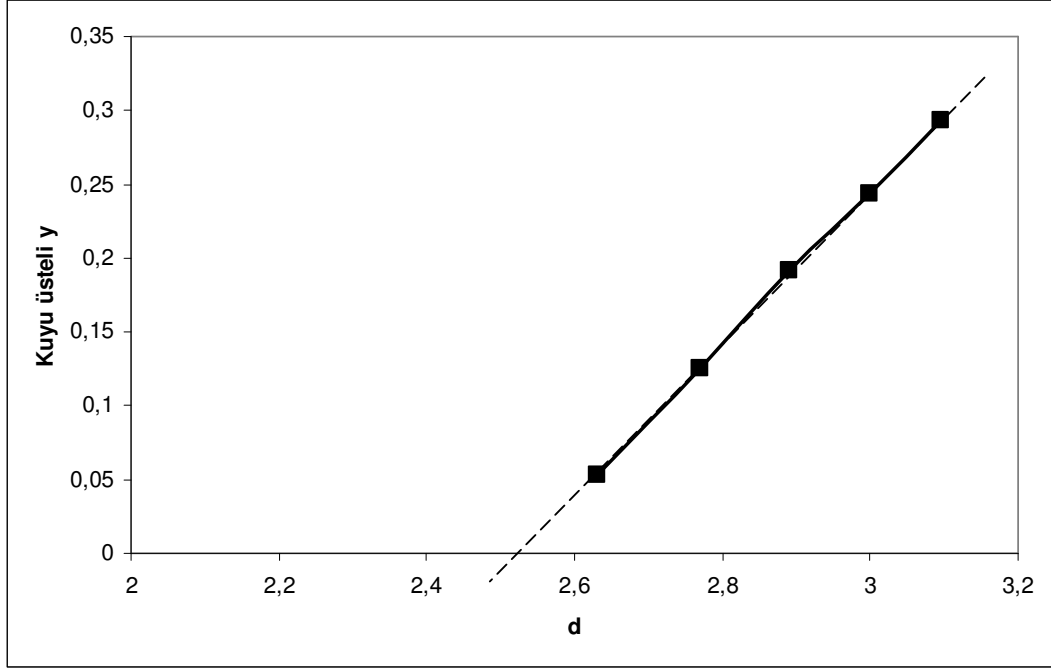
Şekil 5.4: Model Set-1 ve Model Set-2 de $d=2.63$ için, Spin Cam Geçiş Sıcaklığının Olasılık p 'ye Göre Diyagramı. Kesikli Çizgi ile Gösterilen Eğri, Model Set-1(d) Sistemine; Düz Çizgi ile Gösterilen Eğri, Model Set-2 (b) Sistemine Aittir.

Yukarıdaki faz diyagramından hareketle, alt kritik boyut 2.46 için spin camı fazına rastlanmayan model set-1 (c) sisteminin faz diyagramı aşağıdaki gibi elde edilmiştir. Spin camı faz geçiş sıcaklığının sıfıra çok yakın olduğu, olasılık $p = 0,5$ değerinde, grafik küçük ölçekte asıl grafiğin üst sağ köşesinde gösterilmektedir.



Şekil 5.5: $d = 2.46$ için Model Set-1(c)'nin Faz Diyagramı.

Bu diyagramlara ek olarak, spin camı fazının görüldüğü, çözümü yapılan hiyerarşik sistemlerde (3.7) denkleminde göre y kuyu üsteli hesaplanmıştır. Burada başlangıç sıcaklığı spin cam fazına yakın bir yerden alınarak, olasılık $p = 0.5$ değerinde sabit tutulmuştur. Her bir sistem için spin cam faz geçişi sıcaklığı farklı olduğundan başlangıç için alınan değerler spin camı-paramanyetik faz geçiş sıcaklığının yaklaşık %60'ı civarında spin cam bölgesinde alınmıştır. Bu geçiş noktasındaki kuyuya ulaşmak için gerekli renormalizasyon grubu dönüşümü sayısı esas alınarak her bir sistem için yaklaşık olarak $n = 20$ ve 21 dönüşüm arasında kuyuya ulaşıldığı görüldüğünden, $\overline{K}_+$ değeri 21 dönüşüm sonrası bulunan değer, $\overline{K}_+$ değeri ise 20 dönüşüm sonrasında alınarak y değeri hesaplanmış, oluşturulan faz diyagramı aşağıda verilmiştir.



Şekil 5.6: Her İki Model Set İçin Çözülen Sistemlerde Kuyu Üsteli y 'nin Boyut d 'ye göre Faz Diyagramı Üst Üste Gelmektedir. Model Set-2'deki Sistemlerdeki Çözümler $d = 2.63$, 2.89 ve 3.09 Değerlerine Karşılık Gelen y Değerlerini Kapsamaktadır. Grafiğin Doğrusal Karakteri Göz Önüne Alındığında, Kesikli Çizgiyle Grafik Devam Ettirildiğinde, d Eksenini Kestiği Noktanın Yaklaşık 2.5 Değerinde Olduğu ve Bulunan $d = 2.46$ Alt Kritik Boyutu İle Tutarlılık Gösterdiği Görülmektedir.

Çözülen dokuz ayrı sistemin verilerine göre spin cam fazının görülmeye başlandığı ilk alt kritik boyut d_{AK} , kuyu üsteli y 'nin boyut d 'ye göre diyagramında da görüldüğü gibi 2.63 tür. İki ayrı model seti için de y kuyu üstelleri eşit çıkmakta, diyagram üst üste binmektedir.

Bu diyagramdan da görüldüğü gibi, lineer grafik devam ettirildiğinde, yaklaşık olarak, $d = 2.46$ noktasında grafiği kesmektedir. Bu da daha önce sözü edilen alt kritik boyutun d_{AK} 'nin değeriyle aynıdır.

Burada ilk olarak spin cam fazı ara kritik boyutlarda bulunmuştur. Pek çok değişik model için kullanılabilecek bu bulgu değişik dünya sistemlerinde ve network modellerinde faydalı olabilecektir.

KAYNAKLAR

- [1] **Hinczewski, M. and Berker, A.N.**, 2005. Multicritical Point Relations in Three Dual Pairs of Hierarchical-Lattice Ising Spin-Glasses, *Phys. Rev. B* 72, 144402-144406.
- [2] **Takeda, K., Sasamoto, T. and Nishimori, H.**, 2005. Exact Location of the Multicritical Point for Finite-Dimensional Spin Glasses: A Conjecture, *J. Phys. A: Math. Gen.* 38, 3751-3755..
- [3] **Berker, A. N. and McKay, Susan R.**, 1984. Hierarchical Models and Chaotic Spin Glasses, *J. Stat. Phys.* 36, 787-791.
- [4] **Nishimori, H.**, 1981. Internal Energy, Specific Heat and Correlation Function of the Bond-Random Ising Model, *Prog. Theor. Phys.* 66, 1169-1172 .
- [5] **Nishimori, H. and Nemoto, K.**, 2002. Duality and Multicritical Point of Two-Dimensional Spin Glasses, *J. Phys. Soc. Japan* 71, 1198-1203 .
- [6] **Maillard, J.-M., Nemoto, K. and Nishimori, H.**, 2003. Symmetry, Complexity and Multicritical Point of the Two-Dimensional Spin Glass, *J. Phys. A: Math. Gen.* 36, 9799-9802 .
- [7] **Takeda, K. and Nishimori, H.**, 2004. Self-Dual Random-Plaquette Gauge Model and the Quantum Toric Code, *Nucl. Phys. B* 686, 377-381.
- [8] **Berker, A. N. and Ostlund, S.**, 1979. Multicritical Phase Diagram of Gases Adsorbed on Graphite: Temperature Variation and Finite-Size Effects, *J. Phys. C12*, 4961-4964.
- [9] **Kaufman, M. and Griffiths, R. B.**, 1981. Exactly Soluble Ising Models on Hierarchical Lattices, *Phys. Rev. B* 24, R496-499.
- [10] **Kaufman, M. and Griffiths, R. B.**, 1984. Spin systems on hierarchical lattices. II. Some examples of soluble models, *Phys. Rev. B* 30, 244-248.
- [11] **McKay, S. R., Berker, A. N. and Kirkpatrick, S.**, 1982. Spin-Glass Behaviour in Frustrated Ising Models with Chaotic Renormalization-Group Trajectories, *Phys. Rev. Lett.* 48, 767-770.
- [12] **Migliorini, G. and Berker, A. N.**, 1998. Finite-Temperature Phase Diagram of the Hubbard Model, *Phys. Rev. B* 57, 426-429.

- [13] **Andelman, D. and Berker, A.N.**, 1984. Scale-Invariant Quenched Disorder and Its Stability Criterion at Random Critical Points, *Phys. Rev. B* 29, 2630-2635.
- [14] **Falicov, A., Berker, A. N. and McKay, S.R.**, 1995. Renormalization-Group Theory of The Random-Field Ising Model in Three Dimensions, *Phys. Rev. B* 51, 8266-8270.
- [15] **Domany, E. Alexander, S. Bensimon, D. and Kadanoff, L. P.**, 1983. Solutions to the Schrödinger Equation on Some Fractal Lattices, *Phys. Rev. B* 28, 3110-3114.
- [16] **Langlois, J. M., Tremblay, A. M. S. and Southern, B. W.**, 1983. Chaotic Scaling Trajectories and Hierarchical Lattice Models of Disordered Binary Harmonic Chains, *Phys. Rev. B* 28, 218-222.
- [17] **Stinchcombe, R. B. and Maggs, A. C.**, 1986. Dynamic scaling on fractals with sublattices, *J. Phys. A* 19, 1949-1952.
- [18] **Le, J.-X. and Yang, Z. R.**, 2004. Phase Transitions of the Ashkin-Teller Model Including Antiferromagnetic Interactions on a Type of Diamond Hierarchical Lattice, *Phys. Rev. E* 69, 066107-066109.
- [19] **da Silveria, R. A. and Bouchaud, J.-P.**, 2004. Temperature and Disorder Chaos in Low Dimensional Directed Paths, *Phys. Rev. Lett.* 93, 015901-015904.
- [20] **Haddad, T. A. S., Pinho, S. T. R. and Salinas, S.R.**, 2000. Universal Critical Behaviour of Aperiodic Ferromagnetic Models, *Phys. Rev. E* 61, 3330-3334.
- [21] **Kaufman, M. and Griffiths, R. B.**, 1982. Infinite Susceptibility at High Temperatures in the Migdal-Kadanoff Scheme., *J. Phys. A* 15:L239-242.
- [22] **McKay, S. R. and Berker, A. N.**, 1984. Chaotic Spin Glasses: An Upper Critical Dimension, *J. Appl. Phys.* 55, 1646-1650.
- [23] **Erbaş, A., Tuncer, A., Yücesoy, B. and Berker, A.N.**, 2005. Phase Diagrams and Crossover in Spatially Anisotropic d=3 Ising, XY Magnetic and Percolation System: Exact Renormalization-Group Solutions of Hierarchical Models, *Phys Rev. E* 72, 026129-026132.
- [24] **Migdal, A. A.**, 1975. Recursion Relations in Gauge Theories, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 69, 1457-1461. [*Sov. Phys. JETP* 42, 743 (1976)].

- [25] **Kadanoff, L. P.**, 1976. Notes on Migdal's Recursion Formulas, *Ann. Phys. (N.Y)* 100, 359-362.

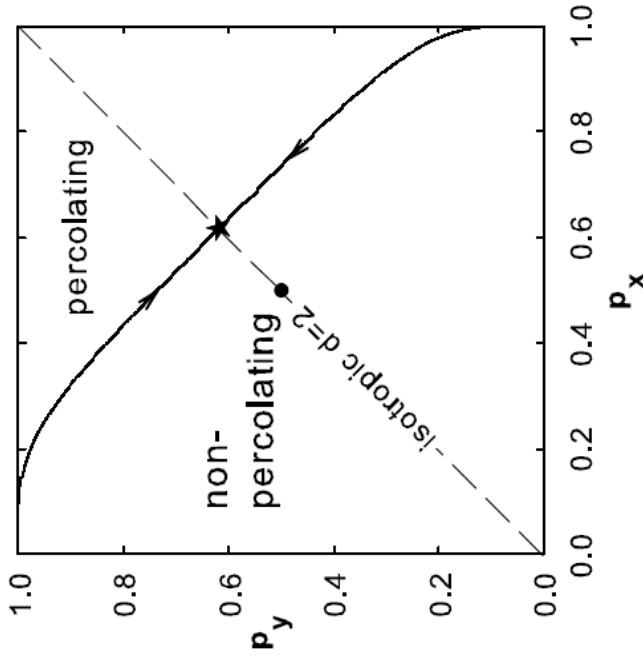


FIG. 11: The phase boundaries for percolation on the $d = 2$ anisotropic hierarchical lattice (A_2). The renormalization-group flows are indicated on the phase boundary of the hierarchical model. The onset of percolation for the square lattice [29] is shown by the black circle.

lation points for the cubic and square lattices are also shown [29]. For each model, percolation onset at $d = 1$ (at $p_z = 1$) and $d = 2$ cross over to $d = 3$ percolation onset, which is thus universal for all $d = 3$ anisotropic and the $d = 3$ isotropic cases.

This research was supported by the Scientific and Tech-

nical Research Council of Turkey (TÜBİTAK) and by the Academy of Sciences of Turkey.

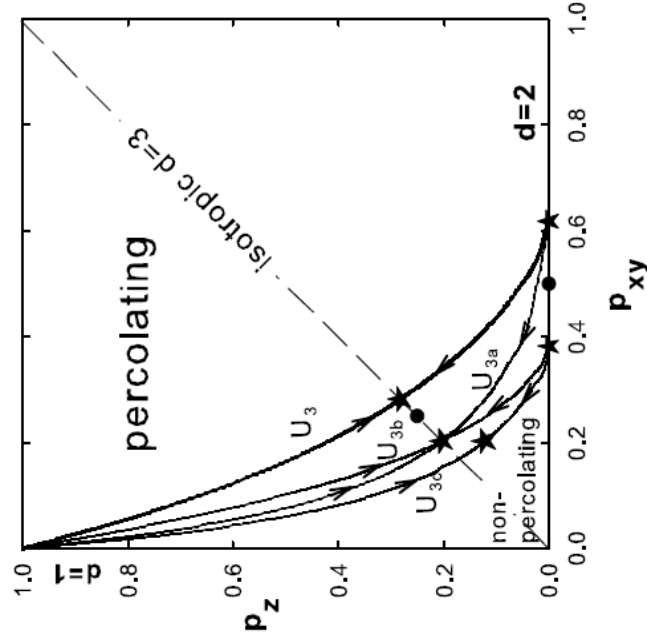


FIG. 12: Phase boundaries for percolation on the $d = 3$ uniaxially anisotropic hierarchical lattices U_3 , U_{3a} , U_{3b} , and U_{3c} . The onsets of percolation for the square and cubic lattices [29] are shown by the black circles. For each model, the percolation onset at $d = 1$ (at $p_z = 1$) and $d = 2$ cross over to $d = 3$ percolation onset, which is thus universal for all $d = 3$ anisotropic and the $d = 3$ isotropic cases.

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında İstanbul’da doğdu. İlk ve ortaöğretimini İstanbul’da tamamladıktan sonra 1998 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Fizik Mühendisliği bölümüne girdi. 2004 yılında Fizik Mühendisliği bölümünden mezun olduktan sonra yüksek lisans eğitimi için girdiği İTÜ Fizik Mühendisliği yüksek lisans programını 2007 yılında tamamladı.