

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ÜÇ BOYUTLU ANTI – DE SITTER UZAYINDA EINSTEIN
DENKLEMLERİNİN SKALER ALAN VARLIĞINDA ÇÖZÜMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fizik Müh. Tolga BİRKANDAN

(509991087)

Anabilim Dalı : FİZİK

Programı : FİZİK MÜHENDİSLİĞİ

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mahmut HORTAÇSU

HAZİRAN 2002

**ÜÇ BOYUTLU ANTI – DE SITTER UZAYINDA EINSTEIN
DENKLEMLERİNİN SKALER ALAN VARLIĞINDA ÇÖZÜMLERİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Fizik Müh. Tolga BİRKANDAN
(509991087)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 13 Haziran 2002
Tezin Savunulduğu Tarih : 26 Haziran 2002**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mahmut HORTAÇSU
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Ömer Faruk DAYI (İTÜ)
Prof. Dr. Ayşe Hümeysra BİLGE (İTÜ)**

HAZİRAN 2002

ÖNSÖZ

Lisans öğreniminin son iki yılında ve yüksek lisans çalışmalarım sırasında bana çalıştığımız konuları ve izlenmesi gereken bilimsel metodu büyük bir sabırla öğretirken bir yandan da konulara ve öğrencilerine yaklaşım tarzıyla bir bilimcinin ve bir öğretmenin nasıl olması gerektiğini öğreten, öğretmeye devam eden hocam sayın Prof. Dr. Mahmut HORTAÇSU'ya minnettarım. Ayrıca yüksek lisans çalışmamın her aşamasında bana manevi güç veren, başta Lara T. KELLEYANE olmak üzere bütün çalışma arkadaşlarıma, tez çalışmalarım sırasında ve öncesinde derin bilgi birikiminden faydalandığımız sayın Doç. Dr. Neşe ÖZDEMİR'e ve sayın Prof. Dr. Alikram ALİEV'e, son olarak da her türlü özveriyle beni yetiştiren aileme teşekkürlerimi sunarım.

Mayıs 2002

Tolga BİRKANDAN

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	ii
ŞEKİL LİSTESİ	iv
SEMBOL LİSTESİ	v
KISALTMA LİSTESİ	vi
ÖZET	vii
SUMMARY	viii
1. GİRİŞ	1
2. AdS UZAYI	3
2.1. AdS Uzayının Genel Özellikleri	3
2.2. AdS Uzayında Einstein Klein – Gordon Sistemi	4
3. CHOPTUIK – PRETORIUS KOORDİNATLARI	5
3.1. Choptuik – Pretorius Koordinatlarında Einstein Denklemleri	5
3.2. Denklemlerin Lineerleştirilmesi	6
4. YENİ KOORDİNATLAR	21
4.1. Yeni Koordinatlara Geçiş	21
4.2. (4.1.2) Metriği için Einstein Denklemlerinin Çıkarılması	30
5. TUZAKLANMA KOŞULU	32
6. SAYISAL İŞLEMLER	36
6.1. Adi Diferansiyel Denklemler için Başlangıç Değer Problemlerinin Sayısal Çözümleri	36
6.2. Sayısal İşlemler için Denklemlerin Düzenlenmesi ve Çözülmesi	41
7. SONUÇLAR VE TARTIŞMA	43
EK A	44
EK B	47
KAYNAKLAR	49
ÖZGEÇMİŞ	50

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No.

Şekil 3.2.1.	Sıfırıncı mertebede A parametresinin aldığı durum	8
Şekil 3.2.2.	Sıfırıncı mertebede B parametresinin aldığı durum	8
Şekil 3.2.3.	Denklem 3.2.21'den elde edilen A parametresi	11
Şekil 3.2.4.	Denklem 3.2.22'den elde edilen A parametresi	11
Şekil 3.2.5.	(3.2.21) çözümüne karşılık gelen B parametresi	13
Şekil 3.2.6.	(3.2.22) çözümüne karşılık gelen B parametresi	13
Şekil 3.2.7.	$A_0 + \varepsilon A_1^1$ grafiği ($\varepsilon = 0.1$)	14
Şekil 3.2.8.	$B_0 + \varepsilon B_1^1$ grafiği ($\varepsilon = 0.1$)	14
Şekil 3.2.9.	$A_0 + \varepsilon A_1^2$ grafiği ($\varepsilon = 0.1$)	15
Şekil 3.2.10.	$B_0 + \varepsilon B_1^2$ grafiği ($\varepsilon = 0.1$)	15
Şekil 3.2.11.	Birinci mertebede Φ çözümü	16
Şekil 3.2.12.	İkinci mertebede Φ fonksiyonu	19
Şekil 3.2.13.	$\Phi_0 + \varepsilon \Phi_1 + \varepsilon^2 \Phi_2$ grafiği ($\varepsilon = 0.1$)	20
Şekil 4.1.1.	Sıfırıncı mertebede kütle parametresi	22
Şekil 4.1.2.	(A_1^1, B_1^1) çözüm kümesine karşılık gelen kütle parametresinin sıfır civarındaki davranışı ($\varepsilon = 0.1$)	23
Şekil 4.1.3.	(A_1^1, B_1^1) çözüm kümesine karşılık gelen kütle parametresinin sıfırdan uzaklaştıkça gösterdiği davranış ($\varepsilon = 0.1$)	24
Şekil 4.1.4.	(A_1^1, B_1^1) çözüm kümesine karşılık gelen kütle parametresinin $\bar{r}$ sonsuza giderken gösterdiği davranış ($\varepsilon = 0.1$)	24
Şekil 4.1.5.	(A_1^2, B_1^2) çözüm kümesine karşılık gelen kütle parametresinin sıfır civarındaki davranışı ($\varepsilon = 0.1$)	25
Şekil 4.1.6.	(A_1^2, B_1^2) çözüm kümesine karşılık gelen kütle parametresinin sıfırdan uzaklaştıkça gösterdiği davranış ($\varepsilon = 0.1$)	26
Şekil 4.1.7.	(A_1^2, B_1^2) çözüm kümesine karşılık gelen kütle parametresinin $\bar{r}$ sonsuza giderken gösterdiği davranış ($\varepsilon = 0.1$)	26
Şekil 4.1.8.	Yeni koordinatlarda birinci mertebede Φ	27
Şekil 4.1.9.	Yeni koordinatlarda ikinci mertebede Φ	28
Şekil 4.1.10.	Yeni koordinatlarda lineerleştirilmiş Φ çözümü ($\varepsilon = 0.1$)	28
Şekil 4.1.11.	(A_1^1, B_1^1) çözüm kümesine karşılık gelen $-M + \bar{r}^2$ fonksiyonu ($\varepsilon = 0.1$)	29
Şekil 4.1.12.	(A_1^2, B_1^2) çözüm kümesine karşılık gelen $-M + \bar{r}^2$ fonksiyonu	30

Şekil 5.1.	Sıfırıncı mertebede tuzaklanma koşulu	33
Şekil 5.2.	(A_1^1, B_1^1) çözüm kümesi için tuzaklanma koşulu ($\varepsilon = 0.1$)	34
Şekil 5.3.	(A_1^2, B_1^2) çözüm kümesi için tuzaklanma koşulu ($\varepsilon = 0.1$)	35

SEMBOL LİSTESİ

$C_{\mu\nu\rho}{}^{\sigma}$	: Weyl tansörü
$g_{\mu\nu}$	: Metrik tansör
$R_{\mu\nu}$	: Ricci tansörü
R	: Ricci skaleri
Λ	: Kozmolojik sabit
Φ	: Skaler alanın radyal koordinat r 'ye göre türevi
Δ	: Sonlu fark artımı
Θ	: Sayısal hata derecesi

KISALTMA LİSTESİ

AdS : Anti – de Sitter

BTZ : Bañados, Teitelboim ve Zanelli çözümü

ÜÇ BOYUTLU ANTI – DE SITTER UZAYINDA EINSTEIN DENKLEMLERİNİN SKALER ALAN VARLIĞINDA ÇÖZÜMLERİ

ÖZET

Kütleçekimi üç boyutta incelemek genel göreliliğin özellikle gizlerle dolu olan kuantumsal olgularının daha rahat incelenmesini sağlar. İçerdiği negatif kozmolojik sabitle Anti – de Sitter uzayı üç boyutlu kütleçekimin çalışılması için en iyi seçimdir. Bañados, Teitelboim ve Zanelli tarafından bulunan üç boyutlu karadelik çözümü de birçok yönden dört boyutlu karadeliklere benzerlik göstermekle birlikte çalışılması daha zor olan dört boyutlu karadelik çözümlerine göre büyük imkanlar sağlamaktadır. Bununla beraber bir AdS uzayına bir konform alan teorisi karşılık getiren bir konjektür de araştırmanın derinliğini artırmaktadır.

Choptuik’in karadelik oluşumunda evrensel kritik üsler bulması ve bunu BTZ karadeligi çözümüyle de desteklemesi konunun diğer bir ilginç noktasıdır. Bizim çalışmamızda Choptuik ve Pretorius’un, bir skaler alanın Einstein denklemlerine kuple edildiğinde geldiği duruma önerdiği çözüm, metrikte bulunan parametrelere ve skaler alanın genliğine yapılan lineerleştirmeye zamandan bağımsız olarak incelenmiştir. Çözümlerde karşılaşılan hipergeometrik denklemler sistemin konform simetrisinin varlığını ortaya koyması açısından ilginçtir. Yeni bir koordinat sistemine geçilerek uzay, sıfır - sonsuz sınırına taşınmış, kütle parametresi elde edilmiş ve çeşitli durumlarda uzayın aldığı hal incelenmiştir. Son olarak, Pretorius ve Choptuik tarafından verilen “tuzaklanmış yüzeyler koşulu” ile orijin etrafında bulunan karadelinin varlığı desteklenmiştir. Elde edilen sonuçlar bu konuda daha önce varılan sonuçlarla uyumludur ve konu dönen, yüklü karadelik çözümleri için ve nümerik hesaplamalarla genelleştirilmeye açıktır.

SOLUTIONS OF EINSTEIN' S EQUATIONS IN THREE DIMENSIONAL ANTI – DE SITTER SPACE IN THE PRESENCE OF A SCALAR FIELD

SUMMARY

Studying the gravity in three dimensions makes it possible to investigate general relativity, especially the phenomena of quantum gravity in an easier way. Anti – de Sitter space is the best choice to study three dimensional gravity with its negative cosmological constant. The three dimensional black hole solution found by Bañados, Teitelboim and Zanelli is similar to four dimensional black holes in many ways and it supplies an easier case. In addition to this, a conjecture which corresponds an AdS space to a conformal field theory makes the research more interesting.

The universal critical exponents of black hole emergence discovered by Choptuik is also supported by BTZ black holes and this is another surprising aspect of the subject. In our study, the solution in which a scalar field is coupled to Einstein's equations suggested by Pretorius and Choptuik is studied by linearizing the metric parameters and the amplitude of the scalar field. And in our case, the system is time independent. The hypergeometric equations encountered are interesting in the sense that their presence signs the conformal symmetry of the problem. A coordinate transformation makes it possible to translate the whole space to zero – infinity limits and calculating the mass parameter leads our study of the state of space in different conditions. Consequently, “the trapped surfaces” condition given by Pretorius and Choptuik also supports the presence of a black hole at the origin which was found in our study. The results agree with the previous works and the subject is open to cases of rotating and charged black holes and numerical study.

1. GİRİŞ

Genel görelilik, üzerinde çalışılması oldukça zor olan bir kuramdır. Klasik şeklinde kozmik sansür (cosmic censorship), tekilliklerin doğası gibi anahtar konular henüz tam anlamıyla açıklığa kavuşmadığı gibi kuantumsal şekilde kuramın durumu çok daha kötüdür. Altmış yıllık çalışmaya rağmen kuantumsal kütleçekimin en temel niteliklerini bile güvenle tartışabilmekten uzağız [1].

Kuramı daha basit bir hale getirmek için (2+1) boyutun kullanılması fikri 1963 yılına kadar gider [2]. Fakat bu konunun en önemli başlangıcını iki grubun çalışmalarına dayandırabiliriz: Deser, Jackiw ve 't Hooft nokta kaynakların klasik ve kuantum dinamiğini incelemişler [3-5], Witten ise (2+1) boyutlu kütleçekimi bir Chern – Simons kuramı olarak yazmıştır [6-8].

Her uzay – zamanda eğrilik tansörü, bir eğrilik skaleri R , bir Ricci tansörü $R_{\mu\nu}$ ve izi olmayan konform değişmez bir kısım, Weyl tansörü $C_{\mu\nu\rho\sigma}$ olarak ayrıştırılabilir. (2+1) boyutta Weyl tansörü sıfırdır. Dolayısıyla tüm eğrilik tansörü eğrilik skaleri ve Ricci tansörüyle yazılır.

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\rho} R_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma} R_{\mu\rho} - g_{\nu\rho} R_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma} R_{\nu\rho} - \frac{1}{2} (g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}) R \quad (1.1)$$

Boşlukta Einstein alan denklemlerinin çözümü düzdür (flat) ve kozmolojik sabit içeren alan denklemlerinin çözümleri sabit eğriliğe sahiptir:

$$R_{\mu\nu} = 2\Lambda g_{\mu\nu} \quad (1.2)$$

Fiziksel olarak (2+1) boyutlu uzay – zamanda yerel serbestlik derecesi yoktur. Bu sebepten klasik teoride kütleçekim dalgası olmadığı gibi kuantum teorisinde d uzay – zaman boyutu olmak üzere $(d-3)$ ile hesaplanan gravitonun serbestlik derecesi sayısı sıfırdır. Bununla beraber topolojik serbestlik dereceleri varlığını sürdürmektedir.

(2+1) boyutta Anti – de Sitter (AdS) uzayı, içerdği negatif kozmolojik sabitle kütleçekim teorisi yazılmasına, dolayısıyla karadelik çözümü yazılabilmesine olanak sağlar. Bu karadelik çözümü Bañados, Teitelboim ve Zanelli tarafından bulunmuştur [9,10] ve kısaca BTZ çözümü olarak bilinir. Üç boyutlu karadelik çözümünün dört boyuttakinden büyük bir farkı vardır: Üç boyutta eğrilik sabit olduğundan orijinde bir eğrilik tekiliğine izin verilmez. Bunun dışında BTZ çözümü dört boyutlu karadelik çözümü gibi bir olay ufkuna, açısal momentumu olduğunda bir iç ufka (inner horizon) ve termodinamik özelliklere sahiptir. Bilgi kaybı paradoksu (the information loss paradox) AdS uzayında oldukça keskindir çünkü bu uzayda daima varolan karadelikler oluşturulabilmektedir. Bilgi kaybı argümanı, bir karadeliğe düşen maddeyle olan bütün bağlantıların üstel olarak azalacağını öngörür.

Choptuik'in bir skaler alanın karadelik oluşturması olgusuna bir faz geçişi olarak bakması ve genellikle dalganın genliği olarak aldığı bir parametreyi bir düzen parametresi gibi inceleyerek evrensel kritik üsler saptaması konuya olan ilginin bir kat daha artmasını sağladı [11]. Sonraları bu olgu BTZ karadeliği kullanılarak da gösterildi [9,10,12].

Biz bu çalışmada, Pretorius ve Choptuik'in bir makalesindeki [12] sisteme statik durumda ve denklemleri lineerleştirerek yaklaştık. Önce skaler alanın olmadığı durumu inceledik, sonra skaler alanı bu sıfır çözümü etrafında işleme kattık ve bu durumda uzayın aldığı hali inceledik.

2. AdS UZAYI

2.1. AdS Uzayının Genel Özellikleri

AdS uzayı, Einstein denklemlerinin negatif işaretli kozmolojik sabit barındıran bir çözüdür [13].

(p+2) boyutlu AdS_{p+2} uzayı R^{p+3} 'te

$$x_0^2 + x_{p+2}^2 - \sum_{i=1}^{p+1} x_i^2 = L^2 \quad (2.1.1)$$

Hiperboloidiyle gösterilebilir. Metrik şu şekildedir:

$$ds^2 = -dx_0^2 - dx_{p+2}^2 + \sum_{i=1}^{p+1} dx_i^2 \quad (2.1.2)$$

(2.1.1) denklemi şu dönüşümlerle çözülürse:

$$\begin{aligned} x_0 &= L \cosh \rho \cos \tau \\ x_{p+2} &= L \cosh \rho \sin \tau \\ x_i &= L \sinh \rho \Omega_i \\ \left(\sum_{i=1}^{p+1} \Omega_i^2 &= 1 \right) \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

metrik

$$ds^2 = L^2 (-\cosh^2 \rho d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega^2) \quad (2.1.4)$$

olarak bulunur.

$0 \leq \rho$ ve $0 \leq \tau \leq 2\pi$ için (2.1.3) dönüşümleri bütün hiperboloidi bir defa tarar. Bu yüzden (τ, ρ, Ω_i) takımına AdS'nin global koordinatları adı verilir. Nedenselliğe

(causality) uyan bir uzay – zaman için sınırlar $-\infty \leq \tau \leq \infty$ olarak alınır. AdS uzayıyla anlaşılan genellikle budur.

AdS_{p+2} uzayının simetri grubu $SO(2, p+1)$ 'dir [13].

(d+1) boyuttaki AdS cebirine (d) boyutta konform bir cebir karşılık geldiğini savunan ve doğruluğu en zayıf formunda kanıtlanmış bir konjektür mevcuttur. Bu konjektüre göre asimptotik olarak AdS olan bir uzay – zamana bir konform alan teorisi karşılık gelir [14,15].

2.2. AdS Uzay - zamanında Einstein Klein – Gordon Sistemi

(2+1) uzay-zaman boyutunda, Einstein denklemlerinin $\Lambda \equiv -1/s$ kozmolojik sabitine sahip olduğu ve kütlesiz bir Klein – Gordon alanına kuple edildiğinde geldiği durum incelenecektir.

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} + \Lambda g_{ab} = \kappa T_{ab} \quad (2.2.1)$$

Klein – Gordon alanı (φ) için baskı-enerji-momentum tansörü şu şekilde yazılabilir [16,sf. 70]:

$$T_{ab} = \varphi_{;a} \varphi_{;b} - \frac{1}{2} g_{ab} \varphi_{;c} \varphi^{;c} \quad (2.2.2)$$

φ şu dalga denklemini sağlar:

$$\nabla^a \varphi_{;a} = 0 \quad (2.2.3)$$

Biz burada φ 'yi sadece radyal koordinat r ve zaman koordinatı t 'nin bir fonksiyonu olarak alacağız.

3. CHOPTUIK – PRETORIUS KOORDİNATLARI

3.1. Choptuik – Pretorius Koordinatlarında Einstein Denklemleri

Pretorius ve Choptuik tarafından verilen metrikte [12] bütün uzay $0 < r < \pi/2$ aralığına taşınmıştır. Metriğin yazıldığı bu tanım aralığı, sayısal hesaplama yöntemleri için, ucu sonsuza giden bir tanım aralığından daha kullanışlıdır. Gerek işlemci zamanından tasarrufta, gerekse sayısal hataları en aza indirmede sınırlı ve çok büyük olmayan bu aralık oldukça iyi bir seçimdir.

$$ds^2 = \frac{e^{2A(r)}}{\cos^2(r)}(dr^2 - dt^2) + \tan^2(r)e^{2B(r)}d\theta^2 \quad (3.1.1)$$

Kozmolojik sabit olan Λ , -1 'e eşit seçildi ve r 'nin de boyutsuz olması sağlandı. Kozmolojik sabit olarak Λ/s ve koordinat olarak r/s alınıp $s = 1$ boyutlandırması yapılırsa sözü edilen işlem yapılabilir. Statik ve küresel simetrik çözümler incelendiği için A ve B parametreleri sadece r 'nin fonksiyonudur. Dönmeyen çözümler incelendiği için de θ bağımlılığı yoktur. Kütleçekim sabitini içeren κ parametresi 4π olarak alınmıştır. Bu noktadan itibaren A , B ve ϕ 'deki r bağımlılığı açıkça yazılmayacaktır. Biz burada zaman bağımlılığı olmayan (statik) durumu inceleyeceğiz.

Skaler, statik bir parçacık metriğe kuple edilirse kozmolojik sabit barındıran Einstein denklemlerinin bu metrik için şunlar olduğu görülür [12]:

$$\frac{d^2A}{dr^2} + \frac{(1-e^{2A})}{\cos^2 r} + 2\pi\phi^2 = 0 \quad (3.1.2)$$

$$\frac{d^2B}{dr^2} + \frac{dB}{dr} \left(\frac{dB}{dr} + \frac{2}{\cos r \sin r} \right) + \frac{2(1-e^{2A})}{\cos^2 r} = 0 \quad (3.1.3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 B}{dr^2} + \frac{dB}{dr} \left(\frac{dB}{dr} - \frac{dA}{dr} + \frac{1 + \cos^2 r}{\cos r \sin r} \right) \\ & - \frac{1}{\cos r \sin r} \frac{dA}{dr} \\ & + \frac{(1 - e^{2A})}{\cos^2(2r)} + 2\pi\Phi^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

$$\frac{d}{dr} [\tan(r) e^B \Phi] = 0 \quad (3.1.5)$$

Burada Φ , skaler alanın r koordinatına göre türevidir. (3.1.2), (3.1.3) ve (3.1.4) metrik için Einstein denklemleri ve (3.1.5) skaler alan için dalga denklemdir. Sistem, integre edilebilir bir sistemdir.

3.2. Denklemlerin Lineerleştirilmesi

Yukarıda verilen Einstein denklemlerindeki parametreler için lineerleştirme yapılabilir. ε çok küçük bir sabit olmak üzere,

$$A = A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots \quad (3.2.1)$$

$$B = B_0 + \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2 + \dots \quad (3.2.2)$$

$$\Phi = \Phi_0 + \varepsilon \Phi_1 + \varepsilon^2 \Phi_2 + \dots \quad (3.2.3)$$

Bu açılımlar kullanılarak (3.1.2) – (3.1.5) denklemleri ε 'un sıfıncı, birinci ve ikinci mertebeleri için yazılabilir.

ε^0 mertebesinde sistem aynı sırayla yazarsak şu hale dönüşür:

$$\frac{d^2 A_0}{dr^2} + \frac{(1 - e^{2A_0})}{\cos^2 r} + 2\pi\Phi_0^2 = 0 \quad (3.2.4)$$

$$\frac{d^2 B_0}{dr^2} + \frac{dB_0}{dr} \left(\frac{dB_0}{dr} + \frac{2}{\cos r \sin r} \right) + \frac{2(1-e^{2A_0})}{\cos^2 r} = 0 \quad (3.2.5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 B_0}{dr^2} + \frac{dB_0}{dr} \left(\frac{dB_0}{dr} - \frac{dA_0}{dr} + \frac{1+\cos^2 r}{\cos r \sin r} \right) \\ & - \frac{1}{\cos r \sin r} \frac{dA_0}{dr} + \frac{(1-e^{2A_0})}{\cos^2 r} + 2\pi \Phi_0^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

$$\frac{d}{dr} [\tan(r) e^{B_0} \Phi_0] = 0 \quad (3.2.7)$$

Bu mertebedeki denklemler için Pretorius ve Choptuik tarafından önerilen çözümler kullanılırsa [12] :

$$\Phi_0 = 0, \quad e^{2A_0} = \frac{1}{1-\cos^2 r} \quad (3.2.8)$$

Şu çözüm kümesi elde edilir:

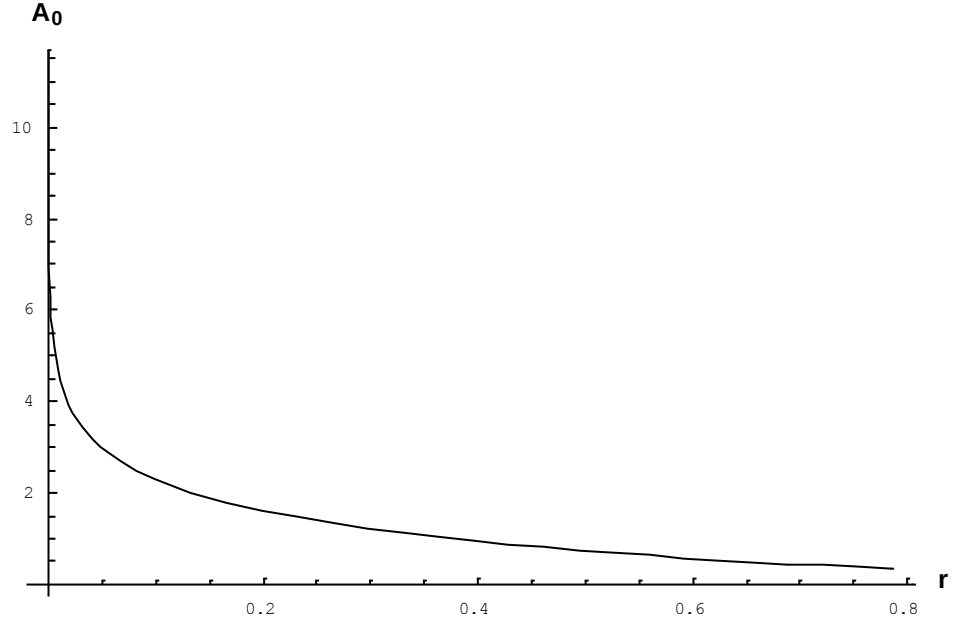
$$\Phi_0 = 0 \quad (3.2.9)$$

$$A_0 = -\log(\sin(r)) \quad (3.2.10)$$

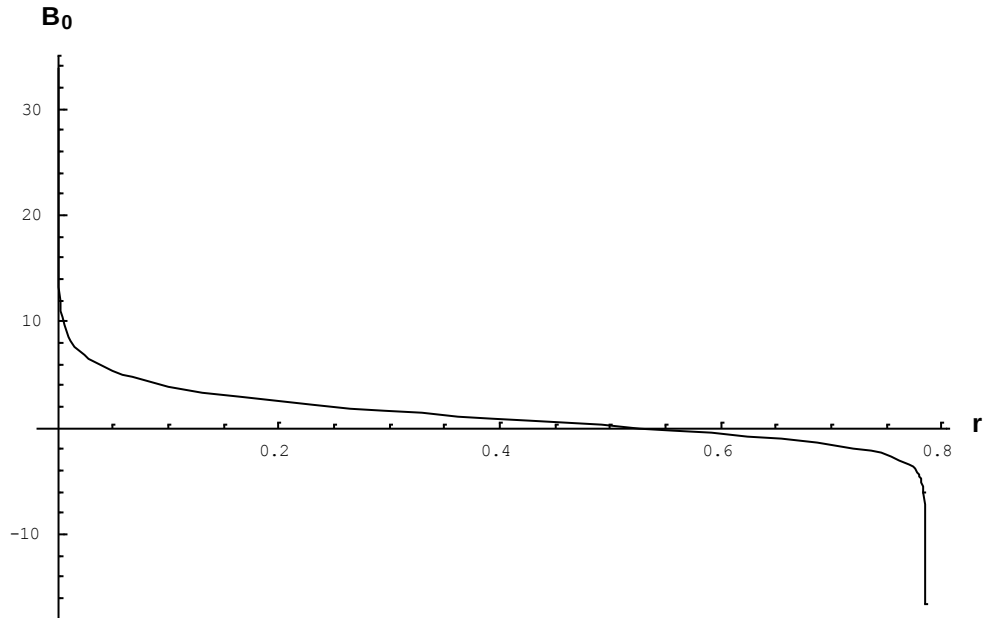
$$B_0 = \log \left(\frac{\cos(2r)}{2\sin^2 r} \right) \quad (3.2.11)$$

Bu çözümler Şekil 3.2.1 ve Şekil 3.2.2’de gösterilmiştir. Bunlar sıfırıncı mertebeli çözümler olarak alınıp diğer mertebedekiler bunlara göre bulunabilir.

Orijinal bölgemiz olan $0 < r < \pi/2$, B_0 ’ın sınırda ıraksama davranışı sebebiyle yarıya bölünmüştür. Kullanmayı seçtiğimiz bölge uzayın $0 < r < \pi/4$ bölgesidir. Bu seçim daha sonra yapacağımız koordinat dönüşümünde de uzayın sıfır – sonsuz arasına taşınmasını sağlayacaktır.



Şekil 3.2.1. Sıfırıncı mertebede A parametresinin aldığı durum



Şekil 3.2.2. Sıfırıncı mertebede B parametresinin aldığı durum

ϵ^1 mertebesinde (3.1.2) denklemi şu hale gelir:

$$\frac{d^2 A_1}{dr^2} - \frac{2e^{2A_0} A_1}{\text{Cos}^2 r} = 0 \quad (3.2.12)$$

Sıfırıncı mertebedeki A_0 değeri yerine yazılırsa

$$\frac{d^2 A_1}{dr^2} - \frac{8A_1}{\sin^2(2r)} = 0 \quad (3.2.13)$$

denklemini elde edilir. Bu denkleme $y = \sin^2(2r)$ dönüşümü yapılır.

$$\frac{d^2}{dr^2} = 8(1-2y) \frac{d}{dy} + 16y(1-y) \frac{d^2}{dy^2} \quad (3.2.14)$$

Denklem şu hale gelir:

$$2y(1-y) \frac{d^2 A_1(y)}{dy^2} + (1-2y) \frac{dA_1(y)}{dy} - \frac{A_1(y)}{y} = 0 \quad (3.2.15)$$

Bu denkleme $A_1(y) = y^\omega F$ dönüşümü uygulanır. Burada ω bir sabit, F sadece y 'nin bir fonksiyonudur.

$$\begin{aligned} \frac{dA(y)}{dy} &= \omega y^{\omega-1} F + y^\omega \frac{dF}{dy} \\ \frac{d^2 A(y)}{dy^2} &= y^\omega \frac{d^2 F}{dy^2} + 2\omega y^{\omega-1} \frac{dF}{dy} + \omega(\omega-1) y^{\omega-2} F \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

Bu yeni dönüşüm denklemini şu hale getirir:

$$\begin{aligned} 2y(1-y) \frac{d^2 F}{dy^2} + [4\omega(1-y) + 1 - 2y] \frac{dF}{dy} \\ + \left[\frac{2\omega(\omega-1)(1-y)}{y} + \frac{\omega(1-2y)}{y} - \frac{1}{y} \right] F = 0 \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

Bu denklemde F 'nin katsayısı sıfıra eşitlenerek iki ω değeri bulunur.

$$2\omega(\omega-1) + \omega - 1 = 0 \quad (3.2.18)$$

Bu denklemden $\omega = 1$ ve $\omega = -1/2$ bulunur.

$\omega = 1$ alınır:

$$y(1-y)\frac{d^2F}{dy^2} + \left[\frac{5}{2}-3y\right]\frac{dF}{dy} - F = 0 \quad (3.2.19)$$

denkleme ulaşılır. Bu da hipergeometrik tipte bir denklemdir. Hipergeometrik denklemin genel formu

$$y(1-y)\frac{d^2F}{dy^2} + [c-(a+b+1)y]\frac{dF}{dy} - ab F = 0 \quad (3.2.20)$$

olmak üzere çözüm ${}_2F_1(a, b | c | y)$ hipergeometrik fonksiyon olarak yazılabilir.

(3.2.19) denkleminde $a = b = 1$ ve $c = 5/2$ olduğuna göre $F = {}_2F_1(1, 1 | \frac{5}{2} | y)$ 'dir.

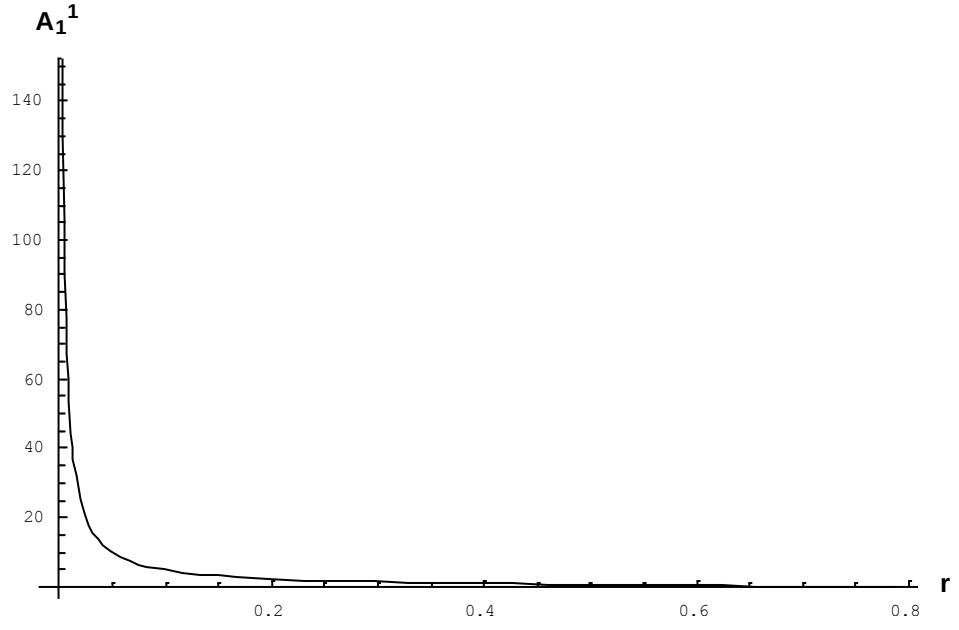
$\omega = -1/2$ alınır bu duruma karşılık gelen hipergeometrik denklemden $F = {}_2F_1(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2} | \frac{-1}{2} | y)$ elde edilir.

Elimizde hipergeometrik fonksiyonun özel durumları vardır. Bunlar basit fonksiyonlar cinsinden yazılabilirler [17, sf. 1041]. Buna göre (3.2.12) denkleminin iki çözümü şu şekilde yazılabilir:

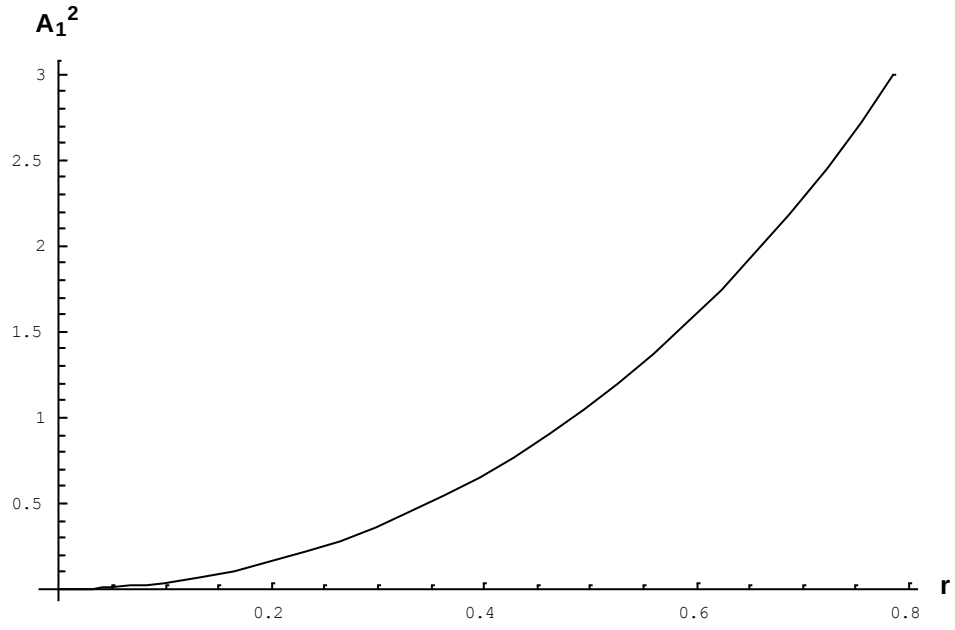
$$A_1^1 = \cot(2r) \quad (3.2.21)$$

$$A_1^2 = 3[1 - 2r \cot(2r)] \quad (3.2.22)$$

Bu çözümler Şekil 3.2.3 ve Şekil 3.2.4'te gösterilmişlerdir.



Şekil 3.2.3. Denklem 3.2.21 'den elde edilen A parametresi



Şekil 3.2.4. Denklem 3.2.22 'den elde edilen A parametresi

ε^1 mertebesinde (3.1.3) denklemi incelenirse istenilen mertebedeki denklem şöyle çıkar:

$$\frac{d^2 B_1}{dr^2} + 2 \frac{dB_0}{dr} \frac{dB_1}{dr} + \frac{2}{\cos(r) \sin(r)} \frac{dB_1}{dr} - \frac{4A_1 e^{2A_0}}{\cos^2(r)} = 0 \quad (3.2.23)$$

Bu mertebede (3.1.4) denklemi ise

$$\begin{aligned} \frac{d^2 B_1}{dr^2} + 2 \frac{dB_0}{dr} \frac{dB_1}{dr} + \frac{dA_0}{dr} \frac{dB_1}{dr} + \frac{dA_1}{dr} \frac{dB_0}{dr} + \frac{[1+\cos^2(r)]}{\cos(r) \sin(r)} \frac{dB_1}{dr} \\ - \frac{1}{\cos(r) \sin(r)} \frac{dA_1}{dr} - \frac{2A_1 e^{2A_0}}{\cos^2(r)} = 0 \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

şeklini alır.

Aynı mertebede (3.1.5) denklemi

$$\frac{d}{dr} \left[\tan(r) e^{B_0} (\Phi_0 B_1 + \Phi_1) \right] = 0 \quad (3.2.25)$$

halindedir.

(3.2.23) ve (3.2.24) denklemleri kullanılarak (3.2.21) çözümüne karşılık gelen B parametresi çözümünün

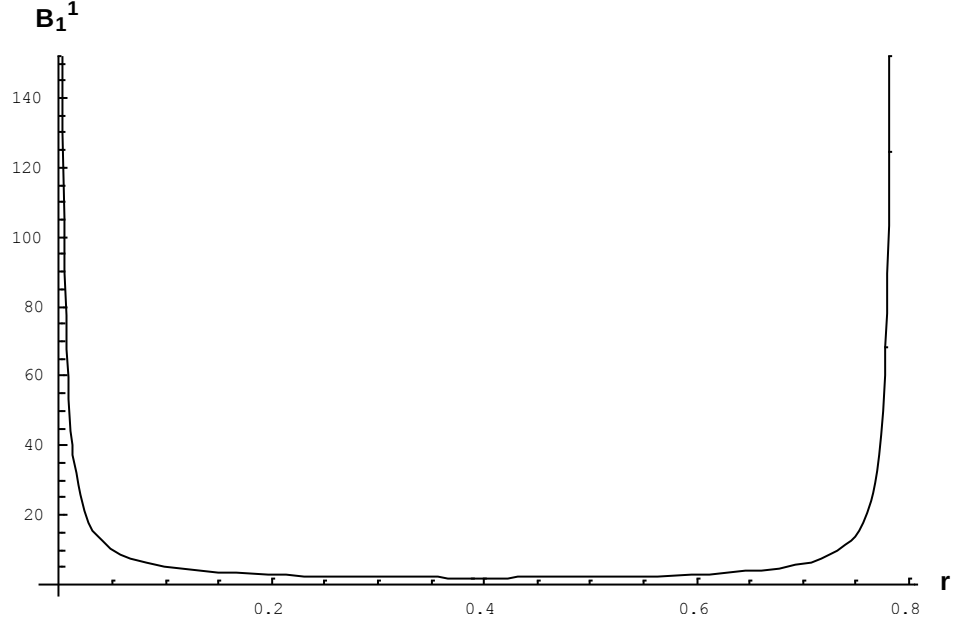
$$B_1^1 = \cot(2r) + \tan(2r) \quad (3.2.26)$$

ve (3.2.22) çözümüne karşılık gelen B parametresi çözümünün

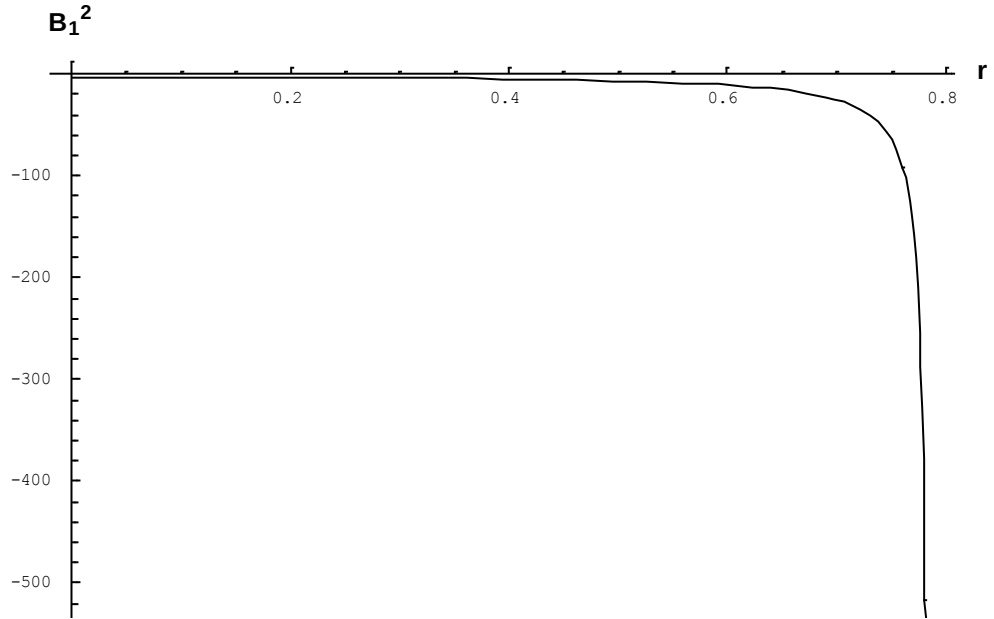
$$B_1^2 = -6rB_1^1 \quad (3.2.27)$$

olduğu görülür.

Bu çözümler Şekil 3.2.5 ve Şekil 3.2.6'da gösterilmişlerdir.



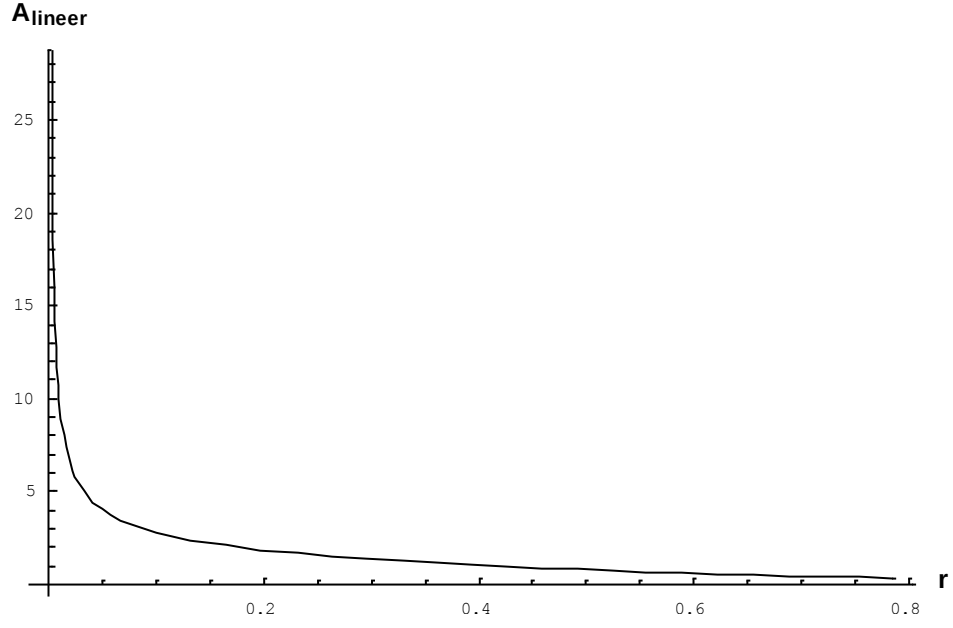
Şekil 3.2.5. (3.2.21) çözümüne karşılık gelen B parametresi



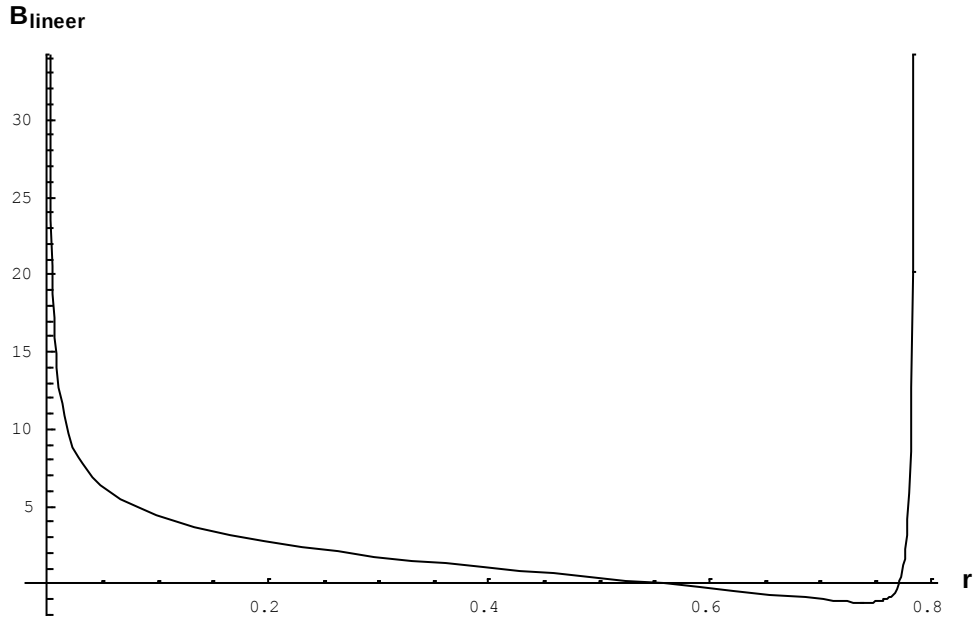
Şekil 3.2.6. (3.2.22) çözümüne karşılık gelen B parametresi

$\varepsilon = 0.1$ alınarak sıfırıncı ve birinci mertebedeki çözümler birleştirilerek A ve B parametreleri için şu grafikler elde edilebilir:

(A_1^1, B_1^1) çözüm kümesi kullanıldığında:

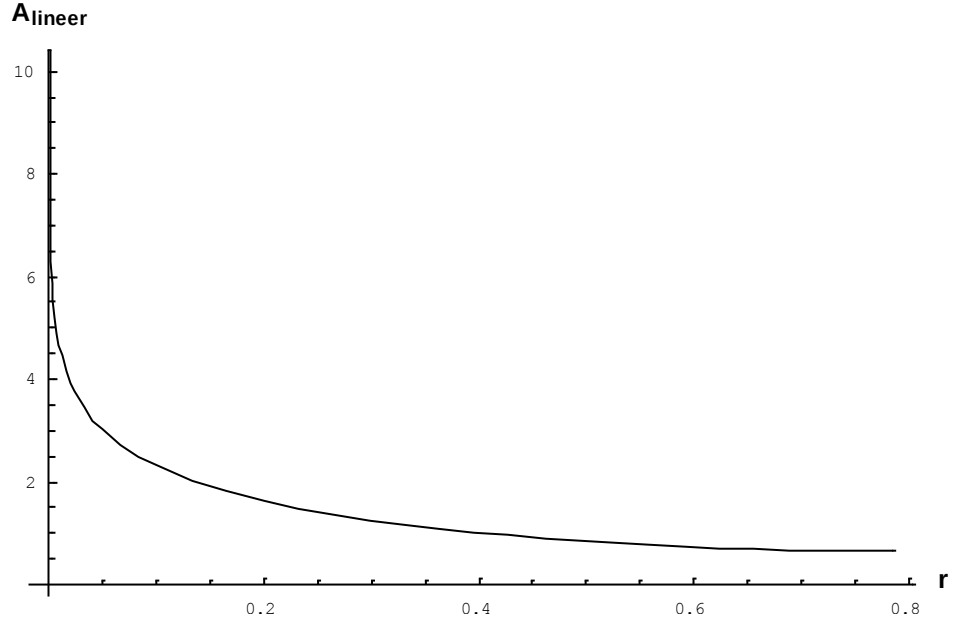


Şekil 3.2.7. $A_0 + \epsilon A_1^1$ grafiği ($\epsilon = 0.1$)

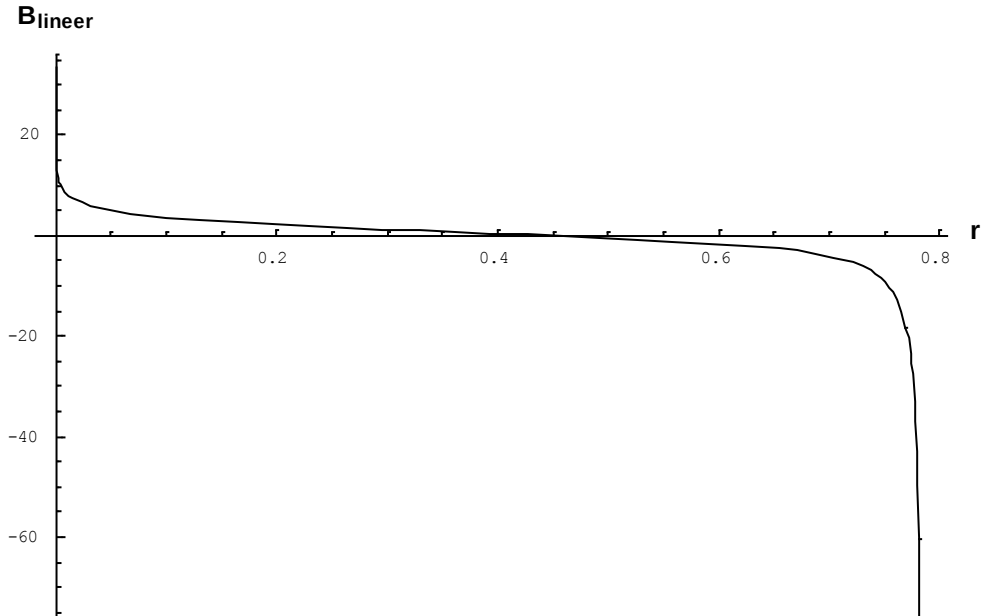


Şekil 3.2.8. $B_0 + \epsilon B_1^1$ grafiği ($\epsilon = 0.1$)

grafikleri elde edilir. (A_1^2, B_1^2) çözüm kümesi kullanıldığında



Şekil 3.2.9. $A_0 + \epsilon A_1^2$ grafiği ($\epsilon = 0.1$)



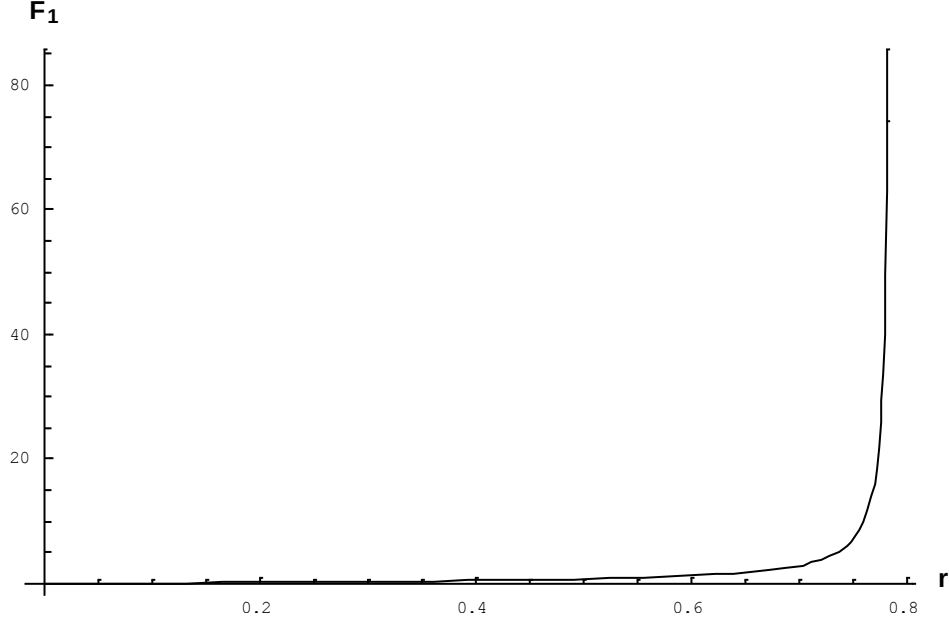
Şekil 3.2.10. $B_0 + \epsilon B_1^2$ grafiği ($\epsilon = 0.1$)

elde edilir.

(3.2.25) denkleminde

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \tan(2r) \quad (3.2.28)$$

bulunur. Bu çözüm Şekil 3.2.11’de gösterilmiştir.



Şekil 3.2.11. Birinci mertebede Φ çözümü

ϵ^2 mertebesinde (3.1.2) denklemi şu şekilde incelenebilir:

$$\frac{d^2 A_2}{dr^2} - \frac{2(A_2 + A_1^2)e^{2A_0}}{\cos^2 r} + 2\pi\Phi_1^2 = 0 \quad (3.2.29)$$

$$\frac{d^2 A_2}{dr^2} - \frac{2A_2}{\sin^2 r \cos^2 r} + \frac{18[1-2r \cot(2r)]^2}{\sin^2 r \cos^2 r} + \frac{\pi}{2} \tan^2(2r) = 0 \quad (3.2.30)$$

A_2 bulundurmeyen kısım denklemin sağ tarafına geçirilerek parametrelerin değişmesi yöntemiyle çözüm aranabilir. Bu yöntem Ek A’da açıklanmıştır. Denklemin sağ tarafı f olarak adlandırılırsa

$$\frac{d^2 A_2}{dr^2} - \frac{2A_2}{\sin^2 r \cos^2 r} = f \quad (3.2.31)$$

denklemini elde edilir. Homojen halinin çözümleri (3.2.12) denklemini ile aynıdır. (3.2.21) ve (3.2.22) homojen denklemin çözümleri olarak alınabilir. O halde $y_1=A_1^2$ ve $y_2=A_1^1$ yazılabilir.

(3.2.31) denkleminin genel çözümü

$$A_2=c_1y_1+c_2y_2 \quad (3.2.32)$$

olarak yazılabilir. (3.2.31) denkleminde ikinci derece türevin önündeki katsayı 1 olduğuna göre c_1 ve c_2 katsayılarının bulunacağı matris şu hale gelir:

$$D=\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ \frac{dy_1}{dr} & \frac{dy_2}{dr} \end{bmatrix} \quad (3.2.33)$$

Matrisin determinantı ise

$$d=\det(D)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \frac{dy_1}{dr} & \frac{dy_2}{dr} \end{vmatrix}=-6 \quad (3.2.34)$$

olarak bulunur. Buna göre c_1 ve c_2 katsayıları şu şekilde bulunur:

$$\frac{dc_1}{dr} = \frac{\det \begin{bmatrix} 0 & y_2 \\ f & \frac{dy_2}{dr} \end{bmatrix}}{d} = \frac{-f y_2}{d} \quad (3.2.35)$$

$$\frac{dc_1}{dr} = -\frac{1}{6} \left\{ \frac{18[1-2r \cot(2r)]^2}{\sin^2 r \cos^2 r} + \frac{\pi}{2} \tan^2(2r) \right\} \cot(2r) \quad (3.2.36)$$

$$c_1 = \frac{1}{1536 \sin^4(r) \cos^4(r)} [-\pi \cos(2r) - 2 \cos(4r) + (36 + \pi - 288r^2 + 2\pi \log(\cos(r))) + \pi(\cos(6r) + (3 + \cos(8r)) \log(\cos(r))) + 2(36 + \pi - 144r \sin(4r))] \quad (3.2.37)$$

$$\frac{dc_2}{dr} = \frac{\det \begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ \frac{dy_1}{dr} & f \end{bmatrix}}{d} = \frac{f y_1}{d} \quad (3.2.38)$$

$$\frac{dc_2}{dr} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{18[1-2r \cot(2r)]^2}{\sin^2 r \cos^2 r} + \frac{\pi}{2} \tan^2(2r) \right\} [1-2r \cot(2r)] \quad (3.2.39)$$

$$c_2 = \frac{9}{256} \frac{1}{\sin^4(r) \cos^4(r)} [24r+8r(-3+8r^2)\cos(4r)- \\ 2(1+24r^2)\sin(4r)+\sin(8r)] \\ + \int \frac{\pi}{4} [(-1+2r \cot(2r))\tan^2(r)] \quad (3.2.40)$$

Bu sonuçlar (3.2.32) denkleminde kullanılarak A fonksiyonuna ε^2 mertebesindeki katkı elde edilebilir.

Bu mertebede (3.1.3) denklemi incelenirse

$$\frac{d^2 B_2}{dr^2} + \left(\frac{dB_1}{dr} \right)^2 + 2 \frac{dB_0}{dr} \frac{dB_2}{dr} + \frac{2}{\cos r \sin r} \frac{dB_2}{dr} \\ - \frac{4(A_2 + A_1^2)e^{2A_0}}{\cos^2 r} = 0 \quad (3.2.41)$$

elde edilir.

ε^2 mertebesinde (3.1.4) denklemi şu haldedir:

$$\frac{d^2 B_2}{dr^2} + 2 \frac{dB_0}{dr} \frac{dB_2}{dr} + \left(\frac{dB_1}{dr} \right)^2 + \frac{dA_0}{dr} \frac{dB_2}{dr} + \frac{dA_1}{dr} \frac{dB_1}{dr} \\ + \frac{dA_2}{dr} \frac{dB_0}{dr} + \frac{1+\cos^2 r}{\cos r \sin r} \frac{dB_2}{dr} - \frac{1}{\cos r \sin r} \frac{dA_2}{dr} \\ - \frac{2(A_2 + A_1^2)e^{2A_0}}{\cos^2 r} + 2\pi\Phi_1^2 = 0 \quad (3.2.42)$$

ε^2 mertebesinde (3.1.5) denklemi şu şekilde incelenir:

$$\frac{d}{dr} \left[\tan(r) e^{(B_0 + \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2)} (\Phi_0 + \varepsilon \Phi_1 + \varepsilon^2 \Phi_1) \right] = 0 \quad (3.2.43)$$

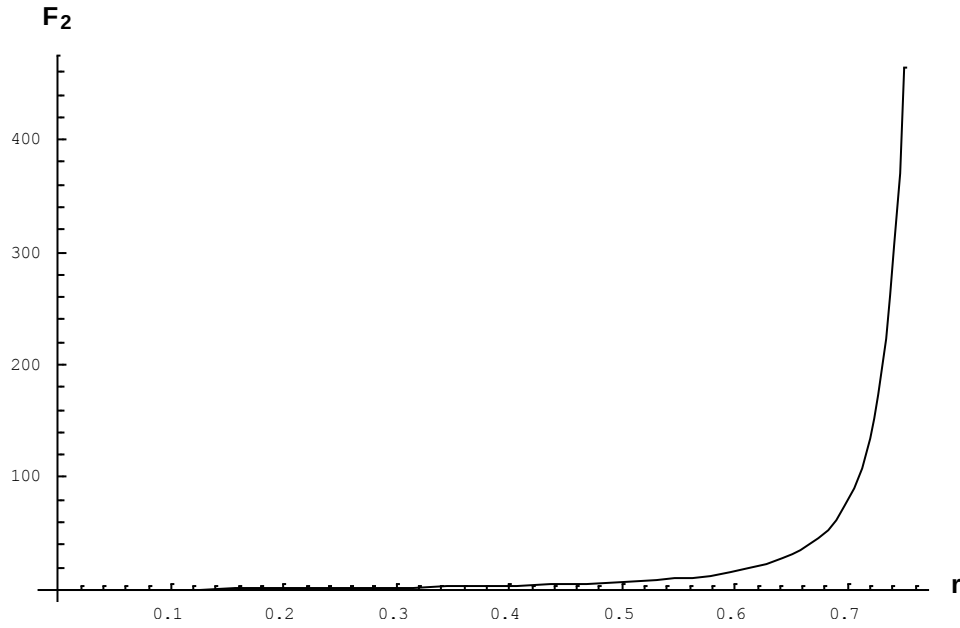
ve sadece ε^2 mertebesindeki terimler alınarak

$$\frac{d}{dr} \left[\tan(r) e^{B_0} \left(\Phi_2 + B_2 \Phi_0 + B_1 \Phi_1 + \frac{1}{2} B_1^2 \Phi_0 \right) \right] = 0 \quad (3.2.44)$$

eşitliği elde edilir. Bilinen parametreler yerine koyularak bu mertebedeki Φ değeri bulunur.

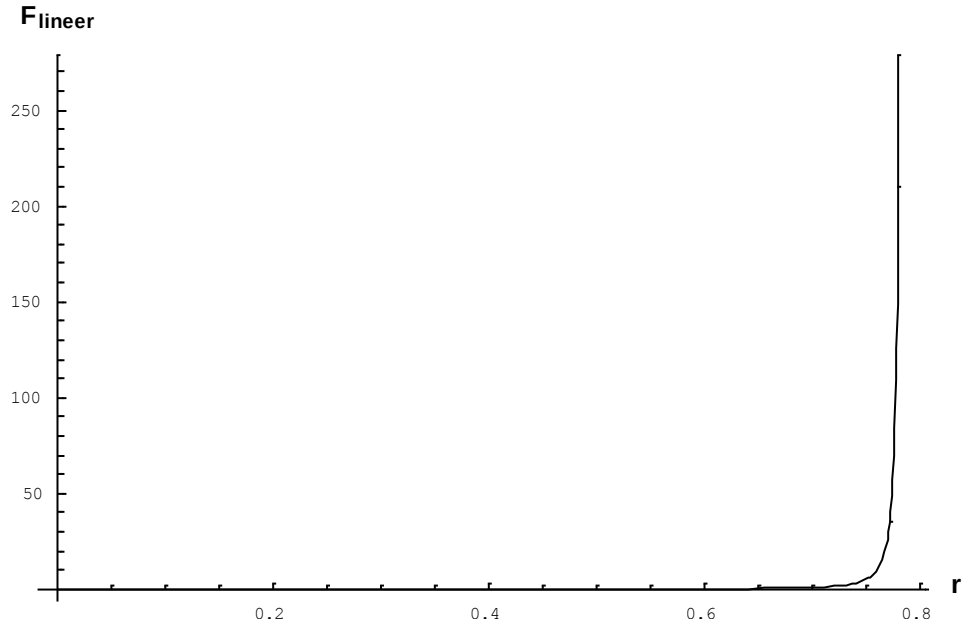
$$\Phi_2 = \frac{6r + \sin(4r)}{2\cos^2(2r)} \quad (3.2.45)$$

Bu fonksiyonun grafiği Şekil 3.2.12 ‘de gösterilmiştir.



Şekil 3.2.12. İkinci mertebede Φ fonksiyonu

Φ parametresi için $\varepsilon = 0.1$ alınarak hesap yapılırsa şu grafik elde edilir:



Şekil 3.2.13. $\Phi_0 + \epsilon \Phi_1 + \epsilon^2 \Phi_2$ grafiği ($\epsilon = 0.1$)

4. YENİ KOORDİNATLAR

4.1. Yeni Koordinatlara Geçiş

Daha önce kullanılan koordinatlara

$$\begin{aligned}\bar{r} &= \tan(r)e^B \\ \bar{t} &= t \\ \bar{\theta} &= \theta\end{aligned}\tag{4.1.1}$$

dönüşümü yapılırsa radyal koordinat için yazılan tanım aralığı değişir. Daha önce $0 < r < \frac{\pi}{4}$ olarak belirlenen aralık $0 < \bar{r} < \infty$ haline gelir. Burada eski koordinatlardaki 0 sınırı yeni koordinatlarda sonsuza, eski koordinatlardaki $\frac{\pi}{4}$ sınırı ise yeni koordinatlarda sifıra taşınmıştır.

Bu koordinatlarda, boşluk durumunda (3.1.1) metriği Ek B’de açıklanan işlemlerle şu hale gelir :

$$ds^2 = -(-M + \bar{r}^2)d\bar{t}^2 + \frac{1}{(-M + \bar{r}^2)}d\bar{r}^2 + \bar{r}^2d\bar{\theta}^2\tag{4.1.2}$$

Boşluk olmayan, daha genel durumlarda şu tanım yapılabilir [12]:

$$\left| \nabla \bar{r} \right|^2 \equiv -M(\bar{r}, \bar{t}) + \bar{r}^{-2}\tag{4.1.3}$$

Burada M, kütle parametresidir ve eski koordinat sisteminde şu şekilde yazılabilir [12]:

$$M = e^{2(B-A)} \left[e^{2A} \tan^2 r - \sin^2 r \left(\frac{dB}{dr} \right)^2 - 2 \tan r \frac{dB}{dr} - \sec^2 r \right] \quad (4.1.4)$$

Sıfırıncı mertebedeki B parametresi

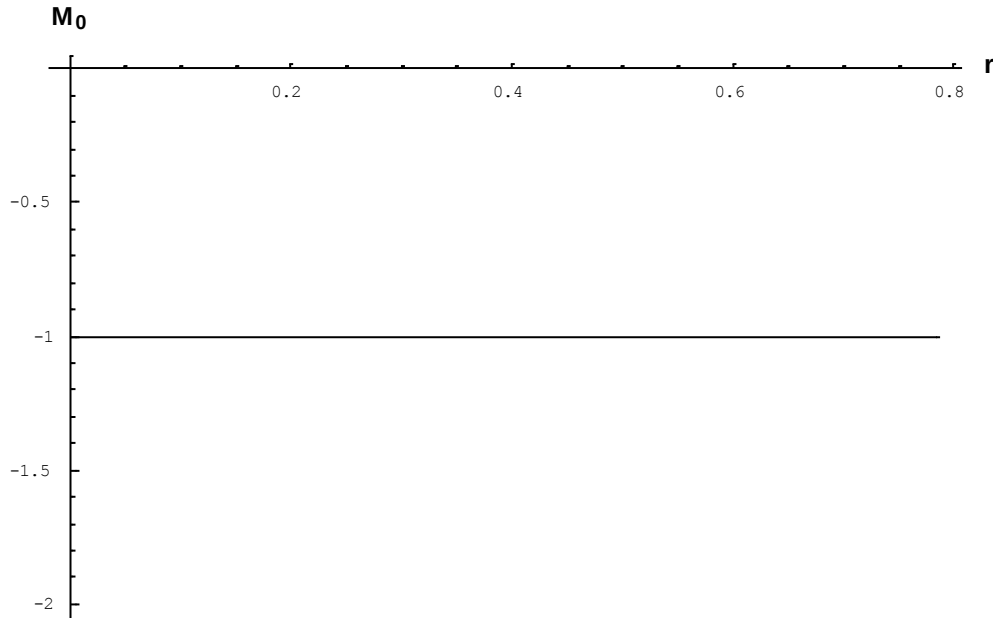
$$B = \log \left(\frac{\cos(2r)}{2\alpha \sin^2 r} \right) \quad (4.1.5)$$

alınırsa bunun da içerdği α parametresi ile de ilgili denklemleri sağladığı görülür. Bu çözüm kullanılarak $\bar{r}$ hesaplandığında,

$$\bar{r} = \frac{1}{\alpha} \cot(2r) + O(\epsilon) \quad (4.1.6)$$

bulunur.

$\alpha = 1$ durumunda sıfırıncı mertebede kütle parametresi $M = -1$ çıkar. Bu da eldeki sistem için AdS çözümüdür [12]. Bu durumun grafiği Şekil 4.1.1’de verilmiştir.



Şekil 4.1.1. Sıfırıncı mertebede kütle parametresi

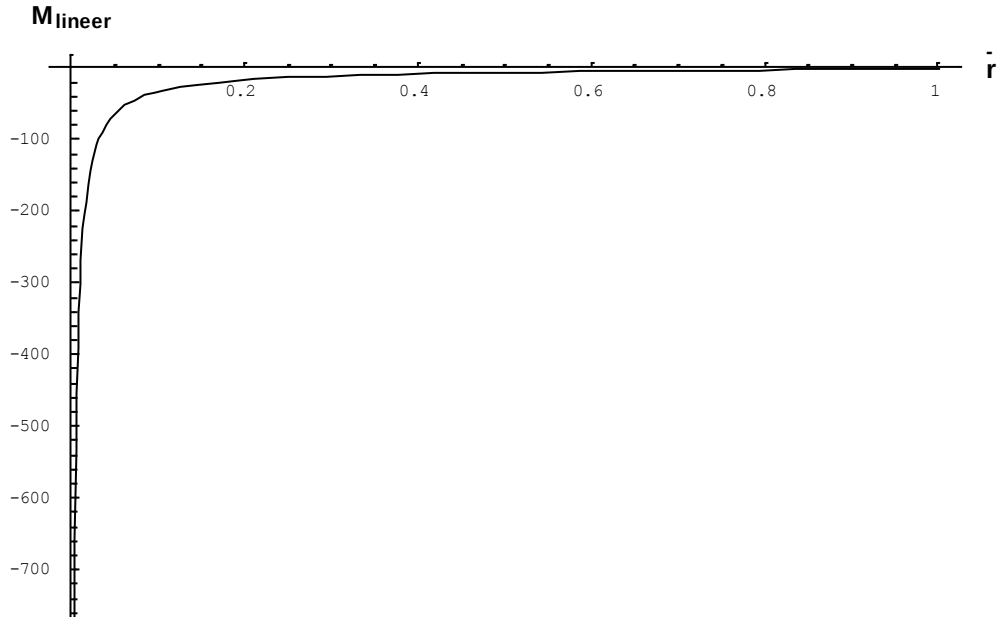
$0 < \alpha < 1$ durumunda konik tekillik veya bir başka deyişle sicim çözümüne ulaşılır [1,3].

$\alpha = -i$ durumu metrikte bir yeniden parametrize etme işlemi gerektirir. Trigonometrik kosinüs ve tanjant fonksiyonları sırasıyla hiperbolik kosinüs ve hiperbolik tanjant olarak değişirler. Bu durumda $M \geq 0$ koşulu sağlanır ve sistemin BTZ çözümü bulunur [9,10].

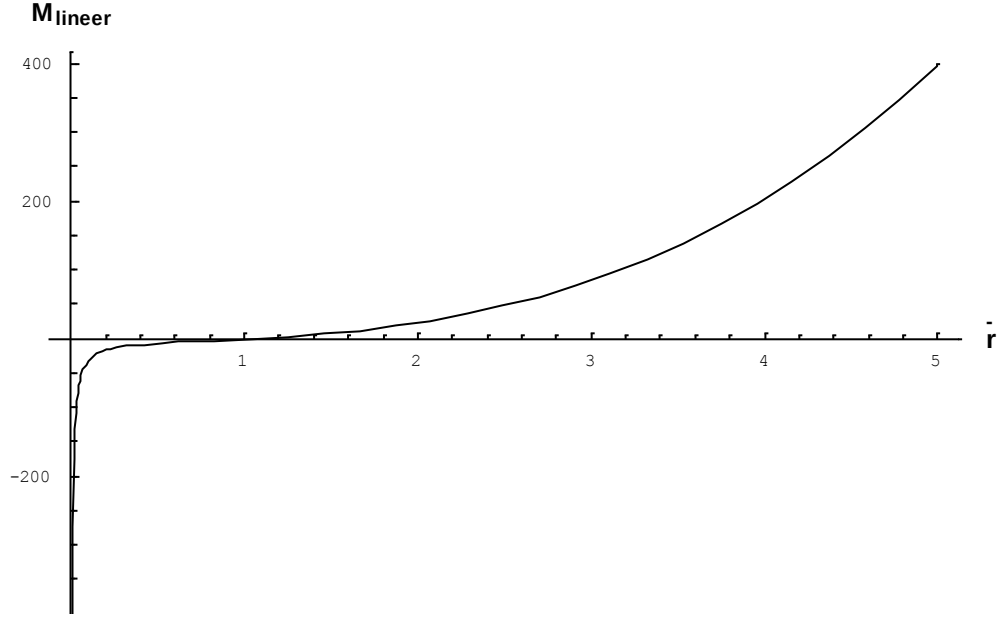
Lineerleştirilmeyle elde edilen çözümün birinci mertebesi için işlem iki kısımda incelenebilir. (A_1^1, B_1^1) (A_1^1, B_1^1) çözüm kümesi dikkate alınırsa

$$M = -1 - 32\varepsilon \left(\frac{1}{\bar{r}} - \bar{r}^3 \right) \quad (4.1.7)$$

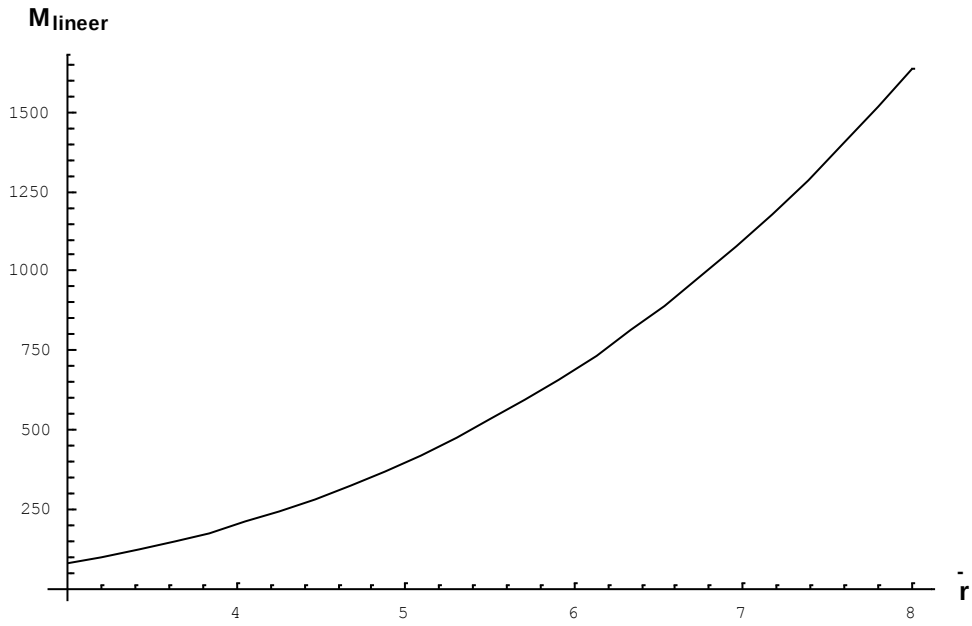
bulunur. $\varepsilon = 0.1$ alınarak bu çözüme karşılık gelen kütle parametresi Şekil 4.1.2, Şekil 4.1.3 ve Şekil 4.1.4'te gösterilmiştir.



Şekil 4.1.2. (A_1^1, B_1^1) çözüm kümesine karşılık gelen kütle parametresinin sıfır civarındaki davranışı ($\varepsilon = 0.1$)



Şekil 4.1.3. (A_1^1, B_1^1) çözüm kümesine karşılık gelen kütle parametresinin sıfırdan uzaklaştıkça gösterdiği davranış ($\varepsilon = 0.1$)

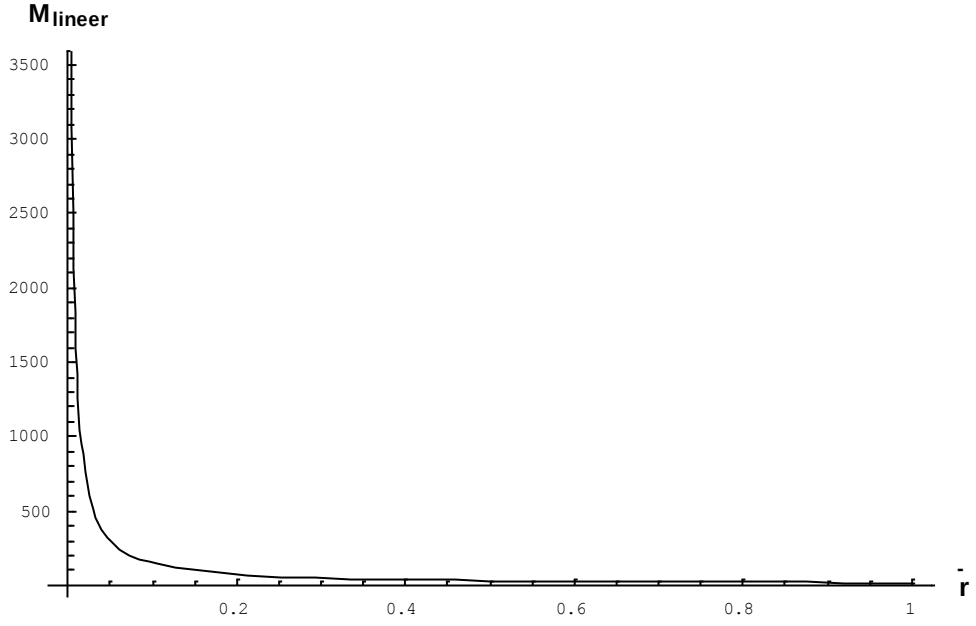


Şekil 4.1.4. (A_1^1, B_1^1) çözüm kümesine karşılık gelen kütle parametresinin $\bar{r}$ sonsuza giderken gösterdiği davranış ($\varepsilon = 0.1$)

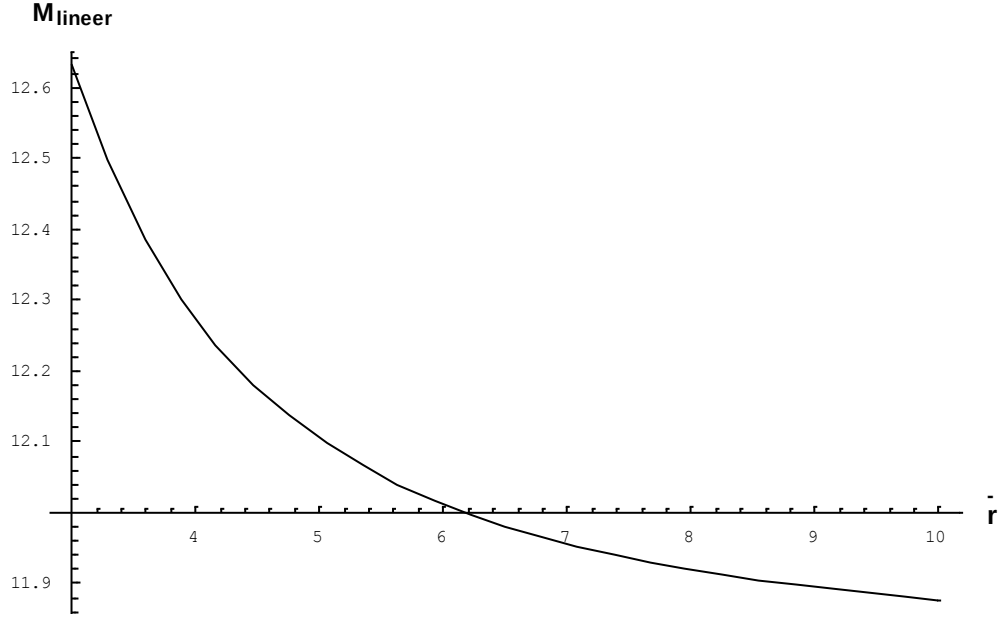
(A_1^2, B_1^2) çözüm kümesi dikkate alındığında

$$M = -1 + 96\varepsilon \left[1 + \bar{r}^2 + \arccot(\bar{r}) \left(\frac{1}{\bar{r}} - \bar{r}^3 \right) \right] \quad (4.1.8)$$

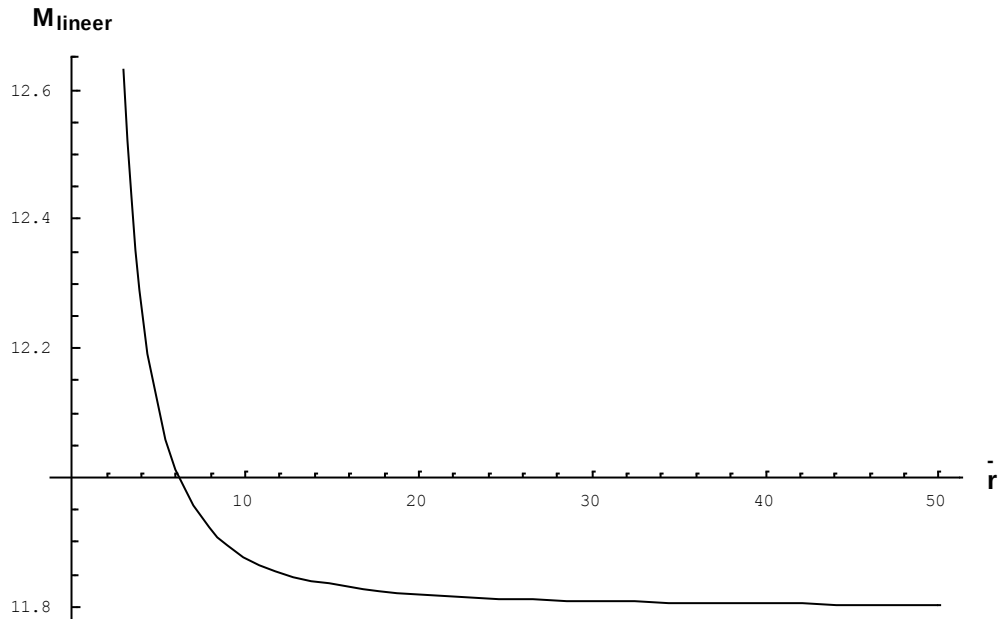
bulunur. $\varepsilon = 0.1$ alınarak bu çözüme karşılık gelen kütle parametresi Şekil 4.1.5, Şekil 4.1.6 ve Şekil 4.1.7’de gösterilmiştir.



Şekil 4.1.5. (A_1^2, B_1^2) çözüm kümesine karşılık gelen kütle parametresinin sıfır civarındaki davranışı ($\varepsilon = 0.1$)



Şekil 4.1.6. (A_1^2, B_1^2) çözüm kümesine karşılık gelen kütle parametresinin sıfırdan uzaklaştıkça gösterdiği davranış ($\varepsilon = 0.1$)

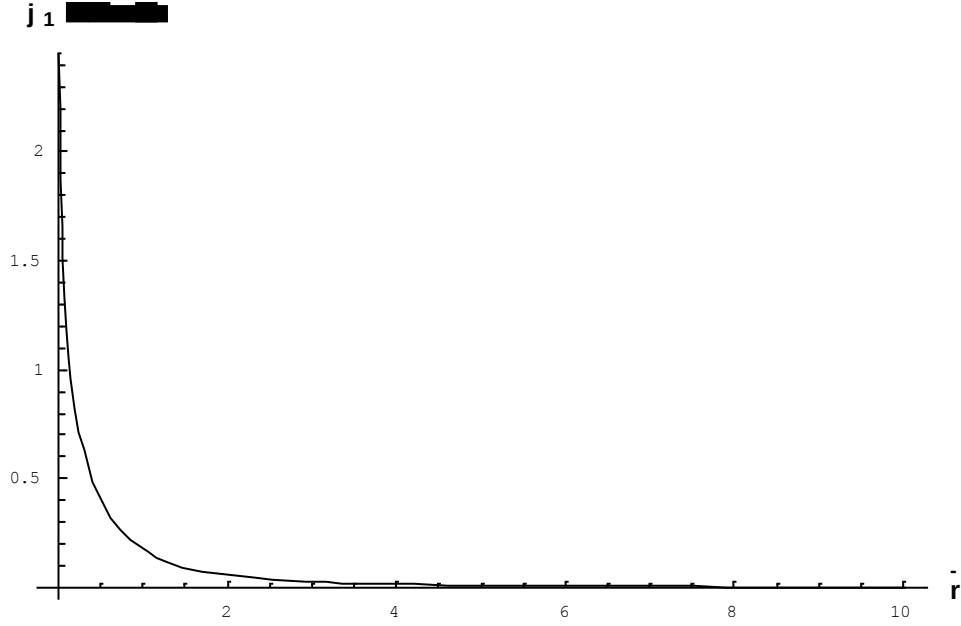


Şekil 4.1.7. (A_1^2, B_1^2) çözüm kümesine karşılık gelen kütle parametresinin $\bar{r}$ sonsuza giderken gösterdiği davranış ($\varepsilon = 0.1$)

Skaler alan yeni koordinatlarda hesaplandığında birinci mertebede

$$\varphi_1(\bar{r}) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{(1 + \bar{r}^2)^{1/2}}{\bar{r}} \right) \quad (4.1.9)$$

bulunur. $\bar{r} = 0$ durumunda daha önce Garfinkle [18] ve Burko'nun da [19] gösterdiği gibi skaler alan $\log(\bar{r})$ ile orantılıdır. $\bar{r}$ sonsuza gittiğinde $\varphi_1(\bar{r})$ sıfıra gider. İlgili grafik Şekil 4.1.8'de gösterilmiştir.

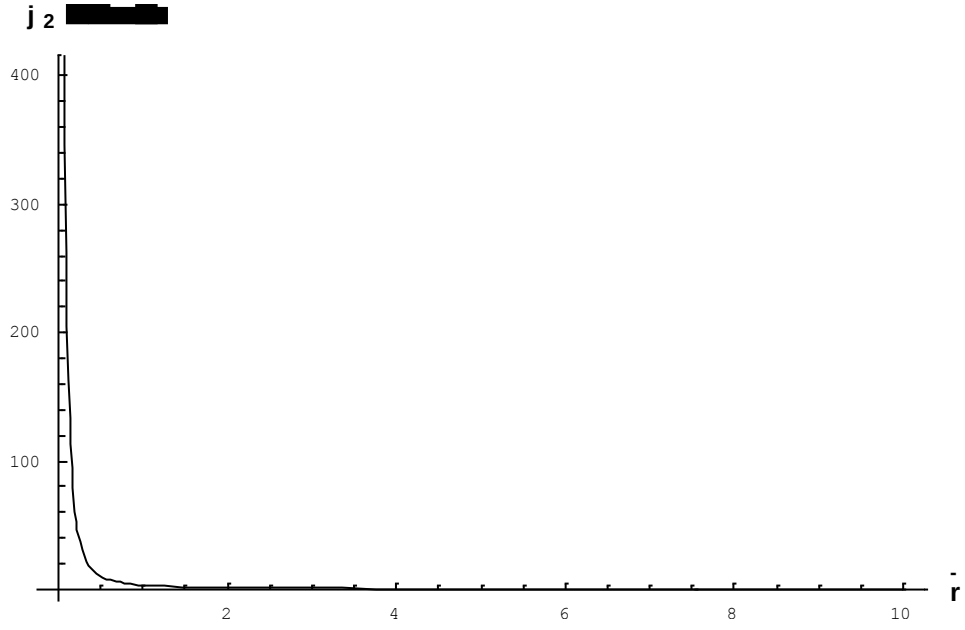


Şekil 4.1.8. Yeni koordinatlarda birinci mertebede φ

Benzer durum ikinci mertebede de görülür.

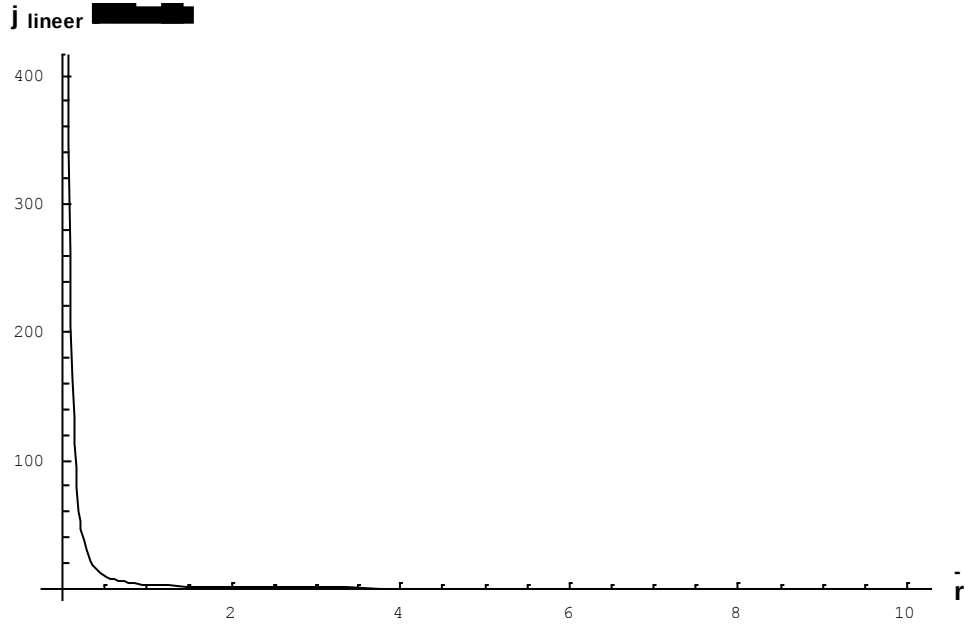
$$\varphi_2(\bar{r}) = \frac{1}{\bar{r}} + \frac{3}{2} \arccot \left(\frac{\bar{r}+1}{\bar{r}^2} \right) \quad (4.1.10)$$

Bu durumda $\bar{r}$ sıfıra yaklaşırken ıraksamanın daha hızlı olduğu görülür. Bu mertebeye için grafik Şekil 4.1.9'da verilmiştir.



Şekil 4.1.9. Yeni koordinatlarda ikinci mertebede φ

$\varepsilon = 0.1$ alındığında φ için bu koordinatlarda çözüm Şekil 4.1.10'daki gibi gösterilebilir:

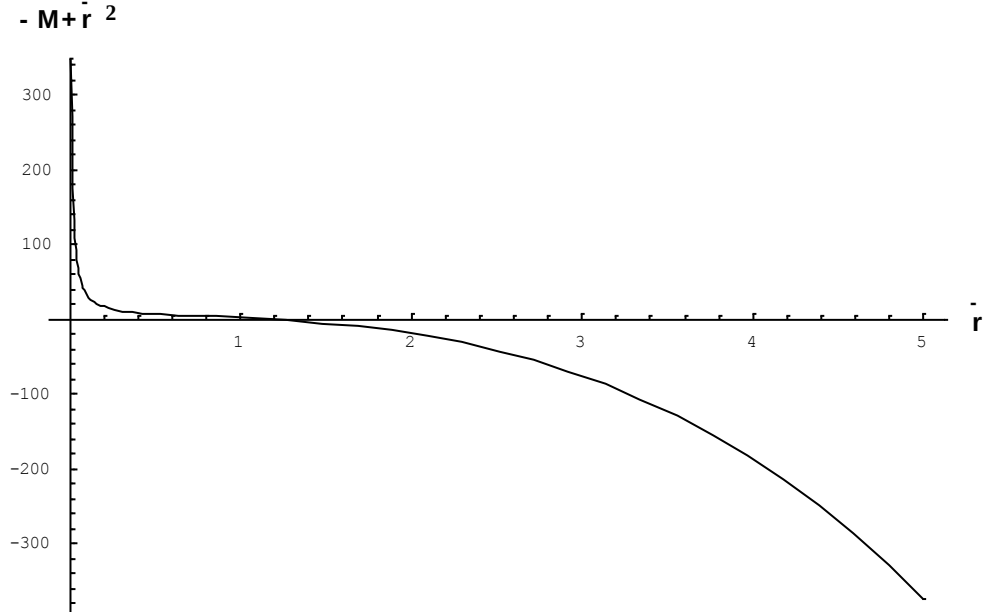


Şekil 4.1.10. Yeni koordinatlarda φ çözümü ($\varepsilon = 0.1$)

$\bar{r}$ sıfıra giderken M 'nin pozitif değerler alması orijin etrafında bir karadelğin varlığına işarettir. $-M + \bar{r}^2$ 'nin sıfır olduğu yerler çıkartılmalıdır.

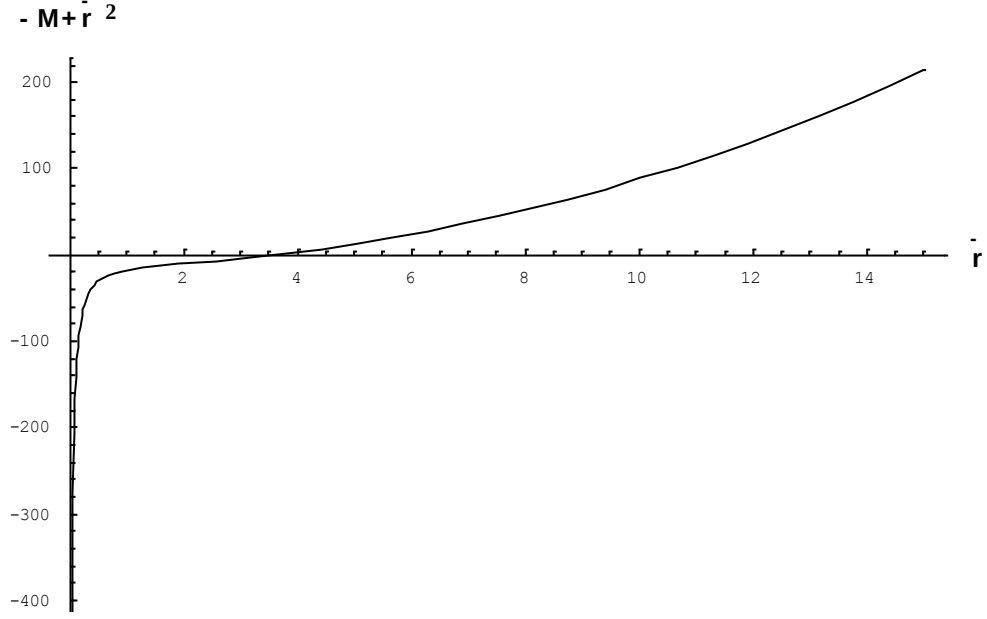
$$-M+\bar{r}^2=0 \quad (4.1.11)$$

(A_1^1, B_1^1) çözüm kümesi için bu denklemin grafiği Şekil 4.1.11’de çizilmiştir.



Şekil 4.1.11. (A_1^1, B_1^1) çözüm kümesine karşılık gelen $-M+\bar{r}^2$ fonksiyonu ($\varepsilon = 0.1$)

(A_1^2, B_1^2) çözüm kümesi içinse aynı fonksiyon için Şekil 4.1.12 ‘deki grafik elde edilir.



Şekil 4.1.12. (A_1^2, B_1^2) çözüm kümesine karşılık gelen $-M + \bar{r}^2$ fonksiyonu ($\varepsilon = 0.1$)

Bu denklemin tek kökü vardır ve şu yaklaşık ifadeyi verir:

$$\bar{r} > 24\pi\varepsilon(1-(24)^2\pi^2\varepsilon^2)+O(\varepsilon^4) \quad (4.1.12)$$

Bu aynı zamanda $\bar{r} = 0$ 'da oluşacak olan eğrilik tekilliğini de önler.

$$R = \frac{\varepsilon}{\bar{r}^2} \left(\frac{1}{1+\bar{r}^2} \right) \quad (4.1.13)$$

Burada R, eğrilik skaleridir.

4.2. (4.1.2) Metriği için Einstein Denklemlerinin Çıkarılması

(4.1.2) metriğine bir skaler alan kuple edildiği durum için $\Lambda = -1$ alındığı zaman hesap yapıldığında Einstein denklemleri şu şekilde çıkar:

$$-\frac{dM(\bar{r})}{d\bar{r}} + \bar{r} \frac{d^2M(\bar{r})}{d\bar{r}^2} - 8\pi\bar{r}(\bar{r}^2 - M(\bar{r}))(\Phi(\bar{r}))^2 = 0 \quad (4.2.1)$$

$$\frac{d^2 M(\bar{r})}{d\bar{r}^2} - \frac{1}{\bar{r}} \frac{dM(\bar{r})}{d\bar{r}} = 0 \quad (4.2.2)$$

$$\frac{1}{4\pi} \frac{d^2 M(\bar{r})}{d\bar{r}^2} - (\bar{r}^2 - M(\bar{r}))(\Phi(\bar{r}))^2 = 0 \quad (4.2.3)$$

$$\frac{d}{d\bar{r}} \left((\bar{r}^2 - M(\bar{r}))\Phi(\bar{r}) \right) = 0 \quad (4.2.4)$$

Burada (4.2.1), (4.2.2) ve (4.2.3) metrik için Einstein denklemleri, (4.2.4) ise skaler alan için dalga denklemdir.

Bunlar analitik olarak çözülebilir ve $\Phi = 0$ durumu için boşluk çözümü bulunur. M, boşluk olmayan durumlarda da geçerli, kütle parametresidir [12].

5. TUZAKLANMA KOŞULU

Bir karadeliğin oluşup oluşmadığını ortaya çıkarmak için uygulanabilecek olan bir yöntem de tuzaklanma koşuluna bakmaktır [12]. Tuzaklanmış yüzey, “yüzeye dik (normal) yönde çıkan sıfır (null) eğrilerin açılımının negatif olduğu yüzey” olarak tanımlanmıştır [12].

Bunun için kullanılacak olan koşul

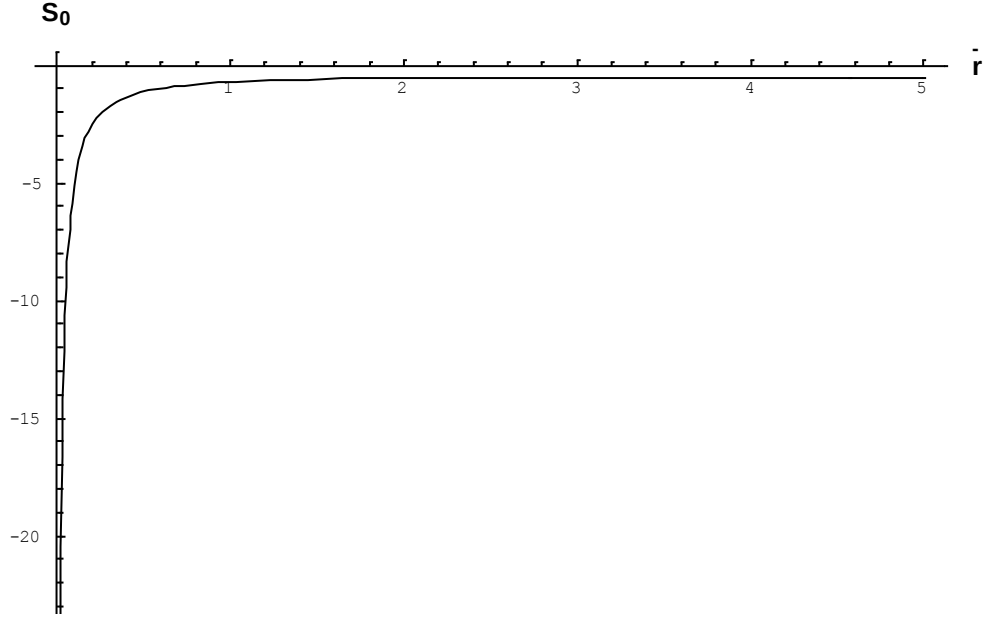
$$S = 1 + \sin(r) \cos(r) \frac{dB}{dr} < 0 \quad (5.1)$$

olarak verilmiştir.

ε parametresine göre sıfırıncı mertebede bu koşul, bu mertebedeki çözümler alındığında

$$S_0 = -\frac{(1 + \bar{r}^2)^{1/2}}{2\bar{r}} \quad (5.2)$$

halindedir. Şekil 5.1 bu durumu göstermektedir.



Şekil 5.1. Sıfırıncı mertebede tuzaklanma koşulu

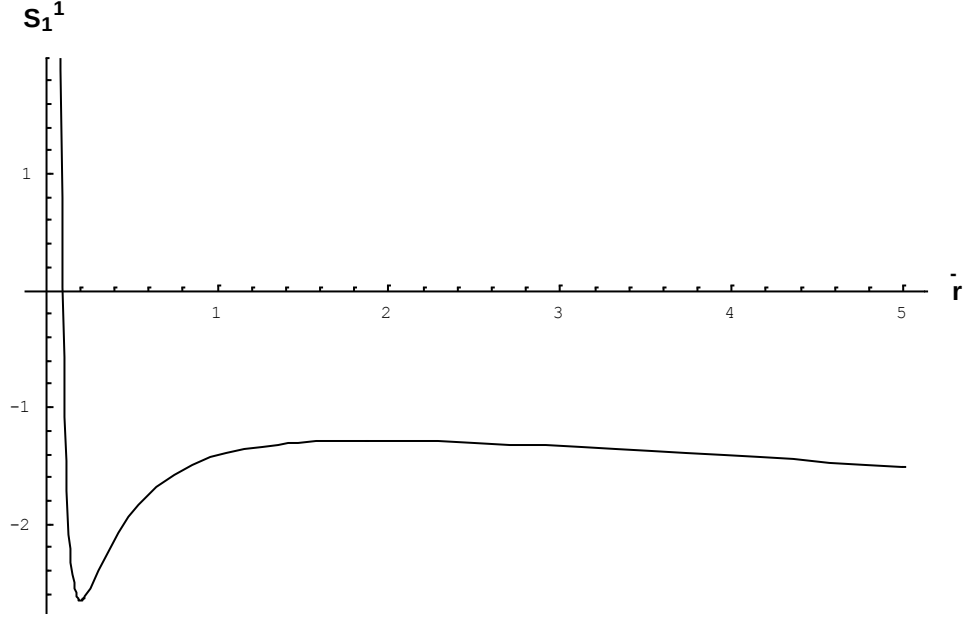
$\bar{r} = 0$ 'da ($r = \frac{\pi}{4}$) koşulun sağlandığı görülür. $r = 0$ 'da ($\bar{r} \rightarrow \infty$) $S = -\frac{4}{\bar{r}^2}$ buluruz, bu da aşağıdan sıfıra gitmektedir.

Birinci mertebedeki çözümlerden (A_1^1, B_1^1) çözüm kümesine bakıldığında

$$S = - \left[(1 + \bar{r}^2)^{1/2} \left(\frac{1}{\bar{r}} + \varepsilon \left(1 - \frac{1}{\bar{r}^2} \right) \right) \right] \quad (5.3)$$

bulunur. $\frac{\bar{r}}{4} < \varepsilon$ için tuzaklanmış bölge yoktur. Eğrilik tekilliğine kadar gelinebilir.

Tuzaklanma koşulunun bu çözüm için grafiği $\varepsilon = 0.1$ için şu şekildedir:

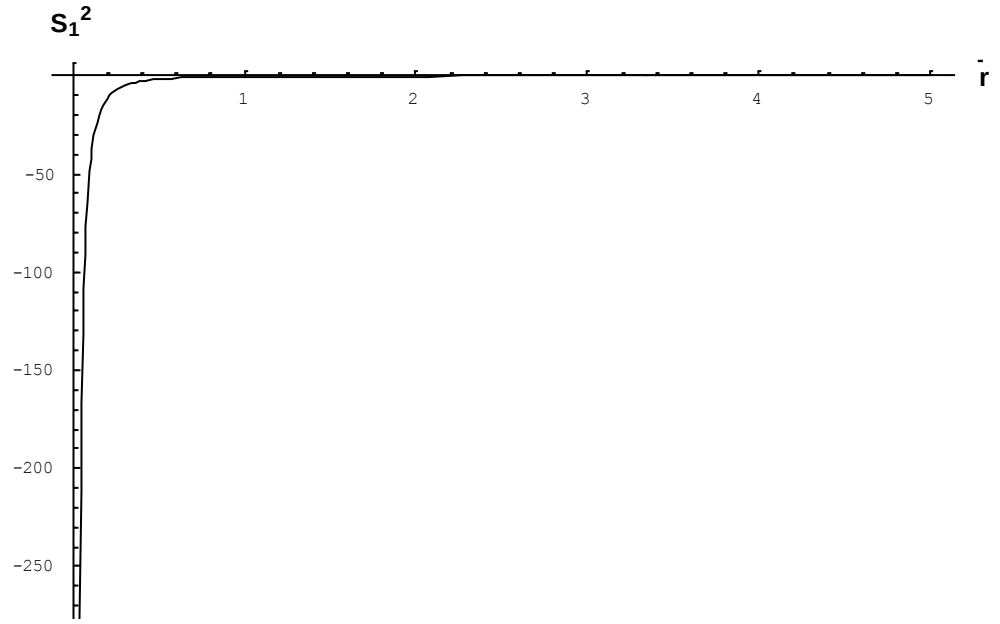


Şekil 5.2. (A_1^1, B_1^1) çözüm kümesi için tuzaklanma koşulu ($\varepsilon = 0.1$)

(A_1^2, B_1^2) çözüm kümesiyle işlem yapıldığında

$$S = -3\varepsilon \left[(1 + \bar{r}^2)^{(-1/2)} \left(\left(\bar{r} + \frac{1}{\bar{r}} \right) + \arccot(\bar{r}) \left(-\bar{r}^2 + \frac{1}{\bar{r}^2} \right) \right) \right] \quad (5.4)$$

bulunur. $\varepsilon = 0.1$ için tuzaklanma koşulunun grafiği bu çözümde şu şekildedir:



Şekil 5.3. (A_1^2, B_1^2) çözüm kümesi için tuzaklanma koşulu ($\varepsilon = 0.1$)

$\bar{r}$ sıfıra gittikçe yüzey tuzaklanır. Parçacık orijindeki koordinattan bağımsız eğrilik tekiliğine yaklaşamaz.

6. SAYISAL İŞLEMLER

Bu bölümde, daha önce lineerleştirmeye incelenmiş olan sistemin sayısal çözümü için kullanılabilecek yöntemler incelenecektir.

6.1. Adi Diferansiyel Denklemler için Başlangıç Değer Problemlerinin Sayısal Çözümleri

Her adi diferansiyel denklem, bir birinci dereceden adi diferansiyel denklem takımı olarak yazılabilir [21, sf. 707; 22, sf. 423; 23, sf. 353]. Örneğin,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)\frac{dy}{dx} = r(x) \quad (6.1.1)$$

denklemini,

$$\frac{dy}{dx} = z(x) \quad (6.1.2)$$

$$\frac{dz}{dx} = r(x) - q(x)z(x) \quad (6.1.3)$$

şeklinde yazılabilir. En genel halde N. dereceden bir denklem için şöyle yazabiliriz:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_N) \quad (i = 1 \dots N) \quad (6.1.4)$$

Bununla beraber, başlangıç koşulları da $y_i(x_0)$ şeklinde verilmiş olsun.

Bu tür problemlerin sayısal çözümleri için kullanılan yöntemlerden en basiti “açık Euler yöntemi” veya sadece “Euler yöntemi” olarak bilinir. Açık yöntemlerde denklemin sağ tarafında hesaplanmak istenen $(n+1)$. noktayla ilgili bilgi bulunmaz, herşey önceki noktalara bağlıdır. Euler yönteminde denklemler doğrudan, sonlu farklar şeklinde yazılarak çözülürler.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (6.1.5)$$

şeklindeki denklem

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x, y) \quad (6.1.6)$$

$$\Delta y = \Delta x f(x, y) \quad (6.1.7)$$

halinde yazılır. Burada Δx aynı zamanda h , adım aralığı olduğundan algoritma şu şekilde yazılabilir:

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) + O(h^2) \quad (6.1.8)$$

Burada n işlem yaptığımız nokta, y_n ise $y(x_n)$ olarak tanımlanır.

Sayısal yöntemlerde hataların iki kaynağı vardır. Birincisi hesaplayıcının limitlerinden dolayı oluşan yuvarlama (round off) hataları, diğeryse hesaplama algoritmasından kaynaklanan kesme (truncation) hatalarıdır. Hata her adımda büyüyorsa hesaplamada instabilite olduğu söylenir. n 'inci mertebeden bir sayısal yöntem $(n+1)$ derecesinde bir hataya neden olur. Yöntemden kaynaklanan instabilite adım aralığının ayarlanmasıyla en aza indirilebilir. Hata sönümlü salınım yapan bir düzende gidiyorsa çözüm stabildir.

Buna göre Euler yöntemi birinci derece bir yöntemdir ve hata oranı fazla olduğundan tercih edilmez.

Bu tür problemlerde daha çok kullanılan yöntem “Runge-Kutta” yöntemidir. İntegrasyon aralığını verilen adım aralığında almak yerine parçalayarak işlem yaptığından hata miktarı azalır. En çok kullanılan türü, dördüncü dereceden olan algoritmadır. Şu şekilde yazılabilir[21, sf.711]:

$$k_1 = h f(x_n, y_n) \quad (6.1.9)$$

$$k_2 = h f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1) \quad (6.1.10)$$

$$k_3 = h f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2) \quad (6.1.11)$$

$$k_4 = h f(x_n + h, y_n + k_3) \quad (6.1.12)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + \Theta(h^5) \quad (6.1.13)$$

Bunlarla beraber, işlemlerde hassasiyet ve verimlilik sağlamak için adım aralığı h sabit tutulmamalıdır. Çözümün düzgün olarak değiştiği yerlerde verimliliği artırmak için büyük adım aralığı, ani değişimlerin olduğu yerlerde ise hassasiyeti yükseltmek için küçük adım aralığı kullanılmalıdır. Adım aralığını $2h$ alarak bulunan sonuçla h alarak bulunan sonuç arasındaki fark, yapılan hata hakkında bilgi verir. Buna uygun olarak en uygun adım aralığı belirlenebilir. Adım aralığı, hassasiyeti çok düşürecek kadar büyük veya verimliliği çok düşürecek kadar küçük seçilmemelidir.

“Değiştirilmiş orta nokta yöntemi” (modified midpoint method) adım ayarlamak için kullanılabilir. Bu yöntemde H adımı n tane, herbiri h uzunluğunda adıma ayrılır[21, sf. 722].

$$z_0 = y_0 \quad (6.1.14)$$

$$z_1 = z_0 + h f(x, z_0) \quad (6.1.15)$$

$$z_2 = z_0 + 2h f(x + h, z_1) \quad (6.1.16)$$

$$z_3 = z_0 + 2h f(x + 2h, z_2) \quad (6.1.17)$$

$$z_n = z_{n-2} + 2h f(x + (n-1)h, z_{n-1}) \quad (6.1.18)$$

kullanılarak $x_0 + H$ noktasındaki çözüm şu şekilde bulunur:

$$y_n = \frac{1}{2}[z_n + (z_{n-1} + h f(x + H, z_n))] \quad (6.1.19)$$

Bu yöntemi baz alan ve düzgün fonksiyonların integrasyonunda kullanılan Bulirsch-Stoer yönteminin özelliği ekstrapolasyon içermesidir. Önce H adımı 2,4,6,8... gibi çift sayıda adıma ayrılır, sonra bunlar kullanılarak $h=0$ civarındaki değere erişim için ekstrapolasyon kullanılır [21, sf. 724].

Çok adımlı açık algoritmaların en çok kullanılanlarından biri “Adams-Bashforth” algoritmasıdır. Bu,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}) + \Theta(h^5) \quad n = 3, 4, \dots \quad (6.1.20)$$

olarak yazılabilir. Burada f_n (6.1.5) denkleminin sağ tarafındaki fonksiyonun n noktasındaki değeridir. Çözülecek problem bir başlangıç değer problemi olduğundan birinci ve ikinci noktadaki fonksiyon değerleri Runge-Kutta gibi başka bir çözücüyle önceden hesaplanmalıdır.

Çözümlerinde birbirinden çok farklı, iki veya daha fazla skala (veya özdeğer) bulunan denklemlere “sert” denklemler denir [21, sf. 734; 22, sf. 477]. Sertliğin derecesi en küçük ve en büyük özdeğerin oranı olarak verilir. Şu örneği inceleyelim [21, sf. 734]:

$$u' = 998u + 1998v \quad (6.1.21)$$

$$v' = -999u - 1999v \quad (6.1.22)$$

Burada çentik işareti x' e göre türevi göstermektedir. Denklem sisteminin $u(0) = 1$ ve $v(0) = 0$ başlangıç koşulları altında çözümü şu şekilde bulunur:

$$u = 2e^{-x} - e^{-1000x} \quad (6.1.23)$$

$$v = -e^{-x} + e^{-1000x} \quad (6.1.24)$$

(6.3.1)-(6.3.2) sistemini herhangi bir sayısal yöntemle çözmeye çalışsaydık e^{-1000x} teriminden dolayı, stabil bir çözüm için $1/1000$ 'den daha küçük bir adım aralığı kullanmamız gerekecekti. Çünkü x sıfıra yaklaştıkça analitik çözümde ihmal edebileceğimiz bu kısım daha önem kazanmaya başlayacaktı.

Sert denklemlerin çözümü için küçük adım aralığıyla açık (explicit) yöntemler kullanmak yerine daha büyük adım aralığı alarak kapalı (implicit) yöntemler kullanılması daha yaygındır. Her adımda çözülmek zorunda olan cebrik denklem sisteminin ve matris tersi alma işleminin getirdiği dezavantaj dışında ardışık iki çözüm noktası arasında oluşan keskin değişimleri işleme katabilmek için kapalı çözümler sert denklem sistemlerinde yoğun olarak kullanılırlar.

Kapalı yöntemlerin en basit hali kapalı Euler yöntemidir. Şeması şöyle verilebilir:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1}) \quad (6.1.25)$$

Kapalı Adams-Moulton algoritması ise şu şekildedir:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}) + \Theta(h^5) \quad (6.1.26)$$

Sistemin Jacobian'ını içeren yarı-kapalı Rosenbrock algoritması şu şekilde verilebilir:

$$k_1 = h[I - ha_1J(y_n)]^{-1}f(y_n) \quad (6.1.27)$$

$$k_2 = h[I - ha_2J(y_n + c_1k_1)]^{-1}f(y_n + b_1k_1) \quad (6.1.28)$$

$$a_1 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{6} \quad a_2 = 1 - \frac{\sqrt{6}}{6} \quad (6.1.29)$$

$$w_1 = -0.41315432 \quad w_2 = 1.41315432 \quad (6.1.30)$$

$$b_1 = c_1 = \frac{-6 - \sqrt{6} + \sqrt{58 + 20\sqrt{6}}}{6 + 2\sqrt{6}} \quad (6.1.31)$$

$$y_{n+1} = y_n + w_1k_1 + w_2k_2 \quad (6.1.32)$$

Burada I birim matris, J ise sistemin Jacobian'ıdır.

Kapalı yöntemlerin bir çeşidi de açık bir yöntemin sonucunu kapalı bir yöntemde kullanarak işlem yapmaktır. Burada, açık yöntemle elde edilen (n+1). noktadaki sonuç kapalı yöntemde, denklemin sağ tarafında kullanılmaktadır. Kullanılan açık yönteme tahmin edici (predictor), bu yöntemi kullanarak (n+1). noktadaki değeri tekrar hesaplayan yöntemeyse düzeltici (corrector) denir. Bu yöntemlerin genel adı tahmin edici-düzeltilici (predictor-corrector) olarak verilir. Bashforth-Moulton algoritmasında Adams-Bashforth şeması tahmin edici, Adams-Moulton şemasıysa düzeltici olarak kullanılır[21, sf.749].

6.2. Sayısal İşlemler için Denklemlerin Düzenlenmesi ve Çözülmesi

Statik durumda, skaler alan kuplajlı (3.1.1) metriğinden çıkartılan (3.1.2) - (3.1.5) denklemleri, kullanacağımız Runge-Kutta bazlı algoritmalar için birinci dereceden diferansiyel denklemlere dönüştürülmek zorundadır.

$$A(r) = y_1, \quad \frac{dA(r)}{dr} = y_2, \quad B(r) = y_3, \quad \frac{dB(r)}{dr} = y_4 \quad (6.2.1)$$

Dönüşümleri kullanılırsa sayısal çözümde kullanılacak denklemlerin şunlar olduğu görülür:

$$\frac{dy_1}{dr} = y_2 \quad (6.2.2)$$

$$\frac{dy_2}{dr} = -y_2 y_4 - H_1 y_2 - \tan(r) y_4 - H_2 \quad (6.2.3)$$

$$\frac{dy_3}{dr} = y_4 \quad (6.2.4)$$

$$\frac{dy_4}{dr} = -y_4 (y_4 + 2H_1) - H_2 \quad (6.2.5)$$

$$\Phi = \frac{1}{2 \tan(r) e^{y_3}} \quad (6.2.6)$$

H_1 ve H_2 fonksiyonları şu şekildedir:

$$H_1 = \frac{1}{\cos(r) \sin(r)}, \quad H_2 = \frac{2(1-e^{2y_1})}{\cos^2(r)} \quad (6.2.7)$$

Bu dönüşümlerle $\bar{r}$ fonksiyonu, M kütle parametresi ve S tuzaklanma koşulu şu hale gelir:

$$\bar{r} = \tan(r) e^{y_3} \quad (6.2.8)$$

$$M = e^{2(y_3 - y_1)} [e^{2y_1} \tan^2(r) - \sin^2(r) (y_4)^2 - 2 \tan(r) (y_4) - \sec^2(r)] \quad (6.2.9)$$

$$S = 1 + \sin(r) \cos(r) y_4 \quad (6.2.10)$$

Bu aşamadan sonra, (6.2.2)-(6.2.5) denklemlerinin sayısal çözülmesi ve sonuçların fiziksel parametreleri veren (6.2.6), (6.2.8), (6.2.9) ve (6.2.10) denklemlerine yerleştirilmesi yolu izlenebilir.

Eldeki denklem sisteminin, non-lineer terimler içerdiğinden ve orijinal durumunda bu terimler türev içerdiğinden sert bir denklem seti olması olasılığı yüksektir. Çeşitli yöntemler kullanılarak yapılan işlemlerle fiziksel M, S ve Φ parametreleri hesaplanmış fakat bunların önceki sonuçlarla ve birbirleriyle tutarsız olmaları, hesapların başlangıç koşullarına hassas bağlılığı ve her durumda sayısal çözümün daha önce lineerleştirmeyele bulunan fiziksel olmayan çözümü seçmesi sayısal çözümlerin stabil olmadığına bir göstergesi olarak bulunmuştur.

7. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Çalışmamızda göze çarpan en önemli sonuçlardan biri çözümde hipergeometrik fonksiyonların bulunmasıdır. Bu özellik daha önce, BTZ fonunda Klein – Gordon sisteminin çalışıldığı başka çalışmalarca da ortaya konmuştu [20]. Bilindiği gibi sistemlerde hipergeometrik denklemlerin bulunması konform simetrinin bir göstergesidir.

Sistemimiz, “yeni koordinatlar” dediğimiz biçimiyle fiziksel yoruma daha açık bir hale gelmiştir. Özellikle bu koordinatlarda hesapladığımız kütle parametresi, buna bağlı olarak hesapladığımız $-M + \bar{r}^2$ fonksiyonu ve beşinci bölümde hesaplanan tuzaklanma koşulu yardımıyla üçüncü bölümde bulunan (A_1^1, B_1^1) çözüm kümesinin fiziksel olmadığını, bununla beraber (A_1^2, B_1^2) çözüm kümesinin orijin etrafında bir karadelik çözümü verdiğini görürüz. Fiziksel bir karadelik çözümü vermemesi bir yana, (A_1^1, B_1^1) çözüm kümesi AdS uzayının önemli bir özelliği olan eğrilik tekilliğine izin verilmemesi koşulunu da sağlayamamaktadır, eğriliğin patladığı yer olan orijinde bu küme için tuzaklanma yoktur. (A_1^2, B_1^2) çözüm kümesi içinse orijin tuzaklıdır, kütle ve skaler alan orijinde yoğunlaşmıştır. Orijin, tuzaklanmanın yanısıra metrik tekilliğini önlemek için de çıkartılmıştır.

Konu, bugün itibarıyla oldukça canlı bir konudur ve yeni çalışmalar alanın en önemli yayınlarının her sayısında görülmektedir. Bizim yaklaşımımız açısından bakıldığında ilerde yapılabilecek olan birincil çalışmalar, sisteme açısal momentum parametresi ekleyerek dönen karadelik çözümlerine bakmak ve yük parametresi ekleyerek yüklü karadelik çözümlerini incelemektir. Denklemlerin stabilitesi sorunu çözülerek sayısal hesaplar da yapılabilir.

EK A

ϵ^2 MERTEBESİNDEKİ (3.1.2) DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN İZLENEN PARAMETRELERİN DEĞİŞMESİ YÖNTEMİ

Çözülmesi istenen denklem, y ve f sadece x 'in fonksiyonu olmak üzere,

$$A \frac{d^2 y}{dx^2} + B \frac{dy}{dx} + Cy = f \quad (A.1)$$

şeklinde ise çözüm, y_1 ve y_2 homojen denklemin çözümleri olmak üzere

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \quad (A.2)$$

şeklinde yazılabilir.

$$y_1 \frac{dc_1}{dx} + y_2 \frac{dc_2}{dx} = 0 \quad (A.3)$$

koşulu sağlanmak zorundadır. Buna göre

$$\frac{dy}{dx} = c_1 \frac{dy_1}{dx} + c_2 \frac{dy_2}{dx} \quad (A.4)$$

ve

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dc_1}{dx} \frac{dy_1}{dx} + c_1 \frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{dc_2}{dx} \frac{dy_2}{dx} + c_2 \frac{d^2 y_2}{dx^2} \quad (A.5)$$

eşitlikleri elde edilir. Bunlar (A.1) denkleminde yerine yazılarak (A.3) koşulunun da dikkate alınmasıyla

$$A \frac{dy_1}{dx} \frac{dc_1}{dx} + A \frac{dy_2}{dx} \frac{dc_2}{dx} = f \quad (\text{A.6})$$

denklemleri elde edilir.

O halde şu matris formu yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ A \frac{dy_1}{dx} & A \frac{dy_2}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dc_1}{dx} \\ \frac{dc_2}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Operatör matrisinin determinanı hesaplanır:

$$d = \det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ A \frac{dy_1}{dx} & A \frac{dy_2}{dx} \end{bmatrix} = A \left[y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} \right] \quad (\text{A.8})$$

Buna göre $\frac{dc_1}{dx}$ ve $\frac{dc_2}{dx}$ ifadeleri elde edilir:

$$\frac{dc_1}{dx} = \frac{\det \begin{bmatrix} 0 & y_2 \\ f & A \frac{dy_2}{dx} \end{bmatrix}}{d} = \frac{-f y_2}{d} \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{dc_2}{dx} = \frac{\det \begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ A \frac{dy_1}{dx} & f \end{bmatrix}}{d} = \frac{f y_1}{d} \quad (\text{A.10})$$

Bunlar integre edilerek c_1 ve c_2 hesaplanır:

$$c_1 = \int \frac{-f y_2}{d} dx \quad (\text{A.11})$$

$$c_2 = \int \frac{f y_1}{d} dx \quad (\text{A.12})$$

Bu katsayıların yerine yazılmasıyla (A.2) denklemi son halini alır:

$$y = - \left[\int \frac{f}{d} y_2 \, dx \right] y_1 + \left[\int \frac{f}{d} y_1 \, dx \right] y_2 \quad (\text{A.13})$$

EK B

METRİĞİN YENİ KOORDİNATLARDA YAZILMASI

$$ds^2 = \frac{e^{2A(r)}}{\cos^2(r)} (dr^2 - dt^2) + \tan^2(r) e^{2B(r)} d\theta^2 \quad (B.1)$$

metriğine

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \tan(r) e^B \\ \bar{t} &= t \\ \bar{\theta} &= \theta \end{aligned} \quad (B.2)$$

dönüşümleri uygulanır. Bu durumda

$$d\bar{r} = \sec^2 r e^B dr + \tan r e^B \frac{dB}{dr} dr \quad (B.3)$$

ve dolayısıyla

$$dr = \frac{d\bar{r} e^{-B}}{\sec^2 r + \tan r \frac{dB}{dr}} \quad (B.4)$$

halini alır.

$$\begin{aligned} dt &= d\bar{t} \\ d\theta &= d\bar{\theta} \end{aligned} \quad (B.5)$$

aynen kalır.

O halde metrik

$$ds^2 = -\frac{e^{2A}}{\cos^2 r} d\bar{t}^2 + \frac{e^{2(A-B)}}{\left(\sec r + \sin r \frac{dB}{dr}\right)^2} d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\bar{\theta}^2 \quad (B.6)$$

şeklini alır. $d\bar{r}^2$ 'nin katsayısı düzenlenirse

$$\left[\sec^2 r + 2 \tan(r) \frac{dB}{dr} + \sin^2(r) \left(\frac{dB}{dr} \right)^2 \right] + \bar{r}^2 + \tan^2(r) e^{2B} \equiv -M + \bar{r}^2 \quad (B.7)$$

ise (Burada son iki terim $\bar{r}^2$ 'nin tanımının toplanıp çıkartılmasıyla elde edilmiştir.)

$$M = \tan^2(r) e^{2B} - e^{2(B-A)} \left[\sec^2 r + 2 \tan(r) \frac{dB}{dr} + \sin^2(r) \left(\frac{dB}{dr} \right)^2 \right] \quad (B.8)$$

tanımı yapılabilir.

Son olarak metriğin şu formda olduğu bulunur:

$$ds^2 = -(-M + \bar{r}^2) d\bar{t}^2 + \frac{1}{(-M + \bar{r}^2)} d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\bar{\theta}^2 \quad (B.9)$$

KAYNAKLAR

- [1] **S. Carlip**, Class. And Quantum Grav. **12** (1995) 2853
- [2] **A. Staruszkiewicz**, Acta Phys. Polon. **24** (1963)
- [3] **S. Deser, R. Jackiw, G. 't Hooft**, Ann. Phys. **152** (1984) 220
- [4] **S. Deser, R. Jackiw**, Commun. Math. Phys. **118** (1988) 495
- [4] **G. 't Hooft**, Commun. Math. Phys. **117** (1988) 685
- [5] **E. Witten**, Nucl. Phys. **B311** (1988) 46
- [6] **E. Witten**, Nucl. Phys. **B323** (1989) 113
- [7] **E. Witten**, Commun. Math. Phys. **137** (1991) 29
- [8] **M. Bañados, C. Teitelboim, J. Zanelli**, Phys. Rev. Lett. **69** (1992) 1849
- [9] **M. Bañados, M. Henneaux, C. Teitelboim, J. Zanelli**, Phys. Rev. **D48** (1993) 1506
- [10] **M. W. Choptuik**, Phys. Rev. Lett. **40** (1993) 9
- [12] **F. Pretorius, M. W. Choptuik**, Phys. Rev. D **62** (2000) 124012
- [13] **N. S. Değer**, “School on String Theory” yaz okulu çerçevesinde Tübitak – Boğaziçi Üniversitesi Feza Gürsey Enstitüsü’nde verilen “ Special Topics in AdS / CFT ” dersinin notları, İstanbul, 2001
- [14] **J. Maldacena**, Adv.Theor.Math.Phys. **2** (1998) 231; Int.J.Theor.Phys. **38** (1999) 1113
- [15] **O. Aharony, S. S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri, Y. Oz**, Phys. Rept. **323** (2000) 183
- [16] **R. M. Wald**, “General Relativity”, The University of Chicago Press, Chicago, 1984
- [17] **S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik**, “Table of Integrals, Series and Products”, Academic Press, 1980
- [18] **D. Garfinkle**, Phys. Rev. D **63** (2001) 044007
- [19] **L. M. Burko**, Phys. Rev. D **62** (2000) 127503
- [20] **D. Birmingham**, hep-th/0101194
- [21] **W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery**, “Numerical Recipes in C”, Cambridge University Press, Cambridge, 1992
- [22] **G. Engeln-Müllges, F. Uhlig**, “Numerical Algorithms with C”, Springer-Verlag, Berlin, 1996
- [23] **J. Mathews, R. L. Walker**, “Mathematical Methods of Physics”, Second Edition, W. A. Benjamin Inc., California, 1970

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında İstanbul’da doğdu. İstanbul Fenerbahçe Lisesi’nden 1994 yılında mezun olduktan sonra İstanbul Teknik Üniversitesi Fen–Edebiyat Fakültesi Fizik Mühendisliği bölümüne girdi. Bir yıl İ. T. Ü. Dil–İnkılap Fakültesi’nde okuduğu İngilizce hazırlık sınıfından sonra başladığı lisans öğrenimini 1999 yılında tamamladı. Aynı yıl İ. T. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Mühendisliği Programı Fizik Mühendisliği Anabilimdalı’nda yüksek lisans öğrenimine başladı. Haziran 2000’den itibaren İ. T. Ü. Fen–Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü’nde araştırma görevlisidir.