



ISIL VE MEKANİK YÜK ALTINDAKİ EĞRİ EKSENLİ PANELDE OLUŞAN ELASTİK GERİLMELER

Mehmet Haskul¹ ve Eray Arslan²

^{1,2}İnönü Üniversitesi, Makine Mühendisliği Bölümü, 44280, Malatya

ABSTRACT

An analytical model is developed for elastic stresses and deformations of a thick walled cylindrical panel subjected to thermal load in radial direction under the generalized plane strain assumption. The case of a homogeneously and slowly heated cylindrical inner surface and the outer surface at the same temperature with the inner one or lower than it is taken into consideration. It is presupposed that the fixed supports at the ends of the panel allow a displacement in circumferential direction and that the radius of the initial middle surface remains unchanged. Hence, couples act on those ends, giving rise to pure bending conditions. Based there on, the stresses and displacements occurring in the panel are analyzed and the elastic limits according to von Mises yield criterion are investigated in case thermal softening is also taken into account.

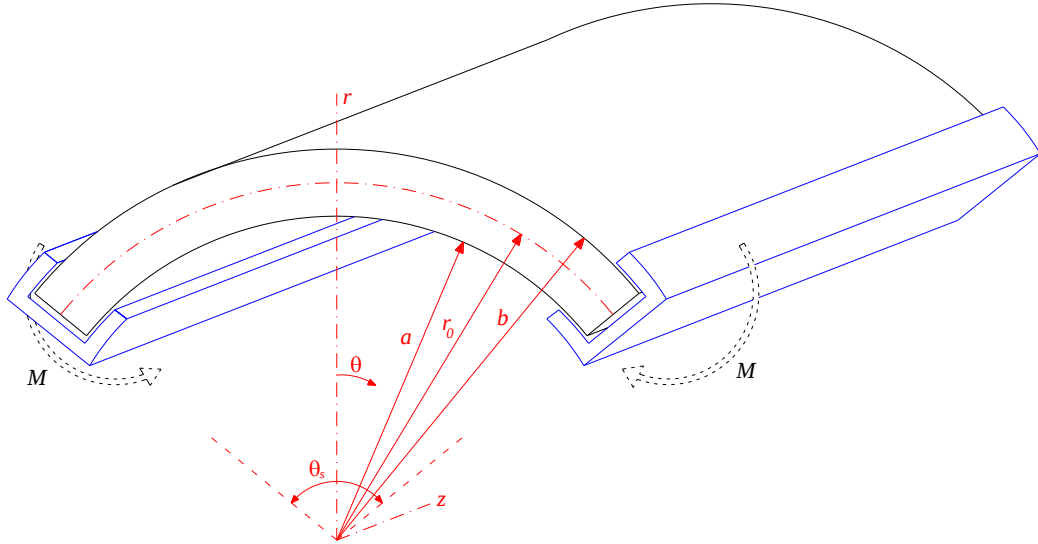
ÖZET

Isıl yük altındaki eğri eksenli silindirik panelde oluşan elastik gerilme ve yer değiştirmeler için genelleştirilmiş şekil değiştirme durumu altında analitik bir model geliştirilmiştir. Panelin iç yüzeyinin homojen ve yavaşça ısıtıldığı, dış yüzey sıcaklığının her zaman iç yüzey sıcaklığına eşit ya da ondan küçük olduğu kabul edilmiştir. Panelin uçlarındaki sabit mesnetlerin açılal yer değiştirmelerin oluşmasına müsaade ettiği ve panelin orta yüzeyinin yarıçapının yükleme boyunca sabit kaldığı varsayılmaktadır. Böylece, bu uç bölgelerde basit eğilme şartları oluşturan momentlerin meydana gelmesi mümkün olmaktadır. Bunlara bağlı olarak, panelde oluşan gerilme ve yer değiştirmeler analiz edilmiş ve ısıl yumuşama varsayımı altında von Mises akma kriterine göre oluşacak elastik limitler incelenmiştir.

GİRİŞ

Eğri eksenli paneller mühendislikde sıkça kullanılan yapılardır ve bu yapılar genellikle mekanik ve ısıl yüklere mağruz kalırlar. Bu nedenle, bir çok araştırmacı söz konusu yapıların farklı yükler altındaki deformasyon davranışlarını incelemişlerdir. Librescu ve ekibi [1] ile Duc ve Tung [2] klasik kabuk teorisini kullanarak basınç ve sıcaklık altında çalışan ince kabuklu eğri eksenli panellerin doğrusal olmayan davranışlarını araştırmışlardır. Kiani ve arkadaşları [3], ısı ve mekanik yüke mağruz kalmış radyal yönde fonksiyonel derecelendirilmiş eğri eksenli panelin dinamik davranışlarını incelemişlerdir. Isıl yük ve dolaylı olarak eğilme momenti altındaki kalın duvarlı panellerin elastik davranışı için Arslan,

Mack ve Gamer [4], elastik-plastik davranışları için ise Arslan ve Mack [5] tarafından analitik çözümler sunulmuştur. Bu çalışmalarda araştırmacılar, düzlem şekil değiştirme durumunu ve panelin eksenel yönde iki ucunun sabitlendiğini varsaymışlardır. Arslan ve Haskul [6] aynı problemi genelleştirmiş şekil değiştirme durumu için çözmüş ve dış yüzeyinden ısıtılan panel için çarpıcı sonuçlar sunmuşlardır [7]. Ancak literatürde, iç yüzeyinden ısıtılan eğri eksenli kalın duvarlı elastik panelin detaylı gerilme analizini bulmak mümkün değildir.



Şekil 1. Eğri eksenli panel

Bu çalışmada, iç yüzeyi dış yüzeyinden daha fazla ısıtılan kalın duvarlı eğri eksenli panelde oluşacak elastik gerilme ve yer değiştirmeler için genelleştirilmiş şekil değiştirme durumu altında analitik bir model geliştirilmiştir. Geometrisi Şekil 1'de gösterilen panelin iç yüzey sıcaklığının ($T_a = T(a)$) homojen ve çok yavaş bir şekilde (kararlı rejim) artırıldığı ve dış yüzey sıcaklığının ($T_b = T(b)$) her zaman iç yüzey sıcaklığına eşit ya da ondan küçük olduğu (negatif gradyant durumu) kabul edilmektedir. Ancak, elde edilen elastik denklemler herhangi bir sıcaklık dağılımı için kullanılabilir. Yukarıda bahsedilen sıcaklık koşulları, sayısal sonuçlar bölümünde göz önüne alınmıştır. Panelin eksenel z doğrultusunda uçlarının serbest olduğu fakat açılal doğrultuda (θ) rijit mesnetlerle sabitlendiği varsayılmaktadır. Bu mesnetler, uç yüzeylerde ($\theta = +\theta_s / 2$ ve $\theta = -\theta_s / 2$ için) açılal doğrultuda yer değiştirmeye müsaade etmekte fakat panelin orta yüzeyinin ($r = r_0 = (a + b) / 2$) eğrilik yarıçapının sabit kalmasını sağlamaktadır. Panelde radyal doğrultuda ısı yük uygulandığında (homojen bir ısıtma tatbik edilse dahi) mesnetlerin etkisiyle her iki uçta M eğilme momenti oluşmakta, böylece panel hem ısı hem de mekanik yük altında çalışmaya zorlanmaktadır.

ANALİTİK MODEL

Silindirik simetri varsayımıyla, radyal, açılal ve eksenel gerilme ($\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$) ve şekil değiştirme ($\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$) bileşenleri sadece radyal koordinatın (r) fonksiyonu olur. Ayrıca, panelde kayma gerilmesi $\tau_{r\theta}$ ve kayma şekil değiştirme $\gamma_{r\theta}$ bileşenlerinin oluşmadığı varsayılmıştır. Buna

ilaveten söz konusu problem ve kabuller nedeniyle radyal yer değiştirme bileşeni (u) sadece radyal koordinatın fonksiyonu olurken, açısal yer değiştirme bileşeni (v) radyal ve açısal koordinatlara (r ve θ) bağlıdır. Bu nedenle, problemin analitik çözümü mümkün olabilmektedir.

Genelleştirilmiş şekil değiştirme durumu nedeniyle eksenel yöndeki şekil değiştirme bileşeni sabittir ($\varepsilon_z = \varepsilon_0 = \text{sabit}$). Küçük deformasyonlar varsayımı altında yer değiştirme-şekil değiştirme ilişkileri

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad (1)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad (2)$$

$$\gamma_{r\theta} = -\frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} = 0, \quad (3)$$

radyal yönde denge denklemi

$$\sigma_\theta = \frac{d}{dr}(r\sigma_r), \quad (4)$$

ve genelleştirilmiş Hooke yasası

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)] + \alpha T, \quad (5)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] + \alpha T, \quad (6)$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_0 = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)] + \alpha T, \quad (7)$$

yardımla panelin açısal yöndeki yer değiştirmesi için

$$v = C_1 r \theta \quad (8)$$

eşitliği [6] ve radyal yer değiştirme için aşağıdaki diferansiyel denklem türetilebilir:

$$r^2 u'' + ru' - u = \frac{r [C_1 (1-2\nu) + \alpha r (1+\nu) T']}{1-\nu}. \quad (9)$$

Burada C_1 bir integrasyon sabitidir. Ayrıca buradaki T , anlık sıcaklık ile referans sıcaklığı arasındaki farkı temsil etmektedir. Denklem (9)'un çözümüyle radyal yer değiştirme bileşeni

$$u = C_2 r + \frac{C_3}{r} + \frac{C_1 (1-2\nu) \{a^2 - r^2 [1 - 2 \ln(r/a)]\}}{4r(1-\nu)} + \frac{\alpha (1+\nu)}{r(1-\nu)} \int_a^r \xi T d\xi \quad (10)$$

elde edilir. Bu denklemdeki C_2 ve C_3 keyfî integrasyon sabitleridir. Ayrıca, gerilme bileşenleri aşağıdaki formu alır:

$$\sigma_r = \frac{EC_1 \left\{ r^2 - (1-2\nu) \left[a^2 (1-2\nu) - 2r^2 \ln(r/a) \right] \right\}}{4r^2 (1-\nu^2)(1-2\nu)} + \frac{C_2 E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad (11)$$

$$- \frac{C_3 E}{r^2 (1+\nu)} + \frac{E\varepsilon_0 \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{E\alpha}{r^2 (1-\nu)} \int_a^r \xi T d\xi$$

$$\sigma_\theta = \frac{EC_1 \left\{ a^2 (1-2\nu)^2 + r^2 \left[3 - 4\nu + 2(1-2\nu) \ln(r/a) \right] \right\}}{4r^2 (1-\nu^2)(1-2\nu)} + \frac{C_3 E}{r^2 (1+\nu)}, \quad (12)$$

$$+ \frac{C_2 E}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{E\varepsilon_0 \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{E\alpha}{r^2 (1-\nu)} \left(\int_a^r \xi T d\xi - r^2 T \right)$$

$$\sigma_z = \frac{EC_1 \nu \left\{ 1 - \nu + (1-2\nu) \ln(r/a) \right\}}{(1-\nu^2)(1-2\nu)} + \frac{2C_2 E \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{E\varepsilon_0 (1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{E\alpha T}{1-\nu} \quad (13)$$

Panelin elastik davranışını tarif eden bu denklemler, 4 bilinmeyen sabit içerir (C_1 , C_2 , C_3 ve ε_0). Bu sabitleri hesaplamak için; panelin iç ve dış yüzeylerinin serbest olduğu kabulü nedeniyle

$$\sigma_r|_{r=a} = 0, \quad (14)$$

$$\sigma_r|_{r=b} = 0, \quad (15)$$

genelleştirilmiş şekil değiştirme bileşeni durumu nedeniyle

$$F_z = \theta_s \int_a^b \sigma_z r dr = 0, \quad (16)$$

ve panelin orta yüzeyinin eğrilik yarıçapının sabit kaldığı varsayımı nedeniyle

$$u|_{r=r_0} = 0, \quad (17)$$

sınır koşulları kullanılır. Bu koşullar yardımıyla sabitler için analitik ifadeleri hesaplamak mümkündür. Bunlara ek olarak, panelin açısız uçlarında oluşacak M eğilme momenti

$$M = \int_a^b \sigma_\theta r dr \quad (18)$$

denkliği yardımıyla hesaplanır ve aşağıdaki şekli alır:

$$M = \frac{E}{2(1+\nu)} \left\{ \begin{aligned} & - \frac{C_1 \left[(a^2 - b^2)(1-\nu) + [(1-2\nu)a^2 + b^2](1-2\nu)\ln(a/b) \right]}{2(1-\nu)(1-2\nu)} \\ & - \frac{(a^2 - b^2)(C_2 + \nu\varepsilon_0)}{1-2\nu} - 2C_3 \ln(a/b) \end{aligned} \right\} + \frac{E\alpha}{1-\nu} \left[\int_a^b \frac{1}{r} \left(\int_a^r \xi T d\xi \right) dr - \int_a^b \xi T d\xi \right] \quad (19)$$

SICAKLIK DAĞILIMI

Yukarıda da bahsedildiği gibi, gerilme ve yer değiştirmeler için türetilen denklemler, herhangi bir sıcaklık dağılımı için kullanılabilir. Bu çalışmada, kararlı rejim durumu ve panelin iç yüzey sıcaklığının yavaş bir şekilde arttığı kabul edilmiştir. Panelin dış yüzey sıcaklığının her zaman iç yüzey sıcaklığına eşit ya da ondan küçük olduğu (sıcaklık farkının negatif olduğu ($\Delta T = T_b - T_a \leq 0$)) varsayılmıştır. Ayrıca, panel içindeki sıcaklık dağılımının radyal doğrultuda

$$T(r) = \frac{T_a \ln(r/b) - T_b \ln(r/a)}{\ln(a/b)}, \quad (20)$$

denkliğine bağlı olarak değiştiği belirlenmiştir [8]. Ayrıca yukarıdaki denklemlerdeki sıcaklık ifadesi içeren integralin analitik çözümü

$$\int_a^r \xi T d\xi = \frac{T_a \{ a^2 [1 - 2\ln(a/b)] - r^2 [1 - 2\ln(r/b)] \} - T_b \{ a^2 - r^2 [1 - 2\ln(r/a)] \}}{4\ln(a/b)} \quad (21)$$

şeklinde dir.

PANEL İÇİN AKMA KRİTERİ

Panelin akma gerilmesinin (σ_y)

$$\sigma_y = \sigma_0 (1 - \beta T) \quad (22)$$

denkleminde tanımlandığı gibi sıcaklığa bağlı olarak değiştiği kabul edilmektedir. Burada, σ_0 panelin referans sıcaklığındaki tek eksenli akma gerilmesini ve β malzemenin ısıl yumuşama parametresini temsil etmektedir. Ayrıca, panelin akması von Mises akma kriteri yardımıyla

$$\sigma_M = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 \right]} \quad (23)$$

tespit edilmektedir.

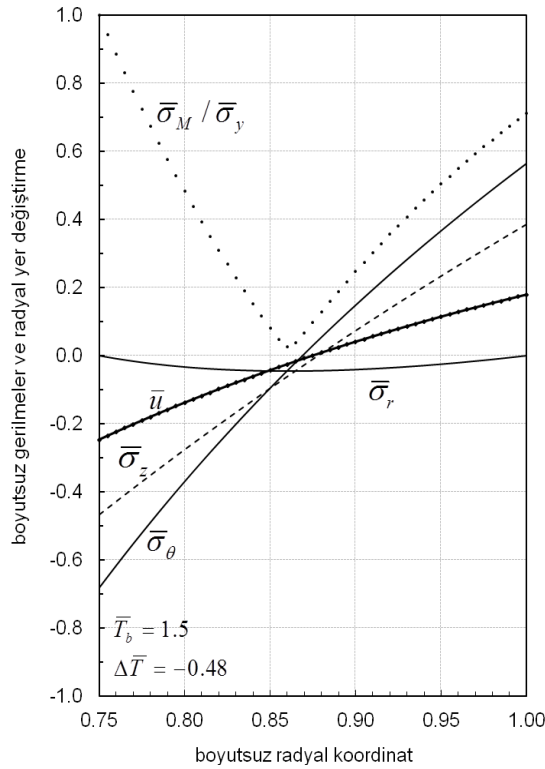
Panelin herhangi bir koordinatında $\sigma_y = \sigma_M$ eşitliğinin sağlanmasıyla, plastik akma başlamış olur.

SAYISAL SONUÇLAR

Sayısal sonuçlarda kullanılan boyutsuz büyüklükler aşağıdaki denklemler yardımıyla elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} \bar{r} &= r/b, \quad \bar{M} = M/(b^2\sigma_0), \quad \bar{T}_i = \alpha E T_i / \sigma_0 \\ \bar{\beta} &= \beta \sigma_0 / (\alpha E), \quad \bar{\sigma}_i = \sigma_i / \sigma_0, \quad \bar{u} = uE / b\sigma_0 \end{aligned} \quad (24)$$

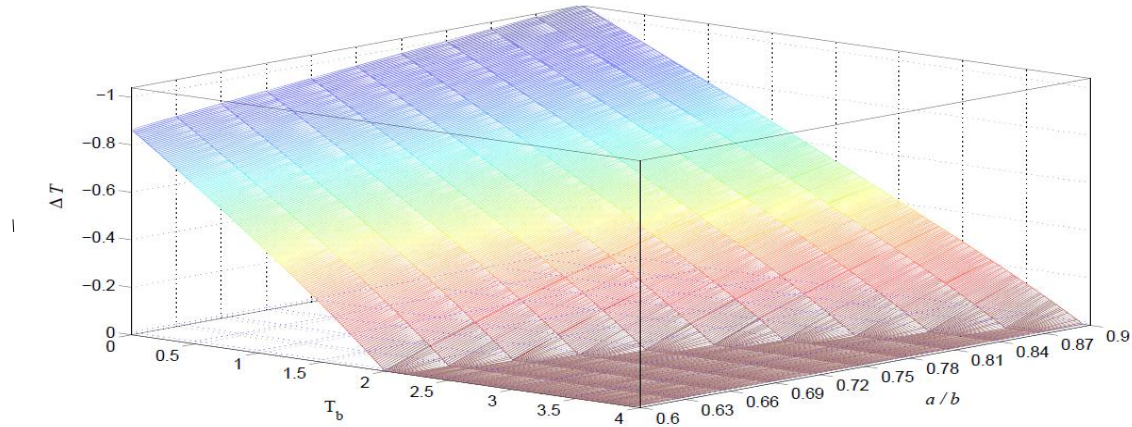
Sayısal sonuçlarda, Poisson oranı $\nu = 0.3$ ve boyutsuz ısıl yumuşama parametresi $\bar{\beta} = 0.2$ olarak alınmıştır. Şekil 2'de iç yarıçapının dış yarıçapına oranı $a/b = 0.75$ olan bir panelin boyutsuz $\bar{T}_b$ sıcaklığının 1.5 ve boyutsuz sıcaklık farkının $\Delta\bar{T} = -0.48$ olması halinde oluşacak gerilme ve yer değiştirme dağılımı gösterilmektedir. Şekilde görüldüğü gibi iç yüzeyde $\bar{\sigma}_M / \bar{\sigma}_y = 1$ şartı sağlanmış ve bu bölgede plastikleşmenin başladığı tespit edilmiştir. Ayrıca bu ısı yük altında panelin maruz kaldığı eğilme momenti denklem (19) yardımıyla hesaplanabilir ve $\bar{M} = 6.42 \times 10^{-3}$ bulunur.



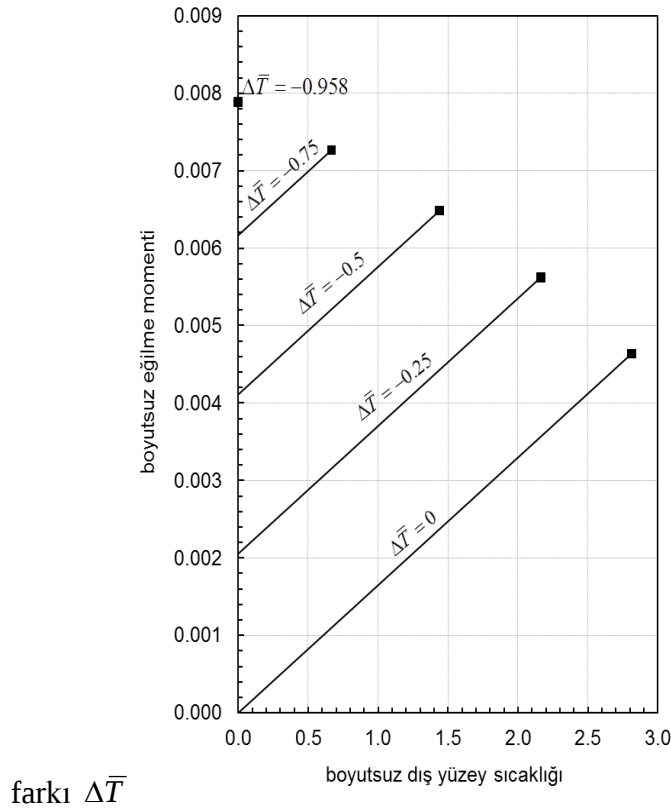
Şekil 2. $\bar{T}_b = 1.5$ ve $\Delta\bar{T} = -0.48$ için gerilme ve yer değiştirme dağılımı

Farklı boyutlara sahip panellerin ($0.6 \leq a/b \leq 0.9$) dış yüzey sıcaklıkları ($\bar{T}_b$) ve bu sıcaklıklarda von Mises akma kriterine göre akmanın gerçekleşmesi için gerekli sıcaklık farkının ($\Delta\bar{T}$) dağılımı Şekil 3'de sunulmuştur. Sayısal sonuçlarda, dış yüzeyden ısıtılan eğri eksenli panelin aksine [6] iç yüzeyinden ısıtılan panelin her zaman iç yüzeyinden aktığını gözlenmiştir. Ayrıca, şekilde de görüldüğü gibi panelin kalınlığı azaldıkça daha yüksek ısı yüklerinde akma gerçekleşmektedir.

$a/b = 0.75$ boyutlarına sahip panelin mesnetlerinde, farklı dış yüzey sıcaklıkları ve sıcaklık farkları için oluşacak boyutsuz eğilme momentleri Şekil 4'de sunulmuştur. İç yüzeyinden ısıtılan panelin uç bölgelerinde her zaman pozitif eğilme momentinin olduğu gözlenmektedir (Pozitif tanımlı eğilme momentinin yönü için Şekil 1'e bakınız). Şekildeki siyah kareler, von Mises akma kriterine göre akmanın gerçekleştiği noktayı temsil etmektedir. En yüksek eğilme momentine, dış yüzey sıcaklığının referans sıcaklığında ($\bar{T}_b = 0$), boyutsuz iç yüzey sıcaklığının ise 0.958 (ya da sıcaklık farkının -0.958) olduğu durumda ulaşılmaktadır.



Şekil 3. Farklı boyutlardaki panellerin akması için gerekli dış yüzey sıcaklığı $\bar{T}_b$ ve sıcaklık



Şekil 4. Mesnetlerdeki eğilme momentleri $\bar{M}$

KAYNAKLAR

- [1] L. Librescu, M.P. Nemeth, J.H. Starnes, Jr.W. Lin, Nonlinear response of flat and curved panels subjected to thermomechanical loads, *Journal of Thermal Stresses*. 23 (2000) 549-582.
- [2] N.D. Duc, H.V. Tung, Nonlinear response of pressure-loaded functionally graded cylindrical panels with temperature effects, *Composite Structures*. 92 (2010) 1664-1672.
- [3] Y. Kiani, M. Shakeri, M.R. Eslami, Thermoelastic free vibration and dynamic behaviour of an FGM doubly curved panel via the analytical hybrid Laplace-Fourier transformation, *Acta Mechanica*. 223 (2012) 1199-1218.
- [4] E. Arslan, W. Mack, U. Gamer, Elastic limits of a radially heated thick-walled cylindrically curved panel. *Forschung im Ingenieurwesen*. 77 (2013) 13-23.
- [5] E. Arslan, W. Mack, Elastic-plastic states of a radially heated thick-walled cylindrically curved panel, *Forschung im Ingenieurwesen*. 78 (2014) 1-11.
- [6] E. Arslan, M. Haskul, Generalized plane strain solution of a thick-walled cylindrical panel subjected to radial heating, *Acta Mechanica*. 226 (2015) 1213-1225.
- [7] M. Haskul, E. Arslan, Thermal stresses in a cylindrical panel with free ends: *85th Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics*, GAMM, Erlangen-Nuremberg, Germany, 2014: s. 233-234.
- [8] H.S. Carslaw, J.C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford, 1959.