

**YERDEĞİŞTİRMEYEN KOORDİNATLAR İÇİN
WIGNER FONKSİYONLARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fizik Mühendisi Lara Talar KELLEYANE

**Anabilim Dalı : FİZİK
Programı : FİZİK MÜHENDİSLİĞİ**

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ömer Faruk DAYI

MAYIS 2002

**YERDEĞİŞTİRMEYEN KOORDİNATLAR İÇİN
WIGNER FONKSİYONLARI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fizik Mühendisi Lara Talar KELLEYANE

509991076

Anabilim Dalı : FİZİK
Programı : FİZİK MÜHENDİSLİĞİ

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ömer Faruk DAYI

MAYIS 2002

ÖNSÖZ

Yüksek lisans öğrenimim ve tez çalışmam süresince benden değerli yardımlarını ve desteğini esirgemeyen, beraber çalışmaktan kıvanç duyduğum hocam Sayın Prof.Dr.Ömer Faruk DAYI' ya, öğrenim hayatım boyunca manevi desteklerini her zaman hissettiğim eşim Alper ÖZHARAR, annem ve babama, başta Tolga BİRKANDAN olmak üzere yardım ve katkılarından yararlandım değerli çalışma arkadaşlarıma en içten teşekkürlerimi sunarım.

Mayıs 2002

Lara Talar KELLEYANE

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ	iv
ÖZET	v
SUMMARY	vi
1. GİRİŞ	1
2. DEFORMASYON KUANTİZASYONU	3
2.1. $\star$ -Çarpımı ve Moyal Parantezleri	4
2.1.1. $\star$ -Çarpımı	4
2.1.2. Moyal parantezleri	6
2.2. Wigner Dağılım Fonksiyonu	7
2.2.1. Operatör ve deformasyon yöntemleri arasındaki ilişki	9
2.2.2. Wigner fonksiyonlarının özellikleri	11
2.2.3. Bir boyutlu harmonik salıncının Wigner fonksiyonlarının iki yolla bulunması	14
2.2.4. Sabit bir dış manyetik alandaki yüklü parçacık (Landau problemi) için Wigner fonksiyonları	18
3. YERDEĞİŞTİRMEYEN KOORDİNATLARA SAHİP UZAYDA KUANTUM MEKANİĞİ	21
3.1. θ ve $\hbar$ Kuantizasyonu için üç Yöntem	22
3.1.1. Dalga fonksiyonu yöntemi	22
3.1.2. Etkin Hamiltonyen yöntemi	23
3.1.3. Yeni yöntem	24
3.2. Yerdeğıştirmeyen Koordinatlara Sahip Uzayda Harmonik Salıncı Problemi için Wigner Fonksiyonu	25
3.3. Yerdeğıştirmeyen Koordinatlara Sahip Uzayda Landau Problemi için Wigner Fonksiyonu	29
3.4. Yerdeğıştirmeyen Faz uzayı Koordinatlarına Sahip Uzayda Landau Problemi için Wigner Fonksiyonu	31
4. SONUÇLAR	34
KAYNAKLAR	35
ÖZGEÇMİŞ	36

SEMBOL LİSTESİ

$\star$	:	yıldız çarpımı
δ_{ij}	:	Kronecker δ -fonksiyonu
ϵ_{ij}	:	antisimetrik tensör
Tr	:	iz
p_i	:	kanonik momentum
q_i	:	kanonik koordinat
L	:	açısal momentum
L_z	:	açısal momentumun z bileşeni
$\vec{A}$	:	vektör potansiyeli
Ψ	:	durum vektörü
ρ	:	durum yoğunluğu
$\hat{\rho}$	:	yoğunluk matrisi
P_W	:	Wigner fonksiyonu
P_Q	:	quasi-olasılık dağılım fonksiyonu
H_n	:	n. dereceden Hermite polinomu
L_n	:	n. dereceden Laguerre polinomu
$f \vec{\partial}_i$	:	$\partial_i f$
$\vec{\partial}_i f$	:	$\partial_i f$

YERDEĞİŞTİRMEYEN KOORDİNATLAR İÇİN WIGNER FONKSİYONLARI

ÖZET

Deformasyon (WWMG) kuantizasyonu bir kuantum mekaniksel sistemi faz uzayı değişkenleri cinsinden ifade eder. Operatör kuantizasyonu ile arasındaki ilişki sembol haritaları ve yıldız çarpımları cinsinden verilir. Wigner fonksiyonu önceleri istatistik fizikte kuantum seviyesinde düzeltmeler yapmak için kullanılmış, sonradan yerdeğıştirmeyen koordinatlarda kuantum mekaniğı dahil olmak üzere daha pek çok alanda uygulama alanı bulmuş bir quasi-olasılık dağılım fonksiyonudur. Wigner fonksiyonu yıldız çarpımı ile birlikte deformasyon kuantizasyonu yönteminin en önemli araçlarındanıdır.

Yerdeğıştirmeyen koordinatlar geometrisinin önemi özellikle sicim teorilerinde uzay-zaman koordinatlarının yerdeğışmez olması gerektiğı anlaşılnca artmıştır. Yerdeğıştirmeyen koordinatların uygulamalarının ne gibi etkileri olacağını görebilmek için bu koordinatlarda kuantum mekaniğinde ulaşılabacak sonuçlara bakılabilir.

Bu çalışmada yerdeğıştirmeyen koordinatlarda kuantum mekaniğinin anlaşılmasına yardımcı olması amacıyla yerdeğıştirmeyen koordinatlarda Wigner fonksiyonu çalışılmıştır. Yerdeğıştirmezlik ve kuantizasyon iki farklı deformasyon olarak çalışılmış, harmonik salınıcı ve Landau problemiçin Wigner fonksiyonları ele alınmıştır. Bir boyutlu harmonik salınıcı için Wigner fonksiyonları bulunmuş, iki boyuta genellenmesi tartışılmıştır. Ayrıca Landau problemi için Wigner fonksiyonları yerdeğışmeyen koordinatlar ve yerdeğışmez momentumlar için bulunmuştur. İlginç bir bulgu olarak da yerdeğıştirmezlik ilişkilerinin özel bir seçimiyle Landau problemi için Wigner fonksiyonunun yerdeğıştirmezlik parametresinden bağımsız olduğı görülmüştür.

WIGNER FUNCTIONS IN NONCOMMUTING COORDINATES

SUMMARY

The Wigner function is a quasi-probability function which was at first used in order to make corrections in quantum levels and which later has gained popularity in many applications fields including quantum mechanics in noncommuting coordinates. Wigner function together with the star product is one of the most significant elements of deformation quantization method. Deformation quantization identifies a quantum mechanical system in terms of phase space variables. Its relation with operator quantization is given in terms of symbol maps and star products.

Noncommutative geometry has gained greater importance after it is found out that space-time coordinates should be noncommuting in string theories. In order to observe the effects of noncommutative coordinates on physical systems it is reasonable to take a look at the consequences of their applications in quantum mechanics.

Throughout this work, the Wigner functions have been taken into consideration in order to get an understanding of noncommutative quantum mechanics. Noncommutativity and quantization have been studied as two different deformations, thus Wigner functions for harmonic oscillator and Landau problem have been examined. Wigner functions for one dimensional harmonic oscillator have been derived and generalized into two dimensional case. Also Wigner functions for Landau problem, for noncommutative coordinates and momenta have been derived. It has been concluded that by a special choice of noncommutativity relations the Wigner function for Landau problem is independent from noncommutativity parameter.

1 GİRİŞ

Kuantum mekaniğinin olasılıksal gösterimi, klasik mekaniğin deterministik karakteriyle çelişmektedir. Bu iki mekanik dalının aksiyomatik temelleri birbirinden bağımsızdır. Dolayısıyla kuantizasyon prosedürü ve bir dereceye kadar da klasik limite dönme işlemi doğal görünmemektedir.

Bu durum, kuantum mekaniğini faz uzayında bir istatistiksel teori olarak gösterme çabalarına hız getirmiştir. Wigner 1932’de [1] Weyl’in [2] kuantizasyon prosedürüyle ilgili olarak “faz uzayı dağılım fonksiyonu” kavramını ortaya atmıştır. Bu amaca yönelik en ilginç gelişmelerden biri de Moyal’ın faz uzayındaki fonksiyonlar için tanımladığı “sinüs Poisson parantezleri” veya bugünkü adıyla “Moyal Parantezleri” dir [3]. Bu formalizmde Moyal parantezleri kuantum mekaniğindeki komutasyon parantezlerine karşılık gelmektedir. Kuantum mekaniğinin önemli uygulamaları Moyal parantezleri cinsinden klasik bir formülasyona oturtulabilir.

Özetle kuantizasyon, klasik gözlenenlerin cebrik yapısında bir deformasyon şeklinde de algılanabilir. Dolayısıyla kuantum mekaniği, deforme olmuş çarpım işlemine ve deforme olmuş parantezlere sahip olan faz uzayı fonksiyonları (veya dağılımları) teorisi şeklinde ifade edilebilir.

Weyl-Wigner-Groenewold-Moyal kuantizasyonu olarak da bilinen deformasyon kuantizasyonu, bir kuantum sistemini klasik faz uzayı değişkenleri cinsinden tanımlar. Operatör kuantizasyonu ile sembol gönderimleri ve $\star$ -çarpımı yoluyla bağlıdır. Operatörler klasik fonksiyonlara karşılık getirilmelerine rağmen birbirleri üzerine etkileri $\star$ -çarpımı yoluyla gerçekleşmektedir. Deformasyon kuantizasyonunun en önemli elemanlarından biri de Wigner fonksiyonudur. Wigner fonksiyonu, operatör formalizmindeki beklenen değerlere karşılık gelen faz uzayı integrallerinin tanımlanması için gereklidir.

Yerdeğiştirmeyen koordinatlar geometrisi hem matematiksel hem de fiziksel

açından ilginç bir konudur [4]. Özellikle sicim teorilerinde uzay-zaman koordinatlarının yerdeğiştirmez olması gerektiği ortaya çıkınca [5] bu konuya fizikçilerin ilgisi artmıştır. Burada sözü edilen yerdeğiştirmezlik genelde alan teorilerine uygulanmaktadır [6] fakat bu tür koordinatların getireceği sonuçları görmek için yerdeğiştirmeyen koordinatlarda kuantum mekaniği üzerinde çalışmanın yararlı olabileceği açıktır[7].

Yerdeğiştirmeyen koordinatlar operatör olarak görünmek zorundadır. Dolayısıyla nonkomutatif sistemler kuantize edildikten sonra elimizde iki tür operatör olmaktadır. Bundan kaçınmak için yerdeğiştirmeyen koordinatların yerine birbiriyle yerdeğiştiren ancak deforme olmuş koordinatlar kullanılabilir. Yerdeğiştirmeyen koordinatlarda kuantum mekaniği genel olarak bu yöntemle çalışılmıştır. Halbuki, kuantum mekaniğinin de bir deformasyon olarak görölmesi olasıdır. Yerdeğiştirmezlik ve kuantizasyon iki farklı deformasyon olarak çalışılabilir mi? Bu soru bu çalışmanın temelini oluşturmaktadır ve cevabı yerdeğiştirmeyen koordinatlarda Wigner fonksiyonunun bulunmasını zorunlu kılmaktadır.

Bu çalışmada deformasyon kuantizasyonu ve Wigner fonksiyonu kavramlarına değinildikten sonra bir boyutlu harmonik salınıcı için Wigner fonksiyonu bulunacaktır. İki boyutta harmonik salınıcıya genelleştirilmesi tartışılacaktır.

Düzlem üzerinde bir elektronun düzleme dik ve üniform bir manyetik alan etkisinde hareketi Landau problemi olarak bilinir. Yerdeğiştirmeyen koordinatlarda Wigner fonksiyonunu bulmak için ilk önce deformasyon yöntemi sadece yerdeğiştirmeyen koordinatlar için kullanılacaktır. Daha sonra etkin bir Hamiltonyen fonksiyonu kullanılarak hem yerdeğiştirmeyen koordinatlar hem de deformasyon yöntemiyle Wigner fonksiyonu bulunacaktır. Bu çalışmada ayrıca Landau problemi için Wigner fonksiyonları yerdeğiştirmeyen koordinatlar ve yerdeğiştirmeyen koordinatlar ile birlikte yerdeğiştirmeyen momentumlar için bulunacaktır.

2 DEFORMASYON KUANTİZASYONU

Klasik bir sistemi kuantize etmenin bilinen üç yolu vardır: Kanonik kuantizasyon, yol integrali kuantizasyonu, deformasyon kuantizasyonu.

Kanonik kuantizasyon,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (2.1)$$

$$\{p_i, q_j\} = -\delta_{ij} \rightarrow [\hat{p}_i, \hat{q}_j] = -i\hbar\delta_{ij} \quad (2.2)$$

$$\hat{\psi}|\psi\rangle = 0 \quad (2.3)$$

şeklinde olup operatör cebri içerir.

Yol integrali kuantizasyonu klasik mekaniğin Lagrange formülasyonundan yola çıkar. Bu kuantizasyon yönteminin içinde operatör cebri bulunmaz ve bu yönüyle yol integrali kuantizasyonu kanonik kuantizasyondan üstündür. Deformasyon kuantizasyonu klasik mekanikten kuantum mekaniğine geçiş (kuantizasyon) prosedürünün diğer bir alternatifidir. Burada gözlenenlerin normal çarpımlı cebri yerine asosiyatif $\star$ -çarpımlı bir cebir konur. Bu, kuantum mekaniksel hesaplamaların Hilbert uzayı formalizmini kullanmadan, klasik çerçevede yapılabileceği anlamına gelir. Standart kuantizasyon prosedüründe karşılaşılan, sistem için uygun bir Hilbert uzayı oluşturma problemine bir alternatif olarak sunulmuştur. Esas olarak klasik mekaniği kuantize etmek için kullanılsa da kuantum alanlar teorisinin formülasyonuna da uygulanmaktadır.

Kısacası bu yöntem, kuantum mekaniğini formüle etmek için bir alternatiftir. Bu formülasyonda Kuantum gözlenenleri faz uzayındaki reel fonksiyonlarla tanımlanır.

Matematiksel olarak ise gözlenen büyüklüklerin cebirinin yerine deforme olmuş olan bir başka cebirin konması ve Poisson parantezlerinin yeni bir deforme olmuş parantezlerle değiştirilmesidir.

$$\underbrace{A_{\hbar}}_{de\ form\ e\ cebir} = \underbrace{A}_{eski\ cebir} \otimes \underbrace{C(\hbar)}_{\hbar-de\ formasyon\ u} \quad (2.4)$$

Deformasyon kuantizasyonunu sembolik olarak göstermek istersek,

1)

$$\hat{f} \rightarrow sym(\hat{f}) = f, \quad (2.5)$$

$$\hat{g} \rightarrow sym(\hat{g}) = g, \quad (2.6)$$

2)

$$\hat{f} \cdot \hat{g} \rightarrow f \star g, \quad (2.7)$$

3)

$$\{f, g\}_P = \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \rightarrow \{f, g\}_M = \{f, g\} + \frac{(i\hbar)^2}{2} \{f, g\}^2 + \dots \quad (2.8)$$

Görüldüğü gibi Poisson parantezlerine bu şekilde ek terimler gelmesinden dolayı deforme olmuş bir başka parantez elde edilmektedir. Yani klasik sisteme karşılık gelen cebirsel yapı deforme olmaktadır.

2.1 $\star$ -çarpımı ve Moyal Parantezleri

2.1.1 $\star$ -çarpımı

Deformasyon kuantizasyonunun en önemli aracı olan $\star$ -çarpımı ilk olarak Groenewold tarafından ortaya atılmıştır [8]. Bu çarpım faz uzayı fonksiyonlarını birbirine bağlayarak normal çarpımın deformasyonuna yol açar.

$$\star = e^{i\hbar(\overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q)} \quad (2.9)$$

Çalışmamız boyunca $\star$ -çarpımındaki operatörler için Weyl sıralaması kullanılmıştır.

$$\begin{aligned}(f \star g)(q, p) &= f e^{i\hbar(\overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q)} g \\ &= f(q + i\hbar \overrightarrow{\partial}_p, p - i\hbar \overrightarrow{\partial}_q) g.\end{aligned}\tag{2. 10}$$

Burada $f(x, p)$ ve $g(x, p)$ gözlenenlerdir.

Bir başka deyişle $\star$ -çarpımı sembol düzeyinde operatör çarpımını sağlar. Eğer f ve g operatörlerine klasik bir karşılık getirmek istersek bunu şu şekilde gösterebiliriz:

$$\hat{f} \rightarrow \text{sym}(\hat{f}),\tag{2. 11}$$

$$\hat{g} \rightarrow \text{sym}(\hat{g}),\tag{2. 12}$$

$$\hat{f} \cdot \hat{g} \rightarrow \text{sym}(\hat{f}) \star \text{sym}(\hat{g}).\tag{2. 13}$$

Yani $\star$ -çarpımı yerdeğiştirmeyen koordinatlara sahip bir uzayda normal çarpımın yerine geçer.

$\star$ -çarpımının özellikleri

1) Asosiyatiflik: $\star$ -çarpımı yerdeğiştirmez olmakla birlikte asosiyatiftir. Bu özelliğinin bir sonucu olarak Moyal parantezleri Jacobi özdeşliğini sağlar.

2) Bu çarpımın çok önemli bir başka özelliği de aşağıdaki gibidir:

$$\int dp dq f \star g = \int dp dq g \star f = \int dp dq f g,\tag{2. 14}$$

Bunu açıkça gösterelim:

$$\int dqdp f \star g = \int dqdp f e^{\frac{i\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q)} g \quad (2.15)$$

$$\int dqdp \{fg + \frac{i\hbar}{2}(\overrightarrow{\partial}_q f \overrightarrow{\partial}_p g - f \overrightarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q g) + \dots\} \quad (2.16)$$

$$\int dqdp \{fg + \frac{i\hbar}{2}(\overrightarrow{\partial}_q(f \overrightarrow{\partial}_p g)) - f \overrightarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q g - \frac{i\hbar}{2}(\overrightarrow{\partial}_p(f \overrightarrow{\partial}_q g)) - f \overrightarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p g\} \quad (2.17)$$

Burada diverjans terimlerinin integrali sıfır vereceğinden,

$$\int dqdp f \star g = \int dqdp fg \quad (2.18)$$

sonucunu elde ederiz.

2.1.2 Moyal parantezleri

Moyal parantezleri [3],

$$f \star g - g \star f = i\hbar \{f, g\}_M \quad (2.19)$$

olarak tanımlanır. Moyal parantezlerinin bir başka ismi de “sinüs Poisson parantezleri” dir. Bunun nedeni Moyal parantezlerinin tam olarak Poisson parantezlerinin sinüsü olmasıdır.

$$\{f, g\}_M = \frac{2}{\hbar} \sin \frac{\hbar}{2} \{f, g\}_P, \quad (2.20)$$

Moyal formalizminde, durum yoğunluğu ρ 'nun zaman içinde değişimi Liouville denkleminin genelleştirilmiş haline karşılık gelir:

Liouville denklemi,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \{H, \rho\} = 0 \quad (2.21)$$

Moyal denklemi,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{2}{\hbar} \sin \frac{\hbar}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial p_\sigma}, \frac{\partial}{\partial q_\sigma} \right\} H \rho = 0 \quad (2. 22)$$

2.2 Wigner Dağılım Fonksiyonu

Wigner dağılım fonksiyonu ilk olarak Wigner [1] ve Szilard tarafından ortaya atılmıştır. Wigner dağılım fonksiyonları istatistik mekanikte kuantum seviyesinde düzeltmeler yapmak için, kuantum kimyasında ve kuantum optiğinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Ayrıca, genel olarak kuantum mekaniksel sistemlerde, örneğin M-teorisinin cebrik yapısında kullanıldığı gibi, klasik ve kuantum mekaniği arasındaki bağlantıların da daha iyi anlaşılmasını sağlar.

Wigner dağılım fonksiyonu yoğunluk matrisinin faz-uzayı dağılımı alternatifidir. Wigner fonksiyonu ile yoğunluk matrisi elemanları birbirine Fourier dönüşümü ile bağlıdır. $H\Psi = E\Psi$ denkleminin çözümü olan Wigner Fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$P_W = \frac{1}{2\pi} \int dy \Psi^*(x - \frac{\hbar}{2}y) \Psi(x + \frac{\hbar}{2}y) e^{-ipy} \quad (2. 23)$$

Bu fonksiyonlar olasılık dağılım fonksiyonu değildirler. p veya x üzerinden integre edildiklerinde ise olasılık dağılımına dönüşürler. Aynı zamanda sistemin klasik limitine gidildiğinde (büyük boyutlar, yavaş değişen potansiyellerde veya yüksek sıcaklıklarda) Wigner dağılım fonksiyonu klasik dağılım fonksiyonuna gider.

Bilindiği gibi, belirsizlik ilkesi kuantum mekaniğindeki faz uzayı kavramında problem yaratmaktadır. Bir parçacığın aynı anda kesin belirli bir konumu ve momentumu olmadığından dolayı, kuantum mekaniksel bir parçacık için gerçek bir olasılık dağılımı tanımlanamamaktadır. Bununla birlikte “quasi-olasılık dağılım fonksiyonları ” bazı yönlerden faz uzayı dağılım fonksiyonlarına benzerlik gösterirler ve kuantum mekaniksel sistemlerin üzerinde çalışılmasını kolaylaştırırlar. Hesaplamalarda çok iyi bir araç olmanın yanısıra klasik ve kuantum mekaniği arasındaki ilişkilere ışık tutarlar.

Bunun nedeni, quasi-olasılık dağılımlarının kuantum mekaniksel büyüklüklerin beklenen değerlerini klasik beklenen değerlere çok benzer bir şekilde ifade edilmesini sağlamasıdır. Örneğin bir boyutta q konumuna ve p momentumuna sahip bir parçacığı ele alalım. Klasik olarak parçacığın faz uzayı dağılımı $P_{Cl}(q, p)$ ile verilsin. Bu durumda argümanları konum ve momentum olan bir fonksiyonun, $A(q, p)$, beklenen değeri,

$$\langle A_{Cl} \rangle = \int dp \int dq A(q, p) P_{Cl}(q, p) \quad (2. 24)$$

şeklinde verilir.

Kuantum mekaniksel bir parçacık ise yoğunluk matrisiyle açıklanır ve konum ve momentum operatörlerine bağlı bir operatörün, $\hat{A}$, beklenen değeri,

$$\langle \hat{A} \rangle_{kuant} = Tr(\hat{A}\hat{\rho}) \quad (2. 25)$$

şeklindedir. Burada sorunlardan biri klasik $A(q, p)$ fonksiyonuna karşılık gelen operatörün tek olmamasıdır ve böyle bir tanımın (operatör) amacı belli değildir. Buna karşılık $P_Q(q, p)$ quasi-olasılık dağılımı böyle bir tanımı şu şekilde getirmektedir:

$$\langle \hat{A} \rangle_{kuant} = \int dq \int dp A(q, p) P_Q(q, p) \quad (2. 26)$$

Burada $A(q, p)$, $\hat{A}(\hat{q}, \hat{p})$ operatöründen iyi tanımlanmış bir ilişkiyle elde edilebilir. Bu da kuantum mekaniksel sonuçların klasik sonuçlara benzeyen bir forma getirilmesini sağlar.

Bu quasi-olasılık dağılımlarından ilki 1932'de Wigner tarafından ortaya atılmıştır. Bu dağılım fonksiyonunun amacı Schrödinger'in kuantum mekaniğini yeniden formüle etmektir. Wigner dağılım fonksiyonu durum fonksiyonlarını konfigürasyon uzayındaki fonksiyonlar cinsinden ifade eder. Lorentz grubu altında değişmez olmadığı için non-relativistiktir. Ayrıca birden fazla parçacık için konfigürasyon uzayı kuantum mekaniğini relativistik olarak formüle etmek zor olacağından bu

şekilde olması tercih edilmiştir. Bununla birlikte öncelikle istatistik mekanikte olmak üzere, kuantum kimyası ve kuantum optiğinde pek çok uygulama alanı bulmuştur.

Kuantum optiğinde bundan başka pek çok quasi-olasılık dağılımı kullanılmaktadır ancak bunlardan biri dışındakilerin kullanım alanı kısıtlıdır.

2.2.1 Operatör ve deformasyon kuantizasyon yöntemleri arasındaki ilişki

Operatör ve deformasyon kuantizasyonu yönteminde aralarında ilişki kurulması gereken kavramlar şunlardır: i) olasılık fonksiyonu, ii) klasik büyüklükle kuantum mekaniksel büyüklük arasındaki ilişki ve iii) özdeğer-özvektör denklemi.

Olasılık Fonksiyonu

i) Kuantum mekaniğinde bir sistem için iki olasılıktan söz edebiliriz ve bunların hangisini seçeceğimiz sorunu söz konusudur. Üstelik bunlar genel olarak reel değerlerdir.

$$P_1(q, p) = Tr(\hat{\rho}\delta(q - \hat{q})\delta(p - \hat{p})), \quad (2. 27)$$

$$P_2(q, p) = Tr(\hat{\rho}\delta(p - \hat{p})\delta(q - \hat{q})). \quad (2. 28)$$

Burada $\delta(q - \hat{q})$, $|q' \rangle$ nü aşağıdaki şekilde dönüştüren operatördür.

$$\delta(q - \hat{q})|q' \rangle = |q \rangle = |q \rangle \langle q|q' \rangle = \delta(q - q')|q' \rangle, \quad (2. 29)$$

Oysa Wigner dağılım fonksiyonuyla bunu hiçbir sorun olmadan hallederiz. Wigner dağılım fonksiyonu her fonksiyon ve ona karşılık gelen operatör için tek bir beklenen değer verir. Wigner fonksiyonu,

$$P_W(q, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int dy \langle q - y | \hat{\rho} | q + y \rangle e^{\frac{2ipy}{\hbar}} \quad (2. 30)$$

veya eşdeğer olarak

$$P_W(q, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int dy \psi^*(q+y) \psi(q-y) e^{\frac{2ipy}{\hbar}} \quad (2. 31)$$

şeklindedir.

Wigner-Weyl Karşılıklığı

Bir kuantum mekaniksel operatörün ölçümünün sonucu bellidir: ölçümün yapıldığı sistemin durum vektörü, ölçülen operatörün karakteristik vektörlerinden birine taşınır. Klasik fonksiyonlar için böyle bir postüla mevcut değildir fakat Weyl, operatörün ölçüm değerine karşılık bir $A(q, p)$ getirmiş ve bu ilişkiyi şu şekilde vermiştir [2]:

$$\langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle = \int dq \int dp P_W(q, p) A(q, p), \quad (2. 32)$$

$$Tr(\hat{\rho} \hat{A}) = \int dq \int dp P_W(q, p) A(q, p). \quad (2. 33)$$

Özetle, eğer klasik bir $A(q, p)$ fonksiyonu,

$$A(q, p) = \int d\sigma \int d\tau e^{\left(\frac{i}{\hbar}\right)(\sigma q + \tau p)} \alpha(\sigma, \tau), \quad (2. 34)$$

bir kuantum mekaniksel operatöre karşılık geliyorsa,

$$\hat{A}(\hat{q}, \hat{p}) = \int d\sigma \int d\tau e^{\left(\frac{i}{\hbar}\right)(\sigma \hat{q} + \tau \hat{p})} \alpha(\sigma, \tau), \quad (2. 35)$$

A ile $\hat{A}$ arasındaki ilişki Wigner tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir [1]:

$$A(q, p) = \int dz e^{\frac{ipz}{\hbar}} \langle q - \frac{1}{2}z | \hat{A} | q + \frac{1}{2}z \rangle. \quad (2. 36)$$

Tersine verilen bir $A(q, p)$ fonksiyonu, $\hat{A}(\hat{q}, \hat{p})$ operatörünün Weyl sembolüdür.

Özdeğer Denklemi ve Yoğunluk Matrisinin Hareket Denklemi

Yoğunluk matrisinin hareket denklemi,

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \tau} = [\hat{H}, \hat{\rho}], \quad (2.37)$$

ona karşılık gelen Wigner fonksiyonunun hareket denklemi,

$$i\hbar \frac{\partial P_W}{\partial t} = \{H, P_W\}_M, \quad (2.38)$$

$$\{H, P_W\}_M = H \star P_W - P_W \star H \quad (2.39)$$

şeklinde verilir. Burada $H(q, p)$ sistemin $\hat{H}$ operatörüne karşılık gelen fonksiyondur. $\hbar \rightarrow 0$ limitini aldığımızda elde edeceğimiz denklem klasik Liouville denklemdir:

$$\frac{\partial P_W^c}{\partial t} + \{P_W^c, H\} = 0. \quad (2.40)$$

Burada c indisi klasik limit anlamındadır. Kuantum Mekaniksel özdeğer denklemi,

$$\hat{A}\hat{\rho} = \lambda\hat{\rho}, \quad (2.41)$$

aşağıdaki formu alır:

$$\begin{aligned} \int \int dq dp A(q + q', p - p') P_W(q - q', p + p') e^{4i(q'p + p'q)} = \\ = \lambda \int \int dp dq P_W(q, p) e^{4i(q'p + p'q)}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

2.2.2 Wigner fonksiyonlarının özellikleri

Wigner fonksiyonunun sekiz adet ana özelliği vardır [9]:

(i) $P(q, p)$, $\Psi(q)$ durum vektörünün hermitsel bir formu olmalıdır, yani,

$$P(q, p) = \langle \Psi | \hat{M}(q, p) | \Psi \rangle \quad (2. 43)$$

Burada $\hat{M}(q, p)$ hermitik bir operatördür, dolayısıyla $P(q, p)$ reeldir.

(ii)

$$\int dp P(q, p) = |\psi(q)|^2 = \langle q | \hat{\rho} | q \rangle, \quad (2. 44)$$

$$\int dq P(q, p) = \langle p | \hat{\rho} | p \rangle, \quad (2. 45)$$

$$\int dq dp P(q, p) = \text{Tr}(\hat{\rho}) = 1 \quad (2. 46)$$

(iii) $P(q, p)$, Galile dönüşümleri altında değişmez olmalıdır, yani eğer $\Psi(q) \rightarrow \Psi(q+a)$ ise $P(q, p) \rightarrow P(q+a, p)$ ve eğer $\Psi(q) \rightarrow \Psi(q')$ ise $P(q, p) \rightarrow P(q, p-p')$.

(iv) $P(q, p)$, uzay ve zaman yansımaları altında değişmez olmalıdır, yani eğer $\Psi(q) \rightarrow \Psi(-q)$ ise $P(q, p) \rightarrow P(-q, -p)$ ve eğer $\Psi(q) \rightarrow \Psi^*(q)$ ise $P(q, p) \rightarrow P(q, -p)$ olmalıdır.

(v) Kuvvet sıfır ise hareket denklemleri klasiktir,

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{p}{m} \frac{\partial P}{\partial q} \quad (2. 47)$$

(vi) Eğer $P_\Psi(q, p)$ ve $P_\Phi(q, p)$ sırasıyla $\Psi(q)$ ve $\Phi(q)$ 'ya karşılık gelen dağılımlarsa o zaman,

$$|\int dq \Psi^*(q) \Phi(q)|^2 = (2\pi\hbar) \int dq \int dp P_\Psi(q, p) P_\Phi(q, p) \quad (2. 48)$$

Bu özelliğin iki ilginç sonucu vardır. Birincisi eğer $\Psi(q) = \Phi(q)$ alırsak,

$$\int dq \int dp [P_\Psi(q, p)]^2 = \frac{1}{2\pi\hbar} \quad (2. 49)$$

elde ederiz. İkinci olarak $\Psi(q)$ ve $\Phi(q)$ 'yu ortogonal seçebiliriz. O zaman,

$$\int dq \int dp P_\Psi(q, p) P_\Phi(q, p) \quad (2. 50)$$

elde ederiz ki bu $P(q, p)$ 'nin her yerde pozitif olamayacağını gösterir. Bu sonuç oldukça geneldir.

Wigner 1979'da (i) ve (ii) özelliklerini sağlayan herhangi bir dağılım fonksiyonunun bazı p ve q değerleri için negatif değerler de alabileceğini göstermiştir.

(vii)

$$\int dq \int dp A(q, p) B(q, p) = 2\pi\hbar \text{Tr}(\hat{A}\hat{B}), \quad (2. 51)$$

Burada $A(q, p)$, $\hat{A}$ operatörüne karşılık gelen klasik fonksiyondur ve Wigner'in reçetesine göre

$$A(q, p) = \int dz e^{\frac{ipz}{\hbar}} \langle q - \frac{1}{2}z | \hat{A} | q + \frac{1}{2}z \rangle \quad (2. 52)$$

ile verilir.

(viii) Bir dalga fonksiyonunun Fourier dönüşümünü aşağıdaki gibi tanımlarsak,

$$\Phi(p) = (2\pi\hbar)^{-1} \int dq \Psi(q) e^{\frac{iqp}{\hbar}} \quad (2. 53)$$

o zaman (2. 23) şu formu alır:

$$P(q, p) = \pi\hbar^{-1} \int dp' \Phi^*(p + p') \Phi(p - p') e^{-\frac{2iqp'}{\hbar}} \quad (2. 54)$$

Bu özelliklerden ilk altısının tek bir dağılım fonksiyonunu belirlediği gösterilmiştir ve bu dağılım fonksiyonu (2. 23) 'dir.

Bu dağılım fonksiyonu üzerinde iki kısıtlama vardır. Birincisi, daha önce de belirtildiği gibi Wigner dağılım fonksiyonunun non-relativistik olmasıdır. İkinci olarak da her $P(q, p)$ fonksiyonuna izin verilmeyiştir. İzin verilen $P(q, p)$ şu şartı sağlar:

$$\int dq \int dp P(q, p) P'(q, p) \geq 0 \quad (2. 55)$$

Burada $P'(q, p)$ bir pure state'e karşılık gelen herhangi bir dağılım fonksiyonudur.

Wigner fonksiyonları birbirleriyle $\star$ -çarpımı yoluyla etkileşirler. $f(q, p)$ ve $g(q, p)$ iki Wigner fonksiyonu ise

$$f \star g = f(q, p - \frac{i\hbar}{2} \vec{\partial}_q) g(q, p + \frac{i\hbar}{2} \overleftarrow{\partial}_q) \quad (2. 56)$$

veya

$$f \star g = f(q + \frac{i\hbar}{2} \vec{\partial}_p, p - \frac{i\hbar}{2} \vec{\partial}_q) g(q, p) \quad (2. 57)$$

Ayrıca pure state Wigner fonksiyonu için Moyal denklemi

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} f(x, p; t) = H \star f - f \star H \quad (2. 58)$$

olup statik Wigner dağılım fonksiyonları aşağıdaki gibidir

$$\{H, f\}_M = 0. \quad (2. 59)$$

2.2.3 Bir boyutlu harmonik salınıcının Wigner fonksiyonlarının iki yolla bulunması

Dalga fonksiyonu yoluyla

Bir boyutta harmonik salınıcının öz durumları ,

$$U_n(q) = \left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2^n n!}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\alpha^2 q^2}{2}} H_n(\alpha q), \quad (2. 60)$$

şeklindedir. Burada H_n , n inci dereceden Hermite polinomu, α ise $\alpha = (m\omega/\hbar)^{1/2}$ dir.

$$\begin{aligned} U_n^*(q+y)U_n(q-y) = & \left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^n n!} e^{-\alpha^2((q+y)^2+(q-y)^2)} \cdot \\ & \cdot H_n(\alpha(q+y))H_n(\alpha(q-y)) \end{aligned} \quad (2. 61)$$

Yukardaki ifade (2. 23)'de yerine konursa,

$$P_W(q, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2^n n!} e^{-\alpha^2 q^2} \int dy e^{\frac{2ipy}{\hbar}} e^{-\alpha^2 y^2} H_n(\alpha(q+y)) \cdot H_n(\alpha(q-y)) \quad (2. 62)$$

Ekspansiyelin üstünü tamkare yaparsak,

$$\alpha^2 y^2 - \frac{2ipy}{\hbar} = \alpha^2 \left(y - \frac{ip}{\alpha^2 \hbar}\right)^2 + \frac{p^2}{\alpha^2 \hbar^2}, \quad (2. 63)$$

ve yeni bir değişken tanımlayarak,

$$z = \alpha \left(y - \frac{ip}{\alpha^2 \hbar}\right), \quad (2. 64)$$

$$P_W(q, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2^n n!} e^{-\alpha^2 q^2} e^{-\beta^2} \int dz e^{-z^2} H_n(\alpha q + z + \beta) \cdot H_n(\alpha q - z - \beta) \quad (2. 65)$$

Burada $\beta = ip/\alpha\hbar$. $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$ özelliği kullanılırsa,

$$P_W(q, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{(-1)^n}{2^n n!} e^{-\alpha^2 q^2} e^{-\beta^2} \int dz e^{-z^2} H_n(\alpha q + z + \beta) \cdot H_n(-\alpha q + z + \beta) \quad (2. 66)$$

$$\alpha^2 q^2 - \beta^2 = \frac{2}{\hbar\omega} \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2\right) = \frac{2}{\hbar\omega} H(q, p), \quad (2. 67)$$

$$\Rightarrow P_W = \frac{1}{\pi\hbar} (-1)^n e^{-\frac{2H}{\hbar\omega}} L_n\left(\frac{4H}{\hbar\omega}\right). \quad (2. 68)$$

Burada L_n , n inci dereceden Laguerre polinomu olup $L_n = e^z \partial^n (e^{-z} z^n)$ yani n. dereceden Laguerre polinomudur. İlk birkaç Laguerre polinomlarına bakalım olursak,

$$L_0(x) = 1, \quad (2. 69)$$

$$L_1(x) = 1 - x, \quad (2. 70)$$

$$L_2(x) = 1 - 2x - x^2, \quad (2. 71)$$

harmonik salıncının taban durumu için $P_W > 0$ olduğunu fakat uyarılmış durumlarda P_W 'nin negatif değerler alabileceğini görürüz. Bununla birlikte kanonik topluluk için sonuç her zaman pozitiftir. Bir boyut için çözülmüş olan bu problem, kartezyen koordinatlarda kalmak şartıyla n boyuta genelleştirilebilir.

★-özdeğer Yoluyla

$\hbar = 1$, $m = 1$ alınırsa Harmonik salıncı Hamiltonyeni aşağıdaki formu alır:

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + x^2) \quad (2. 72)$$

Bir boyutta harmonik salıncı ★-özdeğer denklemi,

$$\begin{aligned} H(x, p) \star P(x, p) &= EP(x, p) \\ \frac{1}{2}(p^2 + x^2) \star P(x, p) &= EP(x, p) \end{aligned} \quad (2. 73)$$

şeklindedir. Açıkça yazacak olursak,

$$\left[\frac{1}{2}(p - \frac{i}{2}\partial_x)^2 + (x + \frac{i}{2}\partial_p)^2 \right] P(x, p) = EP(x, p) \quad (2. 74)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2}(p^2 - ip\partial_x - \frac{1}{4}\partial_x^2) + \frac{1}{2}(x^2 + ix\partial_p - \frac{1}{4}\partial_p^2) \right] P(x, p) &= EP(x, p) \\ \left[\frac{1}{2}(p^2 + x^2 - E) - \frac{i}{2}(x\partial_p - p\partial_x) - \frac{1}{8}(\partial_x^2 + \partial_p^2) \right] P(x, p) &= 0 \end{aligned} \quad (2. 75)$$

Yukarıdaki denklemde Hamiltonyenin reel olması koşulundan katsayısı i olan kısmın sıfır olması gerekir.

$$x\partial_p - p\partial_x = 0 \quad (2. 76)$$

Bu yüzden P 'yi tek bir değişkene bağlı gibi düşünebiliriz.

$$z = 2(x^2 + p^2) \quad (2. 77)$$

Bu durumda kısmî türevler de aşağıdaki gibi değişecektir:

$$\begin{aligned} \partial_x P = 4x\partial_z P &\Rightarrow \partial_x^2 P = 4\partial_z P + 8x^2\partial_z^2 P \\ \partial_p P = 4p\partial_z P &\Rightarrow \partial_p^2 P = 4\partial_z P + 8p^2\partial_z^2 P \end{aligned} \quad (2. 78)$$

Değerler yerine yazılarak,

$$\left(\frac{z}{4} - E\right)P - \partial_z P - z\partial_z^2 P = 0 \quad (2. 79)$$

elde edilir. Bu denklemde P yerine $e^{\frac{z}{2}}L(z)$ konulursa,

$$(z\partial_z^2 + (1 - z)\partial_z + E - \frac{1}{2})L(z) = 0 \quad (2. 80)$$

elde edilir.

İki boyutlu harmonik salımcıda ise Hamiltonyen,

$$H(x_i, p_i) = \frac{1}{2}(x_i^2 + p_i^2) \quad (2. 81)$$

şeklinde olup $\star$ -çarpımı,

$$\star = e^{i\hbar(\overleftarrow{\partial}_{x_i}\overrightarrow{\partial}_{p_i} - \overleftarrow{\partial}_{p_i}\overrightarrow{\partial}_{x_i})} \quad (2. 82)$$

şeklini alır. Bu durumda $\star$ -özdeğer denklemi aşağıdaki gibidir.

$$H\star W(\vec{x}, \vec{p}) = [\frac{1}{2}(p_i - i\hbar\partial_{x_i})^2 + \frac{1}{2}(x_i + i\hbar\partial_{p_i})^2]W(\vec{x}, \vec{p}) = E_n W(\vec{x}, \vec{p}) \quad (2. 83)$$

Bu Hamiltonyenin iki tane bir boyutlu harmonik salıncı Hamiltonyeninin toplamı gibi yazılabildiği açıktır. Bu da ilgili Wigner fonksiyonunun,

$$W(\vec{x}, \vec{p}) = W_1(\vec{x}_1, \vec{p}_1)W_2(\vec{x}_2, \vec{p}_2) \quad (2. 84)$$

şeklinde ifade edilebileceğini gösterir. Bu sayede (2. 83) aşağıdaki denklem gibi iki ayrı denkleme ayrılır.

$$[\frac{1}{2}(p_1 - i\hbar\partial_{x_1})^2 + \frac{1}{2}(x_1 - i\hbar\partial_{p_1})^2]W_1(x_1, p_1) = E_n^1 W_1(x_1, p_1) \quad (2. 85)$$

Bu ve benzeri ikinci denklemin çözümü bize W_1 ve W_2 fonksiyonlarını verecektir. Bu iki fonksiyonunun çarpımı da iki boyutlu harmonik salıncı için çözümünü aradığımız Wigner fonksiyonu olacaktır. Bir önceki bölümde gösterildiği üzere bir boyutlu harmonik salıncı Wigner fonksiyonları Laguerre polinomlarıdır, dolayısıyla iki boyutlu harmonik salıncı Wigner fonksiyonları da iki Laguerre polinomunun çarpımı şeklinde olacaktır.

2.2.4 Sabit bir dış manyetik alandaki yüklü parçacık (Landau problemi) için Wigner fonksiyonları

Landau problemi, düzlem üzerinde bir elektronun düzleme dik ve üniform bir manyetik alan etkisinde hareketi olarak bilinir. Dış Manyetik alandaki bir parçacık için Hamiltonyen

$$H_L = \frac{1}{2m}(\vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A})^2 \quad (2. 86)$$

şeklinde olup Coulomb ayarında,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0. \quad (2. 87)$$

A 'yı simetrik ayarda seçersek,

$$\vec{A} = \frac{B}{2}(-y, x, 0). \quad (2. 88)$$

Bu seçimle dış manyetik alan B 'yi z yönünde sabit almış oluruz:

$$\vec{B} = B\hat{z}, \quad (2. 89)$$

$$A_i = -\frac{B}{2}\epsilon_{ij}x_j. \quad (2. 90)$$

A 'nın ifadesini Hamiltonyende yerine koyarsak,

$$H_L = \frac{1}{2m}(p_i - \frac{eB}{c}\epsilon_{ij}x_j)^2, \quad (2. 91)$$

$$H_L = \frac{1}{2m}(p_x - \frac{eBy}{c})^2 + \frac{1}{2m}(p_y + \frac{eBx}{c})^2, \quad (2. 92)$$

$$H_L = \frac{1}{2m}(p_x - m\omega_c y)^2 + \frac{1}{2m}(p_y + m\omega_c x)^2, \quad (2. 93)$$

Burada ω_c siklotron frekansı olup $\omega_c = eB/mc$ 'dir. Yukarıdaki ifadeyi açıp tekrar topladığımızda,

$$H_L = H_{HO} + \omega_c L_z \quad (2. 94)$$

olduğunu görürüz. Burada H_{HO} harmonik salıncı Hamiltonyenidir.

$$H_L \Psi = E_L \Psi \quad (2. 95)$$

özdeğer denkleminin çözümü bilindiği gibi Laguerre polinomlarıdır. (2. 31) tanımından Landau problemi için Wigner fonksiyonu, integral alınamadığı için ancak açık formda verilebilir.

$$W_L = \int dy L^* L e^{-ipy}. \quad (2. 96)$$

3 YERDEĞİŞTİRMEYEN KOORDİNATLARA SAHİP UZAYDA KUANTUM MEKANİĞİ

Yer koordinatlarının yerdeğiştirmezliği şu şekilde ifade edilir:

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] \neq 0, i \neq j \quad (3. 1)$$

Bir uzayda yerdeğiştirmezlikten bahsediyorsak koordinatların yer değiştirmemesinden dolayı o uzayda bulunan parçacıkların hiçbirini lokalize olamıyor demektir.

Yerdeğiştirmeyen koordinatlar geometrisinin arkasında yatan fiziksel düşünce, uzay-zamanın kuantizasyonunu yerdeğiştirmeyen uzay-zaman fikriyle açıklamaya çalışmaktır. Bildiğimiz kuantum teorisinde kanonik kuantizasyon ilişkileri faz uzayının kuantize olmasına neden olmaktadır.

Alan teorisine yerdeğiştirmezlik kavramını normal çarpımın yerine $\star$ -çarpımını konularak sokulur. Üç boyutta koordinatlar arasındaki komütasyon bağıntısı aşağıdaki gibidir.

$$[x_i, x_j] = i\theta^{ij} \quad (3. 2)$$

Burada θ^{ij} yerdeğiştirmezliğin bir ölçüsüdür ve standart kuantum mekaniğindeki $\hbar$ 'inkine eşdeğer bir rol oynar. ϵ^{ij} antisimetrik tensör olmak üzere

$$\theta^{ij} = \theta \epsilon^{ij}. \quad (3. 3)$$

Yerdeğiştirmeyen koordinatlara sahip bir uzayda problem çözülmek istenmesinin nedeni, yerdeğiştirmezliğin sicim teorilerinde doğal olarak, görünmesi ve normal ve yerdeğiştirmeyen koordinatlara sahip bir uzayda ayar teorilerinin eşdeğer

olduğunun anlaşılmasıdır.

Eğer uzay-zamanın yerdeğiştirmez olduğu iddiası doğruysa uzay-zamanla ilgili bildiklerimize tamamen yeni kavramlar eklenebilir. İlk akla gelen yeniliklerden biri yeni bir Heisenberg ilişkisidir; yani,

$$\Delta x \Delta y \sim \theta \quad (3.4)$$

x ve p arasındaki komutasyon bağıntısını elde etmek için $\star_{\hbar}$ -çarpımını tanımlamıştık. Şimdi de klasik mekaniksel olarak x ve y 'yi yerdeğiştirmez yapmak için $\star_{\theta}$ -çarpımını tanımlayabiliriz:

$$\star_{\theta} = e^{\frac{i\theta}{2}(\overleftarrow{\partial}_{x_i}\overrightarrow{\partial}_{x_j} - \overleftarrow{\partial}_{x_j}\overrightarrow{\partial}_{x_i})} \quad (3.5)$$

Moyal parantezleri de aşağıdaki formu alır:

$$\{x_i, x_j\}_{M,\theta} = x_i \star_{\theta} x_j - x_j \star_{\theta} x_i = \theta_{ij} \quad (3.6)$$

3.1 θ ve $\hbar$ Kuantizasyonu için Üç Yöntem

Daha önce belirtildiği gibi sadece θ -deformasyonu uygulandığında harmonik salıncı ve Landau problemi için Wigner fonksiyonları aynı formdadır. Buradan yola çıkarak θ ve $\hbar$ deformasyonları aynı anda uygulandığında bu iki problemin Wigner fonksiyonları arasında ne tür bir ilişki olacağı incelenebilir.

3.1.1 Dalga fonksiyonu yöntemi

Bu yöntemde kanonik olarak kuantize edilmiş Hamiltonyen kullanılarak $\star$ -özdeğer denklemi tanımlanır.

$$\hat{H} \star_{\theta} \Psi = \hat{H}_{NC} \Psi. \quad (3.7)$$

Burada $\hat{H}_{NC}$, yerdeğistirmeyen değişkenlere sahip Hamiltonyen operatörüdür. Etkin Hamiltonyen yönteminden farklı olarak burada klasik değişkenlere geçilmeden yerdeğistirmeyen değişkenlere sahip Hamiltonyenin sağladığı özdeğer denklemi çözülür.

$$\hat{H}_{NC}\Psi_{\theta}(x) = E_{NC}\Psi_{\theta}(x) \quad (3. 8)$$

Burada Ψ_{θ} yerdeğistirmeyen koordinatlara sahip sistemin dalga fonksiyonudur. (3. 8) çözülerek Ψ_{θ} bulunduktan sonra (2. 31) tanımından Wigner fonksiyonu elde edilir.

$$W_{\theta} = \frac{1}{2\pi} \int dy \Psi_{\theta}^{\dagger}(x - \frac{\hbar}{2}y) e^{-ipy} \Psi_{\theta}(x + \frac{\hbar}{2}y). \quad (3. 9)$$

3.1.2 Etkin Hamiltonyen yöntemi

Bu yöntemde de dalga fonksiyonu yönteminde olduğu gibi kanonik olarak kuantize edilmiş Hamiltonyen ile başlanır. Yine (3. 7) tanımı aynen geçerlidir. Örneğin genel olarak bir harmonik salıncı Hamiltonyeni alırsak,

$$\hat{H}_{HO} = \hat{\vec{p}}^2 + \hat{\vec{x}}^2 \quad (3. 10)$$

ve (3. 7) tanımını kullanırsak,

$$(\vec{p}^2 + \vec{x}^2) \star_{\theta} \Psi = [\vec{p}^2 + (x_i^2 + i\epsilon_{ij} \frac{\theta}{2} \partial_j^2)] \Psi \quad (3. 11)$$

elde ederiz. Bu denklemde $\partial_i = \frac{i}{\hbar} \hat{p}_i$ temsili kullanılırsa,

$$\hat{H}_{HO,NC} \Psi = [\vec{p}^2 + (\hat{x}_i^2 + i\epsilon_{ij} \frac{\theta}{2\hbar} \hat{p}_j^2)] \Psi \quad (3. 12)$$

olduğunu görürüz. Burada operatörleri beklenen değerlerine göndererek bir yaklaşıklık yaparsak [10]

$$\hat{p}_i \Rightarrow p_i \quad (3.13)$$

$$\hat{x}_i \Rightarrow x_i \quad (3.14)$$

etkin bir Hamiltonyen, H_{NC} , elde ederiz.

$$\hat{H}_{NC} \Rightarrow H_{NC} = \vec{p}^2 + (x_i + \frac{\theta}{2\hbar}\epsilon_{ij}p_j)^2 \quad (3.15)$$

Burada görüldüğü gibi H_{NC} klasik değişkenlerden oluşmuş olmasına rağmen içinde $\hbar$ barındırmaktadır. Bu nedenle H_{NC} Hamiltonyeni tam olarak klasik değil, etkin bir Hamiltonyendir. Yani (3. 7) tanımını etkin bir teoriye yol açmaktadır.

Wigner fonksiyonunu bulmamız için H_{NC} 'ye $\hbar$ -deformasyonu uygulamamız gerekir.

$$H_{NC} \star_{\hbar} W_{\theta} = E_{\theta} W_{\theta} \quad (3.16)$$

Burada Wigner fonksiyonu (3. 16)'daki $\star_{\hbar}$ -özdeğer denklemini çözerek elde ederiz.

3.1.3 Yeni yöntem

Bu yöntemde, klasik Hamiltonyen fonksiyonu kullanılarak Wigner fonksiyonunun bulunması amaçlanmıştır. Bu problem için θ ve $\hbar$ -deformasyonları birbiriyle eşdeğer olarak alınmıştır. Burada Wigner fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$H_{Klasik} \star_{\theta} \star_{\hbar} \tilde{W}_{\theta, \hbar} = E \tilde{W}_{\theta, \hbar} \quad (3.17)$$

(3. 17) tanımındaki $\star_{\theta, \hbar}$ -özdeğer denkleminin çözümü yeni bir Wigner fonksiyonu olacaktır. Diğer yöntemlerden farklı olarak burada p_i 'lerin yerdeğiştirmezliği gündeme getirilmiştir. p_i 'ler arasındaki komutasyon ilişkisi,

$$[p^i, p^j] = i\theta^{ij} \quad (3. 18)$$

şeklinde olup θ^{ij} , daha önce (3. 2) eşitliği ile tanımlanan θ^{ij} ile benzer bir rol oynamaktadır. Bu durumda momentumlar arasındaki yerdeğiştirmezliğin bir ölçüsü olmaktadır. Bu seçimle yeni yıldız çarpımı da aşağıdaki şekilde olacaktır.

$$\star \equiv \star_k \star_\theta \star_\hbar \quad (3. 19)$$

3.2 Yerdeğiştirmeyen Koordinatlara Sahip Uzayda Harmonik Salıncı Problemi için Wigner Fonksiyonu

Daha önceden belirtildiği gibi bir sistemin yerdeğiştirmezliğini üç şekilde sağlayabiliriz. Bu yöntemlerden “Yeni Yöntem” i harmonik salıncı için görelim:

(2. 72)’daki Hamiltonyenin $\star_{\theta, \hbar}$ -özdeğer denklemi,

$$\begin{aligned} H(\vec{x}, \vec{p}) \star_\theta \star_\hbar h(\vec{x}, \vec{p}) &= \left[\frac{1}{2}(p_x - i\hbar\partial_x)^2 + \frac{1}{2}(p_y - i\hbar\partial_y)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(x + i\hbar\partial_{p_x} + \frac{i\theta}{2}\partial_y)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(y + i\hbar\partial_{p_y} - \frac{i\theta}{2}\partial_x)^2 \right] h(\vec{x}, \vec{p}) \end{aligned} \quad (3. 20)$$

$$\begin{aligned} H(\vec{x}, \vec{p}) \star_\theta \star_\hbar h(\vec{x}, \vec{p}) &= \frac{1}{2}[(p_x - i\hbar\partial_x)^2 + (x + i\hbar\partial_{p_x})^2 + (p_y - i\hbar\partial_y)^2 \\ &\quad + (y + i\hbar\partial_{p_y})^2 + i\theta[(x + i\hbar\partial_{p_x})\partial_y - \\ &\quad - (y + i\hbar\partial_{p_y})\partial_x] - \frac{\theta^2}{4}(\partial_x^2 + \partial_y^2)] \cdot \\ &\quad \cdot h(\vec{x}, \vec{p}) \end{aligned} \quad (3. 21)$$

aynı zamanda p_x ve p_y ’yi de yerdeğiştirmez alırsak,

$$\star_{\theta'} \equiv e^{\frac{i\theta'}{2}(\overleftarrow{\partial_{p_x}}\overrightarrow{\partial_{p_y}} - \overleftarrow{\partial_{p_y}}\overrightarrow{\partial_{p_x}})} \quad (3. 22)$$

Koordinatların ve momentumların yerdeğişmez olduğu bu durumda yeni $\star$ -çarpımı,

$$\star_{\hbar,\theta,k} \equiv \star_{\hbar} \star_{\theta} \star_k \quad (3.23)$$

şeklindedir. İlgili Wigner fonksiyonunu bulmamız için çözmemiz gereken $\star$ -özdeğer denklemi ise aşağıdaki gibidir.

$$H(\vec{x}, \vec{p}) \star_{\theta} \star_k \star_{\hbar} k(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{1}{2}[\vec{p}^2 + \frac{1}{2}(x + \frac{i\theta}{2}\partial_y)^2 + \frac{1}{2}(y - \frac{i\theta}{2}\partial_x)^2] \star_{\theta'} \star_{\hbar} k(\vec{x}, \vec{p}) \quad (3.24)$$

$$H(\vec{x}, \vec{p}) \star_{\theta} \star_k \star_{\hbar} k(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{1}{2}[(p_x + \frac{i\theta'}{2}\partial_{p_y})^2 + (p_y - \frac{ik}{2}\partial_{p_x})^2 + (x + \frac{i\theta}{2}\partial_y)^2 + (y - \frac{i\theta}{2}\partial_x)^2] \star_{\hbar} k(\vec{x}, \vec{p}) \quad (3.25)$$

$$H(\vec{x}, \vec{p}) \star_{\theta} \star_k \star_{\hbar} k(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{1}{2}[(p_x - i\hbar\partial_x + \frac{ik}{2}\partial_{p_y})^2 + (p_y - i\hbar\partial_y - \frac{ik}{2}\partial_{p_x})^2 + (x + i\hbar\partial_{p_x} + \frac{i\theta}{2}\partial_y)^2 + (y + i\hbar\partial_{p_y} - \frac{i\theta}{2}\partial_x)^2]k(\vec{x}, \vec{p}) \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} H(\vec{x}, \vec{p}) \star_{\theta} \star_k \star_{\hbar} k(\vec{x}, \vec{p}) = & \left[\frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2) - \right. \\ & - \frac{\hbar^2}{2}(\partial_x^2 + \partial_{p_x}^2 + \partial_y^2 + \partial_{p_y}^2) - \\ & - \frac{k^2}{8}(\partial_{p_x}^2 + \partial_{p_y}^2) - \frac{\theta^2}{8}(\partial_x^2 + \partial_y^2) \\ & - i\hbar(p_x\partial_x - x\partial_{p_x} + p_y\partial_y - y\partial_{p_y}) + \\ & + \frac{ik}{2}(p_x\partial_{p_y} - p_y\partial_{p_x}) + \frac{i\theta}{2}(x\partial_y - y\partial_x) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{\hbar k}{2}(\partial_x \partial_{p_y} - \partial_y \partial_{p_x}) - \frac{\hbar \theta}{2}(\partial_{p_x} \partial_y - \partial_{p_y} \partial_x)] \\ k(\vec{x}, \vec{p}) \quad (3. 27)$$

$k = -\theta$ seçersek (3. 27) denkleminin sanal kısmı,

$$[\hbar(p_x \partial_x - x \partial_{p_x}) + \hbar(p_y \partial_y - y \partial_{p_y}) + \theta(y \partial_x - x \partial_y) + \frac{\theta}{2}(p_x \partial_{p_y} - p_y \partial_{p_x})]k = 0 \quad (3. 28)$$

reel kısmı ise,

$$[\frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2) + \frac{\hbar^2}{2}(\partial_x^2 + \partial_{p_x}^2 + \partial_y^2 + \partial_{p_y}^2) - \frac{\theta^2}{8}(\partial_{p_x}^2 + \partial_{p_y}^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2)]k = 2Ek \quad (3. 29)$$

şeklinde (3. 28) denklemi,

$$k(\vec{x}, \vec{p}) = K(\xi) \quad (3. 30)$$

$$\xi = x^2 + y^2 + p_x^2 + p_y^2 \quad (3. 31)$$

olacak şekilde bir çözüme işaret etmektedir. Bu durumda (3. 29) denklemi adi diferansiyel denkleme dönüşür.

$$\Rightarrow \frac{1}{8(\hbar^2 + \frac{\theta^2}{4})} \xi K(\xi) - [\frac{\partial K(\xi)}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial^2 K(\xi)}{\partial \xi^2}] = \frac{1}{4(\hbar^2 + \frac{\theta^2}{4})} EK(\xi) \quad (3. 32)$$

Yukardaki denklem $\hbar \rightarrow \sqrt{2}(\hbar^2 + \frac{\theta^2}{4})^{1/2}$ dönüşümü altında $\hbar$ -deformasyonu ile aynı sonucu verir. Ancak dikkat edilecek olursa iki boyutlu harmonik salınıcı ile başlanılan problem sonuç olarak bir boyutlu harmonik salınıcı problemine indirgenerek sistemin serbestlik derecesi azaltılmıştır. Bu duruma neden olmamak için faz uzayı değişkenlerine sistemin serbestlik derecesini koruyacak dönüşümler uygulayabiliriz. Bu dönüşümler aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
\tilde{x} &= x \\
\tilde{p}_y &= p_y \\
\tilde{y} &= \frac{1}{4(\hbar^2 + \frac{\theta^2}{4})}(\hbar y - 4\theta p_x) \\
\tilde{p}_x &= \frac{1}{4(\hbar^2 + \frac{\theta^2}{4})}(\hbar p_x - 4\theta y)
\end{aligned} \tag{3. 33}$$

Yeni değişkenlerle (3. 27) denkleminin sanal kısmı,

$$[(\tilde{p}_x \partial \tilde{x} - \tilde{x} \partial \tilde{p}_x) + (\tilde{p}_y \partial \tilde{y} - \tilde{y} \partial \tilde{p}_y)]k = 0 \tag{3. 34}$$

halini alır. Denklemin bu şekli Wigner fonksiyonu için,

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= 2(\tilde{x}^2 + \tilde{p}_x^2) \\
\xi_2 &= 2(\tilde{y}^2 + \tilde{p}_y^2)
\end{aligned} \tag{3. 35}$$

olacak şekilde $k(\xi_1, \xi_2)$ formunda bir çözümü işaret eder. (3. 27) denkleminin reel kısmı,

$$\frac{1}{8(\hbar^2 + \frac{\theta^2}{4})}(\xi_1 + \xi_2)K - [\frac{\partial K}{\partial \xi_1} + \frac{\partial K}{\partial \xi_2} + \xi_1 \frac{\partial^2 K}{\partial \xi_1^2} + \xi_2 \frac{\partial^2 K}{\partial \xi_2^2}] = \frac{1}{4(\hbar^2 + \frac{\theta^2}{4})}EK \tag{3. 36}$$

haline gelir. Bu denklemin çözümü Laguerre polinomlarının çarpımı şeklindedir.

$$K(\xi_1, \xi_2) = e^{\frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2)} L_n(\xi_1) L_m(\xi_2) \tag{3. 37}$$

Burada,

$$L_m(\xi_i) = \frac{1}{m!} e^{\xi_i} \frac{d^m}{d^m \xi_i} (e^{-\xi_i} \xi_i^m) \tag{3. 38}$$

şeklindedir.

Görüldüğü gibi klasik halde olduğu gibi iki boyutta yerdeğiştirmeyen harmonik salıncı Wigner fonksiyonu da iki Laguerre polinomunun çarpımı şeklinde elde edilmiştir.

3.3 Yerdeğiştirmeyen Koordinatlara Sahip Uzayda Landau Problemi için Wigner Fonksiyonu

Landau problemi, düzlem üzerinde bir elektronun düzleme dik ve üniform bir manyetik alan etkisinde hareketidir. Landau probleminin Hamiltonyeni aşağıdaki gibidir.

$$H_L(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{1}{2m}(p_x - \frac{eB}{2c}y)^2 + \frac{1}{2m}(p_y + \frac{eB}{2c}x)^2 \quad (3.39)$$

Bu Hamiltonyende koordinatları yerdeğiştirir kabul edip sadece θ -deformasyonu uygularsak yerdeğiştirmeyen koordinatlara sahip uzayda Wigner fonksiyonunu bulabiliriz.

$$\hat{H}_L \star_{\theta} \Psi(\vec{r}) = \hat{H}_{NC} \Psi(\vec{r}) \quad (3.40)$$

Burada $eB/mc = \omega_c$ olup siklotron frekansıdır.

$$\hat{H}_{NC} = \frac{1}{2m}[(\hat{p}_x - \frac{eB}{2c}(y - \frac{i\theta}{2}\vec{\partial}_x))^2 + (\hat{p}_y - \frac{eB}{2c}(x + \frac{i\theta}{2}\vec{\partial}_y))^2] \quad (3.41)$$

$i\vec{\partial}_i = \frac{\hat{p}_i}{\hbar}$ temsilini kullanırsak,

$$\begin{aligned} \hat{H}_{NC} &= \frac{1}{2m}[(\hat{p}_x - \frac{eB}{2c}(y - \frac{\theta}{2\hbar}\hat{p}_x))^2 + (\hat{p}_y - \frac{eB}{2c}(x + \frac{\theta}{2\hbar}\hat{p}_y))^2] \\ &= \frac{1}{2m}[(1 + \kappa)\hat{p}_x - \frac{eB}{2c}y]^2 + [(1 + \kappa)\hat{p}_y - \frac{eB}{2c}x]^2 \end{aligned} \quad (3.42)$$

Burada $\kappa = \frac{eB\theta}{4\hbar c}$ şeklinde bir sabittir. Bu noktada $\hat{H}_{NC}$ Hamiltonyenine karşılık gelmek üzere etkin Hamiltonyen tanımlayalım:

$$H_{et} = \frac{(1 + \kappa)^2}{2m} \vec{p}^2 + \frac{m\omega^2}{8} \vec{r}^2 + \frac{\tilde{\omega}}{2}(xp_y - yp_x). \quad (3.43)$$

κ , $\hbar$ 'a bağılı olduğundan klasik bir büyüklük değildir. İlgili Wigner fonksiyonunu bulmak için,

$$H_{et} \star_{\hbar} W_1(\vec{p}, \vec{x}, \theta) = EW_1(\vec{p}, \vec{x}, \theta) \quad (3.44)$$

tanımını kullanalım. Bu eşitlik tek değişkene bağılı bir diferansiyel denklem şeklinde yazılabilir.

$$\rho \equiv H_{et} \quad (3.45)$$

olmak üzere:

$$\rho \frac{d^2 W_1}{d\rho^2} + \frac{dW_1}{d\rho} - \frac{4}{\hbar^2 \tilde{\omega}^2}(\rho + E)W_1(\rho) = 0 \quad (3.46)$$

Bu denklemi çözmek için,

$$R = \frac{4\rho}{\hbar \tilde{\omega}} \quad (3.47)$$

değişken dönüşümünü yapalım. Bu durumda,

$$W_1 = e^{\frac{R}{2}} L(R) \quad (3.48)$$

elde ederiz ve (3.46) denklemi,

$$[R \frac{d^2}{dR^2} + (1 - R) \frac{d}{dR} - (\frac{1}{2} - \frac{E}{\hbar \tilde{\omega}})]W_1 = 0 \quad (3.49)$$

haline gelir. Yukarıdaki denklemin çözümleri $L_n(4R)$ formundaki Laguerre polinomlarıdır ve $n = 0, 1, \dots$ şeklinde değerler almaktadır. Bu durumda Wigner fonksiyonu,

$$W_{1,n}(\vec{p}, \vec{x}, \theta) = e^{\frac{-2H_{et}}{\hbar\tilde{\omega}}} L_n\left(\frac{4H_{et}}{\hbar\tilde{\omega}}\right) \quad (3. 50)$$

olur ve tek boyutlu hale gelir.

Bu durum şaşırtıcı değildir zira sistem bir boyutlu harmonik salıncıya eşdeğerdir.

Kanonik dönüşümleri uygularsak,

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1+\kappa}{\sqrt{m}}p_x - \frac{\omega\sqrt{m}}{2}y, \\ p_2 &= \frac{1+\kappa}{\sqrt{m}}p_y - \frac{\omega\sqrt{m}}{2}x, \\ q_1 &= \frac{1+\kappa}{\sqrt{m}}p_y + \frac{\omega\sqrt{m}}{2}x, \\ q_2 &= \frac{1+\kappa}{\sqrt{m}}p_x + \frac{\omega\sqrt{m}}{2}y, \end{aligned} \quad (3. 51)$$

ve etkin Hamiltonyen,

$$H_{et} = \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2). \quad (3. 52)$$

olarak bulunur.

3.4 Yerdeğiştirmeyen Faz Uzayı Koordinatlarına Sahip Uzayda Landau Problemi için Wigner Fonksiyonu

Yerdeğiştirmeyen koordinatlara sahip uzayda kuantum mekaniğini, $\star_{\hbar}$ ve $\star_{\theta}$ -çarpımlarını aynı anda kullanarak, ilgili Wigner fonksiyonunu bulmak için yeniden tanımlayalım. Bunun için konumla beraber momentumu da deforme etmemiz gerekir:

$$\star_k \equiv e^{\frac{ik\theta}{2}}(\overleftarrow{\partial}_{p_x}\overrightarrow{\partial}_{p_y} - \overleftarrow{\partial}_{p_y}\overrightarrow{\partial}_{p_x}). \quad (3. 53)$$

Burada k sabittir. Şimdi yeni bir $\star$ -özdeğer denklemi tanımlayalım.

$$H \star \Psi = E\Psi. \quad (3. 54)$$

Denklemdaki H , (2. 86) denkleminde verilen ve simetrik ayarda Landau problem-ine karşılık gelen Hamiltonyendir.

$\star$ —özdeğer denklemi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} & \{ H - \frac{\hbar^2}{8} [\frac{1}{m} \overrightarrow{\partial_r^2} + \frac{m\omega^2}{4} \overrightarrow{\partial_p^2} - \frac{\omega}{2} (\partial_{p_x} \partial_y - \partial_{p_y} \partial_x)] \\ & - \frac{\theta^2}{8} [\frac{m}{\omega^2} \overrightarrow{\partial_r^2} + \frac{k^2}{m} \overrightarrow{\partial_p^2} - k\omega (\partial_{p_x} \partial_y - \partial_{p_y} \partial_x)] \\ & \frac{\theta\hbar}{4} [\frac{\omega}{2} (\overrightarrow{\partial_r^2} + k \overrightarrow{\partial_p^2}) + (\frac{\omega^2}{2} m)(4) + \frac{k}{m} (\partial_x \partial_{p_y} - \partial_y \partial_{p_x})] \\ & \frac{i\hbar}{2} [\frac{1}{m} \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{\partial_r} - \frac{m\omega^2}{4} \overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{\partial_p} - \frac{\omega}{2} (y \partial_x - p_x \partial_{p_y} - x \partial_y + p_y \partial_{p_x})] \\ & \frac{i\theta}{2} [\frac{m\omega^2}{4} (x \partial_y - y \partial_x) + k \frac{1}{m} (p_x \partial_{p_y} - p_y \partial_{p_x}) + \\ & \frac{\omega}{2} (p_y \partial_y + y \partial_{p_y} - kx \partial_{p_x} - kp_x \partial_x)] - E \} W_2 = 0 \end{aligned} \quad (3. 55)$$

Şimdi yeni bir değişken tanımlayalım

$$\xi \equiv H \quad (3. 56)$$

(3. 55) denklemindeki sanal kısım sıfıra eşit olduğundan denklem aşağıdaki hali alır.

$$-4\alpha^2(k, \theta, \hbar) (\xi \frac{d^2 W_2(\xi)}{d\xi^2} + \frac{dW_2(\xi)}{d\xi}) + \xi W_2(\xi) = E W_2(\xi). \quad (3. 57)$$

Denklemdaki α aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$\alpha^2(k, \theta, \hbar) = \frac{1}{16} \hbar^2 \omega^2 + \frac{\theta^2}{16} (\frac{k^2}{m^2} + \frac{\omega^4 m^2}{16} + \frac{k\omega^2}{2}) - \frac{1}{2} \hbar \theta (\frac{\omega^3 m}{4} + \frac{k\omega}{m}). \quad (3. 58)$$

Tekrar yeni bir değişken tanımlarsak,

$$\eta = \frac{\xi}{\alpha(k, \theta, \hbar)}, \quad (3. 59)$$

(3. 57) denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$(\eta \partial_\eta^2 + \frac{\eta}{4} + \tilde{E})W_2(\eta) = 0. \quad (3. 60)$$

Yukardaki denklemde $\tilde{E} = \frac{E}{4\alpha(k, \theta, \hbar)}$ dır. Burada

$$W_2(\eta) = e^{\frac{\eta}{2}} L(\eta) \quad (3. 61)$$

alacak olursak $L(\eta)$ 'nın aşağıdaki denklemi sağladığını görürüz.

$$[\eta \partial_\eta^2 + (1 - \eta) \partial_\eta + \tilde{E} - \frac{1}{2}]L(\eta) = 0. \quad (3. 62)$$

$L(\eta) = L_n(4\eta)$ olup $n = 0, 1, \dots$ değerlerini alır ve böylece yerdeğıştirmeyen faz uzayı koordinatlarına sahip uzayda Landau problemi için Wigner fonksiyonu aşağıdaki formu alır.

$$W_{2,n}(\vec{p}, \vec{r}, k, \theta) = \frac{(-1)^n}{\pi \hbar} e^{-\frac{H}{2\alpha(k, \theta, \hbar)}} L_n\left(\frac{4H}{\alpha(k, \theta, \hbar)}\right). \quad (3. 63)$$

k 'nın belli bir değerinde ilginç bir durum gözlenmektedir. Bu değer,

$$k \equiv k_s = -\frac{1}{4}\omega^2 m^2 \quad (3. 64)$$

k ile birlikte α 'nın da değeri aşağıdaki şekilde değişmektedir.

$$\alpha^2(k_s, \theta, \hbar) = \frac{\hbar^2 \omega^2}{16}. \quad (3. 65)$$

Görüldüğü gibi α , θ 'dan bağımsız olmakta ve bu da yerdeğıştirmezlik parametresinin ortadan kalkması anlamına gelmektedir. Yani faz uzayının yerdeğıştirmezlik ilişkileri öyle seçilebilir ki sonuçta varılan noktada kuantum mekaniğı yerdeğıştirmezlikten bağımsız çıkabilir.

4 SONUÇLAR

Yerdeğiştirmeyen koordinatlarda kuantum mekaniğini formalize etmek için Wigner fonksiyonları kullanılması önerilmiştir. Bu yöntem, yerdeğiştirmeyen koordinatlar için kuantum mekaniği için genelde kullanılan yöntemden değişik olarak, hem kuantizasyonu hem yerdeğiştirmezliği klasik durumun deformasyonu olarak ele almaktadır. Normal kuantum mekaniğindeki deformasyon kuantizasyon yöntemi kısaca örneklerle açıklanmıştır. İki boyutlu düzlemde, sabit, düzgün ve düzleme dik bir manyetik alanda hareket eden yüklü parçacık bu bağlamda çalışılmıştır. Bunun için ilk önce etkin bir Hamilton fonksiyonu momentum operatörlerinin ortalama değerleri kullanılarak tanımlanmıştır. Bunun, bir boyutlu harmonik salıncı problemine eşdeğer olduğu görülmüştür. Etkin bir Hamilton fonksiyonu ile çalışmak yerine hem tüm faz uzayı değişkenlerinin yer değiştirmedeği ve hem bunun hem de kuantum mekaniğinin deformasyon olarak ele alındığı sistem için Wigner fonksiyonları bulunmuştur.

KAYNAKLAR

- [1] **Wigner, E.**, On the Quantum Correction for Thermodynamic Equilibrium, *Phys. Rev.* **V40** (1932), 749.
- [2] **Weyl, H.**, *Z.Phys.* **46** (1927) 1.
- [3] **Moyal, J.E.**, Quantum Mechanics as a Statistical Theory, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **45** (1949) 99.
- [4] **Connes, A.**, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, London, 1994.
- [5] **Connes, A., Douglas, M.R. and Schwarz, A.**, *JHEP* **9802** (1998) 003.
- [6] **Seiberg, N. and Witten, E.**, *JHEP* **9909** (1999) 032.
- [7] **Mezincescu, L.**, hep-th/0007046;
Gamboa, J., Loewe, M. and Rochas, J.C., *Non-commutative Quantum Mechanics*, hep-th/0010220;
Nair, V.P. and Polychronakos, A.P., hep-th/0011172;
Chaichian, M., Demichev, A., Presnajder, P., Sheikh-Jabbari, M.M. and Tureanu, A., hep-th/0101209;
Kochan, D. and Demetrian, M., hep-th/0102050;
Dayı, Ö.F. and Jellal, A., *Phys. Let. A* **287** (2001) 349-355.
- [8] **Groenewold, H.J.**, *Physica* **12** (1946) 405.
- [9] **Hillery, M., O'Connell, R.F., Scully, M.O. and Wigner, E.P.**, *Distribution Functions in Physics: Fundamentals* North Holland, Amsterdam, *Physics reports* (Review Section of Physics letters) **106**, No.3 (1984) 121, 167.
- [10] **Acatrinei, C.**, *JHEP***09** (2001) 007;
Christiansen, H.R. and Schaposnik, F.A., *Phys.Rev.*, **D65** (2002) 086005

ÖZGEÇMİŞ

Lara T. Kelleyane 1975 yılında İstanbul'da doğmuştur. Orta öğrenimini Beyoğlu Anadolu Lisesi' nde 1993 yılında tamamladıktan sonra aynı yıl İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Mühendisliği bölümüne girmiştir. 1999 yılında İTÜ Fizik Mühendisliği Bölümü' nde yüksek lisans programına başlamıştır. Halen İTÜ Fizik Mühendisliği bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.