

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DÜŞÜK MERTEBEDEN ZAMAN GECİKMELİ SİSTEMLERİN ORANSAL
KONTROLÖRLER İLE KARARLI KILINMASI**

DOKTORA TEZİ

**Barış Samim NESİMİOĞLU
504092105**

Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Anabilim Dalı

Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet Turan SÖYLEMEZ

MART 2016

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 504092105 numaralı Doktora Öğrencisi Barış Samim NESİMİOĞLU, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “DÜŞÜK MERTEBEDEN ZAMAN GECİKMELİ SİSTEMLERİN ORANSAL KONTROLÖRLER İLE KARARLI KILINMASI” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Mehmet Turan SÖYLEMEZ**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Afife Leyla GÖREN**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Ali Fuat ERGENÇ
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Galip CANSEVER
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. İbrahim B. KÜÇÜKDEMİRAL
Yıldız Teknik Üniversitesi

Teslim Tarihi : **23 Şubat 2016**
Savunma Tarihi : **30 Mart 2016**

ÖNSÖZ

Ortaya çıkan bu çalışmanın her aşamasında, benden tecrübesini ve kıymetli fikirlerini esirgemeyen danışmanım, değerli bilim adamı Prof. Dr. Mehmet Turan SÖYLEMEZ'e,

Doktora hayatımın özellikle tıkanıdığım anlarında, manevi anlamda her zaman desteğini gördüğüm, benim için her zaman ayrı bir yeri olan bölüm başkanımız sayın Prof. Dr. İbrahim EKSİN'e,

Yıllar önce hocam, arada geçen zamanda hayallerimin kadını ve yaklaşık 3 senedir de hayatımın anlamı olan, bu süreçte her zaman bana kendini yanımda hissettiren biricik eşim Şerife Özkan NESİMİOĞLU'na,

Hayatım boyunca aldığım yanlış veya doğru tüm kararlarda son kerte beni hep destekleyen ve bugünlere gelmemde çok büyük emeği olan, dayım ve anneannem dahil tüm aileme,

En içten teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Mart 2016

Barış Samim NESİMİOĞLU

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vii
KISALTMALAR	ix
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xi
ŞEKİL LİSTESİ.....	xiii
ÖZET	xv
SUMMARY	xix
1. GİRİŞ	1
1.1 Tezin Amacı	3
1.2 Tezde Kullanılan Yöntem.....	4
1.3 Tezde Elde Edilen Sonuçlar.....	5
2. KULLANILAN KARARLILIK YÖNTEMİ	7
3. BİRİNCİ MERTEBEDEN SONLU SIFIRA SAHİP ZAMAN GECİKMELİ SİSTEMLER İÇİN KARARLILIĞI SAĞLAYAN TÜM P TİPİ KONTROLÖRLERİN ANALİTİK OLARAK HESAPLANMASI.....	17
3.1 Literatür Özeti, Problemin Önemi ve Bölümde Yapılanların Özeti.....	17
3.2 Problemin Tanımlanması ve Sınıflandırılması.....	21
3.3 Sol Yarı s-Düzlemi Sıfırına Sahip Sistemler ($z>0$).....	24
3.3.1 Açık çevrim kararlı sistem ($p>0$).....	24
3.3.1.1 $p/z>1$ durumu	25
3.3.1.2 $p/z<1$ durumu	25
3.3.2 Açık çevrim kararsız sistem ($p<0$).....	29
3.3.2.1 $p/z>1$ durumu	29
3.3.2.2 $p/z<1$ durumu	29
3.4 Sağ Yarı s Düzlemi Sıfırına Sahip Sistem ($z<0$).....	33
3.4.1 Açık çevrim kararlı sistem ($p>0$).....	33
3.4.1.1 $p/z>1$ durumu	33
3.4.1.2 $p/z<1$ durumu	33
3.4.2 Açık çevrim kararsız sistem ($p<0$).....	37
3.4.2.1 $p/z>1$ durumu	37
3.4.2.2 $p/z<1$ durumu	37
3.5 Sayısal Örnekler	43
4. İKİNCİ MERTEBEDEN ZAMAN GECİKMELİ SİSTEMLERİN POZİTİF GERİ BESLEMAYLA KARARLI KILINMASI.....	49
4.1 Literatür Özeti, Problemin Önemi ve Bölümde Elde Edilen Sonuçların Özeti...50	
4.2 Problemin Tanımı ve Zaman Gecikmesinin Kararlılık Üzerine Etkileri.....52	
4.3 Kararlılık İçin Gerek ve Yeter Koşulların Türetilmesi.....55	
4.3.1 Negatif geribesleme durumu.....56	
4.3.2 Pozitif geribesleme durumu.....61	
4.4 Kararlılığı Sağlayan Kontrolör Kümelerinin Hesaplanması.....62	
4.4.1 Negatif geribesleme durumu.....63	

4.4.2 Pozitif geribesleme durumu.....	70
4.5 Sayısal Örnek.....	81
5. İKİNCİ MERTEBEDEN ZAMAN GECİKMELİ OSİLATÖRLER İÇİN KARARLILIĞI SAĞLAYAN TÜM P TİPİ KONTROLÖRLERİN ANALİTİK OLARAK HESAPLANMASI.....	91
5.1 Literatür Özeti, Problemin Önemi ve Bölümde Elde Edilen Sonuçların Özeti...	91
5.2 Problemin Tanımlanması.....	93
5.3 İntegratör Durumu ($a_0=0$).....	94
5.4 Osilatör Durumu ($a_0>0$).....	96
5.5 Sayısal Örnek.....	105
6. SONUÇLAR VE TARTIŞMALAR	111
KAYNAKLAR	115
EKLER	119
ÖZGEÇMİŞ	133

KISALTMALAR

DZD	: Doğrusal Zamanla Değişmeyen
TGTÇ	: Tek Giriş Tek Çıkışlı
İVEBZG	: İzin Verilen En Büyük Zaman Gecikmesi

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 3.1 : Minimum fazlı kapalı çevrimli sistem ($z>0$) için elde edilen sonuçların özeti.....	41
Çizelge 3.2 : Minimum fazlı olmayan kapalı çevrimli sistem ($z>0$) için elde edilen sonuçların özeti.....	42

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 : Tezde kullanılacak temel kontrol yapısı.....	7
Şekil 3.1 : Problemde kullanılacak kontrol yapısı.....	21
Şekil 3.2 : (3.22)'nin $z=2$, $p=1$ ve çeşitli L_s değerleri için grafiksel görünümü.....	28
Şekil 3.3 : (3.33)'ün $z=2$, $p=-1$ ve çeşitli L_s değerleri için grafiksel görünümü.....	31
Şekil 3.4 : (3.46)'nın $p=1$ $z=-2$ ve çeşitli L_s değerleri için grafiksel görünümü.....	35
Şekil 3.5 : (3.59)'un $p=-1$ $z=-2$ ve çeşitli L_s değerleri için grafiksel görünümü.....	39
Şekil 3.6 : Örnek 1'deki sistemin $k_p=2.5$ için birim basamak yanıtı.....	44
Şekil 3.7 : Örnek 1'deki sistemin $k_p=5$ için birim basamak yanıtı.....	44
Şekil 3.8 : Örnek 1'deki sistemin $k_p=6$ için birim basamak yanıtı.....	45
Şekil 3.9 : Örnek 2'deki sistemin $k_p=-1.35$ için birim basamak yanıtı.....	46
Şekil 3.10 : Örnek 2'deki sistemin $k_p=-2.10$ için birim basamak yanıtı.....	46
Şekil 3.11 : Örnek 2'deki sistemin $k_p=-2.20$ için birim basamak yanıtı.....	47
Şekil 4.1 : Bölümde kullanılacak kontrol yapısı.....	52
Şekil 4.2 : $dL_{0d}/dK_p > 0$ ilişkisinin sağlandığı durum.....	60
Şekil 4.3 : $r=2$ için L_{kd} ve L_{ks} değerleri.....	64
Şekil 4.4 : (4.48)-(4.49) eşitsizliklerinin $L_{sys}=L_{sys1}$ için birleştirilmiş hali.....	67
Şekil 4.5 : (4.48)-(4.49) eşitsizliklerinin $L_{sys}=L_{sys2}$ için birleştirilmiş hali.....	67
Şekil 4.6 : $L_{0s \min}$ ve $L_{0d \max}$	73
Şekil 4.7 : (4.86)'nın belirli bir $L_{sys}=L_{sys1}$ için ω_2 tanım bölgesine indirgenmiş hali....	77
Şekil 4.8 : (4.86)'nın belirli bir $L_{sys}=L_{sys1}$ için ω_1 tanım bölgesine indirgenmiş hali....	77
Şekil 4.9 : (4.86)'nın belirli bir $L_{sys}=L_{sys2}$ için ω_2 tanım bölgesine indirgenmiş hali....	78
Şekil 4.10 : (4.86)'nın belirli bir $L_{sys}=L_{sys2}$ için ω_1 tanım bölgesine indirgenmiş hali....	78
Şekil 4.11 : (4.86)'nın üç farklı L_{sys} için ω_1 tanım bölgesine indirgenmiş hali.....	79
Şekil 4.12 : (4.86)'nın üç farklı L_{sys} için ω_2 tanım bölgesine indirgenmiş hali.....	80
Şekil 4.13 : $k_p=2$ için sistemin basamak yanıtı.....	86
Şekil 4.14 : $k_p=5$ için sistemin basamak yanıtı.....	86
Şekil 4.15 : $k_p=8$ için sistemin basamak yanıtı.....	87
Şekil 4.16 : $k_p=9.5$ için sistemin basamak yanıtı.....	87
Şekil 4.17 : $k_p=1$ için sistemin basamak yanıtı.....	88
Şekil 4.18 : $k_p=1.3$ için sistemin basamak yanıtı.....	88
Şekil 4.19 : $k_p=10.1$ için sistemin basamak yanıtı.....	89
Şekil 5.1 : İlgilenilen kontrol yapısı.....	94
Şekil 5.2 : $L_{(k+1)d}$, L_{ks} , $L^*(k)$ ifadelerinin (L, k_p) düzlemindeki görünümleri.....	101
Şekil 5.3 : (5.1) ile verilen sistemi kararlı kılan tüm P kontrolörlerin genel yapısı.....	103
Şekil 5.4 : a şıkında $k_p=2$ için birim basamak cevabı.....	107
Şekil 5.5 : a şıkında $k_p=2.5$ için birim basamak cevabı.....	107
Şekil 5.6 : b şıkında $k_p=-0.5$ ve $L_{sys}=4.9, 5.5$ ve $6sn$ için birim basamak cevabı.....	108
Şekil 5.7 : b şıkında $k_p=-0.75$ ve $L_{sys}=4.9, 5.5$ ve $6sn$ için birim basamak cevabı....	108
Şekil E1: $f(\omega)-\tan^{-1}[a_1\omega/(\omega^2-a_0)]$ fonksiyonunun grafiksel görünümü.....	128

ZAMAN GECİKMELİ SİSTEMLERDE KARARLILIĞI SAĞLAYAN DÜŞÜK MERTEBELİ KONTROLÖRLER VE POZİTİF GERİBESLEMENİN KARARLILIĞA ETKİSİ

ÖZET

Bir sistemin girişine verilen bir işaretin etkilerinin, sistemin çıkışında belirli bir süre farkla gözlemlenmesi şeklinde kabaca tanımlanabilecek olan zaman gecikmesi, birçok fiziksel sistem için kaçınılmaz fiziksel bir olgudur. Bu olgu birçok nedenden meydana gelebilse de, bir kontrol sisteminde zaman gecikmesi, genellikle temelde sistemin kendi iç doğasından, kontrolör kaynaklı sebeplerden ve/veya sensörlerden meydana gelmektedir.

Bir kontrol sisteminde zaman gecikmesi, özellikle miktarı arttıkça, sistem üzerinde yadsınamaz etkilere sahip olur. Bu etkilere iki bakış açısıyla yaklaşmak mümkündür; bunlardan birincisi, zaman gecikmesinin sistem üzerinde ne gibi etkilerinin olabileceğine dair sözel çıkarımlardır. İkincisi ve daha önemlisi ise, zaman gecikmesinin sistemler üzerindeki etkilerinin matematiksel anlamda incelenmesidir.

Bu bağlamda, doğrusal zamanla değişmeyen (DZD) ve tek girişli tek çıkışlı (TGTÇ) sistemler ele alındığında, zaman gecikmesi bir kontrol çevriminin içinde yer aldığı takdirde; kapalı çevrimli sistemin karakteristik ifadesi bir polinom yerine polinomu (quasipolynomial) ile ifade edilmektedir. Polinomsuların, polinomlardan en önemli farkı, sonsuz sayıda köke sahip olmasıdır; yani böyle bir durumda kapalı çevrimli sistemin kutup sayısı sonsuz olmaktadır. Belirtilen sistem çeşidinde de sistemin davranışı, kapalı çevrimli kutupların yerleriyle son derece ilişkili olduğundan, zaman gecikmesinin varlığı, sistemin tasarlanmasını güçleştirdiği gibi, sistemin davranışını analiz etmeyi dahi zorlaştırmaktadır.

Bir kontrol sisteminden beklenen en önemli ve olmazsa olmaz kriterin kararlılık olduğu açıktır. Zaman gecikmesinin kararlılık üzerine etkileri de karmaşıktır: Nihai etkisi kararsız yapıcı yönde olsa da, zaman gecikmesi, kararsız bir sistemi kararlı da yapabilmektedir. Şöyle ki, belirli bir zaman gecikmesine sahip bir sistem, kapalı çevrimde kararsız iken, zaman gecikmesi artırıldığında, sağ yarı s düzlemindeki kutupları sol yarı s düzlemine geçerek kararlı hale gelebilmektedir. Ancak yine de belirtilmelidir ki, zaman gecikmesi belli bir düzeyin üstüne çıktığında sistem kararsızlığa gidecektir.

Bu tezde amaçlanan temel husus, zaman gecikmesine sahip DZD ve TGTÇ sistemler için düşük mertebeli kontrolör tasarımına ilişkin literatüre katkı sağlamaktır. Bu bağlamda, bir tasarımcı için kıymetli bir bilgi niteliğinde olan “kararlılığı sağlayan tüm kontrolör parametrelerinin belirlenmesi” konusuna yoğunlaşmıştır. Buna ilaveten, proses endüstrisinde sıkça kullanılan ikinci mertebeden sistemler için zaman gecikmesinin yukarıdaki paragrafta değinilen kararlı yapıcı etkisinin hangi koşullarda ortaya çıktığı konusu araştırılmıştır.

Bu bağlamda, tezde yapılan çalışmaların üzerine inşa edileceği bir kararlılık yönteminin benimsenmesi şarttır. Literatürde DZD ve TGTÇ sistemler için yapılan çalışmalar incelendiğinde, daha ziyade 3 temel yöntemin esas alındığı rahatça görülebilir. Bunlar sık kullanılan seyrek kullanılan doğru sıralanacak şekilde; Hermite-Biehler Teoreminin polinomsular için genelleştirilmiş versiyonu, Nyquist Teoremi ve Direkt yöntemdir (direct method).

Bunlardan ilki olan Hermite-Biehler teoreminin polinomsular için genelleştirilmiş versiyonu, adından da anlaşılabilir gibi, meşhur Hermite-Biehler Teoreminin polinomsular için genelleştirilmiş biçimidir. Bu yöntem, literatürde en sık karşılaşılan yöntem olmakla birlikte, uygulanması uzun ve zahmetli adımlara sahiptir. Ayriyeten bu yöntem, belirli bir zaman gecikmesine sahip bir sistemin sadece o zaman gecikmesi değeri için kararlı olup olmadığını söyler; bu yöntemle kaç kapalı çevrim kutbunun sağ yarı s düzleminde yer aldığını tespit etmek kolay değildir. Yine bunlara ek olarak, zaman gecikmesi arttıkça veya azaldıkça sistem kararlılığının bundan nasıl etkileneceği, sağ yarı s düzlemindeki kutup sayısının değişip değişmeyeceği hususlarında veri elde edebilmek de oldukça güçtür.

İkincisi ise meşhur Nyquist teoremidir. Sayıca Hermite-Biehler teoremi kadar olmasa da, bu yöntem üzerine inşa edilmiş çok sayıda çalışma literatürde mevcuttur. Bu teorem, karmaşık fonksiyonlardaki argümanlar ilkesine dayandığından, polinomsular için de doğrudan kullanılabilir. Gerek Nyquist eğrisinin reel eksene göre simetrik olması, gerekse çizilen Nyquist eğrisinin belli bir frekans değerinden sonra tahmin edilebilir olması nedeniyle, genellikle tüm frekans değerleri için Nyquist eğrisini çizmeye gerek olmamaktadır. Bu bağlamda Hermite-Biehler teoremine kıyasla genellikle daha hızlı sonuç veren bir yöntemdir. Üstelik belli bir zaman gecikmesine sahip bir sistem için, sistemin kararlı olup olmadığında ek olarak, o zaman gecikmesi değeri için kaç adet kapalı çevrim kutbunun sağ yarı s düzleminde olduğu da rahatlıkla belirlenebilir. Ancak zaman gecikmesi arttıkça veya azaldıkça, Nyquist eğrisi kestirilmesi zor bir şekilde değiştiğinden, zaman gecikmesinin değişimiyle sağ yarı s düzlemindeki kutup sayısının bundan nasıl etkileneceğini tahmin etmek bu yöntemle kolay olmamaktadır.

Üçüncüsü ve diğer ikisine kıyasla literatürde çok daha az rastlanılan metodoloji ise, Walton ve Marshall'ın 1987'de literatüre kazandırdığı direkt metodudur. Bu yöntem ilgilenilen polinomsunun sadece belirli bir zaman gecikmesi için kararlılığının ne olacağını söylemekle kalmaz; zaman gecikmesi uzayını her bir parçası belli bir sayıda sağ yarı s düzlemi kutbu içerecek şekilde parçalara ayırır. Yani zaman gecikmesi uygun bir şekilde artırılarak, hangi gecikme değerleri için hangi yöne (sol yarı s düzleminde sağ yarı s düzlemine veya tam tersi) kök geçişi olacağı tek tek tespit edilir. Böylelikle zaman gecikmesi-sağ yarı s düzlemi kök sayısı arasında komple bir harita çıkarılır ve zaman gecikmesi değiştiği vakit, kararlılığın ve sağ yarı düzlemdeki kök sayısının bundan nasıl etkileneceği kolaylıkla anlaşılabilir.

Bu tezde, belirtilen direkt yöntem baz alınarak öncelikli olarak birinci mertebeden sonlu sığa sahip zaman gecikmeli sistemler için, kararlılığı sağlayan tüm P tipi kontrolörlerin kümesi analitik olarak hesaplanmıştır. Birinci mertebeden tersi de nedensel (biproper) olarak anılabilecek bu sistemler, kesin nedensel kardeşleri kadar olmasa da, füze güdümlü dinamikleri, polikromatik ve yüksek güçlü LEDlerin ısı-elektriksel modelleri ve belirli koşullar altında robotların kuvvet dinamiğinin modellenmesinde tasarımcının karşısına çıkmaktadır. Tezde bu hususa elde edilen sonuçlar, frekans tanım bölgesinde modellenmiş DZD ve TGTÇ sistemler için

literatürde yer almamaktadır. 2010 yılında yayınlanmış buna benzer olan tek çalışmada ise, sadece açık çevrim kararsız olan tersi de nedensel birinci mertebeden sistemler için kararlılığı sağlayan kontrolörler kümesi hesaplanmıştır.

Bu tezde, bir önceki paragrafta belirtilen kararlı kılan kontrolör kümesine ek olarak, sistem sıfırının kararlılığı sağlayan kontrolör kümesine etkileri de açıkça ortaya konmuştur. Bu bağlamda, sistem sıfırı sağ yarı s düzleminde iken kararlılık kümesinin, sistem sıfırı sol yarı düzlemdeyken bulunan kararlılık kümesine kıyasla her zaman daha dar olacağı analitik olarak ispatlanmıştır. Ayrıca sadece açık çevrim kararsız sistemler için mevzu bahis olan, izin verilen en büyük zaman gecikmesi (maximum allowable time-delay) (İVEBZG) olarak adlandırılan hadisenin niçin ortaya çıktığı da ele alınmış, sistemin kutbunun ve sıfırının bir fonksiyonu biçiminde, analitik olarak elde edilmiştir. Bir başka deyişle, anılan açık çevrim kararsız sistemin, kapalı çevrimde bir P tipi kontrolörle kararlı kılınabilmesi için sistemin zaman gecikmesinin, değeri sistem sıfır ve kutbuyla dinamik olarak değişen İVEBZG'den küçük olması şarttır.

Tezde elde edilen bir diğer sonuç ise, yine proses endüstrisinde sıkça karşılaşılan ikinci mertebeden sonlu sıfıra sahip olmayan zaman gecikmeli sistemlerle alakalıdır. Normalde iki kutbu da sağ yarı s düzleminde olan ikinci mertebeden zaman gecikmesine sahip olmayan bir sistem, bir P tipi kontrolörle kararlı kılınamaz. Ancak sistem zaman gecikmesine sahip olduğunda, ve zaman gecikmesinin sağ yarı s düzleminde sol yarı s düzleminde kutup geçirme özelliği bulunduğu, bu kararlı kılma durumu mümkün olabilmektedir.

Bu bağlamda, bu tip sistemlerin P tipi kontrolörle kararlı kılınabilmesi için gerek ve yeter koşullar türetilmiştir. Türetilen bu koşullardan hareketle, pozitif geri besleme konfigürasyonunun, negatif geribesleme konfigürasyonuna göre daha etkili olduğu saptanmıştır. Öyle ki, zaman gecikmesinin sol yarı s düzlemine kök geçirme özelliği bulunduğu, sistem negatif geri besleme konfigürasyonunda iken bulunan bu gerek ve yeter koşullar sağlanmak zorunda değil iken, pozitif geribesleme konfigürasyonunda ise, gerek ve yeter koşulları sağlayan en az bir zaman gecikmesi-kontrolör ikilisi mevcut olacaktır. Bu bağlamda, her iki konfigürasyon için sistemi kararlı kılacak kontrolör kümesi de analitik olarak ayrı ayrı hesaplanmıştır.

Ayriyeten, gerek ve yeter koşulların sonsuz bölge için sağlandığı özel bir durum olan 2. mertebeden zaman gecikmeli osilatör durumu da ele alınmış, bu yapılar için hem pozitif hem de negatif geri besleme altında, zaman gecikmesi-kontrolör düzleminde sonsuz adet kararlılık bölgesinin bulunduğu gösterilmiştir. Bu durumda, pozitif geribeslemenin etkinliği daha da açık bir şekilde görülmektedir. Ayrıca bu durum için bulunan sonuçlar, zaman gecikmesi üzerinde parametrik bir belirsizliğe sahip olan sistemler için de genişletilmiştir.

CALCULATION OF ALL STABILIZING LOW-ORDER CONTROLLERS FOR TIME-DELAY SYSTEMS AND EFFECTS OF THE POSITIVE FEEDBACK TO THE STABILITY

SUMMARY

Time-delay, which can be loosely defined as the time lag between the input and the output of a control system, is almost an inevitable phenomenon for most of the physical systems. In control systems, this phenomenon may be caused by several factors; but the most general contributors are the intrinsic dynamics of the physical system itself, the controller, which is probably running a complex control algorithm, and/or the sensors which needs time to analyze the data.

When the effects of the time-delay to the system is analyzed, its effects become nonnegligible, especially when the amount of the time-delay gets larger. To understand and explain the effects of the time-delay on the control systems; two approaches can be adopted: verbal explanations of the possible effects of the time-delay on the system and the explanation of the effects by means of the mathematics.

In this way, the focus will be given to the mathematics: When a linear time invariant (LTI) and a single input single output (SISO) system is considered, the closed loop structure no longer forms a polynomial: when time-delay is inside the control loop, the closed loop structure forms a quasipolynomial. The main difference between a polynomial and a quasipolynomial is that the latter has infinite number of roots; implying that the related closed-loop system possess infinite number of closed-loop poles. Since the behavior of a LTI-SISO system is strongly related with the location of the closed-loop poles; the existence of the time-delay complicates the design process of a control system, even it complicates the analysis of it.

As expected, the first and the foremost important criterion of a control system is the stability. As on the other criteria, the effects of time-delay on the stability criterion is rather complicated. Even if this effect is finally in the destabilizing way, time-delay may be sometimes stabilizing, as well. That is; if a system is unstable for a specified value of time-delay, it may become stable when the time-delay is increased. Nevertheless, it should be mentioned that, the system becomes unstable eventually, when the time-delay is increased.

In this thesis, the main aim is to contribute to the literature about the low order controller design issues for LTI SISO time-delay systems modeled in the frequency domain. In this way, it is focused on the concept of the analytical determination of all stabilizing controller parameters; which is an invaluable information for the designer. Additionally, second order time-delay systems, which is generally utilized in process industry to approximately model the physical systems, are taken into account, and it is investigated that under which circumstances the stabilizing effect of the time-delay emerges.

As might be expected, in order to construct such kind of studies, it is necessary to decide the suitable stability analysis methodology as the basis. In the works about LTI SISO time-delay systems in the literature, it can be observed that three distinct stability methods are usually employed: Hermite-Biehler Theorem for Quasipolynomials, Nyquist Theorem and the Direct Method.

The first and the most frequently used one, Hermite-Biehler Theorem for Quasipolynomials is the generalized version of the well-known Hermite-Biehler theorem for quasipolynomials. This methodology has quite long steps which are tedious to apply. Moreover, this method tells only the system is stable or not, for a fixed value of time-delay. In other words, using this method, it is hard to determine the number of right half s plane closed loop poles. Furthermore, it is hard to detect the effect of varying the time-delay on stability and on the number of right half s plane closed loop poles.

The second frequently used one is the well-known Nyquist theorem. As this theorem is based on the principles of argument on complex functions, it can be used for quasipolynomials as it is, without any further modifications. In general, plotting the entire Nyquist plot is unnecessary; since the plot is symmetric for negative frequencies about the real axis and since the plot is generally predictable for sufficiently great frequencies. These facts greatly facilitates to construct the whole shape of the plot; thus resulting in a more easy to apply and faster methodology than the Hermite-Biehler Theorem offers. Moreover, in addition to assessment of the stability for a fixed time-delay, the number of the right half s plane closed loop poles can be determined using Nyquist Theorem. However, when the time-delay varies, it is difficult to determine the change in the number of the right half plane poles, due to the unpredictable changes of the Nyquist plot. In other words, in most of the cases, the Nyquist plot must be plotted again, should the time-delay be changed.

The third and the most rarely employed one is the direct method, which is proposed by Walton and Marshall in 1987. This methodology not only tells the stability of the closed-loop system for a fixed value of the time-delay, but also divides the delay space into intervals for which the number of the right half s plane roots is fixed. That is, the entire delay space is detected by increasing the delay value, and it is tracked for which values of the time-delay a root pair crosses the imaginary axis along with the direction of the crossing (left to half or vice versa). Therefore, a complete map is constructed between the delay space and the number of the right half s plane closed-loop poles. This fact also implies that, the relation between the variations of the time-delay and the number of the right half s plane closed-loop poles can easily be obtained.

In the proposed thesis, first of all, the frequently employed stability methods are compared concisely. Then in order for the reader to follow the thesis easily, a brief overview about the direct method is given. Then the methodology is applied to two different systems as examples in order to dispel any confusions and/or obscurities.

Then by taking the direct stability method as the basis, all stabilizing P type controllers are analytically determined for first order biproper systems with time-delay. Even though they have not a widespread application area compared to the strictly proper ones, biproper first order transfer functions can be utilized to approximately model the seeker dynamics in the autopilot mechanism of the missiles, the thermal-electric model of the polychromatic and the high power LED luminaries and the force dynamics of the robots under particular circumstances. When the results obtained in the thesis about such kind of systems are considered, it can be contentedly mentioned that they do not

exist in the literature for LTI SISO systems modeled in the frequency domain. In a study proposed in 2010 a similar problem is covered, but only the open-loop unstable plants are taken into consideration there.

In addition to analytical determination of the all stabilizing set, the effects of the zero of the plant to this stabilizing set is clearly investigated. In this way, when the zero of the plant is on the right half plane, the stabilizing set always results in a narrower set, when compared to the case where the zero of the plant is on the left half plane. Moreover, the fact of maximum allowable time delay (MATD), which is only the case for the open-loop unstable plants, is investigated and clearly interpreted why this phenomenon occurs only for open-loop unstable plants. Additionally, MATD is explicitly expressed as a function of the location of the zero and the pole of the plant. To state succinctly, the value of the time delay must be smaller than the MATD, in order for the plant to be stabilized by a P type controller.

Another result obtained in this thesis is about the second order systems without a finite zero with time-delay, which is frequently used to approximately model most of the processes in the industry. As might be expected, any second order system possessing two right half s plane poles cannot be stabilized by a P type controller, when the system does not include a time-delay. However, when the system possesses a time-delay, and when the time-delay has the effect of passing the poles from right half s plane to left half s plane, such a stabilization becomes possible.

In that way, first of all it is clearly expressed under which circumstances the time-delay has the effect of passing the poles from right to left and the sufficient condition is analytically derived. This condition, indeed, is related with the relative distance of the right half plane poles of the system to the imaginary axis. After that the necessary and sufficient conditions are derived for such kind of systems to be stabilized by a P type controller. While this derivation process, it is proved that, positive feedback configuration has much more stabilizing effect than the negative feedback configuration, which is an astonishing result under normal circumstances. In other words, the necessary and sufficient conditions for stabilizability are always satisfied for positive feedback configuration; whereas this satisfaction does not necessarily hold for negative feedback configuration. That is, if the time delay has the effect of passing the poles from right half s plane to the left half s plane, then employing a positive feedback configuration, a stabilizing delay-controller pair is guaranteed to be found, which is not the case for the negative feedback configuration. Additionally, the all stabilizing P type controller sets for both cases are derived analytically under the assumption that the necessary and the sufficient conditions for stabilizability are satisfied.

Moreover, the second order oscillators, for which the necessary and the sufficient conditions are satisfied for $\forall k \in \mathbb{N}$, are taken into account, and all stabilizing P controllers are derived for each of the positive-negative feedback case. In this derivation, it is evidenced that the stabilizing regions in the delay-controller plane is infinite, and it is also proved that a stabilizing controller set can be always found, whatever the delay value is; except some distinct points in the delay space. In this special type second-order systems, the superiority of positive feedback effect against negative feedback is better shown. Additionally, the results are extended to the case, for which the oscillator has an uncertain time-delay.

1. GİRİŞ

Zaman gecikmesi, kabaca fiziksel bir sistemin girişı ile çıkışı arasındaki ölü zaman olarak nitelendirilebilir. Bir başka deyişle, sistemin girişine verilen bir işaretin etkilerinin, çıkışta belli bir süre farkla gözlemlenebilmesidir.

Fiziksel sistemlerin doğası gereği birçoğunda var olan ve/veya kontrol uygulamalarında dolayı sisteme dahil olan zaman gecikmesi, temelde aşağıda sıralanan sebeplerden dolayı ortaya çıkabilir [1]:

- a) Fiziksel sistemlerde enerji veya kütle taşınımı, ve/veya bilgi iletimi gibi fiziksel olaylar sırasında harcanan zaman.
- b) Sistemin kendisi seri bağlamış birçok alt sistemden oluşuyorsa, her bir alt sistem arasındaki iletimde harcanan toplam zaman.
- c) Sistemin kontrolü esnasında, eğer kontrolör karmaşık bir kontrol algoritmasını gerçeklemeye çalışıyor ise bu hesaplama-gerçekleme esnasında harcanan zaman.
- d) Kapalı çevrimli kontrolde, çıkıştan bilgi alan sensörlerin, kendilerine gelen veriyi analiz edebilmeleri için harcanan zaman.

Zaman gecikmesi, bir çok fiziksel sistemde sistemin doğası gereği var olan ve genel olarak sistemin kontrolü düşünüldüğünde, performansını olumsuz olarak etkilemeye meyilli fiziksel bir olgudur. Daha açık ifade etmek gerekirse, zaman gecikmesi yokken kararlı olan ve klasik kontrol teorisi açısından istenilen performans kriterlerin sağlayan bir sistem, kendisine bir miktar zaman gecikmesi eklendiğinde önce performansı bozulacak, daha sonra bu gecikme daha da arttığında ise kararsız olmaya başlayacaktır. Hatta zaman gecikmesi arttıkça sistemi kararlı kılmak neredeyse imkansız hale gelecektir.

Ancak işin şaşırtıcı kısmı, bazı hallerde zaman gecikmesi yokken belirli bir kontrol yapısıyla kararlı kılınamayan bir sistem, belirli miktarda bir zaman gecikmesi sisteme ilave edildiğinde aynı kontrol yapısıyla kararlı hale getirilebilmektedir. Fakat zaman gecikmesinin değeri yeterince arttıkça sistem nihai olarak kararsızlığa gidecektir.

Özetle, zaman gecikmesinin sistem üzerine olumlu etkileri olabilse de bu durum olumsuz etkilerine kıyasla oldukça dar bir kümeyi temsil etmektedir.

Zaman gecikmesinin sistem kontrolü açısından yukarıda değinilen etkilerine daha teknik bir açıdan yaklaşılabilecek olursa, bu olumsuz (veya kısmen olumlu) etkilerin sebeplerine 2 farklı gözlemlerle bakılabilir.

Bunlardan ilki, kontrol sisteminin giriş ve çıkış ilişkileri de göz önüne alındığında, zaman gecikmesinin sistemin işleyişi üzerinde nasıl etkilerinin olacağına dair sözel çıkarımlardır. Bunların bir kısmı kabaca aşağıdaki gibi sıralanabilir [1]:

- a) Çıkış veya kontrol edilen değişken üzerine binen; kestirilen veya kestirilemeyen bozucuların etkileri belirli bir zaman geçmeden gözlemlenemez.
- b) Herhangi bir t anındaki kontrol aksiyonunun, kontrol edilen değişken üzerindeki etkileri yine belirli bir zaman geçmeden gözlemlenemez.
- c) Yine herhangi bir t anında, o anki görünen çıkış hatasını düzeltmek için üretilen kontrol işareti, aslında t anından daha önce oluşmuş bir çıkış hatasını düzeltmeye çalışıyor olabilir.

Bunlardan ikincisi ise, daha teknik analizlere ve meseleye daha sentezci yaklaşıma olanak verecek olan matematiksel yaklaşımdır. Bilindiği gibi, doğrusal zamanla değişmeyen (DZD) ve tek giriş tek çıkışlı (TGTC) bir kontrol sisteminin davranışını belirleyen unsurlar, kapalı çevrim kutuplarıdır. Bir sistemin belirli bir performans göstermesi istendiğinde kutupların s düzleminde yerleşmesi gereken bölgeler bellidir; ve kapalı çevrimli sistem oluşturulurken, kutupların bu bölgelerde olmasını sağlayan kontrolörler tasarlanır. Duruma göre, eğer sistem yüksek mertebedense, bazı kutuplar baskın bölgeden uzaklaştırılarak etkileri ihmal edilebilecek hale getirilir. Ancak zaman gecikmeli bir sistem kapalı çevrime alındığında, ne yazık ki kapalı çevrim kutuplarının sayısı sonsuz olmaktadır; ve hatta belirli koşullar gerçekleştiğinde bu kutuplar sağ yarı düzlemde de ortaya çıkabilmektedir [2]. Veya sol yarı düzlemde ortaya çıkan bu kutuplar, zaman gecikmesi arttıkça önlenemez bir şekilde sağ yarı düzleme geçebilmektedir.

Yine tam tersi bir şekilde, zaman gecikmesi yokken sağ yarı düzlemde kutbu/kutupları bulunan bir sistemde, belirli bir zaman gecikmesi aralığı için bu kutuplar sol yarı düzleme geçerek sistemi kararlı hale getirebilmektedir. Ancak daha önce de belirtildiği üzere, zaman gecikmesi arttığında nihai etki, sistemi kararsız yapma yönündedir.

Şüphesiz ki hem sözel yaklaşımla olsun, hem de matematiksel yaklaşımla olsun, zaman gecikmesinin varlığı kontrolör tasarımı zorlaştıran bir unsurdur. Çünkü yine matematiksel açıdan bakıldığında, zaman gecikmesiz sistemlerde kontrolör, kapalı çevrim kutuplarını istenen yerlere atmaya yarayan bir mekanizmadır. Ancak kapalı çevrim kutbu sayısı sonsuz olduğunda, klasik kontrolör tasarım yöntemlerinin birçoğu maalesef kullanılabilirliğini yitirmektedir.

Günümüz endüstrisinde oldukça sık kullanılan kontrol yapılarından olan PID ve onun türevleri (P, PI, PD) için de bu durum söz konusudur. Zaman gecikmesiz sistemler için literatürde bu tarz kontrolörlerin tasarımı için birçok çalışma mevcuttur. Ancak bu çalışmalardan birçoğu, zaman gecikmesinin varlığında kullanılamaz hale gelmektedir. Özetlemek gerekirse, zaman gecikmeli sistemlerde kontrolör tasarımı zaman gecikmesiz sistemlerdeki kadar kolay değildir ve bu durum son 10-20 yıldır araştırmacıların bir hayli ilgisini çekmektedir.

1.1 Tezin Amacı

Bu tez çalışması hazırlanırken güdülen amaçlardan biri, frekans tanım bölgesinde modellenmiş belirli grup tek zaman gecikmesine sahip sistemler için kararlılığı sağlayan tüm düşük mertebeli (P, PI PD ve PID) kontrolörlerin kümesinin analitik olarak hesaplanmasıdır. Kararlılığı sağlayan tüm kontrolörlerin hesaplanması, tasarımcılar için kıymetli bir bilgidir; zira ilgilenilen sistemde tasarım kriterleri değişecek olursa, bu bilginin varlığı, tasarımcı için kontrolör parametresi seçiminde bir kısıt teşkil eder ve/veya tasarımcıyı denenecek yeni kontrolör parametrelerinin sistemi kararlı yapıp yapmadığı hesabından kurtarır. Bu bağlamda, gözetilen temel hedefler ise ilgilenilen sistemin fiziksel dünyada rastlanabilir ve/veya tasarımcıların karşısına çıkan türden olması, yine ilgilenilen sistemler için literatürde bu tarz analitik bir çözümün var olmaması ve literatüre bu bağlamda katkı sağlanmasıdır.

Bir diğer amaçlanan husus ise, daha önceki bölümde belirtildiği gibi, zaman gecikmesinin kararsız yapıcı etkisine kıyasla daha sınırlı olan kararlı yapıcı etkisinin, hangi koşullar altında ortaya çıktığının, yine frekans tanım bölgesinde modellenmiş belirli grup tek zaman gecikmesine sahip sistemler için analitik olarak incelenmesidir. Buna ek olarak yine ilgilenilen sistem çeşidinin endüstride karşılaşılabılır türden olması, ve yine kararlılığı sağlayan tüm düşük mertebeli kontrolörlerin hesaplanması da tez kapsamında güdülen amaçlar arasındadır.

1.2 Tezde Kullanılan Yöntem

Bu tez kapsamında, zaman gecikmeli sistemler için kararlılığı sağlayan kontrolör kümelerinin hesaplanması ve zaman gecikmesinin kararlı yapıcı etkisinin irdelenmesi hedefi düşünüldüğünde, çalışmaları üzerine inşa edecek bir kararlılık metodolojisinin benimsenmesi gerekmektedir. DZD ve TGTÇ sistemler için asimptotik kararlılığın indirgendığı nokta, frekans tanım bölgesi için tüm kutupların sol yarı düzlemde olmasının gerekliliğidir. Sonuç olarak zaman gecikmesiz sistemler için bu kararlılığın tespiti, son kertede, bir polinomun sonlu sayıdaki köklerinin tamamının sol yarı düzlemde olup olmadığının belirlenmesine indirgenir. Haliyle bu durumun tespiti için literatürde uygulanması basit birçok yöntem mevcuttur.

Bu kapsamda değerlendirilecek zaman gecikmeli sistemler için de kararlılık mevzuu son noktada aynıdır: tüm kutupların sol yarı düzlemde olması gerekir. Ancak buradaki en büyük fark, sistemin karakteristik ifadesinin bir polinom değil polinomsu(quasi-polynom) ile ifade edilmesi, bir başka deyişle kapalı çevrim kutup sayısının sonsuz olmasıdır. Bu durum, zaman gecikmesiz sistemlerde kullanılan ve hızlı bir şekilde kararlılığı belirlemeye yarayan birçok metodolojiyi uygulanamaz kılar. Doğal olarak sayıca zaman gecikmesiz sistemler için olanlar kadar olmasa da, literatürde zaman gecikmeli sistemler için kararlılığı belirlemeye yarayan başka yöntemler mevcuttur. Ancak tahmin edilebileceği gibi bahsedilen yöntemlerin hiçbiri, zaman gecikmesiz sistemlerdeki gibi hızlı ve kolay bir şekilde kararlılığı saptamaya yarayan yöntemler değildir.

Bu yöntemler arasında literatürde en çok kullanılanı, yani bir bakıma en popüler olanı, meşhur Hermite-Biehler Teoreminin polinomsular için genelleştirilmiş versiyonudur. Bunun kadar sık olmasa da Nyquist Teoremi baz alınarak hazırlanmış önemli sayıda çalışma yine literatürde mevcuttur.

Bu tezde temel olarak kullanılan kararlılık metodolojisi ise Walton ve Marshall tarafından literatüre 1987 yılında kazandırılan direkt yöntemdir (direct method) [2]. Bu kararlılık yöntemi, zaman gecikmeli sistemlerin kararlılığının belirlenmesi için oldukça güçlü bir yöntemdir, zira diğer iki metodolojiye kıyasla, sağ yarı düzlemdeki kutup sayısının zaman gecikmesinin etkisiyle nasıl değişeceği hakkında da önemli fikirler verir. Yöntemin detayları tezin ilerleyen bölümünde anlatılacaktır. Ancak tüm

avantajlarına rağmen literatürde bu yöntemin baz alınarak hazırlandığı pek az çalışma mevcuttur.

1.3 Tezde Elde Edilen Sonuçlar

Bu tezde, bahsedilen hedefler doğrultusunda ve kullanılan metodoloji çerçevesinde, ilk olarak 1. mertebeden sonlu sığra sahip, yani tersi de nedensel (bi-proper) sistemler ele alınmıştır ve kararlılığı sağlayan tüm P tipi kontrolörlerin kümesi analitik olarak hesaplanmıştır. Bu problem, hem açık çevrim kararlı ve açık çevrim kararsız sistemler düşünüldüğünde literatürde açık bir problemidir. Aynı zamanda, açık çevrim kararsız sistemlerdeki zaman gecikmesi ancak belli bir değerin altında ise, sistemi kararlı kılan kontrolörlerin kümesinin var olabildiği gösterilmiş, ve izin verilen en büyük zaman gecikmesi (maximum allowable time-delay) adı verilen bu durumun neden ortaya çıktığı ifade edilmiştir. Aynı zamanda izin verilen en büyük zaman gecikmesi, sistemin kutup ve sıfırın yerlerinin bir fonksiyonu olarak hesaplanmıştır.

Belirtilenlere ilaveten, 2. mertebeden, sonlu sığra sahip olmayan ve iki kutbu da sağ yarı düzlemde olan sistemler ele alınmıştır. Normalde zaman gecikmesine sahip olmadığı takdirde P kontrolörle kararlı yapılamayacak olan bu sistemlerde, zaman gecikmesinin hangi şartlar gerçekleşirse, sağ yarı düzlemden sol yarı s düzlemine kutup geçirmesinin mümkün olacağı tespit edilmiştir. Bu şartları sağlayan sistemlerin de hangi koşullar altında kararlı yapılabileceğinin gerek ve yeter koşulları analitik olarak türetilmiştir.

Bu koşullardan hareketle, bu tarz sistemleri kararlı kılmada, şaşırtıcı bir şekilde pozitif geri beslemenin, negatif geri beslemeye nazaran daha etkili olduğu keşfedilmiştir. Bir başka deyişle, negatif geri besleme söz konusu olduğunda, sistemin kararlı yapılabilirliği için gerek ve yeterli koşulların sağlanması garanti değilken, pozitif geri besleme söz konusu olduğunda, gerek ve yeter koşul kesinlikle sağlanmaktadır. Yani zaman gecikmesinin sağ yarı düzlemden sol yarı düzleme kutup geçirme özelliği var ise, pozitif geri besleme kullanıldığında, sistemi kararlı kılacak bir zaman gecikmesi-kontrolör ikilisi mutlaka bulunacaktır.

Bu sonuçlara ilave olarak, ele alınan, yani 2.mertebeden iki kutbu da sağ yarı düzlemde olan sistemler için pozitif geri besleme durumunda, ve geri besleme durumunda,

kararlılığı sağlayan tüm zaman gecikmesi-kontrolör ikililerinin değerleri ayrı ayrı analitik olarak hesaplanmıştır.

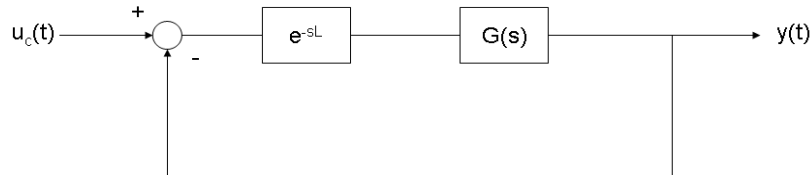
Son olarak, bahsedilen bu çalışmanın özel bir durumu olan, gerek ve yeterli koşulların sonsuz kez, yani $\forall k \in \mathbb{N}$ için sağlandığı ikinci dereceden osilatörler ele alınmıştır. Bu yapıda bir sistem, zaman gecikmesi yokken bir oransal kontrolörle kararlı kılınamazken, zaman gecikmesinin varlığında kararlı kılınabilmektedir. Üstelik sistemin barındırdığı zaman gecikmesinin değeri ne olursa olsun, gecikme uzayındaki bir takım tekil noktalar hariç, kararlılığı sağlayan bir kontrolör kümesi mutlaka bulunmaktadır. Şaşırtıcı olan sonuçlardan bir tanesi de, bu kararlılığı sağlayan kümelerin ya tamamen pozitif değerlerden ya da tamamen negatif değerlerden oluştuğudur. Başka bir deyişle, sistemi kararlı kılan kontrolör kümesi pozitif kazanç değerlerinden oluşuyorsa, sistemi negatif kazanç değerleriyle kararlı kılmak imkansız olacaktır. Aynı şekilde, bu durumun tersi de geçerlidir. Bulunan sonuçlara ek olarak çalışma zaman gecikmesi üzerinde parametrik belirsizliğe sahip olan sistemlere de genişletilmiş ve bu tarz sistemler için de kararlılığı sağlayan tüm P tipi kontrolörlerin kümesi hesaplanmıştır.

2. KULLANILAN KARARLILIK YÖNTEMİ

Bilineceği ve de tahmin edilebileceği üzere kararlılık, bir kontrol sisteminden beklenebilecek ilk ve en önemli kriterdir. Eğer bir kontrol sistemi kararlılık kriterini yerine getirmezse, kontrol sistemleri için belirlenmiş olan diğer tüm performans kriterlerinin hepsi anlamsız bir hal alır. Bu durum, endüstride kullanılan gerçek fiziksel sistemler de işin içine katılarak düşünülecek olursa, kontrol edilen sistemin kararsız olması, sistemin tümünün veya bir bölümünün arızalanması, kullanılamaz hale gelmesi, infilak etmesi vb. ciddi sonuçlara neden olabilir. Haliyle bu gibi durumlar da ciddi boyutta maddi zararlara ve/veya insan sağlığını tehdit edecek durumlara sebebiyet verebilir. Dolayısıyla kararlılık, kontrol edilen bir sistemin üzerinde tasarlanacak kontrolörün sisteme sağlatması gereken olmazsa olmaz bir koşuldur.

Daha önceden de belirtildiği gibi matematiksel olarak ele alındığı takdirde kararlılık, DZD ve TGTÇ sistemler için tüm kapalı çevrim kutuplarının sol yarı düzlemde olmasını gerektirir. Özellikle kontrol çevrimi içerisinde zaman gecikmesi bulunan sistemlerde, kapalı çevrimde sonsuz kapalı çevrim kutbu bulunduğundan, zaman gecikmeli sistemlerin kararlılığını belirlemek, zaman gecikmesiz sistemler kadar kolay değildir. Yine de literatürde, zaman gecikmeli sistemlerin kapalı çevrimde oluşturduğu yapı olan polinomların tüm kutuplarının sağ yarı düzlemde olup olmadığını tespit etmeye yarayan kıymetli yöntemler mevcuttur.

Yöntemler içerisinde literatürde en sık kullanılanlara çok kısaca değinmeden önce, yöntemlerle ilgili yapılacak açıklamaları somutlaştırmak adına, tez kapsamında aşağıdaki kontrol yapısı ele alınacaktır:



Şekil 2.1 : Tezde kullanılacak temel kontrol yapısı.

Burada L zaman gecikmesini ($L>0$), e^{-sL} zaman gecikmesinden dolayı Laplace dönüşümü neticesinde ortaya çıkan ifadeyi, $G(s)$ sisteme ilişkin transfer fonksiyonunu, $u_c(s)$ ve $y(s)$ de sırasıyla giriş ve çıkış işaretlerini ifade etmektedir. Burada $G(s)$ 'in aşağıda verilen yapıda olduğu varsayılacaktır:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (2.1)$$

Burada ifade edilen $N(s)$ ve $D(s)$ polinomları ise sırasıyla pay ve payda polinomlarıdır ve bunların aşağıdaki gibi olduğu varsayılacaktır:

$$\begin{aligned} N(s) &= b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0 \\ D(s) &= a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Eğer şekil 2.1'deki kontrol yapısından da hareketle kapalı çevrim transfer fonksiyonu çıkartılacak olursa, sistemin kutuplarını belirleyen, sistemin karakteristik ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$P_c(s, L) = D(s) + N(s)e^{-sL} \quad (2.3)$$

Burada dikkat çekilmesi gereken nokta, şekil 2.1'de verilen kontrol yapısındaki zaman gecikmesi ifadesinin, ileri yol yerine geri besleme kısmında olmasının, karakteristik ifade açısından, yani kapalı çevrim sistem kutupları açısından bir şey fark ettirmeyeceğidir. Doğal olarak, zaman gecikmesi kontrol çevriminin içinde kaldığı müddetçe, kapalı çevrim kutupları ve kararlılık açısından bu sistemler eşdeğer kabul edilebilir. Yani bir başka deyişle, şekil 2.1 ile verilen kontrol yapısı, problemin ele alınış biçimi itibarıyla, zaman gecikmesi terimini kontrol çevrimi içerisinde herhangi bir yerde içerebilir.

Literatürde mevcut olan kararlılık yöntemlerine gelinecek olursa, şekil 2.1 ile verilen kontrol yapısında olan sistemler için, literatürdeki çalışmaların ağırlıklı olarak 3 temel kararlılık yöntemi üzerine inşa edildiği görülebilir. Bunlardan ilki ve de göreceli olarak literatürdeki çalışmalarda en çok kullanılanı, Hermite-Biehler Teoreminin polinomsular için genelleştirilmiş versiyonudur [3]. Bu kararlılık yöntemi, kapalı çevrimli sistemin oluşturmuş olduğu ve (2.3) ile verilen polinomsunun e^{sL} ile çarpılıp, reel ve imajiner kısımlarının ayrıştırılarak, bunların köklerinin tamamen reel ve sıralı olup olmadığının ve ilave olarak polinomsunun faz açısının monoton artan özelliğe sahip olup olmadığının tespitine dayanır. Bu kararlılık yöntemi, uygulaması oldukça

zahmetli ve adımları uzun süren bir yöntemdir. Ayrıca yine bu kararlılık yöntemi sabit bir L değeri için yalnızca sistemin kararlı olup olmadığını söyler; fakat sağ yarı düzlemde kaç adet kapalı çevrim kutbu olduğu bilgisini elde etmek oldukça güçtür. Buna ilaveten, yine L değeri arttıkça veya azaldıkça sistemin kararlılığının bu durumdan nasıl etkileneceğinin tespit edilebilmesi de oldukça zordur. Yani bu yöntemle zaman gecikmesinin kararlı yapma etkisine yönelik analitik çıkarımlar yapabilmek neredeyse imkansızdır. Barındırdığı bu dezavantajlarına rağmen literatürde ise bu yöntem baz alınarak hazırlanmış birçok çalışma mevcuttur [4-12].

Değnilmesi gereken ikinci kararlılık kriteri ise meşhur Nyquist teoremidir. Frekans cevabı temelli bir yöntem olduğu için, zaman gecikmeli sistemlerde de değişikliğe uğratılmadan direkt olarak kullanılabilir. Bu yöntem, grafiksel temelli bir yöntem olduğu ve genel olarak Nyquist eğrisinin tamamını çizmenin çoğu durumda gerekli olmadığı için, uygulaması ve adımları Hermite-Biehler teoreme göre daha basittir. Üstelik kararlılık analizi tamamlandığında, sağ yarı düzlemde kaç adet kapalı çevrim kutbunun tespiti de mümkün olmaktadır. Ancak bu yöntemde de zaman gecikmesi arttıkça veya azaldıkça, faz açısında ortaya çıkan $-L\omega$ terimi Nyquist eğrisinin şeklini (genlik sabit kalacak şekilde) kestirilmesi zor bir şekilde değiştirdiğinden, zaman gecikmesinin kararlı yapıcı etkisi hakkında analitik çıkarımlar yapmak yine kolay olmamaktadır. Literatürde, sayıca Hermite-Biehler Teoremi ile hazırlananlar kadar olmasa da, bu yöntem baz alınarak hazırlanmış birçok çalışma mevcuttur [13-18].

Yukarıda bahsedilen diğer iki yöneme göre çok daha az kullanılan yöntemlerden biri de Walton ve Marshall tarafından literatüre kazandırılan direkt yöntemdir (direct method) [2]. Bu yöntemle önce (2.1) ile verilen zaman gecikmesiz sistemin kutuplarının yerleri belirlenir. Daha sonra ise sisteme sonsuz küçük bir zaman gecikmesi ilave edilir ve bu durumda ortaya çıkan sonsuz sayıdaki kutup s düzleminde sonsuzda yer alır. Burada yine (2.1)'in bağıl derecesine bağlı olarak bu kutupların hangi yarı düzlemde ortaya çıktığı belirlenir ve hepsinin sol yarı düzlemde ortaya çıktığından emin olunduktan sonra, artan L değerleriyle kutupların $j\omega$ ekseninden her iki yöne de geçişlerinin de hangi frekanstan ve hangi L değerleri için olacağı tespit edilir. Burada geçişe neden olan L değerleri ilişkili ω değerine bağlı olacak şekilde $2\pi/\omega$ ile periyodiktir. Bu şekilde $(0, \infty)$ arasındaki tüm L değerleri için sağ yarı düzlemde kaç adet kutup bulunacağı açık bir şekilde belli edilmiş olur. Ayrıca sabit gecikme değerine sahip bir kontrol sistemi için, L 'nin artması veya azalmasıyla

kararlılığın bu durumdan nasıl etkileneceği rahatlıkla tespit edilebilir; bu durum hakkında analitik çıkarımlar yapılabilir. Tüm bu avantajlarına rağmen bu çalışma baz alınarak inşa edilmiş çok fazla çalışma yoktur; olanların çoğu da bu tezin yazarlarına aittir [19-24].

Yöntemin detaylarına geçilecek olursa, yöntem 3 adımda ifade edilebilir:

1. Adım - Zaman gecikmesiz sistemin kutup dağılımı: Bu adımda (2.3) ile verilen kapalı çevrim ifadesinde $L=0$ alınarak; sistem sanki zaman gecikmesizmiş gibi kutup dağılımına bakılır. Böylelikle $L=0$ için kaç tane kapalı çevrim kutbunun sağ yarı düzlemde olduğu belirlenir.

2. Adım - Sonsuz adet kutbun s düzlemindeki ortaya çıkış yerinin tespiti: Yöntemin bu adımında, sistemde sanki sonsuz küçük bir L değeri varmış gibi düşünülür. Bu durumda artık ilk adımdakilere ek olarak sonsuz adet kapalı çevrim kutbu da kapalı çevrimli sistemde var olmaya başlar. Ancak kararlılık ve/veya kararlı kılınabilirlik açısından, sonsuz küçük zaman gecikmesinin varlığıyla ortaya çıkan bu sonsuz adet kutbun, s düzleminde nerede ortaya çıktığı önemlidir. Eğer bu kutuplar sağ yarı düzlemde ortaya çıkacak olurlarsa, kararlılık ve kararlı kılınabilirlik açısından analizin herhangi bir anlamı kalmayacaktır. Özet olarak aşağıdaki koşullar sağlandığı takdirde yeni oluşan tüm kutuplar sol yarı düzlemde olacaktır:

i) (2.2) ile verilen $N(s)$ ve $D(s)$ polinomlarında eğer $n < m$ ise, yani sistem kesin nedensel (strictly proper).

ii) Yine aynı polinomlar için eğer $m=n$ durumu mevcutsa, yani sistemin tersi de nedensel (biproper), ilave olarak aşağıda verilen koşul da sağlanıyorsa:

$$\left| \frac{b_n}{a_n} \right| < 1 \quad (2.4)$$

Adımı özetlemek gerekirse, zaman gecikmesine sahip, şekil 2.1 ile verilen ve (2.1) - (2.3) ile ifade edilen sistemlerin sonlu sayıda sağ yarı s düzlemi kutbuna sahip olabilmesi için ya kesin nedensel olması, ya da tersi de nedensel olup, pay ve payda polinomlarının baş katsayılarının oranının -1 ile 1 arasında kalması gerekmektedir. Mevzuyu çok fazla uzatmamak adına burada sadece sonuçlar verildiğinden, bu adımla ilgili daha fazla bilgi sahibi olmak isteyenler, [2]'ye başvurarak daha derin bilgi sahibi olabilirler.

3. Adım - İmajiner eksenden kutup geçişinin hangi frekanstan ve hangi yöne doğru olduğunun tespit edilmesi ve bu geçişe neden olan L değerlerinin hesaplanması: Sonsuz küçük bir L değeri için tamamıyla sol yarı s düzleminde ortaya çıkan sonsuz adet kutup, L'nin artmasıyla s düzleminde hareket etmeye başlayacak ve eşlenik çiftler halinde imajiner eksen de kesecektir. İmajiner eksenin kesildiği L değeri önemlidir; zira bu L değeri artınca ilişkili kutup çifti muhtemelen yarı düzlem değiştirecektir; yani sağ yarı düzlemdeki kutup sayısı da değişecektir.

(2.3) ile verilen karakteristik polinomsuda, imajiner eksende kutup çifti yer aldığı anda aşağıdaki ilişki sağlanacaktır:

$$e^{-j\omega L} = \frac{-D(j\omega)}{N(j\omega)} \quad (2.5)$$

Bu koşul, kendi içerisinde iki alt koşul barındırır:

$$\left| \frac{-D(j\omega)}{N(j\omega)} \right| = 1 \quad (2.6)$$

Ve

$$\cos(\omega L) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{-D(j\omega)}{N(j\omega)} \right\}, \quad \sin(\omega L) = \operatorname{Im} \left\{ \frac{D(j\omega)}{N(j\omega)} \right\} \quad (2.7)$$

Bu koşullardan ilki, tahmin edilebileceği üzere L'den bağımsızdır ve imajiner eksenden kutup geçişinin hangi frekanstan, yani hangi ω 'dan olacağını belirlemekte kullanılır. Bir başka deyişle, kutupların yarı düzlem değiştiren imajiner eksen kestiği nokta zaman gecikmesinden bağımsızdır. Koşullardan ikincisi ise, ilk koşuldan belirlenecek ω değerleri için, kutupların imajiner eksende yer alma durumunun hangi L değeri için gerçekleşeceğini belirlemede kullanılır.

(2.6) ile verilen ilk koşulu sağlayan ω değerlerinin bulunması, küçük bir cebrik düzenlemeyle, aşağıda verilen polinomun köklerinin bulunmasına indirgenebilir:

$$W(\omega^2) := D(j\omega)D(-j\omega) - N(j\omega)N(-j\omega) \quad (2.8)$$

Açıkça görülebileceği üzere, bu ω^2 'nin bir polinomudur ve bu polinomun kökleri (2.6)'yı sağlar. Burada köklerin ω^2 'ler halinde bulunması, kapalı çevrim kutuplarının imajiner eksende yer alırken eşlenik çiftler halinde bulunacak olmasındandır. Yani, (2.8)'in köklerinden birisi $\omega^2 = \omega_i^2$ ise, bu, ilişkili L değeri için, kapalı çevrim

kutuplarının $\pm j\omega_i$ 'de yer alacağı anlamına gelir. Daha önce de belirtildiği gibi kutupların imajiner eksenden geçiş noktaları, yani (2.8)'in kökleri, L 'den bağımsızdır.

Burada dikkate değer bir nokta ise (2.8)'in köklerinin reel ve pozitif olmasının gerekliliğidir. Eğer (2.8)'in en az bir kökü dahi pozitif ve reel değilse, bu durumda hiçbir kutup imajiner ekseni kesemeyeceğinden ve bu durum da L 'den bağımsız olduğundan, zaman gecikmeli sistemin kararlılığı, zaman gecikmeli sistemle aynı olacaktır; bir başka deyişle zaman gecikmesinin kararlılık üzerinde etkisi olmayacaktır [22], [24].

Tespit edilmesi gereken önemli bir nokta da (2.8)'in köklerinden eşlenik olarak geçecek olan kutupların hangi yöne hareket edeceğidir. Kutuplar pekala sol yarı düzlemden sağ yarı düzleme veya tam aksi istikamette hareket edebilirler. Bunun tespiti için (2.8)'in ω^2 'ye göre olan türevinin, yine (2.8)'in köklerindeki işaretine bakmak yeterlidir (detaylı çıkarım için [2]'ye bakınız). Bu durumda işaret negatifse kutuplar sağdan sola, işaret pozitifse soldan sağa hareket etmektedirler. Daha açık ifade edilecek olursa:

i) Eğer $\text{sgn}\left[W'(\omega^2)\right]_{\omega^2=\omega_i^2} < 0$ ise ilişkili L değeri için $\pm j\omega_i$ 'den geçen kutup çifti sağdan sola,

ii) Eğer $\text{sgn}\left[W'(\omega^2)\right]_{\omega^2=\omega_i^2} > 0$ ise ilişkili L değeri için $\pm j\omega_i$ 'den geçen kutup çifti soldan sağa hareket etmektedir. Görüleceği üzere, kutup çiftinin imajiner eksenden geçiş noktalarında olduğu gibi, kutupların geçiş yönü de L 'den bağımsızdır ve her bir ω_i değeri tek bir yönde geçişe olanak vermektedir.

İlişkili L değerini bulmak için ise (2.7)'den yararlanılır. Burada (2.8)'in kökleri ω_i^2 cinsinden olduğu için ilk bakışta (2.7)'yi hem ω_i hem de $-\omega_i$ için çözmek gerektiği düşünülebilir. Halbuki her iki durumda da aynı denklem elde edilir. Bu sebeple $-\omega_i$ için ekstradan hesap yapmaya gerek yoktur.

Burada dikkat edilmesi gereken nokta (2.8)'in her bir kökü için, yani her bir ω_i^2 için bulunan L_i değeri $2\pi/\omega_i$ ile periyodiktir. Bir başka deyişle (2.7)'yi ω_i için sağlayan en küçük L değeri L_{0i} olmak üzere, aşağıdaki ilişkiyi sağlayan tüm L değerleri (2.7)'nin çözümü olacaktır:

$$L_{ki} = L_{0i} + \frac{2\pi}{\omega_i} \quad (k=1,2,3...) \quad (2.9)$$

Yani tüm bulunan L_{ik} değerleri için bir çift kutup, $\pm j\omega_i$ noktasından $W'(\omega_i^2)$ 'nin işaretine göre sol yarı düzlemde sağ yarı düzlem veya sağ yarı düzlemde sol yarı düzlem geçecektir.

Bu adım (2.8)'in tüm kökleri için tekrarlandığı takdirde (0∞) içerisinde her bir L değeri için sağ yarı s düzleminde kaç adet kapalı çevrim kutbu olduğu rahatlıkla tespit edilebilir. Üstelik, yine daha öne belirtildiği gibi, L değerinin artıp azalmasıyla sağ yarı düzlemdeki kutup sayısının nasıl değiştiği ve/veya kararlılığın bu durumdan nasıl etkileneceği hakkında analitik çıkarımlar yapılabilir.

Yöntemin uygulanışını somutlaştırmak adına, yöntem, aşağıda verilecek iki tane örneğe uygulanacaktır.

Örnek 1: Aşağıda açık transfer fonksiyonu verilen sistemin şekil 2.1'deki kontrol konfigürasyonu ile kontrol edildiği varsayımıyla, hangi L değerleri için sağ yarı s düzleminde kaç kutbu olacağı tespit edilsin:

$$G(s) = \frac{10}{s+8} e^{-sL} \quad (2.10)$$

(2.3)'ten hareketle, kapalı çevrimli sistemin karakteristik ifadesi (polinomu) yazılacak olursa:

$$P_c(s, L) = s + 8 + 10e^{-sL} = 0 \quad (2.11)$$

Yöntemin 3 adımı da sırayla uygulanacak olursa:

Adım 1: $L=0$ için (2.11) ile verilen ifade karardır; yani sağ yarı düzlemde kutup yoktur.

Adım 2: (2.11) ile verilen ifadede L sonsuz küçük olsun. Böyle bir durumda kök sayısı sonsuz olacaktır; yeni oluşan kökler de $|s|=\infty$ 'da yer alacaktır. Ancak payda polinomunun derecesi (1), pay polinomunun derecesinden (0) yüksek olduğu için bu köklerin hepsi sol yarı s düzleminde.

Adım 3: Kökler L artmaya başladıkça s düzleminde hareket edecek, yarı düzlem değiştireceklerdir. Yarı düzlem değiştirirken imajiner eksenden (2.8)'den hareketle oluşturulan $W(\omega^2) = \omega^2 - 36$ polinomun kökleri olan ± 6 'dan (yani $\pm 6j$) geçeceklerdir.

Ve bu geçişler $W'(\omega^2) = 1 > 0$ olduğundan, sol yarı s düzleminde sağ yarı s düzlemine doğru olacaktır. Bu geçişin hangi L değerleri için gerçekleştiği bulunacak olursa, (2.7)'den hareketle aşağıdaki denklem takımı elde edilir:

$$\cos(6L) = -\frac{4}{5}, \quad \sin(6L) = \frac{3}{5} \quad (2.12)$$

Bu denklem takımı çözülecek olursa, L aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$L_k = 0.2648\pi + \frac{2k\pi}{6} \quad (2.13)$$

Burada (2.12) ile verilen denklem takımının en küçük çözümü olan 0.2648π 'de bir çift kutup $s = \pm 6j$ 'de yer almak suretiyle, artan L değeriyle birlikte sağ yarı s düzlemine geçecektir. Daha sonra ise her L'de oluşacak her $\pi/3$ 'lük artışta (2.12) denklemini sağlanacağından, bu kutup geçişi tekrarlanacaktır. Bu durum genelleştirilecek olursa (2.11) ile verilen ifadenin $L = (0, 0.2648\pi)$ aralığında sağ yarı s düzleminde kutbu olmayacak, aşağıda verilen aralıklarda ise

$$L = \left(0.2648\pi + k \frac{\pi}{3}, 0.2648\pi + (k+1) \frac{\pi}{3} \right) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.14)$$

Sağ yarı s düzleminde $2(k+1)$ tane kutbu bulunacaktır.

Örnek 2: Aşağıda açık transfer fonksiyonu verilen sistemin şekil 2.1'deki kontrol konfigürasyonu ile kontrol edildiği varsayımıyla, hangi L değerleri için sağ yarı s düzleminde kaç kutbu olacağı tespit edilsin:

$$G(s) = \frac{2\sqrt{5}}{s^2 + 2s + 5} e^{-sL} \quad (2.15)$$

Yine (2.3)'ten hareketle, kapalı çevrimli sistemin karakteristik ifadesi (polinomu) yazılacak olursa, aşağıdaki yapı elde edilir:

$$P_c(s, L) = s^2 + 2s + 5 + 2\sqrt{5}e^{-sL} = 0 \quad (2.16)$$

Bu polinomsunun, hangi L değeri için sağ yarı s düzleminde kaç adet kökünün, yani kapalı çevrimli sistem kutbunun bulunacağını tespiti için ise yöntemin 3 adımı sırayla uygulanacaktır:

Adım 1: $L=0$ için, kapalı çevrimli sistem kararlıdır; yani (2.16)'yla verilen ifadenin sağ yarı s düzleminde hiç kökü bulunmamaktadır.

Adım 2: (2.16)'yla verilen ifadeye sonsuz küçük bir L değeri eklendiği zaman, s düzleminde sonsuz adet kök oluşacaktır; ve bu kökler $|s|=\infty$ 'da yer alacaktır. Bu kutuplar, (2.15) ile verilen ifadede pay derecesi (0), payda derecesinden (2) küçük olduğu için, sol yarı s düzleminde ortaya çıkacaktır. Sonuç olarak bu adım sonucunda da sağ yarı s düzlemde kök olmayacaktır.

Adım 3: Artan L değeri ile birlikte bu kökle s düzleminde hareket etmeye başlayacak, bazı L değerleri için imajiner eksende yer alacak ve yarı düzlem değiştireceklerdir. Köklerin yarı düzlem değiştirmeden önce imajiner eksende nerede yer alacağını bulmak için $W(\omega^2)$ polinomu oluşturulacak olursa, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$W(\omega^2) = \omega^4 - 6\omega^2 + 5 \quad (2.17)$$

Bu ifadenin $\omega_1^2=5$ $\omega_1^2=1$ olacak şekilde iki adet kökü olacaktır. Bu köklerden gerçekleşecek geçişlerin hangi yönde olduğunu tespit etmek için $W'(\omega^2)$ ifadesinin bu köklerdeki işaretine bakılacak olursa, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$W'(\omega^2) \Big|_{\omega^2=5} = 2\omega^2 - 6 \Big|_{\omega^2=5} = 44 > 0 \quad (2.18)$$

$$W'(\omega^2) \Big|_{\omega^2=1} = 2\omega^2 - 6 \Big|_{\omega^2=1} = -4 < 0 \quad (2.19)$$

Bu işaretlerden de anlaşılacağı üzere, $\omega_1^2=5$ şeklinde verilen frekans, sol yarı s düzleminde sağ yarı s düzlemine ($s=\pm\sqrt{5}j$ 'den olmak üzere) kök geçişine olanak tanıyacak, $\omega_2^2=1$ şeklinde verilen frekans ise sağ yarı s düzleminde sol yarı s düzlemine olanak tanıyacaktır. İki frekans için de ilişkili L değerleri hesaplanacak olursa:

$$\omega_1^2 = 5 \Rightarrow \cos(5L_{k1})=0, \quad \sin(L_{k1}) = 1 \quad (2.20)$$

$$\omega_1^2 = 1 \Rightarrow \cos(L_{k2}) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad \sin(L_{k2}) = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad (2.21)$$

Sol yarı s düzleminde sağ yarı s düzlemine kök geçişine neden olacak L_{k1} değerleri aşağıdaki gibi verilebilir:

$$L_{k1} = 0.1\pi + 0.4k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.22)$$

Sağ yarı s düzleminde sol yarı s düzlemine kök geçişine neden olacak L_{k2} değerleri ise aşağıdaki gibi verilebilir:

$$L_{k2} = 0.8524\pi + k\pi \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.23)$$

Bulunan bu L_{1k} ve L_{2k} değerleri birleştirilecek olursa verilen bir L değeri için (2.15) ile verilen sistemin hangi L değeri için sağ yarı s düzleminde kaç adet kutbu olacağı bulunabilir. Öyle ki, $L \in (0, 0.1\pi)$ aralığı için kapalı çevrimli sistemin sağ yarı düzlemde kutbu olmayacaktır. Aynı şekilde $L \in (0.1\pi, 0.5\pi)$ aralığındaki zaman gecikmesi değerleri için 2 adet, $L \in (0.5\pi, 0.8524\pi)$ için 4 adet, $L \in (0.8524\pi, 0.9\pi)$ için 2 adet... olacak şekilde sağ yarı düzlem kutbu olacaktır.

3. BİRİNCİ MERTEBEDEN SONLU SIFIRA SAHİP ZAMAN GECİKMELİ SİSTEMLER İÇİN KARARLILIĞI SAĞLAYAN TÜM P TİPİ KONTROLÖRLERİN ANALİTİK OLARAK HESAPLANMASI

Bu bölümde, sonlu sifıra sahip 1. Mertebeden, yani tersi de nedensel (biproper) zaman gecikmesine sahip sistemler için kararlılığı sağlayan tüm P tipi kontrolörlerin kümesi, sistem kazancı (k_s), sistemin kutbunun yeri (p), sistemin sıfırının yeri (z), sistemin zaman gecikmesinin değeri (L_s) ve trigonometrik bir denklemin belli bir aralıktaki çözümü cinsinden elde edilecektir. Bu analitik çıkarım esnasında [2] ile verilen ve bir önceki bölümde ayrıntılarıyla anlatılan kararlılık yöntemi kullanılacaktır.

3.1 Literatür Özeti, Problemin Önemi ve Bölümde Yapılanların Özeti

Bilindiği üzere, 1. mertebeden tek zaman gecikmesine sahip sistemlerin proses endüstrisi için önemi büyüktür; zira endüstride kullanılan birçok proses, daha çok 1. mertebeden kesin nedensel olacak şekilde, tek zaman gecikmeli bir transfer fonksiyonuyla yaklaşık olarak ifade edilebilir [25]. Matematiksel açıdan olaya yaklaşıldığında, bu sistemlerin ortak özelliği, kapalı çevrime alındıklarında, geri tipli polinomsu (retarded type quasipolynomial) meydana getirmeleridir. Bu tip polinomsuların da sağ yarı düzlemde ancak sonlu sayıda kutbu bulunabilir.

Endüstrideki önemine binaen, bu sistemler için kararlılığı sağlayan tüm düşük mertebeli kontrolörlerin hesaplanmasıyla alakalı literatürde birçok çalışma mevcuttur. [4] ile verilen çalışmada, bir önceki bölümde de değinilen Hermite-Biehler Teoreminin polinomsular için genelleştirilmiş versiyonu kullanılarak, tüm P tipi kontrolörlerin kümesi hesaplanmıştır. Aynı yazarlar tarafından hazırlanan [5] ve [6]'da ise bu çalışma sırasıyla PI ve PID kontrolörlere genişletilmiştir. [7] ile verilen çalışmada ise başka yazarlar tarafından, tamamlayıcı çalışma olarak, açık çevrim kararsız sistemler için kararlılığı sağlayan tüm PD kontrolörlerin kümesi hesaplanmıştır. [19]'da ise, bir önceki bölümde anlatılan ve [2] ile verilen kararlılık yöntemi kullanılarak, açık çevrim kararsız sistemler için kararlılığı sağlayan tüm P, PI ve PID kontrolörlerin kümesi hesaplanmıştır. [20]'de ise yine [2] ile verilen yöntem kullanılarak kararlılığı sağlayan

tüm P tipi kontrolörler [4]'ten daha hızlı ve çok daha kısa olacak şekilde elde edilmiştir. [21]'de ise, sırasıyla P, PI, PD ve PID kontrolörler için zaman gecikmesi bağımlı – bağımsız bölgeler, kontrolör uzayında hem analitik kümelerle elde edilmiş, hem de grafiksel olarak gösterilmiştir. [17]'de ise Nyquist teorem kullanılarak, tüm mertebelerden (kesin nedensel olmak kaydıyla) transfer fonksiyonları için işe yarayabilecek, nümerik bazlı bir yöntem önerilmiştir. Bu yöntem uygun şekilde modifiye edilerek, ve sadece kutuplardan oluşan (all pole) transfer fonksiyonlarının genliklerinin monoton azalan olması özelliği de kullanılarak [18] ile verilen çalışmada kararlılığı saplayan tüm P tipi kontrolörler 1. ve 2. mertebeden sistemler için analitik olarak hesaplanmıştır. Bu yöntemin daha öncekilerden en büyük farkı, uygulanabilmesi için sabit bir zaman gecikmesine ihtiyaç duymamasıdır; yani hem sabit zaman gecikmeli sistemler için, hem de zaman gecikmesi belirsizliğine sahip sistemler için bu yöntem pekala uygulanabilir.

Aynı literatür araştırması 1. mertebeden tersi de nedensel (biproper) zaman gecikmeli sistemler için yapıldığında yukarıdaki çeşitliliğe rastlamak mümkün değildir. Bu tarz sistemlerin ortak özelliği kapalı çevrim karakteristik ifadelerinin nötral tip polinomu (neutral type quasipolynomial) meydana getirmesidir. Bu tip polinomsuların bir önceki sayfada değinilenlerden en önemli farkı, bazı koşullar (ilgilenilen problem tipi için (2.4) ile verilen koşul) sağlamadığı takdirde sonsuz adet sağ yarı düzlem kutbuna sahip olabilmeleridir. Bu sebeple bu tip polinomsuların kararlılıkları için daha kısıtlayıcı şartlar ortaya çıkmaktadır [3].

Proses olarak bakıldıklarında sayıca 1. mertebeden kesin nedensel kardeşleri kadar olmasa da füzelerdeki güdümleyici dinamikleri [26-30], polikromatik ve yüksek güçlü LED'lerin termal-elektriksel modelleri [31, 32], bazı belirli koşullar altında robotların güç dinamiği ifadeleri [33, 34], 1. mertebeden sonlu sifıra sahip transfer fonksiyonlarıyla modellenenabilir. Bunlara ek olarak, kontrol edilmesi istenen sistemin doğrudan 1. mertebeden sonlu sifıra sahip bir transfer fonksiyonuna sahip olması da gerekmez, çeşitli sistem ve/veya sistem-kontrolör kombinasyonları da bu tip transfer fonksiyonlarıyla sonuçlanabilir. Özellikle kimyasal proseslerde sıkça görülen paralel sistem yapılarında, sistemlerden biri statik, diğeri ise 1. mertebeden kesin nedensel olduğu takdirde, matematiksel olarak birleştirilmiş sistem sonlu sıfırlı 1.mertebeden olacaktır [35]. Ayrıca bölümün başında da belirtildiği gibi endüstriyel proseslerin çoğu kesin nedensel transfer fonksiyonlarıyla modellenmekte ve bu sistemlerin

azımsanamayacak kısmı da PD kontrolörle kontrol edilmektedir [25]. Yine böyle bir sistem – kontrolör kombinasyonu da 1. mertebeden sonlu sıfırlı sistem gibi davranacaktır.

Her ne kadar göreceli olarak kesin nedensel kardeşi kadar rastlanan bir sistem tipi olmasa da, bu tarz sistemler için yapılan çalışmalar, literatürde yok denecek kadar azdır. Hatta ve hatta yazarların bildiği kadarıyla, bu tarz sistemler için kararlılığı sağlayan tüm düşük mertebeli kontrolörlerin hesaplanmasına dair bir çalışma yoktur. Bir tek [16] nolu çalışmada bu tip sistemler için kararlılığı sağlayan tüm P ve PI tipi kontrolörler kümesi hesaplanmıştır, ancak orada da sadece açık çevrim kararsız sistemler ele alınmıştır. Belki ilk bakışta [17] ile verilen metodolojinin, genel bir yöntem olması nedeniyle, bu tip sistemler için kararlılığı sağlayan tüm P tipi kontrolörlerin hesaplanması problemini rahatlıkla çözebileceği düşünülebilir. Ancak bu yöntem, kesin nedensel transfer fonksiyonları için tasarlanmıştır ve tersi de nedensel sistemler için yöntemin kullanılabilmesi, yöntemde bir takım modifikasyonları gerektirmektedir. Ayrıca yöntem, doğası gereği nümerik bir yöntem olduğundan, bu yöntemle belirli bir grup sistem türü için kararlılığı sağlayan tüm P tipi kontrolörlerin analitik çözümünü elde etmek kolay olmayacaktır. Doğal olarak, bu bölümde ele alınacak sistemler için [17]'de verilecek metodolojiyle, kararlılığı sağlayan tüm P tipi kontrolörlerin analitik olarak elde edilmesi kolay bir iş değildir. Ancak belirtilmelidir ki, Nyquist teoremi, Hermite-Biehler teoremi veya alternatif bir kararlılık yönteminin uygun bir şekilde kullanılmasıyla, bahsedilen bu küme analitik olarak pekala elde edilebilir.

Literatürde az önce anılan boşluğu doldurmak adına, bu bölümde, birinci mertebeden sonlu sıfırlı ve zaman gecikmesine sahip sistemler için kararlılığı sağlayan tüm P tipi kontrolörlerin kümesi hesaplanmıştır. Sadece bununla kalınmamış, sistem sıfırının bu kümeye olan etkileri de açıkça ortaya konmuştur. Bu doğrultuda, kutupları aynı noktada olan ve sistem sıfırları orijine göre simetrik yerleşmiş olan iki sistemi kararlı kılan kontrolör kümesi, analitik ifade olarak aynı gözükmesine rağmen, minimum fazlı olan sistemi kararlı kılan kontrolör kümesi her zaman diğerine kıyasla daha geniş olacaktır.

Yine bunlara ilaveten, izin verilen en büyük zaman gecikmesi (maximum allowable time-delay) adı verilen bir olgunun neden sadece açık çevrim kararsız sistemlerde ortaya çıktığı hesaplanmış ve izin verilen en büyük zaman gecikmesi (İVEBZG),

sistemin kutbunun ve sıfırının yerinin bir fonksiyonu olarak hesaplanmıştır. Analitik olarak bakıldığında, İVEBZG ilk olarak [18]'de genel bir teorem olarak verilmiştir. Burada önce faz fonksiyonunun $k\pi$ 'ye eşit olduğu frekans (ω_s) tespit edilmiş, daha sonra da faz fonksiyonunun maksimumunun ω_s 'te olmasını sağlayan zaman gecikmesi değeri hesaplanmıştır. Bu zaman gecikmesi değeri İVEBZG olmaktadır. Ancak buradaki hesaplamalar, genelde tamamen kutuplardan oluşan (all pole) transfer fonksiyonları için geçerli olan, genlik fonksiyonunun monoton azalan olması özelliğine dayandırılmıştır. Ancak bu özellik tersi de nedensel olan transfer fonksiyonları için geçerli olmak zorunda değildir; dolayısıyla [18]'de İVEBZG ile verilen analitik formülasyon, bu bölümde ele alınacak sistemler için kullanılamamaktadır.

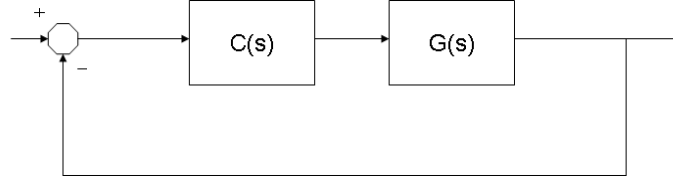
Aynı zamanda, İVEBZG'yi daha da derinlemesine araştırmak adına, İVEBZG'in sistemin sıfırıyla olan ilişkisi de açıkça ortaya konmuştur. Bu doğrultuda, eğer sistem minimum fazlı bir sifıra sahipse, İVEBZG'nin supremum ve infimum değerleri sırasıyla τ ve 2τ olmaktadır (τ burada sistemin zaman sabitini göstermektedir). Burada İVEBZG, sistemin sıfırının yerinin artan bir fonksiyonu olmaktadır; yani sistemin sıfırı orijinden $-\infty$ 'a doğru uzaklaştıkça İVEBZG de 2τ 'dan τ 'ya azalmaktadır. Aynı şekilde, minimum fazlı olmayan sifıra sahip sistemler için ise supremum ve infimum değerleri sırasıyla τ ve 0 olmakta, İVEBZG de sıfırın yerinin yine artan bir fonksiyonu olmaktadır. Yani sistemin sıfırı ∞ 'a doğru yaklaştıkça, İVEBZG 0'dan τ 'ya doğru artmaktadır.

Bulunan sonuçların geçerliliğini tartışmak adına, bulunan bu supremum ve infimum değerleri literatürdeki diğer yayınlarla akıllı bir şekilde kıyaslanmıştır. Şöyle ki, minimum fazlı bir sifıra sahip bir sistem için, İVEBZG'nin infimum değeri (τ), bu sıfır $-\infty$ 'da yer aldığında elde edilmektedir. Şüphesiz ki böyle bir durumda sistem birinci mertebeden kesin nedensel bir sisteme dönüşecektir. Literatürde bu tarz sistemler için var olan çalışmalardan ([4, 19, 20]), İVEBZG'nin τ olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla burada bulunan sonuç, literatürde var olanlarla uyumludur. Ayriyeten yine minimum fazlı sifıra sahip bir sistem için, İVEBZG'nin supremum değeri (2τ), sistem sıfırı ile kutbu orijine göre simetrik yerleşirse elde edilmektir. Bu sonucu doğrulayabilmek için de [7] nolu çalışma kullanılabilir; çünkü bu çalışmada PD kontrolörle kontrol edilen birinci mertebeden kesin nedensel zaman gecikmeli sistemler için İVEBZG'in sadece supremum değeri bulunmuştur ve bu değer 2τ olarak verilmiştir. Bu yönden

bakıldığında da sonuçlar literatürde var olanla uyumludur. Ayriyeten İVEBZG hakkında bulunan sonuçlar [16] nolu çalışma ile de uyumludur.

3.2 Problemin Tanımlanması ve Sınıflandırılması

Problem dahilinde, Şekil 3.1’de verilmiş olan kontrol yapısı kullanılacaktır:



Şekil 3.1 : Problemde kullanılacak kontrol yapısı.

Burada, $G(s)$ ve $C(s)$ aşağıdaki gibi olacaktır:

$$G(s) = \frac{k_s(s+z)}{s+p} e^{-sL}, \quad C(s) = k_p \quad (3.1)$$

Burada z sistem sıfırını (sıfırın yeri $s = -z$ ’de olacak şekilde), p sistem kutbunu (yine kutup $s = -p$ ’de olacak şekilde) ve k_s sistemin kazancını ifade etmektedir ($k_s > 0$). Ayrıca L ($L > 0$), sistemin bilinen ve üzerinde herhangi bir belirsizlik olmayan, yani sabit olan (örneğin $L = L_s$) zaman gecikmesini belirtmektedir. Kapalı çevrimli sistemin karakteristik ifadesi yazılacak olursa aşağıdaki yapı elde edilir:

$$P_c(s) = s + p + k_p k_s (s + z) e^{-sL} \quad (3.2)$$

Burada, bölümün geri kalanında yapılacak olan hesapları basitleştirmek adına, sistemin kazancı sanki 1’e eşitmiş gibi kabul edilerek k_s , k_p ’nin içine gömülebilir. Böyle bir durumda kontrolörün ifadesi aşağıdaki gibi olacaktır:

$$C(s) = K_p := k_s k_p \quad (3.3)$$

Kararlılığı sağlayan tüm kontrolörleri bulmak için yapılacak olan şey, 2. Bölümde detayları anlatılan kararlılık yönteminin 3 adımını, sırasıyla bu probleme uygulamaktır. Bu doğrultuda, ilk adım olarak sistem zaman gecikmesiz olarak kabul edilecek, yani $L=0$ alınacaktır. Böyle bir durumda, kararlılığı sağlayacak kontrolör kümesi, sistemin açık çevrim kararlı olup olmamasına ve sıfırının minimum fazlı olup olmamasına bağlı olarak değişecektir. Bu yüzden bu adım 4 kategoriye ayrılarak incelenecektir:

(1) Sol Yarı s-Düzlemi Sıfırına Sahip Sistem ($z>0$): Bu durumda kapalı çevrim sıfırı sol yarı s düzleminde olacaktır. Doğal olarak bu durum da sistem kutbunun sağ yarı s düzleminde veya sol yarı s düzleminde olmasına göre iki başlık altında incelenecektir:

(a) Açık Çevrim Kararlı Sistem ($p>0$): Bu durum için kararlılığı sağlayan P tipi kontrolörlerin kümesi aşağıdaki gibi verilebilir:

$$K_p \in \left(-\infty, \min\left(-1, \frac{-p}{z}\right) \right) \cup \left(\max\left(-1, \frac{-p}{z}\right), \infty \right) \quad (3.4)$$

(b) Açık Çevrim Kararsız Sistem ($p<0$): Bu durum için kararlılığı sağlayan P tipi kontrolörlerin kümesi aşağıdaki gibi verilebilir:

$$K_p \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{-p}{z}, \infty \right) \quad (3.5)$$

(2) Sağ Yarı s-Düzlemi Sıfırına Sahip Sistem ($z<0$): Bu durumda kapalı çevrim sıfırı sağ yarı s düzleminde olacaktır. Doğal olarak bu durum da sistem kutbunun sağ yarı s düzleminde veya sol yarı s düzleminde olmasına göre iki başlık altında incelenecektir:

1. Açık Çevrim Kararlı Sistem ($p>0$): Bu durum için kararlılığı sağlayan P tipi kontrolörlerin kümesi aşağıdaki gibi verilebilir:

$$K_p \in \left(-1, \frac{-p}{z} \right) \quad (3.6)$$

2. Açık Çevrim Kararsız Sistem ($p<0$): Bu durum için kararlılığı sağlayan P tipi kontrolörlerin kümesi aşağıdaki gibi verilebilir:

$$K_p \in \left(\min\left(-1, \frac{-p}{z}\right), \max\left(-1, \frac{-p}{z}\right) \right) \quad (3.7)$$

Görüleceği üzere, zaman gecikmesiz sistemi kararlı kılan kontrolör kümesi bu 4 farklı durumda da değişkenlik göstermektedir; doğal olarak zaman gecikmeli sistem için de bu kümeler fark edeceğinden, bu 4 durumun her biri ayrı olarak incelenmelidir. Ancak pek tabii ki bu 4 durum için de ortak olan özellikler vardır; durumları ayrı ayrı incelemeye geçmeden, bu ortak özelliklere değinmek yerinde olacaktır.

Kararlılık yönteminin 2. adımı bu 4 durum için de fark etmeyecektir; o sebeple bu adım burada uygulanacaktır. 2. adımın söylediği üzere, eğer sisteme sonsuz küçük bir L değeri ilave edilirse (3.2) ile verilen kapalı çevrimli sistemin karakteristik ifadesinin

sonsuz adet kökü olacaktır; yani sistemin sonsuz adet kapalı çevrim kutbu olacaktır. Kararlılığın ve kararlı kılınabilirliğin anlamlı olabilmesi için, sonsuz adet bu kutbun sol yarı s düzleminde oluşması gerekmektedir. Bir başka deyişle (2.4)'ten hareketle, bu durumun oluşabilmesi için aşağıdaki koşulun sağlanması gerekmektedir:

$$-1 < K_p < 1 \quad (3.8)$$

Bu koşul, yukarıda belirtilen 4 ayrı durum için de ortak bir koşuldur ve kontrolör üzerinde direkt olarak bir kısıt teşkil etmektedir. Bir başka deyişle, az sonra ayrı ayrı incelenecek 4 ayrı durum için de, sistemi kararlı yapacak kontrolör kümesi (3.8)'in belirttiği sınırlar içerisinde kalmalıdır. Aksi takdirde sağ yarı s düzleminde sonsuz adet kapalı çevrim kutbu bulunacaktır ve burada yürütülen kararlılık tartışmasının bir anlamı kalmayacaktır.

Yöntemin 3. adımına geçilecek olursa, 3. adımın bir kısmının yine bu 4 durum için ortak olduğu görülebilir. Eğer (2.8) ile verilen $W(\omega^2)$ polinomu bu sistem için oluşturulacak olursa bu 4 durum için de ortak olan $W(\omega^2)$ polinomu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$W(\omega^2) = D(j\omega)D(-j\omega) - K_p^2 N(j\omega)N(-j\omega) = \omega^2 (1 - K_p^2) + p^2 - K_p^2 z^2 \quad (3.9)$$

Bu polinomdan da, kutupların yarı düzlem değiştirirken imajiner eksen kestirdiği noktalar aşağıdaki gibi bulunur:

$$\omega^2 = \frac{K_p^2 z^2 - p^2}{1 - K_p^2} \quad (3.10)$$

Görüleceği üzere, bu sistem için tek bir kesim frekansı vardır ve bu kesim frekansı yukarıda tanımlanan 4 farklı durum için de ortaktır. Yine ortak olan özelliklere devam etmek adına, bu frekansın hangi doğrultuda (sol yarı s düzleminde sağ yarı s düzlemine veya aksi yönde) kutup geçişine olanak tanıdığı tespit edilirse, yani (3.9)'un ω^2 'ye göre türevi alınacak olursa, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$W'(\omega^2) = 1 - K_p^2 \quad (3.11)$$

Bu türev, (3.8) ile birlikte düşünülecek olursa, türevin değerinin pozitif olacağı açıktır. Yani (3.10) ile verilen ve 4 durum için de ortak olan imajiner eksenin kesim frekansı yalnızca sol yarı s düzleminde sağ yarı s düzlemine kutup geçişine olanak tanıyacaktır. Kutupların yarı düzlem değiştirirken, imajiner eksenin kesildiği başka bir

frekans olmadığı, ve her bir frekansın tek yönlü geçişe olanak sağladığı düşünülecek olursa, zaman gecikmesinin sağ yarı s düzleminden sol yarı s düzlemine kutup geçirme özelliği bu 4 durum için de mevcut değildir. Bir başka deyişle, sistem bir kez kararsız hale geldiği zaman, zaman gecikmesinin artmasıyla sistemin tekrar kararlı hale gelmesi mümkün olamayacaktır.

Şu halde yukarıda tanımlanan 4 durum için de farklı olacak tek adım (2.7)'nin kullanılarak, (3.10)'da verilen frekans için kutupların sol yarı düzlemden sağ yarı düzleme geçmesine olanak tanıyan L değerinin hesaplanmasıdır. Bu L değeri beklendiği üzere K_p ile değişecektir. Yine bu duruma ilave olarak, (2.9)'dan hareketle bu L değerlerinden en küçüğü olan L_0 , sistem için nihai kararlılık sınırı teşkil edecektir (burada $i=1$ 'den başka i olmadığı için L_{i0} 'daki ilk indis olan i kaldırılmıştır). Bu gerçeklikten hareketle, L_0 hakkındaki bir takım cebrik çıkarımlardan ve (3.1) ile verilen sistemin zaman gecikmesinin sabit olmasından ($L=L_s$) faydalanılarak, bu 4 durumun her biri için sistemi kararlı kılan tüm P tipi kontrolörlerin kümesi analitik olarak hesaplanacaktır.

3.3 Sol Yarı s-Düzlemi Sıfırına Sahip Sistemler ($z>0$)

Bu bölümde (3.1) ile verilen transfer fonksiyonuna sahip sistemde $z>0$ olarak alınacaktır. Daha önce de birçok kez bahsedildiği gibi, (3.4) ve (3.5) ile verilen zaman gecikmesiz sistemi kararlı kılan kontrolör kümesi, sistemin açık çevrim kararlı olup olmamasına göre değiştiğinden, zaman gecikmeli sistemi kararlı kılan kontrolörlerin kümesi de bu bağlamda değişkenlik gösterecektir. Bu sebeple bu iki durum ayrı ayrı ele alınacaktır.

3.3.1 Açık çevrim kararlı sistem ($p>0$)

Bu kısımda, (3.1) ile verilen sistemde hem $p>0$, hem de $z>0$ olarak alınacaktır. Bu durumda zaman gecikmesiz sistem (3.4) için verilen kararlılık kümesi, zaman gecikmeli sistemi kararlı kılacak olan kontrolörlerin aranacağı aralık olan (3.8)'le birlikte dikkate alınırsa, p/z 'nin 1'den büyük olup olmamasına göre 2 farklı alt durum oluşacaktır.

3.3.1.1 $p/z > 1$ durumu

Bu durumda (3.1) ile verilen sistemin hem kutup hem de sıfırı sol yarı s düzleminde yer almaktadır, ancak kutup, sıfıra göre orijinden daha uzakta konumlanmıştır. Bu durumda zaman gecikmesiz sistem için kararlılığı sağlayan kontrolör kümesi, yani (3.4) aşağıdaki biçime dönüşecektir:

$$K_p \in \left(-\infty, \frac{-p}{z} \right) \cup (-1, \infty) \quad (3.12)$$

Bu durumda, kutupların sağ yarı s düzlemine geçerken yer alacağı frekansı veren (3.10) ile kararlılığı sağlayan kontrolör kümesinin içinde aranacağı aralık olan (3.8) birlikte düşünülecek olursa, (3.8) içerisinde yer alan hiçbir K_p değeri için böyle bir geçişin olmayacağı görülür. Dolayısıyla sistemin kararlılığı zaman gecikmesinden etkilenmez. O halde bu durum için kapalı çevrimli sistemin kararlılığı tamamen (3.8) tarafından belirlenir ve aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$-1 < K_p < 1 \quad (3.13)$$

Eğer K_p için (3.3) ile verilen ilişki göz önüne alınacak olursa, kararlılığı sağlayan tüm kontrolör kümesi aşağıdaki ifadeyle verilir:

$$-\frac{1}{k_s} < k_p < \frac{1}{k_s} \quad (3.14)$$

3.3.1.2 $p/z < 1$ durumu

Bu durumda (3.1) ile verilen sistemin hem kutup hem de sıfırı sol yarı s düzleminde yer almaktadır, ancak bu sefer sıfır, kutba göre orijinden daha uzakta konumlanmıştır. Bu durumda zaman gecikmesiz sistem için kararlılığı sağlayan kontrolör kümesi, yani (3.4), aşağıdaki biçime dönüşecektir:

$$K_p \in \left(-\infty, -1 \right) \cup \left(\frac{-p}{z}, \infty \right) \quad (3.15)$$

(3.8) ile verilen ve kararlılığı sağlayan kontrolör kümesinin taranacağı aralık içerisinde, aşağıdaki küme içerisinde yer alan kontrolör değerleri için zaman gecikmesiz kapalı çevrimli sistem kararsız olacaktır:

$$-1 < K_p < \frac{-p}{z} \quad (3.16)$$

Daha önce de (3.11) ve akabindeki açıklamalarla belirtildiği üzere, zaman gecikmesinin sisteme ilavesiyle sadece sol yarı s düzleminden sağ yarı s düzlemine kutup geçişi mümkün olabileceğinden, (3.16) ile verilen kontrolör kümesiyle zaman gecikmeli sistemi kararlı kılmak mümkün olamayacaktır. Dolayısıyla, bu kontrolör kümesi (3.8) içerisinde taranan kararlılığı sağlayan kontrolör kümesinden çıkartılabilir. Yani şu an için taranacak yeni aralık aşağıda analitik ifadesi verilmiş olan (3.8)/(3.16) kümesi olacaktır:

$$-\frac{p}{z} < K_p < 1 \quad (3.17)$$

Bu küme içerisinde aşağıda verilen aralıkta kalan kontrolörler ele alınacak olursa:

$$-\frac{p}{z} < K_p < \frac{p}{z} \quad (3.18)$$

Bu küme içerisinde yer alan kontrolörler için zaman gecikmesi sisteme ilave edildiği vakit, (3.10)'un da işin içine katılmasıyla hiçbir kutbun yarı düzlem değiştirmeyeceği görülebilir. Yani (3.18)'de yer alan kontrolörler için sistemin kararlılığı zaman gecikmesinden etkilenmeyecektir. Yine bu kümede yer alan kontrolörler için zaman gecikmesiz sistem kararlı olduğundan, zaman gecikmeli sistem de L'nin değeri ne olursa olsun kararlı olacaktır. Dolayısıyla (3.1) ile verilen sistemi kararlı kılan tüm kontrolörler kümesine bu aralık dahil edilecektir.

(3.8)'in geri kalanı olan ve aşağıda verilen aralıkta yer alan kontrolör kümesi için

$$\frac{p}{z} < K_p < 1 \quad (3.19)$$

(3.10) ile verilen frekanstan olacak şekilde, imajiner eksenden sol yarı s düzleminden sağ yarı s düzlemine eşlenik çiftler halinde kapalı çevrim kutup geçişi olacaktır. Bu kutup geçişine olanak sağlayan L değerleri ise, (2.7) kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\cos(\omega L) = \frac{-\omega^2 - pz}{K_p(\omega^2 + z^2)}, \quad \sin(\omega L) = \frac{\omega(z - p)}{K_p(\omega^2 + z^2)} \quad (3.20)$$

Açık bir şekilde, buradaki p, z ve (3.19) ile verilen K_p değerleri dikkate alındığında, cos(ωL)<0 ve sin(ωL)>0 olacağından, ωL'nin çözüm bölgesinin (π/2, π) olacağı sonucuna varılabilir. Yine (2.9)'dan hareketle bu aralık L₀ için geçerli olacaktır; L_i (i=1,2,...) için genel olarak (2iπ+0.5π, (2i+1)π) aralığı çözüm bölgesi olarak alınabilir.

Zaman gecikmesinin sağ yarı s düzleminden sol yarı s düzlemine kutup geçirme etkisi olmadığı düşünüldüğünde, L_0 değerinin sistemi kararsızlığa götürdüğü rahatlıkla söylenebilir. (3.20) ile verilen denklem setindeki ωL için çözüm bölgesi bulunduğundan denklemler birleştirilebilir ve aşağıdaki ifade edilebilir:

$$L\omega = \arctan\left(\frac{\omega(p-z)}{\omega^2 + pz}\right) \Rightarrow L = \frac{\arctan\left(\frac{\omega(p-z)}{\omega^2 + pz}\right)}{\omega} \quad (3.21)$$

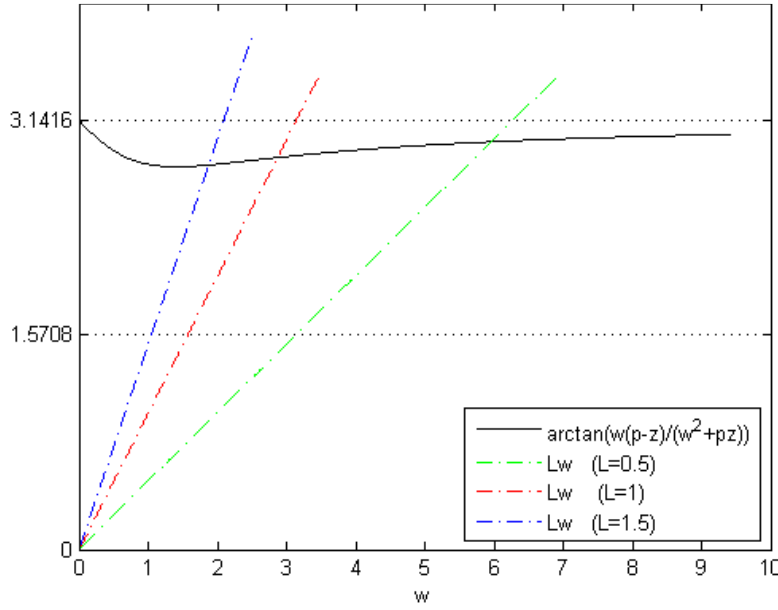
Burada L_0 için arctan fonksiyonunun değer aralığı $(\pi/2, \pi)$ olarak düşünülmelidir.

Sırasıyla (3.21) ve (3.10)'dan görülebileceği üzere, L ω 'nın, ω da K_p 'nin bir fonksiyonudur; yani L de K_p 'nin bir fonksiyonudur. Eğer (3.21) ile verilen L ifadesinin K_p 'ye göre türevi alınacak olursa, bu türevin ilgilenilen K_p aralığı için negatif işarete sahip olduğu ispatlanabilir (ispatın detayları için lütfen Ek A bölümüne bakınız). Bu durum, kapalı çevrimli sistemi kararsızlığa götüren L değerlerinin K_p 'nin artışıyla monoton olarak azaldığını göstermektedir. Problemin başında da (3.1) ile verilen sistemde de belirtildiği gibi, sistem sabit ve bilinen bir zaman gecikmesine (L_s) sahiptir. O halde, sistemi kararsızlığa götüren L değerleri artan K_p ile azaldığından, bu (3.21) ile verilen L değerinin L_s 'e eşit olacağı bir K_p üst sınırı olmak zorundadır. Yani bu üst sınır olarak anılan K_p değerinden daha büyük K_p 'ler için sistemi kararsızlığa götüren L değeri L_s 'ten daha küçük kalacak, bu sebeple bu K_p değerleri için kapalı çevrimli sistem kararsız olacaktır. Eğer anılan K_p değerine $K_{p-kritik}$, ilişkili ω değerine de ω_{kritik} denecek olursa, $K_{p-kritik}$ ve ω_{kritik} aşağıda verilen ilişkileri sağlayacaktır:

$$L_s \omega_{kritik} = \arctan\left(\frac{\omega_{kritik}(p-z)}{\omega_{kritik}^2 + pz}\right) \quad (3.22)$$

$$\omega_{kritik}^2 = \frac{K_{p-kritik}^2 z^2 - p^2}{1 - K_{p-kritik}^2} \quad (3.23)$$

(3.22) ile verilen ifadenin $p=1$, $z=2$ ve L_s 'in değişik değerleri için oluşturulan grafiği şekil 2'de gösterilmiştir. Bu şekilden de rahatça görülebileceği üzere, ilişkili denklemin çözülebilmesi açısından L_s üzerinde herhangi bir kısıt uygulamaya gerek yoktur; bir başka deyişle İVEBZG gibi bir durum ortaya çıkmamaktadır.



Şekil 3.1 : (3.22)'nin $z=2$, $p=1$ ve çeşitli L_s değerleri için grafiksel görünümü.

Eğer (3.22) ile verilen ifadede $A=L_s\omega_{kritik}$ olacak şekilde bir değişken dönüşümü yapılacak olursa, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$A = \arctan\left(\frac{AL_s(p-z)}{A^2 + L_s^2 pz}\right) \quad (3.24)$$

Bu denklemin $(\pi/2, \pi)$ aralığındaki çözümü A_0 olarak adlandırılınsın. Bu durum (3.23)'te yerine konur ve $K_{p-kritik}$ oluşacak ifadeden çekilecek olursa, $K_{p-kritik}$ aşağıdaki gibi elde edilir:

$$K_{p-kritik} = \sqrt{\frac{A_0^2 + L_s^2 p^2}{A_0^2 + L_s^2 z^2}} \quad (3.25)$$

Rahatça tespit edilebileceği üzere $K_{p-kritik}$, (3.19) ile belirtilen sınırlar içerisinde yer almaktadır. Kararlılığı sağlayan tüm K_p değerlerini oluşturmak adına (3.25) ile (3.18) bir araya getirilecek olursa, kararlılığı sağlayan tüm K_p değerleri aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\frac{-p}{z} < K_p < \sqrt{\frac{A_0^2 + L_s^2 p^2}{A_0^2 + L_s^2 z^2}} \quad (3.26)$$

Yine (3.3) ile kontrolör parametresinin kendisine geçilecek olursa, kararlılığı sağlayan tüm kontrolör değerleri aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\frac{-p}{zk_s} < k_p < \sqrt{\frac{A_0^2 + L_s^2 p^2}{A_0^2 k_s^2 + L_s^2 z^2 k_s^2}} \quad (3.27)$$

Daha önce de belirtildiği gibi A_0 , (3.24) ile verilen denklemin $(\pi/2, \pi)$ aralığındaki çözümüdür.

3.3.2 Açık çevrim kararsız sistem ($p < 0$)

Bu durumda, (3.1) ile verilen sistemde kutbun sağ yarı s düzleminde ($p < 0$), sıfırın ise sol yarı s düzleminde konumlandığı ($z > 0$) varsayılacaktır. Açık çevrim kararlı sistemde vuku bulduğu gibi, (3.5) ile verilen zaman gecikmesiz sistemi kararlı kılan kontrolör kümesinin, (3.8) ile kesişimi değişeceğinden kutup ve sıfırın bağlı yerleşimine göre iki farklı durum ortaya çıkacaktır.

3.3.2.1 $|p/z| > 1$ durumu

Bu durumda, (3.1) ile verilen sistemde sol yarı s düzlemindeki sıfır, sağ yarı s düzlemindeki kutba nazaran orijine daha yakın konumlanmıştır. Böyle bir durumda zaman gecikmeli sistem için kararlılığı sağlayan kontrolör kümesinin içinde aranacağı aralık olan (3.8) ile zaman gecikmesiz sistemi kararlı kılan aralık olan (3.5)'in bir kesişim kümesi olmayacaktır. Zaman gecikmesinin de sağ yarı s düzleminde sol yarı s düzlemine kutup geçirme etkisi olmadığından, bu alt durum için zaman gecikmeli sistemi P tipi kontrolörle kararlı kılabilme mümkün olmayacaktır; bir başka deyişle, bu alt durum için (3.1) ile verilen sistemi kararlı kılacak olan P tipi kontrolörlerin kümesi boş kümeden ibaret olacaktır.

$$K_p = \emptyset \quad (3.28)$$

3.3.2.2 $|p/z| < 1$ durumu

Bu durumda (3.1) ile verilen sistemde sol yarı s düzlemindeki sıfır, sağ yarı s düzlemindeki kutba nazaran orijine daha uzak konumlanmıştır. (3.5) ile verilen zaman gecikmesiz sistemi kararlı kılan K_p değerleri göz önüne alınarak, (3.8)'in içinde kalan K_p değerlerinden aşağıda verilen aralıkta yer alanlar için

$$-1 < K_p < -\frac{p}{z} \quad (3.29)$$

Zaman gecikmesiz sistem kararlı olacaktır. Yine (3.11)'den hareketle, zaman gecikmesinin sağ yarı s düzleminde sol yarı s düzlemine kutup geçirme özelliği

bulunmadığından, (3.29)'da yer alan K_p değerleri için zaman gecikmeli sistemi kararlı kılmak mümkün olmayacaktır. Dolayısıyla bu K_p değerleri (3.8)'den çıkarılarak yola devam edilebilir.

(3.8)'in geri kalan kısmı olan ve aşağıda verilen K_p değerleri için

$$-\frac{p}{z} < K_p < 1 \quad (3.30)$$

Sisteme zaman gecikmesi ilave edilip artırıldıkça, (3.2) ile verilen kapalı çevrimli sistemin karakteristik ifadesinin köklerini, sol yarı s düzleminde sağ yarı s düzlemine (3.10) ile verilen frekanstan eşlenik çiftler halinde geçecektir. (2.7)'den hareketle bu geçişe sebebiyet veren ilişkili L değerleri ise aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\cos(\omega L) = \frac{-\omega^2 - pz}{K_p(\omega^2 + z^2)}, \quad \sin(\omega L) = \frac{\omega(z - p)}{K_p(\omega^2 + z^2)} \quad (3.31)$$

Bir önceki bölümde de tartışıldığı üzere, bu denklem sisteminin çözümü, yani ωL , L_0 için $(0, \pi)$ aralığında, L_i ($i=1,2,3,\dots$) için $(2i\pi, (2i+1)\pi)$ aralığında olacaktır.

Yine daha önceki bölümde de ifade edildiği gibi, zaman gecikmesinin sağ yarı s düzleminde sol yarı s düzlemine kutup geçirme etkisi olmadığı düşünüldüğünde, L_0 değerinin sistemi kararsızlığa götürdüğü rahatlıkla söylenebilir. Çözüm aralığı belirlendiği için, (3.31) ile verilen denklem sistemi, tek bir denklem meydana getirecek şekilde aşağıdaki gibi birleştirilebilir:

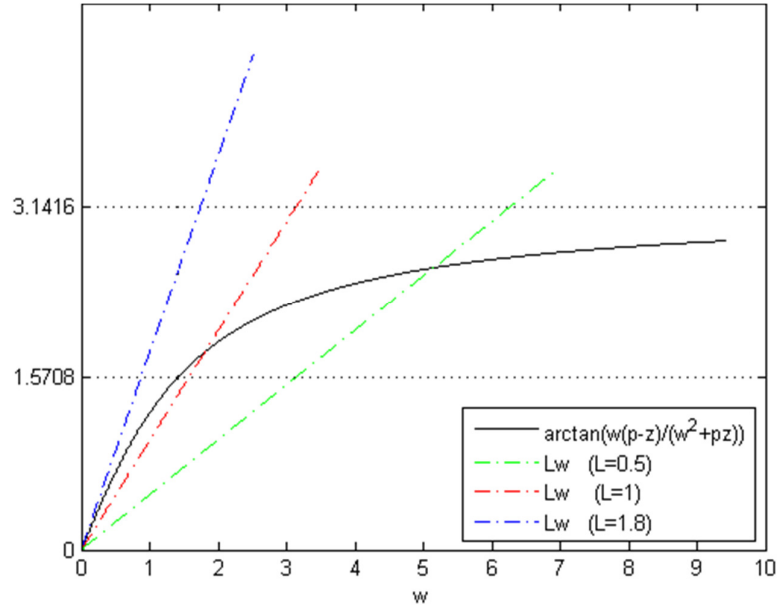
$$L\omega = \arctan\left(\frac{\omega(p - z)}{\omega^2 + pz}\right) \Rightarrow L = \frac{\arctan\left(\frac{\omega(p - z)}{\omega^2 + pz}\right)}{\omega} \quad (3.32)$$

Daha önceki bölümde izlenen stratejiye binaen, L 'nin yine K_p 'nin fonksiyonu olduğu söylenebilir. Eğer, L 'nin K_p 'ye göre türevi alınacak olursa, bu türevin negatif işaretli olduğu ispatlanabilir (ispatın detayları Ek B'de yer almaktadır). O halde sistemi kararsızlığa götürecek olan L değerleri K_p 'nin artmasıyla birlikte monoton bir şekilde azalmaktadır. Bölümün başında da belirtildiği üzere (3.1) ve (3.2) ile ifade edilen sistemin sabit ve bilinen bir zaman gecikmesi ($L = L_s$) olduğundan, sistemi kararsızlığa götüren L değerinin L_s 'e eşit olmasını sağlayacak bir K_p üst sınırı olacaktır. Daha önce de yapıldığı üzere, bu K_p ve ilişkili ω değerine sırasıyla $K_{p\text{-kritik}}$ ve ω_{kritik} denecek olursa, $K_{p\text{-kritik}}$ ve ω_{kritik} aşağıda verilen denklemleri sağlayacaktır:

$$L_s \omega_{kritik} = \arctan \left(\frac{\omega_{kritik} (p - z)}{\omega_{kritik}^2 + pz} \right) \quad (3.33)$$

$$\omega_{kritik}^2 = \frac{K_{p-kritik}^2 z^2 - p^2}{1 - K_{p-kritik}^2} \quad (3.34)$$

(3.33) ile ifade edilen denklemin grafiği $p=-1$, $z=2$ ve değişik L_s değerleri için şekil 3.3'te görülmektedir.



Şekil 3.3 : (3.33)'ün $z=2$, $p=-1$ ve çeşitli L_s değerleri için grafiksel görünümü.

Bu grafikten de hareketle, bazı L_s değerleri için (3.33)'ün çözümünün olmayabileceği rahatlıkla görülebilir (örneğin $L_s=1.8$ sn için çözüm yoktur). O halde bu denklemin bir çözümünün olabilmesi için, L_s için bir kısıt mevcut olmalıdır. Diğer bir deyişle, (3.1) ile verilen sistemin kararlı kılınabilir olabilmesi için bu durum aşağıdaki teoremle ifade edilebilir:

Teorem 3.1: (3.1) ile verilen ve karakteristik ifadesi (3.2) şeklinde olan açık çevrim kararsız ($p < 0$) ve sıfırı sol yarı düzlemde olan ($z > 0$) bir sistemin bir P tipi kontrolörle kararlı kılınabilmesi için sistemin zaman gecikmesi üzerinde bir üst sınır vardır. Bu üst sınır İzin Verilen En Büyük Zaman Gecikmesi – İVEBZG (Maximum Allowable Time-Delay) olarak adlandırılır ve aşağıdaki şekilde formülize edilebilir:

$$\dot{IVEBZG} := \frac{z - p}{-pz} \quad (3.35)$$

Bir başka deyişle, (3.1) ile verilen sistemin, bir P tipi kontrolörle kararlı kılınabilmesi için $L_s < \dot{I}VEBZG$ koşulu sağlanmalıdır.

Buna ilaveten, teoremin başında ifade edilen koşulları sağlayan sistem için $\dot{I}VEBZG$ 'nin supremum değeri, sistem sıfırı ve kutbu orijine göre simetrikken elde edilir, ve bu değer 2τ 'ya eşittir ($\tau = 1/p$, sistemin zaman sabitidir). Aynı şekilde, $\dot{I}VEBZG$ 'in infimum değeri sistem sıfırı sonsuza gittiğinde elde edilir ve bu değer de τ 'ya eşittir (detaylı ispat Ek C'de verilmiştir).

Sistemin sahip olduğu zaman gecikmesinin $\dot{I}VEBZG$ 'den küçük olduğu varsayımıyla, $A = L_s \omega_{kritik}$ şeklinde bir değişken dönüşümü yapılır ve bu durum (3.33)'te dikkate alınacak olursa, aşağıdaki denklem elde edilir:

$$A = \arctan \left(\frac{AL_s(p-z)}{A^2 + L_s^2 pz} \right) \quad (3.36)$$

Bu denklemin $(0, \pi)$ aralığındaki çözümü A_0 olsun. Yine bir önceki bölümde izlenen stratejinin aynısı burada da takip edilecek olursa, kapalı çevrimli sistemi kararsızlığa götürecek olan L değerini, sistemin zaman gecikmesine eşit yapan $K_{p-kritik}$ değeri aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$K_{p-kritik} = \sqrt{\frac{A_0^2 + L_s^2 p^2}{A_0^2 + L_s^2 z^2}} \quad (3.37)$$

Bu sınır değeri (3.30) ile birleştirilecek olursa, kararlılığı sağlayan tüm K_p değerleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{-p}{z} < K_p < \sqrt{\frac{A_0^2 + L_s^2 p^2}{A_0^2 + L_s^2 z^2}} \quad (3.38)$$

Yine (3.3) ile kontrolör parametresinin kendisine geçilecek olursa, kararlılığı sağlayan tüm kontrolör değerleri aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\frac{-p}{zk_s} < k_p < \sqrt{\frac{A_0^2 + L_s^2 p^2}{A_0^2 k_s^2 + L_s^2 z^2 k_s^2}} \quad (3.39)$$

Burada A_0 , (3.36) ile verilen denklemin $(0, \pi)$ aralığındaki çözümüdür.

3.4 Sağ Yarı s Düzlemi Sıfırına Sahip Sistem ($z < 0$)

Bu bölümde, (3.1) ile verilen sistemde, sıfırın sağ yarı s düzleminde olduğu varsayılacaktır. Zaman gecikmesiz sistemi kararlı kılan kontrolör kümeleri ((3.6)-(3.7)) ve bu kümelerin (3.8) ile kesişimleri, sistemin açık çevrim kararlı veya kararsız olmasına göre değiştiğinden, bu iki durum ayrı ayrı ele alınacaktır.

Ayriyeten, bu bölümde izlenecek yöntemler daha önceki bölümle önemli benzerlikler içerdiğinden, bu bölümdeki çıkarımlara daha ayrıntısız olarak yer verilecektir.

3.4.1 Açık çevrim kararlı sistem ($p > 0$)

Bu alt bölümde, (3.1) ile verilen sistemde kutup sol yarı s düzleminde, sıfır ise sağ yarı s düzleminde. Zaman gecikmesiz sistemi kararlı kılan aralık olan (3.6) ile zaman gecikmeli sistemi kararlı kılacak kontrolörlerin içinde aranacağı küme olan (3.8)'in kesişimi değişkenlik göstereceğinden, kutup ve sıfırın bağıl yerleşimine göre iki farklı alt durum ortaya çıkacak, bu durumlar da ayrı ayrı analiz edilecektir.

3.4.1.1 $|p/z| > 1$ durumu

Bu durumda sağ yarı düzlemde bulunan sıfır, sol yarı düzlemde bulunan kutba nazaran orijine daha yakındır. 3.3.1.1 nolu bölümde de izlenen stratejiye benzer bir şekilde, (3.6), (3.8) ve (3.10) bir arada düşünüldüğünde, (3.8) ile verilen aralığın tamamı için zaman gecikmeli sistemde sol yarı s düzleminde sağ yarı s düzlemine kutup geçişi hiçbir L değeri için olamayacaktır. Bu sebeple, bu alt durum için (3.1) ile verilen sistemi kararlı kılan kontrolör kümesi (3.8)'in tamamı olacak, bu durum da (3.3) ile verilen ilişkiyle bir araya getirildiğinde, kararlılığı sağlayan tüm kontrolör kümesi aşağıdaki ifadeye eşit olacaktır:

$$-\frac{1}{k_s} < k_p < \frac{1}{k_s} \quad (3.40)$$

3.4.1.2 $|p/z| < 1$ durumu

Bu alt durumda da (3.1) ile verilen sistemde sağ yarı s düzlemindeki sıfır, sol yarı s düzlemindeki kutba göre orijine daha uzakta konumlanmıştır. Bölüm 3.3.1.2'de yapıldığı gibi, yine (3.6) ve (3.8)'den hareketle, aşağıda verilen kontrolör kümesi için zaman gecikmeli sistemi kararlı kılmak mümkün olamayacaktır:

$$-\frac{p}{z} < K_p < 1 \quad (3.41)$$

Yine (3.8)'den geri kalan aralığın bir bölümü olan ve aşağıda verilen kontrolör kümesi için

$$\frac{p}{z} < K_p < -\frac{p}{z} \quad (3.42)$$

Zaman gecikmesiz sistem kararlıdır. (3.10)'un dikkate alınmasıyla, zaman gecikmeli sistemin kararlılığının, zaman gecikmesinden etkilenmeyeceği rahatlıkla söylenebilir. Bu sebeple, (3.42) ile verilen aralık, kararlılığı sağlayan tüm P tipi kontrolörlerin kümesine dahil edilecektir.

(3.8)'den geriye kalan aralık olan ve ifadesi aşağıda verilen

$$-1 < K_p < \frac{p}{z} \quad (3.43)$$

Kontrolör kümesi için zaman gecikmesiz sistem kararlıdır. Zaman gecikmesinin sisteme ilave edilip, değerinin artırılmasıyla, (3.2)'nin kökleri, sol yarı s düzleminden sağ yarı s düzlemine, eşlenikler halinde (3.10) ile verilen frekanstan geçecektir. İlişkili L değeri ise yine aşağıda verilen ifadelerden bulunacaktır:

$$\cos(\omega L) = \frac{-\omega^2 - pz}{K_p(\omega^2 + z^2)}, \quad \sin(\omega L) = \frac{\omega(z - p)}{K_p(\omega^2 + z^2)} \quad (3.44)$$

Daha önceden de belirtildiği gibi, sistemi kararsızlığa götüren L değeri L_0 olacağından, denklemin sisteminin çözümü $(0, \pi)$ aralığında aranacaktır. ωL için çözüm aralığı belirlendiği için (3.44), tek bir denklem oluşturacak şekilde birleştirilebilir:

$$L\omega = \arctan\left(\frac{\omega(p - z)}{\omega^2 + pz}\right) \Rightarrow L = \frac{\arctan\left(\frac{\omega(p - z)}{\omega^2 + pz}\right)}{\omega} \quad (3.45)$$

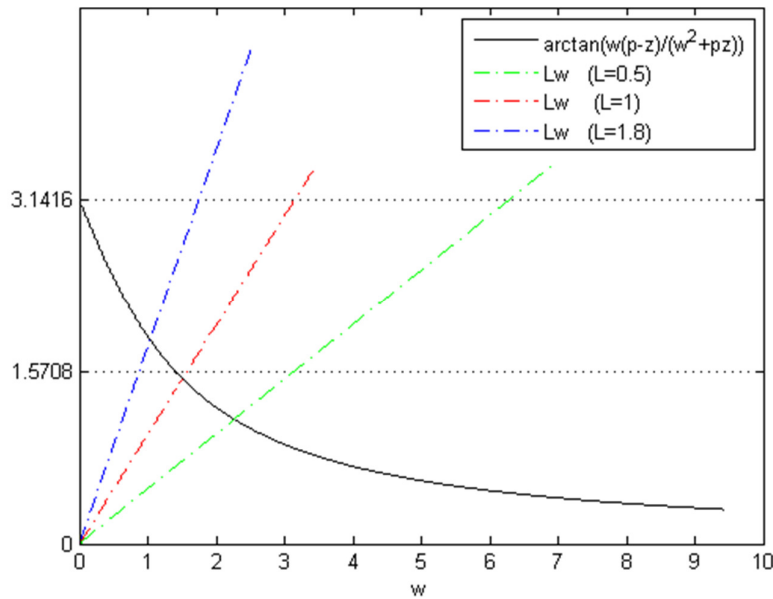
Daha önceki bölümlerde de yapıldığı üzere, eğer L'nin K_p 'ye göre türevi alınacak olursa, bu türevin pozitif işarete sahip olduğu direkt olarak görülebilir (Ek A'da bu durumda da değinilmiştir.) O halde (3.1) ile verilen sistemi kararsızlığa götüren L değerleri, artan K_p ile artmaktadır. İlgilenilen K_p aralığının negatif olduğu düşünülecek olursa, bu kritik L değerini sistemin bilinen ve sabit zaman gecikmesine (L_s) eşit kılacak negatif bir K_p alt sınırı olduğu rahatlıkla söylenebilir. Daha önceki

bölümlerdekine benzer şekilde bu K_p değerine $K_{p-kritik}$ ve ilişkili ω değerine ω_{kritik} denecek olursa, bunlar aşağıdaki ilişkileri sağlarlar:

$$L_s \omega_{kritik} = \arctan \left(\frac{\omega_{kritik} (p - z)}{\omega_{kritik}^2 + pz} \right) \quad (3.46)$$

$$\omega_{kritik}^2 = \frac{K_{p-kritik}^2 z^2 - p^2}{1 - K_{p-kritik}^2} \quad (3.47)$$

(3.46) ile verilen denkleme ilişkin grafik ($p=1$, $z=-2$ ve çeşitli L_s değerleri için) aşağıda şekil 3.4'te görülmektedir.



Şekil 3.4 : (3.46)'nın $p=1$ $z=-2$ ve çeşitli L_s değerleri için grafiksel görünümü.

Şekil 3.4'ten de açık bir şekilde görülebileceği üzere, (3.46)'nın $(0, \pi)$ aralığında çözümü L_s ne olursa olsun var olacaktır. Haliyle bu durumda L_s üzerinde herhangi bir kısıtlama olmayacaktır; yani İVEBZG durumu ortaya çıkmayacaktır.

Yine, $A=L_s \omega_{kritik}$ değişken dönüşümü yapılır, bu durum (3.46)'da dikkate alınır ve (3.47) de uygun bir şekilde düzenlenirse, $K_{p-kritik}$ aşağıdaki şekilde bulunur:

$$K_{p-kritik} = -\sqrt{\frac{A^2 + L_s^2 p^2}{A^2 + L_s^2 z^2}} \quad (3.48)$$

Bu kritik değerle birlikte, daha önceden kararlılığı sağlayan kümeye dahil edilen (3.42) birleştirilir ve (3.3) de işin içine katılırsa, incelenen bu durum için (3.1) ile verilen sistemi kararlı kılan tüm P tipi kontrolör kümesi aşağıdaki ifadeyle verilebilir:

$$-\sqrt{\frac{A_0^2 + L_s^2 p^2}{A_0^2 k_s^2 + L_s^2 z^2 k_s^2}} < K_p < \frac{-p}{zk_s} \quad (3.49)$$

Yorum 1: (3.49) ile verilen kontrolör kümesi, (3.27) ile verilen ve sol yarı s-düzlemi sıfırına sahip – açık çevrim kararsız sistem için kararlılığı sağlayan kontrolör kümesiyle sembolik olarak benzetilmektedir; bu kümeler sembolik olarak bakıldığında simetriktirler. Ancak, eşit zaman zaman gecikmesine (L_s), aynı kutup (p) ve orijine göre simetrik sıfır (z) yerleşimine sahip iki sistem için, (3.49) ile verilen kararlılık kümesi içindeki A_0 değeri, (3.27) ile verilen kümedeki A_0 değerinden her zaman küçük kalacaktır; bu durumda da (3.49), (3.27)'ye göre daha dar bir küme ifade edecektir. Bir başka deyişle, (3.1) ile verilen ve $L = L_{s1}$, $p=p_1>0$, $z=z_1<0$ biçiminde olan bir sistemi kararlı kılan tüm P tipi kontrolörlerin kümesinin negatifi, parametreleri $L_{s2}=L_{s1}$, $p_2=p_1$ ve $z_2=-z_1$ biçiminde verilen bir sistemi kesinlikle kararlı kılacaktır.

İspat: Yukarıda sözü edilen ve (3.1) biçiminde olan sistemlerden ilkinin L_{s1} zaman gecikmesine, $p=p_1>0$ ve $z=z_1<0$ kutup yerleşimine sahip olduğu, ikincisinin de zaman gecikmesi $L_{s2}=L_{s1}$ olacak şekilde, $p_2=p_1$ ve $z_2=-z_1$ biçiminde kutup sıfır yerleşimine sahip olduğu varsayalım. Hatırlanacağı üzere, A parametresi $A = L_s \omega_{kritik}$ olarak tanımlanmıştır ve A_{0k} ($k=1,2$) çözümleri de

$$A = \arctan \left(\frac{AL_{sk}(p_k - z_k)}{A^2 + L_{sk}^2 p_k z_k} \right) \quad (k=1,2) \quad (3.50)$$

Denkleminin sırasıyla $(0, \pi)$ ve $(\pi/2, \pi)$ aralığındaki çözümleri olacaktır. O halde $A_{01}<A_{02}$ ilişkisini göstermek (3.49)'un (3.27)'ye göre daha dar bir küme belirttiğini ispatlamak için yeterli olacaktır. p_k ve z_k ($k=1,2$) üzerindeki varsayımlar ve (3.50)'den hareketle $L_{sk}<\pi/2\sqrt{|p_k z_k|}$ değerinden küçük L_s değerleri için A_{01} $(0, \pi/2)$, A_{02} ise $(\pi/2, \pi)$ aralığında olacaktır; o sebeple $\pi/2\sqrt{|p_k z_k|}$ 'den daha küçük zaman gecikmesi değerleri için $A_{01}<A_{02}$ ilişkisi direkt olarak gösterilebilir. $L_{sk}>\pi/2\sqrt{|p_k z_k|}$ değerleri için ise (3.50) ile verilen eşitliğin sağ tarafındaki arctan fonksiyonunun parametresi $k=1$ için $k=2$ 'ye göre her zaman daha küçüktür. Öyle ki:

$$\frac{AL_{s1}(p_1 - z_1)}{A^2 + L_{s1}^2 p_1 z_1} < \frac{AL_{s2}(p_2 - z_2)}{A^2 + L_{s2}^2 p_2 z_2} \quad (3.51)$$

Eşitsizliği geçerli olacaktır. Bu durumda da aşağıda yazılan eşitsizlik geçerli olacaktır:

$$\frac{\pi}{2} < \arctan\left(\frac{AL_{s1}(p_1 - z_1)}{A^2 + L_{s1}^2 p_1 z_1}\right) < \arctan\left(\frac{AL_{s2}(p_2 - z_2)}{A^2 + L_{s2}^2 p_2 z_2}\right) < \pi \quad (3.52)$$

Yine (3.50) ve A_{01} , A_{02} tanımlarından hareketle, aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$\frac{\pi}{2} < A_{01} < A_{02} < \pi \quad (3.53)$$

Bu şekilde de (3.49)'un (3.27)'ye göre daha dar bir küme belirttiği ispatlanmış olacaktır. ■

3.4.2 Açık çevrim kararsız sistem ($p < 0$)

Bu alt bölümde (3.1) ile verilen sistemde hem kutup, hem de sıfır sağ yarı s düzleminde. Daha önce de yapıldığı gibi zaman gecikmesiz sistemi kararlı kılan kontrolör kümesi olan (3.7) ile zaman gecikmeli sistemi kararlı kılabilecek kontrolörlerin aranacağı aralık olan (3.8)'in kesişim kümesi farklılık göstereceğinden, sıfır ve kutbun bağlı yerleşimine göre iki farklı durum ortaya çıkacaktır.

3.4.2.1 $p/z > 1$ durumu

Bu alt durumda, (3.1) ile verilen sistemde sağ yarı s düzlemindeki kutup, sağ yarı s düzlemindeki sıfıra nazaran, orijine göre daha sağda, yani daha uzakta konumlanmıştır. Bu durumda zaman gecikmesiz sistemi kararlı kılan kontrolör kümesi olan (3.7) ile, zaman gecikmesine sahip sistemi kararlı kılabilecek olan kontrolörlerin içinde aranacağı küme olan (3.8)'in herhangi bir kesişim kümesi olmayacaktır. Yine (3.11)'den de zaman gecikmesinin sağ yarı s düzleminde sol yarı s düzlemine herhangi bir kutup geçirme etkisi bulunmadığı açık olduğundan, (3.1) ile verilen sistemi bu şartlar altında P-tipi kontrolörle kararlı kılmak mümkün olmayacaktır. Yani bu durum için kararlılığı sağlayan tüm oransal kontrolörlerin kümesi boş küme olacaktır:

$$K_p = \emptyset \quad (3.54)$$

3.4.2.2 $p/z < 1$ durumu

Bu alt durumda, (3.1) ile verilen sistemde sağ yarı s düzlemindeki sıfır, sağ yarı s düzlemindeki kutba nazaran daha sağda, yani orijinden daha uzak olacak şekilde konumlanmıştır. Daha önceki bölümlerde izlenen yönteme paralel olarak, (3.7)-(3.8)

'den hareketle, aşağıda verilen kontrolör kümesi için zaman gecikmeli sistemi kararlı kılmak mümkün olamayacaktır:

$$-\frac{p}{z} < K_p < 1 \quad (3.55)$$

Dolayısıyla bu küme, (3.8)'den çıkartılabilir. (3.8)'den arda kalan kısım olan:

$$-1 < K_p < -\frac{p}{z} \quad (3.56)$$

Aralığında yer alan kontrolörler için, uygun bir L değeri için sol yarı s düzleminde sağ yarı s düzlemine (3.10) ile verilen frekanstan eşlenik çiftler halinde kutup geçişi olacaktır. Bu geçişe olanak tanıyan L değeri ise aşağıdaki denklem sisteminin çözümüdür:

$$\cos(\omega L) = \frac{-\omega^2 - pz}{K_p(\omega^2 + z^2)}, \quad \sin(\omega L) = \frac{\omega(z - p)}{K_p(\omega^2 + z^2)} \quad (3.57)$$

Bu denklemlerden de hareketle ωL değerinin $(0, \pi/2)$ aralığında yer alacağı açıktır. Denklemler birleştirilirse aşağıdaki ifade elde edilir:

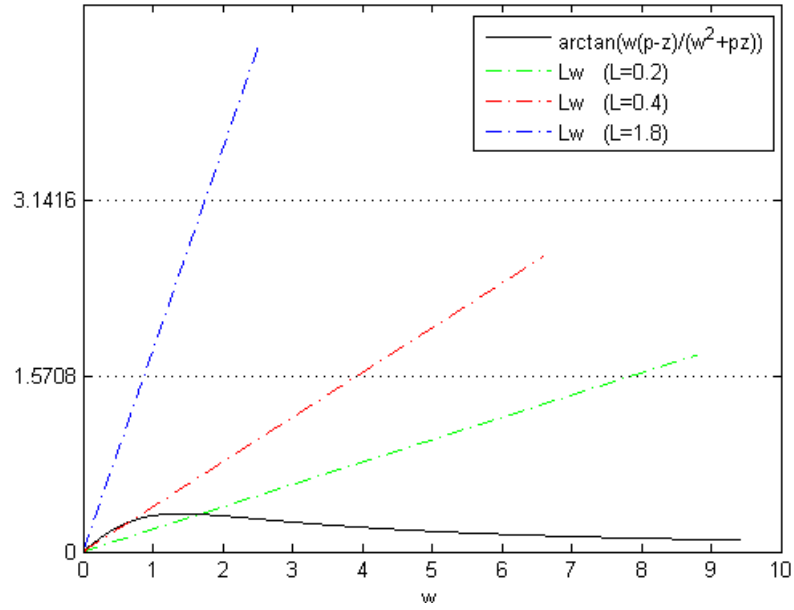
$$L\omega = \arctan\left(\frac{\omega(p - z)}{\omega^2 + pz}\right) \Rightarrow L = \frac{\arctan\left(\frac{\omega(p - z)}{\omega^2 + pz}\right)}{\omega} \quad (3.58)$$

Daha önceki bölümlerde yapıldığı gibi, L ifadesinin K_p 'ye göre türevi alınacak olursa, bu türevin pozitif olduğu gösterilebilir (bu gösterime ilişkin detaylar Ek D'de yer almaktadır). O halde, kapalı çevrimli sistemi kararsızlığa götüren L değeri, artan K_p ile birlikte artmaktadır. (3.1) ile verilen sistem, bilinen ve sabit bir zaman gecikmesine (L_s) sahip olduğu için, sistemi kararsızlığa götüren bu zaman gecikmesini L_s 'e eşit kılacak bir K_p alt sınırı bulunacaktır. Bu kritik değere $K_{p-kritik}$, ilişkili ω değerine ω_{kritik} denecek olursa, bu iki değişken, aşağıdaki ifadeleri sağlayacaktır:

$$L_s \omega_{kritik} = \arctan\left(\frac{\omega_{kritik}(p - z)}{\omega_{kritik}^2 + pz}\right) \quad (3.59)$$

$$\omega_{kritik}^2 = \frac{K_{p-kritik}^2 z^2 - p^2}{1 - K_{p-kritik}^2} \quad (3.60)$$

(3.59)'un grafiksel gösterilimi $p=-1$, $z=-2$ ve değişik L değerleri için şekil 3.5'te gösterilmektedir:



Şekil 3.5 : (3.59)'un $p=-1$ $z=-2$ ve çeşitli L_s değerleri için grafiksel görünümü.

Şekil 3.5'ten de görüleceği üzere, burada da (3.59)'un çözümünün olabilmesi için L_s 'in bir üst sınırının var olması gerekmektedir. İVEBZG adı verilen L üzerinde oluşacak bu kısıt, bölüm 3.3.2.2'dekiyle analitik olarak aynı olacaktır:

$$L_s < \dot{I}VEBZG = \frac{z-p}{-pz} \quad (3.61)$$

Çıkarımın detaylarına Ek C'de yer verilmiştir. Daha önceki bölümlerde de uygulandığı üzere, $A=L_s\omega_{kritik}$ değişken dönüşümü (3.59)'da dikkate alınır ve (3.60)'tan da $K_{p-kritik}$ çekilecek olursa, $K_{p-kritik}$ aşağıdaki gibi bulunur:

$$K_{p-kritik} = -\sqrt{\frac{A_0^2 + L_s^2 p^2}{A_0^2 + L_s^2 z^2}} \quad (3.62)$$

Bu durum (3.56)'yla ve (3.3)'le birlikte dikkate alınacak olursa, bu alt durum için kararlılığı sağlayan tüm P tipi kontrolörlerin kümesi aşağıdaki ifadeyle verilebilir:

$$-\sqrt{\frac{A_0^2 + L_s^2 p^2}{A_0^2 k_s^2 + L_s^2 z^2 k_s^2}} < k_p < -\frac{p}{zk_s} \quad (3.63)$$

Burada A_0 (3.59)'da $A=L_s\omega_{kritik}$ değişken dönüşümü yapılmış olan

$$A = \arctan \left(\frac{AL_s(p-z)}{A^2 + L_s^2 pz} \right) \quad (3.64)$$

Denkleminin $(0, \pi/2)$ aralığındaki çözümüdür.

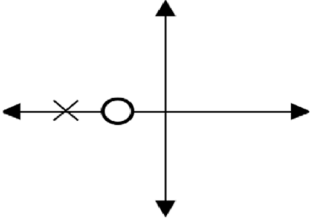
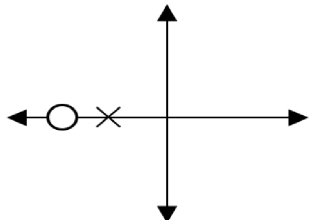
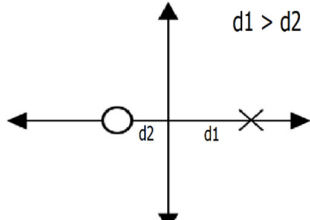
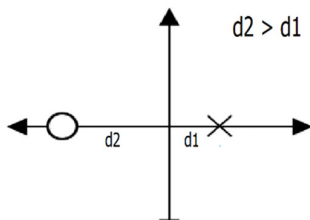
Yorum 2: (3.61) ile verilen ve sembolik olarak (3.35) ile aynı olan İVEBZG değerinin supremum ve infimum değeri bu alt bölüm için farklıdır. Bu durumda, İVEBZG'nin supremum değeri τ 'dur ve sistem sıfırı $s = \infty$ 'dayken elde edilir. Yine sistem sıfırı kutba doğru yaklaştıkça İVEBZG azalır ve sıfır, kutupla aynı yerde yer aldığı anda infimum değerine (0) ulaşır (ispatın detaylarına Ek C'de yer verilmiştir).

Yorum 3: Bölüm 3.4.1.2'de yer alan yorum 1'dekine paralel olarak, (3.63)'te yer alan kararlılık kümesi sembolik olarak (3.49)'da yer alan kararlılık kümesine benzemektedir; hatta sembolik olarak bakıldığında, (3.63), (3.49)'un negatimidir. Ancak aynı zaman gecikmesine, aynı kutup ve simetrik sıfır yerleşimine sahip iki sistem için, (3.63)'teki A_0 değeri, (3.49)'dakine kıyasla daha küçük olacağından, (3.63), (3.49)'a nazaran daha dar bir küme ifade edecektir. Bir başka deyişle, (3.1)'le verilen ve $L=L_{s1}$, $p=p_1<0$, $z=z_1<0$ şeklinde olan bir sistemi kararlı kılan kontrolör kümesinin negatifi, yine (3.1)'le verilen, $L_{s2}=L_{s1}$, $p_2=p_1$ ve $z_2=-z_1$ olan sistemi de kesinlikle kararlı kılacaktır.

İspat: İspatın tamamı yorum 1'dekiyle aynı olacağından, oradaki ispatın adımları takip edilerek yorum 3'ün ispatı tamamlanabilir.

Bu bölümde yer alan sonuçların ve çıkarımların görselleştirilmiş ve özetlenmiş halleri çizelge 3.1 ve çizelge 3.2'de bulunabilir. Bu çizelgeler ve içindeki sonuçlar, (3.1) ile verilen sistem ve bu sistem için P-tipi kontrolör tasarlayan bir tasarımcı tarafından doğrudan kullanılabilir.

Çizelge 3.1 : Transfer fonksiyonu (3.1) ile verilen ve minimum fazlı kapalı çevrimli sistem ($z > 0$) için elde edilen sonuçların özeti.

MİNİMUM FAZLI KAPALI ÇEVİRİMLİ SİSTEM ($z > 0$)			
	DURUM	İzin Verilen En Büyük Zaman Gecikmesi (İVEBZG)	KARARLILIĞI SAĞLAYAN TÜM k_p ARALIĞI
Açık Çevrim Kararlı Sistem ($p > 0$)		YOK	$-\frac{1}{k_s} < k_p < \frac{1}{k_s}$
		YOK	$-\frac{p}{zk_s} < k_p < \sqrt{\frac{A_0^2 + L_s^2 p^2}{A_0^2 k_s^2 + L_s^2 z^2 k_s^2}}$ $A_0, A = \arctan\left(\frac{AL_s(p-z)}{A^2 + L_s^2 pz}\right)$ denkleminin $(\pi/2, \pi)$ aralığındaki çözümüdür.
Açık Çevrim Kararsız Sistem ($p < 0$)		YOK	$K_p = \emptyset$
		$L_s < \frac{z-p}{-pz}$	$-\frac{p}{zk_s} < k_p < \sqrt{\frac{A_0^2 + L_s^2 p^2}{A_0^2 k_s^2 + L_s^2 z^2 k_s^2}}$ $A_0, A = \arctan\left(\frac{AL_s(p-z)}{A^2 + L_s^2 pz}\right)$ denkleminin $(0, \pi)$ aralığındaki çözümüdür.

Çizelge 3.2 : Transfer fonksiyonu (3.1) ile verilen ve minimum fazlı olmayan kapalı çevrimli sistem ($z < 0$) için elde edilen sonuçların özeti.

MİNİMUM FAZLI OLMAYAN KAPALI ÇEVİRİMLİ SİSTEM ($z < 0$)			
	DURUM	İzin Verilen En Büyük Zaman Gecikmesi (İVEBZG)	KARARLILIĞI SAĞLAYAN TÜM k_p ARALIĞI
Açık Çevrim Kararlı Sistem ($p > 0$)	$d1 > d2$	YOK	$\frac{-1}{k_s} < k_p < \frac{1}{k_s}$
	$d2 < d1$	YOK	$-\sqrt{\frac{A_0^2 + L_s^2 p^2}{A_0^2 + L_s^2 z^2 k_s^2}} < k_p < -\frac{p}{zk_s}$ $A_0, A = \arctan\left(\frac{AL_s(p-z)}{A^2 + L_s^2 pz}\right)$ denkleminin $(0, \pi)$ aralığındaki çözümüdür.
Açık Çevrim Kararsız Sistem ($p < 0$)		YOK	$K_p = \emptyset$
		$L_s < \frac{z-p}{-pz}$	$-\sqrt{\frac{A_0^2 + L_s^2 p^2}{A_0^2 + L_s^2 z^2 k_s^2}} < K_p < -\frac{p}{zk_s}$ $A_0, A = \arctan\left(\frac{AL_s(p-z)}{A^2 + L_s^2 pz}\right)$ denkleminin $(0, \pi/2)$ aralığındaki çözümüdür.

3.5 Sayısal Örnekler

Bu bölümde, ana bölüm içerisinde daha önceki anlatılanları daha somut kılabilmek amacıyla, iki tane sayısal örnek verilecektir.

Örnek 1: [32]'den alınan LED aydınlatma sisteminin yaklaşık termal dinamiklerini ifade eden aşağıdaki transfer fonksiyonu 0.877 saniyelik bir zaman gecikmesi olduğu varsayımıyla ele alınsın, ve bu sistem için şekil 3.1'de verilen konfigürasyon kullanılarak, kararlılığı sağlayan tüm P tipi kontrolörler hesaplınsın.

$$G(s) = \frac{0.18949(s + 0.002022)}{s + 0.001647} e^{-0.877s} \quad (3.65)$$

(3.1)'de verilen transfer fonksiyonu yapısından hareketle, bu sistemin $s = -0.001647$ 'de bir kutbu ($p = 0.001647$), $s = -0.002022$ 'de bir sıfırı ($z = 0.002022$) ve $k_s = 0.18949$ olacak şekilde bir sistem kazancı vardır. Eğer sistem kazancı, (3.3)'te olduğu gibi kontrolör parametresinin içine gömülecek olursa, aşağıdaki ilişki elde edilir:

$$K_p = 0.18949 k_p \quad (3.66)$$

Verilen sistemde $z > 0$ ve $p > 0$ 'dır. O halde bu sistemi kararlı kılan tüm P tipi kontrolörlerin kümesinde (3.26)-(3.27) referans alınmalıdır. Orada bulunan A_0 'ı hesaplayabilmek için (3.24) ile verilen denklemin $(\pi/2, \pi)$ aralığında çözümü aranacak olursa:

$$A = \arctan \left(\frac{A(0.877)(0.001647 - 0.002022)}{A^2 + (0.877)^2(0.001647)(0.002022)} \right) \quad (3.67)$$

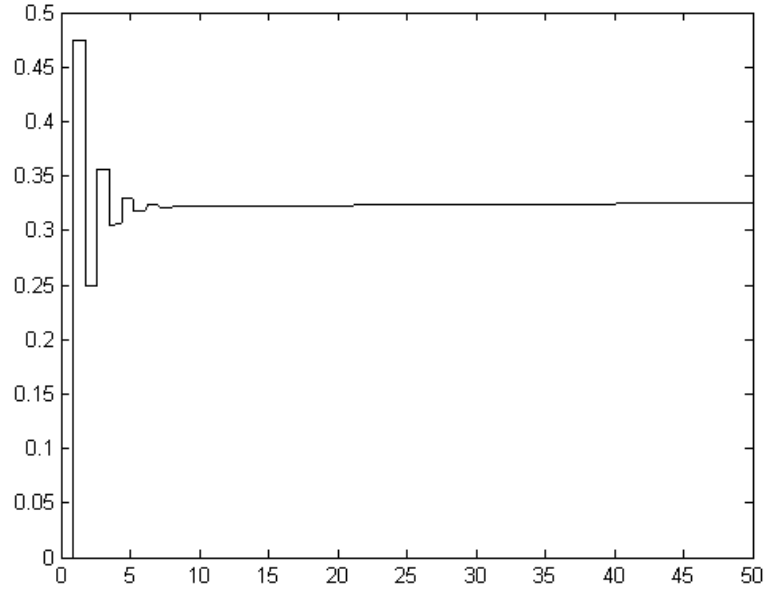
$A_0 = 3.1415$ elde edilir. Bu değer (3.26)'da yerine konacak olursa, kararlılığı sağlayan tüm K_p kümesi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$-0.81454 < K_p < 0.99999 \quad (3.68)$$

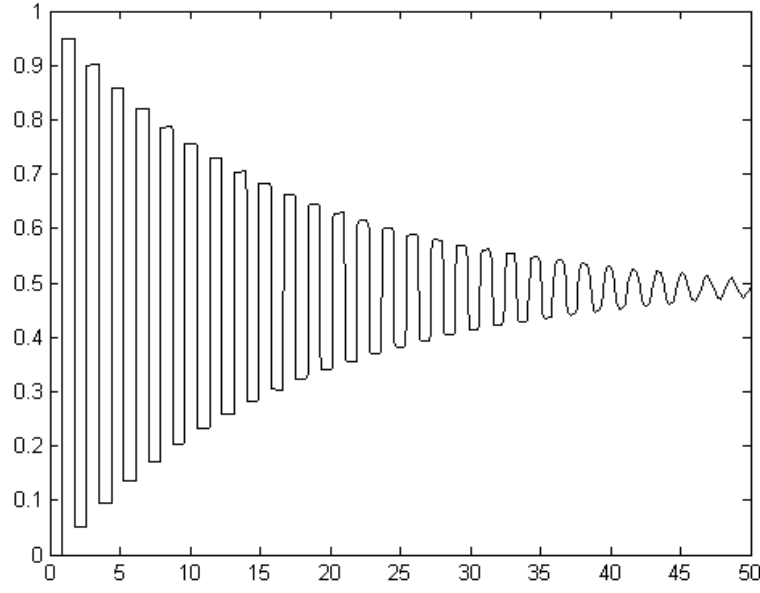
(3.66)'dan yararlanılarak tekrar kontrolör parametrelerine geçilecek olursa, kararlılığı sağlayan tüm P tipi kontrolörlerin kümesi aşağıdaki gibi verilebilir:

$$-4.29859 < k_p < 5.27732 \quad (3.69)$$

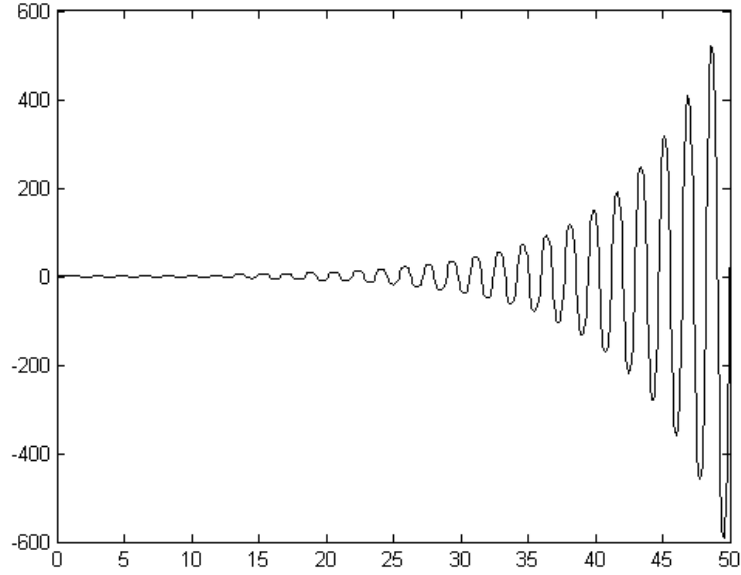
Anılan kapalı çevrimli sisteme ilişkin birim basamak yanıtları şekil 3.6, şekil 3.7 ve şekil 3.8'de görülmektedir. Şekillerden de görüleceği üzere, benzetim sonuçları, teorik sonuçlarla uyum içerisindedir.



Şekil 3.6 : Örnek 1'deki sistemin $k_p=2.5$ için birim basamak yanıtı.



Şekil 3.7 : Örnek 1'deki sistemin $k_p=5$ için birim basamak yanıtı.



Şekil 3.8 : Örnek 1’deki sistemin $k_p=6$ için birim basamak yanıtı.

Örnek 2: $L_s=0.1$ sn olan ve transfer fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilen hayali bir prosesi, şekil 3.1 ile verilen kontrol konfigürasyonunda kararlı kılan tüm P tipi kontrolörler hesaplınsın:

$$\frac{0.4s - 0.8}{s - 1} e^{-0.1s} \quad (3.70)$$

(3.1) ile verilen transfer fonksiyonu yapısı dikkate alındığında, $s=1$ ’de kutup ($p=-1$), $s=2$ ’de sıfır ($z=-2$) bulunduğu ve sistem kazancının $k_s=0.4$ olduğu görülebilir. Bu sistemde $p < 0$ ve $z < 0$ olduğundan, İVEBZG durumu ortaya çıkacaktır. (3.61)’le verilen İVEBZG ifadesi dikkate alındığında:

$$L_s < \dot{IVEBZG} < \frac{z - p}{-pz} = 0.5sn \quad (3.71)$$

Şartının, bu sistemi P tipi kontrolörle kararlı kılabilmek için sağlanması gerektiği görülür. Sistemin zaman gecikmesi 0.1 sn olduğu için, sistem P tipi kontrolörle kararlı kılınabilir.

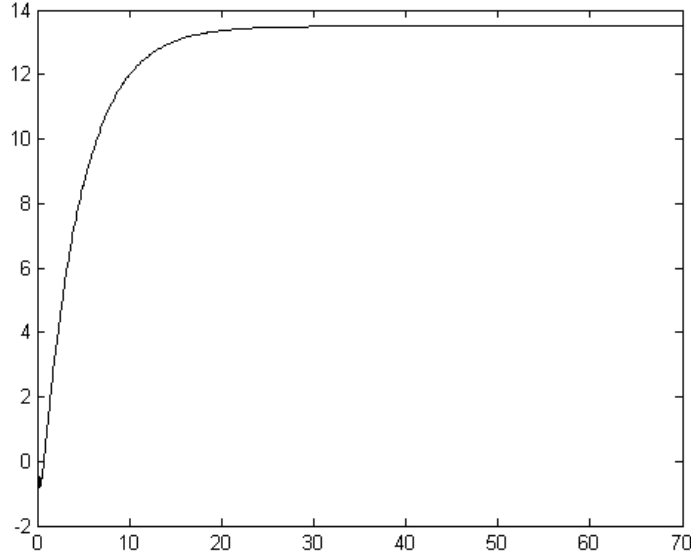
(3.63)’le verilen kararlılığı sağlayan kontrolör kümesi ve (3.64) dikkate alındığında, aşağıda verilen denklemin $(0, \pi/2)$ aralığındaki çözümü:

$$A = \arctan \left(\frac{A(0.1)(-1 - (-2))}{A^2 + (0.1)^2(-1)(-2)} \right) \quad (3.72)$$

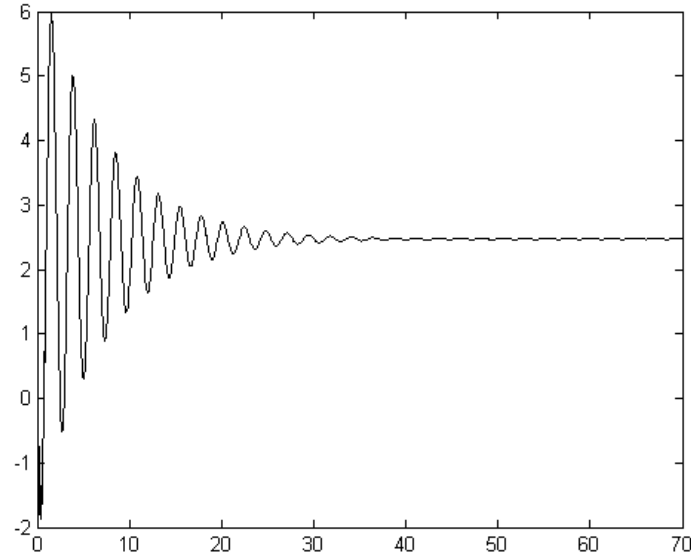
$A_0=0.2782$ olarak hesaplanır. Bu çözüm (3.63)'te yerine konacak olursa, kararlılığı sağlayan tüm P kontrolörlerin kümesi aşağıdaki şekilde bulunur:

$$-2.15704 < k_p < -1.25 \quad (3.73)$$

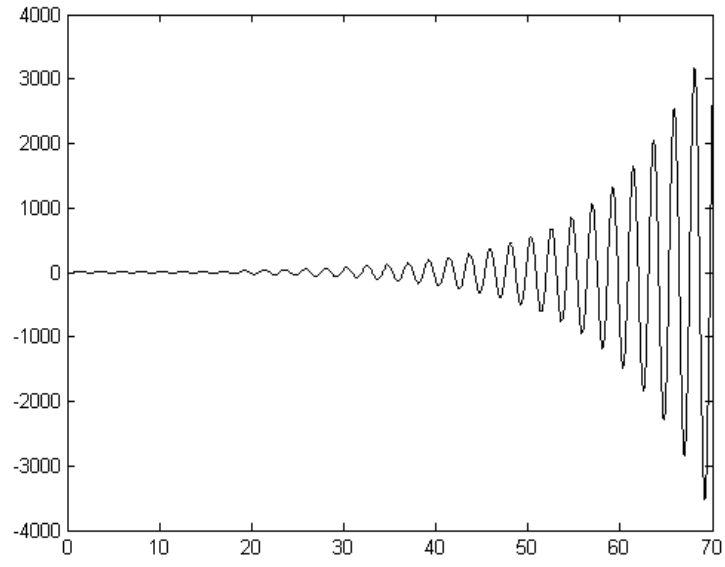
Anılan sistemin $k_p=-1.35$, $k_p=-2.10$ $k_p=-2.20$ için birim basamak yanıtları şekil 3.9, 3.10 ve 3.11'de görülmektedir.



Şekil 3.9 : Örnek 2'deki sistemin $k_p=-1.35$ için birim basamak yanıtı.



Şekil 3.10 : Örnek 2'deki sistemin $k_p=-2.10$ için birim basamak yanıtı.



Şekil 3.11 : Örnek 2’deki sistemin $k_p=-2.20$ için birim basamak yanıtı.

4. İKİNCİ MERTEBEDEN ZAMAN GECİKMELİ SİSTEMLERİN POZİTİF GERİ BESLEMEYLE KARARLI KILINMASI

Bu bölümde, sonlu sığara sahip olmayan, iki kutbu da sağ yarı s düzleminde bulunan, ikinci mertebeden zaman gecikmeli sistemler P tipi kontrolörlerle kararlı kılınacaktır. Bilindiğı gibi bu özelliğı sahip olan zaman gecikmesiz sistemlerin P tipi kontrolörlerle kararlı kılınması mümkün değildir. Ancak zaman gecikmesinin varlığında, zaman gecikmesinin sağ yarı s düzleminde sol yarı s düzlemine kutup geçirme özelliğı var olduğı takdirde, belli koşullar altında kararlılığın sağlanması mümkün olmaktadır.

Hatta ve hatta, şaşırtıcı bir biçimde, bu sistemlerin kararlı kılınması adına, pozitif geri besleme konfigürasyonunun negatif geri besleme konfigürasyonuna nazaran daha etkili olduğı da ortaya çıkmıştır. Bu doğrultuda, öncelikle zaman gecikmesinin sağ yarı s düzleminde sol yarı s düzlemine kapalı çevrim kutbu geçirebilmesi için hangi koşulun gerçekleşmesi gerektiğı incelenmiş, ve bu koşul, s düzleminde, sistemin açık çevrim kutuplarının bulunması gereken bölgeye indirgenmiştir. Bir başka deyişle zaman gecikmesinin bu etkisinin var olabilmesi, açık çevrim kutuplarının s düzleminde belli bir bölgede bulunmasına bağı olacaktır.

Daha sonra ise, zaman gecikmesinin bu etkisinin var olduğı varsayımı altında, sistemin P tipi kontrolörle kararlı kılınabilmesi adına gerek ve yeter koşullar türetilmiştir. Bu koşullardan hareketle, pozitif geribeslemenin varlığında, gerek ve yeter koşulları sağlayan en az bir (L, k_p) ikilisinin bulunduğı, negatif geribesleme durumunda ise böyle bir zorunluluğun olmadığı açıkça görülmüştür. Yani zaman gecikmesinin sağ yarı s düzleminde sol yarı s düzlemine kutup geçirme etkisi var olduğunda, sistemi pozitif geribeslemeyle kararlı kılma konusunda bir çözüm mutlaka var olacaktır.

Bu sonuçların elde edilmesinden sonra ise her iki konfigürasyonda da zaman gecikmeli sistemi kararlı kılacak tüm P tipi kontrolörlerin kümesi ayrı ayrı analitik olarak hesaplanmıştır. Bulunan kümeler sistemin zaman gecikmesine (L_s) , açık çevrimli sistemin transfer fonksiyonunun payda polinomunun katsayılarına (a_1, a_0) , sistem kazancına (k_s) ve bir trigonometrik denklemin belli bir aralıktaki çözümüne bağı

olarak elde edilecektir. Burada elde edilen tüm sonuçlar yine 2. Bölümde detaylarıyla anlatılmış olan direkt yöntem üzerine inşa edilecektir.

4.1 Literatür Özeti, Problemin Önemi ve Bölümde Elde Edilen Sonuçların Özeti

Bir önceki bölümde, birinci mertebeden kesin nedensel transfer fonksiyonuna sahip transfer fonksiyonlarının proses endüstrisi için öneminden bahsedilmişti. Aynı şekilde ikinci mertebeden sonlu sifıra sahip olmayan ve zaman gecikmesi içeren transfer fonksiyonları için de durum bundan çok da farklı değildir, zira endüstride kullanılan azımsanamayacak sayıda proses 2. Mertebeden yaklaşık olarak modellenebilmektedir [25]. Yine matematiksel açıdan olaya yaklaşıldığında, bu tip sistemlerin ortak özelliği, kapalı çevrime alındıklarında, geri tipli polinomsu (retarded type quasipolynomial) meydana getirmeleridir. Yani bu sistemlerin kararlılığı incelenirken, zaman gecikmesinin ortaya çıkışıyla oluşan sonsuz sayıdaki kapalı çevrim kutbunun tamamının sol yarı s düzleminde oluşacağı açıktır.

Endüstrideki önemine binaen, bu tarz sistemler için kontrolör parametrelerini ayarlamaya yönelik birçok çalışma mevcuttur. Ancak tasarımcı için, kimi zaman elinde belli bir performans kriterine göre “iyi” olarak nitelendirilebilecek kontrolör parametrelerine sahip olmaya kıyasla, kararlılığı sağlayan tüm kontrolör parametrelerine sahip olmak önemli avantajlar getirebilmektedir. Buna istinaden, ikinci mertebeden zaman gecikmeli sistemleri kararlı kılacak tüm kontrolör parametrelerinin bulunmasına yönelik birçok çalışma da literatürde yerini almıştır ve almaya da devam etmektedir.

Bu çalışmalara örnekler verilecek olursa, [8] ile verilen çalışmada, Hermite-Biehler Teoremi kullanılarak ikinci mertebeden zaman gecikmesine sahip sistemler için kararlılığı sağlayan tüm P tipi kontrolörlerin kümesi hesaplanmıştır. Burada dikkate edilmesi gereken temel husus, Hermite-Biehler teoremiyle zaman gecikmesinin sağ yarı düzlemden sol yarı s düzlemine kutu geçirme özelliğini net olarak karakterize etmek zor olduğundan, anılan çalışmada, kapalı çevrimli zaman gecikmesiz sistemin öncelikle kararlı olacağı varsayımıyla hareket edilmiştir. Bir başka deyişle bulunan kararlılık kümesi, zaman gecikmesiz sistemi kararlı kılacak olan kümeyle zaman gecikmeli sistemi kararlı kılacak olan kümenin kesişimi mahiyetindedir. [11] ile verilen çalışmada, ikinci mertebeden sistemler için kararlılığı sağlayan tüm PID kontrolörlerin kümesi yine Hermite-Biehler Teoremi baz alınarak hesaplanmıştır.

[13]'te ise Nyquist teoremi baz alınarak, kararlılığı sağlayan çeşitli düşük mertebeli kontrolörler kümesi açık çevrim kararsız sistemler için hesaplanmış, aynı zamanda bu sistemler için izin verilen en büyük zaman gecikmesi (İVEBZG), her bir kontrolör çeşidi için de ayrı ayrı hesaplanmıştır. Daha sonra ise Nyquist Teoremi ve [17]'de bu teoremden türetilen yöntem esas alınarak, [18]'de kararlılığı sağlayan tüm P tipi kontrolörler kümesi hesaplanmış, ve İVEBZG hakkında tamamen kutuplardan oluşan sistemler için genel geçer bir teorem önerilmiştir. Daha sonra buradaki yöntem [36]'da ise PI kontrolörlere genişletilmiştir. Burada dikkate alınması önem arz eden bir diğer husus ise [18, 36] ile verilen yöntemlerin değişken zaman gecikmesi altında da kullanılabilmesidir. [37]'de verilen çalışmada, birinci ve ikinci mertebeden integral prosesleri kararlı kılacak tüm PID kontrolörlerin kümesi, kararlılık koşullarının uygulanması ve kapalı fonksiyon teoreminin de yardımıyla grafiksel olarak hesaplanmıştır. [38]'de ise bu yöntem ikinci mertebeden sonlu sifra sahip olmayan zaman gecikmeli sistemler için tekrarlanmıştır.

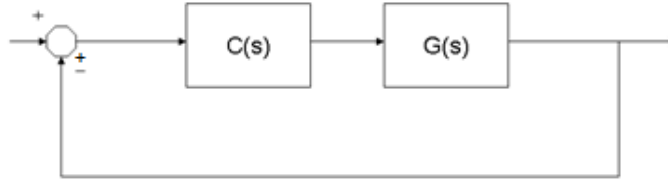
Bu bölümde, frekans tanım bölgesinde modellenmiş, ikinci mertebeden DZD ve TGTÇ zaman gecikmesine sahip sistemler için literatürde daha önceden yer almayan bir sonuç önerilmiş; normalde zaman gecikmesinin yokluğunda P tipi kontrolörle kararlı kılınamayacak, iki kutbu da sağ yarı s düzleminde bulunan sistemler, P tipi kontrolörlerle – özellikle pozitif geri besleme konfigürasyonu – kararlı kılınmıştır. Burada öncelikle zaman gecikmesinin hangi koşullar altında sağ yarı s düzleminden sol yarı s düzlemine kutup geçirebileceğinin koşulları türetilmiştir. Bu koşulların irdelenmesiyle çıkan sonuç, açık çevrimli sistem kutuplarının karmaşık bileşeninin reel bileşeninden büyük olmasının gerekliliğidir. Bu koşulun sağlandığı öncülüyle, kapalı çevrimli sistemin kararlı kılınabilirliğine yönelinmiş, bu husustaki gerek ve yeter koşullar çıkarılmıştır. Bu koşullar dikkatle incelendiğinde, normal şartlar altında kararlılık yönünde olumsuz etki yapması beklenen pozitif geri besleme konfigürasyonu; yani bir başka deyişle negatif kazançların, kapalı çevrimli sistemi kararlı kılmada daha etkili sonuç verdiği görülmüştür. Daha açık olmak gerekirse, sistem pozitif geri besleme konfigürasyonundayken, gerek ve yeter koşullar kesinlikle sağlanmakta, kapalı çevrimli sistemi kararlı kılacak bir (L, k_p) ikilisi mutlaka bulunmaktadır. Halbuki böyle bir durum, negatif geribesleme konfigürasyonu söz konusu olduğunda, yani sistem pozitif k_p 'lerle kontrol edildiğinde, geçerli olmak zorunda değildir. Daha açık olmak gerekirse, negatif geribesleme konfigürasyonunda,

kapalı çevrimli sistemin kararlı kılınabilmesi için açık çevrim kutuplarının sadece reel kısmının imajiner kısmından küçük olması yetmemekte, kutupların imajiner eksene çok daha yakın olması gerekmektedir.

Bölüm şu şekilde kurgulanmıştır: önce problem tanımlanmış ve parçalara ayrılmış, daha sonra ise zaman gecikmesinin sağ yarı s düzleminde sol yarı s düzlemine kutup geçirebilme özelliğinin hangi şartlarda gerçekleştirildiği analitik olarak elde edilmiştir. Daha sonra ise sırasıyla negatif geribesleme konfigürasyonu (pozitif k_p ler) ve pozitif geribesleme konfigürasyonu (negatif k_p ler) baz alınarak, kararlı kılınabilirlik için gerek ve yeter şartlar analitik olarak türetilmiş, pozitif geribesleme durumunda bu şartın kesinlikle sağlandığı gösterilmiştir. Son kısımda ise her iki konfigürasyon için de kararlılığı sağlayan tüm kazançların kümesi analitik olarak hesaplanmıştır. Ayriyeten, anlatılan teoriyi somutlaştırmak adına, elde edilen sonuçlar bir adet sistem üzerinde örneklendirilmiştir.

4.2 Problemin Tanımı ve Zaman Gecikmesinin Kararlılık Üzerine Etkileri

Bölümde kullanılacak kontrol yapısı şekil 4.1’de verilmiştir:



Şekil 4.1 : Bölümde kullanılacak kontrol yapısı.

Burada görülen sistem $G(s)$ ve kontrolör transfer fonksiyonları $C(s)$ de sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$G(s) = \frac{k_s}{s^2 + a_1 s + a_0} e^{-sL_{sys}}, \quad C(s) = k_p \quad (4.1)$$

Burada k_s sistem kazancını ($k_s > 0$), L_{sys} sistemin zaman gecikmesini ($L_{sys} > 0$) ifade etmektedir. Sistemin iki kutbunun da sağ yarı s düzleminde olabilmesi için aşağıdaki ilişki sağlanmalıdır:

$$a_1 < 0, \quad a_0 > 0 \quad (4.2)$$

Yine şekil 4.1’deki geribeslemeye gözüken $\pm$ işareti, hem pozitif hem de negatif geribesleme konfigürasyonunu belirtmektedir. Aynı ayrı ele alınan bu

konfigürasyonların anlamlı olabilmesi için, bölüm genelinde $k_p > 0$ varsayımı benimsenecektir. Bir başka deyişle, pozitif geri besleme durumundaki k_p 'ler, negatif geribeslemedeki negatif k_p 'lerin yerine kullanılacaktır.

Her iki konfigürasyon için de kapalı çevrimli sistemin karakteristik ifadesi oluşturulacak olursa, aşağıdaki yapı elde edilir:

$$P_c(s) = s^2 + a_1s + a_0 \mp k_s k_p e^{-sL_{sys}} = 0 \quad (4.3)$$

Yine burada + ifadesi negatif geri besleme durumunda, - ifadesi de pozitif geri besleme durumunda geçerlidir.

3. bölümde uygulanan stratejiye paralel olarak, hesaplamalarda daha basit ifadeler elde etmek açısından, sistem kazancı (k_s), kontrolörün içine gömülerek işlemlere devam edilecektir; yani bölümün geri kalanında aşağıda verilen kontrolör ifadesi kullanılacaktır:

$$K_p := k_s k_p \quad (4.4)$$

2. bölümde verilen kararlılık analizi, (4.3) için uygulanacak olursa, 1. adım gereği, önce zaman gecikmesiz sistemin, yani $L=0$ durumunda (4.3) ile verilen ifadenin sağ yarı s düzlemi kutup sayısına bakılmalıdır. Bu yapılacak olursa, sağ yarı s düzlemi kapalı çevrim kutbu açısından aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$K_p > -a_0 : \quad 2 \text{ adet} \quad (4.5)$$

$$K_p < -a_0 : \quad 1 \text{ adet} \quad (4.6)$$

Buradan da tekrar anlaşılaçağı üzere, zaman gecikmesiz sistemin, bu şartlar altında kararlı kılınma ihtimali yoktur.

Eğer yöntemin 2. adımı uygulanacak olursa, yani sisteme sonsuz küçük bir L değeri ilave edilirse, (4.3) ile verilen kapalı çevrimli sistemin karakteristik ifadesinin sonsuz adet kökü olacaktır. (4.1) ile verilen sistemin payda polinomu dikkate alınacak olursa, payda polinomunun derecesi (2) pay polinomunun derecesinden (0) büyük olduğu için, bu sonsuz adet kök, yani kapalı çevrim kutbu sol yarı s düzleminde oluşacaktır. Yani sonsuz küçük L değeri için sağ yarı s düzlemi kapalı çevrim kutbu sayısında bir değişme olmayacak, bu hususta (4.5)-(4.6) ile verilen ifadeler geçerli olacaktır.

Yöntemin 3. adımına geçilecek olursa, (4.1) ile verilen sistemdeki, yani (4.3) ile verilen kapalı çevrim karakteristik ifadesindeki gecikme değeri arttıkça, kökler s düzleminde hareket edecek ve belli L değerleri için yarı düzlem değiştirecektir. Bu durumdan dolayı sağ yarı s düzlemi kök sayısı da değişecektir. Köklerin yarı düzlem değiştirirken imajiner ekseninde yer alacağı frekans değerlerinin tespit edilmesi için (2.8)'de verilen $W(\omega^2)$ polinomu oluşturulacak olursa, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$W(\omega^2) = \omega^4 + (a_1^2 - 2a_0)\omega^2 + a_0^2 - K_p^2 = 0 \quad (4.7)$$

Bu ifadenin iki adet kökü vardır ve aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\omega_1^2 = a_0 - \frac{a_1^2}{2} + \sqrt{\frac{a_1^4}{4} - a_0 a_1^2 + K_p^2} \quad (4.8)$$

$$\omega_2^2 = a_0 - \frac{a_1^2}{2} - \sqrt{\frac{a_1^4}{4} - a_0 a_1^2 + K_p^2} \quad (4.9)$$

Yine, kök geçişlerinin yönünü belirleyecek olan $W'(\omega^2)$ ifadesi alınacak olursa, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$W'(\omega^2) = 2\omega^2 + a_1^2 - 2a_0 \quad (4.10)$$

Eğer $W(\omega^2)$ 'nin (4.8) ve (4.9)'da verilen kökleri için $W'(\omega^2)$ 'nin işareti hesaplanacak olursa, ω_1 için bu işaretin pozitif, ω_2 için ise negatif olduğu gözlemlenebilir. Yani ω_1 , sol yarı s düzleminde sağ yarı s düzlemine kök geçişi olurken köklerin imajiner ekseninde yer alacağı frekans; ω_2 ise sağ yarı düzlemden sol yarı s düzlemine kök geçişi olurken köklerin imajiner ekseninde yer alacağı frekanstır.

Zaman gecikmesi olmadığı durumda, bu sistemin önerilen kontrol yapısıyla kararlı kılınmadığı göz önüne alınacak olursa, zaman gecikmeli sistemin kararlı kılınabilmesi, zaman gecikmesinin sağ yarı s düzleminde sol yarı s düzlemine kök geçirme durumunun oluşmasına bağlıdır. Çünkü zaman gecikmesinin bu etkisi olmadığında, zaman gecikmesi arttıkça, kök geçişleri sadece sol yarı s düzleminde sağ yarı s düzlemine doğru olacaktır ve böyle bir durumda (4.3) ile verilen kapalı çevrimli sistemin karakteristik ifadesinin sağ yarı düzlemdeki kök sayısı artacaktır. Yani kapalı çevrimli sistemi P tipi kontrolörle kararlı kılmak mümkün olamayacaktır.

Bahsedilen sağ yarı s düzleminde sol yarı s düzlemine kök geçmesi durumunun da her a_0 ve a_1 değeri için oluşmayacağı açıktır; böyle bir durumun oluşabilmesi için

gerek ve yeter koşul (4.9) ile verilen ω_2^2 'nin en az bir K_p değeri için pozitif reel bir değere eşit olmasıdır. Yani bu durumun gerçekleşebilmesi için aşağıda verilen ifade sağlanmalıdır:

$$2a_0 - a_1^2 > 0 \quad (4.11)$$

Eğer bu koşul gerçekleşirse, ω_2^2 , aşağıda verilen K_p aralığı için pozitif reel bir değere eşit olacaktır:

$$-a_1 \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}} < K_p < a_0 \quad (4.12)$$

(4.11) ile verilen koşul, (4.1) ile verilen açık çevrimli sistemdeki kutupların yeri açısından irdelenecek olursa, kutupların $s_1 = \sigma + j\omega$ ve $s_2 = \sigma - j\omega$ ile verildiği varsayımıyla, (4.11) ile verilen ilişkinin sağlanması, aşağıdaki ilişkinin sağlanmasıyla eşdeğerdir:

$$|\sigma| < |\omega| \quad (4.13)$$

Yani zaman gecikmesinin sağ yarı düzlemde sol yarı s düzlemine kök, bir başka deyişle kapalı çevrim kutbu geçirebilmesi için açık çevrim kutuplarının reel kısmının mutlak değeri, imajiner kısmının mutlak değerinden küçük olmalıdır.

4.3 Kararlılık İçin Gerek ve Yeter Koşulların Türetilmesi

Bir önceki alt bölümde, zaman gecikmesinin hangi koşullar altında sağ yarı s düzleminden sol yarı s düzlemine kapalı çevrim kutbu geçirme özelliğinin olduğu irdelenmiş ve bulunan sonuçlar da (4.11) veya eşdeğeri olan (4.13)'le ifade edilmiştir. Yine aynı alt bölümde de detaylıca anlatıldığı üzere, kontrol yapısı şekil 4.1 ile verilen ve (4.1) ile ifade edilen sistemin bir P tipi kontrolörle kararlı kılınabilme şansının var olabilmesi için, (4.11) ile verilen şartın sağlanması gerekmektedir.

Bu alt bölümde ise, (4.11) ile verilen koşulun gerçekleştiği varsayımı altında, şekil 4.1'de verilen hem pozitif geribesleme hem de negatif geribesleme konfigürasyonu, (4.1) ile verilen sistemin bir P tipi kontrolörle kararlı kılınması için gerek ve yeter koşullar ayrı ayrı verilecektir. Bir başka deyişle, bu verilecek koşullar sağlandığı takdirde, zaman gecikmesine de bağlı olacak şekilde, (4.1) ile verilen sistemi kararlı kılacak bir k_p kümesi, yani en az bir (L, k_p) ikilisi mutlaka bulunacaktır. Ayrıca pozitif geribesleme durumu mevzu bahis iken, gerek ve yeter koşulların her zaman sağlandığı,

ama negatif geribesleme durumu söz konusu iken bu koşulların sağlanmak zorunda olmadığı da gösterilecektir.

4.3.1 Negatif geribesleme durumu

Bu alt bölümde, şekil 4.1 ile verilen kontrol konfigürasyonunun negatif geribeslemeli olduğu kabul edilecektir. Bu durumda (4.3) ile verilen kapalı çevrimli kontrol sisteminin karakteristik ifadesi aşağıdaki gibi olacaktır:

$$P_c(s) = s^2 + a_1s + a_0 + K_p e^{-sL_{sys}} = 0 \quad (4.14)$$

Karakteristik ifadesi bu yapıyla verilen kapalı çevrimli sistemi kararlı kılan bir K_p kümesinin bulunabilmesi için aşağıdaki gerek ve yeter koşul bir teorem halinde verilebilir:

Teorem 4.1: Kontrol konfigürasyonu şekil 4.1’de verilen, negatif geribeslemeli, ileri yol transfer fonksiyonu (4.1) şeklinde olan ve kapalı çevrimli sistemin karakteristik ifadesi (4.14) ile belirtilen bir sistemin, bir P tipi kontrolörle kararlı kılınabilmesi için aşağıda verilen gerek ve yeter koşul en az $k=0$ için sağlanmalıdır:

$$C - (\tan^{-1} C + 2k\pi) > 0 \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.15)$$

Burada C ile verilen ifade aşağıdaki ilişkiyle tanımlanmıştır:

$$C := -\frac{2\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{2}}}{a_1} \quad (4.16)$$

Ve $\tan^{-1}C$ ile verilen ifadenin $(\pi, 3\pi/2)$ aralığında olduğu varsayılacaktır.

İspat: Koşulun gerek ve yeterliliğini ispat etmeden önce, koşulun nasıl ortaya çıktığını göstermek adına, (4.8)-(4.9) ile verilen ω_1^2 ve ω_2^2 ele alınacak olursa, $2a_0 - a_1^2 > 0$ varsayımı altında, ancak ve ancak K_p ’nin (4.12) ile verilen kümede yer aldığı takdirde ω_2^2 ifadesinin pozitif ve reel bir değere eşit olacağı açıktır. Kapalı çevrimli sistemin kararlılığından bahsedebilmek için bu durumun sağlanması gerekmektedir, zira aksi takdirde zaman gecikmesi sağ yarı s düzleminden sol yarı s düzlemine kök geçiremeyecek ve zaman gecikmesinin artmasıyla tüm geçişler sol yarı s düzleminden sağ yarı s düzlemine doğru olacaktır. Zaman gecikmesi olmayan durumda da kapalı çevrimli sistem kararsız olduğu için sistemi bu şartlar altında kararlı kılmak mümkün olamayacaktır.

O halde karakteristik ifadesi (4.14)'le verilen sistemi kararlı kılan K_p değerleri, eğer varsa ancak ve ancak (4.12) ile verilen kümede yer alabilir. Bu bağlamda, bu aralıktaki K_p değerleri için, hem sol yarı s düzleminden sağ yarı s düzlemine, hem de tam tersi istikamette kök geçişi olacaktır. İlişkili L değerlerine sırasıyla L_{kd} ve L_{ks} denecek olursa, (2.7)'den hareketle bu değerler aşağıdaki şekilde hesaplanabilir:

$$\cos(\omega_1 L_{kd}) = \frac{\omega_1^2 - a_0}{K_p}, \quad \sin(\omega_1 L_{kd}) = \frac{a_1 \omega_1}{K_p}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.17)$$

$$\cos(\omega_2 L_{ks}) = \frac{\omega_2^2 - a_0}{K_p}, \quad \sin(\omega_2 L_{ks}) = \frac{a_1 \omega_2}{K_p} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.18)$$

(4.8)-(4.9)'la verilen ω_1 ve ω_2 ifadelerinden ve (4.2)'den hareketle $\omega_1 L_{0d}$ ifadesinin $(\pi, 2\pi)$ aralığında, $\omega_2 L_{0s}$ ifadesinin de $(\pi, 3\pi/2)$ aralığında yer aldığı söylenebilir. O halde (4.17)-(4.18) ile verilen denklem sistemleri, tek birer denklem oluşturacak şekilde aşağıdaki gibi birleştirilebilir:

$$\omega_1 L_{kd} = \tan^{-1} \frac{a_1 \omega_1}{\omega_1^2 - a_0} + 2k\pi \rightarrow L_{kd} = \frac{\tan^{-1} \frac{a_1 \omega_1}{\omega_1^2 - a_0} + 2k\pi}{\omega_1}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.19)$$

$$\omega_2 L_{ks} = \tan^{-1} \frac{a_1 \omega_2}{\omega_2^2 - a_0} + 2k\pi \rightarrow L_{ks} = \frac{\tan^{-1} \frac{a_1 \omega_2}{\omega_2^2 - a_0} + 2k\pi}{\omega_2}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.20)$$

Bu ifadelerden hareketle, karakteristik ifadesi (4.14) ile verilen kapalı çevrimli sistemde L arttıkça, L_{kd} ($k=0,1,2,\dots$) değerlerinden sonra, bir çift kapalı çevrim kutbu sol yarı s düzleminden sağ yarı s düzlemine, L_{kd} ($k=0,1,2,\dots$) değerlerinden sonra ise bir çift kapalı çevrim kutbu sağ yarı s düzleminden sol yarı s düzlemine geçmektedir ve bu gecikme değerlerinin K_p 'nin fonksiyonları olduğu açıktır. (4.5)-(4.6) ve (4.12) ifadelerinden hareketle, zaman gecikmesiz sistemin sağ yarı s düzleminde iki adet kutbu bulunacaktır. Şu halde anılan kapalı çevrimli sistemi kararlı kılabilmenin tek yolu, $L_{ks} < L_{kd}$ ($k=0,1,2,\dots$) koşulunun, en az $k=0$ için sağlanmasına neden olacak bir K_p aralığının bulunmasıdır. Böyle bir durum oluşursa, $L=0$ için sağ yarı s düzleminde iki adet kapalı çevrimli kutbu bulunan sistemin, L değeri arttıkça, önce L_{0s} değeri yakalanacağı için, sağ yarı s düzleminde yer alan iki kutup sol yarı s düzlemine geçecektir. Bu doğrultuda, L_{0d} değerine kadar sistemin sağ yarı s düzleminde kapalı çevrimli kutbu olmayacak, yani sistem kararlı kalacaktır.

(4.12) ile verilen ve ilgilenilen K_p aralığının başlangıcında, $L_{ks} = L_{kd}$ ilişkisinin sağlandığı açıktır, çünkü bu K_p değeri için (4.8)-(4.9) ile verilen ω_1 ve ω_2 ifadeleri birbirine eşit olacaktır:

$$K_p = -a_1 \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}} \rightarrow \omega_1^2 = \omega_2^2 = a_0 - \frac{a_1^2}{2} \quad (4.21)$$

Buna istinaden de L_{ks} ve L_{kd} ifadeleri de aşağıdaki gibi olacaktır:

$$K_p = -a_1 \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}} \rightarrow L_{ks} = L_{kd} = \frac{\tan^{-1} \left(-\frac{2\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{2}}}{a_1} \right) + 2k\pi}{\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{2}}}, (k=0,1,2...) \quad (4.22)$$

Yukarıda bahsedildiği üzere, L_{ks} ve L_{kd} sırasıyla ω_2 ve ω_1 'in, ω_2 ve ω_1 de K_p 'nin fonksiyonlarıdır; yani L_{ks} ve L_{kd} , K_p 'nin fonksiyonlarıdır. Eğer L_{ks} ve L_{kd} ifadelerinin K_p 'ye göre türevi alınacak olursa, aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\frac{dL_{ks}}{dK_p} = \frac{\frac{-a_1(\omega_2^2 + a_0)}{(\omega_2^2 - a_0)^2 + a_1^2 \omega_2^2} \omega_2 - \left(\tan^{-1} \frac{a_1 \omega_2}{\omega_2^2 - a_0} + 2k\pi \right)}{\omega_2^2} \cdot \frac{-K_p}{2\omega_2 \sqrt{\frac{a_1^4}{4} - a_0 a_1^2 + K_p^2}} \quad (4.23)$$

$$\frac{dL_{kd}}{dK_p} = \frac{\frac{-a_1(\omega_1^2 + a_0)}{(\omega_1^2 - a_0)^2 + a_1^2 \omega_1^2} \omega_1 - \left(\tan^{-1} \frac{a_1 \omega_1}{\omega_1^2 - a_0} + 2k\pi \right)}{\omega_1^2} \cdot \frac{K_p}{2\omega_1 \sqrt{\frac{a_1^4}{4} - a_0 a_1^2 + K_p^2}} \quad (4.24)$$

Burada $k=0,1,2...$ 'dir ve görülebileceği üzere, iki türev birbirinin ters işaretlisi olacaktır; zira (4.23) ile verilen ifadedeki ikinci kısım, yani $d\omega_2/dK_p$, (4.24) ile verilen kısmın yani $d\omega_1/dK_p$ 'nin negatiftir. (4.22) ile verilen L_{ks} ve L_{kd} için başlangıç değerleri de dikkate alındığında, eğer (4.21)'de verilen ω_1 ve ω_2 değerleri için (4.23)-(4.24)'te verilen türev ifadelerinin ilk kısımları pozitif olabilirse, en azından belli bir K_p aralığı için $dL_{ks}/dK_p < 0$, ve $dL_{kd}/dK_p > 0$ ilişkileri sağlanabilecektir. Eğer (4.21)'de verilen ω_1 ve ω_2 değerleri, (4.23)-(4.24)'ün ilk kısımlarında yerine konacak olursa, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\frac{-\frac{2}{a_1}\sqrt{a_0-\frac{a_1^2}{2}}-\left(\tan^{-1}\left(-\frac{2}{a_1}\sqrt{a_0-\frac{a_1^2}{2}}\right)+2k\pi\right)}{a_0-\frac{a_1^2}{2}}, \quad k=0,1,2,\dots \quad (4.25)$$

Yukarıda belirtildiği gibi bu ifadenin pozitif olma koşulu (4.16) ile verilen değişken dönüşümüyle aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$C - \left(\tan^{-1} C + 2k\pi\right) > 0 \quad k = 0,1,2,\dots \quad (4.26)$$

Şüphesiz ki eğer bu koşul en az $k=0$ için sağlanırsa, $L_{ks} < L_{kd}$ ($k=0,1,2,\dots$) durumu en az $k=0$ için sağlanacaktır ve sistemi bir P tipi kontrolörle kararlı kılabilmek mümkün olabilecektir. Bu kısım, (4.15) ile verilen gerek ve yeter koşulun yeter kısmının ispatıdır.

Gerek kısmın ispatına geçmeden evvel, bölümün geri kalanında kolaylık sağlaması açısından, (4.23)-(4.24)'te verilen $dL_{kd}/d\omega_1$ ve $dL_{ks}/d\omega_2$ ifadelerinde, aşağıdaki kısaltma yapılacaktır:

$$f(\omega) := \frac{-a_1(\omega^2 + a_0)}{(\omega^2 - a_0)^2 + a_1^2\omega^2} \omega \quad (4.27)$$

Gerek kısmının ispatını yapabilmek için ise (4.15) ile verilen koşulun sağlanmadığı takdirde, kapalı çevrimli karakteristik ifadesi (4.14) ile verilen sistemi bir P tipi kontrolörle kararlı kılmanın mümkün olmadığı ispatlanacaktır. Daha açık olmak gerekirse,

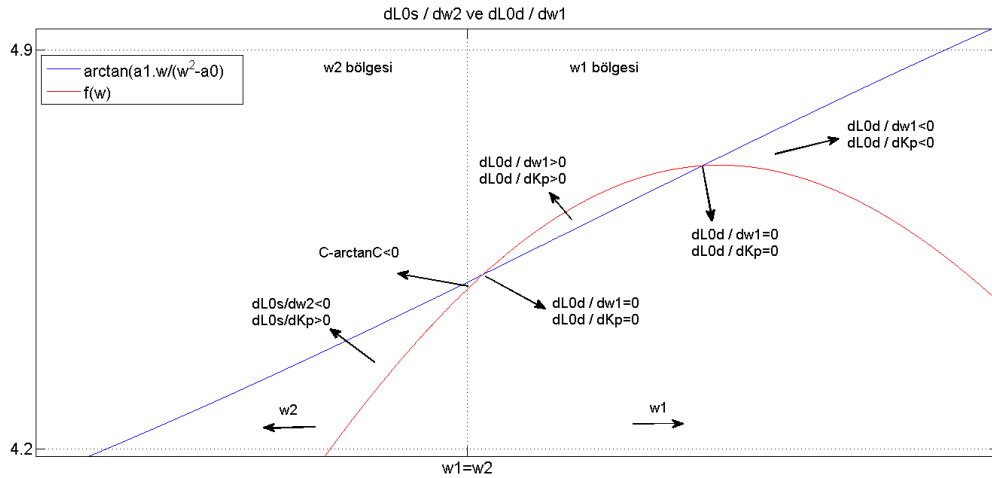
$$C - \left(\tan^{-1} C + 2k\pi\right) \leq 0, \quad k = 0 \quad (4.28)$$

varsayılacak, ve böyle bir durumda, kapalı çevrimli sistemi kararlı kılmanın tek yolu olan $L_{ks} < L_{kd}$ ($k=0,1,2,\dots$) ifadesinin sağlanamayacağı gösterilecektir.

(4.22)'den bilindiği gibi, (4.12) ile verilen K_p aralığının başlangıcı için $L_{0s} = L_{0d}$ ilişkisi geçerlidir. (4.28) ile verilen ters koşul sağlandığı takdirde, aşağıda verilen ilişkiler geçerli olacaktır:

$$\left. \frac{dL_{0d}}{dK_p} \right|_{K_p = -a_1\sqrt{a_0-\frac{a_1^2}{4}}} \leq 0, \quad \left. \frac{dL_{0s}}{dK_p} \right|_{K_p = -a_1\sqrt{a_0-\frac{a_1^2}{4}}} \geq 0 \quad (4.29)$$

Görüldüğü üzere L_{ks} ve L_{kd} , K_p 'nin sırasıyla artan ve azalan fonksiyonlarıdır. Bu şekliyle $L_{0s} < L_{0d}$ ilişkisinin sağlanmadığı düşünülebilir; ancak L_{0d} 'nın K_p 'ye göre 2. türevinin belirli bir K_p aralığı için pozitif olduğu düşünülecek olursa, anılan K_p aralığı için L_{0d} de K_p 'nin artan fonksiyonu olabilecektir. Şüphesiz ki, böyle bir durumda (4.24) ile verilen dL_{0d}/dK_p ifadesindeki $dL_{0d}/d\omega_1$ ifadesinin payı pozitif olacak, dolayısıyla $dL_{0d}/dK_p > 0$ ilişkisi sağlanacaktır. Bu duruma ilişkin grafiksel gösterim, şekil 4.2'de verilmiştir.



Şekil 4.2 : $dL_{0d}/dK_p > 0$ ilişkisinin sağlandığı durum.

Ancak bu artış miktarının L_{ks} 'den küçük kalacağını göstermek adına, eğer L_{ks} ve L_{kd} 'nin K_p 'ye göre duyarlıklarına bakılacak olursa, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$S_d = \frac{\frac{dL_{0d}}{dK_p}}{\frac{L_{0d}}{K_p}} = \frac{f(\omega_1) - \left(\tan^{-1} \frac{a_1 \omega_1}{\omega_1^2 - a_0} + 2k\pi \right)}{\left(\tan^{-1} \frac{a_1 \omega_1}{\omega_1^2 - a_0} + 2k\pi \right)} \frac{K_p^2}{2\omega_1^2 \sqrt{\frac{a_1^4}{4} - a_0 a_1^2 + K_p^2}} \quad (4.30)$$

$$S_s = \frac{\frac{dL_s}{dK_p}}{\frac{L_s}{K_p}} = - \frac{f(\omega_2) - \left(\tan^{-1} \frac{a_1 \omega_2}{\omega_2^2 - a_0} + 2k\pi \right)}{\left(\tan^{-1} \frac{a_1 \omega_2}{\omega_2^2 - a_0} + 2k\pi \right)} \frac{K_p^2}{2\omega_2^2 \sqrt{\frac{a_1^4}{4} - a_0 a_1^2 + K_p^2}} \quad (4.31)$$

Bu duyarlık ifadelerinden de rahatça görülebileceği üzere, sadece ilk ifadenin payları hariç, geri kalan kısımlarda (4.30) ile verilen ifadenin (4.31)'den küçük olacağı açıktır. Şu halde $S_d \leq S_s$ ifadesinin sağlanması aşağıdaki ifadenin ispatlanmasıyla kesinleşmiş olacaktır:

$$\left(\tan^{-1} \frac{a_1 \omega_2}{\omega_2^2 - a_0} \right) - f(\omega_2) \geq f(\omega_1) - \left(\tan^{-1} \frac{a_1 \omega_1}{\omega_1^2 - a_0} \right) \quad (4.32)$$

Bu ifadenin geçerli olduğu da biraz cebrik eforla gösterilebilir (ispatın detayları Ek E’de bulunabilir). Dolayısıyla (4.15) ile verilen koşul sağlanmadığı takdirde, L_s artan K_p ile birlikte artacak, L_d ise artan K_p ile birlikte artsa bile, bu artış her zaman L_s ’ninkine kıyasla küçük kalacaktır. Dolayısıyla (4.15) ile verilen koşul sağlanmadığı takdirde $L_{0s} < L_{0d}$ ilişkisi sağlanamayacak, bu sebeple (4.19)-(4.20)’den hareketle $L_{ks} < L_{kd}$ ($k=1,2,3,\dots$) ilişkisi de kesinlikle sağlanamayacaktır. Yani özetlemek gerekirse, (4.15) ile verilen koşul en azından $k=0$ için sağlanmadığı takdirde $L_{ks} < L_{kd}$ ilişkisi hiçbir k için sağlanmamış olacak, dolayısıyla kapalı çevrimli ifadesi (4.14) ile verilen sistemin bir P tipi kontrolörle kararlı kılınması mümkün olamayacaktır. Bu şekilde de gerek kısmın ispatı tamamlanmış olur.

4.3.2 Pozitif geribesleme durumu

Bu alt bölümde, şekil 4.1 ile verilen kontrol konfigürasyonunun pozitif geribeslemeli olduğu kabul edilecektir. Bu durumda (4.3) ile verilen kapalı çevrimli kontrol sisteminin karakteristik ifadesi aşağıdaki gibi olacaktır:

$$P_c(s) = s^2 + a_1 s + a_0 - K_p e^{-sL} = 0 \quad (4.33)$$

(4.33)’le karakteristik ifadesi verilen kapalı çevrimli sistemi kararlı kılan bir K_p kümesinin bulunabilmesi için gerek ve yeter koşul aşağıdaki gibi verilebilir:

Teorem 4.2: Kontrol konfigürasyonu şekil 4.1’de verilen, pozitif geribeslemeli, ileri yol transfer fonksiyonu (4.1) şeklinde olan ve kapalı çevrimli sistemin karakteristik ifadesi (4.33) ile belirtilen bir sistemin, bir P tipi kontrolörle kararlı kılınabilmesi için aşağıda verilen gerek ve yeter koşul en az $k=0$ için sağlanmalıdır:

$$C - (\tan^{-1} C + 2k\pi) > 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.34)$$

Burada C ile verilen ifade aşağıdaki ilişkiyle tanımlanmıştır:

$$C := -\frac{2\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{2}}}{a_1} \quad (4.35)$$

Ve $\tan^{-1}C$ ile verilen ifadenin $(0, \pi/2)$ aralığında olduğu varsayılacaktır.

İspat: İspatın dayandırıldığı noktalar ve ispatın ilerleyiş biçimi teorem 4.1 ile aynı olacağından, bu teoremin ispatı atlanmıştır.

Yardımcı Teorem 4.1: Herhangi pozitif bir C sayısı için, $\tan^{-1} C$ $(0, \pi/2)$ aralığında alınmak kaydıyla, aşağıda verilen eşitsizlik daima sağlanır:

$$C > \tan^{-1} C \quad (4.36)$$

İspat: $f(C) = C$ ve $g(C) = \tan^{-1} C$ olarak tanımlansın. $g(C)$ 'nin tanımlandığı aralık olan $(0, \pi/2)$ aralığının başlangıç değeri olan 0 için $f(0)=g(0)$ 'dir. $f(C)$ ve $g(C)$ 'nin C 'ye göre türevleri alınırsa:

$$\frac{df(C)}{dC} = 1, \quad \frac{dg(C)}{dC} = \frac{1}{1+C^2} \quad (4.37)$$

Görüldüğü üzere, başlangıç değerleri eşit olan iki fonksiyondan, $g(C)$ 'nin türevi $f(C)$ 'nin türevinden $\forall C > 0$ için küçük kalacaktır, yani matematiksel olarak:

$$\frac{df(C)}{dC} > \frac{dg(C)}{dC}, \quad \forall C > 0 \quad (4.38)$$

Dolayısıyla, başlangıç değeri eşit olan bu iki fonksiyon göz önüne alındığında, $\forall C > 0$ için $f(C) > g(C)$ eşitsizliği sağlanacaktır.

Yorum 4.1: Kontrol konfigürasyonu 4.1 ile, açık çevrim transfer fonksiyonu ise (4.1) ile verilen, iki kutbu da sağ yarı s düzleminde olan ve sistem parametreleri arasında (4.2) ve (4.11) ilişkileri bulunan bir kontrol sistemi ele alınsın. Bu sistemi, uygun zaman gecikmesi değerleriyle kararlı kılacak bir P kontrolör kümesi, şekil 4.1 ile verilen kontrol konfigürasyonu pozitif geribeslemeli iken kesinlikle bulunacaktır. Yani anılan sistem pozitif geribeslemeli iken, kapalı çevrimli sistemi kararlı kılacak bir (L, k_p) ikilisi mutlaka olacaktır. Ancak bu durum, negatif geribesleme için geçerli değildir.

4.4 Kararlılığı Sağlayan Kontrolör Kümelerinin Hesaplanması

Bilindiği gibi az önceki bölümdeki, kararlılığı sağlayan kontrolör kümelerinin var olabilmesi için sağlanması gereken gerek ve yeter koşullar türetilmişti. Bu bölümde ise, bu koşulların sağlandığı varsayımı altında, kararlılığı sağlayan tüm P tipi kontrolörlerin kümesi analitik olarak, hem negatif hem de pozitif geribesleme durumu için ayrı ayrı hesaplanacaktır.

Yine bu hesaplamalardan görülecektir ki, (L, k_p) uzayında pozitif geribesleme durumunda kararlılığı sağlayan bir küme kesinlikle var olacaktır.

4.4.1 Negatif geribesleme durumu

Şekil 4.1’le verilen kontrol konfigürasyonunda negatif geribesleme altında, (4.15) ile verilen koşulun en az $k=0$ için sağlandığı varsayımıyla, sistemi kararlı kılmanın mümkün olabileceği L değerleri aşağıdaki yardımcı teoremle verilebilir:

Yardımcı Teorem 4.2: Kontrol yapısı şekil 4.1’le verilen, transfer fonksiyonu ve kapalı çevrimli karakteristik ifadesi sırasıyla (4.1)-(4.2) ve (4.14) ile ifade edilen sistemin, teorem 4.1’de (4.15) ile verilen koşulu $k=0,1,2,...r$ için sağladığı varsayılın. Bu durumda anılan sistemin kararlı kılınabilmesi için sistemin zaman gecikmesi, aşağıda tanımlanan aralıklardan birinde yer almalıdır:

$$L_{\min k} < L_{\text{sys}} < L_{\max k}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, r) \quad (4.39)$$

Burada $L_{\min k}$ ve $L_{\max k}$ ile verilen ifadeler

$$L_{\min k} = \frac{\frac{\tan^{-1} a_1 \omega_{2k}}{\omega_{2k}^2 - a_0} + 2k\pi}{\omega_{2k}}, \quad L_{\max k} = \frac{\frac{\tan^{-1} a_1 \omega_{1k}}{\omega_{1k}^2 - a_0} + 2k\pi}{\omega_{1k}}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, r) \quad (4.40)$$

Olup, ω_{1k} ve ω_{2k} ($k=0,1,2,...r$) ile verilen ω ’lar aşağıda verilen denklemin:

$$\frac{-a_1(\omega^2 + a_0)}{(\omega^2 - a_0)^2 + a_1^2 \omega^2} \omega = \left(\tan^{-1} \frac{a_1 \omega}{\omega^2 - a_0} \right) + 2k\pi, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, r) \quad (4.41)$$

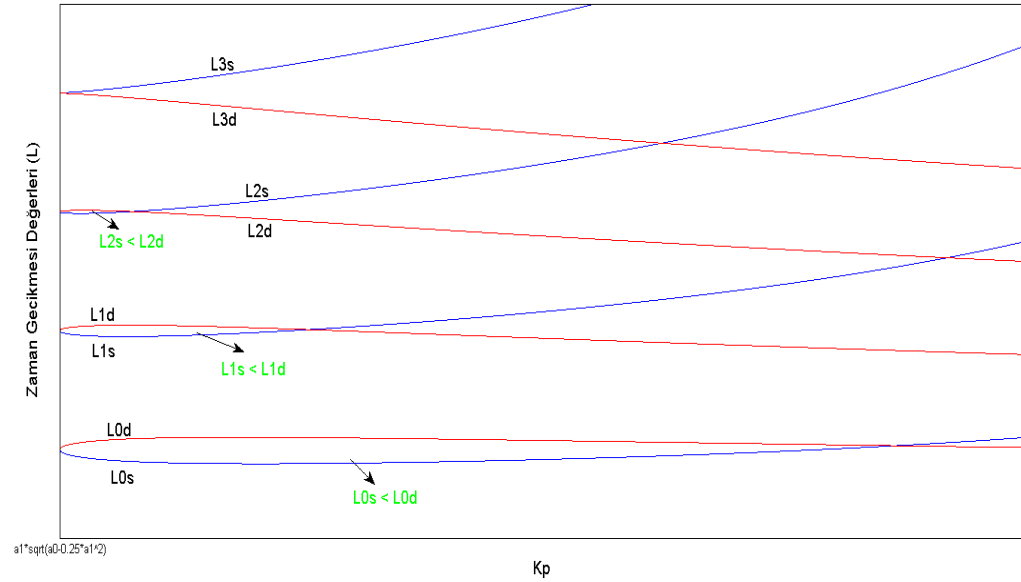
Sırasıyla $\left(\sqrt{a_0 - a_1^2/2}, \sqrt{2a_0 - a_1^2} \right)$ ve $\left(0, \sqrt{a_0 - a_1^2/2} \right)$ aralığındaki çözümleridir.

Burada $\tan^{-1}$ ile verilen ifadenin $(\pi, 2\pi)$ aralığında yer aldığı varsayılacaktır.

İspat: (4.12)’den de hatırlanabileceği üzere, sistemin kararlı kılan K_p kümesinin içinde yer alacağı aralığın başlangıcı olan $K_p = -a_1 \sqrt{a_0 - a_1^2/4}$ değeri için (4.22)’de de verildiği gibi $L_{ks}=L_{kd}$, ($k=0,1,2,...$) ifadesi sağlanacaktır. Yani bu K_p değeri için sağ yarı s düzleminde sol yarı s düzlemine kutup geçirecek olan L_{ks} değerleriyle, tam tersi istikamette kutup geçirecek olan L_{kd} değerleri birbirine eşit olacaktır.

Teorem 4.1’in ispatındaki detaylar da dikkate alındığında, (4.15) ile verilen koşul ($k=0,1,2,...,r$) için sağlandığından, sistemi kararlı kılabilmenin şartı olan $L_{ks}<L_{kd}$ ifadesi ($k=0,1,2,...,r$) için sağlanacaktır. Yani K_p , $L_{ks}=L_{kd}$ ($k=0,1,2,...$) ilişkisinin

geçerli olduğu $K_p = -a_1 \sqrt{a_0 - a_1^2/4}$ değerinden daha büyük değerler aldıkça, L_{ks} ($k=0,1,2,...,r$) için azalmaya başlayacak, keza L_{kd} ifadesi de artmaya başlayacaktır. Ancak bu durum $k=(r+1, r+2, ...)$ için mümkün olamayacaktır. Bu durum $r=2$ için şekil 4.3'te görülmektedir.



Şekil 4.3 : $r=2$ için L_{kd} ve L_{ks} değerleri.

Şekilden görülebileceği üzere, $k=0,1,2$ için L_{ks} ifadeleri önce azalmak suretiyle minimum değerine erişip, sonra artmaya, L_{kd} ifadeleri ise önce artmak suretiyle maksimum değerine erişip, daha sonra azalmaya başlamaktadır. Ancak $k=3,4...$ için ise bu durum olmamakta, $\forall K_p$ için $L_{ks} > L_{kd}$ olmaktadır.

Yine şekilden de görülebileceği üzere (4.1) ile verilen sistemin sabit olduğu varsayılan zaman gecikmesi, L_{sys} , ($k=0,1,2,...,r$) için aşağıdaki aralıkta bulunduğu müddetçe sistem kararlı kılınabilmektedir:

$$\min\{L_{ks}\} < L_{sys} < \max\{L_{kd}\}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, r) \quad (4.42)$$

(4.23) ve (4.24) ile verilen dL_{ks}/dK_p ve dL_{kd}/dK_p ifadelerinden hareketle, $\min\{L_{ks}\}$ ve $\max\{L_{kd}\}$ bu türevlerin 0 olduğu K_p değerlerinde elde edilir. Türev ifadeleri dikkate alındığında, bu türevlerin 0 olabilmesi için aşağıdaki koşullar sağlanmalıdır:

$$\frac{-a_1(\omega_2^2 + a_0)}{(\omega_2^2 - a_0)^2 + a_1^2 \omega_2^2} \omega_2 - \left(\left(\tan^{-1} \frac{a_1 \omega_2}{\omega_2^2 - a_0} \right) + 2k\pi \right) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, r) \quad (4.43)$$

$$\frac{-a_1(\omega_1^2 + a_0)}{(\omega_1^2 - a_0)^2 + a_1^2 \omega_1^2} \omega_1 - \left(\left(\tan^{-1} \frac{a_1 \omega_1}{\omega_1^2 - a_0} \right) + 2k\pi \right) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, r) \quad (4.44)$$

Şüphesiz ki, burada $\tan^{-1}$ ile verilen ifade L_{0s} ve L_{0d} ifadelerinin tanımı gereği $(\pi, 2\pi)$ aralığında olacaktır. Aynı zamanda ω_1 ve ω_2 'nin (4.8) ve (4.9) ile verilen tanımları ve L_{ks} 'lerin oluşabilmesi için (4.12) ile verilen K_p üzerindeki kısıt gereği, (4.43) ile verilen ifadenin çözümleri sırasıyla $\left(0, \sqrt{a_0 - a_1^2/2}\right)$ ve $\left(\sqrt{a_0 - a_1^2/2}, \sqrt{2a_0 - a_1^2}\right)$ aralığında olacaktır. Bu çözümlere sırasıyla ω_{2k} ve ω_{1k} ($k=0,1,2,\dots,r$) denecek olur ve (4.43) ve (4.44) ifadeleri birleştirilecek olursa, (4.41) sağlanmış olur.

Bu çözümler (4.19) ve (4.20) ile verilen L_{ks} ve L_{kd} ifadelerinde yerine koyulacak olur ve $\min\{L_{ks}\}:=L_{\min k}$ ve $\max\{L_{kd}\}:=L_{\max k}$ şeklinde bir değişken dönüşümü yapılacak olursa, (4.40) ile verilen ve sistemin zaman gecikmesinin, kararlı kılınabilirlik için bulunması gereken aralığı veren ilişkiye ulaşılır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Bu bilgiler ışığında ise, kararlılığı sağlayan tüm P kontrolörlerin kümesi aşağıdaki teoremle verilebilir:

Teorem 4.3: Kontrol yapısı şekil 4.1'le verilen, transfer fonksiyonu ve kapalı çevrimli karakteristik ifadesi sırasıyla (4.1)-(4.2) ve (4.14) ile ifade edilen sistemin teorem 4.1'de (4.15) ile verilen koşulu $k=0,1,2,\dots,r$ için sağladığı ve sistemin zaman gecikmesinin yani L_{sys} 'nin (4.39) ile verilen aralıklardan birinde olduğu varsayılınsın. Bu durumda kararlılığı sağlayan tüm P tipi kontrolörlerin kümesi aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\min\{k_{p1k}, k_{p2k}, k_{p3k}\} < k_p < \max\{\min\{k_{p1k}, k_{p2k}\}, \min\{k_{p1k}, k_{p3k}\}, \min\{k_{p2k}, k_{p3k}\}\} \quad (4.45)$$

Burada k_{p1k} , k_{p2k} ve k_{p3k} sırasıyla aşağıdaki gibi verilebilir:

$$k_{pjk} = \frac{a_1 \omega_{jk}^*}{k_s \sin(\omega_{jk}^* L_{sys})}, \quad (j = 1, 2, 3), (k = 0, 1, 2, \dots, r) \quad (4.46)$$

Burada $\sin(\omega_{jk}^* L_{sys}) \in (\pi, 2\pi)$ olup, yine burada ω_{jk}^* ile verilen ifade ise

$$L_{sys} \omega = \tan^{-1} \frac{a_1 \omega}{\omega^2 - a_0} + 2k\pi, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, r) \quad (4.47)$$

Denkleminin çözümleridir. Burada $\tan^{-1}$ ile verilen ifadenin $(\pi, 2\pi)$ aralığında olduğu varsayılacaktır.

İspat: Hatırlanacağı üzere kararlılığın sağlanması için $L_{ks} < L_{kd}$ ilişkisini sağlayan bir K_p kümesinin var olması gerekmektedir, ve yapılan varsayım gereği, $k=0,1,2,\dots,r$ için bu durumun geçerli olacağı açıktır.

Bilindiği üzere, $L=0$ için, yani zaman gecikmesiz sistem için sağ yarı s düzleminde 2 tane kapalı çevrim kutbu bulunmaktadır. Örnek olarak, (4.39) ilişkisi $k=0$ için sağlanıyorsa, yukarı paragrafta bahsedilen K_p 'ler söz konusu olduğunda, $L=L_{0s}$ değeri $L=L_{0d}$ değerinden önce geleceğinden, bu 2 kapalı çevrim kutbu sol yarı s düzlemine geçecek ve sistem tekrar kararlı olmaya başlayacaktır. Yine örnek olarak $k=1$ için (4.39) ilişkisi sağlanıyorsa, bu sefer $L=L_{0s}$ için sağ yarı s düzlemindeki 2 kutup sol yarı s düzlemine geçecek, daha sonra $L=L_{0d}$ için ise 2 kutup tekrar sağ yarı s düzlemine geçecek ve $L=L_{1s}$ olduğunda ise bu kutuplar tekrar sol yarı s düzlemine geçecek ve sistem tekrar kararlı olacaktır. Özetlemek gerekirse, sistemin kararlı olabilmesi için sağ yarı s düzleminden sol yarı s düzlemine geçiş sayısı, sol yarı s düzleminden sağ yarı s düzlemine geçiş sayısından 1 fazla olmalıdır.

Şekil 4.3'ten ve türevlerinin ifadeleri (4.23) ve (4.24)'le verilen L_{ks} ve L_{kd} den hareketle, L_{ks} 'nin ($k=0,1,2,\dots,r$ için) $K_p > -a_1\sqrt{a_0 - a_1^2/4}$ için önce azalan, daha sonra da artan olduğu, L_{kd} 'nin ise ($k=0,1,2,\dots,r$ için) $K_p > -a_1\sqrt{a_0 - a_1^2/4}$ önce artan, sonra da azalan olduğu açıktır. L_{ks} ve L_{kd} 'nin de K_p 'nin fonksiyonları olduğu düşünülecek olursa, (4.1) ile verilen sistemi kararlı kılacak olan K_p 'lerin tespiti, sistemin sabit zaman gecikmesi olan L_{sys} için hangi K_p değeri veya aralığında $L_{ks} < L_{sys} < L_{kd}$ ilişkisinin sağlanacağını tespitiyle eşdeğerdir.

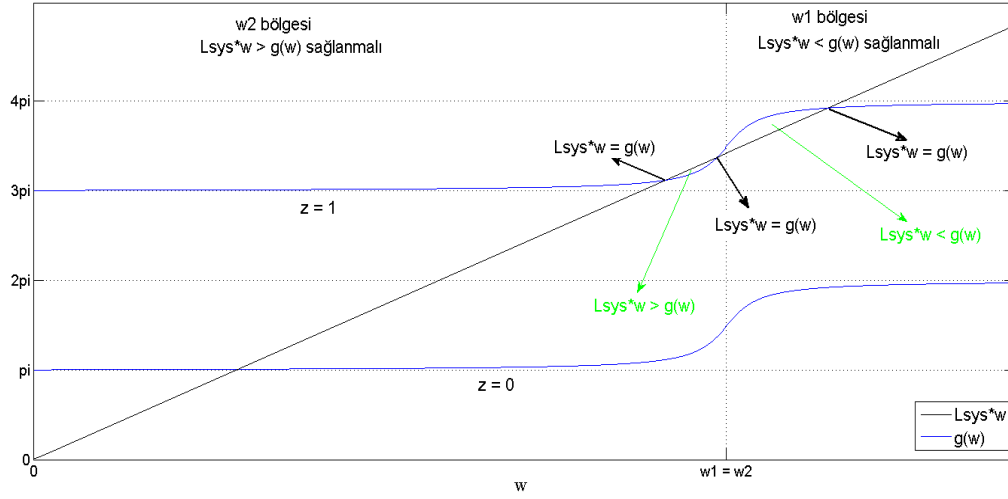
En başta yapılan varsayımdan hareketle, genelliği bozmadan L_{sys} 'nin $k=z$ değeri için (4.39) ifadesinin sağlandığı varsayalım. (4.19) ve (4.20) ile verilen L_{ks} ve L_{kd} ifadelerinden hareketle, kararlı bir sistem için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanmalıdır:

$$g(\omega_2) := \tan^{-1} \frac{a_1 \omega_2}{\omega_2^2 - a_0} + 2\pi z < L_{sys} \omega_2, \quad 0 < \omega_2 < \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{2}} \text{ için} \quad (4.48)$$

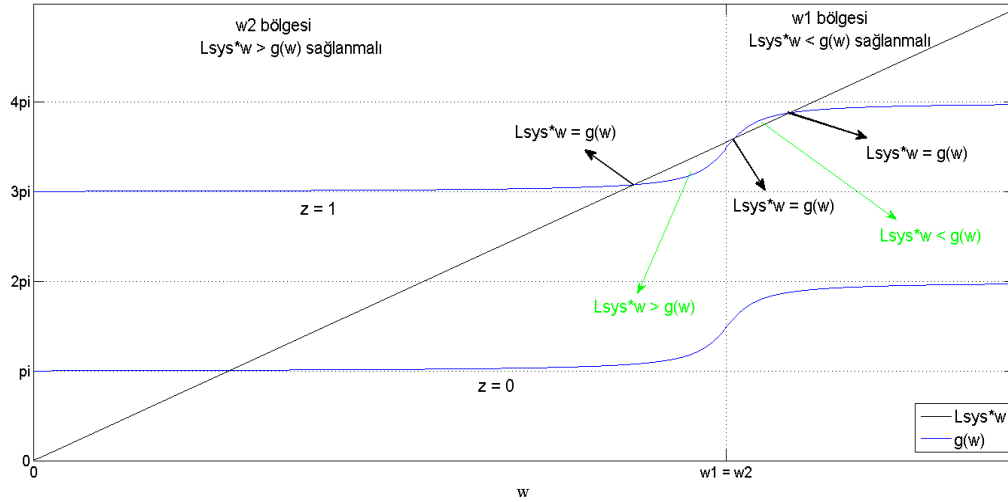
$$g(\omega_1) := \tan^{-1} \frac{a_1 \omega_1}{\omega_1^2 - a_0} + 2\pi z > L_{sys} \omega_1, \quad \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{2}} < \omega_1 < \sqrt{2a_0 - a_1^2} \text{ için} \quad (4.49)$$

Görüleceği üzere, (4.48) ve (4.49)'un tanım bölgeleri birbirinin devamı niteliğinde olup, tek bir tanım bölgesinin, birbirinin devamı niteliğinde olan iki ayrı alt bölgesinde tanımlı olan iki farklı eşitsizlik olarak ifade edilebilirler. Bu eşitsizliklere ilişkin

birleştirilmiş tanım bölgesiyle oluşturulmuş, iki farklı L_{sys} için örnek iki grafiksel gösterim $z=1$ için şekil 4.4 ve şekil 4.5'te gösterilmiştir.



Şekil 4.4 : (4.48)-(4.49) eşitsizliklerinin $L_{sys}=L_{sys1}$ için birleştirilmiş hali.



Şekil 4.5 : (4.48)-(4.49) eşitsizliklerinin $L_{sys}=L_{sys2}$ için birleştirilmiş hali.

Şekillerden de görülebileceği üzere, şekil 4.4'te $\omega_{1z} < \omega_2 < \omega_{2z}$ için $L_{ks} < L_{sys}$ ($k=z$) değeri sağlanmıştır. Dikkat edilmesi gereken nokta, (4.48)'in çözümleri olan $\omega_2 = \omega_{1z}$ veya $\omega_2 = \omega_{2z}$ için $L_{sys} = L_{zs}$ olduğu ve $\omega_2 < \omega_{1z}$ veya $\omega_2 > \omega_{2z}$ olduğu takdirde $L_{zs} > L_{sys}$ olacaktır. Ve eğer $L_{zs} > L_{sys}$ ilişkisi sağlanacak olursa, (4.1) ile verilen sistemde z tane sol yarı s düzleminden sağ yarı s düzlemine doğru kök geçişine karşılık z tane tam tersi istikamette kök geçişi olacak, sistem kararsız olacaktır. O halde $\omega_{1z} = \omega_2$ ve $\omega_2 = \omega_{2z}$ frekansları, kararlılık için gereken şartlardan biri olan $L_{zs} < L_{sys}$ şartı açısından kritik

frekanslardır. (4.9) ile verilen ω_2 ifadesinden hareketle, (4.18) de kullanılarak ilişkili K_p değerleri hesaplanacak olursa aşağıdaki ifade elde edilecektir:

$$K_{pjz} = \frac{a_1 \omega_{jk}^*}{\sin(\omega_{jk}^* L_{sys})}, \quad (j = 1, 2) \quad (4.50)$$

Yine (4.4) ile verilen K_p ile k_p arasındaki ilişki dikkate alınacak olursa, ilişkili k_p değerleri aşağıdaki gibi hesaplanacaktır:

$$k_{pjz} = \frac{a_1 \omega_{jk}^*}{k_s \sin(\omega_{jk}^* L_{sys})}, \quad (j = 1, 2) \quad (4.51)$$

O halde, aşağıdaki ilişkiyi sağlayan k_p değerleri için $L_{zs} < L_{sys}$ ilişkisi sağlanacaktır:

$$\min\{k_{pjz}\} < k_p < \max\{k_{pjz}\}, \quad (j = 1, 2) \quad (4.52)$$

Yine şekil 4.4'te $\sqrt{a_0 - a_1^2 / 2} < \omega_1 < \omega_{3z}$ aralığı için ise $L_{kd} > L_{sys}$ ($k=z$) ilişkisi sağlanacak, $\omega_1 > \omega_{3z}$ için ise, $L_{zd} < L_{sys}$ ilişkisi geçerli olacaktır. Böyle bir durumda (4.1) ile verilen sistemde $z+1$ tane sağ yarı s düzleminden sağ yarı s düzlemine kök geçişi olurken, tam tersi istikamette de $z+1$ tane kök geçişi olacak, sistem kararsız olacaktır. O halde (4.49)'un çözümü olan $\omega_1 = \omega_{3z}$ frekansı, kararlılığın bir diğer şartı olan $L_{zd} > L_{sys}$ için kritik frekanstır. Bu frekanstan aynı yöntemle ilişkili k_p değerine geçilecek olursa, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$k_{pjz} = \frac{a_1 \omega_{jk}^*}{k_s \sin(\omega_{jk}^* L_{sys})}, \quad (j = 3) \quad (4.53)$$

O halde aşağıdaki ilişkiyi sağlayan k_p değerleri için $L_{zd} > L_{sys}$ ilişkisi sağlanacaktır:

$$\frac{-a_1}{k_s} \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}} < k_p < k_{p3z} \quad (4.54)$$

Sistem kararlılığı üzerine (4.52) ve (4.54) ile verilen eşitsizlikleri birleştirilecek olursa, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\min\{k_{p1z}, k_{p2z}\} < k_p < \max\{\min\{k_{p1z}, k_{p2z}\}, \min\{k_{p1z}, k_{p3z}\}, \min\{k_{p2z}, k_{p3z}\}\} \quad (4.55)$$

Şekil 4.5'teki durum düşünülecek olursa, $\omega_{2z} < \omega_1 < \omega_{3z}$ için $L_{kd} > L_{sys}$ ($k=z$) değeri sağlanmıştır. Dikkat edilmesi gereken nokta, (4.49)'un çözümleri olan $\omega_{2z} = \omega_1$ veya $\omega_1 = \omega_{3z}$ için $L_{sys} = L_{zd}$ olduğu ve $\omega_1 < \omega_{2z}$ veya $\omega_1 > \omega_{3z}$ olduğu takdirde $L_{zd} < L_{sys}$ olacaktır. Ve eğer $L_{zd} < L_{sys}$ ilişkisi sağlanacak olursa, (4.1) ile verilen sistemde $z+1$

tane sol yarı s düzleminden sağ yarı s düzlemine doğru kök geçişine karşılık z+1 tane tam tersi istikamette kök geçişi olacak, sistem kararsız olacaktır. O halde $\omega_{2z}=\omega_1$ ve $\omega_1=\omega_{3z}$ frekansları, kararlılık için gereken şartlardan biri olan $L_{zd}>L_{sys}$ şartı açısından kritik frekanslardır. (4.8) ile verilen ω_1 ifadesinden hareketle, (4.17) kullanılarak ilişkili K_p değerleri hesaplanacak olursa aşağıdaki ifade elde edilecektir:

$$K_{pjz} = \frac{a_1 \omega_{jk}^*}{\sin(\omega_{jk}^* L_{sys})}, \quad (j = 2, 3) \quad (4.56)$$

Yine (4.4) ile verilen K_p ile k_p arasındaki ilişki dikkate alınacak olursa, ilişkili k_p değerleri aşağıdaki gibi hesaplanacaktır:

$$k_{pjz} = \frac{a_1 \omega_{jk}^*}{k_s \sin(\omega_{jk}^* L_{sys})}, \quad (j = 2, 3) \quad (4.57)$$

O halde, aşağıdaki ilişkiyi sağlayan k_p değerleri için $L_{zd}>L_{sys}$ ilişkisi sağlanacaktır:

$$\min\{k_{pjz}\} < k_p < \max\{k_{pjz}\}, \quad (j = 2, 3) \quad (4.58)$$

Yine şekil 4.4'te $\omega_{1z} < \omega_2 < \sqrt{a_0 - a_1^2 / 2}$ aralığı için ise $L_{ks}<L_{sys}$ ($k=z$) ilişkisi sağlanacak, $\omega_2<\omega_{1z}$ için ise, $L_{zs}<L_{sys}$ ilişkisi geçerli olacaktır. Böyle bir durumda (4.1) ile verilen sistemde z tane sağ yarı s düzleminden sağ yarı s düzlemine kök geçişi olurken, tam tersi istikamette de z tane kök geçişi olacak, sistem kararsız olacaktır. O halde (4.48)'in çözümü olan $\omega_2=\omega_{1z}$ frekansı, kararlılığın bir diğer şartı olan $L_{zs}<L_{sys}$ için kritik frekanstır. Bu frekanstan aynı yöntemle ilişkili k_p değerine geçilecek olursa, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$k_{pjz} = \frac{a_1 \omega_{jk}^*}{k_s \sin(\omega_{jk}^* L_{sys})}, \quad (j = 1) \quad (4.59)$$

O halde aşağıdaki ilişkiyi sağlayan k_p değerleri için $L_{zs}<L_{sys}$ ilişkisi sağlanacaktır:

$$\frac{-a_1}{k_s} \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}} < k_p < k_{p1z} \quad (4.60)$$

Sistem kararlılığı üzerine (4.58) ve (4.60) ile verilen eşitsizlikleri birleştirecek olursa, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\min\{k_{p2z}, k_{p3z}\} < k_p < \max\{\min\{k_{p1z}, k_{p2z}\}, \min\{k_{p1z}, k_{p3z}\}, \min\{k_{p2z}, k_{p3z}\}\} \quad (4.61)$$

O halde en genel halde, (4.55) ve (4.61) eşitsizlikleri dikkate alınacak olursa, (4.46) ile ispatlanmaya çalışılan genel ifade elde edilmiş olur. Böylece ispat tamamlanır.

4.4.2 Pozitif geribesleme durumu

Bir önceki alt bölümde negatif geribeslemeli durum için yapıldığı üzere, şekil 4.1’le verilen kontrol konfigürasyonunda, pozitif geribesleme altındaki durum ele alınacaktır. Yorum 4.1’de belirtildiği üzere, bu durumda (4.34) ile verilen koşul $k=0$ için kesin olarak sağlanacağından, pozitif geribesleme durumu için kararlılığın koşulu olan $L_{ks} < L_{kd}$ ilişkisi en azından $k=0$ için kesin olarak sağlanacaktır. Bu durumda yalnız $k=0$ durumu için, (4.1) ile verilen sistemi kararlı kılmamanın mümkün olacağı L değerleri aşağıdaki yardımcı teoremle verilebilir:

Yardımcı Teorem 4.3: Kontrol yapısı şekil 4.1’le verilen, transfer fonksiyonu ve kapalı çevrimli karakteristik ifadesi sırasıyla (4.1)-(4.2) ve (4.33)’le ifade edilen sistem, (4.34) ile verilen koşulu, $k=0$ ’da kesinlikle sağlamakla beraber, bu koşulun ek olarak $k=1,2,3,\dots,r$ için de sağlandığı varsayılınsın. Bu durumda, anılan sistemin kararlı kılınabilmesi için sistemin zaman gecikmesi aşağıda tanımlanan aralıklardan birinde yer almalıdır:

$$L_{\min k} < L_{\text{sys}} < L_{\max k}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, r) \quad (4.62)$$

Burada $L_{\min k}$ ve $L_{\max k}$ ile verilen ifadeler

$$L_{\min k} = -\frac{a_1}{a_0}, \quad L_{\max k} = \frac{\tan^{-1} a_1 \omega_{1k}}{\omega_{1k}^2 - a_0}, \quad (k = 0) \quad (4.63)$$

$$L_{\min k} = \frac{\tan^{-1} a_1 \omega_{2k} + 2k\pi}{\omega_{2k}^2 - a_0}, \quad L_{\max k} = \frac{\tan^{-1} a_1 \omega_{1k} + 2k\pi}{\omega_{1k}^2 - a_0}, \quad (k = 1, 2, \dots, r) \quad (4.64)$$

Olup, ω_{10} , aşağıda verilen denklemin çözümü veya $\omega_{10} = \sqrt{2a_0 - a_1^2}$ ifadesinden minimum olanına eşittir; yani:

$$\omega_{10} = \min \left\{ \left\{ \omega \in \Re \mid \frac{-a_1(\omega^2 + a_0)}{(\omega^2 - a_0)^2 + a_1^2 \omega^2} \omega = \left(\tan^{-1} \frac{a_1 \omega}{\omega^2 - a_0} \right) \right\}, \sqrt{2a_0 - a_1^2} \right\} \quad (4.65)$$

Aynı şekilde ω_{1k} , ω_{2k} ile verilen ifadeler ise, aşağıda verilen denklemin:

$$\frac{-a_1(\omega^2 + a_0)}{(\omega^2 - a_0)^2 + a_1^2 \omega^2} \omega = \left(\tan^{-1} \frac{a_1 \omega}{\omega^2 - a_0} \right) + 2k\pi, \quad (k = 1, 2, 3 \dots r) \quad (4.66)$$

Sırasıyla $\left(\sqrt{a_0 - a_1^2/2}, \sqrt{2a_0 - a_1^2} \right)$ ve $\left(0, \sqrt{a_0 - a_1^2/2} \right)$ aralığındaki çözümleridir.

Burada $\tan^{-1}$ ile verilen ifadenin $(0, \pi)$ aralığında yer aldığı varsayılacaktır.

İspat: İspatın $k=1,2,\dots,r$ için olan kısmı yardımcı teorem 2 ile aynı temeller üzerine kurulu olup, ispatın ilerleyiş biçimi de aynı olacağından burada yer verilmeyecektir. Ancak $k=0$ durumu için sonuçlar değişkenlik gösterdiğinden, bu kısmın ispatı yapılacaktır.

Eğer L_{ks} ve L_{kd} ifadeleri pozitif geribeslemeli sistem için yazılacak olursa, (4.33)'ten hareketle, eğer (4.17)-(4.18)'de verilen ifadelerde K_p yerine $-K_p$ yazmak yeterli olacaktır; yani pozitif geribesleme durumunda L_{ks} ve L_{kd} ifadeleri

$$\cos(\omega_1 L_{kd}) = \frac{\omega_1^2 - a_0}{-K_p}, \quad \sin(\omega_1 L_{kd}) = \frac{a_1 \omega_1}{-K_p}, \quad (k = 0, 1, 2 \dots) \quad (4.67)$$

$$\cos(\omega_2 L_{ks}) = \frac{\omega_2^2 - a_0}{-K_p}, \quad \sin(\omega_2 L_{ks}) = \frac{a_1 \omega_2}{-K_p} \quad (k = 0, 1, 2 \dots) \quad (4.68)$$

Denklemleriyle ifade edileceklerdir. Bu durumda a_1 , a_0 ve K_p 'nin işareti dikkate alındığında, açık bir şekilde $\omega_2 L_{0s}$ $(\pi/2, \pi)$, $\omega_1 L_{kd}$ ise $(0, \pi)$ aralığında yer alacaktır. O halde bu denklem sistemleri kendi içerisinde tek bir denklem oluşturacak şekilde birleştirilirse, L_{kd} ve L_{ks} aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\omega_1 L_{kd} = \tan^{-1} \frac{a_1 \omega_1}{\omega_1^2 - a_0} + 2k\pi \rightarrow L_{kd} = \frac{\tan^{-1} \frac{a_1 \omega_1}{\omega_1^2 - a_0} + 2k\pi}{\omega_1}, \quad (k = 0, 1, 2 \dots) \quad (4.69)$$

$$\omega_2 L_{ks} = \tan^{-1} \frac{a_1 \omega_2}{\omega_2^2 - a_0} + 2k\pi \rightarrow L_{ks} = \frac{\tan^{-1} \frac{a_1 \omega_2}{\omega_2^2 - a_0} + 2k\pi}{\omega_2}, \quad (k = 0, 1, 2 \dots) \quad (4.70)$$

Burada $\tan^{-1}$ ile verilen ifadenin, genelliği bozmadan, $(0, \pi)$ aralığında yer alacağı söylenebilir. Eğer L_{ks} ve L_{kd} ifadelerinin K_p 'ye göre türevi alınacak olursa, (4.23) ve (4.24)'teki ifadelerin aynısı elde edilir. Şüphesiz ki burada da $K_p = -a_1 \sqrt{a_0 - a_1^2/4}$ için $L_{ks}=L_{kd}$ eşitliği sağlanmaktadır. Yine (4.34)'teki koşul $k=0,1,2,\dots,r$ için sağlandığından, $k=0,1,2,\dots,r$ için L_{ks} önce azalan sonra artan bir fonksiyon, L_{kd} ise önce artan sonra

sonra azalan bir fonksiyon olacak, ve $L_{ks} < L_{kd}$ ilişkisinin sağlandığı bir K_p kümesi bulunabilecektir.

Ancak burada negatif geribesleme durumundan farklı olan husus, (4.34) ile verilen koşul, $k=0$ için kesin olarak sağlandığıdır. Bu sebeple bu durumda sistemin zaman gecikmesinin hangi L değer aralığında kalacağını tespitine ayrıca odaklanmak gerekmektedir. Kolaylık sağlaması açısından, L_{ks} ve L_{kd} ifadelerinin (4.23) ve (4.24)'te verilen türevleri, (4.27)'de verilen değişken dönüşümü de göz önüne alınarak tekrar ifade edilecek olursa:

$$\frac{dL_{ks}}{dK_p} = \frac{f(\omega_2) - \left(\tan^{-1} \frac{a_1 \omega_2}{\omega_2^2 - a_0} + 2k\pi \right)}{\omega_2^2} \frac{-K_p}{2\omega_2 \sqrt{\frac{a_1^4}{4} - a_0 a_1^2 + K_p^2}} \quad (4.71)$$

$$\frac{dL_{kd}}{dK_p} = \frac{f(\omega_1) - \left(\tan^{-1} \frac{a_1 \omega_1}{\omega_1^2 - a_0} + 2k\pi \right)}{\omega_1^2} \frac{K_p}{2\omega_1 \sqrt{\frac{a_1^4}{4} - a_0 a_1^2 + K_p^2}} \quad (4.72)$$

Şüphesiz ki bu türev ifadelerinin sağ tarafı birbirinin ters işaretlisidir. Burada türevin işaretini belirleyici kısım, ilk kısımdır. Yani eğer

$$f(\omega_2) > \left(\tan^{-1} \frac{a_1 \omega_2}{\omega_2^2 - a_0} + 2k\pi \right), \quad (k = 0, 1, 2, \dots, r) \quad (4.73)$$

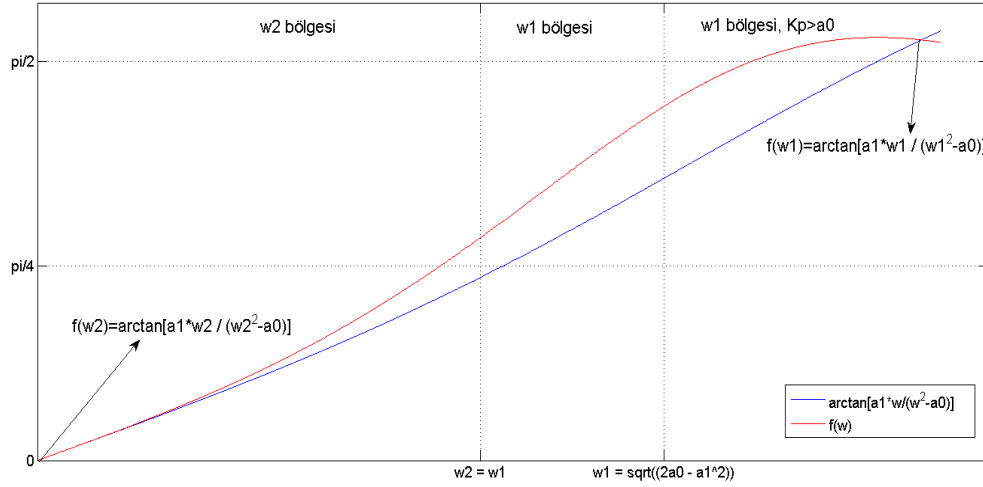
İlişkisi sağlanırsa, L_{ks} azalan, aksi halde artan olacaktır. Benzer şekilde

$$f(\omega_1) > \left(\tan^{-1} \frac{a_1 \omega_1}{\omega_1^2 - a_0} + 2k\pi \right), \quad (k = 0, 1, 2, \dots, r) \quad (4.74)$$

İlişkisi sağlanırsa, L_{kd} artan, aksi halde azalan olacaktır. Doğal olarak (4.73)-(4.74)'te eşitliğin sağlandığı durumlarda ise ilişkili k için L_{kd} maksimum, L_{ks} ise minimum değerini almış olacaktır.

Ancak $k=0$ için bahsedilen eşitlik (4.73) için sadece $\omega_2=0$ için sağlanırken, (4.74) için ise çözümün arandığı aralık olan $\omega_{10} \in \left(\sqrt{a_0 - a_1^2/2}, \sqrt{2a_0 - a_1^2} \right)$ aralığında bulunamayabilir. Bunun anlamı, çözümün $\omega_{10} > \sqrt{2a_0 - a_1^2}$ bölgesinde olacağıdır,

ancak bu bölge $K_p > a_0$ bölgesine denk düşeceğinden, bir anlam ifade etmemektedir. Bu duruma ilişkin grafiksel gösterim şekil 4.6’da gösterilmiştir:



Şekil 4.6 : $L_{0s \min}$ ve $L_{0d \max}$.

(4.73) ilişkisinde eşitliğin sağlanması durumunun $k=0$ için sadece $\omega_{20}=0$ için sağlanacağı analitik olarak gösterilebilir (İspat Ek F’de yer almaktadır.) Özetlemek gerekirse, (4.73) büyüklük ilişkisi $\forall \omega_2 \in \left(0, \sqrt{a_0 - a_1^2/2}\right)$ için sağlanacaktır. Böyle bir durumda (4.70)’den de hareketle, $L_{0s \min}$ aşağıdaki ilişkiyle hesaplanabilecektir:

$$L_{0s \min} = \lim_{\omega_2 \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1} \frac{a_1 \omega_2}{\omega_2^2 - a_0}}{\omega_2} \quad (4.75)$$

Bu limit hesaplandığı takdirde, $L_{0s \min}$ aşağıdaki gibi bulunur:

$$L_{0s \min} = -\frac{a_1}{a_0} \quad (4.76)$$

Aynı mantıktan hareketle, $L_{0d \max}$ da (4.74)’te verilen ifadede eşitliği sağlayan ω_{10} değerinin $\omega_{10} \in \left(\sqrt{a_0 - a_1^2/2}, \sqrt{2a_0 - a_1^2}\right)$ bölgesinde olup olmamasına göre şekillenecektir. Şüphesiz ki eğer $\omega_{10} \in \left(\sqrt{a_0 - a_1^2/2}, \sqrt{2a_0 - a_1^2}\right)$ ise, o zaman ω_{10} aynen alınacak, eğer $\omega_{10} > \sqrt{2a_0 - a_1^2}$ ise, o zaman (4.74)’teki büyüklük ilişkisi $\forall \omega_1 \in \left(\sqrt{a_0 - a_1^2/2}, \sqrt{2a_0 - a_1^2}\right)$ için sağlanacağından, L_{0d} bu aralıkta sürekli artan

olacaktır. Doğal olarak böyle bir durumda $\omega_{10} = \sqrt{2a_0 - a_1^2}$ olarak seçilecektir.

Özetlemek gerekirse, ω_{10} aşağıdakilerin minimumu olacaktır:

$$\omega_{10} = \min \left\{ \left\{ \omega \in \Re \mid \frac{-a_1(\omega^2 + a_0)}{(\omega^2 - a_0)^2 + a_1^2 \omega^2} \omega = \left(\tan^{-1} \frac{a_1 \omega}{\omega^2 - a_0} \right) \right\}, \sqrt{2a_0 - a_1^2} \right\} \quad (4.77)$$

İlişkili $L_{0d \max}$ ise (4.69)'dan hareketle

$$L_{0d \max} = \frac{\frac{\tan^{-1} a_1 \omega_{10}}{\omega_{10}^2 - a_0}}{\omega_{10}} \quad (4.78)$$

Olarak verilecektir. Şüphesiz ki L_{sys} , $L_{\text{ks min}}$ ve $L_{\text{kd max}}$ aralıkları arasında bulunduğu müddetçe, kararlılığın şartı olan $L_{\text{ks}} < L_{\text{sys}} < L_{\text{kd}}$ ilişkisi sağlanabilecektir. $L_{\text{ks min}} := L_{\text{mink}}$ ve $L_{\text{kd max}} := L_{\text{maxk}}$ dönüşümleri yapılacak olursa, sistemi kararlı kılmanın şartı olarak verilen (4.63) ve (4.64) ifadeleri elde edilecektir. Böylece ispat tamamlanmış olacaktır.

Bu bilgiler ışığında ise, kararlılığı sağlayan tüm P kontrolörlerin kümesi aşağıdaki teoremle verilebilir:

Teorem 4.4: Kontrol yapısı şekil 4.1'le verilen, transfer fonksiyonu ve kapalı çevrimli karakteristik ifadesi sırasıyla (4.1)-(4.2) ve (4.33) ile ifade edilen sistemin teorem 4.1'de (4.15) ile verilen koşulu $k=0,1,2,\dots,r$ için sağladığı ve sistemin zaman gecikmesinin, yani L_{sys} 'nin de (4.63)-(4.64) ile verilen aralıklardan birinde olduğu varsayılсын. Bu durumda kararlılığı sağlayan tüm P tipi kontrolörlerin kümesi aşağıdaki gibi verilebilir:

a) $k=0$ için:

$$k_{p10} < k_p < \frac{a_0}{k_s}, \text{ eğer } \omega_{10} = \sqrt{2a_0 - a_1^2} \text{ ise} \quad (4.79)$$

$$k_{p10} < k_p < \min \left\{ k_{p20}, \frac{a_0}{k_s} \right\}, \text{ eğer } \omega_{10}, f(\omega) = \left(\tan^{-1} \frac{a_1 \omega}{\omega^2 - a_0} \right) \text{'in çözümü ise} \quad (4.80)$$

Burada k_{p10} ve k_{p20} sırasıyla aşağıdaki gibi verilebilir:

$$k_{pj0} = \frac{-a_1 \omega_{j0}^*}{k_s \sin(\omega_{j0}^* L_{\text{sys}})}, \quad (j=1) \text{ veya } (j=1,2) \quad (4.81)$$

Burada $\sin(\omega_{j0}^* L_{\text{sys}}) \in (0, \pi)$ olup, yine burada ω_{jk}^* ile verilen ifade ise

$$L_{sys} \omega = \tan^{-1} \frac{a_1 \omega}{\omega^2 - a_0} \quad (4.82)$$

Denkleminin $\omega \in (0, \sqrt{2a_0 - a_1^2})$ aralığındaki çözümleridir. Eğer $\omega_{20}^* > \sqrt{2a_0 - a_1^2}$ bulunacak olursa, k_{p20} 'ın hesaplanmasına gerek yoktur. Yine burada $\tan^{-1}$ ile verilen ifadenin $(0, \pi)$ aralığında olduğu varsayılacaktır.

b) $k=1,2,3,...r$ için:

$$\min\{k_{p1k}, k_{p2k}, k_{p3k}\} < k_p < \max\{\min\{k_{p1k}, k_{p2k}\}, \min\{k_{p1k}, k_{p3k}\}, \min\{k_{p2k}, k_{p3k}\}\} \quad (4.83)$$

Burada k_{p1k} , k_{p2k} ve k_{p3k} sırasıyla aşağıdaki gibi verilebilir:

$$k_{pjk} = \frac{-a_1 \omega_{jk}^*}{k_s \sin(\omega_{jk}^* L_{sys})}, \quad (j = 1, 2, 3), (k = 1, 2, 3, \dots, r) \quad (4.84)$$

Burada $\sin(\omega_{jk}^* L_{sys}) \in (0, \pi)$ olup, yine burada ω_{jk}^* ile verilen ifade ise

$$L_{sys} \omega = \tan^{-1} \frac{a_1 \omega}{\omega^2 - a_0} + 2k\pi, \quad (k = 1, 2, \dots, r) \quad (4.85)$$

Denkleminin çözümleridir. Burada $\tan^{-1}$ ile verilen ifadenin $(0, \pi)$ aralığında olduğu varsayılacaktır.

İspat: Teoremden yer verilen $k=1,2,3,\dots,r$ için, ispatın temellendirildiği hususlar ve ispatın ilerleyiş biçimi teorem 4.3'le aynı olduğu için ispatın bu kısmı burada atlanacaktır. Ancak $k=0$ durumu farklılık arz ettiğinden, bu durumun ispatı yapılacaktır.

Teorem 4.3'ün ispatında da değinildiği üzere, anılan sistemi kararlı kılabilmeyen tek yolu, sağ yarı s düzleminden sol yarı s düzlemine kutup geçişlerinin sayısının, sol yarı s düzleminden sağ yarı s düzlemine olan geçiş sayısından bir fazla olmasıdır. Yani $k=0$ durumu için $L_{0s} < L_{sys} < L_{0d}$ olmasına sebebiyet verecek K_p değerleri, kapalı çevrimli sistemi kararlı kılacak olan K_p değerleri olacaktır.

Kolaylık sağlaması açısından, (4.82) ile verilen denklem aşağıdaki gibi yazılabilir:

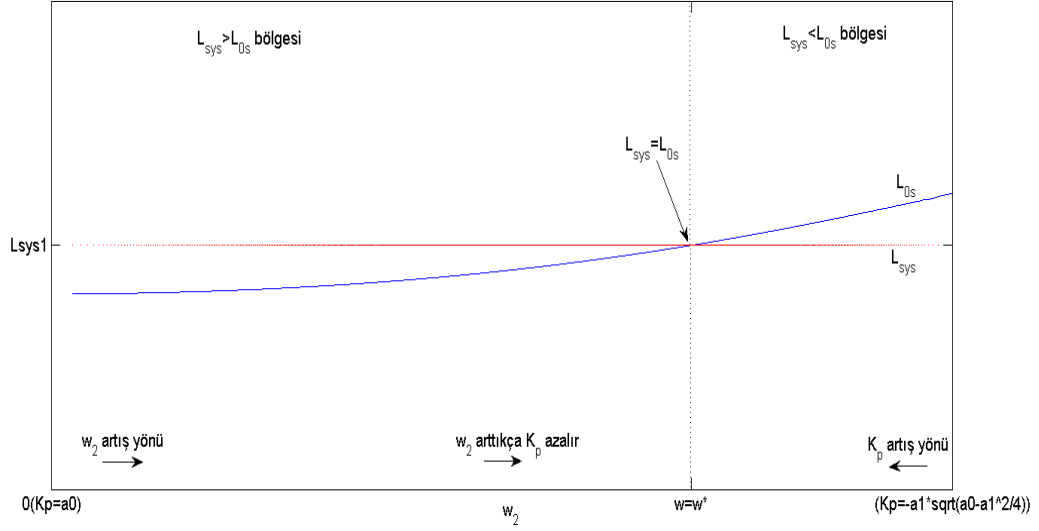
$$L_{sys} = \frac{\tan^{-1} \frac{a_1 \omega}{\omega^2 - a_0}}{\omega} \quad (4.86)$$

Yine teorem 4.3'ün ispatında da değinildiği üzere buradaki ω , ω_1 ve ω_2 'nin birleştirilmiş tanım bölgesidir ve $\omega \in \left(0, \sqrt{2a_0 - a_1^2}\right)$ şeklindedir. (4.69)-(4.70)'ten (veya (4.19)-(4.20)'den) hareketle, bu denklem $\omega \in \left(0, \sqrt{a_0 - a_1^2/2}\right) = \omega_2$ için $L_{\text{sys}}=L_{0s}$, ve $\omega \in \left(\sqrt{a_0 - a_1^2/2}, \sqrt{2a_0 - a_1^2}\right) = \omega_1$ için $L_{\text{sys}}=L_{0d}$ denklemlerini ifade etmektedir.

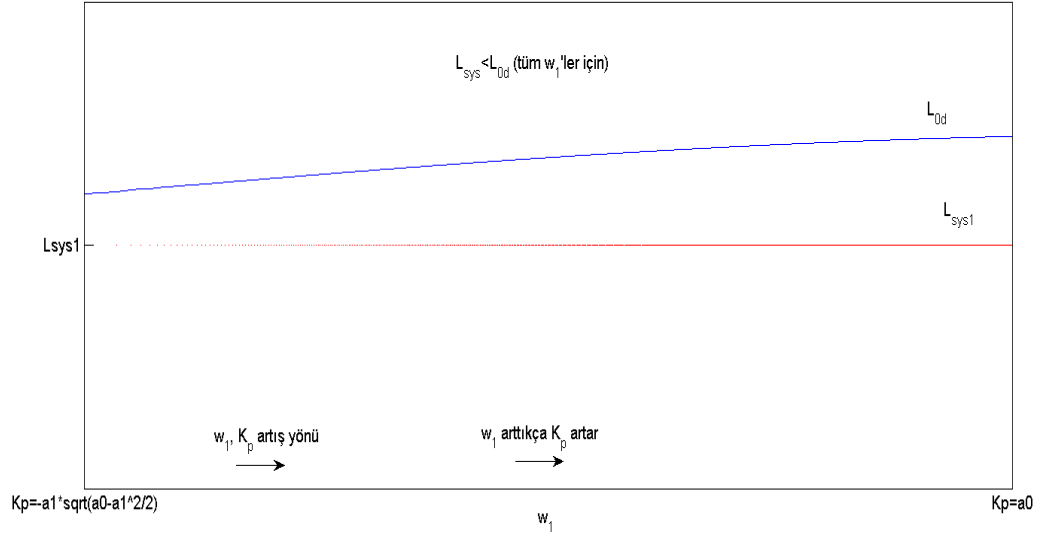
Yardımcı teorem 4.3'ün ispatında değinilen hususlardan hareketle, $k=0$ durumu için L_{0s} , K_p 'nin azalan bir fonksiyonudur, ve L_{0d} ise K_p 'nin sadece artan veya önce artan ve sonra azalan bir fonksiyonu olabilir. Yine ilgili ispattaki detaylara binaen, bu durum tamamen (4.77) (veya (4.65)) ile verilen ω_{10} değeriyle ilgilidir. Eğer $\omega_{10} = \sqrt{2a_0 - a_1^2}$ ise, L_{0d} K_p 'nin artan fonksiyonu, aksi takdirde önce artan sonra azalan fonksiyonu olacaktır. ω_{10} ile ilgili bu iki durum (4.86)'nın çözümlerinin tabiatı açısından fark yaratacağından, iki durumu ayrı incelemek gereklidir.

$\omega_{10} = \sqrt{2a_0 - a_1^2}$ ise: Bu durumda L_{0d} K_p 'nin artan fonksiyonudur. (4.86) ifadesinde eşitliğin sağ tarafı $\omega \in \left(0, \sqrt{a_0 - a_1^2/2}\right) = \omega_2$ için L_{0s} , $\omega \in \left(\sqrt{a_0 - a_1^2/2}, \sqrt{2a_0 - a_1^2}\right) = \omega_1$ için ise L_{0d} 'yi ifade etmektedir. $\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{a_0 - a_1^2/2}$ değeri için, yani $K_p = -a_1 \sqrt{a_0 - a_1^2/4}$ değeri için daha önce de belirtildiği üzere, $L_{0d}=L_{0s}$ 'dir. K_p arttıkça, yani ω_1 artıp ω_2 azaldıkça, sırasıyla L_{0d} artacak ve L_{0s} azalacaktır. Ayırıştırılmış tanım bölgelerinde, tüm bu durumların açık bir şekilde gösterildiği (4.86)'nın görsel halleri iki farklı L_{sys} için ($L_{\text{sys}1}$ ve $L_{\text{sys}2}$) şekil 4.7 - 4.10'da gösterilmiştir.

Bu şekillerden de görülebileceği üzere, artan K_p değerleriyle, aynı değerden başlamış olan L_{0d} ve L_{0s} sırasıyla monoton bir şekilde artmakta ve azalmaktadır. Yani sistemin sahip olduğu zaman gecikmesine göre, (4.86) eşitliği sadece bir noktada sağlanabilecek, L_{sys} , ya L_{0s} ya da L_{0d} 'yi kesecektir. Kararlı bir sistem için, daha önce de belirtildiği üzere $L_{0s} < L_{\text{sys}} < L_{0d}$ eşitsizliği sağlanmalıdır. Yine şekillerden de farkedilebileceği üzere, L_{sys} 'nin değerine göre $L_{0s} < L_{\text{sys}}$ tüm ω_2 tanım bölgesinde veya $L_{\text{sys}} < L_{0d}$ eşitsizliği tüm ω_1 tanım bölgesinde sağlanacak, belirleyici olan eşitsizlik yalnızca bir tane tanım bölgesinden gelecektir.



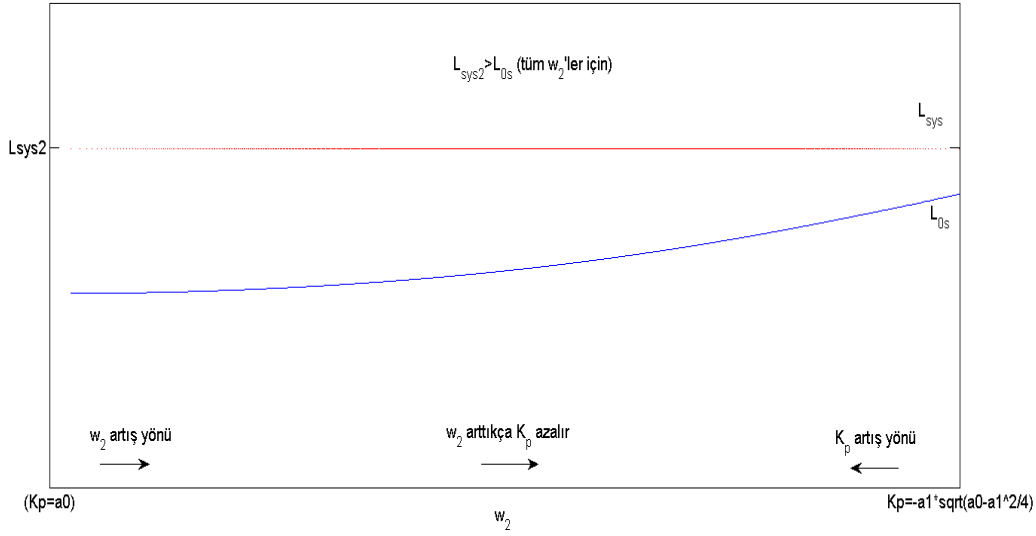
Şekil 4.7 : (4.86)'nın belirli bir $L_{sys}=L_{sys1}$ için ω_2 tanım bölgesine indirgenmiş hali.



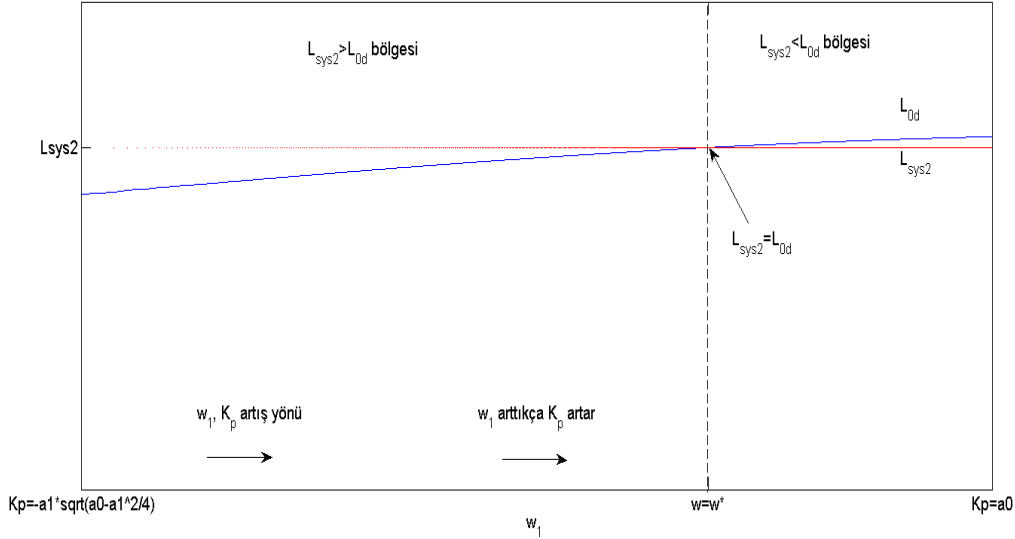
Şekil 4.8 : (4.86)'nın belirli bir $L_{sys}=L_{sys1}$ için ω_1 tanım bölgesine indirgenmiş hali.

Şekil 4.7-Şekil 4.8'de verilen $L_{sys}=L_{sys1}$ durumunda görüleceği üzere, $L_{sys} < L_{0d}$ eşitsizliği tüm ω_1 bölgesi için sağlanmaktadır. Yani bu durumda, $L_{sys} < L_{0d}$ eşitsizliğini, (4.12) ile verilen, yani ilgilenilen tüm K_p değerleri sağlayacaktır. (4.4) ile verilen K_p k_p ilişkisi de gözetilerek $L_{sys} < L_{0d}$ eşitsizliğinin aşağıda verilen k_p aralığı boyunca sağlandığı söylenebilir:

$$\frac{-a_1 \sqrt{a_0 - a_1^2 / 4}}{k_s} < k_p < \frac{a_0}{k_s} \quad (4.87)$$



Şekil 4.9 : (4.86)'nın belirli bir $L_{sys}=L_{sys2}$ için ω_2 tanım bölgesine indirgenmiş hali.



Şekil 4.10 : (4.86)'nın belirli bir $L_{sys}=L_{sys2}$ için ω_1 tanım bölgesine indirgenmiş hali.

ω_2 bölgesi için ise, $L_{sys} > L_{0s}$ eşitsizliği ise $\omega_2=0$ 'dan (4.86)'nın sağlandığı frekans olan $\omega_2 = \omega_{10}^*$ 'a kadar, yani $\omega_2 \in (0, \omega_{10}^*)$ boyunca sağlanacaktır. (4.57)'de hesaplandığı üzere, ω_{10}^* 'la ilişkili k_p hesaplanacak ve $\omega_2 \in (0, \omega_{10}^*)$ bölgesi k_p tanım bölgesine dönüştürülecek olursa, aşağıdaki durum elde edilecektir:

$$\frac{-a_1 \omega_{10}^*}{k_s \sin(L_{sys} \omega_{10}^*)} < k_p < \frac{a_0}{k_s} \quad (4.88)$$

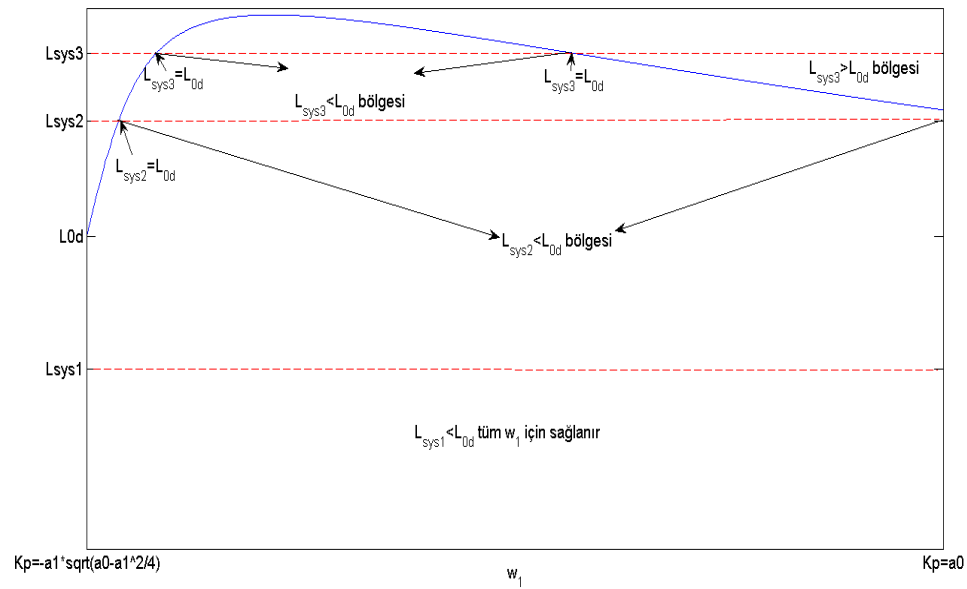
(4.81)'de verilen dönüşüm dikkate alındığında, (4.87)-(4.88)'in kesişim kümesi, yani kararlılığı sağlayan tüm k_p kümesi için bulunan sonuç (4.79)'la aynı olacaktır.

Benzeri bir mantıkla şekil 4.9 ve 4.10'da ise $L_{sys} > L_{0s}$ eşitsizliği tüm ω_2 bölgesi için sağlanacak, buradan gelecek olan k_p eşitsizlik kümesi (4.87) ile aynı olacaktır. ω_1 bölgesi için ise, $L_{sys} < L_{0d}$ eşitsizliği ise (4.86)'nın sağlandığı frekans olan $\omega_1 = \omega_{10}^*$ 'dan ω_1 tanım bölgesinin sonuna kadar sağlanacaktır, yani $\omega_1 \in (\omega_{10}^*, \sqrt{a_0 - a_1^2/2})$ olacaktır.

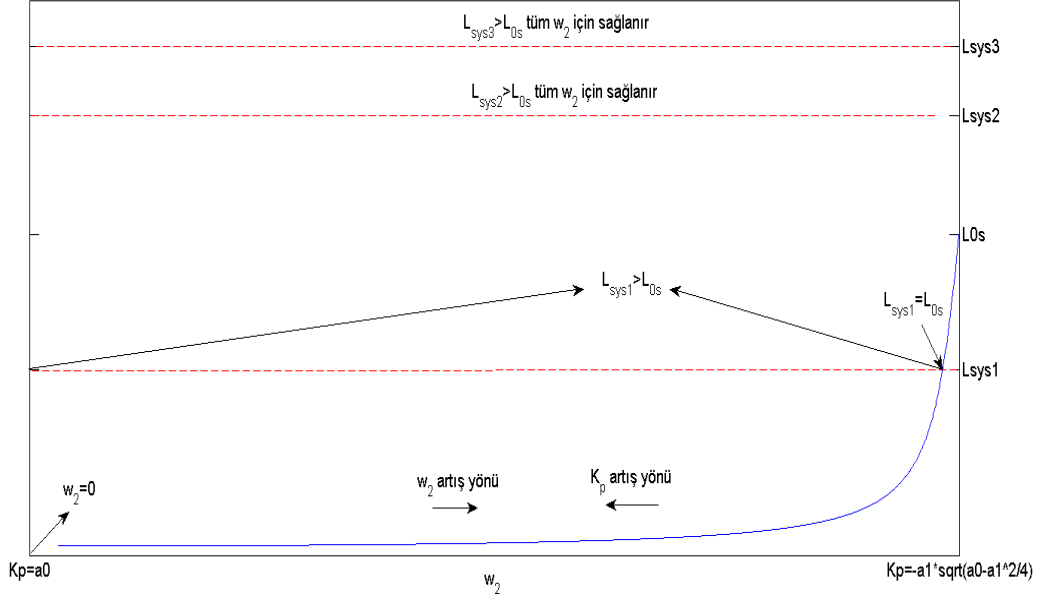
Bir önceki durumda izlenen yol çerçevesinde, buradan elde edilen eşitsizlik de (4.88)'le aynı olacaktır. Sonuç olarak, buradan elde edilen sonuç da, yani kararlılığı sağlayan tüm k_p kümesi için bulunan sonuç (4.79)'la aynı olacaktır. Bu şekilde bu alt kısmın ispatı tamamlanmış olur.

$\omega_{10}, f(\omega) = \left(\tan^{-1} \frac{a_1 \omega}{\omega^2 - a_0} \right)$ 'in çözümü ise : Bu bölümde, ispatın ilerleyişi bir önceki

alt bölümle paralellik gösterdiğinden, detaylara daha az yer verilecektir. Bahsedilen koşul geçerli olduğunda L_{0s} K_p 'nin yine azalan bir fonksiyonuyken, L_{0d} ise K_p 'nin $\omega_1 \in (\sqrt{a_0 - a_1^2/2}, \omega_{10})$ için artan, $\omega_1 \in (\omega_{10}, \sqrt{2a_0 - a_1^2})$ için ise azalan bir fonksiyonu olacaktır. Böyle bir durumda ise (4.86) ifadesinin, ilk incelenen durumdan farklı olarak, L_{sys} 'nin değerine göre iki farklı çözümü olabilecektir. Bu duruma ilişkin, üç farklı L_{sys} için (L_{sys1} , L_{sys2} , L_{sys3}) (4.86) için ayrıştırılmış tanım bölgesindeki grafikler şekil 4.11 – şekil 4.12'te görülmektedir.



Şekil 4.11 : (4.86)'nın üç farklı L_{sys} için ω_1 tanım bölgesine indirgenmiş hali.



Şekil 4.12 : (4.86)'nın üç farklı L_{sys} için ω_2 tanım bölgesine indirgenmiş hali.

Görüleceği üzere, L_{0s} monoton bir karakter sergilediği için, eğer kararlılığı sağlayan tüm k_p kümesinin bulunmasında belirleyici bölge ω_2 bölgesi olacak olursa, yani $L_{0d} > L_{sys}$ ilişkisi her ω_1 için sağlanacak olursa (şekil 4.11'deki L_{sys1} değeri), (4.86)'nın ω_2 bölgesinde yalnız bir çözümü olacaktır. $L_{sys} > L_{0s}$ eşitsizliğinin sağlanması için ω_2 tanım bölgesinde bulunan çözümden yani ω_{10}^* 'dan, az önceki bölümde yürütülen adımlar takip edilerek aşağıdaki çözüm kümesine rahatlıkla ulaşılabilir:

$$k_{p10} < k_p < \frac{a_0}{k_s} \quad (4.89)$$

Eğer belirleyici bölge ω_1 olduğu takdirde, yani kararlılık için sağlanması gereken $L_{sys} > L_{0s}$ eşitsizliği her ω_2 için sağlanıyorsa (şekil 4.12'deki L_{sys2} ve L_{sys3} değeri), L_{sys} 'nin değerine bağlı olarak, (4.86)'nın ω_1 bölgesinde sadece bir çözümü (şekil 4.12'deki L_{sys2} değeri) veya iki çözümü (şekil 4.12'deki L_{sys3} değeri) olabilir. Eğer bir tane çözümü olacak olursa, bu durum (4.86)'nın ikinci çözümünün, yani ω_{20}^* değerinin ω_1 bölgesinin dışında bulunması anlamına gelir (yani $\omega_{20}^* > \sqrt{2a_0 - a_1^2}$) ve az önceki bölümde takip edilen adımlarla ilerlenecek olursa, kararlılığı sağlayan tüm k_p kümesinin yine ω_{10}^* 'dan hareketle aşağıdaki biçimde olacağı rahatlıkla gösterilebilir:

$$k_{p10} < k_p < \frac{a_0}{k_s} \quad (4.90)$$

Eğer ω_1 bölgesinde iki tane çözüm bulunacak olursa, bu sefer (4.86)'nın ikinci çözümü olan ω_{20}^* da $\omega_1 \in \left(\sqrt{a_0 - a_1^2/2}, \sqrt{2a_0 - a_1^2} \right)$ bölgesinde kalacaktır. Böyle bir durumda da kararlılık için sağlanması gereken $L_{sys} < L_{0d}$ eşitsizliğinin çözüm bölgesi de $\omega_1 \in (\omega_{10}^*, \omega_{20}^*)$ biçiminde olacaktır. Yine bir önceki bölüme izlenen adımlar takip edilerek, kararlılığı sağlayan tüm k_p kümesinin sınırları da aşağıdaki biçimde bulunabilir:

$$k_{p10} < k_p < k_{p20} \quad (4.91)$$

Oluşabilecek farklı durumlar için içine katılıp elde edilen ve (4.89)-(4.90)-(4.91) ile verilen kararlılık kümeleri bir arada düşünüldüğünde, bu kümeleri tek bir kümeyle aşağıdaki biçimde ifade etmek mümkündür:

$$k_{p10} < k_p < \min \left\{ k_{p20}, \frac{a_0}{k_s} \right\} \quad (4.92)$$

Bu ifade de (4.80) ile verilen ifadenin aynısıdır. Bu şekilde ispat tamamlanmış olur.

Yorum 4.2: Dikkat edilecek olursa, hem negatif hem de pozitif geribeslemeli durumlar için de sırasıyla (4.15) ve (4.34) ile verilen kararlılığın sağlanabilmesi için gerek ve yeter koşulların $k=0,1,2,\dots,r$ için sağlandığı varsayımıyla, her iki durum için de $r+1$ adet birbirinden bağımsız kararlılık bölgesi çıkmaktadır. (4.16) ve (4.35)'te verilen C 'nin tanımı dikkate alınacak olursa, (4.1) ile verilen sistemde $a_1=0$ olduğunda, yani sistem ikinci mertebeden bir osilatör olduğunda, C ifadesi sonsuza gidecektir. Böyle bir durumda ise (4.15) ve (4.34) ile verilen koşullar $\forall k \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesini göstermek üzere) için sağlanacaktır. Bir başka deyişle osilatör durumu için (L, k_p) uzayında sonsuz adet kararlılık bölgesi çıkacaktır. Bu bölümün özel bir hali olarak addedilebilecek bu ilginç durum, 5. Bölümde detaylı olarak ele alınmıştır.

Bölümün geri kalanında ise, burada anlatılan teorik detayları somutlaştırabilmek adına bir adet sayısal örneğe yer verilecektir.

4.5 Sayısal Örnek

Bu bölümde, ana bölüm içerisinde daha önce anlatılanları daha somut kılabilmek amacıyla bir sayısal örneğe yer verilecektir.

Örnek: Aşağıda verilen ve iki kutbu da sağ yarı düzlemde olan sistem ele alınsın:

$$G(s) = \frac{0.5}{s^2 - 0.3s + 5} e^{-0.6s} \quad (4.93)$$

Sistemin şekil 4.1 ile verilen kontrol yapısında oluşu varsayılınsın ve bu sistemi kararlı kılan tüm k_p değerleri hem negatif hem de pozitif geribesleme durumu için hesaplınsın.

Negatif geribesleme durumu için (4.16) ile verilen değişken dönüşümü yapılarak (4.15) ile verilen gerek ve yeter koşul değerlendirilecek olursa, bu koşulun $k=0,1$ için sağlandığı rahatlıkla tespit edilebilir. O halde L - k_p uzayında birbirinden ayrık olacak şekilde 2 adet kararlılık bölgesi çıkacaktır.

Sistemi kararlı kılabilecek bir k_p değerinin var olabilmesi için, sistemin sahip olduğu zaman gecikmesinin hangi aralıkta olması gerektiğini hesaplamak adına, yardımcı teorem 2'den yararlanılabilir. Burada $L_{\min k}$ ve $L_{\max k}$ ($k=0,1$) değerlerini bulabilmek için, (4.41) ile verilen denklem çözdürülürse, sırasıyla $k=0$ ve $k=1$ için aşağıdaki durumlar elde edilecektir:

$k=0$ için:

$$\frac{-a_1(\omega^2 + a_0)}{(\omega^2 - a_0)^2 + a_1^2 \omega^2} \omega = \left(\tan^{-1} \frac{a_1 \omega}{\omega^2 - a_0} \right) \quad (4.94)$$

denkleminin çözümleri olan $\omega_{10}, \left(\sqrt{a_0 - a_1^2/2}, \sqrt{2a_0 - a_1^2} \right) = (2.226, 3.148)$ ve ω_{20} da

$\left(0, \sqrt{a_0 - a_1^2/2} \right) = (0, 2.226)$ aralığında aranacaktır. Bu denklemin belirtilen

aralıktaki çözümleri yapıldığında $\omega_{10}=2.4377$, $\omega_{20}=1.9874$ olarak bulunur. Bu değerler (4.40)'ta yerine konacak olursa $L_{\min 0} = 1.8406sn$ ve $L_{\max 0} = 2.3068sn$ bulunur. Yani sistemin zaman gecikmesi aşağıdaki değer aralığında yer alacak olursa, sistemi kararlı kılabilecek bir k_p aralığı bulunabilecektir:

$$1.8406sn < L_s < 2.3068sn \quad (4.95)$$

$k=1$ için:

$$\frac{-a_1(\omega^2 + a_0)}{(\omega^2 - a_0)^2 + a_1^2 \omega^2} \omega = \left(\tan^{-1} \frac{a_1 \omega}{\omega^2 - a_0} \right) + 2\pi \quad (4.96)$$

denkleminin çözümleri olan $\omega_{11}, \left(\sqrt{a_0 - a_1^2/2}, \sqrt{2a_0 - a_1^2} \right) = (2.226, 3.148)$ ve ω_{21} de $\left(0, \sqrt{a_0 - a_1^2/2} \right) = (0, 2.226)$ aralığında aranacaktır. Bu denklemin belirtilen aralıktaki çözümleri yapıldığında $\omega_{10}=2.3194$, $\omega_{20}=2.1396$ bulunur. Bu değerler (4.40) 'ta yerine konacak olursa $L_{\min 1} = 4.8672 \text{sn}$ ve $L_{\max 1} = 4.9560 \text{sn}$ bulunur. Yani sistemin zaman gecikmesi aşağıdaki değer aralığında yer alacak olursa, sistemi kararlı kılabilcek bir k_p aralığı bulunabilecektir:

$$4.8672 \text{sn} < L_s < 4.9560 \text{sn} \quad (4.97)$$

Görülebileceği üzere, sistemin zaman gecikmesi $L_s=0.6 \text{sn}$ 'dir ve bu değer (4.95) veya (4.97) ile belirtilen aralık içerisinde değildir. O halde bu sistem negatif geribesleme konfigürasyonunda, bir oransal kontrolörle kararlı kılınamamaktadır. Yani bu, durumda, kararlılığı sağlayan tüm P tipi kontrolörlerin kümesi boş kümedir:

$$k_p \in \emptyset \quad (4.98)$$

Pozitif geribesleme durumu içinse (4.35) ile verilen değişken dönüşümü yapılarak (4.34) ile verilen gerek ve yeter koşul değerlendirilecek olursa, bu koşulun $k=0,1,2$ için sağlandığı rahatlıkla tespit edilebilir. O halde L-kp uzayında birbirinden ayrık olacak şekilde 3 adet kararlılık bölgesi çıkacaktır.

Sistemi kararlı kılabilcek bir k_p değerinin var olabilmesi için, sistemin sahip olduğu zaman gecikmesinin hangi aralıkta olması gerektiğini hesaplamak adına, yardımcı teorem 3'den yararlanılabilir. (4.63)'ten hareketle burada $L_{\min 0} = -a_1/a_0 = 0.06 \text{sn}$ 'dir. $L_{\min k}$ ($k=1,2$) ve $L_{\max k}$ ($k=0,1,2$) değerlerini bulabilmek için (4.63)-(4.64) ile verilen denklemlerden yararlanılırsa, sırasıyla $k=0$, $k=1$ ve $k=2$ için aşağıdaki durumlar elde edilecektir:

k=0 için:

(4.63)'ten hareketle, $L_{\min 0}=0.06 \text{sn}$ olarak bulunur. $L_{\max 0}$ için ise, ilişkili ω_{10} 'ı bulabilmek adına, (4.65)'ten hareketle

$$\frac{-a_1(\omega^2 + a_0)}{(\omega^2 - a_0)^2 + a_1^2 \omega^2} \omega = \left(\tan^{-1} \frac{a_1 \omega}{\omega^2 - a_0} \right) \quad (4.99)$$

denkleminin çözümü $\left(\sqrt{a_0 - a_1^2/2}, \sqrt{2a_0 - a_1^2}\right) = (2.226, 3.148)$ aralığında aranacak, eğer çözüm bu aralığın dışında çıkarsa, $\omega_{10} = \sqrt{2a_0 - a_1^2} = 3.148$ olarak alınacaktır. Bu denklem çözülecek olursa, çözüm aralığının içinde kalacak şekilde $\omega_{10} = 2.5796$ olarak bulunur. Bulunan bu değer (4.63)'te yerine konacak olursa, $L_{\max 0} = 1.0482 \text{ sn}$ olarak hesaplanır. Yani sistemin zaman gecikmesi aşağıdaki değer aralığında yer alacak olursa, sistemi kararlı kılabilcek bir k_p aralığı bulunabilecektir:

$$0.06 \text{ sn} < L_s < 1.0482 \text{ sn} \quad (4.100)$$

$k=1$ için:

$L_{\min 1}$ ve $L_{\max 1}$ 'i hesaplayabilmek adına, ω_{11} ve ω_{21} 'i bulmak için (4.66) ile verilen denklem aşağıdaki şekilde olacaktır:

$$\frac{-a_1(\omega^2 + a_0)}{(\omega^2 - a_0)^2 + a_1^2 \omega^2} \omega = \left(\tan^{-1} \frac{a_1 \omega}{\omega^2 - a_0} \right) + 2\pi \quad (4.101)$$

Bu denklemin çözümleri olacak olan ω_{11} , $\left(\sqrt{a_0 - a_1^2/2}, \sqrt{2a_0 - a_1^2}\right) = (2.226, 3.148)$ ve ω_{21} de $\left(0, \sqrt{a_0 - a_1^2/2}\right) = (0, 2.226)$ aralığında aranacaktır. Bu denklemin belirtilen aralıktaki çözümleri yapıldığında $\omega_{11} = 2.3691$, $\omega_{21} = 2.0828$ bulunur. Bu değerler (4.64)'te yerine konacak olursa $L_{\min 1} = 3.3799 \text{ sn}$ ve $L_{\max 1} = 3.6155 \text{ sn}$ bulunur. Yani sistemin zaman gecikmesi aşağıdaki değer aralığında yer alacak olursa, sistemi kararlı kılabilcek bir k_p aralığı bulunabilecektir:

$$3.3799 \text{ sn} < L_s < 3.6155 \text{ sn} \quad (4.102)$$

$k=2$ için:

$L_{\min 1}$ ve $L_{\max 1}$ 'i hesaplayabilmek adına, ω_{12} ve ω_{22} 'i bulmak için (4.66) ile verilen denklem aşağıdaki şekilde olacaktır:

$$\frac{-a_1(\omega^2 + a_0)}{(\omega^2 - a_0)^2 + a_1^2 \omega^2} \omega = \left(\tan^{-1} \frac{a_1 \omega}{\omega^2 - a_0} \right) + 4\pi \quad (4.103)$$

Bu denklemin çözümleri olacak olan ω_{12} , $\left(\sqrt{a_0 - a_1^2/2}, \sqrt{2a_0 - a_1^2}\right) = (2.226, 3.148)$ ve ω_{22} de $\left(0, \sqrt{a_0 - a_1^2/2}\right) = (0, 2.226)$ aralığında aranacaktır. Bu denklemin belirtilen

aralıktaki çözümleri yapıldığında $\omega_{11}=2.2361$, $\omega_{21}=2.1954$ bulunur. Bu değerler (4.64) 'te yerine konacak olursa $L_{\min1}=6.3178sn$ ve $L_{\max1}=6.3223sn$ bulunur. Yani sistemin zaman gecikmesi aşağıdaki değer aralığında yer alacak olursa, sistemi kararlı kılabilcek bir k_p aralığı bulunabilecektir:

$$6.3178sn < L_s < 6.3223sn \quad (4.104)$$

Görülebileceği üzere, sistemin zaman gecikmesi $L_s=0.6sn$ 'dir ve (4.100) ile verilen aralık içerisinde kalmaktadır. O halde, sistem pozitif geribesleme konfigürasyonunda kontrol edilirse, sistemi kararlı kılacak bir k_p aralığı bulunabilecektir.

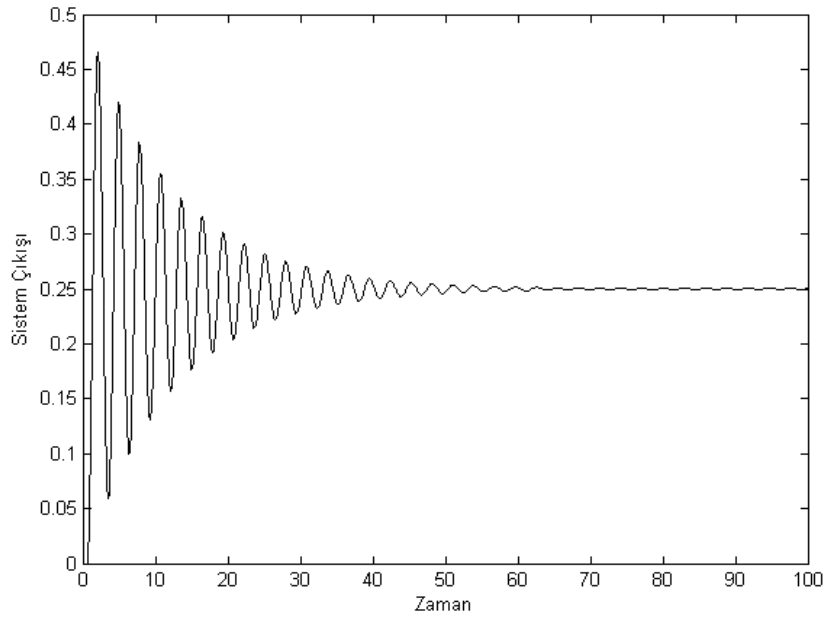
Bu şartlar altında sistemi kararlı kılacak tüm k_p değerlerini bulmak için teorem 4.4'ten yararlanılacak olursa, (4.82) nolu eşitliği çözmek gereklidir ve ω_{10} , (4.99)'nin çözümünden geldiği için (4.82)'nin iki tane çözümü olacaktır. Bu çözümler, yani ω_{10}^* ve ω_{20}^* değerleri sırasıyla 2.1978 ve 5.1154 bulunur. Yine teoremde belirtildiği üzere, ω_{20}^* değeri 3.148'den büyük çıktığı için ilişkili k_{p20} 'ın hesaplanmasına gerek olmayacak, kararlılığı sağlayan tüm k_p 'lerin kümesi (4.79)'la verilecektir; yani kararlılığı sağlayan tüm kontrolör kümesi

$$k_{p10} < k_p < \frac{a_0}{k_s} \quad (4.105)$$

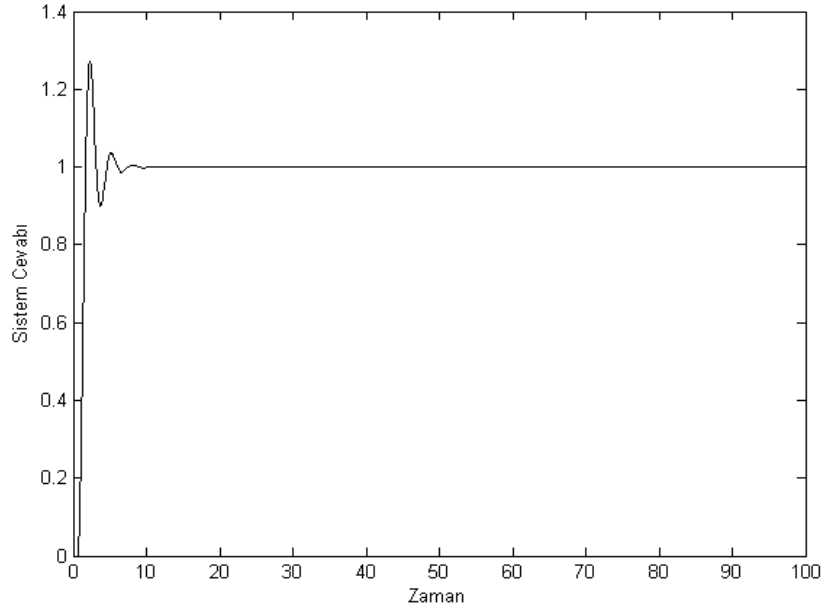
ile karakterize edilebilecektir. (4.81) kullanılarak k_{p10} hesaplanacak olursa, $k_{p10}=1.3617$ olarak bulunur. O halde, verilen sistem için pozitif geribesleme konfigürasyonunda kararlılığı sağlayan tüm P tipi kontrolörlerin kümesi aşağıdaki aralıkla verilebilir:

$$1.3617 < k_p < 10 \quad (4.106)$$

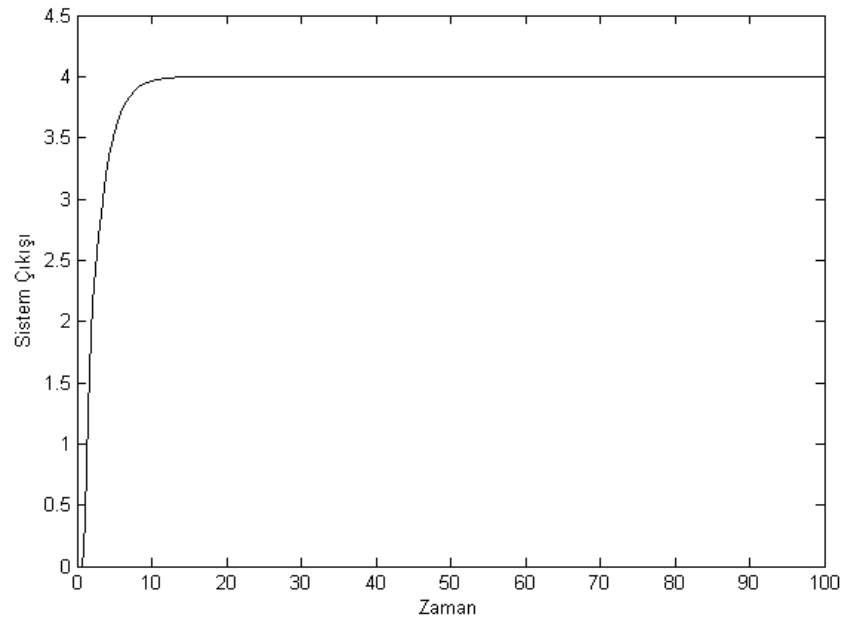
Sistemin çeşitli k_p değerleri için basamak yanıtları şekil 4.13-4.19'te görülmektedir. Şekillerden de fark edilebileceği üzere, elde edilen teorik sonuçlar, benzetim sonuçlarıyla uyumludur.



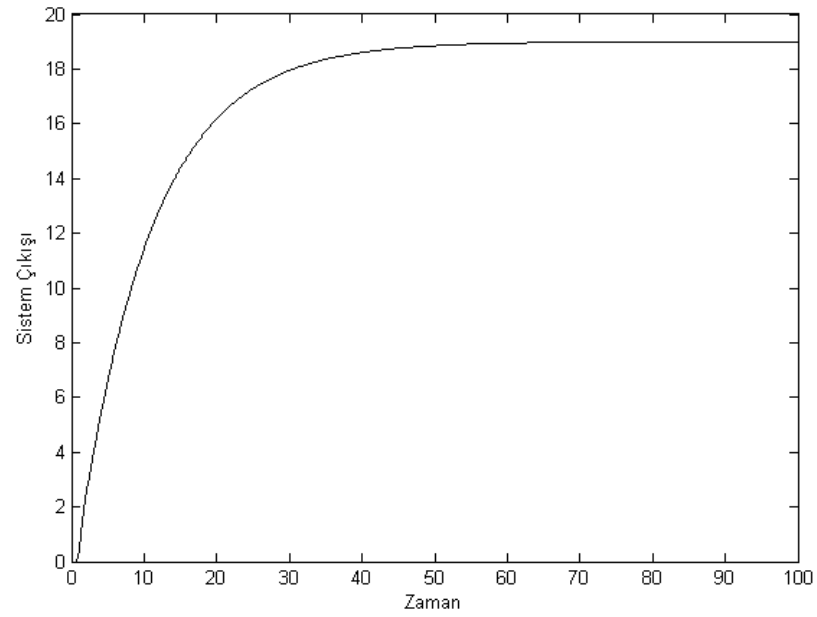
Şekil 4.13 : $k_p=2$ için sistemin basamak yanıtı.



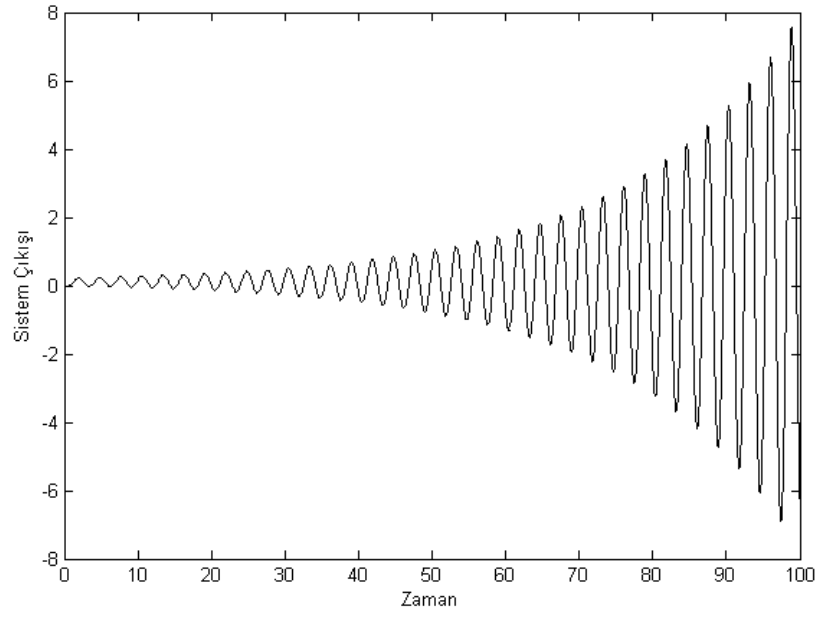
Şekil 4.14 : $k_p=5$ için sistemin basamak yanıtı.



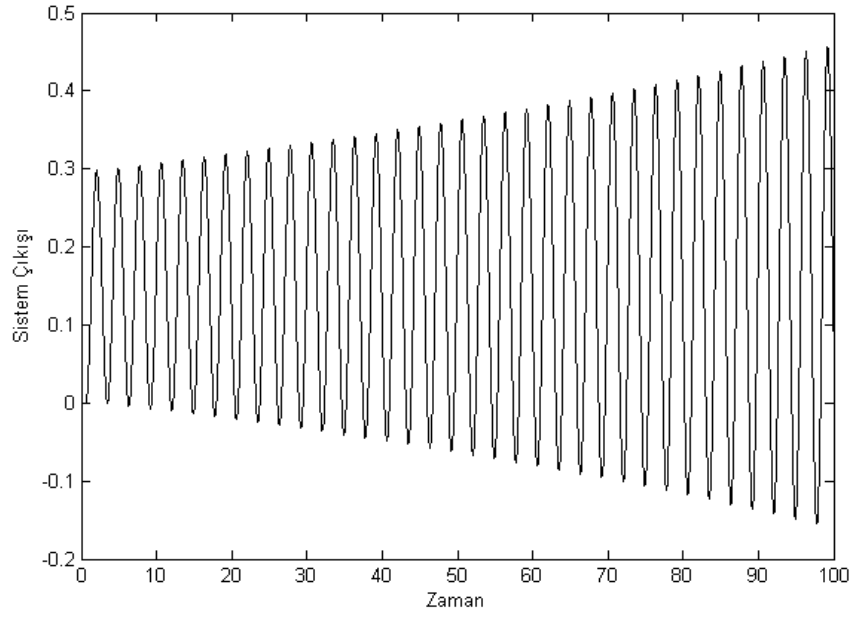
Şekil 4.15 : $k_p=8$ için sistemin basamak yanıtı.



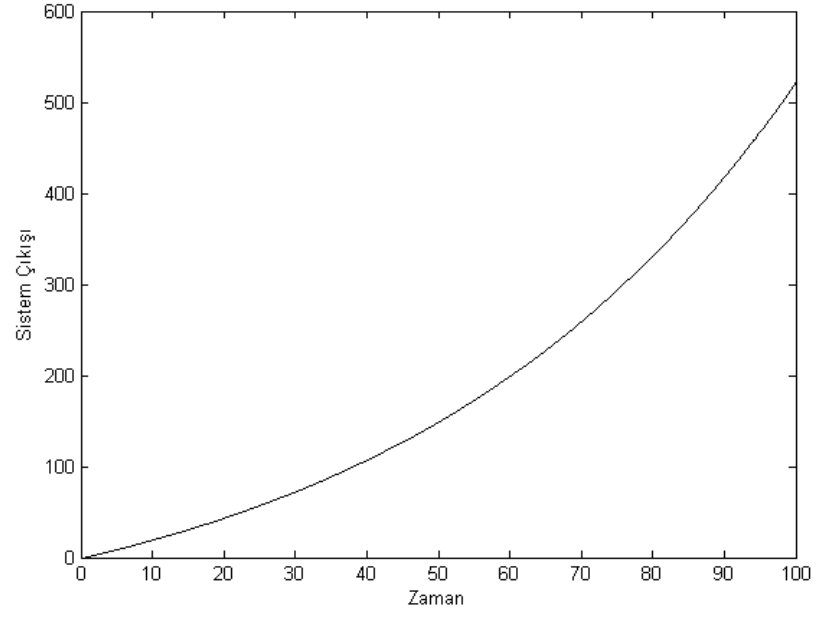
Şekil 4.16 : $k_p=9.5$ için sistemin basamak yanıtı.



Şekil 4.17 : $k_p=1$ için sistemin basamak yanıtı.



Şekil 4.18 : $k_p=1.3$ için sistemin basamak yanıtı.



Şekil 4.19 : $k_p=10.1$ için sistemin basamak yanıtı.

5. İKİNCİ MERTEBEDEN ZAMAN GECİKMELİ OSİLATÖRLER İÇİN KARARLILIĞI SAĞLAYAN TÜM P TİPİ KONTROLÖRLERİN ANALİTİK OLARAK HESAPLANMASI

Bu bölümde, 4. Bölümün özel bir durumu sayılabilecek olan, (4.1) ile verilen sistemde $a_1=0$, yani 2.mertebeden osilatör durumu ele alınacaktır. Bu yapıyı ilginç kılan en önemli detay ise, 2. Mertebeden bir osilatörün, 4. Bölümde (4.15) ve (4.34) ile verilen gerek ve yeter koşulları $\forall k \in \mathbb{N}$ için sağlamasıdır. Yani bu tip sistemler için (L, k_p) uzayında sonsuz adet kararlılık bölgesi çıkacaktır. Ayriyeten de pozitif geribesleme altında sisteme sonsuz küçük bir zaman gecikmesi ilave edildiği takdirde dahi sistem kararlı hale gelecektir. Bir önceki bölümde işlenen temaya paralel olarak, bu sistemler için pozitif geribeslemenin, negatif geribeslemeye kıyasla kararlılık üzerindeki daha etkin olduğu, daha net bir şekilde ortaya çıkacaktır. Daha açık olmak gerekirse, negatif kazançlar için $k=0,1,2,\dots$ için bulunan kararlılık bölgeleri, pozitif kazançlar için bulunan bölgelere kıyasla hep daha geniş çıkacaktır.

Diğer bölümlerdeki çalışmalarda ele alınan sabit zaman gecikmesi durumuna ek olarak bu bölümde parametrik belirsizliğe sahip zaman gecikmeli sistemler de ele alınacaktır.

5.1 Literatür Özeti, Problemin Önemi ve Bölümde Elde Edilen Sonuçların Özeti

Lineer transfer fonksiyonlarıyla modellenen ve iki kutbu da imajiner eksende olan ideal osilatörler, daha çok matematiksel açıdan öneme sahip olan yapılardır. Her ne kadar, gerilim kontrollü ring osilatörü gibi kasıtlı olarak osilasyon yapması için tasarlanmış kapalı çevrimli özel yapılar bulunsun da, bunlar da daha ziyade elektronik sistemlerde saat frekansı üretmede kullanılmaktadırlar [40].

Eğer gerçek dünyada osilasyon yapan sistemler aranacak olursa bunlara örnek olarak sürtünmenin ihmal edildiği ötelemeli veya dönel mekanik sistemler veya direnç etkisinin ihmal edildiği LC devreleri gibi idealleştirilmiş yapılar akla gelebilir. Şüphesiz ki eğer mekanik sistemde serbestlik derecesi 1'se veya LC devresinde 1 adet çevre bulunuyorsa bu sefer elde edilen osilatör ikinci mertebeden olacaktır. Ancak tahmin edilebileceği üzere fiziksel sistemlerin osilatör olarak davranmasını pratikte

imkansız kılan şey, ideal yapılarından dolayı sistemde enerji harcanmamasıdır; zira pratikte enerji harcamayan sistem yoktur. O sebeple kendi başına osilasyon yapması mümkün olan sistemin olmadığını söylemek, yanlış olmayacaktır.

Özetlemek gerekirse, kasıtlı olarak kontrol mekanizmalarıyla bir sisteme osilasyon yaptırılması pratikte sıkça rastlanabilen bir durumdur; ancak kendi halinde osilasyon yapan bir sistem bulunamayacağı için, fiziksel olarak bir osilatörün kontrol edilip kararlı kılınması pek rastlanan bir durum olmayacaktır.

Ancak olaya matematiksel olarak yaklaşıldığında, önemli sonuçlara zemin hazırladığından, bir osilatörün, bilhassa ikinci mertebeden bir osilatörün kasıtlı olarak eklenen bir zaman gecikmesiyle kararlı kılınması, literatürde kendine sıkça yer bulmuştur [41 – 46]. Burada amaç, normalde bir P tipi kontrolörle kararlı kılınamayacak ikinci mertebeden bir osilatörün, kasıtlı olarak geribeslemeye eklenen zaman gecikmeli bir P tipi kontrolörle kararlı kılınmasıdır. Bu durum, bir bakıma PD ya da PI kontrolördeki gibi, iki parametrelili bir kontrol uygulamasıdır.

Bu çalışmalarda özellikle vurgulanan nokta, sistemin belli bir performans altında çalışmasının arzulandığı k değeri baştan tespit edilerek, bu k değerleri için sistemi hangi L değerlerinin kararlı kıldığının tespiti olmaktadır. Bir başka deyişle, sabit bir k için sistemi kararlı kılan tüm L değerleri belirlenirse, böylece bu değerler arasından uygun bir L seçilerek, sistem kararlı kılınabilecektir.

Yine bu çalışmaların hemen tümünde pozitif çıkış geribeslemesinden yararlanılmıştır. Bunun muhtemel bir sebebi ise, normalde kararlılık açısından negatif etkileri olduğu bilinen iki durum: zaman gecikmesi ve pozitif geribesleme, ikinci mertebeden osilatörler düşünüldüğünde, oldukça pozitif etkiler ortaya çıkarmaktadır. Zira pozitif geribesleme altında, sonsuz küçük bir zaman gecikmesi ortaya çıktığında derhal kararlı olan bu sistemler, oldukça geniş sayılabilecek bir k_p aralığı boyunca kararlı kalabilmektedir. Üstelik bu kararlılık, zaman gecikmesi belli bir değere ulaşana kadar da devam etmektedir. Ancak negatif geribesleme durumunda, kararlılık etkileri daha sınırlı kalacağı için, bu durum anılan çalışmalarda genellikle kendine yer bulamamıştır.

Bu bölümde probleme olan bakış açısı ise, zaman gecikmesinin osilatörün kendi iç dinamiklerinden kaynaklandığı varsayımıyla, ilgili osilatörü kararlı kılacak tüm k_p 'lerin tespitidir. Yani burada zaman gecikmesinin sabit olduğu varsayılmış ve

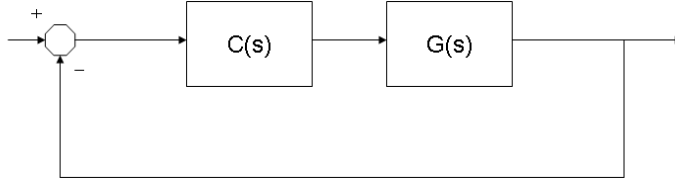
sistemi kararlı kılan tüm k_p kümesi hem pozitif k_p 'ler (negatif geribesleme eşdeğeri) hem de negatif k_p 'ler (pozitif geribesleme eşdeğeri) için elde edilmiştir. Her iki durum hem ayrı ayrı, hem de birleşik düşünüldüğünde, (L, k_p) düzleminde sistemi kararlı kılan sonsuz adet bölgenin olduğu gösterilmiştir. Daha da ilginç olanı, zaman gecikmesine sahip olan osilatörün, L uzayındaki ayrık bir takım noktalar haricinde zaman gecikmesi her ne olursa olsun, kendisini kararlı kılabilcek bir k_p kümesi mutlaka ama mutlaka bulunacaktır ve bu küme ya pozitif ya da negatif k_p 'lerden oluşacaktır. Ayriyeten yapılan bu çalışma, zaman gecikmesinde parametrik bir belirsizlik olduğu duruma da genişletilmiş ve belirli bir aralığa sahip L değerleri için, yani $L_{sys} \in [L_{sys}^-, L_{sys}^+]$ için de kararlılığı sağlayan tüm k_p değerlerinin hangi durumlarda olacağı tespit edilip, var olan durumlar için kararlılığı sağlayan tüm k_p değerleri hesaplanmıştır.

Yani bu bölümde sunulacak olan çalışma, probleme olan bakış açısı itibariyle literatürde olanların bir tamamlayıcısı, elde edilen sonuçlar itibariyle de literatürde var olanların genişletilmiş hali olarak kabul edilebilir.

Bölüm şu şekilde kurgulanmıştır: Önce problemin tanımı yapılmış, daha sonra ise osilatörden daha da özel bir yapı olan ikinci mertebeden integratörler için kararlılığı sağlayan tüm P tipi kontrolörlerin kümesinin boş küme olduğu gösterilmiştir. Daha sonra ise sistemi, verilen sabit bir zaman gecikmesi değeri için kararlı kılacak hem pozitif k_p 'ler hem de negatif k_p 'lerin kümesi birer teoremle verilmiştir. Verilen bir L_{sys} için sistemi kararlı kılan pozitif k_p 'ler mevcutsa, aynı gecikme değeri için negatif k_p 'lerin mevcut olamayacağı, ya da bu durumun tam tersinin de makbul olacağı gösterilmiş, bu bilgiler ışığında verilen bir L_{sys} için kararlılığı sağlayan tüm k_p 'lerin kümesinin bulunmasını sağlayan bir algoritma önerilmiştir. En son olarak bulunan sonuçlar sistemde parametrik bir zaman gecikmesi olduğu duruma genişletilmiş ve buna ilişkin bir teorem verilmiştir. Verilen teorik bilgilerin uygulanması için sonuçlar matematiksel bir sistem üzerinde gösterilmiştir.

5.2 Problemin Tanımlanması

Daha önceki bölümlerde de olduğu gibi, bu bölümde de, birim geribeslemeli kontrol yapısı kullanılacaktır ve bu yapı şekil 5.1'de görülmektedir. Burada $G(s)$ ve $C(s)$ ile verilen ifadeler sırasıyla 2. Mertebeden bir osilatör ($a_0 > 0$) ve P tipi kontrolör olup, transfer fonksiyonları şu şekildedir:



Şekil 5.1 : İlgilenilen kontrol yapısı.

$$G(s) = \frac{k_s}{s^2 + a_0} e^{-sL_{sys}} \quad (5.1)$$

$$C(s) = k_p \quad (5.2)$$

Burada k_s , negatif olmayan sistem kazancını ($k_s > 0$), L_{sys} ise sistemin bilinen ve sabit zaman gecikmesini ($L_{sys} > 0$) ifade etmektedir. Eğer kapalı çevrimli sistemin karakteristik ifadesi, $P_c(s)$ çıkartılacak olursa, aşağıdaki polinomsu elde edilecektir:

$$P_c(s) = s^2 + a_0 + k_p k_s e^{-sL_{sys}} = 0 \quad (5.3)$$

Bölümün geri kalanında yapılacak olan işlemleri ve analitik ifadeleri basitleştirmesi için, daha önceki bölümlerde de yapıldığı üzere, eğer sistem kazancı k_s , kontrolör parametresinin içine gömülüp, $K_p := k_s k_p$ şeklinde değişken dönüşümü yapılırsa, $P_c(s)$ aşağıdaki hale gelecektir:

$$K_p := k_s k_p \rightarrow P_c(s) = s^2 + a_0 + K_p e^{-sL_{sys}} = 0 \quad (5.4)$$

Buradaki amaç, verilen bir L_{sys} için, bu şartlar altında sistemi kararlı kılacak tüm k_p kümesini tespit etmektir. Açık bir şekilde, karakteristik ifadesi (5.4) ile verilen sistem, zaman gecikmesinin yokluğunda, yani $L_{sys} = 0$ iken bir P tipi kontrolörle kararlı kılınamamaktadır ve bu durum zaman gecikmesinin varlığında mümkün olabilecektir.

Çalışmada bir basamak oluşturması açısından, daha da özel bir yapı olan integratör, yani $a_0 = 0$ durumu ilk olarak ele alınacaktır.

5.3 İntegratör Durumu ($a_0 = 0$)

Bu durum için (5.4) ile verilen kapalı çevrim ifadesi aşağıdaki yapıya dönüşecektir:

$$P_c(s) = s^2 + K_p e^{-sL_{sys}} = 0 \quad (5.5)$$

Eğer burada, 2. Bölümde verilen kararlılık yönteminin ilk adımı uygulanırsa, yani zaman gecikmesiz sistem kararlılık açısından analiz edilirse, $K_p < 0$ için zaman

gecikmesiz sistem kararsız olacak, ve $K_p > 0$ için zaman gecikmesiz sistem marjinal kararlı (osilasyonlu) olacaktır.

Eğer ikinci adım devreye alınırsa, yani sisteme sonsuz küçük bir L değeri verilirse, sonsuz sayıda kapalı çevrim kutbu oluşacak ve bu oluşan kutupların hepsi de $\text{derece}(D(s)) < \text{derece}(N(s))$ olduğundan dolayı sol yarı s düzleminde ortaya çıkacaklardır. Yani kararlı kılınabilirlik açısından sisteme ek bir problem yaratmayacaklardır.

3. adım gereği, artan L değerleri için imajiner eksenin kesildiği frekansları bulmak adına (2.8)'deki gibi $W(\omega^2)$ polinomu oluşturulacak olursa, aşağıdaki yapı elde edilir:

$$W(\omega^2) = \omega^4 - K_p^2 \quad (5.6)$$

Rahatlıkla tespit edilebileceği üzere, bu polinom bir adet pozitif reel köke sahiptir ve bu kök aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\omega^2 = |K_p| \quad (5.7)$$

Eğer $W'(\omega^2)$ 'nin bu kök için değeri hesaplanacak olursa, bu değer pozitif çıkacağı rahatlıkla söylenebilir. O halde (5.5) ile verilen kapalı çevrimli ifadede, artan L değerleriyle kutuplar sadece sol yarı s düzleminde sağ yarı s düzlemine geçeceklerdir; yani tüm geçişler kararsızlık yönünde olacaktır.

Daha önce belirtildiği ve rahatlıkla tespit edileceği üzere, $K_p < 0$ için zaman gecikmesiz kapalı çevrimli sistem kararsızdır. Zaman gecikmesinin de kararlı yapıcı yönde kök geçirme özelliğinin olmadığı göz önüne alınacak olursa, bu kontrolör değerleri için, kapalı çevrimli zaman gecikmeli sistemin kararlı olabilme ihtimali kalmayacaktır. Dolayısıyla tüm negatif K_p değerleri, kararlılığı sağlayan kontrolör kümesinden rahatlıkla elimine edilebilir.

Eğer sol yarı s düzleminde sağ yarı s düzlemine kök geçişine nedene olan L değerleri (2.7)'deki ilişki kullanılarak hesaplanacak olursa, aşağıdaki denklem takımı elde edilecektir:

$$\cos(L\omega) = \frac{\omega^2}{K_p} = \frac{|K_p|}{K_p} = 1, \quad \sin(L\omega) = 0 \quad (5.8)$$

Bu denklem takımı, $L=0$ için iki tane kapalı çevrim kutbunun imajiner ekseninde olduğunu ve artan L değeriyle, yani L pozitif olur olmaz bu iki kapalı çevrim kutbunun

anında sağ yarı s düzlemine geçeceğini söylemektedir. Bu durum, zaman gecikmesinin kararlı yapıcı yönde kök geçirme özelliğinin olmadığıyla birleştirilecek olursa, ikinci mertebeden zaman gecikmesine sahip bir integratörün, şekil 5.1’de verilen kontrol konfigürasyonu altında bir P tipi kontrolörle kararlı kılınamayacağı rahatlıkla söylenebilir. Sonuç olarak bu durum için kararlılığı sağlayan tüm P tipi kontrolörlerin kümesi boş kümedir.

$$k_p = \emptyset \quad (5.9)$$

5.4 Osilatör Durumu ($a_0 > 0$)

Bu durumda (5.1) ile verilen sistemin karakteristik ifadesi aşağıdaki gibi olacaktır:

$$P_c(s) = s^2 + a_0 + K_p e^{-sL_{sys}} = 0 \quad (5.10)$$

İntegratör durumunda olduğu gibi, kararlılık yönteminin 1. adımı uygulanacak olursa, zaman gecikmesiz sistemin $K_p < -a_0$ için kararsız olduğu ve $K_p > -a_0$ için de marjinal kararlı olduğu söylenebilir.

2. adım gereği, eğer sisteme yani (5.10)’a sonsuz küçük bir L değeri eklenecek olursa, sistemin kapalı çevrimli kutup sayısı sonsuz olacak, ancak integratör durumunda olduğu gibi bu kutupların tümü sol yarı s düzleminde ortaya çıkacaktır. Yani sonsuz küçük zaman gecikmesinin sisteme eklenmesi, sistemin kararlı kılınabilirliği açısından bir problem teşkil etmeyecektir.

Yöntemin 3. adımı gereği, artan L değerleriyle (5.10)’un köklerinin hangi frekanslardan geçerek yarı düzlem değiştirdiğini hesaplamak için $W(\omega^2)$ hesaplanacak olursa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$W(\omega^2) = \omega^4 - 2a_0\omega^2 + a_0^2 - K_p^2 = 0 \quad (5.11)$$

Açık bir şekilde, $W(\omega^2)$ ’nin aşağıda verilen iki adet karesel frekansta kökü olacaktır:

$$\omega_{1,2}^2 = a_0 \mp |K_p| \quad (5.12)$$

Rahatlıkla hesaplanabileceği üzere, $W'(\omega_1^2) > 0$ ve $W'(\omega_2^2) < 0$ ’dır. Bu bilgiden hareketle ω_1^2 ve ilişkili L değerleri sol yarı s düzleminden sağ yarı s düzlemine (yani kararsızlık yönünde), ω_2^2 ve ilişkili L değerleri ise sağ yarı s düzleminden sol yarı s düzlemine, yani kararlılık yönünde bir kök geçişine sebep olmaktadır. Notasyon

olarak 4. bölümdeki gibi, ω_1 ile alakalı L değerlerine L_{kd} ($k=0,1,2,\dots$), ω_2 ile alakalı L değerlerine L_{ks} ($k=0,1,2,\dots$) denecek olursa, L_{kd} ve L_{ks} 'ye ilişkin denklem takımları, (2.7)'nin yardımıyla aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\cos \omega_1 L_{kd} = (\omega_1^2 - a_0) / K_p = |K_p| / K_p, \sin \omega_1 L_{kd} = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (5.13)$$

$$\cos \omega_2 L_{ks} = (\omega_2^2 - a_0) / K_p = |K_p| / K_p, \sin \omega_2 L_{ks} = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (5.14)$$

Bu ifadelerden, $K_p > 0$ için ve $k=0,1,2,\dots$ için, $\omega_1 L_{kd}$ 'nin $2k\pi$ 'ye, $\omega_2 L_{ks}$ 'nin de $(2k+1)\pi$ 'ye eşit olacağı söylenebilir. Buradan rahatlıkla sistemi kararsızlığa götüren en küçük L değerinin, yani L_{0d} 'nin sıfıra eşit olacağı söylenebilir. Daha doğrusu $L_{sys}=L_{0d}=0$ için (5.10)'un bir çift kutbu $\pm j\omega_1$ 'de yer alır ve $L_{sys} > 0$ olduğu anda imajiner ekseninde yer alan bu iki kutup sağ yarı s düzlemine geçer ve sistem zaman gecikmesi barındırmaya başladığı andan itibaren kararsız olur. Daha sonra bu kutuplar L_{sys} artıp en küçük kararlı yapıcı zaman gecikmesi olan $L_{0s}=\pi/\omega_2$ 'ye eşit olduğu an tekrar imajiner eksene ($\pm j\omega_2$ 'de yer alacak şekilde) geri döner ve $L_{sys} > L_{0s}$ için sistem tekrar kararlı olmaya başlar. Açık bir şekilde, bu kararsızlık-kararlılık durumu, $L_{(k+1)d} < L_{kd}$ ilişkisi sağlanıncaya dek tekrarlı bir şekilde devam eder. Bu ilişki sağlandıktan sonra sistem nihai olarak kararsız olur.

Yukarıdaki paragrafta anlatılanlara paralel bir şekilde, $K_p < 0$ için, yani negatif K_p değerleri için, bu sefer $\omega_2 L_{ks}=2k\pi$ 'ye, $\omega_1 L_{kd}$ ise $(2k+1)\pi$ 'ye eşit olur. Bu durumda da yukarıda anlatılan kararsızlık-kararlılık sırası değişir: $L_{0s}=0$ olacağı için sisteme zaman gecikmesi dahil olduğu an sistem kararlı olmaya başlar. L artıp $L_{sys}=L_{0d}=\pi/\omega_1$ 'e eşit olduğu an sol yarı düzleme geçen bu iki kutup tekrar imajiner eksene ($\pm j\omega_1$ 'de yer alacak şekilde) geri döner ve $L_{sys} > L_{0d}$ için sistem kararsız olmaya başlar. Aynı şekilde, bu kararlılık-kararsızlık döngüsü $L_{kd} < L_{ks}$ ilişkisi sağlanıncaya kadar devam eder ve bu ilişki sağlandıktan sonra nihai kararsızlık başlar.

Yorum 5.1 : (5.12)'den de rahatlıkla görülebileceği üzere, (5.10)'un, yani sistemin kararlı yapıcı yönde bir kök geçişine sahip olabilmesi $-a_0 < K_p < a_0$ ilişkisinin sağlanması gerekmektedir. Pozitif K_p değerleri için, sistem zaman gecikmesine sahip olur olmaz kararsızlığa gideceğinden $K_p > a_0$ değerleri için sistemi kararlı kılmak mümkün olmayacaktır. Bu sebeple anılan K_p bölgesi, kararlılığı sağlayan kontrolör kümesinden çıkarılabilir. Aynı şekilde, $K_p < -a_0$ değerleri için zaman gecikmesiz sistem kararsız olacağı için, bu K_p değerleriyle sistemi kararlı kılmak mümkün olmayacaktır.

Dolayısıyla anılan bu kontrolör kümesi de kararlılığı sağlayan kontrolör kümesinden çıkarılabilir. Sonuç olarak, karakteristik ifadesi (5.10) ile verilen sistemin zaman gecikmesi, L_{sys} , ne olursa olsun, kararlılığı sağlayan K_p kümesi $-a_0 < K_p < a_0$ aralığı içinde (veya $-a_0/k_s < k_p < a_0/k_s$) yer alacaktır.

Bu bilgiler ışığında, kararlılığı sağlayan tüm pozitif k_p 'lerin karakterizasyonu için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.1: Kontrol yapısı şekil 5.1'de, transfer fonksiyonu (5.1)'de ve kapalı çevrimli sistem ifadesi (5.10) ile verilen sistemin pozitif bir P tipi kontrolörle kararlı kılınabilmesi için aşağıda verilen koşulun sağlanması gerek ve yeterlidir:

$$L_{sys} \in \left(\frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{a_0}}, \frac{(2k+2)\pi}{\sqrt{a_0}} \right), \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (5.15)$$

Ve bu koşul sağlandığı takdirde kararlılığı sağlayan tüm pozitif k_p 'lerin kümesi aşağıdaki gibi verilebilir:

$$0 < k_p < \frac{a_0 L_{sys}^2 - (2k+1)^2 \pi^2}{k_s L_{sys}^2}, \quad \text{eğer } L_{sys} \in \left(\frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{a_0}}, L^*(k) \right) \text{ ise} \quad (5.16)$$

$$0 < k_p < \frac{(2k+2)^2 \pi^2 - a_0 L_{sys}^2}{k_s L_{sys}^2}, \quad \text{eğer } L_{sys} \in \left[L^*(k), \frac{(2k+2)\pi}{\sqrt{a_0}} \right) \text{ ise} \quad (5.17)$$

Burada $k=0,1,2,\dots$ şeklinde doğal sayılardır ve $L^*(k)$ aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$L^*(k) = \frac{(2k+2)\pi}{\sqrt{\frac{8(k+1)^2}{8k^2+12k+5} a_0}} \quad (5.18)$$

İspat: Teoremin ilk kısmı ilk ifadenin devriğiyle ispatlanacaktır. Yani (5.15)'le verilen koşul sağlanmadığı takdirde sistemin pozitif kontrolörlerle kararlı kılınamayacağı gösterilecektir.

Bu bağlamda, sistemin zaman gecikmesinin, yani L_{sys} 'nin (5.15)'le verilen aralıkta olmadığı varsayalım. Yani böyle bir durumda L_{sys} aşağıda verilen aralıkta yer alacaktır:

$$L_{sys} \in \left(\frac{2k\pi}{\sqrt{a_0}}, \frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{a_0}} \right), \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (5.19)$$

L_{sys} bu aralıkta yer aldığı takdirde, (5.10) ile verilen kapalı çevrimli sistemin en az iki adet sağ yarı s düzlemi kutbuna sahip olacağı gösterilecektir.

Daha önce de belirtildiği üzere, $K_p > 0$ için L_{kd} ve L_{ks} değerleri sırasıyla $2k\pi/\omega_1$ ve $(2k+1)\pi/\omega_2$ ($k=0,1,2,\dots$) olarak verilmişti. Açık bir şekilde L_{kd} ve L_{ks} ω_1 ve ω_2 'nin, dolayısıyla da K_p 'nin fonksiyonlarıdır. (5.12), (5.13) ve (5.14) kullanılarak aşağıdaki ilişkilerin sağlandığı rahatlıkla gösterilebilir:

$$\forall K_p \in (0, a_0) \rightarrow \frac{dL_{kd}}{dK_p} < 0, \quad \frac{dL_{ks}}{dK_p} > 0, \quad (k=0,1,2,\dots) \quad (5.20)$$

Bu durum açık bir şekilde artan K_p değeriyle, kararlılık yönünde kök geçişine neden olacak L_{ks} 'lerin monoton artan bir fonksiyon olduğunu, diğer bir yandan ise kararsızlık yönünde kök geçişine neden olacak L_{kd} 'lerin de monoton azalan bir fonksiyon olduğunu ifade etmektedir. Yani $K_p=0^+$ için L_{ks} ifadelerin minimum değeri elde edilirken, L_{kd} ifadelerinin de maksimumu ortaya çıkmaktadır. (5.12), (5.13) ve (5.14) kullanılarak bu maksimum ve minimum değerler aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$L_{kd \max} = \frac{2k\pi}{\sqrt{a_0}}, \quad L_{ks \min} = \frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{a_0}}, \quad (k=0,1,2,\dots) \quad (5.21)$$

Bu bilgidен hareketle, bir varsayım olarak (5.19) ile verilen sistemin zaman gecikmesinin bulunduğu aralık da dikkate alındığında, bu aralıkta kalan L_{sys} değerleri için aşağıdaki ilişki sağlanmış olacaktır:

$$L_{kd \min} < L_{sys} < L_{ks \max}, \quad (k=0,1,2,\dots) \quad (5.22)$$

Buradan hareketle, bu ilişkiyi sağlayan L_{ys} için sol yarı s düzleminde sağ yarı s düzlemine, ters istikamete kıyasla en az bir tane daha fazla kök geçmiş olacaktır. Özetlemek gerekirse, (5.19) ile verilen aralıkta bulunan L_{sys} 'ler için, K_p $(0, a_0)$ aralığında hangi değeri alırsa alsın, (5.10) ile verilen kapalı çevrimli sistem en az iki adet sağ yarı s düzlemi kutbuna sahip olacaktır.

Teoremin 2. kısmı için, yani (5.15)'in sağlandığı varsayımıyla, $K_p=0^+$ için, L_{sys} 'nin aşağıda verilen aralıkta kaldığı gösterilebilir:

$$L_{ks \min} < L_{sys} < L_{(k+1)d \max}, \quad (k=0,1,2,\dots) \quad (5.23)$$

Bu durumda da açık bir şekilde, $k+1$ kararsızlık yönünde kök geçişine karşılık, $k+1$ tane kararlılık yönünde kök geçişi olacaktır. Ancak (5.23)'ten de rahatlıkla

anlaşabileceği üzere, bu geçişlerden sonuncusu kararlı yapıcı yönde olduğu için (5.10) ile verilen kapalı çevrimli sistem kararlı olacaktır. İspatın ilk kısmında da tartışıldığı üzere, $L_{(k+1)d}$ ve L_{ks} K_p 'nin sırasıyla monoton azalan ve artan fonksiyonlarıdır. Bu durumda, L_{sys} sabit olduğu için, K_p 'nin artmaya başlamasıyla (5.10)'u kararsızlığa götüren iki farklı durum ortaya çıkabilecektir:

i) Kritik bir K_p değeri için, $K_{p1}(k)$ olsun, $L_{ks} < L_{sys}$ ilişkisi sağlanmamaya başlayabilir ($k=0,1,2,\dots$). Böyle bir durumda $K_p \in (K_{p1}(k), a_0)$ değerleri için, en az $k+1$ kararsız yapıcı yönde kök geçişine karşılık, en fazla k tane kararlı yapıcı kök geçişi ortaya çıkacaktır. Böyle bir durumda da (5.10)'un sağ yarı s düzleminde en az 2 tane kökü olacaktır.

ii) Yine kritik bir K_p değeri için, bu sefer de $K_{p2}(k)$ olsun, $L_{(k+1)d} > L_{sys}$ ilişkisi sağlanmamaya başlayabilir. Böyle bir durumda $K_p \in (K_{p2}(k), a_0)$ değerleri için, en az $k+2$ kararsız yapıcı yönde kök geçişine karşılık, en fazla $k+1$ tane kararlı yapıcı kök geçişi ortaya çıkacaktır. Böyle bir durumda da (5.10)'un sağ yarı s düzleminde en az 2 tane kökü olacaktır.

Daha önce de ifade edildiği üzere, $K_p=0^+$ için, (5.23) ile verilen ilişki ağırlanacaktır. Ancak K_p 'nin artmasıyla, monoton bir şekilde azalan $L_{(k+1)d}$ ile monoton bir şekilde artan L_{ks} birbirine yaklaşacak, ve kritik bir K_p değeri için birbirleriyle eşit olmaya başlayacaklardır. Bu kritik K_p değerine $K_p^*(k)$ ve ilişkili L değerine, yani $L_{(k+1)d}=L_{ks}$ değerine de $L^*(k)$ denecek olursa, $K_p^*(k)$, (5.12), (5.13) ve (5.14)'un yardımıyla, $L_{(k+1)d}=L_{ks}$ eşitsizliğinin çözümünden aşağıdaki gibi bulunacaktır:

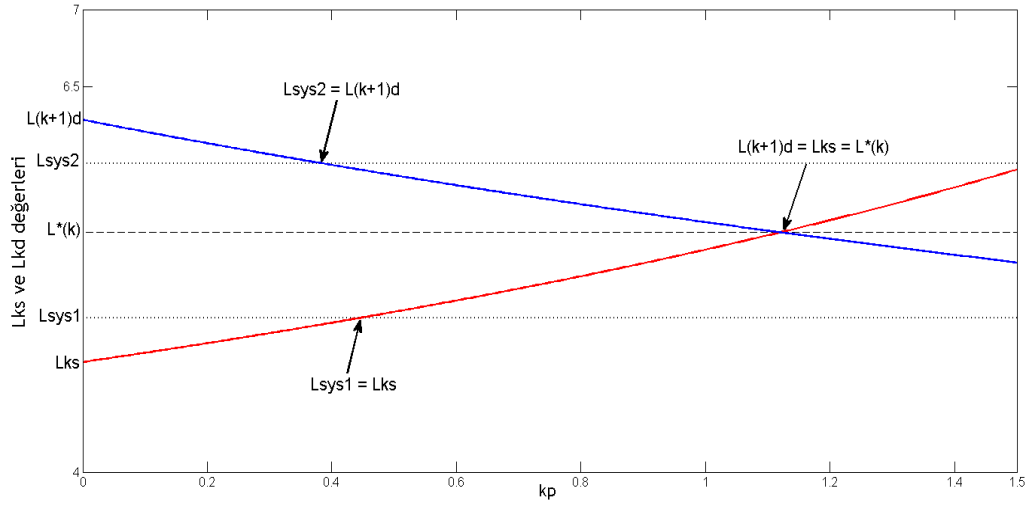
$$K_p^*(k) = \frac{4k+3}{8k^2+12k+5} a_0, \quad (k=0,1,2,\dots) \quad (5.24)$$

(5.12) dikkate alınır, (5.24) ile bulunan sonuç (5.13) veya (5.14)'te yerine konacak olursa, $L^*(k)$, aşağıdaki gibi bulunacaktır:

$$L^*(k) = \frac{(2k+2)\pi}{\sqrt{\frac{8(k+1)^2}{8k^2+12k+5} a_0}}, \quad (k=0,1,2,\dots) \quad (5.25)$$

Açık bir şekilde, $L_{sys} \in ((2k+1)\pi/\sqrt{a_0}, L^*(k))$ için kararlılığı belirleyen eşitsizlik, bir önceki sayfada belirtilen (i) maddesinden gelecek, yani $L_{ks} < L_{sys}$ olacaktır. Yine $L_{sys} \in [L^*(k), (2k+2)\pi/\sqrt{a_0})$ için ise kararlılığı belirleyen eşitsizlik, bir önceki sayfada

belirtilen (ii) maddesinden gelecek, yani $L_{(k+1)d} > L_{sys}$ olacaktır. Bu anlatılan detayların tümü, mevzunun daha iyi anlaşılabilmesi açısından şekil 5.2’de gösterilmiştir.



Şekil 5.2 : $L_{(k+1)d}$, L_{ks} , $L^*(k)$ ifadelerinin (L, k_p) düzlemindeki görünüşleri.

Hangi eşitsizliğin kullanılacağına, yani $L_{ks} < L_{sys}$ veya $L_{(k+1)d} > L_{sys}$ ’den uygun olanına karar verilip (5.12), (5.13) ve (5.14)’un yardımıyla K_p için bu eşitsizliklerden uygun olanı çözdürülür ve (5.4) vasıtasıyla da asıl kontrolör parametresi olan k_p ’ye geçilirse, aşağıdaki kararlılık kümeleri elde edilir:

$$0 < k_p < \frac{a_0 L_{sys}^2 - (2k+1)^2 \pi^2}{k_s L_{sys}^2}, \text{ eğer } L_{sys} \in \left(\frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{a_0}}, L^*(k) \right) \text{ ise} \quad (5.26)$$

$$0 < k_p < \frac{(2k+2)^2 \pi^2 - a_0 L_{sys}^2}{k_s L_{sys}^2}, \text{ eğer } L_{sys} \in \left[L^*(k), \frac{(2k+2)\pi}{\sqrt{a_0}} \right) \text{ ise} \quad (5.27)$$

Burada, $L^*(k)$ (5.25)’te (veya (5.18)’de) verildiği şekilde olacaktır. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Benzeri bir mantıkla, negatif k_p ’lerden oluşacak olana kararlılık kümesinin karakterizasyonu da aşağıdaki teoremle ifade edilebilir:

Teorem 4.2: Kontrol yapısı şekil 5.1’de, transfer fonksiyonu (5.1)’de ve kapalı çevrimli sistem ifadesi (5.10) ile verilen sistemin negatif bir P tipi kontrolörle kararlı kılınabilmesi için aşağıda verilen koşulun sağlanması gerek ve yeterlidir:

$$L_{sys} \in \left(\frac{2k\pi}{\sqrt{a_0}}, \frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{a_0}} \right), \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (5.28)$$

Ve bu koşul sağlandığı takdirde kararlılığı sağlayan tüm negatif k_p 'lerin kümesi aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\frac{4k^2\pi^2 - a_0L_{sys}^2}{k_sL_{sys}^2} < k_p < 0, \text{ eğer } L_{sys} \in \left(\frac{2k\pi}{\sqrt{a_0}}, L^*(k) \right) \text{ ise} \quad (5.29)$$

$$\frac{a_0L_{sys}^2 - (2k+1)^2\pi^2}{k_sL_{sys}^2} < k_p < 0, \text{ eğer } L_{sys} \in \left[L^*(k), \frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{a_0}} \right) \text{ ise} \quad (5.30)$$

Burada $k=0,1,2,\dots$ şeklinde doğal sayılardır ve $L^*(k)$ aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$L^*(k) = \frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{\frac{8(k+0.5)^2}{8k^2+4k+1}a_0}}, \quad (k=0,1,2,\dots) \quad (5.31)$$

İspat: İspatın temelleri, dayandırıldığı noktalar ve ilerleyiş biçimi teorem 4.1'le aynı oluğu için bu teoremin ispatı atlanmıştır.

Buraya kadar ifade edilen fikirler ve teoremlerden aşağıdaki yorumlara ulaşılabilir:

Yorum 5.2: Kontrol yapısı şekil 5.1'de, transfer fonksiyonu (5.1)'de ve kapalı çevrimli sistem ifadesi (5.10) ile verilen sistemi, L_{sys} 'nin değeri ne olursa olsun kararlı kılacak boş olmayan bir kontrolör kümesi mutlaka bulunacaktır. Bu durum, sadece sistemin zaman gecikmesi L uzayında aşağıdaki ayrık değerleri aldığı müddetçe geçerli olmayacaktır:

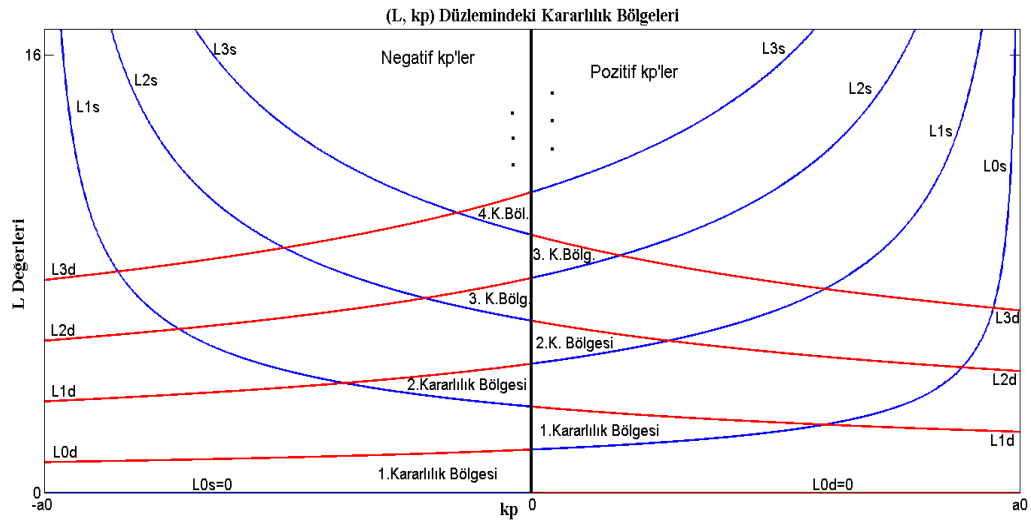
$$L_{sys} = \frac{2k\pi}{\sqrt{a_0}}, \frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{a_0}}, \dots, \quad (k=0,1,2,\dots) \quad (5.32)$$

Eğer L_{sys} bu değerleri alacak olursa, kararlılık kümesi sadece $k_p=0$ olacaktır; bu durumda da sistem marjinal kararlı olabilecektir; yani osilasyon yapacaktır.

Yorum 5.3: Kontrol yapısı şekil 5.1'de, transfer fonksiyonu (5.1)'de ve kapalı çevrimli sistem ifadesi (5.10) ile verilen sistemi kararlı kılacak olan P kontrolörlerin kümesi, L_{sys} 'nin değerine bağlı olarak, ya sadece negatif, ya da sadece pozitif değerlerden oluşacaktır. Bir başka deyişle, eğer (5.10) ile verilen sistemi kararlı kılan kontrolör kümesi pozitif değerlerden oluşuyorsa, o zaman bu sistemi kararlı kılacak negatif bir kümenin bulunamayacağı kesindir. Aynı mantıkla eğer (5.10) ile verilen sistemi kararlı kılan kontrolör kümesi negatif değerlerden oluşuyorsa, o zaman bu sistemi kararlı kılacak pozitif bir kümenin bulunamayacağı kesindir.

Yorum 5.4: Kontrol yapısı şekil 5.1’de, transfer fonksiyonu (5.1)’de ve kapalı çevrimli sistem ifadesi (5.10) ile verilen sistemi kararlı kılan en geniş kontrolör kümesi, $L_{sys} \in \left((2k+1)\pi/\sqrt{a_0}, (2k+2)\pi/\sqrt{a_0} \right)$ olduğunda L_{sys} , ifadesi (5.18) ile verilen $L^*(k)$ ’ya eşitken, aynı şekilde $L_{sys} \in \left(2k\pi/\sqrt{a_0}, (2k+1)\pi/\sqrt{a_0} \right)$ olduğunda, L_{sys} , ifadesi (5.31) ile verilen $L^*(k)$ ’ya eşitken elde edilmektedir. Bir başka deyişle, her iki durumda da L_{sys} , $L_{sys} < L^*(k)$ veya $L_{sys} > L^*(k)$ olacak şekilde değerler aldığı anda, kararlılığı sağlayan kontrolör kümesi giderek daralmakta ve L_{sys} ilişkili aralığın sınırlarına geldiğinde ise $k_p=0$ ’a düşmektedir.

Buradaki yorumları daha anlaşılır hale getirmek adına, (5.1) (veya(5.10)) ile verilen sistemi kararlı kılan tüm P kontrolörlerin kümesi şekil 3’teki gibi bir şekilde olacaktır:



Şekil 5.3 : (5.1) ile verilen sistemi kararlı kılan tüm P kontrolörlerin genel yapısı.

Kontrol konfigürasyonu şekil 5.1’le, transfer fonksiyonu da (5.1) ile verilen, sabit bir zaman gecikmesine sahip ikinci mertebeden bir osilatörü kararlı kılan tüm P kontrolörlerin kümesini sistematik bir şekilde bulunması için, aşağıdaki algoritma önerilebilir:

Algoritma 5.1: Kontrol konfigürasyonu şekil 5.1’le, transfer fonksiyonu da (5.1) ile verilen, sabit bir zaman gecikmesine sahip ikinci mertebeden bir osilatörü kararlı kılan tüm P kontrolörlerin kümesi aşağıdaki adımlar izlenerek tespit edilebilir:

Adım 1: Sistemin zaman gecikmesinin, yani L_{sys} değerinin hangi bantta olduğu, tespit edilir; yani $k=0,1,2,\dots$ olmak üzere, $L_{sys} \in \left(2k\pi/\sqrt{a_0}, (2k+1)\pi/\sqrt{a_0} \right)$ ilişkisinin mi,

yoksa $L_{sys} \in ((2k+1)\pi/\sqrt{a_0}, (2k+2)\pi/\sqrt{a_0})$ ilişkisinin mi geçerli olduğu tespit edilir ve k değeri belirlenir.

Adım 2: Eğer L_{sys} bu bantların tam olarak sınır değerlerinden birine eşitse, yani $L_{sys} = 2k\pi/\sqrt{a_0}, (2k+1)\pi/\sqrt{a_0}, (k = 0,1,2,...)$ ilişkilerinden herhangi biri geçerliyse, bu durumda kararlılığı sağlayan k_p kümesi boş kümedir. Böyle bir durumda sistem ancak $k_p=0$ için marjinal kararlı olabilecek, yani osilasyon yapacaktır.

Adım 3: Eğer sistemin zaman gecikmesinin içinde bulunduğu bant $L_{sys} \in (2k\pi/\sqrt{a_0}, (2k+1)\pi/\sqrt{a_0})$ ile ifade ediliyorsa, sistemi kararlı kılacak tüm P tipi kontrolörlerin kümesi sadece negatif değerlerden oluşacaktır. Bu değerler, adım 1'deki bulunan k değeri alınarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\frac{4k^2\pi^2 - a_0L_{sys}^2}{k_sL_{sys}^2} < k_p < 0, \text{ eğer } L_{sys} \in \left(\frac{2k\pi}{\sqrt{a_0}}, \frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{\frac{8(k+0.5)^2}{8k^2+4k+1}a_0}} \right) \text{ ise} \quad (5.33)$$

$$\frac{a_0L_{sys}^2 - (2k+1)^2\pi^2}{k_sL_{sys}^2} < k_p < 0, \text{ eğer } L_{sys} \in \left[\frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{\frac{8(k+0.5)^2}{8k^2+4k+1}a_0}}, \frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{a_0}} \right] \text{ ise} \quad (5.34)$$

Adım 4: Eğer sistemin zaman gecikmesinin içinde bulunduğu bant $L_{sys} \in ((2k+1)\pi/\sqrt{a_0}, (2k+2)\pi/\sqrt{a_0})$ ile ifade ediliyorsa, sistemi kararlı kılacak tüm P tipi kontrolörlerin kümesi sadece negatif değerlerden oluşacaktır. Bu değerler, adım 1'deki bulunan k değeri alınarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$0 < k_p < \frac{a_0L_{sys}^2 - (2k+1)^2\pi^2}{k_sL_{sys}^2}, \text{ eğer } L_{sys} \in \left(\frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{a_0}}, \frac{(2k+2)\pi}{\sqrt{\frac{8(k+1)^2}{8k^2+12k+5}a_0}} \right) \text{ ise} \quad (5.35)$$

$$0 < k_p < \frac{(2k+2)^2\pi^2 - a_0L_{sys}^2}{k_sL_{sys}^2}, \text{ eğer } L_{sys} \in \left[\frac{(2k+2)\pi}{\sqrt{\frac{8(k+1)^2}{8k^2+12k+5}a_0}}, \frac{(2k+2)\pi}{\sqrt{a_0}} \right] \text{ ise} \quad (5.36)$$

Pekala, burada bulunan sonuçlar, verilen teoremler ve yorumlardan hareketle, L_{sys} 'nin parametrik bir belirsizliğe sahip olduğu duruma genişletilebilir. Tahmin edilebileceği üzere, böyle bir durumda, L_{sys} sabit bir değere eşit olmak yerine, $L_{sys} \in [L_{sys}^- L_{sys}^+]$ olacak şekilde bir belirsizliğe sahip olacaktır. Bu durumda, kararlılığı sağlayan tüm P tipi kontrolörlerin kümesi aşağıda verilen teoremle belirsiz zaman gecikmesine sahip ikinci mertebeden osilatörlere genişletilebilir:

Teorem 5.3 (Belirsiz Zaman Gecikmesi Durumu): Kontrol yapısı şekil 5.1'de, transfer fonksiyonu (5.1)'de ve kapalı çevrimli sistem ifadesi (5.10) ile verilen sistemin, zaman gecikmesi üzerinde, $L_{sys} \in [L_{sys}^- L_{sys}^+]$ olacak şekilde bir parametrik belirsizlik olduğu varsayılın. Ve aynı şekilde $L_{sys}=L_{sys}^-$ ve $L_{sys}=L_{sys}^+$ için algoritma 5.1 kullanılarak kararlılığı sağlayan tüm k_p kümeleri, (5.33)-(5.34)'ten (veya (5.35)-(5.36)'dan) uygun olanı kullanılarak, $(0, k_p(L_{sys}^-))$ (veya $(k_p(L_{sys}^-), 0)$) ve $(0, k_p(L_{sys}^+))$ (veya $(k_p(L_{sys}^+), 0)$) olarak karakterize edilmiş olsun. Bu durumda kararlılığı sağlayan tüm P kontrolörlerin kümesi, aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\emptyset, \text{ eğer } [L_{sys}^-, L_{sys}^+] \notin \left(\frac{2k\pi}{\sqrt{a_0}}, \frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{a_0}} \right) \text{ veya } \left(\frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{a_0}}, \frac{(2k+2)\pi}{\sqrt{a_0}} \right) \text{ ise} \quad (5.37)$$

$$\left(\max \{k_p(L_{sys}^-), k_p(L_{sys}^+)\}, 0 \right), \text{ eğer } [L_{sys}^-, L_{sys}^+] \in \left(\frac{2k\pi}{\sqrt{a_0}}, \frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{a_0}} \right) \text{ ise} \quad (5.38)$$

$$\left(0, \min \{k_p(L_{sys}^-), k_p(L_{sys}^+)\} \right), \text{ eğer } [L_{sys}^-, L_{sys}^+] \in \left(\frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{a_0}}, \frac{(2k+2)\pi}{\sqrt{a_0}} \right) \text{ ise} \quad (5.39)$$

İspat: Bu teoremin ispatı, teorem 5.1-teorem 5.2, bu teoremlerin ispatında değinilen detaylar ve yorum 5.2 - 5.4'ün harmanlanmasıyla rahatlıkla elde edilebileceğinden, ispata burada yer verilmemiştir.

Bölümün geri kalanında, burada anlatılan teorik sonuçların daha anlaşılabilir kılınması açısından, sayısal bir örneğe yer verilecektir.

5.5 Sayısal Örnek

Bu bölümde, ikinci mertebeden bir osilatör baz alınarak, farklı zaman gecikmeleri durumunda kararlılık kümeleri ayrı ayrı hesaplanacaktır:

Örnek: Şekil 5.1’de verildiği gibi bir kontrol konfigürasyonu düşünölsün ve $G(s)$ ’in de aşağıda verilen yapıda, zaman gecikmesine sahip olan bir osilatör olduğu varsayölsün:

$$G(s) = \frac{0.5}{s^2 + 2} e^{-sL_{sys}} \quad (5.40)$$

Bu sistem için, L_{sys} ’nin aşağıda verilen değörlere sahip olması durumunda, kararlılığı sağlayan tüm P tipi kontrolörlerin ne olacağı ayrı ayrı tespit edölsün.

a) $L_{sys}=3.5sn$

b) $L_{sys} \in [4.8sn, 6.1sn]$

c) $L_{sys} \in [4sn, 5sn]$

Rahatlıkla tespit edilebileceği üzere, bu sistem için, (5.1)’den hareketle $k_s=0.5$ ve $a_0=2$ ’dir. O halde şimdi bu ayrı durumlar için kararlılığı sağlayan tüm kazançlar hesapölsün:

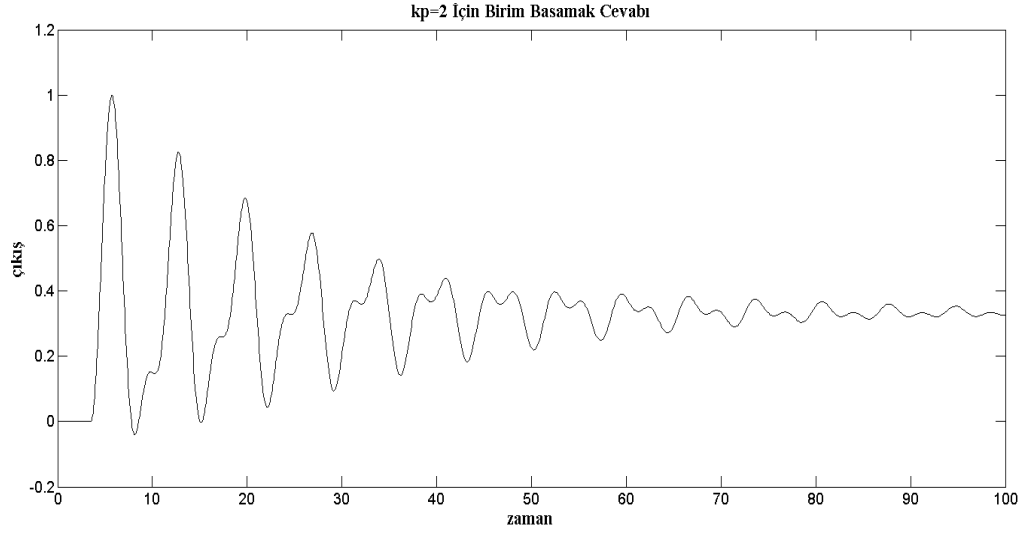
a) Algoritma 5.1’deki ilk adımdan hareketle, L_{sys} ’nin $k=0$ için aşağıdaki aralıkta olduğu tespit edilebilir:

$$L_{sys} \in \left(\frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{a_0}}, \frac{(2k+2)\pi}{\sqrt{a_0}} \right), \quad (k=0) \quad (5.41)$$

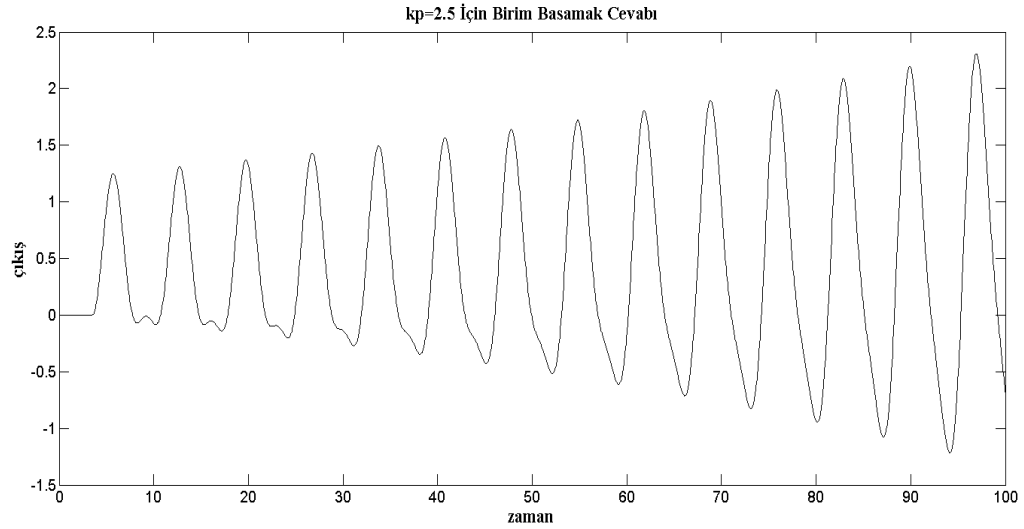
O halde, algoritmanın 4. Adımı gereği, kararlılığı sağlayan P kontrolörlerin kümesi, sadece pozitif k_p ’lerden oluşacaktır. Yine 4. Adımdan hareketle, (5.35)’in bu durum için uygun ifade olduğu rahatlıkla belörlenir. Bu ifade kullanılarak kararlılığı sağlayan tüm P kontrolörlerin kümesi aşağıdaki gibi verilebilir:

$$k_p \in (0, 2.3886) \quad (5.42)$$

Sistemin $k_p=2$ ve $k_p=2.5$ için birim basamak cevapları sırasıyla şekil 5.4 ve şekil 5.5’te görölmektedir. Sistem cevaplarından da görölebileceği üzere, benzetim sonuçları, teorik sonuçları doğrulamaktadır.



Şekil 5.4 : a şikkında $k_p=2$ için birim basamak cevabı.



Şekil 5.5 : a şikkında $k_p=2.5$ için birim basamak cevabı.

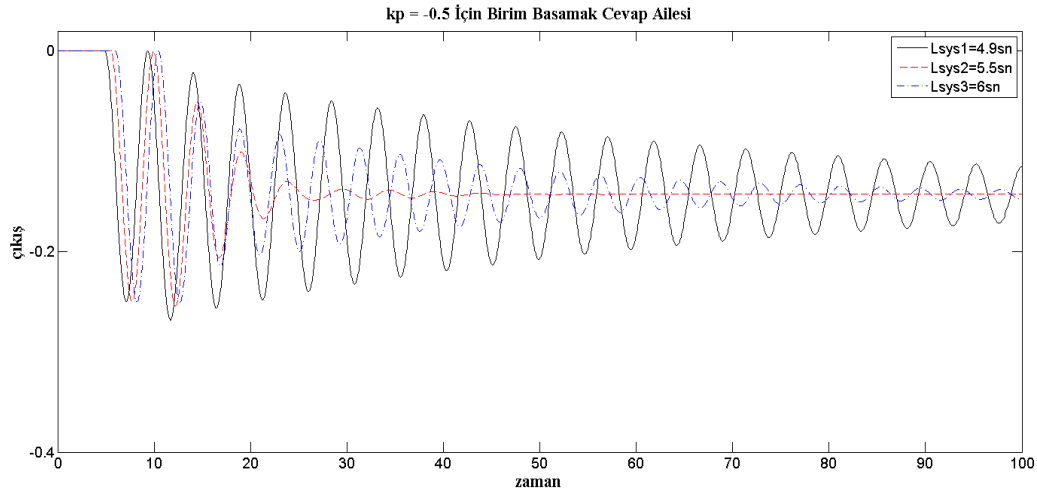
b) Teorem 3'teki sınıflandırmaya bakılarak, L_{sys} 'nin $k=1$ için aşağıdaki özelliği sağladığı açıktır:

$$\left[L_{sys}^-, L_{sys}^+ \right] \in \left(\frac{2k\pi}{\sqrt{a_0}}, \frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{a_0}} \right), \quad (k=1) \quad (5.43)$$

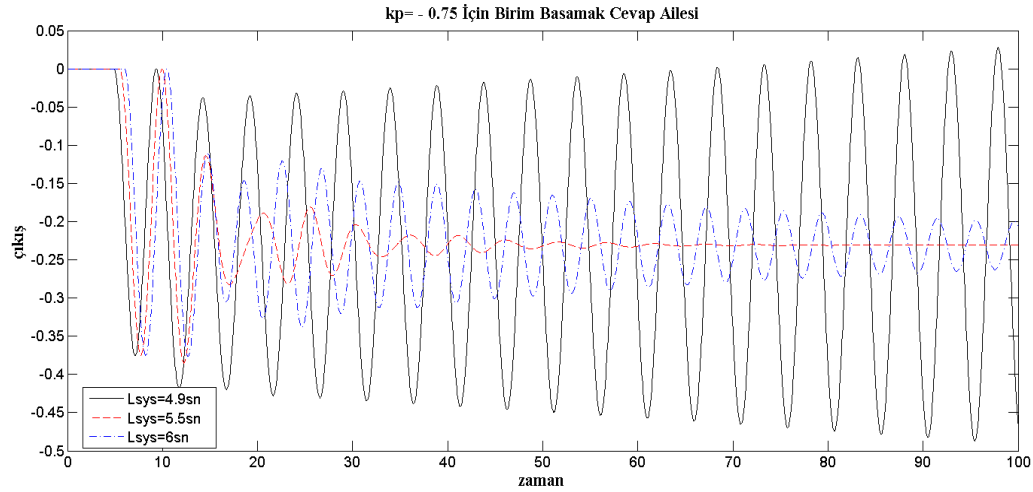
Bu durumda kararlılığı sağlayan bir kümenin var olacağı; bu kümenin de negatif k_p 'lerden oluşacağı açıktır. Teorem 3'te bahsedilen şekilde, $k_p(L_{sys}^-)$ ve $k_p(L_{sys}^+)$, algoritma 5.1 kullanılarak sırasıyla -0.57305 ve -0.77433 olarak hesaplanabilir. Sonra ise (5.38) kullanılarak, kararlılığı sağlayan tüm P kontrolörlerin kümesi, aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$k_p \in (\max\{-0.77433, -0.57305\}, 0) = (-0.57305, 0) \quad (5.44)$$

Sistemin $k_p=-0.5$ için $L_{sys}=4.9sn$, $5.5sn$, $6sn$ için ürettiği birim basamak cevap ailesi şekil 5.6'da, aynı gecikme değerleri ve $k_p=-0.75$ için cevap ailesi ise şekil 5.7'de görülmektedir. Burada bir önceki örnekte olduğu gibi, benzetim sonuçlarıyla teorik sonuçlar örtüşmektedir.



Şekil 5.6 : b şıkında $k_p=-0.5$ ve $L_{sys}=4.9sn$, $5.5sn$ ve $6sn$ için birim basamak cevabı.



Şekil 5.6 : b şıkında $k_p=-0.75$ ve $L_{sys}=4.9sn$, $5.5sn$ ve $6sn$ için birim basamak cevabı.

c) Yine teorem 3'teki sınıflandırmaya bakılarak, L_{sys} 'nin tamamının herhangi bir bant tarafından kapsanmadığı açıktır. Bir başka deyişle L_{sys} , aşağıdaki özelliği sağlamaktadır:

$$[4, 5] \notin \left(\frac{2k\pi}{\sqrt{a_0}}, \frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{a_0}} \right) \text{ veya } \left(\frac{(2k+1)\pi}{\sqrt{a_0}}, \frac{(2k+2)\pi}{\sqrt{a_0}} \right), (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (5.45)$$

Yani (5.45) ifadesi tüm k 'lar için sağlandığından, teorem 3'teki (5.37) ifadesinden hareketle, sistemi $\forall L_{\text{sys}} \in [4, 5]$ için kararlı kılabacak bir P kontrolör kümesi bulunamayacaktır. Özetle bu durum için, kararlılığı sağlayan tüm P tipi kontrolörlerin kümesi boş kümedir.

6. SONUÇLAR VE TARTIŞMALAR

Bu tezde, DZD ve TGTÇ, frekans tanım bölgesinde modellenmiş ve kontrol çevrimi içerisinde tek bir zaman gecikmesi barındıran, daha çok proses endüstrisinde sıkça karşılaşılan zaman gecikmeli sistemler üzerine bir çalışma gerçekleştirilmiştir. Daha geniş kapsamda düşünüldüğünde, zaman gecikmeli sistemler literatürde oldukça popüler olan bir çalışma alanıdır. Bir başka deyişle, daha genel sistemler ve/veya çoklu zaman gecikmesi durumunu da içeren çalışmalar için içine katıldığında, zaman gecikmeli sistemler hakkındaki çalışmalar için literatürden birçok örnek verilebilir [47-55].

Yine tez kapsamında, gerçekleştirilen çalışmalara temel oluşturması açısından, Walton ve Marshall'ın 1987 yılında literatüre kazandırdıkları, tek zaman gecikmeli sistemler için oldukça kıymetli bir yöntem olan direkt yöntem (direct method) benimsenmiş, tüm tezde yapılan tüm çalışmalar bu metodoloji üzerine inşa edilmiştir.

İlk etapta, tezi okuyan okuyucunun tezdeki çalışmaları başka bir kaynağa başvurmadan takip edebilmesi açısından, direkt yöntem ele alınmış ve yöntemin nasıl uygulanacağı kısaca anlatılmıştır. Daha sonra ise anlatılanları somutlaştırma adına yöntem, iki adet örnek üzerinde uygulanmıştır.

Daha sonra ise literatürde üzerine neredeyse hiç çalışma yapılmamış birinci mertebeden tersi de nedensel (biproper) zaman gecikmeli sistemler ele alınmış, bu sistemler için kararlılığı sağlayan tüm P tipi kontrolörlerin kümesi analitik olarak hesaplanmıştır. Bu tip sistemler, kesin nedensel kardeşleri kadar olmasa da, füze başlığı güdümlayici dinamiklerinin yaklaşık olarak modellenmesinde, polikromatik yüksek güçlü LED aydınlatmalarının termal-elektriksel modellerinin elde edilmesinde, ve belirli koşullar altında robotların çevre yüzeylerle olan kuvvet ilişkisi dinamiklerinin modellenmesinde tasarımcının karşısına çıkmaktadır. Ayrıca, kimyasal proseslerde paralel sistem kombinasyonlarıyla sıkça karşılaşıldığı düşünüldüğünde, biri statik, biri birinci mertebeden kesin nedensel transfer fonksiyonuyla modellenen proseslerin eşdeğer ifadesi de, birinci mertebeden tersi de nedensel transfer fonksiyonlarıyla ifade edilecektir. Ayrıca PD kontrolör ile kontrol

edilen herhangi birinci mertebeden kesin nedensel transfer fonksiyonları da birinci mertebeden tersi de nedensel transfer fonksiyonu gibi düşünülebilir.

Bu bağlamda literatürde var olan bu tip sistemlerle ilgili boşluğu doldurabilmek adına sadece kararlılığı sağlayan P tipi kontrolör kümesinin analitik olarak eldesiyle kalınmamış, sadece açık çevrim kararsız sistemlerde ortaya çıkan izin verilen en büyük zaman gecikmesi (İVEBZG) olgusunun da neden olduğu açıkça gösterilmiştir. Ayriyeten İVEBZG'nin analitik ifadesi de sistem kutbu (p) ve sistem sıfırının (z) bir fonksiyonu olarak ifade edilmiştir. Yani açık çevrim kararsız bir sistemin oluşturduğu zaman gecikmesine sahip kapalı çevrimli sistem, zaman gecikmesi İVEBZG'den büyük olduğu takdirde bir P tipi kontrolörle kararlı kılınamayacaktır.

Daha sonraki bölümde ise, proses endüstrisinde sıkça karşılaşılan ikinci mertebeden zaman gecikmeli sistemler ele alınmıştır ve bu sistemlerin bütün açık çevrim kutuplarının sağ yarı s düzleminde olduğu varsayılmıştır. Normal şartlar altında, iki açık çevrim kutbu da sağ yarı düzlemde olan bu sistemler, zaman gecikmesiz bir durumda P tipi kontrolörle kararlı kılınmaz. Ancak zaman gecikmesinin sağ yarı s düzleminden sol yarı s düzlemine kutup geçirme özelliği olduğunda, sistem P tipi kontrolörle kararlı kılınabilir.

Bu durum analitik olarak formülize edilmiş ve öncelikli olarak zaman gecikmesinin hangi şartlar altında sağ yarı s düzleminden sol yarı s düzlemine kutup geçirme özelliğinin olduğu belirlenmiştir. Bu özelliğin varlığı altında, daha sonra ise hem pozitif geribesleme konfigürasyonunda, hem de negatif geribesleme konfigürasyonunda kapalı çevrimli sistemin kararlı kılınabilmesi için gerek ve yeter koşullar türetilmiştir. Burada ortaya şaşırtıcı bir sonuç çıkmıştır: normal şartlar altında sistemi kararlı kılma mevzusunda olumlu etkileri olan negatif geribesleme konfigürasyonunda gerek ve yeter şartların sağlanma zorunluluğu bulunmazken, sistemi kararlı kılma konusunda çoğu zaman olumsuz etkileri olan pozitif geribesleme durumunda ise gerek ve yeter şartlar her zaman sağlanmaktadır. Bir başka deyişle, pozitif geribesleme konfigürasyonunda sistemi kararlı kılacak bir kümenin (bir (L, k_p) ikilisi) varlığı garanti iken, negatif geribesleme konfigürasyonunda bu durum gerçekleşmek zorunda değildir. Bu şartların türetilmesinde sonra ise, her iki konfigürasyon için de kararlılığı sağlayan tüm P tipi kontrolörlerin kümesi analitik olarak hesaplanmıştır.

Bu sonuçlara ilaveten, incelenen sistemlerin özel bir durumu olan 2. mertebeden osilatörler durumu da ele alınmıştır. Bu durumu özel kılan sebep, az önce değinilen gerek ve yeter şartları sonsuz sayıda sağlaması, yani $\forall k \in \mathbb{N}$ için gerek ve yeter şartın sağlanmasıdır. Yani bu tarz sistemler için (L, k_p) uzayında sonsuz adet kararlılık bölgesi çıkmaktadır.

Bu durum 4. bölümde anlatılan yöntemlerin direkt olarak kullanımıyla doğrudan çözülmesi zor olan bir problemdir; bu sebeple 5. bölümde bu sistemler ele alınmış ve kararlılığı sağlayan tüm P tipi kontrolörlerin kümesi hesaplanmıştır. Ayriyeten elde edilen sonuçlar zaman gecikmesinde parametrik bir belirsizliğe sahip sistemler durumuna da genişletilmiştir.

Gelecek olası çalışmalara değinilecek olursa, 3. Bölümde yer alan çalışma birinci mertebeden hem açık çevrim kararlı hem de kararsız kesin nedensel zaman gecikmeli sistemleri kararlı kılacak tüm PD kontrolörlerin kümesinin hesaplanması, hedeflenen çalışmalar arasındadır. Yine birinci mertebeden tersi de nedensel zaman gecikmeli sistemler için kararlılığı sağlayan tüm PI kontrolörlerin analitik olarak hesaplanması da gelecek çalışmalar arasında düşünülebilir. Zaten bu tarz sistemler için kararlılığı sağlayan tüm PD-PID kontrolörlerin kümesi boş küme olacaktır, çünkü 2. Bölümden de çıkartılabileceği gibi, bu sistem-kontrolör kombinasyonunda kapalı çevrimli sistemde, zaman gecikmesi ortaya çıktığı an, sağ yarı s düzleminde sonsuz adet kapalı çevrim kutbu oluşacaktır. Haliyle bu tarz bir sistemi PD-PID kontrolörle kararlı kılmak mümkün olmayacaktır.

Daha geniş perspektiften bakacak şekilde, yine P tipi kontrolörle zaman gecikmesiz platformda kararlı kılınamayan ikinci mertebeden zaman gecikmeli sistemler için de, çeşitli performans ölçütlerini sağlayabilecek bir kontrolör tasarım algoritması vermek de hedeflenen olası çalışmalar arasındadır.

KAYNAKLAR

- [1] Normey-Rico, J. E., ve Camacho, E. F. (2007). Control of Dead-time Processes, Springer-Verlag, London.
- [2] Walton K ve Marshall J. E. (1987). Direct method for TDS Stability Analysis', *IEE Proceedings - Control Theory & Applications*, 134, 101 – 107.
- [3] Silva, J. G, Datta A. ve Bhattacharyya, S. P. (2004). *PID Controllers for Time-Delay Systems*, Springer- Birkhauser, Boston.
- [4] Silva, J. G, Datta A. ve Bhattacharyya, S. P. (2000). Stabilization of Time Delay Systems, *Proceedings of the American Control Conference*, Chicago, Illionis, ABD, Haziran.
- [5] Silva, G.J., Datta A. ve Bhattacharyya, S.P. (2001). PI stabilization of first-order systems with time delay, *Automatica*, 37, 2025–2031.
- [6] Silva, G.J., Datta A. ve Bhattacharyya, S.P. (2002) New Results on the synthesis of PID controllers, *IEEE Trans. Autom. Control*, 47 (2), 241–252.
- [7] Rubio, J.F.M., Cuellar, B.D.M. ve Ramirez, J.A. (2014). Stabilization region of PD controller for unstable first order processes with time delay, *Int. Journal of Control, Automation and Systems*, Vol. 12 (2), 265–273.
- [8] Silva, G. J, Datta A. and Bhattacharyya, S. P. (2001). Determination of Stabilizing Feedback Gains for Second-Order Systems with Time Delay', *Proceedings of the American Control Conference*, (pp. 4658–4663) Arlington, VA, ABD, Haziran.
- [9] Oliveira, V.A., M.C. Cossi, M.C., Teixeira, M.C.M. ve Silva, A.M.F. (2009). Synthesis of PID controllers for a class of time delay systems, *Automatica*, 54, 774-787.
- [10] Ou, L., Zhang, W. ve Yu, L. (2009). Low-order stabilization of LTI systems with time delay, *IEEE Trans. Autom. Control*, 54 (4), 774–787.
- [11] Martelli, G. (2009). Stability of PID-controlled second-order time-delay feedback systems, *Automatica*, 45 (1), 2718–2722.
- [12] Oliveira, V. A., Teixeira, M.C.M. ve Cossi, L. (2003). Stabilizing a class of time delay systems using the Hermite-Biehler theorem, *Linear Algebra and its Applications*, 369, 203–216.
- [13] Xiang, C., Wang, Q.G., Lu, X., Nguyen A.L. ve Lee, T.H. (2007). Stabilization of second-order unstable delay processes by simple controllers, *Journal of Process Control*, 17 (8), 675–682.
- [14] Lee, S.C., Wang, Q.G. ve Xiang, C. (2010). Stabilization of all pole unstable delay processes by simple controllers, *Journal of Process Control*, 20 (2), 235–239.

- [15] Le, B.N., Wang, Q.G. ve Lee, T.H. (2015). Development of D-decomposition method for computing stabilizing gain ranges for general delay systems, *Journal of Process Control*, 25, 94–104.
- [16] Lee, S.C., Wang, Q.G. ve Nguyen, L.B. (2010). Stabilizing control for a class of delay unstable processes, *ISA Transactions*, 49 (3), 318–325.
- [17] Munro, N., Soylemez M.T. ve Baki, H. (1999). Computation of D-Stabilizing Low-Order Compensators, (Rapor No. 882), Manchester: UMIST.
- [18] Almodaresi E. ve Bozorg, M. (2014). Computing Stability Domains in the Space of Time Delay and Controller Coefficients for FOPDT and SOPDT Systems,” *Journal of Process Control*, 24, 55–61.
- [19] Hwang C. ve Hwang, J.H. (2004). Stabilization of first-order plus dead-time unstable processes using PID controllers, *IEE Proc.-Control Theory Appl.*, Vol. 151 (1), 89–94.
- [20] Nesimioglu B.S. ve Soylemez, M.T. (2012). A simple derivation of all stabilizing proportional controllers for first order time-delay systems,” *Asian Journal of Control*, 14 (2), 598–594.
- [21] Cai, T.Y., Zhang, H.G., Yang, F.S. ve Xie, P.X. (2015). The τ decomposition method for PID controllers of first order delayed unstable processes, *Asian Journal of Control*, 18 (1), 293–301.
- [22] Nesimioglu, B.S. ve Soylemez, M.T. (2014). Calculation of All Gains Providing Time-Delay Independent Stability via Root Locus, *Int. Conf. on Control Decision and Information Technologies (CoDIT)*, (pp. 566 – 571), Metz, Fransa, 3-5 Kasım.
- [23] Nesimioglu, B.S. ve Soylemez, M.T. (2015). On Stabilisability Conditions of Unstable First-Order Time-Delay Systems with Time-Delay. 2nd *International Conference on Advanced Technology&Sciences (ICAT)*, Antalya, Türkiye, 4-7 Ağustos.
- [24] Nesimioglu B.S. ve Soylemez, M.T. (2015). Sistem Kararlılığını Zaman Gecikmesinden Bağımsız Hale Getiren Tüm P-Tipi Kontrolörlerin Hesaplanması ve Bir DC Motora Uygulanması, Otomatik Kontrol Türk Milli Komitesi Ulusal Toplantısı TOK2015, (pp. 1061 – 1068) Denizli ,Türkiye, 10-12 Eylül.
- [25] Astrom, K.J. ve Hagglund, T. (1995). *PID Controllers: Theory, Design and Tuning*, Instrument Society of America.
- [26] Shima T. ve Golan, O.M. (2006). Bounded Differential Games Guidance Law for Dual-Controlled Missiles, *IEEE Trans. Cont. Syst. Tech.*, 14, 719–724.
- [27] Gutman, S. (2003). Superiority of Canards in Homing Missiles, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 39 (3), 740–746.
- [28] Yanushevsky R. (2008) *Modern Missile Guidance*, CRC Press.
- [29] Shinar, J. ve Shima, T. (2013). Differential Game-Based Interceptor Missile Guidance, In S. N. Balakrishnan, A. Tsourdos and B. A. White (Ed.) *Advances In Missile Guidance, Control and Estimation*, CRC Press.

- [30] Shima T. (2005). Capture Conditions in a Pursuit-Evasion Game between Players with Bipropor Dynamics, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 126 (3), 503–528.
- [31] Huang, B.J., ve Tang, C.W. (2009). Thermal-electrical-luminous model of multi-chip polychromatic LED luminaire, *Applied Thermal Engineering*, 29, 3366–3373.
- [32] Huang, B.J., Tang, C.W. ve Wu, M.S. (2009). System dynamics model of high-power LED luminaire, *Applied Thermal Engineering*, 29, 609 – 616.
- [33] Luo, Z., Hosoe S. ve Ito, M. (2006). Biomimetic and Biologically Inspired Control, In Y. Bar-Cohen (Ed.) *Biomimetics: Biologically Inspired Technologies*, CRC Press.
- [34] Luo, Z., Fujii, S., Saitoh, Y., Muramatsu, E., ve Watanabe, K. (2004). Feedback-Error Learning for Explicit Force Control of a Robot Manipulator Interacting with Unknown Dynamic Environment, *Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics*, Shenyang, Çin.
- [35] Chau, P. C., (2002). *Process Control: A First Course with MATLAB*, Cambridge University Press.
- [36] Wang, D.J. (2009). Synthesis of PID controllers for integral processes with time-delay, *Asian Journal of Control*, 11 (5), 564–570.
- [37] Wang, D.J. (2007). Further Results on the Synthesis of PID Controllers, *IEEE Trans. on Automatic Control*, 52 (6), 1127–1132.
- [38] Almodaresi, E., ve Bozorg, M. (2015). k_p -Stable Regions in the Space of Time Delay and PI Controller Coefficients,” *Int. Journal of Control*, 88 (3), 653–662.
- [39] Nesimioglu B.S. ve Soylemez, M.T. (2015). All Stabilizing Proportional Controllers For First Order Bipropor Systems with Time-Delay – An Analytical Derivation, *Asian Journal of Control*, doi: 10.1002/asjc.1316.
- [40] Jovanovic, G., Stojcev, M. ve Stamenkovic, Z. (2010). A CMOS voltage controlled ring oscillator with improved frequency stability. *Scientific Publications of the State University of Novi Pazar, Series A: Applied Mathematics, Informatics and mechanics*, 2 (1), 1-9.
- [41] Sipahi, R., Niculescu, S. I., Abdallah, C. T., Michiels, W. ve Gu, K. (2011). Stability and stabilization of systems with time delay. *Control Systems, IEEE*, 31 (1), 38-65.
- [42] Mitkowski, W. ve Skruch, P. (2009). Stabilization results of second-order systems with delayed positive feedback. In *Modelling Dynamics in Processes and Systems*, (pp. 99-108), Springer Berlin Heidelberg.
- [43] Michiels, W. (2010). Stability analysis of oscillatory systems subject to large delays: a synchronization point of view. *Journal of Vibration and Control*, Vol. 16 (8), 1087–1110.

- [44] Niculescu, S. I., Gu, K. ve Abdallah, C. T. (2003). Some remarks on the delay stabilizing effect in SISO systems. *Proceedings of the American Control Conference*, (pp. 2670-2675), Colorado, ABD, Haziran.
- [45] Morarescu, C. I. ve Niculescu, S. (2007). Stability crossing curves of SISO systems controlled by delayed output feedback. *Dynamics Of Continuous Discrete And Impulsive Systems Series B*, 14 (5), 659–678.
- [46] Niculescu, S. I. ve Michiels, W. (2003). Some remarks on stabilizing a chain of integrators using multiple delays. *Proceedings of the American Control Conference*, (pp. 2664 – 2669) Colorado, ABD, Haziran.
- [47] Smith, O. J. M (1958). *Feedback Control Systems*, McGraw-Hill Series in Control Systems Engineering. McGraw-Hill, New York.
- [48] Bellman, R. ve Cooke, K. (1963). *Delay differential equations*. Academic, New York/London.
- [49] Vyhlidal, T. ve Zitek P. (2013). QPMR - Quasi-Polynomial Rootfinder: Algorithm and Examples, in *Delay Systems: from Theory to Numerics and Applications*, Advances in Delays and Dynamics, Vol.1 editörler: Vyhlidal T., Lafal J.F., Sipahi R.
- [50] Olgac, N. ve Sipahi, R. (2002). An exact method for the stability analysis of time-delayed linear time-invariant (LTI) systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47 (5), 793–797.
- [51] Sipahi, R. ve Olgac, N. (2003). Active vibration suppression with time delayed feedback. *Journal of vibration and acoustics*, 125 (3), 384–388.
- [52] Ergenc, A. F., Olgac, N. ve Fazelinia, H. (2007). Extended Kronecker summation for cluster treatment of LTI systems with multiple delays. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 46 (1), 143 – 155.
- [53] Filipović, D. ve Olgac, N. (2002). Delayed resonator with speed feedback–design and performance analysis. *Mechatronics*, 12 (3), 393–413.
- [54] Stephan G. (1989). *Retarded Dynamical Systems: Stability and Characteristic Function*. Longman Scientific & Technical co-publisher John & Wiley Sons Inc., New York.
- [55] Toker, O., ve Özbay, H. (1996). Complexity issues in robust stability of linear delay-differential systems. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 9 (4), 386–400.

EKLER

EK A: Bölüm 3.3.1.2’de dL/dK_p ’nin İşareti

EK B: Bölüm 3.3.2.2’de dL/dK_p ’nin İşareti

EK C: Bölüm 3.3.2.2 ve 3.4.2.2’deki İzin Verilen En Büyük Zaman Gecikmesinin (İVEBZG) Hesaplanması

EK D: Bölüm 3.4.2.2’de dL/dK_p ’nin İşareti

EK E: Bölüm 4.3.1’de $S_d < S_s$ İlişkisinin Gösterilmesi:

EK F: (4.73) İlişkisinin $k=0$ İçin Kesin Olarak Sağlanması Durumu

EK A

İfadesi (3.21) ile verilen L 'nin K_p 'ye göre türevi alınırken zincir kuralı kullanılırsa, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\frac{dL}{dK_p} = \frac{dL}{d\omega} \frac{d\omega}{dK_p} \quad (\text{A.1})$$

Buradan ilişkisi (3.10) ile verilen ω ile K_p 'den yararlanılarak $d\omega/dK_p$ hesaplanacak olursa:

$$\frac{d\omega}{dK_p} = \frac{K_p z^2 (1 - K_p^2) + K_p (K_p z^2 - p^2)}{(1 - K_p^2)^2 \sqrt{\frac{K_p^2 z^2 - p^2}{1 - K_p^2}}} \quad (\text{A.2})$$

Bu ifadenin pozitif olduğu, z , p ve (3.8) ile verilen K_p üzerindeki varsayımlardan da hareketle direkt olarak görülebilir. O halde dL/dK_p 'nin negatif olduğunu göstermek, $dL/d\omega$ 'nin negatif olduğunu göstermekle eşdeğerdir. Yine (3.21) kullanılarak bu türev alınır, aşağıda verilen ifade elde edilir:

$$\frac{dL}{d\omega} = \frac{(z - p)(\omega^2 - pz)\omega - \arctan\left(\frac{\omega(p - z)}{\omega^2 + pz}\right) \left[(\omega^2 + pz)^2 + \omega^2(p - z)^2 \right]}{\left[(\omega^2 + pz)^2 + \omega^2(p - z)^2 \right] \omega^2} \quad (\text{A.3})$$

Görüldüğü üzere, bu ifadenin paydası bir tam kareye eşittir ve her ω değeri için pozitiftir. O halde, bu ifadenin payının $0 < \omega < \infty$ için negatif olduğunu göstermek, (A.1) ile verilen ifadenin negatif olduğunu göstermek için yeterli olacaktır.

Yine açık bir şekilde, $\omega < \sqrt{pz}$ için (A.3)'ün negatif olduğu görülmektedir. $\omega > \sqrt{pz}$ için ise $\omega(z - p) = a$ ve $\omega^2 - pz = b$ değişken dönüşümleri yapılarak ve (3.21) için içine katılarak aşağıdaki eşitsizliğin doğru olduğu gösterilebilir:

$$ab - \arctan\left(\frac{a}{b + 2pz}\right) \left[(b + 2pz)^2 + a^2 \right] \leq ab - \frac{\pi}{2} \left[(b + 2pz)^2 + a^2 \right] \leq ab - \frac{\pi}{2} (b^2 + a^2) \quad (\text{A.4})$$

Açık bir şekilde, a ve b pozitif ifadeler olduğundan (A.4)'teki son ifade, aşağıdaki cebrik manipülasyonla ifade edilip, negatif bir ifadeye eşit olduğu direkt olarak gösterilebilir:

$$ab - \frac{\pi}{2}(b^2 + a^2) = -(a-b)^2 - ab - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)a^2 - \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)b^2 < 0 \quad (\text{A.5})$$

Böylelikle (3.21) ile verilen ifadenin negatifliği ispatlanmış olur.

EK B

(3.30), (A.1) ve (A.2)'den yararlanılarak, bu durumda da dL/dK_p 'nin negatif olduğunu göstermenin, $dL/d\omega$ 'nin negatif olduğunu göstermekle eşdeğer olduğu gösterilebilir. Eğer (3.32)'yle verilen ifadeden hareketle $dL/d\omega$ hesaplanacak olursa, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\frac{dL}{d\omega} = \frac{\arctan\left(\frac{\omega(p-z)}{\omega^2 + pz}\right)' \omega - \arctan\left(\frac{\omega(p-z)}{\omega^2 + pz}\right)}{\omega^2} \quad (B.1)$$

Bu türevin sadece işaretiyle ilgilenildiğinden, ve payda bir tam kareye eşit olduğundan, sadece payın $0 < \omega < \infty$ için negatif olduğunu göstermek, (B.1)'in negatif olduğunu göstermek için yeterlidir. Bu bağlamda, aşağıdaki fonksiyon tanımlansın:

$$D(\omega) := \arctan\left(\frac{\omega(p-z)}{\omega^2 + pz}\right)' \omega - \arctan\left(\frac{\omega(p-z)}{\omega^2 + pz}\right) \quad (B.2)$$

Bu fonksiyon $\omega=0$ için 0 değerini alır, yani $D(0)=0$ 'dır. Aynı zamanda $\omega \rightarrow \infty$ için de $D(\omega) \rightarrow -\pi$ ilişkileri geçerlidir, yani $D(\omega)$ fonksiyonunun tanım bölgesinin başlangıcındaki değeri 0 iken, tanım bölgesinin sonundaki değeri negatiftir. O halde $D(\omega)$ 'nın negatif olduğunu gösterebilmek, $D'(\omega)$ 'nın $0 < \omega < \infty$ için negatif olduğunu göstermekle eşdeğerdir. Eğer bu türev alınacak olursa:

$$D'(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega(p-z)}{\omega^2 + pz}\right)'' \omega \quad (B.3)$$

İfadesi elde edilir. Bu ifadeden de sadece arctanlı ifadenin negatif olduğunu göstermenin $D'(\omega)$ 'nın $0 < \omega < \infty$ için negatif olduğunu göstermek için yeterli olduğu açıktır. Arctanlı ifadenin 2.türevi alınır ve üzerinde biraz cebrik olarak oynanırsa, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\arctan\left(\frac{\omega(p-z)}{\omega^2 + pz}\right)'' = \frac{2\omega(z-p)\left[-\omega^4 + pz\left(2\omega^2 + (p+z)^2 - pz\right)\right]}{\left[(\omega^2 + pz)^2 + \omega^2(p-z)^2\right]^2} \quad (B.4)$$

Bu ifadenin de p ve z üzerindeki varsayımlar dikkate alındığında negatif olacağı açıktır. Böylelikle (B.1) ile verilen ifadenin, yani dL/dK_p ifadesinin negatif bir işarete sahip olduğu ispatlanmış olur.

EK C

Şekil 3.3 ve şekil 3.5'ten de fark edileceği üzere, (3.33) ve (3.59) ile verilen eşitliklerin, ilgilenilen aralıkta yani sırasıyla $(0, \pi)$ ve $(0, \pi/2)$ aralıklarında çözümünün olmayabileceği açıktır (örneğin her iki şekilde de $L_s=1.8$ sn için çözüm yoktur). Bu durum haliyle L_s üzerinde bir kısıt meydana getirmektedir. Bu kısıtı hesaplamak adına, (3.33)'ten (veya (3.59)'dan) hareketle, $f(\omega)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$f(\omega) := L\omega - \arctan\left(\frac{\omega(p-z)}{\omega^2 + pz}\right) \quad (C.1)$$

Şüphesiz ki bu fonksiyon (3.33) ile verilen eşitlik sağlandığında 0 değerini alacaktır. Ayriyeten, (B.4)'te verilen ifadeden de yararlanarak, $f'(\omega) > 0$ ilişkisi $0 < \omega < \infty$ için sağlanmaktadır. Bu durum da $f'(\omega)$ 'nın $0 < \omega < \infty$ aralığında monoton artan olduğunu göstermektedir. Tanım kümesinin başlangıç değeri olan $\omega=0$ değeri için $f(0)=0$ ilişkisi düşünüldüğünde, $f(\omega)=0$ ilişkisinin $0 < \omega < \infty$ aralığındaki başka bir ω tarafından da sağlanabilmesi için aşağıdaki koşul sağlanmak zorundadır:

$$f'(\omega)\Big|_{\omega=0} < 0 \quad (C.2)$$

Eğer bu koşul, açık bir şekilde yazılacak olursa, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$L - \frac{(p-z)(pz - \omega^2)}{(\omega^2 + pz)^2 + \omega^2(p-z)^2} \Big|_{\omega=0} < 0 \quad (C.3)$$

$\omega = 0$ değeri burada dikkate alındığında, İVEBZG'in analitik ifadesi ortaya çıkar:

$$L < \frac{z-p}{-pz} \quad (C.4)$$

Eğer bu koşul sağlanmazsa, (2.9)'un da dikkate alınmasıyla, L_0 bulunamazken, L_k 'ların ($k=1,2,3,\dots$) bulunduğu bir durum ortaya çıkar. Bu durum da açık bir şekilde 2 adet kapalı çevrim kutbunun sağ yarı s düzlemine geçtiğini işaret eder – ki bu durumda sistem kararsız olur. Yani Bölüm 3.3.3.2 ve 3.4.2.2'de ele alınan açık çevrim kararsız sistemlerin, bir P tipi kontrolörle kararlı kılınabilmesi için, sahip olması gereken en büyük zaman gecikmesi, yani İVEBZG, (C.4) ile verilen ifadede küçük olmak zorundadır.

İVEBZG'nin supremum ve infimum değerlerini, hem sol yarı s-düzlemi sıfırına hem de sağ yarı s-düzlemi sıfırına sahip olan sistemler için göstermek adına, (C.4) ile verilen ifade aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$L < \frac{1}{-p} + \frac{1}{z} \quad (C.5)$$

Bölüm 3.3.2.2'de ele alınan sol yarı s-düzlemi sıfırı durumunda, eğer sistemin sıfırı açık çevrim kutbuyla orijine göre simetrik yerleşmişse, bu durumda İVEBZG $-2/p$ 'ye eşit olur; ki bu da 2τ demektir. Sistem sıfırı sol yarı s düzleminde $s=-\infty$ noktasına doğru hareket ettikçe İVEBZG'in değeri azalmaya başlar ve sıfır $s=\infty$ 'a ulaştığında, sistem kesin nedensel birinci mertebeden sisteme dönüşür ve (C.5) ile verilen ifadedeki $1/z$ terimi kaybolur. Böyle bir durumda İVEBZG, infimum değeri olan $-1/p$ değerine, yani τ 'ya ulaşır. Kısaca, sol yarı s-düzlemi sıfırı durumunda İVEBZG aşağıda verilen aralıkta yer alacaktır:

$$\tau < \dot{I}VEBZG < 2\tau \quad (C.6)$$

Bölüm 3.4.2.2'de verilen minimum olmayan fazlı sistem sıfırı durumunda ise, $z < 0$ 'dır ve sistem sıfırı, açık çevrim kutbuyla aynı yerde yer aldığı anda, İVEBZG de 0 değerini alır. Bu durum İVEBZG için infimum değerdir, ve İVEBZG'nin değeri, sıfır sağ yarı düzlemde $s=\infty$ 'a doğru gittikçe artmaya başlar ve sistem sıfırı sonsuza ulaştığında, sistem yine kesin nedensel birinci mertebeden sisteme dönüşür ve İVEBZG de τ değerine ulaşır. Bu değer, sağ yarı s-düzlemi sıfırı barındıran sistem durumu için İVEBZG'nin supremum değeri olur. O halde, sonuç olarak İVEBZG, bölüm 3.4.2.2'de ele alınan sistem çeşidi için aşağıdaki değer aralığında yer alır:

$$0 < \dot{I}VEBZG < \tau \quad (C.7)$$

EK D

(3.56), (A.1) ve (A.2) ifadeleri birlikte düşünülüğünde (bu durumda (A.2) ifadesi negatif olacaktır) $dL/d\omega$ 'nın $0 < \omega < \infty$ için negatif olduğunu göstermek yeterlidir. Bu durum açık bir şekilde EK B' de ele alınan duruma benzemektedir ve eğer ilişkili türev alınırsa, sembolik olarak (B.1)'le aynı ifade elde edilir. Ancak burada irdelenen durum için $\omega > \sqrt{pz}$ durumunda (B.1)'in negatif olacağı direkt olarak gösterilebilir ve bu ilişkiyi sağlayan ω 'lar için daha fazla analiz yapmaya gerek yoktur. Başka bir deyişle, bu türevin işaretini sadece $0 < \omega < \sqrt{pz}$ için değerlendirmek yeterlidir.

Eğer (B.2) ile tanımlanan $D(\omega)$ fonksiyonu burada da tanımlanacak olursa, $\omega=0$ için $D(0)=0$ olduğu ve $D(\sqrt{pz}) < 0$ olduğu gösterilebilir. O halde, $D(\omega) < 0$ ilişkisinin var olduğunu göstermek $D'(\omega)$ 'nın negatif olduğunu göstermekle eşdeğer hale gelir. EK B' de izlenen mantık, burada da tekrarlanacak olursa, (B.3)'le verilen ifadenin negatif olduğunu göstermek, oradaki arctan'ın ikinci türevini içeren ifadenin negatif olduğunu göstermekle eşdeğer olacaktır; ancak burada bu negatifliğin sadece $0 < \omega < \sqrt{pz}$ için var olduğunu göstermek yeterlidir. Bir miktar cebrik eforla (B.3)'te verilen arctan'ın ikinci türevini içeren ifade, aşağıdaki hale getirilebilir:

$$\arctan\left(\frac{\omega(p-z)}{\omega^2 + pz}\right)'' = \frac{2\omega(z-p)\left[\omega^2(2pz - \omega^2) + pz(p-z)^2 + 3p^2z^2\right]}{\left[(\omega^2 + pz)^2 + \omega^2(p-z)^2\right]^2} \quad (D.1)$$

Bu ifade de, p ve z üzerindeki varsayımların dikkate alınmasıyla, $0 < \omega < \sqrt{pz}$ için açık bir şekilde negatiftir. Bu şekilde, anılan durum için de $dL/dK_p > 0$ ilişkisinin sağlandığı ispatlanmış olur.

EK E

Bölüm 4.3.1’de (4.30) ve (4.31) ile verilen S_d ve S_s ifadelerinin $S_d < S_s$ şeklinde olacak olan eşitsizlik ilişkisinin ispatlanması, yine aynı bölümde aşağıda verilen eşitsizliğin ispatlanmasına indirgenmiştir:

$$\left(\tan^{-1} \frac{a_1 \omega_2}{\omega_2^2 - a_0} \right) - f(\omega_2) \geq f(\omega_1) - \left(\tan^{-1} \frac{a_1 \omega_1}{\omega_1^2 - a_0} \right) \quad (E.1)$$

Burada şüphesiz ki ω_1 ve ω_2 , K_p ’nin fonksiyonlarıdır ve ifadeleri (4.8) ve (4.9)’da verilmiştir. Burada tanım bölgeleri gereği, $0 < \omega_2 < \sqrt{a_0 - a_1^2}/2$ ve $\sqrt{a_0 - a_1^2}/2 < \omega_1 < \sqrt{2a_0 - a_1^2}$ ’dir. Pekala ω_1 daha büyük değerler de alabilir, ancak burada K_p (4.12) ile verilen değerlerle sınırlandırılmıştır.

Şüphesiz ki başlangıç değeri olan $K_p = -a_1 \sqrt{a_0 - a_1^2}/4$ için $\omega_1 = \omega_2$ ’dir ve K_p arttıkça ω_1 artacak, ω_2 ise azalacaktır. ω_1 ve ω_2 birbirinin devamı niteliğindedir ve Eğer (E.1) ifadesindeki sağ taraftaki fonksiyonun ω ’ya göre türevi alınacak olursa aşağıdaki ifade elde edilecektir:

$$\frac{d \left(f(\omega) - \tan^{-1} \frac{a_1 \omega}{\omega^2 - a_0} \right)}{d \omega} = \frac{-2a_1 \omega^2 (-\omega^4 - 2a_0 \omega^2 + a_0(3a_0 - a_1^2))}{((\omega^2 - a_0)^2 + a_1^2 \omega^2)^2} \quad (E.2)$$

Bu türev ifadesinden hareketle türevi alınan fonksiyon, yani (E.1) ile verilen eşitsizliğin sağ tarafı, $\omega \in \left(0, \sqrt{-a_0 + \sqrt{4a_0^2 - a_0 a_1^2}} \right)$ arası artan bir fonksiyondur ve

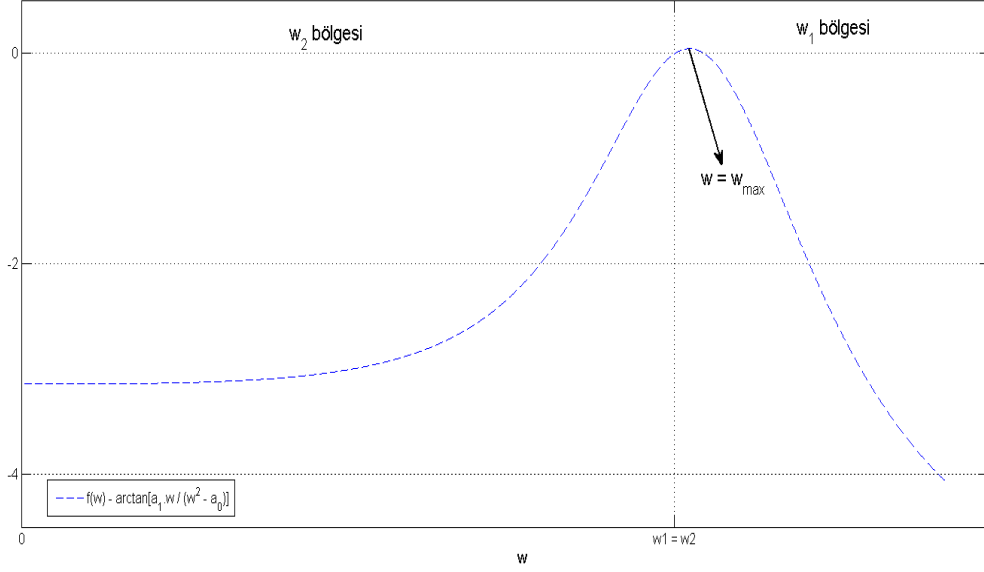
$\omega = \sqrt{-a_0 + \sqrt{4a_0^2 - a_0 a_1^2}}$ değerinde maksimum değerini alacaktır. (4.11)’den hareketle, eğer aşağıdaki değişken dönüşümü yapılacak olursa:

$$a_1^2 = m a_0, \quad (0 < m < 2) \quad (E.3)$$

İlişkili m değer aralığında $\omega = \sqrt{-a_0 + \sqrt{4a_0^2 - a_0 a_1^2}}$ fonksiyonunun ω_1 bölgesine düştüğü görülebilir. Bu duruma ilişkin grafiksel gösterim şekil E.1’de görülmektedir.

Ayriyeten ispatın bir anlam kazanabilmesi açısından, $f(\omega_1) - \left(\tan^{-1} a_1 \omega_1 / (\omega_1^2 - a_0) \right)$ fonksiyonunun en azından bir ω_1 bölgesinde pozitif olması gerekmektedir. Zira bu durum sağlanmazsa (4.30) ile verilen S_d ifadesi asla pozitif olamayacak, yani

$dL_{0d}/dK_p > 0$ durumu asla sağlanamayacaktır. Böyle bir durumda $dL_{0s}/dK_p > 0$ durumu her zaman sağlanacağından, $S_s > S_d$ ilişkisi $\forall K_p$ için sağlanmış olacaktır.



Şekil E1 : $f(w) = \tan^{-1}[a_1 w / (w^2 - a_0)]$ fonksiyonunun grafiksel görünümü.

Konservatif bir bakış açısıyla, $f(\omega_1) - \left(\tan^{-1} a_1 \omega_1 / (\omega_1^2 - a_0) \right) > 0$ ilişkinin sağlanması, aşağıdaki ilişkinin de sağlanmasını gerektirir:

$$f(\omega_1) \Big|_{\omega = \sqrt{-a_0 + \sqrt{4a_0^2 - a_0 a_1^2}}} > \pi \quad (E.4)$$

(E.3)'te verilen m parametresi dikkate alınacak olursa, (E.4)'ün gerçekleşebilmesi için aşağıdaki durum sağlanmalıdır:

$$a_1^2 < 0.39a_0 \quad (E.5)$$

Şimdi ise durumu ω_1 ve ω_2 'den kurtarmak adına, (4.8) ve (4.9)'daki ω - K_p ilişkileri dikkate alınır, (E.1) ilişkisini K_p cinsinden irdelemek bir hayli zahmetli olacaktır. Bunun yerine $h := \sqrt{a_1^4 / 4 - a_0 a_1^2 + K_p^2}$ değişken dönüşümü uygulanacak olursa, h aşağıdaki değer aralığında yer alacaktır:

$$-a_1 \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}} < K_p < a_0 \rightarrow 0 < h < a_0 - \frac{a_1^2}{2} \quad (E.6)$$

Eğer (E.1) ilişkisi, h cinsinden yazılacak olursa, aşağıdaki eşdeğer eşitsizlik ifadesi elde edilecektir:

$$\begin{aligned}
& \left(\tan^{-1} \frac{a_1 \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{2}} - h}{\frac{-a_1^2}{2} - h} \right) - \frac{-a_1 \left(2a_0 - \frac{a_1^2}{2} - h \right)}{h^2 + a_0 a_1^2 - \frac{a_1^2}{4}} \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{2}} - h \geq \\
& \frac{-a_1 \left(2a_0 - \frac{a_1^2}{2} + h \right)}{h^2 + a_0 a_1^2 - \frac{a_1^2}{4}} \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{2}} + h - \left(\tan^{-1} \frac{a_1 \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{2}} + h}{\frac{-a_1^2}{2} + h} \right)
\end{aligned} \tag{E.7}$$

Eşitliğin ilk tarafına A(h), ikinci tarafına da B(h) denecek olursa, h=0 için A(0)=-B(0) ilişkileri geçerli olacaktır. Burada (4.28) ile yapılan varsayım gereği A(0)≥0 ve B(0)≤0 ilişkileri geçerlidir. Yani A(0)≥B(0)'dır.

Özetle, başlangıç değerleri en fazla 0'a eşit, aksi halde biri diğerinin negatifi olan iki fonksiyonun da h'ye göre 1. türevi alınacak olursa, aşağıdaki ifadeler elde edilecektir:

$$\frac{dA(h)}{dh} = \frac{a_1 \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{2}} - h \left(h^2 - (4a_0^2 - a_1^2)h + \frac{a_1^2}{4} (a_1^2 - 4a_0) \right)}{h^2 + a_0 a_1^2 - \frac{a_1^2}{4}} \tag{E.8}$$

$$\frac{dB(h)}{dh} = \frac{a_1 \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{2}} + h \left(h^2 + (4a_0^2 - a_1^2)h + \frac{a_1^2}{4} (a_1^2 - 4a_0) \right)}{h^2 + a_0 a_1^2 - \frac{a_1^2}{4}} \tag{E.9}$$

Burada, eğer $\forall h \in (0, a_0 - a_1^2/2)$ için $dA(h)/dh > dB(h)/dh$ ilişkisi kanıtlanabilirse, A(0)≥B(0) ilişkisi de dikkate alındığında (E.1) ilişkisinin geçerli olduğu, yani $S_d < S_s$ ilişkisinin sağlandığı ispatlanmış olacaktır. (E.8) ve (E.9)'un paydalarının aynı olduğu ve $a_1 < 0$ olduğu düşünülecek olursa, doğrulanması gereken eşitsizlik, aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\begin{aligned}
& \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{2}} - h \left(h^2 - (4a_0^2 - a_1^2)h + \frac{a_1^2}{4} (a_1^2 - 4a_0) \right) \leq \\
& \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{2}} + h \left(h^2 + (4a_0^2 - a_1^2)h + \frac{a_1^2}{4} (a_1^2 - 4a_0) \right)
\end{aligned} \tag{E.10}$$

Bu eşitsizlik için de sırasıyla aşağıdaki adımlar uygulanacak olursa:

$$\frac{\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{2} - h}}{\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{2} + h}} \geq \frac{\left(h^2 + (4a_0^2 - a_1^2)h + \frac{a_1^2}{4}(a_1^2 - 4a_0) \right)}{\left(h^2 - (4a_0^2 - a_1^2)h + \frac{a_1^2}{4}(a_1^2 - 4a_0) \right)} \quad (\text{E.11})$$

$$\equiv \frac{\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{2} - h}}{\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{2} + h}} \geq 1 + \frac{2(4a_0 - a_1^2)h}{\left(h^2 - (4a_0^2 - a_1^2)h + \frac{a_1^2}{4}(a_1^2 - 4a_0) \right)} \quad (\text{E.12})$$

Burada eşitsizliğin sol tarafı 1'den küçük ve pozitif olduğu için eğer aşağıda verilen eşitsizlik sağlanırsa (E.12) de sağlanacaktır:

$$\frac{a_0 - \frac{a_1^2}{2} - h}{a_0 - \frac{a_1^2}{2} + h} \geq 1 + \frac{2(4a_0 - a_1^2)h}{\left(h^2 - (4a_0^2 - a_1^2)h + \frac{a_1^2}{4}(a_1^2 - 4a_0) \right)} \quad (\text{E.13})$$

Bu eşitsizlik de aşağıdaki eşitsizliğe denk olacaktır:

$$-\frac{2h}{a_0 - \frac{a_1^2}{2} + h} \geq \frac{2(4a_0 - a_1^2)h}{\left(h^2 - (4a_0^2 - a_1^2)h + \frac{a_1^2}{4}(a_1^2 - 4a_0) \right)} \quad (\text{E.14})$$

Son olarak içler dışlar çarpımı yapıлып, uygun bir grupta yapıldığında, aşağıdaki eşitsizlik elde edilecektir:

$$h^2 + (4a_0 - a_1^2) \left(a_0 - \frac{3a_1^2}{4} \right) \geq 0 \quad (\text{E.15})$$

Bu eşitsizlik de a_0 ile a_1 arasında aşağıda verilen ilişki sağlandığı takdirde, $\forall h \in (0, a_0 - a_1^2/2)$ için sağlanacaktır:

$$a_1^2 \leq \frac{4}{3}a_0 \quad (\text{E.16})$$

İlk etapta, a_1 ile a_0 arasında (4.11) ile verilen ilişki dikkate alındığında, her a_1, a_0 değeri için bu eşitsizliğin sağlanmadığı düşünülebilir. Ancak bölümün başlarında verilen ve $f(\omega_1) - \left(\tan^{-1} a_1 \omega_1 / (\omega_1^2 - a_0) \right) > 0$ ilişkisinin sağlanabilmesi için gerek koşul olan ve (E.5) ile ifade edilen eşitsizlik de dikkate alındığında, (E.16) ile verilen ifadenin,

ilgilenilen her a_1 , a_0 değeri için sağlanacağı rahatlıkla görülebilir. Böylelikle aşağıda verilen eşitsizlik sağlanmış olur:

$$\frac{dA(h)}{dh} \geq \frac{dB(h)}{dh}, \quad \forall h \in \left(0, a_0 - \frac{a_1^2}{2} \right) \quad (\text{E.17})$$

Bu durum $A(0) \geq B(0)$ ilişkisiyle birlikte düşünüldüğünde, $A(h) \geq B(h)$ eşitsizliği, h 'nin tanım bölgesindeki her değer için sağlanmış olur. Böylelikle (E.1) eşitsizliği, yani $S_d \leq S_s$ durumu ispatlanmış olur.

Ek F

(4.73) ilişkisi, $k=0$ için aşağıdaki gibi yazılacak olursa:

$$G(\omega_2) := f(\omega_2) - \left(\tan^{-1} \frac{a_1 \omega_2}{\omega_2^2 - a_0} \right) > 0 \quad (\text{F.1})$$

Şüphesiz ki $G(0)=0$ ve $0 < \omega_2 < \sqrt{a_0 - a_1^2/2}$ 'dir. Eğer bu fonksiyonun türevi alınacak olursa, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\frac{dG(\omega_2)}{d\omega_2} = \frac{-2a_1\omega_2(-\omega_2^4 - 2a_0\omega_2^2 + a_0(3a_0 - a_1^2))}{((\omega_2^2 - a_0)^2 + a_1^2\omega_2^2)^2} \quad (\text{F.2})$$

Ek E bölümünde de tartışıldığı üzere, bu türev $\omega_2 \in \left(0, \sqrt{-a_0 + \sqrt{4a_0^2 - a_0a_1^2}} \right)$ için pozitiftir, yani $G(\omega)$ bu aralıkta artandır. Ancak (E.3) ile verilen ilişki dikkate alındığında, aşağıdaki ilişki geçerli olacaktır:

$$\sqrt{-a_0 + \sqrt{4a_0^2 - a_0a_1^2}} > a_0 - \frac{a_1^2}{2} \quad (\text{F.3})$$

Böyle bir durumda ise, açık bir şekilde $G(\omega_2)$ fonksiyonu, tanımlı olduğu aralık olan $0 < \omega_2 < \sqrt{a_0 - a_1^2/2}$ boyunca artan olacaktır. Bu durum $G(0)=0$ ile birleştirilecek olursa, (4.73) ilişkisinin $k=0$ için geçerli olacağı kanıtlanmış olur.

ÖZGEÇMİŞ



Ad-Soyad : Barış Samim Nesimioğlu
Doğum Tarihi ve Yeri : 19. 10. 1983 / İSTANBUL
E-posta : barisnesimioglu@yahoo.com

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** :2006, İTÜ, Elektrik-Elektronik Fakültesi, Elektronik Mühendisliği
- **Yüksek Lisans** : 2010, İTÜ, Kontrol-Otomasyon A.B.D, Kontrol Mühendisliği

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

- 2010-2016 yılları arası İTÜ Kontrol Mühendisliğinde araştırma görevlisi olarak çalıştı.

DOKTORA TEZİNDEN TÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- **Nesimioglu, B.S.** ve Soylemez, M.T. (2015). On Stabilisability Conditions of Unstable First-Order Time-Delay Systems with Time-Delay. *2nd International Conference on Advanced Technology&Sciences (ICAT)*, Antalya, Türkiye.
- **Nesimioglu, B.S.** ve Soylemez, M.T. (2015). All Stabilizing Proportional Controllers For First Order Bipropor Systems with Time-Delay – An Analytical Derivation, *Asian Journal of Control*, doi: 10.1002/asjc.1316.

DİĞER YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

- **Nesimioglu, B.S.** ve Soylemez, M.T. (2012). A simple derivation of all stabilizing proportional controllers for first order time-delay systems,” *Asian Journal of Control*, Vol. 14, No. 2 pp. 598 – 594.

- **Nesimioglu, B.S.** ve Soylemez, M.T. (2014). Calculation of All Gains Providing Time-Delay Independent Stability via Root Locus, *Int. Conf. on Control Decision and Information Technologies (CoDIT)*, Metz, Fransa.
- **Nesimioglu, B.S.** ve Soylemez, M.T. (2015). Sistem Kararlılığını Zaman Gecikmesinden Bağımsız Hale Getiren Tüm P-Tipi Kontrolörlerin Hesaplanması ve Bir DC Motora Uygulanması, Otomatik Kontrol Türk Milli Komitesi Ulusal Toplantısı TOK2015, Denizli ,Türkiye, pp. 1061-1068