



PARÇACIK İÇEREN KOMPOZİTLERİN ELASTİK KATSAYILARININ ANALİTİK YÖNTEMLE TAYİNİ

Osman Bulut, Necla Kadioğlu ve Şenol Ataoğlu
İstanbul Teknik Üniversitesi İnşaat Fakültesi

ABSTRACT

In this study, composite materials which contain micro-particles have been considered to observe the results on the macro scale properties of a material when a difference has been generated in micro structure of it. The variation of the Bulk and shear moduli with respect to the volume ratio defining as the ratio of the volumes of the particles to the matrix of these materials which are considered in the type of two-phases composites have been calculated. In the problems considered low volume ratio, homogeneously dispersed particles in matrix, and no interactions between particles have been assumed. Moreover, they are supposed that all materials behave linearly elastic, and they are homogeneous and isotropic. In the sense of assumptions mentioned composites which are heterogeneous have been considered to a fictitious material which can be evaluated as homogeneous. In the analytical computations, basically the point of view is used that the equality of the strain energies on quasi-homogeneous and quasi-isotropic composites and fictitious materials which are exposed to the same stress field. For simplicity, the calculations are realized on a representative volume elements (RVE) get from composites instead of whole composites and on a fictitious material having the same geometries with RVE. Considering particles have exactly spherical geometry, RVE have been formed as spheres containing a spherical particle. For these bodies, the stress fields of the hydrostatic pressure and the simple shear have been solved, respectively.

ÖZET

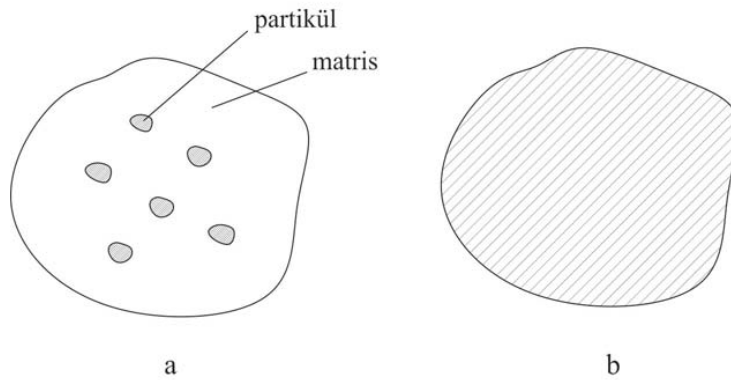
Bu çalışmada, bir malzemenin mikro yapısı seviyesinde yapılacak bir değişikliğin makro boyuttaki mekanik özelliklerine ait sonuçlarının gözlenebilmesi için, bu malzemeye mikro parçacıklar eklenerek oluşturulacak kompozit malzemeler ele alınmıştır. İki fazlı bu tür kompozitlerin Bulk ve kayma modüllerinin hacim oranı ile değişimi analitik yolla elde edilmiştir. Ele alınan problemlerde düşük hacim oranları için ve eklenti malzemesinin kompozit içerisinde homojen dağılım gösterdiği, eklentilerin birbirleri ile etkileşmediği varsayılmıştır. Yine burada, tüm malzemelerin lineer-elastik, homojen ve izotrop davranış gösterdiği kabul edilmiştir. Yukarıdaki kabuller çerçevesinde heterojen bir malzeme olan kompozit, homojen gibi düşünülebilecek bir fiktif malzemeye eşdeğer kabul edilmiştir. Burada yapılan analitik hesapta, herhangi bir gerilme haline maruz sanki homojen (quasi-homogenous) ve sanki izotrop (quasi-isotropic) olarak varsayılan bir kompozitin üzerinde

biriken toplam şekil değiştirme işinin, buna eşdeğer olarak düşünülen fiktif malzemede aynı gerilme hali altında biriken toplam şekil değiştirme işine eşitliği esas alınmıştır. Ancak burada hesaplar tüm kompozit üzerinde değil, kompozitten alınan temsili hacim elemanı ve buna eş değer fiktif cisim üzerinde yapılmıştır. Parçacıkların tam küresel geometride olduğu düşünülerek temsili hacim elemanı tek küresel parçacık içeren küresel bir cisim olarak tanımlanmıştır. Küresel temsili hacim elemanı ve fiktif cisim, ilk olarak ele alınan problemde hidrostatik basınç, ikinci olarak da basit kayma etkisi altındadır.

1. GİRİŞ

Günümüzde birçok alanda yaygın şekilde kullanılan kompozit malzemelerin üretim amacı, dış etkilere karşı dayanıksız olsa bile elde edilmesi, işlenmesi ve şekil verilmesi daha kolay olan malzemelerin, yüksek mekanik özellikli, uygun malzemelerle takviye edilerek amaçlanan mekanik özelliklerinin daha iyi olmalarını sağlamaktır. Tasarım esnasında bu tür malzemelerin mekanik davranışlarını belirleyecek malzeme katsayılarının belirlenmesi önemlidir. Bu çalışmada mikron mertebede boyuta sahip parçacık takviyeli kompozitlerin efektif Bulk modülü ve efektif kayma modülü analitik olarak hesaplanmıştır. Literatürde kompozitlerin malzeme katsayıları için üç farklı yöntemden bahsedilmektedir ki bunlar, direk metod, varyasyonel metod ve yaklaşım metodlarıdır [1]. Bu çalışma varyasyonel metod grubundadır. Yöntemin ayrıntıları ileride anlatılacaktır.

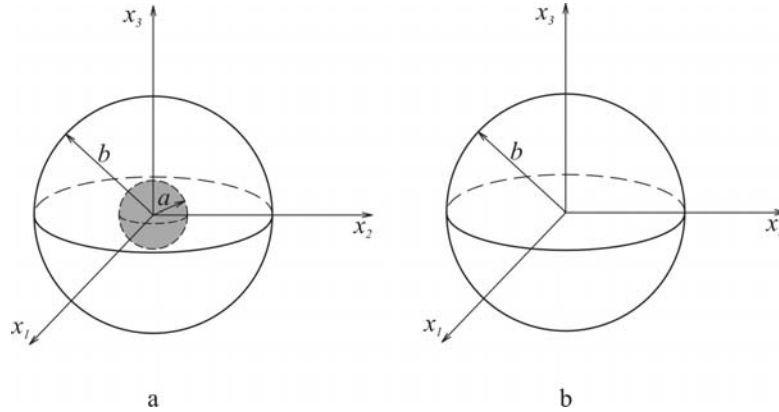
Bu çalışmada ele alınan kompozitlerde bunu oluşturan matris ve parçacık malzemelerinin lineer-elastik, homojen ve izotrop davranış gösterdiği türdedir. Parçacıkların malzeme özelliklerinin, matrisinkilere göre çok yüksek olduğu durumlar düşünülmüştür. Ayrıca homojen bir dağılımla az miktarda yerleştirilen parçacıkların birbirleri ile etkileşmediği düşünülmektedir. Bu kabuller altında parçacık içeren kompozit cisim, Hashin tarafından sanki homojen (quasi-homogeneous) ve sanki izotrop (quasi-isotropic) olduğu düşünülerek fiktif bir homojen malzemeye eşdeğer olarak kabul edilmiştir [2]. Şekil 1 'de bahsedilen türde herhangi bir kompozit cisimle buna eşdeğer homojen izotrop fiktif bir cisim görülmektedir.



Şekil 1 Kompozit ve buna eşdeğer fiktif cisimler

Böylece problem, bu fiktif malzemenin elastik özelliklerinin bulunması problemi olur. Referanslarda verilen [2] numaralı makalede de olduğu gibi çok küçük olan parçacıkların geometrik formu küre olarak kabul edilmiş; bu ve yukarıda yapılan diğer kabullerle birlikte problem tüm kompozit cisim yerine küresel tek parçacık içeren küresel kompozit cisim üzerinde çözülmüştür. Bu cisme temsili hacim elemanı denilmektedir. Şekil 2 'de b yarıçaplı

bir küre ile bununla eş merkezli a yarıçaplı küreden oluşan temsili hacim elemanı ile b yarıçaplı buna eşdeğer efektif cisim görülmektedir.



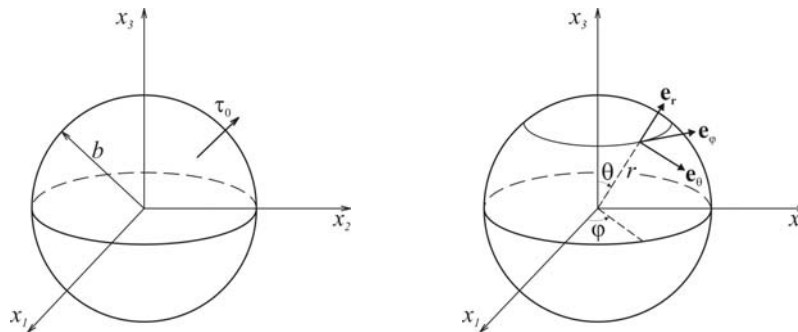
Şekil 2 Parçacık içeren temsili hacim elemanı ve buna eşdeğer efektif cisim

Bahsedilen kompozit malzemelerin elastik sabitlerinin belirlenebilmesi için değişik gerilme etkilerine maruz temsili hacim elemanının üzerlerinde biriken toplam şekil değiştirme işlerinin, efektif cismin ilgili gerilme haline maruz olması durumunda üzerlerinde biriken işlerle eşitliği kullanılacaktır. Küresel parçacık içeren kompozitlerin elastik sabitlerinin tayini aynı metotla Hashin tarafından yapılmış ancak o, toplam işi hesaplamak yerine farklı bir hesap yaparak katsayılar için alt ve üst limitleri tayin etmeye çalışmıştır [2]. Bu çalışmada, K^M , μ^M , K^P , μ^P matris, parçacık ve fiktif malzemelerine ait Bulk ve kayma modülleri sırasıyla K , μ , K^* ve μ^* sembolleri ile gösterilecektir.

2. ANALİTİK ÇÖZÜMLER

2.1 Efektif Bulk Modülünün Hesabı

İlk olarak τ_0 hidrostatik çekme gerilmesi altındaki küresel tek cisim ele alınmıştır. Şekil 3 'de ele alınan problemin geometrisi görülmektedir.



Şekil 3. b yarıçaplı tek kürede hidrostatik çekme problemi ve problemin çözümünde kullanılan koordinat takımı

Küresel koordinat takımında yer değiştirme vektörü ve şekil değiştirme tansörünün bileşenleri

$$\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_\phi \mathbf{e}_\phi \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \varphi} + u_r \sin \theta + u_{\theta} \cos \theta \right) \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} - \frac{u_{\theta}}{r} \right), \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial r} - \frac{u_{\varphi}}{r} \right) \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_{\theta\varphi} = \frac{1}{2r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_{\theta}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \theta} - u_{\varphi} \cot \theta \right) \quad (2.5)$$

şeklindedir. Gerilme halinden ve cismin geometrisine ait dönel simetriden dolayı, yer değiştirmenin yalnızca radyal bileşeni sıfırdan farklı olur. Ayrıca bu bileşenin, θ ve φ 'den bağımsız olduğu açıktır. Başka bir deyişle, u_r yalnızca r değişkenine bağlıdır. Bu, (2.1) - (2.5) bağıntılarında yazılırsa

$$\mathbf{u} = u_r \mathbf{e}_r, \quad u_{\theta} = u_{\varphi} = 0 \quad (2.6)$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{\theta\varphi} = 0 \quad (2.8)$$

sonuçları bulunur. Buradan gerilme-şekil değiştirme bağıntısı ve gerilme bileşenleri yazılırsa

$$\tau_{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2\lambda \frac{u_r}{r} \quad (2.9)$$

$$\tau_{\theta\theta} = \tau_{\varphi\varphi} = \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2(\lambda + \mu) \frac{u_r}{r} \quad (2.10)$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{r\varphi} = \tau_{\theta\varphi} = 0 \quad (2.11)$$

ifadeleri elde edilir. Statik halde kütle kuvvetlerinin sıfır olması durumunda denge denklemleri yer değiştirme vektörü cinsinden

$$(\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} = 0 \quad (2.12)$$

şeklinde yazılır. Bu denklem elde edilen yer değiştirme vektörü ile çözülürse

$$u_r = Ar + \frac{B}{r^2} \quad (2.13)$$

sonucu bulunur. Bu çözümün her yerde geçerli olabilmesi için $r = 0$ 'da u_r 'nin sonlu olması gerekir. Dolayısıyla

$$B = 0 \quad (2.14)$$

bulunur. Bu kullanılarak bileşenler

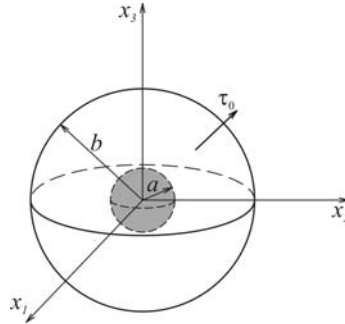
$$u_r = Ar, \quad \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = A \quad (2.15)$$

$$\tau_{rr} = \lambda(3A) + 2\mu A = 3KA, \quad \tau_{\theta\theta} = \tau_{\varphi\varphi} = 3KA \quad (2.16)$$

olarak hesaplanır. Burada K , Bulk modülüdür ve $K = (3\lambda + 2\mu)/3$ şeklinde ifade edilir. A sabitini belirleyebilmek için küresel cismin dış yüzeyinde sadece gerilmenin radyal doğrultuda bileşeni sıfırdan farklı olur ve τ_0 'a eşit olur. Bu yazılır ve bileşenler elde edilirse iş ifadesi, $V b$ yarıçaplı kürenin hacmini göstermek üzere, aşağıdaki gibi elde edilir.

$$U = \frac{1}{2K} V \tau_0^2 \quad (2.17)$$

Ardından iç içe eş merkezli, birlikte çalışan iki kürenin aynı gerilme etkisi altında olduğu problem ele alınmıştır (Şekil 4).



Şekil 4. Hidrostatik çekme altında temsili hacim elemanı

Parçacık ve matris için yer değiştirme vektörleri önceki problemin çözümünden

$$u_r^P = A^P r \quad 0 \leq r \leq a \quad (2.18)$$

$$u_r^M = A^M r + \frac{B^M}{r^2} \quad a \leq r \leq b \quad (2.19)$$

elde edilirler. Bu problemde sınır şartları

$$r = b \text{ 'de} \quad \tau_{rr}^M = \tau_0 \quad (2.20)$$

$$r = a \text{ 'da} \quad u_{rr}^M = u_{rr}^P \quad (2.21)$$

$$r = a \text{ 'da} \quad \tau_{rr}^M = \tau_{rr}^P \quad (2.22)$$

şeklindedir. Bunlar yazılarak elde edilen denklem takımı çözüldüğünde

$$D = \tau_0 \frac{K^M - K^P}{4\mu^M [K^M + (K^P - K^M)c] + 3K^M K^P} \quad (2.23)$$

$$A^P = \tau_0 \frac{(4\mu^M + 3K^M)}{3\{4\mu^M [K^M + (K^P - K^M)c] + 3K^M K^P\}} \quad (2.24)$$

$$A^M = \tau_0 \frac{(3K^P + 4\mu^M)}{3\{4\mu^M [K^M + (K^P - K^M)c] + 3K^M K^P\}} \quad (2.25)$$

Burada $D = B^M/a^3$ olarak tanımlanmıştır. Böylece gerilme ve şekil değiştirme bileşenleri yazılarak toplam şekil değiştirme işi elde edilmiştir.

$$U = \frac{9}{2} V c K^P (A^P)^2 + \frac{9}{2} V K^M (A^M)^2 (1-c) + 6 V \mu^M D^2 (-c^2 + c) \quad (2.26)$$

Temsili hacim elemanı için elde edilen bu iş buna eşdeğer fiktif cisim olarak düşünülebilecek tek kürenin işine eşitlenirse Bulk modülü K^* aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\frac{1}{K^*} = \frac{1}{\tau_0^2} \left\{ 9cK^P (A^P)^2 + (1-c) \left[9K^M (A^M)^2 + 12\mu^M D^2 c \right] \right\} \quad (2.27)$$

2.1 Efektif Kayma Modülünün Hesabı

Problem öncelikle, yine efektif küresel cisim olarak değerlendirilecek tek küresel cisim için çözülecektir. Ele alınan gerilme hali basit kaymadır ve yüzey gerilme vektörü aşağıda yazılmıştır.

$$\mathbf{T} = \tau \mathbf{n} = \tau_o \begin{bmatrix} \sin\theta \sin\varphi \\ \sin\theta \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Problemin geometrisine ve sınır koşullarına uygunluğundan dolayı problem küresel harmonikler kullanılarak çözülmüştür. Bunun için u yer değiştirme vektörünün bir ω küresel harmonik fonksiyonunun gradyanından türetildiği düşünülebilir. Bu problem için bu fonksiyon

$$\omega = x_1 x_2 r^n \quad (2.29)$$

olarak alınmıştır. Üç tip küresel harmonik fonksiyon çözümü şu şekilde verilmektedir.

1. Tip: $\mathbf{u} = r^2 \nabla \omega + \alpha \mathbf{r} \omega$
2. Tip : $\mathbf{u} = \nabla \omega$
3. Tip : $\mathbf{u} = \mathbf{r} \times \nabla \omega$

(2.30)

Burada

$$\mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i, r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad (2.31)$$

şeklinde belirtilir. Bu çözümler yer değiştirme vektörü cinsinden yazılmış denge denklemlerinde yerine konursa n için 0 ve -5 olmak üzere iki sonuç bulunur. Sonuç olarak verilen yüzey gerilme vektörünü sağlayacak yerdeğiştirme alanı küresel harmonikler kullanılarak belirtilen üç tip çözümün bir kombinasyonu olarak yazılır.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^1 + \mathbf{u}^2 + \mathbf{u}^3 + \mathbf{u}^4 + \mathbf{u}^5 + \mathbf{u}^6 \quad (2.32)$$

Bunlar sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü tipteki çözümler için n 'ye ait iki değer için yer değiştirmelerdir ve sırasıyla aşağıda verilmiştir.

$$\mathbf{u}^1 = D_1 \left[r^2 \nabla (x_1 x_2) + \alpha_1 \mathbf{r} x_1 x_2 \right] \quad (2.33)$$

$$\mathbf{u}^2 = D_2 \left[r^2 \nabla \frac{x_1 x_2}{r^5} + \alpha_2 \mathbf{r} \frac{x_1 x_2}{r^5} \right] \quad (2.34)$$

$$\mathbf{u}^3 = D_3 \nabla(x_1 x_2) \quad (2.35)$$

$$\mathbf{u}^4 = D_4 \nabla\left(\frac{x_1 x_2}{r^5}\right) \quad (2.36)$$

$$\mathbf{u}^5 = D_5 [\mathbf{r} \times \nabla(x_1 x_2)] \quad (2.37)$$

$$\mathbf{u}^6 = D_6 \left[\mathbf{r} \times \nabla\left(\frac{x_1 x_2}{r^5}\right) \right] \quad (2.38)$$

Burada α katsayıları yine denge denklemleri kullanılarak hesaplanır.

$$\alpha_1 = -\frac{4\lambda + 14\mu}{5\lambda + 7\mu}, \quad \alpha_2 = \frac{3\lambda + 8\mu}{\mu} \quad (2.39)$$

(2.32) numaralı denklemde kapalı formda yazılan çözümün, ele alınan küresel cismin her yerinde geçerli olması gerekir. Bunun için yer değiştirmeler sonlu olmalıdır. (2.34), (2.36) ve (2.38) 'de verilen u ifadelerininse $r = 0$ için sonlu olmayacakları açıktır. Bunun için bunlara ait katsayılar sıfır olmalıdır.

$$D_2 = D_4 = D_6 = 0 \quad (2.40)$$

Kalan yer değiştirme çözümleri açık şekilde aşağıda yazılmıştır.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^1 &= D_1 \left[(r^2 x_2 + \alpha_1 x_1^2 x_2) \mathbf{e}_1 + (r^2 x_1 + \alpha_1 x_1 x_2^2) \mathbf{e}_2 + \alpha_1 x_1 x_2 x_3 \mathbf{e}_3 \right] \\ \mathbf{u}^3 &= D_3 [x_2 \mathbf{e}_1 + x_1 \mathbf{e}_2] \\ \mathbf{u}^5 &= D_5 [-x_1 x_3 \mathbf{e}_1 + x_2 x_3 \mathbf{e}_2 + (x_1^2 - x_2^2) \mathbf{e}_3] \end{aligned} \quad (2.41)$$

Şekil değiştirme bileşenleri yer değiştirme şekil değiştirme bağıntıları kullanılarak hesaplanmıştır. Toplam şekil değiştirme tansörü bunların kombinasyonu şeklindedir.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^1 & \varepsilon_{12}^1 & \varepsilon_{13}^1 \\ \varepsilon_{21}^1 & \varepsilon_{22}^1 & \varepsilon_{23}^1 \\ \varepsilon_{31}^1 & \varepsilon_{32}^1 & \varepsilon_{33}^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^3 & \varepsilon_{12}^3 & \varepsilon_{13}^3 \\ \varepsilon_{21}^3 & \varepsilon_{22}^3 & \varepsilon_{23}^3 \\ \varepsilon_{31}^3 & \varepsilon_{32}^3 & \varepsilon_{33}^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^5 & \varepsilon_{12}^5 & \varepsilon_{13}^5 \\ \varepsilon_{21}^5 & \varepsilon_{22}^5 & \varepsilon_{23}^5 \\ \varepsilon_{31}^5 & \varepsilon_{32}^5 & \varepsilon_{33}^5 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Gerilme bileşenleri de buradaki şekil değiştirme bileşenlerinden gerilme-şekil değiştirme bağıntıları kullanılarak hesaplanır. Toplam gerilme tansörü yine aynı şekilde yazılır. Gerilme ve şekil değiştirme bileşenleri ile toplam şekil değiştirme işinin hesaplandığı integral yazılmadan önce kartezyen koordinatlar küresel koordinatlarda yazılmıştır. Sınır koşulu olarak gerilmenin değeri $r = b$ 'de yüzey gerilmesi değerine eşitlenerek katsayılar aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır.

$$D_1 = 0, \quad D_3 = \frac{\tau_o}{2\mu}, \quad D_5 = 0 \quad (2.43)$$

Sonuç olarak basit kayma etkisi altındaki tek kürede toplam şekil değiştirme işi aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır.

$$U = \frac{\tau_o^2}{3\mu} \pi b^3 \quad (2.44)$$

Bundan sonra iç içe eş merkezli iki kürenin basit kayma etkisi altında işi hesaplanmıştır. Burada önceki problemdekine benzer olarak yer değiştirme vektörleri matris ve partikül için aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^M &= \mathbf{u}^{1M} + \mathbf{u}^{2M} + \mathbf{u}^{3M} + \mathbf{u}^{4M} + \mathbf{u}^{5M} + \mathbf{u}^{6M} \\ \mathbf{u}^P &= \mathbf{u}^{1P} + \mathbf{u}^{2P} + \mathbf{u}^{3P} + \mathbf{u}^{4P} + \mathbf{u}^{5P} + \mathbf{u}^{6P} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Burada bilinmeyenler matris için $B_1, B_2, \dots, B_6$ ve parçacık için $A_1, A_2, \dots, A_6$ olmak üzere toplam 12 adettir. Partikülde $r = 0$ 'da yer değiştirmenin sonlu olması için aşağıdaki koşul sağlanmalıdır. Buradan

$$A_2 = A_4 = A_6 = 0 \quad (2.46)$$

olur ve bilinmeyen sayısı dokuza iner. Üç grup sınır koşulu yazılmıştır. Burada bileşenler küresel koordinatlar cinsinden yazılmıştır. Bunlar

$$\mathbf{u}^P(r=a) = \mathbf{u}^M(r=a) \quad (2.47)$$

$$\tau^P(r=a) = \tau^M(r=a) \quad (2.48)$$

$$\tau^M(r=b) = \mathbf{T} \quad (2.49)$$

Bu denklemlerden her birinde θ ve ϕ nin lineer bağımsız fonsiyonlarının katsayıları eşitlenirse dokuz adet denklem elde edilir. Ancak bunlar üç lineer bağımsız denklemin tekrarlanması olarak ortaya çıkar. Sonuç olarak toplamda dokuz denklem yazılmış olur. Bu denklemlerin üçünün çözümünden

$$A_5 = B_5 = B_6 = 0 \quad (2.50)$$

Geriye kalan altı katsayı için altı denkleme çözmenin zor olduğu görülmüştür. Bu sebeple matris ve partikül için iş ifadeleri bu katsayılara bağlı yazılacak, daha sonra hacim oranına bağlı değişimi belirlemek için sayısal çözümler yapılarak her hacim oranına karşı gelen katsayılar ve temsili hacim elemanın işi hesaplanacaktır. Bu her hacim oranı için efektif cisim olarak düşünülecek tek kürenin işine eşitlenerek efektif kayma modülü elde edilmiş olacaktır. Burada partiküle ve matrise ait şekil değiştirme işlerinin ifadeleri verilmiştir.

$$\begin{aligned} U^P &= \frac{4\pi\mu^P}{5(5\lambda^P + 7\mu^P)^2} [14a^5 A_1 A_3 (\lambda^P + \mu^P)(5\lambda^P + 7\mu^P) + \frac{5}{3} a^3 A_3^2 (5\lambda^P + 7\mu^P)^2 + \frac{1}{7} a^7 A_1^2 (263(\lambda^P)^2 \\ &+ 784\lambda^P \mu^P + 441(\mu^P)^2)] \end{aligned}$$

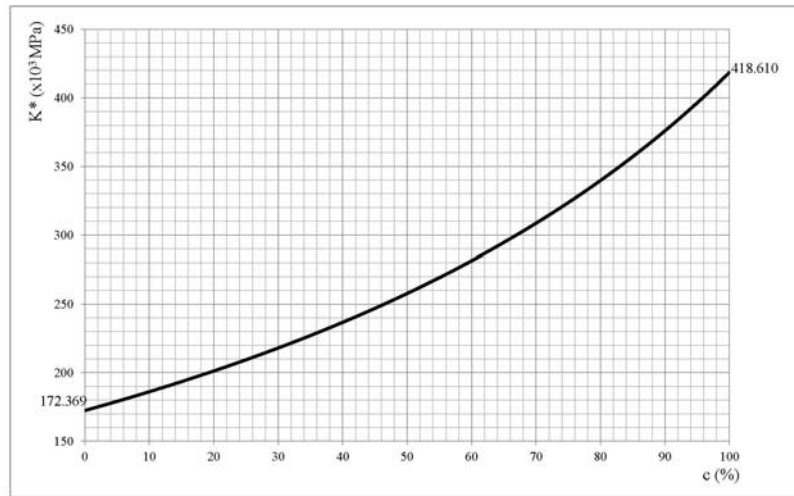
$$\begin{aligned}
U^M = & \frac{2\pi}{315a^7b^7\mu^M(5\lambda^M+7\mu^M)^2} \{ -1764a^{12}b^7B_1B_3(\mu^M)^2(\lambda^M+\mu^M)(5\lambda^M+7\mu^M) \\
& -210a^{10}b^7B_3^2(\mu^M)^2(5\lambda^M+7\mu^M)^2+1760b^7B_4^2(\mu^M)^2(5\lambda^M+7\mu^M)^2 \\
& -2112a^2b^7B_2B_4\mu^M(\lambda^M+\mu^M)(5\lambda^M+7\mu^M)^2 \\
& -18a^9b^7B_1B_2\mu^M(5\lambda^M+7\mu^M)(-27(\lambda^M)^2+204\lambda^M\mu^M+196(\mu^M)^2) \\
& +3a^4b^7B_2^2(5\lambda^M+7\mu^M)^2(263(\lambda^M)^2+664\lambda^M\mu^M+436(\mu^M)^2) \\
& -18a^{14}b^7B_1^2(\mu^M)^2(263(\lambda^M)^2+784\lambda^M\mu^M+441(\mu^M)^2) \\
& +a^7[1764b^{12}B_1B_3(\mu^M)^2(\lambda^M+\mu^M)(5\lambda^M+7\mu^M) \\
& +210b^{10}B_3^2(\mu^M)^2(5\lambda^M+7\mu^M)^2-1760B_4^2(\mu^M)^2(5\lambda^M+7\mu^M)^2 \\
& +2112b^2B_2B_4\mu^M(\lambda^M+\mu^M)(5\lambda^M+7\mu^M)^2 \\
& +18b^9B_1B_2\mu^M(5\lambda^M+7\mu^M)(-27(\lambda^M)^2+204\lambda^M\mu^M+196(\mu^M)^2) \\
& -3b^4B_2^2(5\lambda^M+7\mu^M)^2(263(\lambda^M)^2+664\lambda^M\mu^M+436(\mu^M)^2) \\
& +18b^{14}B_1^2(\mu^M)^2(263(\lambda^M)^2+784\lambda^M\mu^M+441(\mu^M)^2)] \}
\end{aligned} \tag{2.51}$$

3. SONUÇLAR

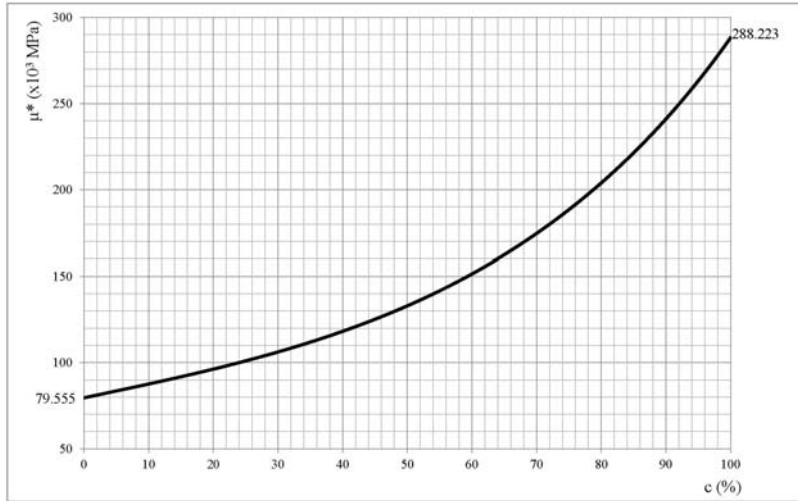
Elde edilen ifadelerde malzeme sabitlerinin hacim oranı ile değişimlerini görebilmek için belirli iki malzeme ile sonuçlar elde edilmiştir. Seçilen malzemeler Hashin'in 1962'deki çalışmasında seçtiği (Tungsten karbür – Kobalt alaşımı) malzemelerdir. Bu malzemelere ait Bulk ve kayma modülleri aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}
K^M &= 172368.93 \times 10^6 \text{ Pa}, & \mu^M &= 79554.89 \times 10^6 \text{ Pa} \\
K^P &= 418610.26 \times 10^6 \text{ Pa}, & \mu^P &= 288223.46 \times 10^6 \text{ Pa}
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Sonuçlar hacim artışının her 0.01 'lik artışı için sayısal olarak, yazılan bir Fortran programı yardımıyla hesaplanmıştır. Şekil 5 ve 6 'da kompozit malzemenin hacim oranına bağlı olarak elde edilen sırasıyla Bulk ve kayma modülü değişimlerinin grafikleri görülmektedir.

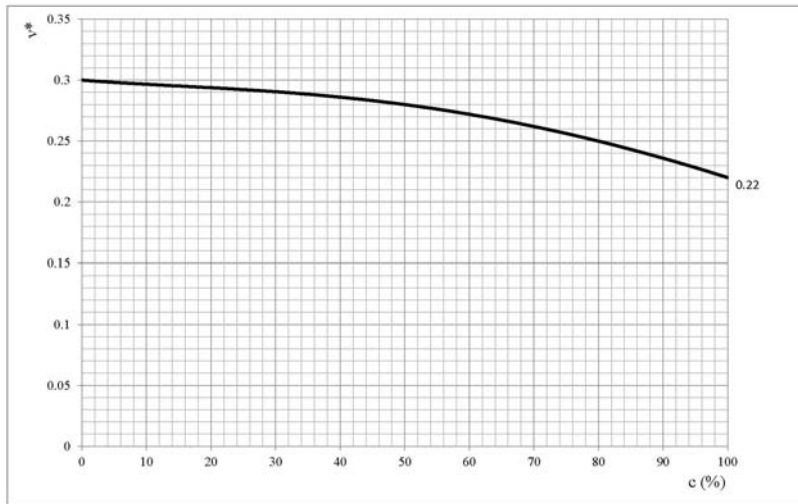


Şekil 5. Parçacık içeren kompozitin Bulk modülünün hacim konsantrasyonu ile değişimi



Şekil 6. Parçacık içeren kompozitin kayma modülünün hacim konsantrasyonu ile değişimi

Poisson oranı, Bulk ve kayma modülü cinsinden ifade edilebilir. Böylece parçacık içeren kompozitin Poisson oranının hacim oranı ile değişimi hesaplanmış ve grafiği çizilmiştir (Şekil 7).

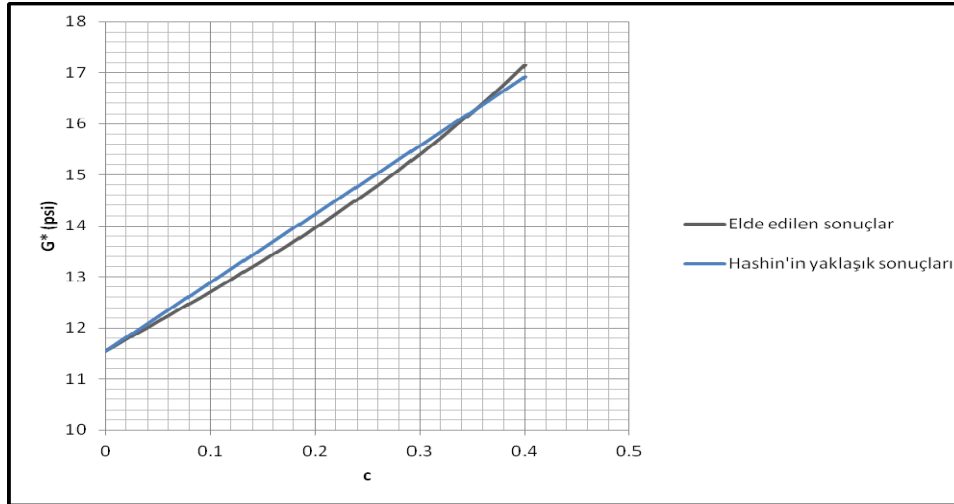


Şekil 7. Parçacık içeren kompozitin Poisson oranının hacim konsantrasyonu ile değişimi

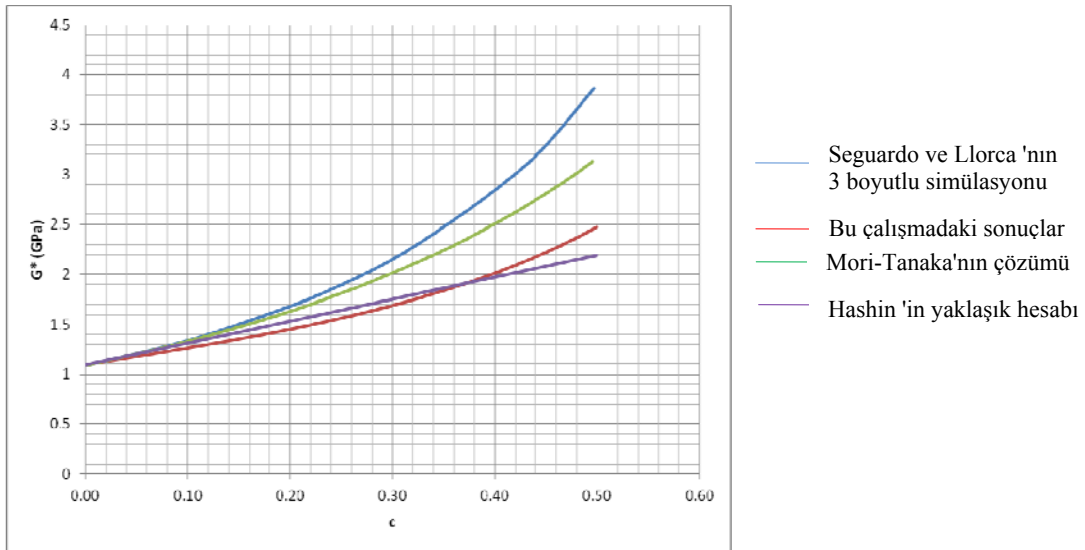
Efektif Bulk modülü için Hashin (1962) makalesinde varyasyonel yöntemle bir üst ve bir alt sınır hesaplanmış ardından bunların üst üste düştüğünü belirtmiştir. Bu çalışmada yapılan hesap metodu temelde bahsi geçen makaledeki ile aynı olmasına karşın kesin çözümü vermektedir.

Kayma modülü için ise bahsi geçen yayında yaklaşık bir çözüm verilmiştir (Şekil 7). Ayrıca literatürde Segurado ve Llorca (2002) makalesinde, epoksi/cam parçacık malzemelerinden oluşan kompozitten seçtiği, parçacıkların kendi geliştirdikleri bir algoritmaya göre dağılım gösterdiği dikgörtgen prizması formundaki birim hücrede 3-boyutlu sonlu eleman analizinin sonuçlarını vermiştir. Ayrıca bu makalede sonuçları karşılaştırılan Benveniste (1987), Mori-Tanaka teorisinin geliştirilmiş bir uygulaması ile çözüm vermiştir. Bunlardan başka Yu ve Tang (2006), birim hücre homojenleştirmesi için varyasyonel asimptotik metod (VAMUCH) olarak isimlendirdikleri sonlu eleman analizi ile efektif kayma gerilmesi için sonuçlar vermiştir. Bahsedilen sonuçlar bu çalışmadaki sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Şekil 8 'de epoksi reçine/cam parçacıktan oluşan kompozitin hacim oranı ile değişimi matris ve partikül için sırasıyla Bulk ve kayma modülleri 4.167 GPa, 38.89 GPa, 1.087 GPa ve 29.167 GPa alınarak karşılaştırılmıştır. Şekil 9 'da ise Yu ve Tang 'ın kullandığı malzeme sabitleri kullanılarak elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

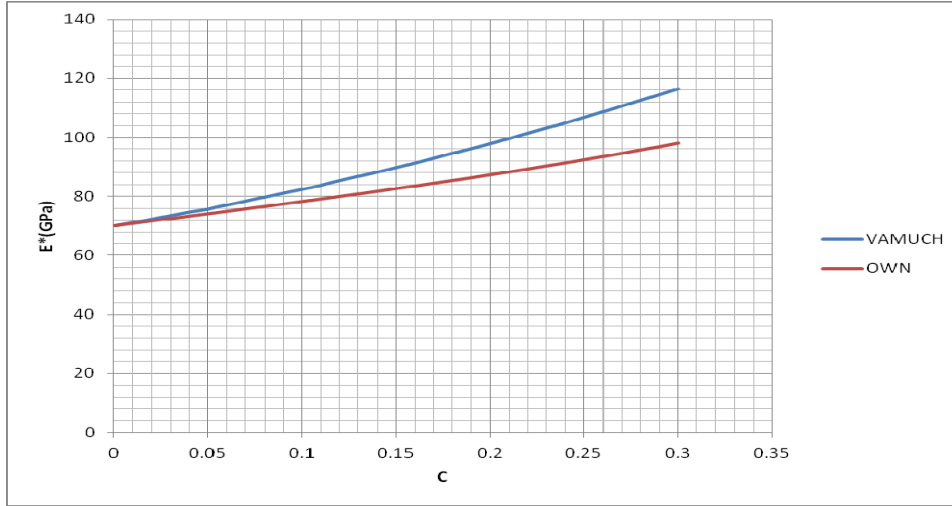


Şekil 7. Hashin 1962 'de elde edilen kayma modülü için yaklaşık çözüm ile bu çalışmadaki kesin çözümün hacim oranına bağlı olarak karşılaştırması ($\mu^P = 11.54$ psi , $\mu^M = 41.80$ psi)

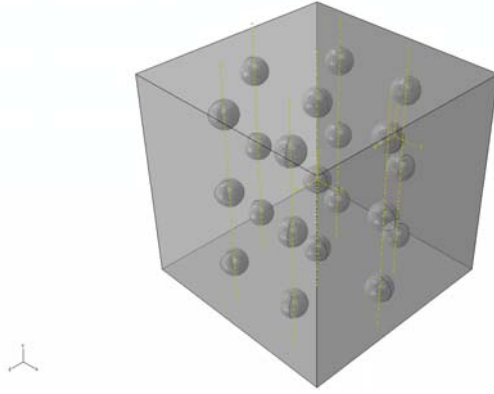


Şekil 8. Değişik sonuçların epoksi reçine/cam parçacık kompozitine ait kayma modülü için hacim oranı ile değişimlerinin karşılaştırılması

Bu çalışmada ayrıca sayısal bir analiz yapılmıştır. Parçacık içeren kompozit için küp şeklinde seçilen bir küresel matrisin içerisinde küresel parçacıklar uniform bir dağılımla yerleştirilerek bir sonlu eleman modeli oluşturulmuş ve değişik hacim oranları için ABAQUS isimli programla ortalama gerilme şekil değiştirme değerleri elde edilmiştir. Şekil 10 'da parçacıkların belirli bir hacim oranında yerleşimi görülmektedir.



Şekil 9. VAMUCH 'dan elde edilen sonuçlarla bu çalışmadan elde edilen sonuçların karşılaştırılması ($E_M = 70$ GPa, $E_P = 350$ GPa, $\nu_M = 0.3$, $\nu_P = 0.3$)



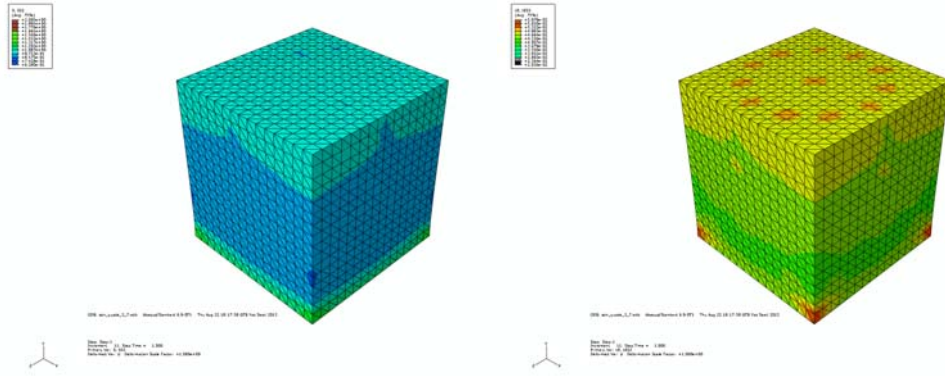
Şekil 10. Parçacıkların matris içerisinde yerleşimi

Tabanından ankastre olarak tutulan bu kompozite üst yüzeyinde birim çekme yüzey gerilmesi uygulanmıştır.

Analizi yapılan kompozitlerde hacim oranları 2.5, 3.7, 6.1, 8.3 ve 19.6'dır. Küresel parçacıkların yarıçapları 1 cm ve küpün kenarları 16 cm olarak seçilmiştir. Hacim oranını değiştirmek için eklenen küre sayıları artırılmıştır. Şekil 11 'de %3.7 hacim oranında parçacık içeren kompozite ait bu modelde elde edilen yükleme doğrultusu olan düşey doğrultudaki gerilme ve şekil değiştirme dağılımları görülmektedir.

Analizde C3D4 (4 nodlu lineer tetrahedron) eleman kullanılmıştır. Kullanılan eleman sayıları yukarıda verilen değişik hacim oranları için sırasıyla 46807, 55961, 59701, 37905, ve 36176 'dır.

Modelin orta bölgesinden gerilme ve şekil değiştirme değerleri alınıp buradan kompozitin elastisite modülü hesaplanmıştır. Matrisin ve partikülün elastisite modülleri ve Poisson oranları sırasıyla 20.68×10^6 N/cm², 70.33×10^6 N/cm² ve 0.3, 0.22 ' dir. Sonuçlar sırasıyla aşağıdaki tabloda verilmiş ve analitik olarak bu çalışmada yapılan çözümün sonuçları ile karşılaştırması Şekil 12 'de verilmiştir.



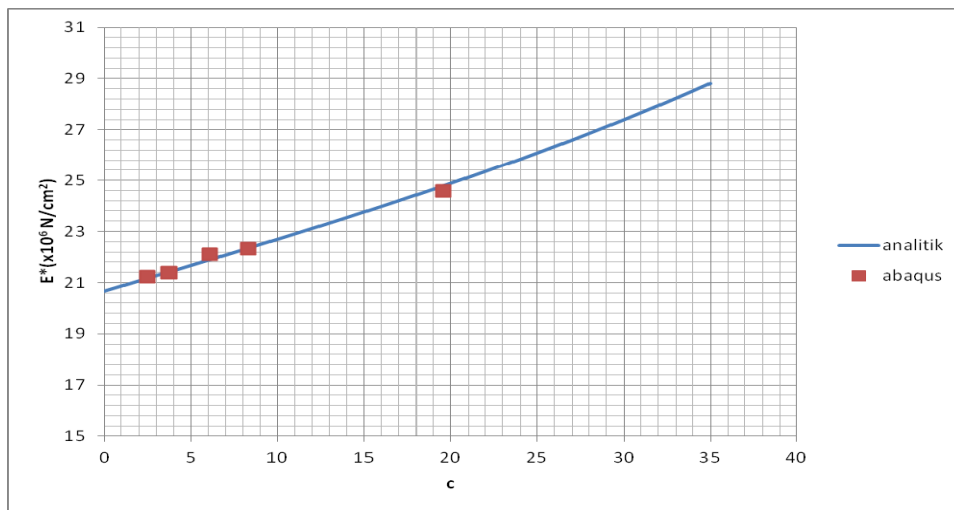
(a)

(b)

Şekil 11. %3.7 hacim oranında parçacık içeren kompozitin (a) gerilme ve (b) şekil değiştirme dağılımı

Tablo 1. Hacim oranına bağlı olarak ABAQUS modelinden elde edilen kompozitin Elastisite modülleri

Hacim oranı c	E.M. ($\times 10^6 \text{ N/cm}^2$)
2.5	21.22
3.7	21.39
6.1	22.12
8.3	22.33
19.6	24.59



Şekil 12. ABAQUS sonuçları ile analitik çözümün karşılaştırılması

KAYNAKLAR

- [1] Hashin, Z., "The elastic moduli of heterogeneous materials", Journal of Applied Mechanics - Transactions of the ASME, 29, 143-150, 1962.
- [2] Hashin, Z., "Analysis of Composite Materials - A Survey," Journal of Applied Mechanics - Transactions of the ASME, vol: 50, no: 3, p. 481-505, 1983.
- [3] Moon, P., Spencer, D.E., Field Theory Handbook, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1961.
- [4] Love, A. E. H., A treatise on the mathematical theory of elasticity. New York, Dover Publication 1944.
- [5] Segurado, J. ve Llorca, J. "A numerical approximation to the elastic properties of sphere-reinforced composites", Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 50, 2107 – 2121, 2002.
- [6] Beneviste, Y. "A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials", Mechanics of Materials, 6, 147-157, 1987.
- [7] Yu, W. ve Tang, T. "Variational asymptotic method for unit cell homogenization of periodically heterogeneous materials", International Journal of Solids and Structures, 44, 3738–3755, 2007.