



İNDİRGENMİŞ NOKTASAL İNTEGRASYON KULLANARAK KALIN KİRİŞLERİN ELASTO-PLASTİK DAVRANIŞLARININ NİY VE RNİY YÖNTEMLERİ İLE İNCELEMESİ

B. Kanber¹ ve N. F. Doğan¹

¹ Gaziantep Üniversitesi, Makine Mühendisliği Bölümü, 27310, Gaziantep

ABSTRACT

In this study, the point interpolation method (PIM) and radial point interpolation method (RPIM) are used to compare solutions of elasto-plastic thick beams. In solutions, reduced and higher order nodal integrations based on Taylor series expansion are compared with each other and also other techniques. The effects of number of integration term, support domain sizes and RPIM shape parameters on the convergency are also investigated. Nodal stiffness matrices are obtained using Timoshenko beam theory. In addition, the results are compared with finite element solutions in ANSYS.

ÖZET

Bu çalışmada, kalın kirişlerin elasto-plastik davranışlarının incelenmesi, ağırsız yöntemlerden olan Noktasal İnterpolasyon (NİY) ve Radyal Noktasal İnterpolasyon (RNİY) yöntemleri ile gerçekleştirilmiştir. Yapılan çözümlerde, indirgenmiş ve yüksek dereceli Taylor noktasal integrasyon teknikleri birbirleriyle kıyaslanmış, ayrıca bu sonuçlar diğer tekniklerle de karşılaştırılmıştır. İntegrasyon yapılırken kullanılan terim sayısının, NİY ve RNİY üzerine etkileri araştırılmıştır. Noktasal direngenlik matrisinin elde edilmesi, Timoshenko kiriş teorisine göre gerçekleştirilmiştir. Farklı etki alanı büyüklükleri ve farklı RNİY şekil parametrelerinin çözümler üzerine etkileri ele alınmıştır. Elde edilen çözümler, ANSYS paket programı kullanılarak sonlu elemanlar yöntemiyle kıyaslanmıştır.

GİRİŞ

Klasik sonlu elemanlar yöntemlerinde [1,2] ve sonlu hacimler yöntemlerinde [3] problem alanı ağırlara(elemanlara ya da hacimlere) ayrılarak çözüm yapılır. Ağırsız yöntemlerde [4,5,6] ise, isminden de anlaşılacağı üzere, önceden tanımlı bir ağ yapısı olmaksızın, cebirsel eşitlik sistemleri sınır koşulları ile belirtilmiş problem alanına dağıtılan düğüm noktaları kullanılarak oluşturulur ve çözüme ulaşılır.

Sonlu elemanlar yönteminin küçük deformasyon problemlerinde çok iyi sonuçlar verdiği bilinen bir gerçek olmasına karşın, büyük deformasyonların gerçekleştiği durumlarda, elemanlar çok fazla şekil değiştirebilmekte ve hata oranları yükselmektedir. Oluşan hata oranını azaltmak için ise yük tek seferde değil parça parça uygulanmakta, bunun sonucu olarak, işlem zamanı uzamaktadır. Ağırsız yöntemlerde çözüm düğüm noktaları üzerinde yapıldığından, büyük deformasyon problemlerinde önemli avantajlar sağlamaktadır. Aynı zamanda, ağırsız yöntemler nokta dağılımında serbestlik imkânı sunduğu için, çözüm doğruluğunun geliştirilmesinde mükemmel bir esneklik sunmaktadır.

ELASTO-PLASTİK KALIN KİRİŞLER

Sabit yayılı yük q altındaki kirişler için; dw düşey yer değiştirmeler, $d\theta$ sanal normal dönme, $-z[d(\delta\theta)/dx]$ ilgili sanal eğrilik ve $\delta\beta$ kesme şekil değiştirmeleri olmak üzere, genel iş denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir[1]:

$$\int_0^l \int_{-t/2}^{t/2} \int_{b(-t/2)}^{b(t/2)} \left\{ -z \frac{d(\delta\theta)}{dx} \sigma_x + \delta\beta \tau_{xz} \right\} dy dz dx - \int_0^l \delta w q dx = 0 \quad (1)$$

Burada t kiriş kalınlığı ve b kiriş genişliğidir. Aynı zamanda (1) numaralı eşitlik, $\mathbf{K}_f$ genel eğilme direngenlik matrisi, $\mathbf{K}_s$ genel kesme direngenlik matrisi ve $\mathbf{F}$ genel kuvvet vektörü olmak üzere:

$$[\mathbf{K}_f + \mathbf{K}_s] \boldsymbol{\varphi} - \mathbf{F} = 0 \quad (2)$$

şeklinde yazılabilir[3]. Burada kullanılan genel matrisler, noktasal değerler üzerinden uygun birleştirmeler yapılarak elde edilir. Aşağıda bu matrislerin noktasal vektörleri, x_1 ve x_2 integrasyon alanının sınırları, EI eğilme rijitliği, GA kayma rijitliği ve ϕ NİY ya da RNİY ile elde edilmiş noktasal şekil fonksiyonu olmak üzere verilmektedir.

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_f &= \int_{x_1}^{x_2} [\mathbf{B}_f]^T (EI) \mathbf{B}_f dx \\ \mathbf{k}_s &= \int_{x_1}^{x_2} [\mathbf{B}_s]^T (GA) \mathbf{B}_s dx \\ \mathbf{f} &= \int_{x_1}^{x_2} [\phi_1 \quad 0 \quad \phi_2 \quad 0]^T q dx \end{aligned} \quad (3)$$

Yerel destek alanındaki düğüm noktası sayısı n olmak üzere, düğüm noktası i üzerindeki düşey yer değiştirme w_i ve eğim θ_i şekil fonksiyonları cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilebilir[2]:

$$\begin{aligned} w_i &= \phi_1 w_1 + \phi_2 w_2 + \dots + \phi_n w_n \\ \theta_i &= \phi_1 \theta_1 + \phi_2 \theta_2 + \dots + \phi_n \theta_n \end{aligned} \quad (4)$$

Eğim-yer değiştirme ilişkisini kullanarak, $\mathbf{B}_f$ eğim-yer değiştirme matrisi aşağıdaki gibi ifade edilir[1]:

$$\mathbf{B}_f = \begin{bmatrix} 0 & \frac{d\phi_1}{dx} & 0 & \frac{d\phi_2}{dx} & \dots & 0 & \frac{d\phi_n}{dx} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Ve aynı şekilde $\mathbf{B}_s$ kayma şekil değiştirme-deplasman matrisi:

$$\mathbf{B}_s = \begin{bmatrix} \frac{d\phi_1}{dx} & -\phi_1 & \frac{d\phi_2}{dx} & -\phi_2 & \dots & \frac{d\phi_n}{dx} & -\phi_n \end{bmatrix} \quad (6)$$

Destek alanındaki eğilme momentleri ve kesme kuvvetleri bu iki matris cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilir[1]:

$$M = (EI) \mathbf{B}_f \boldsymbol{\varphi} = \left(\frac{EI}{l} \right) (\theta_1 - \theta_2) \quad (7)$$

$$Q = (GA) \mathbf{B}_s \boldsymbol{\varphi} = (GA) \left\{ \left(\frac{w_2 - w_1}{l} \right) - \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \right\} \quad (8)$$

θ_1 , θ_2 yerel düğüm noktasındaki eğimleri, l ise integrasyon alanının büyüklüğünü ifade etmektedir. Bilindiği gibi kesme kuvveti, yerel destek alanında lineer olarak değişim gösterir,

eğer bu kuvveti destek alanının orta noktasında hesaplarsak ortalama bir değer bulmuş olunur ve sabit kabul edilebilir.

Plastik bölgede, maksimum eğilme momenti akma gerilimi σ_0 cinsinden şu şekilde ifade edilebilir:

$$M_0 = \int_{b(-t/2)}^{b(t/2)} \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_0 dz dy \quad (9)$$

Burada dikkat edilmesi gereken noktalardan biri de, eğilme momenti maksimum yani akma değerine eriştiğinde, çalışılan kesit tümüyle plastik bölgeye girmiş kabul edildiğidir. Akma sonrasında yani plastik bölgede, EI değeri, yerini aşağıdaki değere bırakır:

$$(EI)_{ep} = EI \left(1 - \frac{EI}{EI + H'} \right) \quad (10)$$

H' değeri pekleşme parametresini ifade eder ve, H' değeri; $H' = dM/(d\epsilon_f)_p$ şeklinde ifade edilir.

NOKTASAL İNTERPOLASYON YÖNTEMİ (NİY)

Bir sistemin toplam potansiyel enerjisi, birbiri üstüne gelmeyen integrasyon alanlarında yazılmış integrallerin toplamı şeklinde ifade edilebilir. Sabit eğilme direngenliğine sahip ince bir kirişin integrasyon alanındaki (Ω_Q) birim şekil değiştirme enerjisi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$U_{\Omega_Q} = EI_z \int_{\Omega_Q} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx \quad (11)$$

Düğüm noktaları ile oluşturulmuş ve sınır koşulları ile belirlenmiş Ω problem alanında tanımlı bir $u(x)$ fonksiyonu ele alalım. $u(x)$ fonksiyonu, integrasyon noktası x_Q üzerinde [5] tarafından sunulan $B_i(x)$ temel fonksiyonu, a_i temel fonksiyonuna ait katsayılar ve n yerel destek alanındaki düğüm nokta sayısı olmak üzere aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$u(x, x_Q) = \sum_{i=1}^n B_i(x) a_i \quad (12)$$

Temel fonksiyonu olarak polinom kullanıldığında $u(x)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$u(x, x_Q) = \sum_{i=1}^n p_i(x) a_i(x_Q) = \mathbf{p}^T(x) \mathbf{a}(x_Q) \quad (13)$$

Burada verilen $p_i(x)$ kartezyen koordinatlarda tanımlı terimleri, a , $p_i(x)$ temel fonksiyonun katsayı matrisidir. n destek alanındaki nokta sayısı olmak üzere, bir boyutta polinom temel fonksiyonu aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\mathbf{p}^T(x) = [1, x, x^2, x^3, x^4, \dots, x^{n-1}] \quad (14)$$

i düğüm noktasında (13) numaralı eşitlik aşağıdaki formatta ifade edilir:

$$\mathbf{u}^{sd} = \mathbf{P}_Q \mathbf{a} \quad (15)$$

Genel yer değiştirme, $\mathbf{u}^{sd}$ vektörü:

$$\mathbf{u}^{sd} = \{[w_1, \theta_1, w_2, \theta_2, \dots, w_n, \theta_n]^T\} \quad (16)$$

ve bir boyutta moment matrisi $\mathbf{P}_Q$ şu şekilde ifade edilir:

$$\mathbf{P}_Q = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Eğer, moment matrisin tersi varsa, (15) numaralı eşitliği kullanarak katsayı matrisi:

$$\mathbf{a} = \mathbf{P}_Q^{-1} \mathbf{u}^{sd} \quad (18)$$

Son olarak (13) numaralı eşitlik aşağıdaki hali alır:

$$u(x, x_Q) = \mathbf{p}^T(x) \mathbf{P}_Q^{-1} \mathbf{u}^{sd} \quad (19)$$

$\phi(x)$, NİY şekil fonksiyonu olmak üzere:

$$\phi(x) = \mathbf{p}^T \mathbf{P}_Q^{-1} = [\phi_1(x) \quad \phi_2(x) \dots \phi_n(x)] \quad (20)$$

RADYAL NOKTASAL İNTERPOLASYON YÖNTEMİ (RNİY)

Bu yöntemde, alan değişkeni radyal temel fonksiyonu kullanılarak hesaplanır. Böylece, (12) numaralı eşitlik; $\mathbf{a}$, radyal temel fonksiyonun katsayı matrisi; $\mathbf{R}$, radyal temel fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki şekilde yazılır [5]:

$$u(x, x_Q) = \sum_{i=1}^n R_i(x) a_i = \mathbf{R}^T(x) \mathbf{a}(x_Q) \quad (21)$$

r değeri, üzerinde hesap yapılan düğüm noktası x ile destek alanındaki diğer düğüm noktası x_i arasındaki uzaklık olmak üzere, vektörel olarak temel fonksiyonu $\mathbf{R}$ üssü olmadan da kullanılabildiği gibi, çözüm hassasiyetini artırmak amacıyla aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\mathbf{R}^T = [R_1(r_1)^0, R_2(r_2)^1, R_3(r_3)^2, \dots, R_n(r_n)^{n-1}] \quad (22)$$

Literatürde birçok radyal temel fonksiyonu bulunmakla birlikte, bu çalışmada ikinci dereceden radyal temel fonksiyonu (MQ RTF) $((r_i^2 + (\alpha_c * d_c)^2)^q)$ kullanılmıştır. Burada bulunan r_i incelenen düğüm noktası ile komşu düğüm noktası arasındaki mesafeyi vermektedir. MQ RTF 'nun yapısında, şekil fonksiyonunu kontrol eden α_c ve q olmak üzere iki şekil parametresi bulunmaktadır. Bu parametrelerin alabileceği değerler çeşitli çalışmalarla sunulmuştur. Fonksiyonda bulunan d_c , problem alanındaki noktasal yerleşimi ifade eder. Eğer, düğüm noktaları eşit aralıklarla dağıtılmışsa, bu değer iki düğüm noktasındaki mesafeye eşit olur. Diğer durumlarda, düğüm noktaları arasındaki ortalama mesafeye eşit olur. Bu parametreler, çözümün hassasiyetini artırma amaçlı değiştirilebilir.

Q düğüm noktasında yapılan interpolasyon neticesinde (21) numaralı eşitlik aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$u(x_Q) = \sum_{i=1}^n a_i R_i(x_Q) \quad (23)$$

Yukarıdaki eşitlik, vektörel formda genel yer değiştirme $\mathbf{u}^{sd}$ vektörü kullanılarak aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\mathbf{u}^{sd} = \mathbf{R}_Q \mathbf{a} \quad (24)$$

(24) numaralı eşitlikte bulunan $\mathbf{R}_Q$ radyal temel fonksiyonunun moment matrisidir ve aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{R}_Q = \begin{bmatrix} R_1(r_1)^0 & R_2(r_1)^1 & \dots & R_n(r_1)^{n-1} \\ R_1(r_2)^0 & R_2(r_2)^1 & \dots & R_n(r_2)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1(r_n)^0 & R_2(r_n)^1 & \dots & R_n(r_n)^{n-1} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$\mathbf{R}_Q$ moment matrisinin tersi olduğundan, katsayı matrisi $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{a} = \mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{u}^{sd} \quad (26)$$

Katsayı matrisi $\mathbf{a}$, (21) numaralı eşitlikte kullanıldığında:

$$u(x, x_Q) = \mathbf{R}^T(x) \mathbf{R}_Q^{-1} \mathbf{u}^{sd} \quad (27)$$

Son olarak, RNİY şekil fonksiyonu $\phi(x)$ aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\phi(x) = \mathbf{R}^T(x) \mathbf{R}_Q^{-1} = [\phi_1(x) \quad \phi_2(x) \dots \phi_n(x)] \quad (28)$$

İNTEGRASYON YÖNTEMLERİ

Destek alanındaki $\mathbf{u}(x)$ matrisi, (19) ve (20) ya da (27) ve (28) numaralı eşitlikler kullanıldığında aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\mathbf{u}(x) = \phi^T \mathbf{u}^{sd} \quad (29)$$

Deplasman matrisi, (11) numaralı denklemde yazıldığında:

$$U = EI_z (\mathbf{u}^{sd})^T \int \frac{d^2}{dx^2} \phi^T \frac{d^2}{dx^2} \phi \mathbf{u}^{sd} dx \quad (30)$$

Noktasal direngenlik matrisi, k_{ij} :

$$k_{ij} = EI_z \int \left(\frac{d^2 \phi}{dx^2} \right)^T \left(\frac{d^2 \phi}{dx^2} \right) dx \quad (31)$$

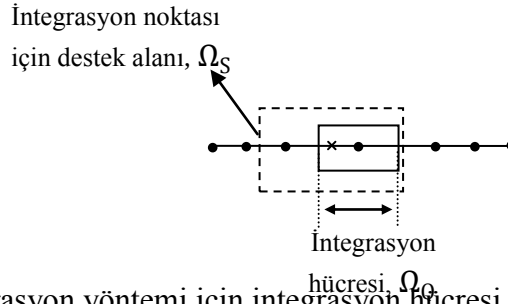
burada i ve j sayıları 1'den n 'ye kadar değişir. n destek alanındaki düğüm noktası sayısını gösterir.

Gauss İntegrasyon Yöntemi

(31) numaralı denklemi çözmek için iki farklı integrasyon şeması kullanılmıştır. Bunlardan ilki standart Gauss integrasyonudur. Bu yöntemde, Şekil 1'de gösterilen integrasyon hücreleri kullanılır. Ve şekil fonksiyonları, destek alanı içinde her bir düğüm noktası için hesaplanır. Noktasal eğilme direngenlik matrisi $\mathbf{k}_f$ ve noktasal kayma direngenlik matrisi $\mathbf{k}_s$ aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_f &= EI * (Jac) * \left[(w_1) \left([\mathbf{B}_f]^T_{q1} * [\mathbf{B}_f]_{q1} \right) + (w_2) \left([\mathbf{B}_f]^T_{q2} * [\mathbf{B}_f]_{q2} \right) \right] \\ \mathbf{k}_s &= GA * (Jac) * \left[(w) \left([\mathbf{B}_s]^T_q * [\mathbf{B}_s]_q \right) \right] \end{aligned} \quad (32)$$

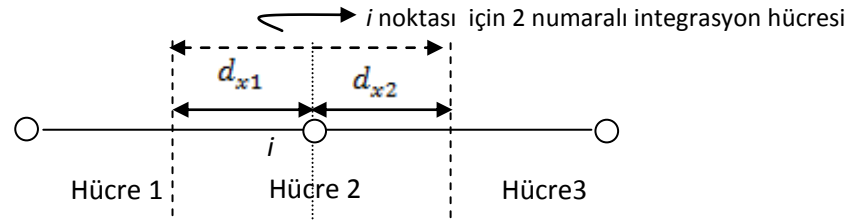
Burada Jac , Jacobian matrisi; w_1, w_2 ağırlık fonksiyonlarını; $q1, q2$ integrasyon noktalarını; H ise NİY ya da RNİY ile hesaplanan şekil fonksiyonlarını belirtmektedir. Dikkat edileceği üzere, $\mathbf{k}_f$ hesaplanırken iki tane gauss noktası, $\mathbf{k}_s$ hesaplanırken ise bir tane gauss noktası kullanılmıştır.



Şekil 1. Gauss integrasyon yöntemi için integrasyon hücresi ve integrasyon noktası için destek alanının gösterimi.

İndirgenmiş Noktasal İntegrasyon Yöntemi

İkinci integrasyon yöntemi, indirgenmiş noktasal integrasyon yöntemidir. Bu yöntemde, noktasal direngenlik matrisleri Taylor serisi açılımı kullanılarak yazılır. Yine bu noktada dikkat edilmesi gereken nokta, k_s hesaplanırken kullanılan terim sayısıdır. Böylece noktasal direngenlik matrisleri şu şekilde ifade edilebilir:

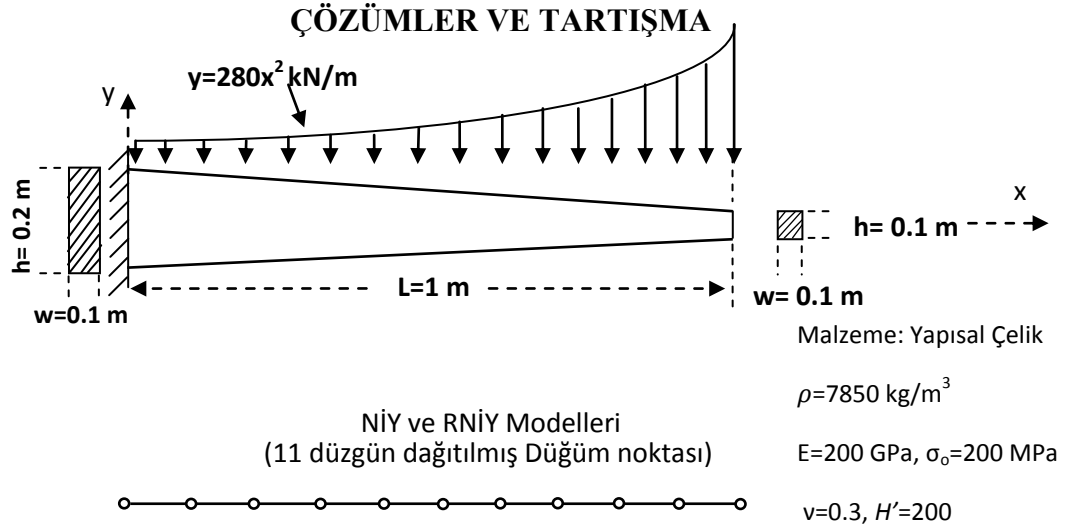


Şekil 2. Noktasal integrasyon yöntemi integrasyon hücresi gösterimi.

$$\begin{aligned} k_f &= EI * \left\{ ([B_f]_{x_0}^T * [B_f]_{x_0})(d_{x2} - d_{x1}) + \frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial}{\partial x} ([B_f]_{x_0}^T * [B_f]_{x_0})(d_{x2}^2 - d_{x1}^2) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{3!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} ([B_f]_{x_0}^T * [B_f]_{x_0})(d_{x2}^3 - d_{x1}^3) \\ k_s &= GA * \{ ([B_s]_{x_0}^T * [B_s]_{x_0})(d_{x2} - d_{x1}) \} \end{aligned} \quad (33)$$

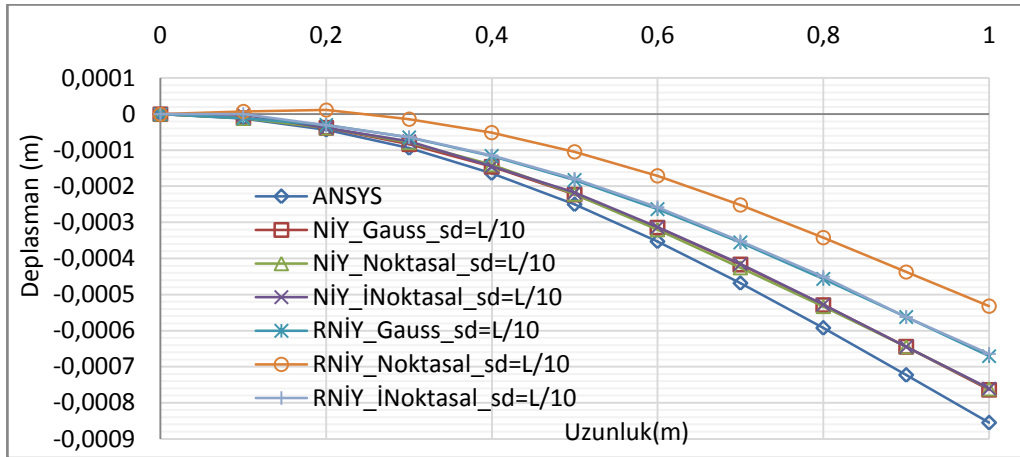
Bu çalışmada yüksek üslü terimlerin sonuca katkısı detaylı şekilde incelenmiştir ve noktasal direngenlik matrisleri yüksek dereceli terimler de kullanılarak aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır:

$$\begin{aligned} k_f &= EI * \left\{ ([B_f]_{x_0}^T * [B_f]_{x_0})(d_{x2} - d_{x1}) + \frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial}{\partial x} ([B_f]_{x_0}^T * [B_f]_{x_0})(d_{x2}^2 - d_{x1}^2) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{3!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} ([B_f]_{x_0}^T * [B_f]_{x_0})(d_{x2}^3 - d_{x1}^3) \\ k_s &= GA * \left\{ ([B_s]_{x_0}^T * [B_s]_{x_0})(d_{x2} - d_{x1}) + \frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial}{\partial x} ([B_s]_{x_0}^T * [B_s]_{x_0})(d_{x2}^2 - d_{x1}^2) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{3!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} ([B_s]_{x_0}^T * [B_s]_{x_0})(d_{x2}^3 - d_{x1}^3) \end{aligned} \quad (34)$$

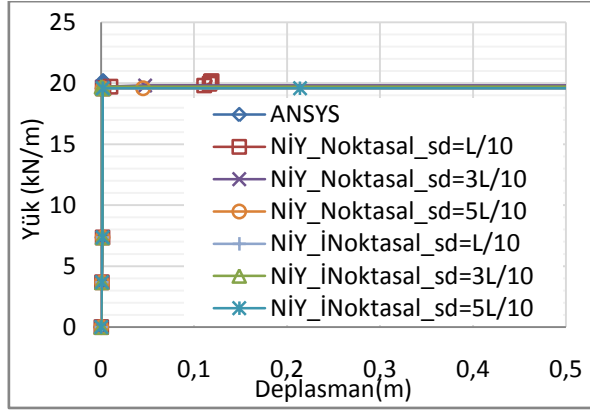


Şekil 3. Ankastre konik kiriş probleminin boyut bilgileri ile NİY ve RNİY modelleri

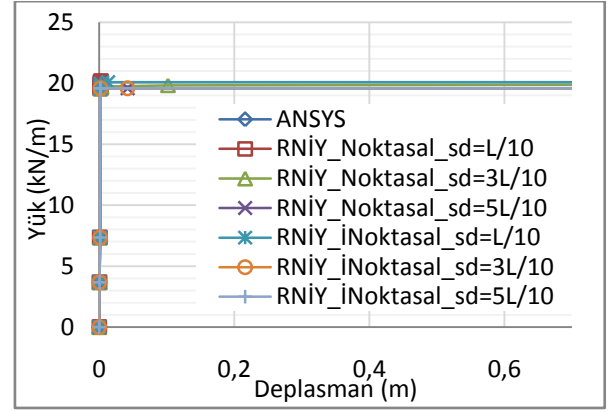
Bu çalışmada, yapılan çözümlerde, geliştirilen MATLAB kodları kullanılmıştır ve yukarıdaki şekilde görülen parabolik bir yüke maruz bırakılan ve kendi ağırlığının da yardımıyla deforme olan ankastre konik kiriş modeli çözümlenmiştir. Uygulanan yük tek bir seferde değil artısal olarak uygulanmış ve elasto-plastik davranışı daha rahat bir şekilde gözlemlenmiştir. Şekil 4'te, NİY ve RNİY çözümlerinin, tüm integrasyon teknikleriyle ve sonlu elemanlar yöntemiyle karşılaştırılması yapılmıştır. Bütün yöntemlerde uyum gözlemlenmekle birlikte, RNİY ile yüksek dereceli noktasal integrasyon kullanıldığında çözüm kararlılığında sapmalar gözlemlenmiştir. Şekil 5 ve Şekil 6'da, NİY ve RNİY ile birlikte indirgenmiş ve yüksek dereceli noktasal integrasyon teknikleri kullanıldığında, destek alanı büyüklüğünün çözümlere etkisi gösterilmiştir. Şekil 7-8'de, q ve α_c şekil parametrelerinin, çözüm kararlılığına etkileri gösterilmiştir.



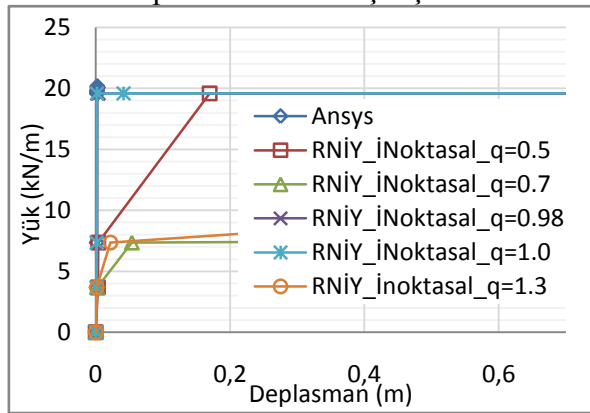
Şekil 4. Son yük parçasında (4.4 kN) tarafsız eksen boyunca deplasman dağılımları



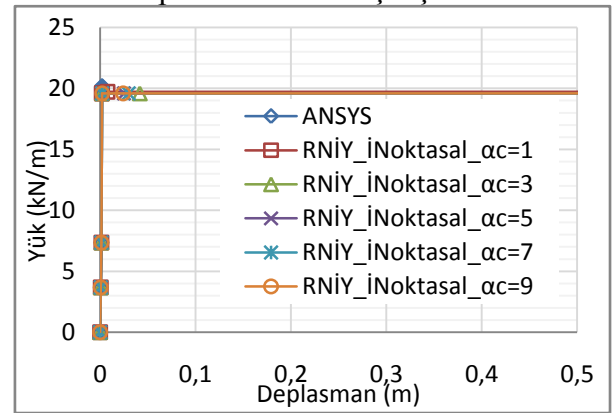
Şekil 5. Farklı destek alanı uzunluklarında, NİY ile noktasal ve İndirgenmiş Noktasal integrasyon yöntemi kullanılarak elde edilen deplasmanların karşılaştırılması.



Şekil 6. Farklı destek alanı uzunluklarında, RNİY ile noktasal ve İndirgenmiş Noktasal integrasyon yöntemi kullanılarak elde edilen deplasmanların karşılaştırılması.



Şekil 7. Farklı q şekil parametresi değerlerinde, destek alanı (sd) büyüklüğü 3L/10 için RNİY ile İndirgenmiş Noktasal integrasyon yöntemi kullanılarak elde edilen deplasmanların karşılaştırılması.



Şekil 8. Farklı α_c şekil parametresi değerlerinde, destek alanı (sd) büyüklüğü 3L/10 için RNİY ile İndirgenmiş Noktasal integrasyon yöntemi kullanılarak elde edilmiş deplasmanların karşılaştırılması.

KAYNAKLAR

- [1] Owen, D.R.J. and Hinton, E., Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice, Pineridge Press Limited(1980), pp. 121-144
- [2] Liu, G. R. ve Quek, S. S., The Finite Element Method: A Practical Course, Butterworth Heinemann, Oxford, 2002.
- [3] Hughes, T. J. R., The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987.
- [4] LeVeque, R. J., Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems, Cambridge University Press, 2002.
- [5] Liu, G. R. ,Meshfree Methods: Moving Beyond the Finite Element Method, CRC Press, New York, 2002.
- [6] Gu, Y. T. and Liu, G. R., A local point interpolation method for static and dynamic analysis of thin beams, 5516-5518, 2000.