

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ ENERJİ ENSTİTÜSÜ

**SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİNİN NÖTRON
DİFÜZYON DENKLEMİNE UYGULANMASINDA
CHEBYSHEV POLİNOMSA HIZLANDIRMASI**

**DOKTORA TEZİ
Yük. Lis. Öznur ENGİN
(301982001)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 16 Eylül 2005
Tezin Savunulduğu Tarih : 6 Nisan 2006**

**Tez Danışmanı :
Diğer Jüri Üyeleri**

Prof.Dr. Bilge ÖZGENER

Prof.Dr. Atilla ÖZGENER (İ.T.Ü.)

Prof.Dr. Melih GEÇKİNLİ (İ.T.Ü.)

Prof.Dr. Burhanettin CAN (M.Ü.)

Doç.Dr. Metin Orhan KAYA (İ.T.Ü.)

B. Özgener

Atilla

Melih Geçkinli

Burhanettin Can

Metin Orhan Kaya

NİSAN 2006

ÖNSÖZ

Tez çalışmalarım süresince büyük destek ve yardımlarını aldığım, sıkıntılı anlarımda bana yol gösteren kıymetli tez danışmanı hocam Sayın Prof.Dr. Bilge Özgener'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yine bu çalışmalarım süresince destek ve yardımlarını esirgemeyen tez izleme komitesi üyelerinden değerli hocam Prof.Dr. H.Atilla Özgener'e ve Doç.Dr. Metin Orhan Kaya'ya teşekkürü bir borç bilirim.

Programlamayla ilgili problemlerimde deneyimlerinden yararlandığım Yrd.Doç.Dr. H.İbrahim Keser'e de ayrıca teşekkürlerimi sunarım.

Gerek yüksek lisans gerekse doktora eğitimim süresince destek ve yardımlarını esirgemeyen, kendisinden her zaman faydalandığım kıymetli hocam Prof.Dr. Melih Geçkinli'ye de özellikle teşekkür ederim.

Her zaman yanımda olan sevgili aileme, ağabeyim ve ailesine hiçbir zaman ödenmesi mümkün olmayacak teşekkürlerimi sunmaktan mutluluk duyacağım.

Eylül 2005

Öznur Engin

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR	v
TABLO LİSTESİ	vi
ŞEKİL LİSTESİ	viii
SEMBOL LİSTESİ	x
ÖZET	xi
SUMMARY	xiii
1. GİRİŞ	1
1.1. Giriş ve Çalışmanın Amacı	1
2. SINIR ELEMANLARI METODUNUN ÇOK GRUPLU NÖTRON DİFÜZYON TEORİSİNE UYGULANMASI	6
2.1. Çok Gruplu Nötron Difüzyon Teorisi	6
2.2. Grup İçi Difüzyon Denkleminin Sınır Elemanları Yöntemi ile Çözümü	9
2.2.1. Sınır integral denkleminin türetimi	11
2.3. Sınır Eleman Ayırıklaştırması	25
2.4. İç Akı Hesabı	33
3. GÜÇ İTERASYONUNU HIZLANDIRMA	35
3.1. Nötron Difüzyon Yetkinlik Özdeğer Problemi	35
3.2. Güç (Dış) İterasyon Metodu	39
3.2.1. Güç iterasyonu metodunun hızlandırılması	40
3.2.2. Güç iterasyonunun Chebyshev polinomsal metodu ile hızlandırılması	40
3.2.3. Dominans oranı öngörülleri	45
4. SAYISAL UYGULAMA	47
4.1. Tek Gruplu Nötron Difüzyon Teorisi Yetkinlik Özdeğer Problemi	50
4.1.1. Tek gruplu problemin sabit sınır elemanları ile çözümü	53
4.1.2. Tek gruplu problemin lineer sınır elemanları ile çözümü	60
4.2. İki Gruplu Nötron Difüzyon Teorisi Yetkinlik Özdeğer Problemi	66
4.2.1. İki gruplu problemin sabit sınır elemanları ile çözümü	70
4.2.2. İki gruplu problemin lineer sınır elemanları ile çözümü	73
4.3. Üç Gruplu Nötron Difüzyon Teorisi Yetkinlik Özdeğer Problemi	76
4.3.1. Üç gruplu problemin sabit sınır elemanları ile çözümü	81
4.3.2. Üç gruplu problemin lineer sınır elemanları ile çözümü	83
4.4. Chebyshev Polinomsal Hızlandırmasının Sabit ve Lineer Sınır Elemanları Üzerindeki Etkisi	85

4.5. Chebyshev Polinomsal Hızlandırmasının Etkinliğinin Dominans Oranına Bağımlılığı	87
5. SONUÇLAR VE TARTIŞMA	89
KAYNAKLAR	91
EKLER	96
ÖZGEÇMİŞ	105

KISALTMALAR

BEM	: Sınır Elemanları Metodu (Boundary Element Method)
FDM	: Sonlu Farklar Metodu (Finite Difference Method)
FEM	: Sonlu Elemanlar Metodu (Finite Element Method)
MRBEM	: Çoktan Karşılıklık Sınır Elemanları Metodu (Multiple Reciprocity Boundary Element Method)

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 4.1. Bütün problemler için tablolarda kullanılan kısaltmalar	49
Tablo 4.2. Tek gruplu yetkinlik özdeğer problemi için nükleer sabitler	52
Tablo 4.3. Tek enerji grubu probleminin sabit sınır elemanları ile farklı ızgaralar için hesaplanan dominans oranları	53
Tablo 4.4. Tek gruplu difüzyon teorisi yetkinlik özdeğer probleminin sabit sınır elemanları ile sayısal çözüm sonuçları	54
Tablo 4.5. Tek enerji grubu problemi için gerçek dominans oranının BMGCH programına dışarıdan girilmesi sonucunda elde edilen sayısal sonuçlar	55
Tablo 4.6. $a=100$ (cm) örneği için BMG-BMGCH ortalama kare hatanın karekökü	60
Tablo 4.7. Tek enerji grubu probleminin lineer sınır elemanları ile farklı ızgaralar için hesaplanan dominans oranları	60
Tablo 4.8. Tek gruplu difüzyon teorisi yetkinlik özdeğer probleminin lineer sınır elemanları ile sayısal çözüm sonuçları	61
Tablo 4.9. Tek enerji grubu problemi için gerçek dominans oranının BMGLCH programına dışarıdan girilmesi sonucunda elde edilen sayısal sonuçlar	62
Tablo 4.10. $a=100$ (cm) örneği için BMGL-BMGLCH ortalama kare hatanın karekökü	66
Tablo 4.11. İki gruplu yetkinlik özdeğer problemi için nükleer sabitler	69
Tablo 4.12. İki enerji grubu probleminin sabit sınır elemanları ile farklı ızgaralar için hesaplanan dominans oranları	69
Tablo 4.13. İki gruplu difüzyon teorisi yetkinlik özdeğer probleminin sabit sınır elemanları ile sayısal çözüm sonuçları	70
Tablo 4.14. İki enerji grubu problemi için gerçek dominans oranının BMGCH programına dışarıdan girilmesi sonucunda elde edilen sayısal sonuçlar	70
Tablo 4.15. İki enerji grubu probleminin lineer sınır elemanları ile farklı ızgaralar için hesaplanan dominans oranları	73
Tablo 4.16. İki gruplu difüzyon teorisi yetkinlik özdeğer probleminin lineer sınır elemanları ile sayısal çözüm sonuçları	73
Tablo 4.17. İki enerji grubu problemi için gerçek dominans oranının BMGLCH programına dışarıdan girilmesi sonucunda elde edilen sayısal sonuçlar	74
Tablo 4.18. Üç gruplu yetkinlik özdeğer problemi için nükleer sabitler	80
Tablo 4.19. Üç enerji grubu probleminin sabit sınır elemanları ile farklı ızgaralar için hesaplanan dominans oranları	81

Tablo 4.20.	Üç gruplu difüzyon teorisi yetkinlik özdeğer probleminin sabit sınır elemanları ile sayısal çözüm sonuçları	81
Tablo 4.21.	Üç enerji grubu problemi için gerçek dominans oranının BMGCH programına dışarıdan girtilmesi sonucunda elde edilen sayısal sonuçlar	82
Tablo 4.22.	Üç enerji grubu probleminin lineer sınır elemanları ile farklı ızgaralar için hesaplanan dominans oranları	83
Tablo 4.23.	Üç gruplu difüzyon teorisi yetkinlik özdeğer probleminin lineer sınır elemanları ile sayısal çözüm sonuçları	83
Tablo 4.24.	Üç enerji problemi için gerçek dominans oranının BMGLCH programına dışarıdan girtilmesi sonucunda elde edilen sayısal sonuçlar	84
Tablo 4.25.	Tek gruplu yetkinlik özdeğer problemi için BMGCH ve BMGLCH program sonuçları	85
Tablo 4.26.	İki gruplu yetkinlik özdeğer problemi için BMGCH ve BMGLCH program sonuçları	86
Tablo 4.27.	Üç gruplu yetkinlik özdeğer problemi için BMGCH ve BMGLCH program sonuçları	86
Tablo 4.28.	Sabit sınır elemanları ile grup sayısına bağlı olarak dominans oranı ve hızlandırma etkinliğinin değişimi	87

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1 : V hacimli S yüzeyli bir sistem	10
Şekil 2.2 : Sabit sınır elemanı gösterimi	25
Şekil 2.3 : Sabit sınır elemanlarına bölünmüş iki boyutlu sistem	26
Şekil 2.4 : Lineer sınır elemanı gösterimi	27
Şekil 2.5 : Lineer sınır elemanlarına bölünmüş iki boyutlu sistem	28
Şekil 2.6 : Lagrange tipi lineer interpolasyon fonksiyonları	29
Şekil 2.7 : Sistem için lineer sonlu elemanlarla ayrıklaştırılması	31
Şekil 2.8 : Sistem için K nodlu lineer sonlu elemanlarla ayrıklaştırılması	33
Şekil 4.1 : Nötron difüzyon yetkinlik özdeğer problemleri için çözümlenen kare bir sistemin $1/8$ 'lik kısmı	48
Şekil 4.2 : Tek gruplu nötron difüzyon yetkinlik özdeğer problemi için çözümlenen $1/8$ 'lik geometrinin sabit sınır elemanları ile ayrıklaştırılması	51
Şekil 4.3 : Tablo 4.4-5'te verilen sayısal k_{etk} değerleri ile analitik k_{etk} değerinin karşılaştırılması	56
Şekil 4.4 : $N1$ ızgarası için BMG-BMGCH programlarından elde edilen köşegen akı dağılımlarının analitik akı dağılımları ile karşılaştırılması	57
Şekil 4.5 : $N1$ ızgarası için BMGCH programından elde edilen akı dağılımlarının yüzdesel hatalarının 2-3 boyutlu gösterimi	58
Şekil 4.6 : $N1$ ızgarası için BMGCH programından elde edilen akı dağılımlarının 2-3 boyutlu gösterimi	59
Şekil 4.7 : Tablo 4.8'de verilen sayısal k_{etk} değerleri ile analitik k_{etk} değerinin karşılaştırılması	62
Şekil 4.8 : $N1$ ızgarası için BMGL-BMGLCH programlarından elde edilen köşegen akı dağılımları ile analitik akı dağılımlarının karşılaştırılması	63
Şekil 4.9 : $N1$ ızgarası için BMGLCH programından elde edilen akı dağılımlarının yüzdesel hatalarının 2-3 boyutlu gösterimi	64
Şekil 4.10 : $N1$ ızgarası için BMGLCH programından elde edilen akı dağılımlarının 2-3 boyutlu gösterimi	65
Şekil 4.11 : Tablo 4.13-14'te verilen sayısal k_{etk} değerleri ile analitik k_{etk} değerinin karşılaştırılması	71
Şekil 4.12 : $N2$ ızgarası için BMG-BMGCH programlarından elde edilen birinci grup köşegen akı dağılımlarının analitik akı dağılımları ile karşılaştırılması	72
Şekil 4.13 : $N2$ ızgarası için BMG-BMGCH programlarından elde edilen ikinci grup köşegen akı dağılımlarının analitik akı dağılımları ile karşılaştırılması	72

Şekil 4.14	: Tablo 4.16’da verilen sayısal k_{etk} değerleri ile analitik k_{etk} değerinin karşılaştırılması	74
Şekil 4.15	: N_2 ızgarası için BMGL-BMGLCH programlarından elde edilen birinci grup köşegen akı dağılımlarının analitik akı dağılımları ile karşılaştırılması	75
Şekil 4.16	: N_2 ızgarası için BMGL-BMGLCH programlarından elde edilen ikinci grup köşegen akı dağılımlarının analitik akı dağılımları ile karşılaştırılması	75
Şekil 4.17	: Tablo 4.20’de verilen sayısal k_{etk} değerleri ile analitik k_{etk} değerinin karşılaştırılması	82
Şekil 4.18	: Tablo 4.23’te verilen sayısal k_{etk} değerleri ile analitik k_{etk} değerinin karşılaştırılması	84
Şekil A.1	: Fisyon kaynağı iterasyonu algoritması	96

SEMBOL LİSTESİ

D_g	: g 'inci grup difüzyon sabiti
$\Sigma_{r,g}$	: g 'inci grup çıkartma tesir kesiti
$\Sigma_{s,g \leftarrow h}$	: h grubundan g grubuna makroskopik saçılma tesir kesiti
k	: Etkin çoğaltma katsayısı (veya k_{etk})
χ_g	: Fisyonda yayınlanan bir nötronun g 'inci gruba ait olması olasılığı
ν_g	: g 'inci grup nötronlarının sebep olduğu fisyonlardan yayınlanan ortalama nötron sayısı
$\Sigma_{f,g}$	: g 'inci grup makroskopik fisyon tesir kesiti
$\nu_g \Sigma_{f,g}$	: g 'inci grup makroskopik fisyon verim tesir kesiti
Φ_g	: g 'inci grup nötron akısı
L_g	: g 'inci grup difüzyon uzunluğu
k_g	: g 'inci grup difüzyon uzunluğunun tersi
s_g	: g 'inci grup kaynak
δ	: Kronecker delta
G_g	: g 'inci grup Green Fonksiyonu
θ	: İki eleman arasındaki açı
ε	: Özdeğer tayinindeki hata miktarını belirleyen keyfî ve pozitif bir sayı
ρ	: Dominans oranı
ϕ	: Lagrange tipi lineer interpolasyon fonksiyonları
h_k	: Sonlu eleman baz fonksiyonları
w_f	: Fisyon başına açığa çıkan enerji
P	: Güç

SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİNİN NÖTRON DİFÜZYON DENKLEMİNE UYGULANMASINDA CHEBYSHEV POLİNOMSA HIZLANDIRMASI

ÖZET

Sınır Elemanları Metodu (BEM), çeşitli mühendislik ve fizik problemlerinin sayısal çözümlerinde kullanılan önemli bir tekniktir. BEM, belirli bir sistem hacmi içinde belirli sınır şartları altında çözümü aranan bir diferansiyel denklemin, tanımlanan sonsuz ortam Green fonksiyonları yardımı ile sadece sistem yüzeyinde bilinmeyenler içeren bir sınır integral denklemine dönüştürülmesi prensibine dayanır. Kısmî diferansiyel denklemlerin sınır integral denklemlerine dönüştürülerek, bilinmeyenlerin sadece homojen sistem sınırlarında tanımlanmasına imkân sağlayan BEM, Sonlu Farklar Metodu (FDM) ve Sonlu Elemanlar Metodu (FEM)'e göre çok daha küçük boyutta lineer sistemler üretir. FDM ve FEM'de elde edilen lineer sistem simetrik ve bantlı yapıda iken, BEM'de dolu ve simetrik olmayan bir yapı oluşturuyor ise de lineer sistem boyutlarını küçültmesi bakımından diğer sayısal metodlara göre tercih edilmektedir.

BEM'in lineer sistem boyutlarını küçültmesi bakımından diğer mühendislik dallarında olduğu gibi nötron difüzyon denkleminin sayısal çözümüne de uygulanması tercih sebebi olmuştur. Nötron difüzyon denkleminin BEM ile çözümünde birçok araştırmalar yapılmıştır. Bu araştırmalara, nötron difüzyon denkleminin bağımsız kaynak ve fisyon kaynağı hacim integrallerini ve saçılma kaynağı hacim integralini içermesinden dolayı hacim integrallerinin yüzey integrallerine dönüştürülmesi konusunda yapılan çalışmalar örnek verilebilir.

Reaktörün çoğaltma katsayısı hesabı yani yetkinlik özdeğer hesabı sayısal analizin en büyük özdeğeri bulmaya yönelik güç iterasyonu metodu, nötron difüzyonunda fisyon kaynağı iterasyonu denilen metod ile yapılır. Güç iterasyonu metodunun yavaş yakınsamasından dolayı, güç iterasyonunun hızlandırılması konusunda çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Güç iterasyonunun hızlandırılması için Chebyshev polinomsal, kaba ızgara yeniden dengeleme, altuzay metodu gibi birçok yöntemler denenmiştir.

Çok gruplu iki boyutlu nötron difüzyon denklemine FDM ve FEM uygulanarak elde edilen özdeğer çözümüne dış iterasyon metodunun uygulanması sırasında, bu dış iterasyonun Chebyshev polinomsal hızlandırma metodu ile hızlandırıldığı çalışmalar yapılmıştır.

Bu tez çalışmasında ise iki boyutlu çok gruplu nötron difüzyon denkleminin BEM ile çözümü yapıldıktan sonra, elde edilen k -özdeğer probleminin dış iterasyon hızlandırmasında yeni bir çalışma olarak Chebyshev polinomsal metodu uygulanmaya çalışılmıştır.

Daha önce geliştirilmiş olan BMG ve BMGL yazılımları, iki boyutlu çok gruplu nötron difüzyon denklemlerinin bağımsız kaynak ve yetkinlik özdeğer problemlerini sabit ve lineer sınır elemanı kullanarak homojen sistemler için sıfır akı boşluk ve

yansıtma sınır şartları ile çözmektedir. Bu tez çerçevesinde geliştirilen BMGCH ve BMGLCH yazılımları ise BMG ve BMGL yazılımlarına Chebyshev polinomsal hızlandırması uygulamaktadır.

Sınır elemanları yönteminin özelliğine bağlı olarak ortaya çıkan özdeğer problemi matrislerinin simetrik olmayan yapıda olması, Chebyshev polinomsal hızlandırmasının uygulanabilirliğinin ve etkinliğinin araştırılması tezin ana amacını oluşturmaktadır. Bu amaçla BMG ve BMGL yazılımlarının ürettiği matrislerin özdeğerlerinin gerçel ve pozitif olup olmadığı araştırıldı. BMG ve BMGL yazılımlarının ürettiği matrisler bir diske yazdırılarak MATHEMATICA programına aktarıldı, hesap sonucunda bütün özdeğerlerin gerçel ve pozitif olduğu, en büyük özdeğere karşılık gelen özvektörlerin de pozitif olduğu gözlemlenerek Chebyshev polinomsal hızlandırmasının simetrik olmayan yapıdaki matrislere de uygulanabileceği tespit edilmiştir.

BMG, BMGL, BMGCH ve BMGLCH yazılımları kullanılarak değişik enerji grup yapısına sahip homojen nükleer sistemlerin etkin çoğaltma katsayıları ve akı dağılımları hesaplandı. Hızlandırmasız BMG ve BMGL program sonuçları ile Chebyshev polinomsal hızlandırması yapan BMGCH ve BMGLCH program sonuçları karşılaştırıldı. BEM'in farklı matris yapısına rağmen Chebyshev polinomsal hızlandırmasının ele alınan bütün problemler için etkin olduğu ve özellikle dominans oranının büyük olduğu problemlerde beklendiği gibi çok daha etkin olduğu gözlenmiştir.

Chebyshev Polynomial Acceleration in the Application of the Boundary Element Method to the Neutron Diffusion Equation

SUMMARY

The Boundary Element Method (BEM) is an important technique, which has been applied in many fields of engineering and physical problems during the last decade. The principle of BEM is based on transformation of a differential equation to be solved over a homogeneous region of space under appropriate boundary conditions to a boundary integral equation consisting of unknown values that are only on the system surface using infinite-medium Green's function. Thus the original differential equation is transformed into an equivalent boundary integral equation. BEM, which makes the definition of unknowns possible only on the homogenous system boundaries, by the transformation of partial differential equation into boundary integral equation, produces linear systems in much smaller sizes compared to Finite Difference Method (FDM) and Finite Elements Method (FEM). The resulting linear system obtained by FDM and FEM has a symmetrical and banded structure. Although, the structure is full and nonsymmetrical, BEM is preferred over other numerical methods because of important reduction in the matrix dimensions.

BEM is preferred in the numerical solution of neutron diffusion equations as in other engineering problems, because this method reduces the dimensions of the linear system. There are a number of researches on the solution of neutron diffusion equations using BEM. Since neutron diffusion equations consist of external and fission source volume integrals and scattering source volume integrals, transformation of volume integrals into surface integrals, which were studied by a number of researchers, can be given as examples.

The computation of multiplication factor, i.e. the computation of criticality eigenvalue, of a reactor is performed by means of power iteration method, which is called in neutron diffusion fission source iteration, when finding the largest eigenvalue. Due to the slow convergence rate of power iteration method, there have been investigations on the acceleration of power iteration. For this purpose, Chebyshev polynomial, coarse mesh rebalance, subspace methods were used.

During the application of the fission source iteration method to the problem of determining the largest eigenvalue of the system, which was obtained by applying FDM and FEM to multigroup, two dimensional neutron diffusion equations, there have been some researches on the acceleration of fission source iteration using Chebyshev polynomial acceleration method.

In this study, however, after two dimensional, multigroup diffusion equations were solved using BEM, the Chebyshev polynomial method was adopted, as a novel approach, in the external iteration acceleration of k -eigenvalue problem.

BMG and BMGL programs, which were developed before, have solved the external source and criticality eigenvalue problems of the two dimensional multigroup

neutron diffusion equations with zero flux vacuum and reflection boundary conditions for homogeneous systems by using constant and linear boundary element. BMGCH and BMGLCH programs developed within the frame of this thesis have applied the Chebyshev polynomial acceleration to the BMG and BMGL software.

Dealing with the eigenvalue problem matrices being in a nonsymmetrical structure as a result of the characteristics of finite elements method, investigating the degree of applicability and effectiveness of Chebyshev polynomial acceleration establish the main objective of the current thesis. Further, the eigenvalues of the matrices produced by BMG and BMGL software are examined if they are real and positive. These matrices were saved to a disk then transferred to MATHEMATICA program. It has been observed that all the eigenvalues computed by the program were real and positive, also the eigenvector corresponding to the maximum eigenvalue was positive; therefore it was concluded that Chebyshev polynomial acceleration could be applied to the matrices in nonsymmetrical structure.

The effective multiplication factor and flux distributions of homogeneous nuclear systems having different energy group structures were calculated using BMG, BMGL, BMGCH and BMGLCH programs. The results obtained from unaccelerated BMG and BMGL programs were compared to the results of BMGCH and BMGLCH programs that use Chebyshev polynomial acceleration. Although the matrix structure of the boundary element method is different, Chebyshev acceleration was quite effective in all the problems dealt with, and it was observed that it was even more effective in the problems with high dominance rate as expected.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1. Giriş ve Çalışmanın Amacı

Sınır Elemanları Metodu (BEM), mühendislik ve fizik problemlerinin sayısal çözümlerinde kullanılan önemli bir tekniktir. BEM, belirli bir sistem hacmi içinde belirli sınır şartları altında çözümü aranan bir diferansiyel denklemin, tanımlanan sonsuz ortam Green fonksiyonları yardımı ile sadece sistem yüzeyinde bilinmeyenler içeren bir sınır integral denklemine dönüştürülmesi prensibine dayanır. BEM'in ele alınan problemin sadece yüzeyinde ayırıklaştırma yapılması bakımından Sonlu Farklar Metodu (FDM) ve Sonlu Elemanlar Metodu (FEM) gibi diğer sayısal metodlara göre önemli bir ayrıcalığı vardır.

BEM, 1980'li yıllardan beri ısı transferi, mekanik, akışkanlar mekaniği gibi mühendisliğin farklı alanlarına uygulanmaktadır. Kısmî diferansiyel denklemlerin sınır integral denklemlerine dönüştürülerek, bilinmeyenlerin sadece homojen sistem sınırlarında tanımlanmasına imkân sağlayan BEM, FDM ve FEM'e göre çok daha küçük boyutta lineer sistemler üretir. FDM ve FEM'de elde edilen lineer sistem simetrik ve bantlı yapıda iken, BEM'de dolu ve simetrik olmayan bir yapı oluşturuyor olsa da BEM'in lineer sistem boyutlarını küçültmesi önemli bir avantaj sağlar. BEM'in bir diğer önemli özelliği ise FDM'den farklı olarak çok karmaşık geometrilere uygulanabilmesidir [1].

Nükleer reaktörlerde, reaktörün çoğaltma katsayısını ve nötron dağılımını hesaplamak için nötron difüzyon denklemi kullanılır. İkinci derece eliptik bir denklem olan tek gruplu nötron difüzyon denklemi, aynı zamanda modifiye Helmholtz denklemidir. BEM'in tek gruplu nötron difüzyon denklemine ilk uygulanması 1985 yılında yapılmıştır [2]. Reaktörün çoğaltma katsayısı hesabı yani yetkinlik özdeğer hesabı sayısal analizin en büyük özdeğeri bulmaya yönelik güç

iterasyonu metodu, nötron difüzyonunda fisyon kaynağı iterasyonu adını alır. Her iterasyonda yeni özdeğer öngörüsü yapılması gereği, BEM’de hesaplanan sınır nötron dağılımının yanı sıra homojen bölge içi nötron dağılımının bilinmesini de gerektirir. Bölge içi nötron dağılımı sınır nötron dağılımı cinsinden Neumann serisine açılarak iç nötron dağılımı hesabının ortadan kaldırıldığı bir çalışma yapılmıştır [3]. Nötron difüzyon denkleminin fisyon ve bağımsız kaynak terimlerinden dolayı hacim integrallerini içermesi, hacim integrallerinin yüzey integrallerine dönüştürülmesi konusunda çalışmalar yapılmasına yol açmıştır. Bu çalışmaların, bağımsız kaynaklı problemlere [4] ve fisyon kaynağı iterasyonuna [5], Çoktan Karşılıklı Sınır Elemanı Metodu (Multiple Reciprocity Boundary Element Method-MRBEM) uygulanarak hacim integralinin yüzey integraline dönüştürülmesiyle yapıldığı görülebilir. Çok gruplu nötron difüzyon hesaplarında gruptan gruba saçılma terimleri yer aldığından sınır integral denkleminde saçılma hacim integralleri içerirler. Bu saçılma hacim integrallerinin hesabı zorunluluğunu ortadan kaldırmaya yönelik araştırmalar sonucu, çok gruplu sınır integral denklemi türetilerek, hacimsel saçılma integrallerini yüzey integrallerine dönüştüren bir çalışma vardır [6]. 1990’lı yılların sonlarında ise BEM’in tek homojen bölge yerine, çok sayıda bölgeden oluşan daha gerçekçi sistemlere uygulandığı görülmektedir. Bu amaçla yapılan köşegenleştirme metodu, çoğaltma katsayısı öngörüsü k bağımlı sonsuz ortam çok grup matrisinin benzerlik dönüşümüyle köşegenleştirilmesi düşüncesine dayanır [7]. Çok gruplu çok bölgeli nötron difüzyon denkleminin ele alındığı bir diğer çalışma, çok bölgeli sistemin homojen bölgelere ayrılarak, herbir homojen bölgenin sınır integral denklemlerinin bölgeler arası arayüzlerde nötron akısının ve akımının sürekliliği şartı aracılığı ile bir araya getirilmesini ve klasik güç iterasyonu metodu ile çözümünü içerir [8]. Nötron difüzyon denkleminin çözümü için genellikle güç iterasyonu metodu kullanılır. Çok bölgeli çalışmalara ilave olarak, güç iterasyonu metodunun kullanılmadığı bölge ayrıklaştırma metodu (domain decomposition method) geliştirilmiştir. Nötron difüzyon denklemindeki fisyon kaynağı alan integralleri BEM yardımıyla yok edilmiş, reaktör kalbi homojen bölgelere ayrıklaştırılıp alt problemlere dönüştürülerek BEM ile çözülmüştür [9]. Çok gruplu çok bölgeli nötron difüzyon probleminin çözümü için sınır elemanlı cevap matrisi metodunun (boundary element-response matrix method) uygulandığı, böylece BEM ile gerçekçi difüzyon problemlerinin oldukça detaylı ve doğru çözümlerinin elde edilebileceği [10], son olarak da Galerkin metoduna dayalı sınır

elemanı metodu ile cevap matrisinin elemanlarının daha doğru ve hızlı bir biçimde hesaplandığı bir çalışmanın yapıldığı görülebilir [11]. Bir başka çalışmada ise sınır elemanları ile sonlu elemanlar yöntemleri bir arada kullanılarak nötron difüzyon denkleminin çözümünde uygulanmıştır [12].

Reaktörlerin yetkinlik hesabı yani çoğaltma katsayısının bulunması için kullanılan, sayısal analizin en büyük özdeğeri bulmaya yönelik güç iterasyonu metodunun yavaş yakınsaması, güç iterasyonunun hızlandırılması konusunda çalışmalar yapılmasına yol açmıştır. Bir çalışmada, üç boyutlu Helmholtz tipi denklemin çözümünde MRBEM kullanılmış ve özdeğer araması için, denklemin kaynak terimi içermesinden dolayı alan integrali küresel Bessel fonksiyonlarına dayalı yüksek dereceli temel çözümlerin yardımıyla sınır integrallerine dönüştürülmüştür ve özdeğer araması tekniği sadece sınır integrallerinde kullanılarak geleneksel özdeğer araması tekniğinden daha kolay bir teknik olduğu gösterilmiştir [13].

Başka çalışmada ise, matris formda verilen kısmî özdeğer probleminin çözümü için altuzay iterasyon (subspace iteration) metodu ve Arnoldi metodu kullanılarak nötron difüzyon denkleminin uygulanması sırasında bu metodları hızlandırma teknikleri için, biri kaba taneli diğeri ince taneli olmak üzere iki paralelleştirme yaklaşımı geliştirilmiştir [14]. Ayrıca yine nötron difüzyon denkleminin klasik güç iterasyonu veya altuzay iterasyon metodunun uygulanması yerine hızlandırma için Arnoldi metodunun [15] ve varyasyonel tekniğin [16-17] etkisinin incelendiği, daha kullanışlı ve gösterimi kolay olan kaydırmalı güç metodunun geliştirildiği [18] bir çalışma yapılmıştır.

Geliştirilen bir başka hızlandırma çalışmasında ise, nükleer reaktörlerin yetkinlik analizinde çok boyutlu çok gruplu nötron difüzyon denklemleri matematiksel olarak özdeğer problemine eşit ele alınmış ve dış iterasyon yakınsama oranının artırılması için Chebyshev polinomsal hızlandırma metodu kullanılarak iterasyon sayısında azalma olduğu gösterilmiştir [19]. Bir diğer çalışmada ise Chebyshev hızlandırma tekniğinin, simetrik olmayan özdeğer problemlerine uygulandığı görülebilir [20].

Hızlandırma metodlarından, kaba ızgara yeniden dengeleme tekniğinin nötron difüzyon ve transport denklemleri gibi, homojen ve homojen olmayan büyük lineer

sistemlerin iteratif çözümünün hızlandırılmasında başarılı bir şekilde kullanıldığı gösterilmiştir [21-24].

Son yıllarda ise transport denkleminin etkili iteratif çözümlerine ilişkin yeni hızlandırma tekniklerinin geliştirildiği [25], ayrık ordinatlar nötron transport denkleminin iteratif çözümünde, sentetik hızlandırma metodunun uygulandığı [26], bu denklemin daha doğru ve pozitif çözümleri için geliştirilen lineer çoklu denge metodunun (linear multiple balance method) hızlandırılması için açılmal yeniden dengeleme hızlandırmasının yapıldığı çalışmalar görülebilir [27].

Yine hızlandırma metodlarından, kaba ızgara yeniden dengeleme metodu ile Aitken metodunun birleştirilerek transport teorisi hesaplarında kullanıldığı [28], özdeğer hesabı için kaynak iterasyonu metodu ile oluşturulan Monte Carlo simülasyonunda fisyon matrisi kullanılarak, fisyon kaynağı dağılımının yakınsarlığının hızlandırıldığı bir çalışma yapılmıştır [29].

Çok gruplu iki boyutlu nötron difüzyon denklemine FDM uygulanarak, dış iterasyonun (fisyon kaynağı iterasyonunun) Chebyshev polinomsal hızlandırma metodu ile hızlandırıldığı [30], aynı denkleme FEM uygulanarak dış iterasyonun yine Chebyshev polinomsal hızlandırması yapılarak etkin hızlandırma sağladığı gösterilmiştir [31].

Bu tez çalışmasında, çok gruplu iki boyutlu nötron difüzyon denkleminin BEM ile çözümü yapıldıktan sonra, elde edilen k -özdeğer probleminin hızlandırılmasında yeni bir çalışma olarak Chebyshev polinomsal metodunun uygulanması ele alınmıştır.

İkinci bölümde, çok gruplu nötron difüzyon denkleminin sınır elemanları ile türetiminde denklemin saçılma hacim integrallerini içermesinden dolayı, saçılma hacim integrallerinin yüzey integrallerine dönüştürülmesi ele alınacaktır.

Bölüm 2’de elde edilen çok gruplu nötron difüzyon teorisi yetkinlik özdeğer-özvektör probleminin çözümü için hem güç iterasyonu hem de Chebyshev polinomsal hızlandırması uygulanacaktır. Bu amaçla, Bölüm 3’te güç iterasyonunun Chebyshev polinomsal hızlandırması tekniğinin teorisi ele alınacaktır.

Bölüm 4’te, geliştirilen programlar tek, iki ve üç gruplu nötron difüzyon teorisi yetkinlik özdeğer-özvektör problemlerine uygulanarak analitik sonuçları ile karşılaştırılacaktır.

Bölüm 5’te ise elde edilen sonuçlar ve öneriler sunulacaktır.

BÖLÜM 2

SINIR ELEMANLARI METODUNUN ÇOK GRUPLU NÖTRON DİFÜZYON TEORİSİNE UYGULANMASI

2.1. Çok Gruplu Nötron Difüzyon Teorisi

Bir nükleer sistemin yetkinlik özdeğer hesabında $g=1,2,3,\dots,G$ grup sayısı olmak üzere zamandan bağımsız çok gruplu nötron difüzyon denklemi,

$$-\vec{\nabla} \cdot D_g(\vec{r}) \vec{\nabla} \Phi_g(\vec{r}) + \Sigma_{r,g}(\vec{r}) \Phi_g(\vec{r}) = \sum_{h=1}^{g-1} \Sigma_{s,g \leftarrow h}(\vec{r}) \Phi_h(\vec{r}) + \frac{1}{k_{etk}} \chi_g \sum_{h=1}^G \nu_h \Sigma_{f,h}(\vec{r}) \Phi_h(\vec{r}) \quad (2.1)$$

şeklinde yazılır. (2.1) denkleminde yukarı saçılma ihmal edilmiştir [32]. Denklem (2.1)'deki semboller:

$D_g(\vec{r})$: g 'inci grup difüzyon sabiti

$\Sigma_{r,g}(\vec{r})$: g 'inci grup çıkartma tesir kesiti

$\Sigma_{s,g \leftarrow h}(\vec{r})$: h grubundan g grubuna makroskopik saçılma tesir kesiti

k_{etk} : Etkin çoğaltma katsayısı

χ_g : Fisyonda yayınlanan bir nötronun g 'inci gruba ait olması olasılığı

ν_g : g 'inci grup nötronlarının sebep olduğu fisyonlardan yayınlanan
ortalama nötron sayısı

$\Sigma_{f,g}(\vec{r})$: g 'inci grup makroskopik fisyon tesir kesiti

$\nu_g \Sigma_{f,g}(\vec{r})$: g 'inci grup makroskopik fisyon verim tesir kesiti

$\Phi_g(\vec{r})$: g 'inci grup nötron akısı

(2.1) denklemi yetkinlik özdeğer hesabı için matrisyel biçiminde,

$$\underline{\underline{M}}\Phi = \frac{1}{k_{etk}}\underline{\underline{F}}\Phi \quad (2.2)$$

şeklinde yazılır. (2.2) eşitliği bir özdeğer-özvektör problemi tanımlamaktadır. Bu özdeğer-özvektör probleminin çözülerek, en büyük özdeğer olan k_{etk} , “etkin çoğaltma katsayısını” ve buna karşılık gelen pozitif özvektörün , “akı dağılımının” hesaplanması gerekir. $\underline{\underline{M}}$ ve $\underline{\underline{F}}$, (G×G) boyutunda kare matrisler olmak üzere [24],

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} -\vec{\nabla}.D_1\vec{\nabla} + \Sigma_{r,1} & & & & \\ -\Sigma_{s,2\leftarrow 1} & -\vec{\nabla}.D_2\vec{\nabla} + \Sigma_{r,2} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ -\Sigma_{s,g\leftarrow 1} & -\Sigma_{s,g\leftarrow 2} & \cdots & -\vec{\nabla}.D_g\vec{\nabla} + \Sigma_{r,g} & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \\ -\Sigma_{s,G\leftarrow 1} & -\Sigma_{s,G\leftarrow 2} & \cdots & -\Sigma_{s,G\leftarrow g} & \cdots & -\vec{\nabla}.D_G\vec{\nabla} + \Sigma_{r,G} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \chi_1\nu_1\Sigma_{f,1} & \chi_1\nu_2\Sigma_{f,2} & \cdots & \chi_1\nu_g\Sigma_{f,g'} & \cdots & \chi_1\nu_G\Sigma_{f,G} \\ \chi_2\nu_1\Sigma_{f,1} & \chi_2\nu_2\Sigma_{f,2} & \cdots & \chi_2\nu_g\Sigma_{f,g'} & \cdots & \chi_2\nu_G\Sigma_{f,G} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \chi_g\nu_1\Sigma_{f,1} & \chi_g\nu_2\Sigma_{f,2} & \cdots & \chi_g\nu_g\Sigma_{f,g'} & \cdots & \chi_g\nu_G\Sigma_{f,G} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \chi_G\nu_1\Sigma_{f,1} & \chi_G\nu_2\Sigma_{f,2} & \cdots & \chi_G\nu_g\Sigma_{f,g'} & \cdots & \chi_G\nu_G\Sigma_{f,G} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

şeklinde gösterilir. (2.2) eşitliğindeki k_{etk} değerinin bulunması için genellikle güç iterasyonu kullanılmaktadır. Reaktör fiziğinde güç iterasyonuna fisyon kaynağı iterasyonu ya da dış iterasyon da denilmektedir. Güç iterasyonunun algoritması Ek A’da verilmiştir. Güç iterasyonunun yakınsarlığının ispatı çeşitli kaynaklarda gösterilmiştir [33-34]. Ancak güç iterasyonu yavaş yakınsayan bir metod olduğundan güç iterasyonunu hızlandırma çalışmaları yapılmıştır [23-24,30,35-37]. Bölüm 3’te güç iterasyonunun Chebyshev polinomsal hızlandırma metodu ile hızlandırılması teorik olarak ele alınacaktır.

Fisyon kaynağı iterasyonunda,

$$\underline{\underline{M}}\underline{\underline{\Phi}}^{(n+1)} = \frac{1}{k^{(n)}} \underline{\underline{F}}\underline{\underline{\Phi}}^{(n)} \quad (2.5)$$

$\Phi^{(n+1)}$ 'in bulunabilmesi için G adet denklemin ardışık olarak sırası ile çözülmesi gerekmektedir. (2.5) eşitliği açık bir biçimde yazılırsa,

$$\begin{aligned} -\vec{\nabla}.D_1\vec{\nabla}\Phi_1^{(n+1)}(\vec{r}) + \Sigma_{r,1}\Phi_1^{(n+1)}(\vec{r}) &= \frac{1}{k^{(n)}}\chi_1 f^{(n)}(\vec{r}) \\ -\vec{\nabla}.D_2\vec{\nabla}\Phi_2^{(n+1)}(\vec{r}) + \Sigma_{r,2}\Phi_2^{(n+1)}(\vec{r}) &= \frac{1}{k^{(n)}}\chi_2 f^{(n)}(\vec{r}) + \Sigma_{s,2\leftarrow 1}\Phi_1^{(n+1)}(\vec{r}) \\ -\vec{\nabla}.D_3\vec{\nabla}\Phi_3^{(n+1)}(\vec{r}) + \Sigma_{r,3}\Phi_3^{(n+1)}(\vec{r}) &= \frac{1}{k^{(n)}}\chi_3 f^{(n)}(\vec{r}) + \Sigma_{s,3\leftarrow 1}\Phi_1^{(n+1)}(\vec{r}) + \Sigma_{s,3\leftarrow 2}\Phi_2^{(n+1)}(\vec{r}) \\ &\vdots \\ -\vec{\nabla}.D_G\vec{\nabla}\Phi_G^{(n+1)}(\vec{r}) + \Sigma_{r,G}\Phi_G^{(n+1)}(\vec{r}) &= \frac{1}{k^{(n)}}\chi_G f^{(n)}(\vec{r}) + \Sigma_{s,G\leftarrow 1}\Phi_1^{(n+1)}(\vec{r}) + \dots + \Sigma_{s,G\leftarrow G-1}\Phi_{G-1}^{(n+1)}(\vec{r}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

şeklinde olur. Burada $f(\vec{r})$ fisyon kaynağı olmak üzere,

$$f(\vec{r}) = \sum_{h=1}^G \nu_h \Sigma_{f,h}(\vec{r}) \Phi_h(\vec{r}) \quad (2.7)$$

şeklinde ve fisyon kaynağının uzaysal bağımlılığı her grup difüzyon denklemi için özdeşdir.

(2.6)'da verilen denklemlerden sırası ile $\Phi_1^{(n+1)}$, $\Phi_2^{(n+1)}$, $\Phi_3^{(n+1)}$ ve $\Phi_G^{(n+1)}$ bulunur ve buradan yeni $f(\vec{r})$,

$$f^{(n+1)}(\vec{r}) = \sum_{h=1}^G \nu_h \Sigma_{f,h}(\vec{r}) \Phi_h^{(n+1)}(\vec{r}) \quad (2.8)$$

ve yeni k ,

$$k^{(n+1)} = k^{(n)} \frac{\int f^{(n+1)}(\vec{r}) dV}{\int f^{(n)}(\vec{r}) dV} \quad (2.9)$$

değerleri hesaplanır. $k^{(n)}$ ve $f^{(n)}(\vec{r})$ bir önceki iterasyondan bilindiğine göre (2.6) denklemleri kısaca,

$$-\vec{\nabla} \cdot D_g(\vec{r}) \vec{\nabla} \Phi_g^{(n+1)}(\vec{r}) + \Sigma_{r,g}(\vec{r}) \Phi_g^{(n+1)}(\vec{r}) = s_g^{(n+1)}(\vec{r}) \quad g = 1, 2, 3, \dots, G \text{ için} \quad (2.10)$$

şeklinde yazılabilir ve burada grup kaynağı,

$$s_g^{(n+1)}(\vec{r}) = \frac{1}{k^{(n)}} \chi_g f^{(n)}(\vec{r}) + (1 - \delta_{g1}) \sum_{h=1}^{g-1} \Sigma_{s,g \leftarrow h}(\vec{r}) \Phi_h^{(n+1)}(\vec{r}) \quad (2.11)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada δ , Kronecker delta olmak üzere,

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

olarak tanımlıdır [38].

(2.10) denkleminin grup içi difüzyon denklemi adı verilir. Her bir fisyon kaynağı iterasyonu sırasında G adet grup içi difüzyon denkleminin çözülmesi gerekmektedir. Ele alınan çok gruplu difüzyon denkleminin karmaşık reaktör yapısı için çözümü söz konusu olduğunda, (2.6) denklemlerinin analitik çözümü mümkün olmadığından sonlu farklar, sonlu elemanlar ya da sınır elemanları metodu gibi sayısal metodlar kullanılarak yaklaşık çözümler elde edilir. Bir sonraki bölümde (2.10)'da verilen diferansiyel denklemin sınır elemanı metodu ile çözümü sunulacaktır.

2.2. Grup İçi Difüzyon Denkleminin Sınır Elemanları Yöntemi ile Çözümü

Denklem (2.10)'da verilen grup içi difüzyon denklemi, ortamın homojen olduğu varsayılarak ve grup difüzyon uzunluğunun tersi,

$$k_g = \sqrt{\frac{\Sigma_{rg}}{D_g}} = \frac{1}{L_g} \quad (2.12)$$

şeklinde tanımlanarak ve iterasyon indisi n atlanarak,

$$\nabla^2 \Phi_g(\vec{r}) - k_g^2 \Phi_g(\vec{r}) = -\frac{s_g(\vec{r})}{D_g}, \quad \vec{r} \in V \quad (2.13)$$

biçiminde yazılabilir. Burada $s_g(\vec{r})$ grup kaynağı,

$$s_g(\vec{r}) = q_g(\vec{r}) + (1 - \delta_{g1}) \sum_{h=1}^{g-1} \sum_{s,g \leftarrow h} \Phi_h(\vec{r}) \quad (2.14)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Eşitlik (2.14)'te q_g grup fisyon kaynağını göstermektedir ve gruplar arası yukarı saçılmaya izin verilmemektedir. q_g grup fisyon kaynağı,

$$q_g(\vec{r}) = \frac{\chi_g}{k_{etk}} f(\vec{r}) \quad (2.15)$$

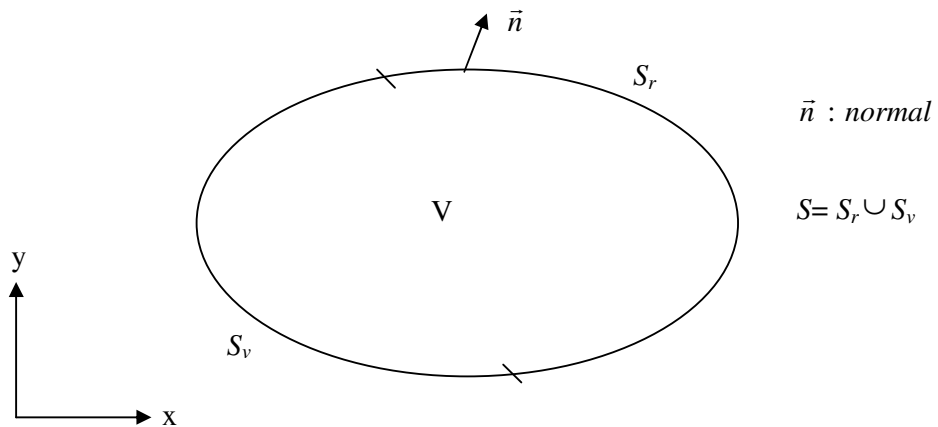
şeklinde tanımlıdır.

(2.13) denklemi Şekil 2.1'de sunulan V hacmine, S yüzeyine sahip bir nükleer sistem için,

$$\Phi(\vec{r}) = 0 \quad \vec{r} \in S_v \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n}(\vec{r}) = 0 \quad \vec{r} \in S_r \quad (2.17)$$

(2.16-17)'de verilen boşluk ve yansıtma sınır şartları altında çözülecektir. Burada S_v boşluk, S_r ise yansıtıcı sistem sınırlarını göstermektedir.



Şekil 2.1: V hacimli S yüzeyli bir sistem

2.2.1. Sınır integral denkleminin türetimi

Çok gruplu nötron difüzyon denkleminin eşdeğeri sınır integral denkleminin türetilmesi amacıyla, çözümü sonsuz ortam Green fonksiyonunu veren temel çözüm denklemini kullanılmaktadır [3].

Sonsuz ortam grup Green fonksiyonu (grup temel çözümü),

$$\nabla^2 G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) - k_g^2 G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) = -\delta(\vec{r} - \vec{\rho}) \quad \vec{r} \in V \quad (2.18)$$

denkleminin çözümüdür. Grup temel çözümü grup difüzyon uzunluğunun tersine bağlıdır. İki boyutlu sistemler için $G_g(\vec{r}, \vec{\rho})$ [3],

$$G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) = \frac{1}{2\pi} K_0(k_g |\vec{r} - \vec{\rho}|) \quad (2.19)$$

şeklindedir, burada K_0 ikinci tür sıfırıncı merteye modifiye Bessel fonksiyonudur [8] ve sonsuz ortam grup Green fonksiyonu çözümü EK B’de verilmiştir.

(2.13) denklemini temel çözüm ile çarpılıp V hacmi üzerinden integrali alınırsa,

$$\int_V G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \nabla^2 \Phi_g(\vec{r}) dV - \int_V k_g^2 G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \Phi_g(\vec{r}) dV = - \int_V \frac{S_g(\vec{r})}{D_g} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \quad (2.20)$$

şeklinde olur.

Green’in ikinci özdeşliği:

$$\begin{aligned} \int_V G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \nabla^2 \Phi_g(\vec{r}) dV &= \int_V \Phi_g(\vec{r}) \nabla^2 G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV + \int_S G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_g}{\partial n}(\vec{r}) dS \\ &\quad - \int_S \Phi_g(\vec{r}) \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}) dS \end{aligned} \quad (2.21)$$

biçimindedir.

(2.20) eşitliğinin ilk integraline (2.21)’de verilen Green’in ikinci özdeşliği uygulanır ve (2.16-17)’de verilen sınır şartları kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \int_V (\nabla^2 G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) - k_g^2 G_g(\vec{r}, \vec{\rho})) \Phi_g(\vec{r}) dV = \\ - \int_V \frac{s_g(\vec{r})}{D_g} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV - \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_g}{\partial n}(\vec{r}) dS + \int_{S_r} \Phi_g(\vec{r}) \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}) dS \end{aligned} \quad (2.22)$$

eşitliği elde edilir. (2.22) eşitliğinin sol tarafı (2.18) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} \int_V -\delta(\vec{r} - \vec{\rho}) \Phi_g(\vec{r}) dV + \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_g}{\partial n}(\vec{r}) dS - \int_{S_r} \Phi_g(\vec{r}) \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}) dS \\ = - \int_V \frac{s_g(\vec{r})}{D_g} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \end{aligned} \quad (2.23)$$

şeklinde olur. (2.23) eşitliğinin ilk terimi Dirac delta fonksiyonunun özelliğinden [39],

$$\int_V \delta(\vec{r} - \vec{\rho}) \Phi_g(\vec{r}) dV = c(\vec{\rho}) \Phi_g(\vec{\rho}) \quad (2.24)$$

şeklinde tanımlıdır. θ iki eleman arasındaki açı olmak üzere [1],

$$c(\vec{\rho}) = \begin{cases} 1, & \vec{\rho} \in V, \rho \notin S \\ \frac{\theta}{2\pi}, & \vec{\rho} \in S \end{cases} \quad (2.25)$$

şeklinde dir. (2.24)'te verilen tanım (2.23) eşitliğinde kullanılırsa,

$$c(\vec{\rho}) \Phi_g(\vec{\rho}) + \int_{S_r} \Phi_g(\vec{r}) \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}) dS - \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_g}{\partial n}(\vec{r}) dS = \int_V \frac{s_g(\vec{r})}{D_g} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \quad (2.26)$$

şeklinde sınır integral denklemi elde edilir. (2.26) denkleminin sol tarafı sadece sınır integralleri içermekte, sağ tarafı ise grup kaynak ve grup saçılma hacim integrallerini içermektedir. Burada daha önce yapılan çalışmalarda olduğu gibi saçılma hacim integrallerinin yüzey integrallerine dönüştürülmesi ele alınacaktır [6,40-43].

(2.26) denkleminin sağ tarafındaki $s_g(\vec{r})$ kaynak terimi ifadesi (2.14)'ten,

$$s_g(\vec{r}) = q_g(\vec{r}) + \sum_{s,g \leftarrow 1} \Phi_1(\vec{r}) + \sum_{s,g \leftarrow 2} \Phi_2(\vec{r}) + \dots + \sum_{s,g \leftarrow g-1} \Phi_{g-1}(\vec{r}) \quad (2.27)$$

şeklinde yazılabilir. (2.27) eşitliği (2.26) denkleminin sağ tarafında yerine yerleştirilirse,

$$\begin{aligned} c(\vec{\rho})\Phi_g(\vec{\rho}) + \int_{S_r} \Phi_g(\vec{r}) \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}) dS - \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_g}{\partial n}(\vec{r}) dS = \int_V \frac{q_g(\vec{r})}{D_g} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \\ + \frac{\sum_{s,g \leftarrow 1}}{D_g} \int_V \Phi_1(\vec{r}) G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV + \frac{\sum_{s,g \leftarrow 2}}{D_g} \int_V \Phi_2(\vec{r}) G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV + \frac{\sum_{s,g \leftarrow 3}}{D_g} \int_V \Phi_3(\vec{r}) G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \\ + \dots + \frac{\sum_{s,g \leftarrow g-1}}{D_g} \int_V \Phi_{g-1}(\vec{r}) G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \end{aligned} \quad (2.28)$$

şeklinde olur. Eşitlik (2.28), sağ tarafındaki ikinci teriminden itibaren saçılma hacim integrallerini içermektedir ve bu hacim integralleri sırasıyla çözülerek yüzey integrallerine dönüştürülecektir. Bu amaçla aşağıdaki tanımlamalar yapılmıştır.

$$I_{g \leftarrow 1}(\vec{\rho}) = \frac{\sum_{s,g \leftarrow 1}}{D_g} \int_V \Phi_1(\vec{r}) G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \quad (2.29)$$

$$I_{g \leftarrow 2}(\vec{\rho}) = \frac{\sum_{s,g \leftarrow 2}}{D_g} \int_V \Phi_2(\vec{r}) G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \quad (2.30)$$

$$I_{g \leftarrow 3}(\vec{\rho}) = \frac{\sum_{s,g \leftarrow 3}}{D_g} \int_V \Phi_3(\vec{r}) G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \quad (2.31)$$

$$I_{g \leftarrow 4}(\vec{\rho}) = \frac{\sum_{s,g \leftarrow 4}}{D_g} \int_V \Phi_4(\vec{r}) G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \quad (2.32)$$

$\vdots$

$\vdots$

$$I_{g \leftarrow g-1}(\vec{\rho}) = \frac{\sum_{s,g \leftarrow g-1}}{D_g} \int_V \Phi_{g-1}(\vec{r}) G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \quad (2.33)$$

Eşitlik (2.29-33)'te verilen grup saçılma hacim integralleri için,

$$I_g(\vec{\rho}) = \sum_{h=1}^{g-1} I_{g \leftarrow h}(\vec{\rho}) \quad (2.34)$$

şeklinde gruba saçılma etkileri grup saçılma integralinin içinde toplanabilir. Burada,

$$I_{g \leftarrow h}(\vec{\rho}) = \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow h}}{D_g} \int_V \Phi_h(\vec{r}) G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \quad (2.35)$$

şeklinde tanımlıdır.

Eşitlik (2.18)'den g 'inci gruba ait temel çözüm denklemini g 'inci grup Green fonksiyonu için çözülürse,

$$G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) = \frac{\nabla^2 G_g(\vec{r}, \vec{\rho})}{k_g^2} + \frac{\delta(\vec{r} - \vec{\rho})}{k_g^2} \quad (2.36)$$

şeklinde olur. (2.36) denklemini (2.29) eşitliğinde yerine yerleştirilirse,

$$I_{g \leftarrow 1}(\vec{\rho}) = \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 1}}{D_g k_g^2} \left[\int_V \Phi_1(\vec{r}) \nabla^2 G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV + \int_V \delta(\vec{r} - \vec{\rho}) \Phi_1(\vec{r}) dV \right] \quad (2.37)$$

ifadesi elde edilir. (2.37) denkleminin ilk terimine (2.21)'deki Green'in ikinci özdeşliği uygulanırsa,

$$I_{g \leftarrow 1}(\vec{\rho}) = \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 1}}{D_g k_g^2} \left[c(\vec{\rho}) \Phi_1(\vec{\rho}) + \int_V G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \nabla^2 \Phi_1(\vec{r}) dV \right. \\ \left. + \int_{S_r} \Phi_1(\vec{r}) \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}) dS - \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_1}{\partial n}(\vec{r}) dS \right] \quad (2.38)$$

şeklinde olur. Eşitlik (2.38)'in sağ tarafının ikinci terimindeki $\nabla^2 \Phi_1$, akı Laplasyeni için, (2.13) ve (2.27) eşitlikleri kullanılarak birinci grup denklemini için düzenlenirse,

$$\nabla^2 \Phi_1(\vec{r}) = k_1^2 \Phi_1(\vec{r}) - \frac{q_1(\vec{r})}{D_1} \quad (2.39)$$

şeklinde olur. (2.39) eşitliği (2.38) eşitliğinde yerine yerleştirilirse,

$$I_{g \leftarrow 1}(\vec{\rho}) = \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 1}}{D_g k_g^2} c(\vec{\rho}) \Phi_1(\vec{\rho}) + \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 1}}{D_g k_g^2} \left[\int_{S_r} \Phi_1(\vec{r}) \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}) dS - \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_1}{\partial n}(\vec{r}) dS \right] \\ - \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 1}}{D_1 D_g k_g^2} \int_V q_1(\vec{r}) G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV + \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 1} k_1^2}{D_g k_g^2} \int_V \Phi_1(\vec{r}) G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \quad (2.40)$$

haline gelir. (2.40) denkleminin sağ tarafındaki son terim (2.29)'dan $\frac{k_1^2}{k_g^2} I_{g,1}(\vec{\rho})$

şeklinde olur ve bu ifade (2.40) eşitliğinde yerine yerleştirilirse,

$$I_{g \leftarrow 1}(\vec{\rho}) \left(1 - \frac{k_1^2}{k_g^2}\right) = \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 1}}{D_g k_g^2} c(\vec{\rho}) \Phi_1(\vec{\rho}) - \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 1}}{D_1 D_g k_g^2} \int_V q_1(\vec{r}) G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \\ + \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 1}}{D_g k_g^2} \left[\int_{S_r} \Phi_1(\vec{r}) \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}) dS - \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_1}{\partial n}(\vec{r}) dS \right] \quad (2.41)$$

eşitliği elde edilir. (2.41) eşitliği yeniden düzenlenirse,

$$I_{g \leftarrow 1}(\vec{\rho}) = \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 1}}{D_g (k_g^2 - k_1^2)} \left[c(\vec{\rho}) \Phi_1(\vec{\rho}) - \int_V \frac{q_1(\vec{r})}{D_1} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \right. \\ \left. + \int_{S_r} \Phi_1(\vec{r}) \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}) dS - \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_1}{\partial n}(\vec{r}) dS \right] \quad (2.42)$$

şeklinde birinci grup saçılma hacim integralinin yüzey integrallerine dönüştürüldüğü denklem elde edilir.

İkinci grup saçılma hacim integrali için, (2.36) eşitliği (2.30) eşitliğinde yerine yerleştirilirse,

$$I_{g \leftarrow 2}(\vec{\rho}) = \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 2}}{D_g k_g^2} \left[\int_V \Phi_2(\vec{r}) \nabla^2 G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV + \int_V \delta(\vec{r} - \vec{\rho}) \Phi_2(\vec{r}) dV \right] \quad (2.43)$$

ve eşitliğin birinci terimine (2.21)'deki Green'in ikinci özdeşliği uygulanırsa,

$$I_{g \leftarrow 2}(\vec{\rho}) = \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 2}}{D_g k_g^2} \left[c(\vec{\rho}) \Phi_2(\vec{\rho}) + \int_V G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \nabla^2 \Phi_2(\vec{r}) dV \right. \\ \left. + \int_{S_r} \Phi_2(\vec{r}) \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}) dS - \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_2}{\partial n}(\vec{r}) dS \right] \quad (2.44)$$

eşitliği elde edilir. Eşitlik (2.44)'ün sağ tarafının ikinci terimindeki $\nabla^2 \Phi_2$, akı Laplasyeni için, (2.13) ve (2.27) eşitlikleri kullanılarak ikinci grup denklemi için düzenlenirse,

$$\nabla^2 \Phi_2(\vec{r}) = k_2^2 \Phi_2(\vec{r}) - \frac{q_2(\vec{r})}{D_2} - \frac{\Sigma_{s,2 \leftarrow 1}}{D_2} \Phi_1(\vec{r}) \quad (2.45)$$

şeklinde olur. (2.45) eşitliği (2.44) eşitliğinde yerine yerleştirilirse,

$$\begin{aligned} I_{g \leftarrow 2}(\vec{\rho}) = & \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 2}}{D_g k_g^2} c(\vec{\rho}) \Phi_2(\vec{\rho}) + \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 2}}{D_g k_g^2} \left[\int_{S_r} \Phi_2(\vec{r}) \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}) dS - \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_2}{\partial n}(\vec{r}) dS \right] \\ & - \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 2}}{D_2 D_g k_g^2} \int_V q_2(\vec{r}) G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV + \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 2} k_2^2}{D_g k_g^2} \int_V \Phi_2(\vec{r}) G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \\ & - \frac{\Sigma_{s,2 \leftarrow 1} \Sigma_{s,g \leftarrow 2}}{D_2 D_g k_g^2} \int_V \Phi_1(\vec{r}) G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \end{aligned} \quad (2.46)$$

eşitliği elde edilir. Eşitlik (2.46)'nın sondan ikinci terimi (2.30)'dan $\frac{k_2^2}{k_g^2} I_{g,2}(\vec{\rho})$

şeklinde olur. Son terim ise (2.29)'dan $\frac{\Sigma_{s,2 \leftarrow 1} \Sigma_{s,g \leftarrow 2}}{D_2 k_g^2 \Sigma_{s,g \leftarrow 1}} I_{g,1}(\vec{\rho})$ olur. Bu durumda (2.46)

eşitliği yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned} I_{g \leftarrow 2}(\vec{\rho}) = & \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 2}}{D_g (k_g^2 - k_2^2)} c(\vec{\rho}) \Phi_2(\vec{\rho}) - \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 2}}{D_2 D_g (k_g^2 - k_2^2)} \int_V q_2(\vec{r}) G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \\ & + \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 2}}{D_g (k_g^2 - k_2^2)} \left[\int_{S_r} \Phi_2(\vec{r}) \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}) dS - \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_2}{\partial n}(\vec{r}) dS \right] \\ & - \frac{\Sigma_{s,2 \leftarrow 1} \Sigma_{s,g \leftarrow 2}}{\Sigma_{s,g \leftarrow 1} D_2 (k_g^2 - k_2^2)} I_{g,1}(\vec{\rho}) \end{aligned} \quad (2.47)$$

eşitliği elde edilir. (2.47) eşitliğinin son terimine (2.42) eşitliği yerleştirilirse,

$$\begin{aligned}
I_{g \leftarrow 2}(\vec{\rho}) = & \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 2}}{D_g(k_g^2 - k_2^2)} \left[c(\vec{\rho})\Phi_2(\vec{\rho}) - \int_V \frac{q_2(\vec{r})}{D_2} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \right. \\
& \left. + \int_{S_r} \Phi_2(\vec{r}) \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}) dS - \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_2}{\partial n}(\vec{r}) dS \right] \\
& - \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 2}}{D_g(k_g^2 - k_2^2)} \frac{\Sigma_{s,2 \leftarrow 1}}{D_2(k_2^2 - k_1^2)} \left[c(\vec{\rho})\Phi_1(\vec{\rho}) - \int_V \frac{q_1(\vec{r})}{D_1} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \right. \\
& \left. + \int_{S_r} \Phi_1(\vec{r}) \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}) dS - \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_1}{\partial n}(\vec{r}) dS \right] \quad (2.48)
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

Üçüncü grup saçılma hacim integrali için, (2.36) denklemi (2.31) denkleminde yerine yerleştirilirse,

$$I_{g \leftarrow 3}(\vec{\rho}) = \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 3}}{D_g k_g^2} \left[\int_V \Phi_3(\vec{r}) \nabla^2 G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV + \int_V \delta(\vec{r} - \vec{\rho}) \Phi_3(\vec{r}) dV \right] \quad (2.49)$$

ve eşitliğin birinci terimine (2.21)'deki Green'in ikinci özdeşliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
I_{g \leftarrow 3}(\vec{\rho}) = & \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 3}}{D_g k_g^2} \left[c(\vec{\rho})\Phi_3(\vec{\rho}) + \int_V G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \nabla^2 \Phi_3(\vec{r}) dV \right. \\
& \left. + \int_{S_r} \Phi_3(\vec{r}) \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}) dS - \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_3}{\partial n}(\vec{r}) dS \right] \quad (2.50)
\end{aligned}$$

şeklinde olur. (2.50) eşitliğinin sağ tarafının ikinci terimi $\nabla^2 \Phi_3$, akı Laplasyeni için, (2.13) ve (2.27) eşitlikleri kullanılarak üçüncü grup denklemi için düzenlenirse,

$$\nabla^2 \Phi_3(\vec{r}) = k_3^2 \Phi_3(\vec{r}) - \frac{q_3(\vec{r})}{D_3} - \frac{\Sigma_{s,3 \leftarrow 2}}{D_3} \Phi_2(\vec{r}) - \frac{\Sigma_{s,3 \leftarrow 1}}{D_3} \Phi_1(\vec{r}) \quad (2.51)$$

şeklinde olur. (2.51) eşitliği (2.50) eşitliğinde yerine yerleştirilirse,

$$\begin{aligned}
I_{g \leftarrow 3}(\vec{\rho}) = & \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 3}}{D_g k_g^2} c(\vec{\rho}) \Phi_3(\vec{\rho}) + \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 3}}{D_g k_g^2} \left[\int_{S_r} \Phi_3(\vec{r}) \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}) dS - \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_3}{\partial n}(\vec{r}) dS \right] \\
& - \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 3}}{D_3 D_g k_g^2} \int_V q_3(\vec{r}) G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV + \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 3} k_3^2}{D_g k_g^2} \int_V \Phi_3(\vec{r}) G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \\
& - \frac{\Sigma_{s,3 \leftarrow 2} \Sigma_{s,g \leftarrow 3}}{D_3 D_g k_g^2} \int_V \Phi_2(\vec{r}) G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV - \frac{\Sigma_{s,3 \leftarrow 1} \Sigma_{s,g \leftarrow 3}}{D_3 D_g k_g^2} \int_V \Phi_1(\vec{r}) G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \quad (2.52)
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. (2.52) denkleminin sondan üçüncü terimi (2.31)'den $\frac{k_3^2}{k_g^2} I_{g,3}(\vec{\rho})$

olur, sondan ikinci terim ise (2.30)'dan $\frac{\Sigma_{s,3 \leftarrow 2} \Sigma_{s,g \leftarrow 3}}{\Sigma_{s,g \leftarrow 2} D_3 k_g^2} I_{g,2}(\vec{\rho})$ ve son terim (2.29)'dan

$\frac{\Sigma_{s,3 \leftarrow 1} \Sigma_{s,g \leftarrow 3}}{\Sigma_{s,g \leftarrow 1} D_3 k_g^2} I_{g,1}(\vec{\rho})$ şeklinde olur. (2.52) eşitliği yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
I_{g \leftarrow 3}(\vec{\rho}) = & \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 3}}{D_g (k_g^2 - k_3^2)} c(\vec{\rho}) \Phi_3(\vec{\rho}) - \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 3}}{D_3 D_g (k_g^2 - k_3^2)} \int_V q_3(\vec{r}) G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \\
& + \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 3}}{D_g (k_g^2 - k_3^2)} \left[\int_{S_r} \Phi_3(\vec{r}) \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}) dS - \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_3}{\partial n}(\vec{r}) dS \right] \\
& - \frac{\Sigma_{s,3 \leftarrow 2} \Sigma_{s,g \leftarrow 3}}{\Sigma_{s,g \leftarrow 2} D_3 (k_g^2 - k_3^2)} I_{g,2}(\vec{\rho}) - \frac{\Sigma_{s,3 \leftarrow 1} \Sigma_{s,g \leftarrow 3}}{\Sigma_{s,g \leftarrow 1} D_3 (k_g^2 - k_3^2)} I_{g,1}(\vec{\rho}) \quad (2.53)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Eşitlik (2.53)'ün sondan ikinci terimine (2.48) eşitliği, son terimine (2.42) eşitliği yerleştirilirse,

$$\begin{aligned}
I_{g \leftarrow 3}(\vec{\rho}) = & \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 3}}{D_g(k_g^2 - k_3^2)} \left[c(\vec{\rho})\Phi_3(\vec{\rho}) - \int_V \frac{q_3(\vec{r})}{D_3} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \right. \\
& \left. + \int_{S_r} \Phi_3(\vec{r}) \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}) dS - \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_3}{\partial n}(\vec{r}) dS \right] \\
- & \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 3}}{D_g(k_g^2 - k_3^2)} \frac{\Sigma_{s,3 \leftarrow 2}}{D_3(k_3^2 - k_2^2)} \left[c(\vec{\rho})\Phi_2(\vec{\rho}) - \int_V \frac{q_2(\vec{r})}{D_2} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \right. \\
& \left. + \int_{S_r} \Phi_2(\vec{r}) \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}) dS - \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_2}{\partial n}(\vec{r}) dS \right] \\
- & \left[\frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 3}}{D_g(k_g^2 - k_3^2)} \frac{\Sigma_{s,3 \leftarrow 1}}{D_3(k_3^2 - k_1^2)} - \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 3}}{D_g(k_g^2 - k_3^2)} \frac{\Sigma_{s,3 \leftarrow 2}}{D_3(k_3^2 - k_2^2)} \frac{\Sigma_{s,2 \leftarrow 1}}{D_2(k_2^2 - k_1^2)} \right] \\
& \left[c(\vec{\rho})\Phi_1(\vec{\rho}) - \int_V \frac{q_1(\vec{r})}{D_1} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV + \int_{S_r} \Phi_1(\vec{r}) \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}) dS - \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_1}{\partial n}(\vec{r}) dS \right]
\end{aligned} \tag{2.54}$$

ifadesi elde edilir.

Dördüncü grup saçılma hacim integrali için, (2.36) denklemi (2.32) denkleminde yerine yerleştirilirse,

$$I_{g \leftarrow 4}(\vec{\rho}) = \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 4}}{D_g k_g^2} \left[\int_V \Phi_4(\vec{r}) \nabla^2 G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV + \int_V \delta(\vec{r} - \vec{\rho}) \Phi_4(\vec{r}) dV \right] \tag{2.55}$$

ve eşitliğin birinci terimine (2.21)'deki Green'in ikinci özdeşliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
I_{g \leftarrow 4}(\vec{\rho}) = & \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 4}}{D_g k_g^2} \left[c(\vec{\rho})\Phi_4(\vec{\rho}) + \int_V G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \nabla^2 \Phi_4(\vec{r}) dV \right. \\
& \left. + \int_{S_r} \Phi_4(\vec{r}) \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}) dS - \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_4}{\partial n}(\vec{r}) dS \right]
\end{aligned} \tag{2.56}$$

şeklinde olur. (2.56) eşitliğinin sağ tarafının ikinci terimindeki $\nabla^2 \Phi_4$, akı Laplasyeni için, (2.13) ve (2.27) eşitlikleri kullanılarak dördüncü grup denklemi için düzenlenirse,

$$\nabla^2 \Phi_4(\vec{r}) = k_4^2 \Phi_4(\vec{r}) - \frac{q_4(\vec{r})}{D_4} - \frac{\Sigma_{s,4 \leftarrow 3}}{D_4} \Phi_3(\vec{r}) - \frac{\Sigma_{s,4 \leftarrow 2}}{D_4} \Phi_2(\vec{r}) - \frac{\Sigma_{s,4 \leftarrow 1}}{D_4} \Phi_1(\vec{r}) \tag{2.57}$$

şeklinde olur. (2.57) eşitliği (2.56) eşitliğinde yerine yerleştirilirse,

$$\begin{aligned}
I_{g \leftarrow 4}(\vec{\rho}) &= \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 4}}{D_g k_g^2} c(\vec{\rho}) \Phi_4(\vec{\rho}) \\
&+ \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 4}}{D_g k_g^2} \left[\int_{S_r} \Phi_4(\vec{r}) \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}) dS - \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_4}{\partial n}(\vec{r}) dS \right] \\
&- \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 4}}{D_g k_g^2} \int_V \frac{q_4(\vec{r})}{D_4} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV + \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 4} k_4^2}{D_g k_g^2} \int_V \Phi_4(\vec{r}) G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \\
&- \frac{\Sigma_{s,4 \leftarrow 3}}{D_4} \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 4}}{D_g k_g^2} \int_V \Phi_3(\vec{r}) G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV - \frac{\Sigma_{s,4 \leftarrow 2}}{D_4} \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 4}}{D_g k_g^2} \int_V \Phi_2(\vec{r}) G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \\
&- \frac{\Sigma_{s,4 \leftarrow 1}}{D_4} \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 4}}{D_g k_g^2} \int_V \Phi_1(\vec{r}) G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV
\end{aligned} \tag{2.58}$$

ifadesi elde edilir. (2.58) eşitliğinin sondan dördüncü terimi (2.32)'den $\frac{k_4^2}{k_g^2} I_{g,4}(\vec{\rho})$,

(2.31)'den sondan üçüncü terim $\frac{\Sigma_{s,4 \leftarrow 3}}{\Sigma_{s,g \leftarrow 3}} \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 4}}{D_4 k_g^2} I_{g,3}(\vec{\rho})$, (2.30)'dan sondan ikinci

terim $\frac{\Sigma_{s,4 \leftarrow 2}}{\Sigma_{s,g \leftarrow 2}} \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 4}}{D_4 k_g^2} I_{g,2}(\vec{\rho})$, (2.29)'dan sondan birinci terim $\frac{\Sigma_{s,4 \leftarrow 1}}{\Sigma_{s,g \leftarrow 1}} \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 4}}{D_4 k_g^2} I_{g,1}(\vec{\rho})$

şeklinde olur. (2.58) eşitliği yeniden düzenlenecek olursa,

$$\begin{aligned}
I_{g \leftarrow 4}(\vec{\rho}) &= \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 4}}{D_g (k_g^2 - k_4^2)} c(\vec{\rho}) \Phi_4(\vec{\rho}) \\
&+ \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 4}}{D_g (k_g^2 - k_4^2)} \left[\int_{S_r} \Phi_4(\vec{r}) \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}) dS - \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_4}{\partial n}(\vec{r}) dS \right] \\
&- \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 4}}{D_g (k_g^2 - k_4^2)} \int_V \frac{q_4(\vec{r})}{D_4} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV - \frac{\Sigma_{s,4 \leftarrow 3}}{\Sigma_{s,g \leftarrow 3}} \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 4}}{D_4 (k_g^2 - k_4^2)} I_{g,3}(\vec{\rho}) \\
&- \frac{\Sigma_{s,4 \leftarrow 2}}{\Sigma_{s,g \leftarrow 2}} \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 4}}{D_4 (k_g^2 - k_4^2)} I_{g,2}(\vec{\rho}) - \frac{\Sigma_{s,4 \leftarrow 1}}{\Sigma_{s,g \leftarrow 1}} \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 4}}{D_4 (k_g^2 - k_4^2)} I_{g,1}(\vec{\rho})
\end{aligned} \tag{2.59}$$

eşitliği elde edilir. (2.59) eşitliğinin sondan üçüncü terimine (2.54) eşitliği, sondan ikinci terimine (2.48) eşitliği, son terimine ise (2.42) eşitliği yerleştirilirse,

$$\begin{aligned}
I_{g \leftarrow 4}(\vec{\rho}) = & \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 4}}{D_g(k_g^2 - k_4^2)} \left[c(\vec{\rho}) \Phi_4(\vec{\rho}) - \int_V \frac{q_4(\vec{r})}{D_4} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \right. \\
& \left. + \int_{S_r} \Phi_4(\vec{r}) \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}) dS - \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_4}{\partial n}(\vec{r}) dS \right] \\
- & \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 4}}{D_g(k_g^2 - k_4^2)} \frac{\Sigma_{s,4 \leftarrow 3}}{D_4(k_4^2 - k_3^2)} \left[c(\vec{\rho}) \Phi_3(\vec{\rho}) - \int_V \frac{q_4(\vec{r})}{D_4} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \right. \\
& \left. + \int_{S_r} \Phi_3(\vec{r}) \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}) dS - \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_3}{\partial n}(\vec{r}) dS \right] \\
- & \left[\frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 4}}{D_g(k_g^2 - k_4^2)} \frac{\Sigma_{s,4 \leftarrow 2}}{D_4(k_4^2 - k_2^2)} - \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 4}}{D_g(k_g^2 - k_4^2)} \frac{\Sigma_{s,4 \leftarrow 3}}{D_4(k_4^2 - k_3^2)} \frac{\Sigma_{s,3 \leftarrow 2}}{D_3(k_3^2 - k_2^2)} \right] \\
& \left[c(\vec{\rho}) \Phi_2(\vec{\rho}) - \int_V \frac{q_2(\vec{r})}{D_2} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV + \int_{S_r} \Phi_2(\vec{r}) \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}) dS - \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_2}{\partial n}(\vec{r}) dS \right] \\
- & \left[\frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 4}}{D_g(k_g^2 - k_4^2)} \frac{\Sigma_{s,4 \leftarrow 1}}{D_4(k_4^2 - k_1^2)} - \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 4}}{D_g(k_g^2 - k_4^2)} \frac{\Sigma_{s,4 \leftarrow 2}}{D_4(k_4^2 - k_2^2)} \frac{\Sigma_{s,2 \leftarrow 1}}{D_2(k_2^2 - k_1^2)} \right. \\
& - \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 4}}{D_g(k_g^2 - k_4^2)} \frac{\Sigma_{s,4 \leftarrow 3}}{D_4(k_4^2 - k_3^2)} \frac{\Sigma_{s,3 \leftarrow 1}}{D_3(k_3^2 - k_1^2)} \\
& \left. + \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow 4}}{D_g(k_g^2 - k_4^2)} \frac{\Sigma_{s,4 \leftarrow 3}}{D_4(k_4^2 - k_3^2)} \frac{\Sigma_{s,3 \leftarrow 2}}{D_3(k_3^2 - k_2^2)} \frac{\Sigma_{s,2 \leftarrow 1}}{D_2(k_2^2 - k_1^2)} \right] \\
& \left[c(\vec{\rho}) \Phi_1(\vec{\rho}) - \int_V \frac{q_1(\vec{r})}{D_1} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV + \int_{S_r} \Phi_1(\vec{r}) \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}) dS - \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_1}{\partial n}(\vec{r}) dS \right]
\end{aligned} \tag{2.60}$$

ifadesi elde edilir.

Saçılma hacim integrallerinin yüzey integrallerine dönüştürülmesiyle elde edilen (2.42), (2.48), (2.54), (2.60) eşitlikleri genel yazılımla [6],

$$I_{g \leftarrow h}(\vec{\rho}) = J_{g \leftarrow h}(\vec{\rho}) - c_{gh} (1 - \delta_{h1}) \sum_{l=1}^{h-1} \frac{\Sigma_{s,h \leftarrow l}}{\Sigma_{s,g \leftarrow l}} I_{g \leftarrow l}(\vec{\rho}) \tag{2.61}$$

şeklinde verilebilir. Burada,

$$J_{g \leftarrow h}(\vec{\rho}) = c_{gh} \frac{D_h}{D_g} \left[c(\vec{\rho}) \Phi_h(\vec{\rho}) - \int_V \frac{q_h(\vec{r})}{D_h} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \right. \\ \left. + \int_{S_r} \Phi_h(\vec{r}) \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}) dS - \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_h}{\partial n}(\vec{r}) dS \right] \quad (2.62)$$

ve

$$c_{gh} = \frac{\Sigma_{s, g \leftarrow h}}{(k_g^2 - k_h^2) D_h} \quad (2.63)$$

olarak tanımlanmıştır.

Bu türetimde $k_g^2 \neq k_h^2$ $g, h = 1, 2, 3, \dots, G$ varsayımı kullanılmıştır.

(2.61) eşitliği (2.34) eşitliğinde yerine yerleştirilirse,

$$I_g(\vec{\rho}) = (1 - \delta_{g1}) \sum_{h=1}^{g-1} b_{gh} J_{g \leftarrow h}(\vec{\rho}) \quad (2.64)$$

ifadesi elde edilir. (2.64) eşitliğindeki b_{gh} katsayıları h 'inci gruptan g grubuna saçılmaları gösterir. Toplam olarak şu şekilde yazılabilir:

$$b_{gh} = \sum_{n=1}^{g-h} b_{gh}^{(n)} \quad (2.65)$$

(2.65) eşitliğindeki $b_{gh}^{(n)}$ katsayıları, n saçılma yoluyla h 'inci gruptan g grubuna geçişleri gösterir. Bu katsayılar,

$$b_{gh}^{(1)} = 1 \quad (2.66)$$

$n > 1$ olmak üzere,

$$b_{gh}^{(n)} = \sum_{m=1}^{\binom{g-h-1}{n-1}} b_{gh,m}^{(n)} \quad (2.67)$$

şeklinde verilmiştir. (2.67) eşitliğinde verilen tanımda, seri işaretinin üzerindeki binom katsayısı n saçılma yoluyla h grubundan g grubuna mümkün olan geçişlerin toplam sayısını göstermektedir. $b_{gh,m}^{(n)}$ katsayıları ise n saçılma yoluyla h 'inci gruptan g grubuna m 'inci geçişi göstermek üzere,

$$b_{gh,m}^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}}{\sum_{s,g \leftarrow h} (k_g^2 - k_{l_{n-1}}^2) D_{l_{n-1}} (k_g^2 - k_{l_{n-2}}^2) D_{l_{n-2}} \dots (k_g^2 - k_{l_2}^2) D_{l_2} (k_g^2 - k_{l_1}^2) D_{l_1}} \sum_{s,g \leftarrow l_{n-1}} \sum_{s,l_{n-1} \leftarrow l_{n-2}} \dots \sum_{s,l_2 \leftarrow l_1} \sum_{s,l_1 \leftarrow h} \quad (2.68)$$

şeklinde tanımlanmıştır, buradaki l_j , $j=1, \dots, n-1$ ($l_j > l_{j-1}$) olmak üzere h 'dan g 'ye n saçılmalı geçişte uğranılan ara enerji grup numaralarını göstermektedir.

(2.62) eşitliği (2.64) eşitliğinde yerine yerleştirilirse,

$$I_g(\vec{\rho}) = (1 - \delta_{g1}) \sum_{h=1}^{g-1} d_{gh} \left[c(\vec{\rho}) \Phi_h(\vec{\rho}) - \int_V \frac{q_h(\vec{r})}{D_h} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \right. \\ \left. + \int_{S_r} \Phi_h(\vec{r}) \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}) dS - \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_h}{\partial n}(\vec{r}) dS \right] \quad (2.69)$$

ifadesi elde edilir. Burada,

$$d_{gh} = \frac{\sum_{s,g \leftarrow h}}{(k_g^2 - k_h^2) D_g} b_{gh} \quad (2.70)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

(2.69) eşitliği (2.26) eşitliğinde yerine yerleştirilirse,

$$c(\vec{\rho}) \Phi_g(\vec{\rho}) + \int_{S_r} \Phi_g(\vec{r}) \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}) dS - \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_g}{\partial n}(\vec{r}) dS \\ = (1 - \delta_{g1}) \sum_{h=1}^{g-1} d_{gh} \left[c(\vec{\rho}) \Phi_h(\vec{\rho}) + \int_{S_r} \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}) \Phi_h(\vec{r}) dS - \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \Phi_h}{\partial n}(\vec{r}) dS \right] \\ + \int_V z_g(\vec{r}) G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) dV \quad (2.71)$$

denklemini elde edilir.

(2.71) eşitliğinin sağ tarafındaki son terim,

$$z_g(\vec{r}) = \frac{q_g(\vec{r})}{D_g} - \sum_{h=1}^{g-1} d_{gh} \frac{q_h(\vec{r})}{D_h} \quad (2.72)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

$$\varphi_g(\vec{r}) = \Phi_g(\vec{r}) - (1 - \delta_{g1}) \sum_{h=1}^{g-1} d_{gh} \Phi_h(\vec{r}) \quad (2.73)$$

$$\frac{\partial \varphi_g}{\partial n}(\vec{r}) = \frac{\partial \Phi_g}{\partial n}(\vec{r}) - (1 - \delta_{g1}) \sum_{h=1}^{g-1} d_{gh} \frac{\partial \Phi_h}{\partial n}(\vec{r}) \quad (2.74)$$

tanımlarının yapılması ile (2.71) eşitliği,

$$c(\vec{\rho}) \varphi_g(\vec{\rho}) + \int_{S_r} \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}) \varphi_g(\vec{r}) dS - \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \varphi_g}{\partial n}(\vec{r}) dS = \int_V G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) z_g(\vec{r}) dV \quad (2.75)$$

$g = 1, 2, 3, \dots, G$

şeklinde olur. (2.75) denkleminde görüldüğü gibi saçılma hacim integralleri yüzey integrallerine dönüştürülmüştür. Böylece eşitlik (2.26)'da verilen çok gruplu nötron difüzyon denklemi eşdeğer sınır integral denklemine dönüştürülerek istenilen amaca ulaşılmış olmaktadır. (2.26) eşitliğinde $g=1$ olması halinde tek grup teoride ortaya çıkan integral denklem ile (2.75) eşitliği aynı biçimde olmaktadır [6].

(2.75) denkleminin sağ tarafında fisyon kaynağı hacim integrali yer almaktadır. Literatürde serbest kaynak [4] ve fisyon kaynağı [5] hacim integrallerinin MRBEM metodu ile yüzey integrallerine dönüştürüldüğü çalışmaların yapıldığı görülebilir.

(2.15)'te verilen grup fisyon kaynak tanımından (2.72),

$$z_g(\vec{r}) = \frac{w_g}{k_{etk}} f(\vec{r}) \quad (2.76)$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$w_g(\vec{r}) = \frac{\chi_g}{D_g} - \sum_{h=1}^{g-1} \frac{\chi_h}{D_h} d_{gh} \quad (2.77)$$

olarak tanımlanmıştır.

(2.76) eşitliğinde verilen ifadenin (2.75) eşitliğinin sağ tarafında yerine yerleştirilmesiyle,

$$c(\vec{\rho})\varphi_g(\vec{\rho}) + \int_{S_r} \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho})\varphi_g(\vec{r})dS - \int_{S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) \frac{\partial \varphi_g}{\partial n}(\vec{r})dS = \frac{w_g}{k_{etk}} \int_V G_g(\vec{r}, \vec{\rho})f(\vec{r})dV$$

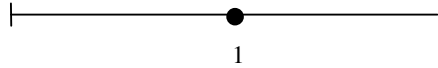
$$g = 1, 2, 3, \dots, G \quad (2.78)$$

denklemini elde edilir.

2.3. Sınır Eleman Ayrıklaştırması

Sınır elemanları yöntemi sistem sınırının sınır elemanı adı verilen alt bölgelere ayrılması ilkesine dayanır. Her bir sınır elemanı içinde aranan fonksiyonun ve onun normal türevinin düşük dereceli bir polinomsal konum bağımlılığı olduğu varsayılır. Üç boyutlu problemlerde sistem sınırı bir yüzey olmaktadır. Dolayısı ile sınır elemanları üçgen, dörtgen gibi iki boyutlu şekillerden oluşur. İki boyutlu sistemlerde ise sistem sınırı genelde bir konturdur. Bu nedenle sınır elemanları çoğunlukla doğru parçalarından oluşmaktadır. Aranan fonksiyonun ve normal türevinin sınır elemanı dediğimiz doğru parçası içinde sabit olması varsayımı sabit sınır elemanlarını, lineer olması varsayımı ise lineer sınır elemanlarını tanımlar.

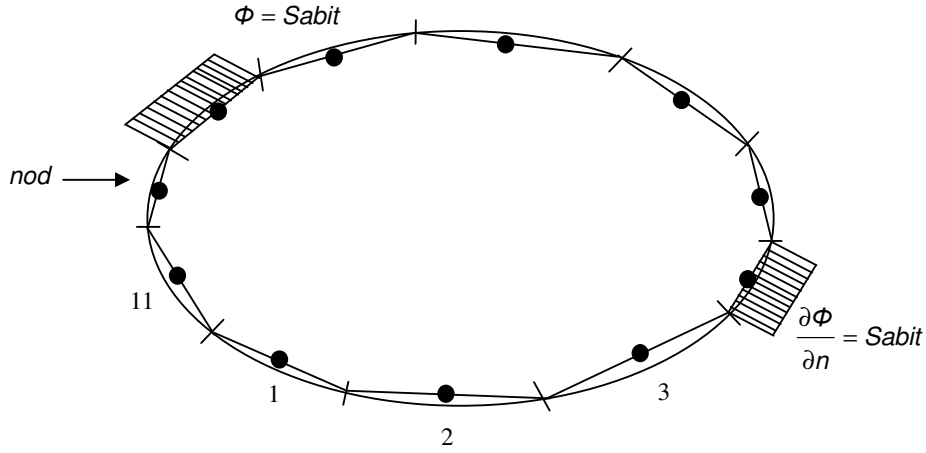
Bu çalışmada sadece iki boyutlu sistemler ele alınacaktır. Dolayısı ile iki boyutlu sistemlerdeki sınır eleman çeşitlerinden biraz söz edilecek olursa en basit sınır elemanı sabit sınır elemanıdır. Şekil 2.2’de sabit sınır elemanı gösterimi verilmiştir.



Şekil 2.2: Sabit sınır elemanı gösterimi

Sabit sınır elemanının geometrik merkezindeki noktaya nod ya da düğüm noktası adı verilir.

Şekil 2.3'te sabit sınır elemanlarına bölünmüş iki boyutlu sistem gösterilmiştir.



Şekil 2.3: Sabit sınır elemanlarına bölünmüş iki boyutlu sistem

Şekil 2.3'te iki boyutlu sistemin sınırını oluşturan kontur 11 sabit sınır elemanına bölünmüştür. Akının ve normal türevinin her bir sınır elemanında sabit olarak ortasındaki nod değerine eşit olduğu varsayılmıştır. Sabit sınır elemanları metodu (2.78) sınır integral denkleminin her bir nod için geçerli olmasının istenilmesi esasına dayanır. Bu tür yöntemlere sayısal analizde kollokasyon yöntemi adı verilmektedir. Şekil 2.3'te verilen sistem için (2.78) denkleminde kollokasyon uygulanırsa grup başına toplam 11 bilinmeyen çıkar. 11 noddaki da kollokasyon uygulandığına göre bilinmeyen sayısı ile denklem sayısı eşit olup 11x11'lik bir lineer sistem çözümünü gerektirir.

Sabit sınır elemanları ile (2.78) denkleminin kollokasyon ilkesine bağlı olarak nasıl bir lineer sisteme dönüştürüldüğünü göstermek için sistem dış sınırının I adet sabit sınır elemanına bölündüğü varsayılın. i 'inci sınır elemanının nod koordinatı $\bar{\rho}_i$ ile gösterilsin. Sabit sınır elemanı yaklaşımına göre,

$$\varphi_g(\bar{r}) = \varphi_g(\bar{r}_i), \quad \bar{r} \in S_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, I \quad (2.79)$$

$$\frac{\partial \varphi_g}{\partial n}(\bar{r}) = \frac{\partial \varphi_g}{\partial n}(\bar{r}_i), \quad \bar{r} \in S_i \quad (2.80)$$

varsayımı geçerlidir. Bu varsayım (2.78) denkleminde kollokasyonla birlikte kullanılırsa,

$$c(\vec{\rho}_i)\varphi_g(\vec{\rho}_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ \vec{S}_j \in S_r}}^I \left(\int_{S_j} \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}_i) dS \right) \varphi_g(\vec{r}_j) - \sum_{\substack{j=1 \\ \vec{S}_j \in S_v}}^I \left(\int_{S_j} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}_i) dS \right) \frac{\partial \varphi_g}{\partial n}(\vec{r}_j) \\ = \frac{w_g}{k_{etk}} \int_V G_g(\vec{r}, \vec{\rho}_i) f(\vec{r}) dV \quad (2.81)$$

şeklinde olur. (2.81) denklemi,

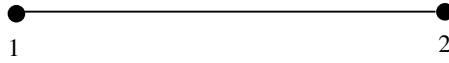
$$\sum_{j=1}^I g_{g,ij}^C \varphi'_{g,j} + \sum_{j=1}^I h_{g,ij}^C \varphi_{g,j} = s_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, I \quad (2.82)$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$\begin{aligned} g_{g,ij}^C &= - \int_{S_j} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}_i) dS & \vec{r}_j &\in S_v \\ h_{g,ij}^C &= c_i \delta_{ij} + \int_{S_j} \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}_i) dS & \vec{r}_j &\in S_r \\ \varphi_{g,j} &= \varphi_g(\vec{r}_j) & \vec{r}_j &\in S \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, I \\ \varphi'_{g,j} &= \frac{\partial \varphi_{g,j}}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_g}{\partial n}(\vec{r}_j) & \vec{r}_j &\in S \\ s_i &= \frac{w_g}{k_{etk}} \int_V G_g(\vec{r}, \vec{\rho}_i) f(\vec{r}) dV \end{aligned} \quad (2.83)$$

şeklinde tanımlıdır.

Lineer sınır elemanları, eleman başına iki nodun tanımlanması esasına dayanır. Şekil 2.4'te lineer sınır elemanı gösterimi verilmiştir.



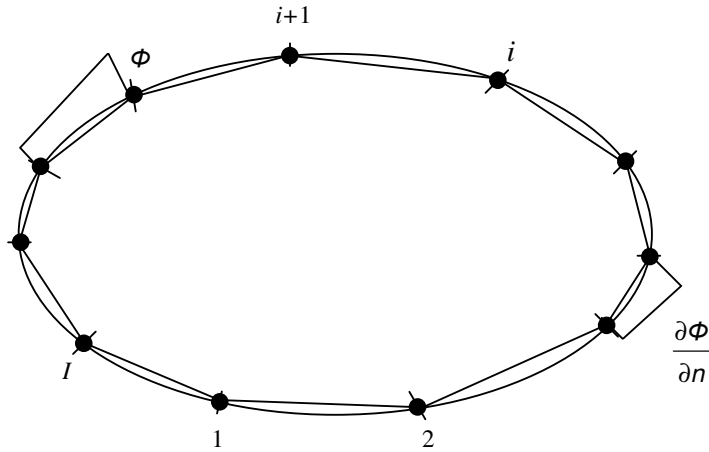
Şekil 2.4: Lineer sınır elemanı gösterimi

Şekil 2.4'te görüldüğü gibi lineer sınır elemanında iki nod vardır. Aranılan fonksiyonun bu nodlardaki değerleri f_1 ve f_2 ile gösterilirse ve eleman büyüklüğünün 2'ye normalize edildiği varsayılırsa lineer sınır elemanı yaklaşımı,

$$f(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi)f_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)f_2, \quad -1 < \xi < 1 \quad (2.84)$$

varsayımına dayanır.

Bu ayrıklaştırma işleminin lineer sınır elemanları kullanılması durumunda ne şekilde değişeceği gösterilecek olursa, önce örnek sistem sınırları lineer sınır elemanlarına bölünsün. Şekil 2.5'te lineer sınır elemanlarına bölünen iki boyutlu sistem gösterilmiştir.



Şekil 2.5: Lineer sınır elemanlarına bölünmüş iki boyutlu sistem

Şekil 2.5'te görüldüğü gibi sınır elemanı sayısı ile nod sayısı eşit olmaktadır. Bu notasyona göre i 'inci elemanın nodları i ve $i+1$ numaralı nodlar olmaktadır. Sadece I 'inci yani sonuncu elemanın nodları I ve I olacaktır. Lineer sınır elemanı yaklaşımı,

$$\varphi_g(\vec{r}) = \varphi_g(\vec{r}_i)\phi_i(\vec{r}) + \varphi_g(\vec{r}_{i+1})\phi_{i+1}(\vec{r}) \quad (2.85)$$

$$\frac{\partial \varphi_g}{\partial n}(\vec{r}) = \frac{\partial \varphi_g}{\partial n}(\vec{r}_i)\phi_i(\vec{r}) + \frac{\partial \varphi_g}{\partial n}(\vec{r}_{i+1})\phi_{i+1}(\vec{r}) \quad (2.86)$$

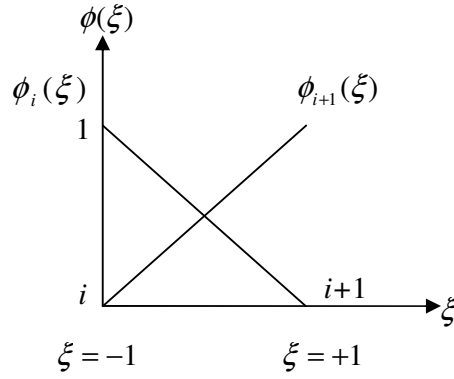
şeklindedir. $\phi_i(\vec{r})$ fonksiyonları Lagrange tipi lineer interpolasyon fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonlar ait oldukları iki elemanda değışirler, bunun dışındaki tüm elemanlarda sıfır değerini alırlar. Bu matematiksel olarak,

$$\phi_i(\vec{r}_j) = \delta_{ij}$$

şeklinde ifade edilebilir. Eleman uzunluğu 2'ye normalize edilirse i 'inci eleman için,

$$\begin{aligned}\phi_i(\xi) &= \frac{1}{2}(1 - \xi) \\ -1 < \xi < 1 \\ \phi_{i+1}(\xi) &= \frac{1}{2}(1 + \xi)\end{aligned}\tag{2.87}$$

şeklinde olur. Lagrange tipi interpolasyon fonksiyonlarına ait gösterim Şekil 2.6'da verilmiştir [44].



Şekil 2.6: Lagrange tipi lineer interpolasyon fonksiyonları

Lagrange tipi lineer interpolasyon fonksiyonlarının ait oldukları iki eleman dışında sıfır değerini aldıkları göz önüne alınırsa lineer sınır elemanı varsayımı,

$$\varphi_g(\vec{r}) = \sum_{j=1}^I \phi_j(\vec{r}) \varphi_g(\vec{r}_j)\tag{2.88}$$

$$\frac{\partial \varphi_g}{\partial n}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^I \phi_j(\vec{r}) \frac{\partial \varphi_g}{\partial n}(\vec{r}_j)\tag{2.89}$$

şeklinde ifade edilebilir. (2.88) ve (2.89) eşitlikleri (2.78) denkleminde yerleştirilerek kollokasyon uygulanırsa,

$$c(\vec{\rho}_i)\varphi_g(\vec{\rho}_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ \vec{S}_j \in S_r}}^I \left(\sum_{k=1}^I \int_{S_k} \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}_i) \phi_j(\vec{r}) dS \right) \varphi_g(\vec{r}_j) - \sum_{\substack{j=1 \\ \vec{S}_j \in S_v}}^I \left(\sum_{k=1}^I \int_{S_j} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}_i) \phi_j(\vec{r}) dS \right) \frac{\partial \varphi_g}{\partial n}(\vec{r}_j) = \frac{w_g}{k_{etk}} \int_V G_g(\vec{r}, \vec{\rho}_i) f(\vec{r}) dV \quad (2.90)$$

şeklinde olur. (2.90) denklemi,

$$\sum_{j=1}^I g_{g,ij}^L \varphi'_{g,j} + \sum_{j=1}^I h_{g,ij}^L \varphi_{g,j} = s_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, I \quad (2.91)$$

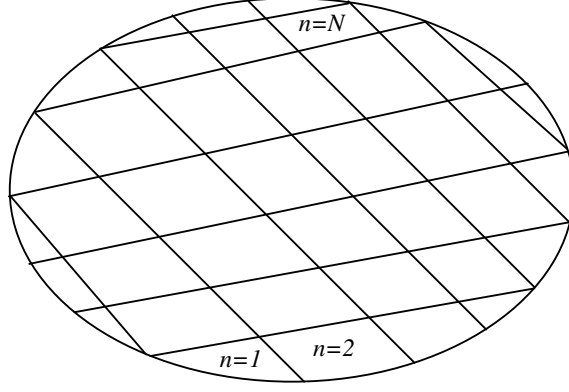
şeklinde yazılabilir. Burada,

$$g_{g,ij}^L = - \sum_{k=1}^I \int_{S_k} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}_i) \phi_j(\vec{r}) dS \quad (2.92)$$

$$h_{g,ij}^L = c_i \delta_{ij} + \sum_{k=1}^I \int_{S_k} \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}_i) \phi_j(\vec{r}) dS \quad (2.93)$$

şeklinde tanımlanmıştır. $g_{g,ij}$ ve $h_{g,ij}$ integrallerinin hesabı [40-41] kaynaklarında detaylı olarak verilmiştir.

Gerek sabit eleman ayrıklaştırması gerekse lineer eleman ayrıklaştırması sonunda (2.82) ve (2.91) denklemlerinin sağ tarafında hacim integrasyonu içeren bir fisyon kaynak terimi s_i kalmaktadır. Bu terimin hesabı iç akılara bağlı bir fisyon kaynağı fonksiyonunun $f(\vec{r})$ sistem hacmi üzerinden integrasyonunu gerektirmektedir. Bu integrasyonun sayısal olarak gerçekleştirilebilmesi için sistem içi bir lineer sonlu eleman ızgarasına bölünür. Sistem içinin lineer sonlu elemanlarla ayrıklaştırılması Şekil 2.7’de verilmiştir.



Şekil 2.7: Sistem için lineer sonlu elemanlarla ayrıştırılması

Şekil 2.7’de sistem için N adet sonlu elemandan oluştuğu ve K adet nod içerdiği varsayılırsa,

$$f(\vec{r}) = \sum_{k=1}^K h_k(\vec{r}) f_k \quad (2.94)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $h_k(\vec{r})$, iki boyutlu üçgen, lineer ya da dörtgen bilineer ızgarada yer alan nodların baz fonksiyonlarıdır [45]. Bu fonksiyonlar nodun ait olduğu elemanlarda lineer ya da bilineer konumsal bağımlılık gösterirler. Nodun ait olmadığı elemanlarda ise sıfır değerini alırlar. Ayrıca,

$$h_k(\vec{r}_m) = \delta_{km}$$

özelliğini gösterirler. Bu yaklaşım doğrultusunda s_i terimi:

$$\begin{aligned} s_i &= \frac{w_g}{k_{etk}} \int_V G_g(\vec{r}, \vec{\rho}_i) f(\vec{r}) dV \\ &= \frac{w_g}{k_{etk}} \sum_{n=1}^N \int_{V_n} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}_i) f(\vec{r}) dV \\ &= \frac{w_g}{k_{etk}} \sum_{n=1}^N \int_{V_n} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}_i) \sum_{k=1}^K h_k(\vec{r}) dV f(\vec{r}_k) \\ &= \frac{w_g}{k_{etk}} \sum_{k=1}^K \left(\sum_{n=1}^N \int_{V_n} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}_i) h_k(\vec{r}) dV \right) f(\vec{r}_k) \end{aligned} \quad (2.95)$$

Burada,

$$p_{g,ik} = \sum_{n=1}^N \int_{V_n} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}_i) h_k(\vec{r}) dV \quad (2.96)$$

tanımı yapılırsa (2.95) eşitliği,

$$s_i = \frac{w_g}{k_{etk}} \sum_{k=1}^K p_{g,ik} f(\vec{r}_k) \quad (2.97)$$

şeklinde yazılabilir. s_i teriminin hesabı büyük çapta kullanılan sınır elemanı türünden (sabit ya da lineer) bağımsız olup integrasyon için oluşturulan sonlu eleman ızgarasına bağlıdır. İster sabit ister lineer sınır elemanları kullanılsın elde edilen (2.82), (2.91) ve (2.97) eşitlikleri matris notasyonuyla,

$$\underline{\underline{G}}_g \underline{\underline{\phi}}'_g + \underline{\underline{H}}_g \underline{\underline{\phi}}_g = \frac{w_g}{k_{etk}} \underline{\underline{P}}_g \underline{\underline{f}} \quad (2.98)$$

şeklinde yazılabilmektedir. $\underline{\underline{G}}_g$ ve $\underline{\underline{H}}_g$ matrislerinin elemanları sabit sınır elemanları kullanılması halinde $g_{g,ij}^C$ ve $h_{g,ij}^C$, lineer sınır elemanları kullanılması durumunda ise $g_{g,ij}^L$ ve $h_{g,ij}^L$ olarak belirlenmektedir.

$\underline{\underline{G}}_g$ ve $\underline{\underline{H}}_g$ (IxI) boyutunda kare, $\underline{\underline{P}}_g$ ise (IxK) boyutunda dikdörtgen matrislerdir.

(2.98) eşitliğinde $\underline{\underline{\phi}}'_g$ ve $\underline{\underline{\phi}}_g$ bilinmeyen vektörleri bir $\underline{\underline{u}}_g$ vektörü, $\underline{\underline{G}}_g$ ve $\underline{\underline{H}}_g$ bilinen matrisleri de bir $\underline{\underline{A}}_g$ matrisi altında toplanıp yeniden yazılırsa,

$$\underline{\underline{A}}_g \underline{\underline{u}}_g = \frac{w_g}{k_{etk}} \underline{\underline{P}}_g \underline{\underline{f}} \quad (2.99)$$

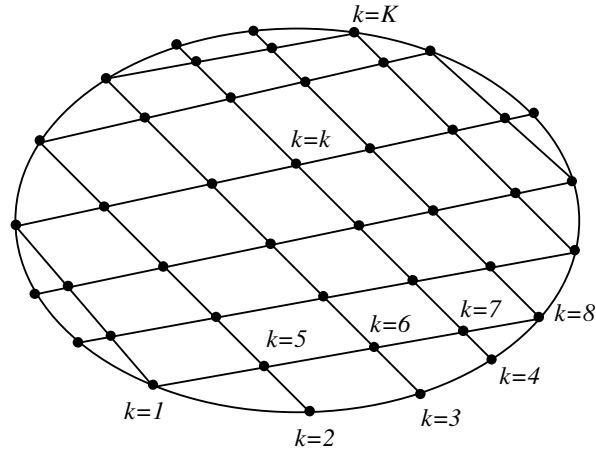
şeklinde olur. Burada,

$$\underline{\underline{A}}_g = \begin{bmatrix} \underline{\underline{G}}_g & 0 \\ 0 & \underline{\underline{H}}_g \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{u}}_{g,j} = \begin{Bmatrix} \underline{\underline{\phi}}'_{g,j} \\ \underline{\underline{\phi}}_{g,j} \end{Bmatrix} \quad (2.100)$$

şeklinde tanımlıdır. Filyon kaynağı iterasyonu sırasında $f(\vec{r})$ ve k_{etk} öngörüsü bir önceki iterasyondan bilindiği için (2.99) eşitliği Crout ayrışımı ile çözümlü $\underline{u}_g$ bulunabilir [46].

2.4. İç Akı Hesabı

İç akı hesabı için yine, sistem sınırı I adet sınır elemanına, sistem içi de Şekil 2.8’de gösterildiği gibi K nodlu sonlu eleman ızgarasına ayrışsın. (2.78) denkleminin her hangi bir $\vec{\rho}_i$ ($k=1,2,3,\dots,K$) koordinatlı iç nod için yazılması durumunda,



Şekil 2.8: Sistem içinin K nodlu lineer sonlu elemanlarla ayrıklaştırılması

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_g(\vec{\rho}_i) = & \sum_{j=1}^I \left(\int_{S_j \in S_v} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}_i) \frac{\partial \varphi_g}{\partial n}(\vec{r}_j) dS \right) - \sum_{j=1}^I \left(\int_{S_j \in S_r} \frac{\partial G_g}{\partial n}(\vec{r}, \vec{\rho}_i) \varphi_g(\vec{r}_j) dS \right) \\ & + \frac{w_g}{k_{etk}} \sum_{k=1}^K \left(\int_V h_k(\vec{r}) G_g(\vec{r}, \vec{\rho}_i) dV \right) f_k \end{aligned} \quad (2.101)$$

şeklinde olur. Burada sistem sınırının sabit elemanlarla ayrıklaştırıldığı varsayılmıştır. (2.101) eşitliğindeki ilk terim iç akıyı temsil etmektedir, eşitliğin sağ tarafındaki ikinci ve üçüncü terimler,

$$\begin{aligned}
\tilde{s}_{g,ij} &= \int_{S_j} G_g(\vec{r}, \vec{\rho}_i) dS & \vec{r}_j &\in S_v \\
i &= 1, 2, \dots, K, & j &= 1, 2, \dots, I \\
\tilde{t}_{g,ij} &= - \int_{S_j} \frac{\partial G_g(\vec{r}, \vec{\rho}_i)}{\partial n} dS & \vec{r}_j &\in S_r
\end{aligned} \tag{2.102}$$

şeklinde tanımlanabilir. (2.101) denkleminin son kaynak terimi ise,

$$r_{g,ik} = \int_V G_g(\vec{r}, \vec{\rho}_i) h_k(\vec{r}) dV \quad i, k = 1, 2, \dots, K \tag{2.103}$$

şeklinde tanımlanabilir. Eşitlik (2.102) ve (2.103)'te verilen $\tilde{s}_{g,ij}$, $\tilde{t}_{g,ij}$ ve $r_{g,ik}$ integrallerinin hesabı [40-41] kaynaklarında detaylı olarak verilmiştir.

Eşitlik (2.102) ve (2.103)'te verilen tanımlar yardımıyla (2.101) eşitliği matrisyel biçiminde şu şekilde yazılabilir:

$$\underline{\tilde{\varphi}}_g = \underline{\tilde{S}}_g \underline{\varphi}'_g + \underline{\tilde{T}}_g \underline{\varphi}_g + \frac{w_g}{k_{etk}} \underline{R}_g \underline{f} \tag{2.104}$$

$\underline{\tilde{S}}_g$ ve $\underline{\tilde{T}}_g$ (KxI) boyutunda dikdörtgen, $\underline{R}_g$ ise (KxK) boyutunda kare matrislerdir. (2.104) eşitliğinde $\underline{\varphi}'_g$ ve $\underline{\varphi}_g$ bilinmeyen vektörleri bir $\underline{u}_g$ vektörü, $\underline{\tilde{S}}_g$ ve $\underline{\tilde{T}}_g$ bilinen matrisleri de bir $\underline{T}_g$ matrisi altında toplanırsa,

$$\underline{\tilde{\varphi}}_g = \underline{T}_g \underline{u}_g + \frac{w_g}{k_{etk}} \underline{R}_g \underline{f} \tag{2.105}$$

denklemini elde edilir. (2.99) eşitliği çözüldükten sonra (2.73) ve (2.105) eşitlikleri aracılığıyla V hacmi içindeki iç akı dağılımı bulunur. İç akıların hesaplanmasıyla yeni $f(\vec{r})$ ve k_{etk} öngörüsü hesaplanır.

BÖLÜM 3

GÜÇ İTERASYONUNU HIZLANDIRMA

Bu bölümde bu tez çalışmasının ana konusu olan güç iterasyonunu hızlandırma metodlarından biri olan Chebyshev polinomsal hızlandırma metodunun teorisi ele alınacaktır.

3.1. Nötron Difüzyon Yetkinlik Özdeğer Problemi

Nükleer reaktör fiziğinde çok gruplu nötron difüzyon denkleminin dayalı reaktör hesapları önemli bir rol oynar. Nükleer güç reaktörü içinde zamandan bağımsız akı dağılımının hesabı için, kısmî diferansiyel denklem sisteminin en büyük özdeğeri k_{eff} ve bu özdeğere karşılık gelen pozitif özvektörlerin ϕ_g elde edilmesi gerekir.

Bölüm 4'te detaylı olarak bahsedilecek olan BMG ve BMGL programları, iki boyutlu çok gruplu nötron difüzyon denkleminin fisyon kaynağı problemlerini güç iterasyonu metodu ile çözer. (2.13) denkleminin sağ tarafındaki $s_g(\vec{r})$ kaynak terimi, yetkinlik özdeğer problemlerinde güç iterasyonu (fisyon kaynağı iterasyonu) sırasında bir önceki iterasyondan bilinen fisyon kaynağı öngörüsü ile o iterasyondaki daha küçük numaralı enerji gruplarından gelen saçılma kaynaklarının toplamıdır. Aynı şekilde (2.11) eşitliğindeki k_{eff} de bir önceki iterasyondan bilinen yetkinlik özdeğeri öngörüsüdür. Dominans oranı, ikinci büyük özdeğerin en büyük özdeğere (k_{eff}) oranı olarak tanımlanır. Dominans oranı 1'e ne denli yakınsa güç iterasyonu da o denli yavaş yakınsayacaktır. Daha önce yapılan çalışmalarda güç iterasyonu metodunun yavaş yakınsadığı, bu yüzden de güç iterasyonunu hızlandırma metodlarının denendiği ve olumlu sonuçların elde edildiği görülmektedir [24,30-31,37].

Chebyshev polinomsal hızlandırması çok gruplu nötron difüzyon denklemlerinin sonlu farklar, sonlu elemanlar ayrıklaştırması sonucu ortaya çıkan yetkinlik özdeğer problemlerine uygulanmıştır. Ancak gerek sonlu farklar gerekse sonlu elemanlar simetrik ve seyrek yapıda katsayılar matrisi veren yöntemlerdir. Sınır elemanları bunların aksine simetrik olmayan ve dolu yapıda katsayılar matrisi verir. Bu nedenle Chebyshev hızlandırmasının sınır elemanları ayrıklaştırması sonucu ortaya çıkan yetkinlik özdeğer problemlerine uygulanması pek çok farklılıklar arz etmektedir. Chebyshev hızlandırmasının değişik matris yapısına sahip sınır elemanları yönteminde ne denli etkin olacağının araştırılması bu çalışmanın ana amacını oluşturmaktadır.

Sistem sınırının yine I ($i=1,2,3,\dots,I$) adet sınır elemanına, sistem için de K ($k=1,2,3,\dots,K$) adet iç noda ayrıldığı varsayımıyla (2.99) ve (2.105) eşitliklerinin sağ taraf fisyon kaynağı terimleri açık bir biçimde yazılacak olursa,

$$\underline{A}_g \underline{u}_g = \frac{w_g}{k_{eff}} \underline{P}_g (\nu_1 \Sigma_{f1} \tilde{\underline{\phi}}_1 + \nu_2 \Sigma_{f2} \tilde{\underline{\phi}}_2 + \nu_3 \Sigma_{f3} \tilde{\underline{\phi}}_3 + \dots + \nu_G \Sigma_{fG} \tilde{\underline{\phi}}_G) \quad (3.1)$$

$$\tilde{\underline{\phi}}_g = \underline{T}_g \underline{u}_g + \frac{w_g}{k_{eff}} \underline{R}_g (\nu_1 \Sigma_{f1} \tilde{\underline{\phi}}_1 + \nu_2 \Sigma_{f2} \tilde{\underline{\phi}}_2 + \nu_3 \Sigma_{f3} \tilde{\underline{\phi}}_3 + \dots + \nu_G \Sigma_{fG} \tilde{\underline{\phi}}_G) \quad (3.2)$$

şeklinde olur. $\underline{A}_g$ ($I \times I$), $\underline{P}_g$ ($I \times K$), $\underline{T}_g$ ($K \times I$), $\underline{R}_g$ ($K \times K$) boyutlu matrislerdir. $\underline{u}_g$ (I), $\underline{\phi}_g$ (K) boyutlu vektörlerdir. (3.1) ve (3.2) denklemlerinin sağ tarafları kısaca,

$g = 1 \text{ için,}$ $ \begin{aligned} w_1 v_1 \Sigma_{f1} \underline{P} &= \underline{P}_{11} & w_1 v_1 \Sigma_{f1} \underline{R} &= \underline{R}_{11} \\ w_1 v_2 \Sigma_{f2} \underline{P} &= \underline{P}_{12} & w_1 v_2 \Sigma_{f2} \underline{R} &= \underline{R}_{12} \\ w_1 v_3 \Sigma_{f3} \underline{P} &= \underline{P}_{13} & w_1 v_3 \Sigma_{f3} \underline{R} &= \underline{R}_{13} \\ &\vdots & & \vdots \\ w_1 v_G \Sigma_{fG} \underline{P} &= \underline{P}_{1G} & w_1 v_G \Sigma_{fG} \underline{R} &= \underline{R}_{1G} \end{aligned} $	$g = 2 \text{ için,}$ $ \begin{aligned} w_2 v_1 \Sigma_{f1} \underline{P} &= \underline{P}_{21} & w_2 v_1 \Sigma_{f1} \underline{R} &= \underline{R}_{21} \\ w_2 v_2 \Sigma_{f2} \underline{P} &= \underline{P}_{22} & w_2 v_2 \Sigma_{f2} \underline{R} &= \underline{R}_{22} \\ w_2 v_3 \Sigma_{f3} \underline{P} &= \underline{P}_{23} & w_2 v_3 \Sigma_{f3} \underline{R} &= \underline{R}_{23} \\ &\vdots & & \vdots \\ w_2 v_G \Sigma_{fG} \underline{P} &= \underline{P}_{2G} & w_2 v_G \Sigma_{fG} \underline{R} &= \underline{R}_{2G} \end{aligned} $
$g = 3 \text{ için,}$ $ \begin{aligned} w_3 v_1 \Sigma_{f1} \underline{P} &= \underline{P}_{31} & w_3 v_1 \Sigma_{f1} \underline{R} &= \underline{R}_{31} \\ w_3 v_2 \Sigma_{f2} \underline{P} &= \underline{P}_{32} & w_3 v_2 \Sigma_{f2} \underline{R} &= \underline{R}_{32} \\ w_3 v_3 \Sigma_{f3} \underline{P} &= \underline{P}_{33} & w_3 v_3 \Sigma_{f3} \underline{R} &= \underline{R}_{33} \\ &\vdots & & \vdots \\ w_3 v_G \Sigma_{fG} \underline{P} &= \underline{P}_{3G} & w_3 v_G \Sigma_{fG} \underline{R} &= \underline{R}_{3G} \end{aligned} $	$g = G \text{ için}$ $ \begin{aligned} w_G v_1 \Sigma_{f1} \underline{P} &= \underline{P}_{G1} & w_G v_1 \Sigma_{f1} \underline{R} &= \underline{R}_{G1} \\ w_G v_2 \Sigma_{f2} \underline{P} &= \underline{P}_{G2} & w_G v_2 \Sigma_{f2} \underline{R} &= \underline{R}_{G2} \\ w_G v_3 \Sigma_{f3} \underline{P} &= \underline{P}_{G3} & w_G v_3 \Sigma_{f3} \underline{R} &= \underline{R}_{G3} \\ &\vdots & & \vdots \\ w_G v_G \Sigma_{fG} \underline{P} &= \underline{P}_{GG} & w_G v_G \Sigma_{fG} \underline{R} &= \underline{R}_{GG} \end{aligned} $

(3.3)

şeklinde tanımlanabilir ve (3.1-2) denklemlerinde yerlerine yerleştirilmesi ile,

$$\underline{A}_{=g} \underline{u}_g = \frac{1}{k_{etik}} (\underline{P}_{=g1} \underline{\tilde{\varphi}}_1 + \underline{P}_{=g2} \underline{\tilde{\varphi}}_2 + \underline{P}_{=g3} \underline{\tilde{\varphi}}_3 + \dots + \underline{P}_{=gG} \underline{\tilde{\varphi}}_G) \quad g = 1, 2, 3, \dots, G \quad (3.4)$$

$$\underline{\tilde{\varphi}}_g = \underline{T}_{=g} \underline{u}_g + \frac{1}{k_{etik}} (\underline{R}_{=g1} \underline{\tilde{\varphi}}_1 + \underline{R}_{=g2} \underline{\tilde{\varphi}}_2 + \underline{R}_{=g3} \underline{\tilde{\varphi}}_3 + \dots + \underline{R}_{=gG} \underline{\tilde{\varphi}}_G) \quad (3.5)$$

denklemleri elde edilir. (3.4) eşitliğinde $\underline{u}_g$ 'nin yalnız bırakılması ve (3.5) denkleminde yerine yerleştirilmesiyle,

$$\underline{u}_g = \frac{1}{k_{etik}} \underline{A}_{=g}^{-1} (\underline{P}_{=g1} \underline{\tilde{\varphi}}_1 + \underline{P}_{=g2} \underline{\tilde{\varphi}}_2 + \underline{P}_{=g3} \underline{\tilde{\varphi}}_3 + \dots + \underline{P}_{=gG} \underline{\tilde{\varphi}}_G) \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}
\underline{\tilde{\varphi}}_g &= \frac{1}{k_{etik}} \underline{T}_{=g} \underline{A}_{=g}^{-1} (\underline{P}_{=g1} \underline{\tilde{\varphi}}_1 + \underline{P}_{=g2} \underline{\tilde{\varphi}}_2 + \underline{P}_{=g3} \underline{\tilde{\varphi}}_3 + \dots + \underline{P}_{=gG} \underline{\tilde{\varphi}}_G) \\
&\quad + \frac{1}{k_{etik}} (\underline{R}_{=g1} \underline{\tilde{\varphi}}_1 + \underline{R}_{=g2} \underline{\tilde{\varphi}}_2 + \underline{R}_{=g3} \underline{\tilde{\varphi}}_3 + \dots + \underline{R}_{=gG} \underline{\tilde{\varphi}}_G)
\end{aligned} \quad (3.7)$$

ifadeleri elde edilir.

$$\begin{aligned}
\underline{B}_{g1} &= \underline{T}_{g1} \underline{A}_{g1}^{-1} \underline{P}_{g1} + \underline{R}_{g1} \\
\underline{B}_{g2} &= \underline{T}_{g2} \underline{A}_{g2}^{-1} \underline{P}_{g2} + \underline{R}_{g2} \\
\underline{B}_{g3} &= \underline{T}_{g3} \underline{A}_{g3}^{-1} \underline{P}_{g3} + \underline{R}_{g3} \\
&\vdots \quad \quad \quad \vdots \\
\underline{B}_{gG} &= \underline{T}_{gG} \underline{A}_{gG}^{-1} \underline{P}_{gG} + \underline{R}_{gG}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

şeklinde $(K \times K)$ boyutlu $\underline{B}_{gg'}$, $(g, g' = 1, 2, 3, \dots, G)$ matrisleri tanımlanabilir. (3.7)

eşitliği yeniden düzenlenirse,

$$\underline{\tilde{\varphi}}_g = \frac{1}{k_{etik}} (\underline{B}_{g1} \underline{\tilde{\varphi}}_1 + \underline{B}_{g2} \underline{\tilde{\varphi}}_2 + \underline{B}_{g3} \underline{\tilde{\varphi}}_3 + \dots + \underline{B}_{gG} \underline{\tilde{\varphi}}_G) \tag{3.9}$$

haline gelir ve genel yazılımla,

$$\sum_{g'=1}^G \underline{B}_{gg'} \underline{\tilde{\varphi}}_{g'} = k_{etik} \underline{\tilde{\varphi}}_g \quad g = 1, 2, 3, \dots, G \tag{3.10}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Tüm grup denklemleri bir araya getirilerek,

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{B}_{11} & \cdots & \underline{B}_{1g} & \cdots & \underline{B}_{1G} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \underline{B}_{g1} & \cdots & \underline{B}_{gg} & \cdots & \underline{B}_{gG} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \underline{B}_{G1} & \cdots & \underline{B}_{Gg} & \cdots & \underline{B}_{GG} \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

blok matrisi ve

$$\underline{\Psi}^T = [\underline{\tilde{\varphi}}_1, \dots, \underline{\tilde{\varphi}}_g, \dots, \underline{\tilde{\varphi}}_G] \tag{3.12}$$

blok vektörü tanımlanarak, (3.10) denklemi özdeğer-özvektör problemi olarak,

$$\underline{B} \underline{\Psi} = k_{etik} \underline{\Psi} \tag{3.13}$$

şeklinde yazılabilir. Bu şekilde çok gruplu nötron difüzyon denkleminin sınır elemanları ayrıklaştırılması sonucu ortaya bir klasik özdeğer-özvektör problemi çıktığı gösterilmiş oldu. Ancak burada diğer ayrıklaştırma tekniklerinden (sonlu farklar, sonlu elemanlar, v.s.) farklı olarak özvektör grup akılarından değil, grup akılarının lineer kombinasyonlarından oluşmaktadır.

3.2. Güç (Dış) İterasyon Metodu

Eşitlik (3.13)'teki $\underline{\underline{B}}$ matrisinin en büyük özdeğeri ve bu özdeğere karşılık gelen özvektörü güç iterasyonu metodu ile bulunabilir. Bu klasik özdeğer-özvektör problemi $\Psi^{(0)}$ ilk öngörüsü ile klasik güç iterasyonu algoritmasıyla [30,33],

$$\underline{\tilde{\Psi}}^{(n)} = \underline{\underline{B}} \underline{\Psi}^{(n-1)} \quad (3.14)$$

$$k^{(n)} = \frac{\underline{\tilde{\Psi}}^{(n)T} \underline{\tilde{\Psi}}^{(n)}}{\underline{\tilde{\Psi}}^{(n)T} \underline{\Psi}^{(n-1)}} \quad (3.15)$$

$$\underline{\Psi}^{(n)} = \frac{1}{k^{(n)}} \underline{\tilde{\Psi}}^{(n)} \quad (3.16)$$

şeklinde çözülebilir. Bu iterasyon,

$$\underline{k}^{(n)} = \min_i \frac{\underline{\tilde{\Psi}}_i^{(n)}}{\underline{\Psi}_i^{(n-1)}} \quad (3.17)$$

$$\bar{k}^{(n)} = \max_i \frac{\underline{\tilde{\Psi}}_i^{(n)}}{\underline{\Psi}_i^{(n-1)}}$$

özdeğer alt-limit ve üst-limit öngörülerıyla,

$$\frac{\bar{k}^{(n)} - \underline{k}^{(n)}}{2k^{(n)}} \leq \varepsilon \quad (3.18)$$

yakınsama kriteri gerçekleşene kadar sürdürülebilir. Burada ε özdeğer tayininde hata miktarını belirleyen keyfî ve pozitif sayıdır. $\underline{k}^{(n)}$ ve $\bar{k}^{(n)}$ iterasyon öngörülleri

$$\underline{k}^{(n)} \leq \underline{k}^{(n+1)} \leq \dots \leq k_1 \leq \dots \leq \bar{k}^{(n+1)} \leq \bar{k}^{(n)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{k}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{k}^{(n)} = k_1$$

bağıntısını sağlarlar [33].

3.2.1. Güç iterasyonu metodunun hızlandırılması

Güç iterasyonu metodunun yakınsama hızı, $\underline{B}$ matrisinin en büyük özdeğeri $k_{etk}=k_1$ 'in diğer özdeğerlerden ne kadar iyi ayırt edilmiş olmasına bağlıdır veya diğer bir deyimle yakınsama hızı,

$$\rho = \max_{i \neq 1} \frac{|k_i|}{k_1} \quad (3.19)$$

ile tanımlanan dominans oranına bağlıdır. Dominans oranının 1'e yakın olması durumunda (3.14-16) iterasyon algoritmasının yakınsaması çok yavaş olacaktır. Bu sebeple güç iterasyon metodunun hızlandırılması yoluna gidilmektedir.

3.2.2. Güç iterasyonunun Chebyshev polinomsal metodu ile hızlandırılması

Yapılacak analiz için $\underline{B}$ matrisinin N adet gerçel ve nonnegatif özdeğeri bulunduğunu, bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerin lineer bağımsız olduğu yani N boyutlu vektör uzayında bir baz oluşturduğu varsayalım. Yani,

$$\underline{B}\underline{u}_i = k_i \underline{u}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$k_i \text{ gerçel, nonnegatif} \quad (3.20)$$

özvektörler lineer bağımsız olduğuna göre, N boyutlu herhangi bir vektör bu özvektörler cinsinden yazılabilir. Özel olarak güç iterasyonu için yapılan ilk öngörü de bu özvektörler cinsinden,

$$\underline{\Psi}^{(0)} = \sum_{i=1}^N c_i \underline{u}_i \quad (3.21)$$

şeklinde yazılabilir.

(3.14-16)'da verilen klasik güç iterasyonu algoritmasında, yeni öngörüler için sadece son hesaplanan öngörü kullanılmaktadır. Güç iterasyonu hızlandırması için yeni öngörünün belirlenmesinde o ana kadar hesaplanmış tüm öngörülerin bir lineer kombinasyonunun düşünülmesi bizi Chebyshev polinomsal hızlandırmasına götürecektir. Bu amaçla yeni öngörü olarak $\underline{\Psi}^{(n)}$ yerine n 'inci iterasyona kadar hesaplanan öngörülerin lineer bir kombinasyonu,

$$\underline{\Theta}^{(n)} = \sum_{p=0}^n a_{np} \underline{\Psi}^{(p)} \quad (3.22)$$

kullanılsın. Eşitlik (3.22)'deki a_{np} sabitlerinin uygun şekilde seçilerek $\underline{\Psi}^{(n)}$ 'den daha iyi bir yaklaşım bulunması amaçlansın. Burada esas sorun a_{np} katsayılarını, iterasyonu optimum şekilde hızlandıracak biçimde seçmek olmalıdır.

(3.14) ve (3.16) eşitlikleri kullanılarak,

$$\underline{\Psi}^{(p)} = \frac{1}{\prod_{r=0}^p k^{(r)}} B^p \underline{\Psi}^{(0)} \quad (3.23)$$

ifadesi elde edilir. Özdeğer öngörülerinin aranan $k_I = k_{etk}$ değerine yeterince yakın olduğu varsayılırsa,

$$\underline{\Psi}^{(p)} \cong \left(\frac{1}{k_1} B \right)^p \underline{\Psi}^{(0)} \quad (3.24)$$

şeklinde yazılabilir. (3.24) eşitliği (3.22) eşitliğinde kullanılırsa,

$$\underline{\Theta}^{(n)} = \sum_{p=0}^n a_{np} \left(\frac{1}{k_1} B \right)^p \underline{\Psi}^{(0)} \quad (3.25)$$

şeklinde olur. (3.21) eşitliği (3.25) eşitliğinde yerine yerleştirilirse,

$$\underline{\Theta}^{(n)} = \sum_{i=1}^N c_i \sum_{p=0}^n a_{np} \left(\frac{1}{k_1} B \right)^p \underline{\Psi}_i \quad (3.26)$$

ifadesi elde edilir. Öte yandan (3.26) eşitliği (3.20) eşitliğinden yararlanılarak,

$$\underline{\Theta}^{(n)} = \sum_{i=1}^N c_i \sum_{p=0}^n a_{np} \left(\frac{k_i}{k_1} \right)^p \underline{\Psi}_i \quad (3.27)$$

şeklinde yazılabilir. Bu aşamada,

$$P_n(x) = \sum_{p=0}^n a_{np} x^p \quad (3.28)$$

polinomu tanımlanırsa,

$$\underline{\Theta}^{(n)} = c_1 P_n(1) \underline{\Psi}_1 + \sum_{i=2}^N c_i P_n \left(\frac{k_i}{k_1} \right) \underline{\Psi}_i \quad (3.29)$$

ifadesi elde edilir.

(3.29) denkleminin sağ tarafındaki ilk terim iterasyonla aranılan özvektördür. İkinci terim ise hata terimini oluşturmaktadır. c_i sabitleri her ilk öngörüye göre değiştiğinden ve pratikte B 'nin özdeğerleri bilinmediğinden (3.29) denklemindeki hata teriminin gerçek anlamda minimize edilmesi mümkün değildir. Ancak $P_n(x)$ polinomu hata teriminde $0 < x < \rho$ arasında değer aldığından, $P_n(x)$ 'i $0 < x < \rho$ aralığında minimum maksimum değere sahip olacak şekilde seçmenin hata terimini azaltıcı yönde etki yapacağı görülmektedir. $P_n(x)$ polinomu yapay olarak $P_1(1)=1$ olacak şekilde seçilir ve $0 < x < \rho$ aralığında maksimum $|P_n(x)|$ 'in minimum olması istenirse $P_n(x)$ polinomu Chebyshev polinomları cinsinden yazılabilir [47]:

$$P_n(x) = \frac{T_n \left(\frac{2x}{\rho} - 1 \right)}{T_n \left(\frac{2}{\rho} - 1 \right)} \quad (3.30)$$

Burada $T_n(x)$, n 'inci dereceden Chebyshev polinomudur. Chebyshev polinimleri,

$$T_n(x) = \begin{cases} \cos(n \cos^{-1} x) & |x| \leq 1 \\ \cosh(n \cosh^{-1} x) & |x| \geq 1 \end{cases} \quad (3.31)$$

şeklinde tanımlıdır. İlk iki Chebyshev polinomu,

$$T_0(x) = 1 \quad (3.32)$$

$$T_1(x) = x$$

şeklinde olup, daha yüksek dereceli Chebyshev polinimleri,

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad n \geq 1 \quad (3.33)$$

şeklinde yineleme (rekürsif) bağıntısı ile bulunabilirler [48-49]. Aranılan $P_n(x)$ polinimleri ise,

$$\sigma = \cosh^{-1}\left(\frac{2}{\rho} - 1\right) \quad (3.34)$$

tanımı ile,

$$P_0(x) = 1 \quad (3.35)$$

$$P_1(x) = \frac{\frac{2x}{\rho} - 1}{\frac{2}{\rho} - 1}$$

$$P_{n+1}(x) = 2 \frac{\cosh(n\sigma)}{\cosh[(n+1)\sigma]} \left(\frac{2x}{\rho} - 1 \right) P_n(x) - \frac{\cosh[(n-1)\sigma]}{\cosh[(n+1)\sigma]} P_{n-1}(x), \quad n \geq 1 \quad (3.36)$$

şeklinde belirlenir.

(3.36) bağıntısı kullanılarak güç iterasyonu metodu $\underline{\Psi}^{(n)}$ vektörleri yerine (3.27) denkleminde verilen $\underline{\Theta}^{(n)}$ vektörleri cinsinden ifade edilebilir [50].

Chebyshev polinomları ile hızlandırılmış güç iterasyonu,

$$\underline{\tilde{\Psi}}^{(n)} = \underline{\underline{B}} \underline{\Theta}^{(n-1)} \quad (3.37)$$

$$k^{(n)} = \frac{\underline{\tilde{\Psi}}^{(n)T} \underline{\tilde{\Psi}}^{(n)}}{\underline{\tilde{\Psi}}^{(n)T} \underline{\Theta}^{(n-1)}} \quad (3.38)$$

$$\underline{\Theta}^{(n)} = \underline{\Theta}^{(n-1)} + \alpha_n \left(\frac{1}{k^{(n)}} \underline{\tilde{\Psi}}^{(n)} - \underline{\Theta}^{(n-1)} \right) + \beta_n \left(\underline{\Theta}^{(n-1)} - \underline{\Theta}^{(n-2)} \right) \quad n \geq 1 \quad (3.39)$$

algoritması şeklinde uygulanır. Burada,

$$1 - \alpha_n + \beta_n = -\frac{\rho}{2} \alpha_n \quad (3.40)$$

$$\alpha_1 = \frac{2}{2 - \rho}, \quad \beta_1 = 0 \quad (3.41)$$

$$\alpha_n = \frac{4}{\rho} \left[\frac{\text{Cosh}[(n-1)\sigma]}{\text{Cosh}(n\sigma)} \right] \quad n \geq 2 \quad (3.42)$$

$$\beta_n = \frac{\text{Cosh}[(n-2)\sigma]}{\text{Cosh}(n\sigma)} \quad (3.43)$$

olarak tanımlanmıştır.

Yukarıda verilen Chebyshev polinom metodu ile hızlandırmanın yapılabilmesi için yeterli doğruluğa sahip bir k öngörüsüne ve bir dominans oranı, ρ , tahminine gerek vardır. k öngörüsü için (3.14-16)'da verilen güç iterasyonu metodu ile dört veya beş güç iterasyonu yapılarak Chebyshev hızlandırmalı iterasyon için yeterli doğruluğa sahip bir k öngörüsü elde edilebilir. Bu güç iterasyonlarında dominans oranı için de bir ön tahmin yapmak mümkündür. Dominans oranı ilk öngörüsü ve daha sonra öngörü değiştirilmesinin nasıl yapılacağı bir sonraki bölümde ele alınacaktır.

3.2.3. Dominans oranı öngörülleri

(3.14-16) güç iterasyonu algoritmasından dört veya beş iterasyon yapılarak k için bir öngörü elde edilebilir. Bu güç iterasyonu sırasında özdeğerlerin yakınsamasına bağlı olarak dominans oranı için de bir ilk dominans oranı öngörüsü yapılabilir. Bunun için $n > m$ olmak üzere,

$$E_{m,n} = \frac{\bar{k}^{(n)} - \underline{k}^{(n)}}{\bar{k}^{(m)} - \underline{k}^{(m)}} \quad (3.44)$$

hata oranı tanımı yapılarak yeteri kadar büyük bir iterasyon sayısında,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{n-1,n} = \rho \quad (3.45)$$

olduğu gösterilebilir [51]. Dolayısıyla dominans oranı için bir ilk öngörü n 'inci güç iterasyonu sonunda $E_{n-1,n} \cong \rho_0$ tespit edilebilir. k ve ρ ilk tahminleri tespit edildikten sonra (3.37-39) Chebyshev hızlandırılmalı güç iterasyonu metodunun uygulanmasına geçilir. Kullanılan dominans oranı tahmininin doğru kuramsal yakınsamayı verip vermediğini kontrol amacıyla başlangıçta düşük mertebeden (pratikte dördüncü dereceden) bir Chebyshev polinomunun ardarda uygulanması öngörülmüş ve böylece dominans oranı tahminlerinin geliştirilmesine imkân sağlamıştır. (3.37-39) Chebyshev hızlandırılmalı güç iterasyonu metodunun yakınsama hızı (3.44) hata oranından gözetlenecek olursa, $\underline{\Psi}^{(n)}$ vektör tahminine m 'inci mertebeden bir Chebyshev polinomunun uygulanması sonunda,

$$E_{n+1,n+m+1} \approx \frac{T_m\left(\frac{2\rho}{\rho_0} - 1\right)}{T_m\left(\frac{2}{\rho_0} - 1\right)} \quad (3.46)$$

şeklinde olur [51]. Burada ρ_0 ilk dominans oranı tahminidir. (3.37-39) iterasyon sürecinin ilk dominans oranı tahmini ρ_0 için doğru kuramsal yakınsamayı verip vermediği (3.46) bağıntısından tespit edilebilir. $\underline{\Psi}^{(n)}$ vektör tahminine m 'inci mertebeden bir polinom uygulanması sonunda üç olasılık vardır.

1. Olasılık

$$E_{n+1,n+m+1} \leq \frac{1}{T_m\left(\frac{2}{\rho_0} - 1\right)} \quad (3.47)$$

Bu durumda $\rho \leq \rho_0$ olup kuramsal olarak beklenen yakınsama hızı elde edilmektedir. Dolayısıyla ilk dominans oranı tahmini ρ_0 'ın kullanılmasına devam edilerek daha yüksek mertebeden Chebyshev polinomları uygulamasına gidilir.

2. Olasılık

$$\frac{1}{T_m\left(\frac{2}{\rho_0} - 1\right)} < E_{n+1,n+m+1} < 1 \quad (3.48)$$

Bu durumda ise $\rho > \rho_0$ dır ve beklenen yakınsama sağlanamamaktadır. Bu durumda yeni bir dominans oranı tahmini yapılmalıdır. (3.31) ve (3.46) bağıntılarından yararlanılarak [30],

$$\rho \cong \frac{\rho_0}{2} \left\{ \cosh \left[\frac{\cosh^{-1} \left[E_{n+1,n+m+1} T_m \left(\frac{2}{\rho_0} - 1 \right) \right]}{m} \right] + 1 \right\} \quad (3.49)$$

denklemi elde edilir. Dolayısıyla (3.49) denkleminden bir dominans oranı tahmini $\rho_1 = \rho_0$ yapılarak m mertebeli Chebyshev polinomunun uygulanmasına devam edilir.

3. Olasılık

$$E_{n+1,n+m+1} > 1 \quad (3.50)$$

Bu halde iterasyon sürecinin yakınsamadığını ve bir hata olduğunu gösterir. Bu durumda iterasyonun kesilmesi ve hatanın kökeninin aranması gerekir.

BÖLÜM 4

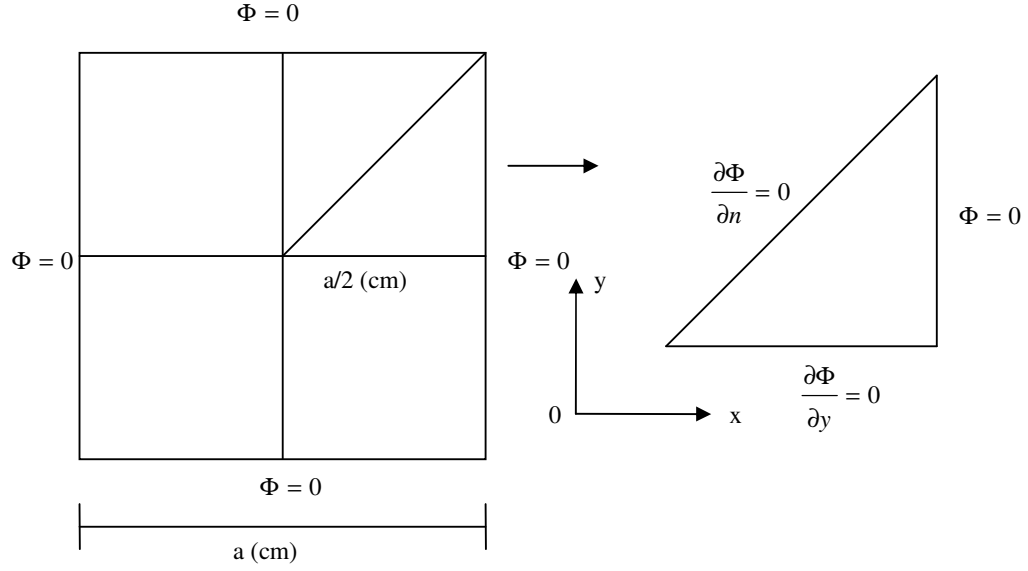
SAYISAL UYGULAMA

Bu bölümde, çok gruplu nötron difüzyon denklemlerinin sınır elemanları metodu ile ayrıklaştırılması sonucu ortaya çıkan özdeğer-özvektör probleminin en büyük özdeğerinin ve bu özdeğere karşılık gelen özvektörlerin hesaplanması için kullanılan güç iterasyonunun (filyon kaynağı iterasyonunun) Chebyshev polinomları kullanılarak hızlandırılması ele alınmıştır. Elde edilen sayısal sonuçlar ile analitik sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Daha önce geliştirilmiş olan BMG ve BMGL programları [6], iki boyutlu çok gruplu nötron difüzyon denkleminin, filyon veya bağımsız kaynak problemlerini sabit ve lineer sınır elemanı metodu kullanarak homojen sistemler için sıfır akı boşluk ve yansıtıcı sınır şartı ile çözer. Her iki programın tanımları EK C ve D’de verilmiştir.

Bu tez çalışmasının ana konusu olan çok gruplu nötron difüzyon denkleminin sabit ve lineer sınır elemanları metodu ile ayrıklaştırılması sonucu elde edilen özdeğer-özvektör problemini güç iterasyonu metodu ile çözen BMG ve BMGL yazılımlarına Chebyshev polinomsal hızlandırması uygulanması için BMGCH ve BMGLCH isimli yazılım geliştirilmiştir. Programlar FORTRAN 77 dilinde yazılmış olup, WINDOWS işletim sistemi altında koşturulmuştur.

Bu bölümde ele alınan bütün problemler için, geometri olarak Şekil 4.1’de verilen kare bir sistemin simetri özelliğinden faydalanılarak, sistemin sadece sekizde biri ele alınmıştır. Böylece bilgisayar zamanından tasarruf sağlanmış ve verilerin oluşturulması kolaylaştırılmıştır.



Şekil 4.1: Nötron difüzyon yetkinlik özdeğer problemleri için çözümlenen kare bir sistemin 1/8'lik kısmı

Bu bölümde sırası ile tek, iki ve üç gruplu yetkinlik özdeğer problemlerinin çözümleri irdelenecektir. Bu problemlerin çözümlenmesinde sınır elemanları ayırıklaştırması, Şekil 4.1'de verilen 1/8'lik sistemin kenarları eşit uzunluklarda parçalara bölünerek gerçekleştirilecektir. Sistem içi ise üçgen ve/veya dörtgen elemanlara bölünerek gerekli sonlu eleman ızgarası oluşturulacaktır. Şekil 4.2'de 15 sınır elemanına ve aynı sayıda sonlu elemana sahip örnek bir ızgara verilmektedir.

Bütün tablolarda kullanılacak olan kısaltmalar Tablo 4.1’de verilmektedir.

Tablo 4.1: Bütün problemler için tablolarda kullanılan kısaltmalar

is	İterasyon Sayısı
isky	İterasyon Sayısı Kazanç Yüzdesi $= [(Hızlandırmaz program iterasyon sayısı- Hızlandırılmalı program iterasyon sayısı)/ Hızlandırmaz iterasyon sayısı] \times 100$ $= \frac{[(BMG \text{ veya } BMGL) - (BMGCH \text{ veya } BMGLCH)]}{(BMG \text{ veya } BMGL)} \times 100$
Δ	Eleman uzunluğu
ρ ‘% hata’	Dominans oranı hata yüzdesi $= [\{ \text{Gerçek dominans oranı (eşitlik (3.19))} - \text{Sayısal dominans oranı (eşitlik (3.37-39))} \} / \text{Gerçek dominans oranı (eşitlik(3.19))}] \times 100$ $= [(\max_{i \neq 1} \frac{ k_i }{k} - \rho \text{ dominans oranı}) / \max_{i \neq 1} \frac{ k_i }{k}] \times 100$
okh	Ortalama Kare Hatanın Karekökü $okh = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{(\Phi_i - \Phi_i^{analitik})^2}{\Phi_i} \right)}}{K} \quad (K: \text{ iç nod sayısı})$
N_i	Izgara sayısı (İkizkenar dik üçgenin bir kenarının 5,10, 20 ve 40’a bölünmesi) ($i=1,2,3,4$)
M_i	Izgara sayısı (İkizkenar dik üçgenin bir kenarının 4, 8,16 ve 32’ye bölünmesi) ($i=1,2,3,4$)

4.1. Tek Gruplu Nötron Difüzyon Teorisi Yetkinlik Özdeğer Problemi

Güç iterasyonu metodunun hızlandırılmasında Chebyshev polinomsal metodunun uygulanabilirliğinin görülebilmesi için, tek gruplu homojen bir sistem için özdeğer-özvektör problemi teorik olarak ele alınsın. Sınır elemanları türetiminde sınır akılarının hesabı için oluşturulan (2.99) matrisyel denklemi ve iç akıların hesaplanması için ortaya konan (2.105) matrisyel denklemleri tek enerji grubu için yazılırsa,

$$\underline{\underline{A}}u = \frac{w}{k_{\text{etk}}} \underline{\underline{P}}v\Sigma_f \tilde{\Phi} \quad (4.1)$$

$$\tilde{\Phi} = \underline{\underline{T}}u + \frac{w}{k_{\text{etk}}} \underline{\underline{R}}v\Sigma_f \tilde{\Phi} \quad (4.2)$$

şeklinde olur. Eşitlik (4.1)'den,

$$u = \frac{1}{k_{\text{etk}}} \underline{\underline{A}}^{-1} w v\Sigma_f \underline{\underline{P}}\tilde{\Phi} \quad (4.3)$$

ifadesi elde edilir. $g=1$ için (3.3)'te verildiği gibi,

$$w v\Sigma_f \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{P}} \quad \text{ve} \quad w v\Sigma_f \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{R}}$$

tanımları kullanılır ve (4.3) eşitliği (4.2) denkleminde yerine yerleştirilirse,

$$\tilde{\Phi} = \frac{1}{k_{\text{etk}}} (\underline{\underline{T}}\underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{P}} + \underline{\underline{R}}) \tilde{\Phi} \quad (4.4)$$

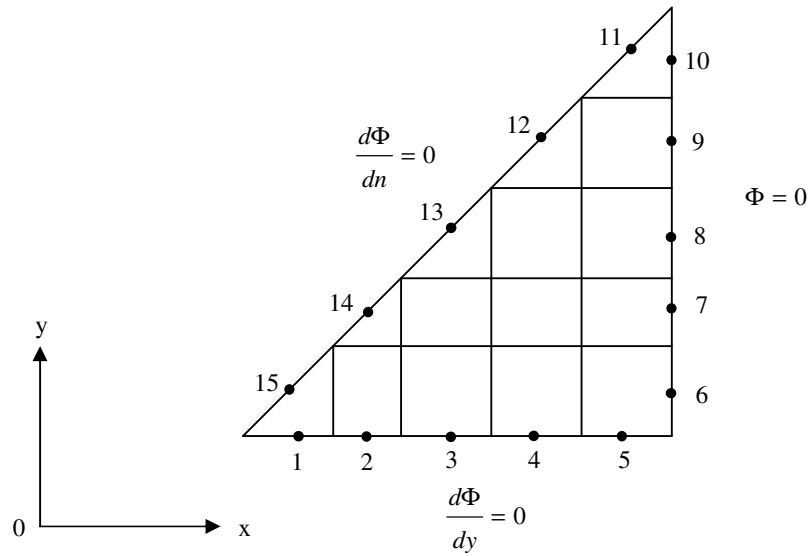
denklemi elde edilir.

$$\underline{\underline{B}} = (\underline{\underline{T}}\underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{P}} + \underline{\underline{R}}) \quad (4.5)$$

tanımı ile (4.4) denklemi,

$$\underline{\underline{B}}\tilde{\Phi} = k_{\text{etk}} \tilde{\Phi} \quad (4.6)$$

Tek gruplu nükleer sistemin, kenar uzunluğu 100 (cm) olan bir kare alınmış ve simetriden faydalanılarak karenin sadece sekizde birlik ikizkenar dik üçgen kısmı ayrılaştırılmıştır. İkizkenar dik üçgenin bir kenarı sırası ile 5, 10, 20 ve 40'a bölünerek N_1 , N_2 , N_3 ve N_4 olarak isimlendirilen dört ayrı ızgara yapısı kullanılmıştır. Tek gruplu nötron difüzyon yetkinlik özdeğer problemi için N_1 ızgara yapısı örneği Şekil 4.2'de ve tek gruplu nükleer sabitleri Tablo 4.2'de verilmiştir.



Şekil 4.2: Tek gruplu nötron difüzyon yetkinlik özdeğer problemi için çözümlenen 1/8'lik geometrinin sabit sınır elemanları ile ayrıklaştırılması

Tablo 4.2: Tek gruplu yetkinlik özdeğer problemi için nükleer sabitler

$D(cm)$	1.77764
$\Sigma_f(cm^{-1})$	0.0104869
$\nu\Sigma_f(cm^{-1})$	0.0262173
$\Sigma_a(cm^{-1})$	0.0143676
$L(cm)$	11.1232012
$\omega_f(joul)$	3.2042×10^{-11}
$P(Watt.cm^{-1})$	32000

Tek gruplu nötron difüzyon teorisi yetkinlik özdeğer probleminin analitik çözümü EK E’de verilmiştir ve $a=100$ (cm) için $k_{eff}=1.46657782$ olarak hesaplanmıştır.

Chebyshev polinomsal hızlandırmasının uygulanabilirliğinin tespit edilmesi amacıyla

$$\underline{\underline{B}}\underline{\underline{\Phi}}_i = k_i \underline{\underline{\Phi}}_i$$

denklemindeki $\underline{\underline{B}}$ matrisinin özdeğerlerinin gerçel ve pozitif olduğu gösterilsin. Bu amaçla BMG ve/veya BMGL programlarının ürettiği $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{P}}$, $\underline{\underline{T}}$ ve $\underline{\underline{R}}$ matrisleri bir diske yazdırıldı. Bu matrisler MATHEMATICA programına aktararak eşitlik (4.5)’te verilen $\underline{\underline{B}}$ matrisi oluşturuldu. $\underline{\underline{B}}$ matrisinin dolu ve simetrik olmayan bir yapıda olduğu görüldü. $\underline{\underline{B}}$ matrisinin $N1$ ızgarası için MATHEMATICA programında hesaplanan özdeğerleri aşağıda sunulmuştur.

$$k_i = \{1.45624, 0.725562, 0.479504, 0.314095, 0.242842, 0.170018, 0.152014, \\ 0.125302, 0.0979662, 0.0779552, 0.0691879, 0.0500436, 0.0418231, \\ 0.0183741, 0.0123523, 0.00194851, 4.00932 \cdot 10^{-17}, 0., 0., 0., 0.\}$$

Görüldüğü gibi $N1$ ızgarası için hesaplanan tüm özdeğerler gerçel ve pozitifdir. En büyük özdeğere karşılık gelen özvektör ise,

$$\underline{\underline{\Phi}}_1 = \{0.416488, 0.396161, 0.336763, 0.244119, 0.128056, 0.0327058, 0.377873, \\ 0.323277, 0.234453, 0.123314, 0., 0.277602, 0.201709, 0.106066, 0., \\ 0.154018, 0.0790456, 0., 0.0514954, 0., 0.00552621\}$$

şeklinde bulunmuştur. En büyük özdeğere karşılık gelen özvektörün pozitif olduğu görülmektedir. Aynı problem, $N2$ ve $N3$ ızgaraları için de koşturulmuş ve tüm özdeğerler hesaplanmıştır. $N4$ ızgarası için MATHEMATICA bellek sorunu

nedeniyle hesaplayamamıştır. Farklı ızgaralar için elde edilen sonuçlarda, tüm özdeğerlerin gerçel ve pozitif olduğu görülmüştür. Bu veriler Chebyshev polinomsal hızlandırmasının sınır elemanları yöntemine uygulanabileceğini göstermektedir.

MATHEMATICA programı yardımıyla, $N1$, $N2$ ve $N3$ ızgaraları için hesaplanan özdeğerler kullanılarak bir dominans oranı hesaplanmıştır. Dominans oranı,

$$\rho = \frac{k_2}{k_1}$$

en büyük ikinci özdeğerin en büyük özdeğere oranı şeklinde tanımlıdır. Her bir ızgara için hesaplanan gerçek dominans oranları Tablo 4.3'te verilmiştir.

Tablo 4.3: Tek enerji grubu probleminin sabit sınır elemanları ile farklı ızgaralar için hesaplanan dominans oranları

Izgara	ρ dominans oranı
$N1$	$\frac{0.725562}{1.45624} = 0.498243$
$N2$	$\frac{0.79975}{1.46379} = 0.546356$
$N3$	$\frac{0.816508}{1.46577} = 0.557051$

Geliştirilen BMG ve BMGL programları ilk dominans oranları tahminlerini kendileri ürettikleri gibi dışarıdan dominans oranı girdilenmesine de imkân vermektedir. Ele alınan problemlerin çözümlemesinde her iki durum da ayrı ayrı incelenecektir.

4.1.1. Tek gruplu problemin sabit sınır elemanları ile çözümü

Bu bölümde, 4.1'de ele alınan tek gruplu problem, sabit sınır elemanları metodunu kullanan hızlandırmaz BMG ve Chebyshev polinomsal hızlandırılmalı BMGCH programları ile çözülmüştür. BMGCH programı ilk dominans oranı öngörüsünü kendisi ürettiği seçenikle ((3.37-39) algoritması) $N1$, $N2$, $N3$ ve $N4$ ızgaraları için koşturulmuştur. Yine aynı ızgaralar için BMG programı da koşturulmuş ve sistemin etkin çoğaltma katsayısı ile akı dağılımları hesaplanmıştır. Her iki programda da etkin çoğaltma katsayısı için $\varepsilon = 10^{-6}$ yakınsama ölçütü gerçekleşene kadar

iterasyona devam edilmiştir. BMG ve BMGCH programlarından elde edilen sonuçlar Tablo 4.4’te verilmiştir.

Tablo 4.4: Tek gruplu difüzyon teorisi yetkinlik özdeğer probleminin sabit sınır elemanları ile sayısal çözüm sonuçları

Program adı	k_{etk}	k_{etk} % hata	is	isky	ρ dominans oranı	ρ % hata	Δ / L	Izgara
BMG	1.45623746	0.7051	18	33.33			0.8990	N1
BMGCH	1.45623871	0.7050	12		0.613091	23.051		
BMG	1.46378827	0.1902	20	30.00			0.4495	N2
BMGCH	1.46378981	0.1901	14		0.704731	28.988		
BMG	1.46576813	0.0552	21	28.57			0.2248	N3
BMGCH	1.46576930	0.0551	15		0.764023	37.155		
BMG	1.46629330	0.0194	21	19.05			0.1124	N4
BMGCH	1.46629460	0.0193	17		0.801044			

Tablo 4.4’te görüldüğü gibi, farklı ızgara yapısına göre BMG ve BMGCH programından elde edilen k_{etk} özdeğer sonuçları hemen hemen aynı değerleri vermektedir. Izgara inceldikçe k_{etk} yüzde hataları giderek azalmakta ve analitik sonuca yakınsamaktadır. Tablo 4.3’te MATHEMATICA’da hesaplanan gerçek dominans oranları, ρ , kullanılarak BMGCH programının hesapladığı ρ öngörülerindeki yüzde hatalar da Tablo 4.4’te sunulmuştur. Tablo 4.4 incelendiğinde BMGCH programının ρ tahminlerini yeterli doğrulukta hesaplayamadığı gözlenmektedir. Izgara inceldikçe ρ tahminlerindeki yüzde hatalar artmaktadır.

Tablo 4.4’te görüldüğü gibi Chebyshev polinomsal hızlandırması tüm ızgaralarda iterasyon sayılarında bir azalma göstermektedir. Yani hızlandırmasız BMG programına göre daha az iterasyon yaparak daha hızlı çözüm vermektedir. Tablo 4.4’ün beşinci sütununda ise tüm ızgaralar için iterasyon sayısı kazanç yüzdeleri verilmektedir. Gözlendiği gibi bu kazanç en düşük N4 ızgarasında %19, en yüksek N1 ızgarasında ise %33 olmaktadır. Dominans oranı büyüdükçe iterasyon sayısı kazanç yüzdesinin artması beklenirdi, fakat bu durum programın dominans oranı tahminlerini özellikle büyük ızgaralarda gerçek değerinden oldukça uzak hesaplaması nedeniyle görülmemektedir. Izgara inceldikçe dominans oranlarının arttığı Tablo 4.3’te gözlemlenmektedir.

Tablo 4.3'te verilen gerçek ρ dominans oranı değerleri BMGCH programına dışarıdan girilerek yeni k_{etk} değerleri hesaplatılmış ve elde edilen sonuçlar Tablo 4.5'te verilmiştir.

Tablo 4.5: Tek enerji grubu problemi için gerçek dominans oranının BMGCH programına dışarıdan girilmesi sonucunda elde edilen sayısal sonuçlar

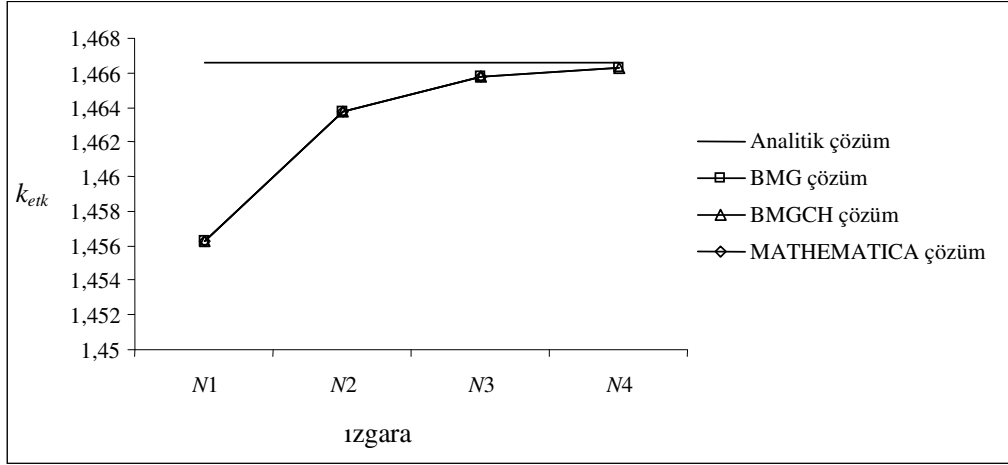
Program adı	k_{etk}	k_{etk} % hata	is	isky	Gerçek dominans Oranı	Izgara
BMG	1.45623746	0.7051	18	38.89	0.498243	N1
BMGCH	1.45623861	0.7050	11			
BMG	1.46378827	0.1902	20	40.00	0.546356	N2
BMGCH	1.46378978	0.1901	12			
BMG	1.46576813	0.0552	21	42.86	0.557051	N3
BMGCH	1.46576931	0.0551	12			

Tablo 4.5'te görüldüğü gibi, MATHEMATICA programında hesaplanan gerçek dominans oranları, BMGCH programına dışarıdan girildiğinde hemen hemen aynı k_{etk} değerleri elde edilmektedir. Izgara sayısı arttıkça k_{etk} 'deki yüzde hatalar da daha önce gözlendiği gibi düşmektedir.

MATHEMATICA programından elde edilen gerçek dominans oranı değerleri BMGCH programına dışarıdan girildiğinde, elde edilen iterasyon sayısı kazanç yüzdeleri, programın hesapladığı dominans oranı tahminlerinin kullanıldığı duruma göre çok daha etkin olmaktadır. Ayrıca beklendiği gibi dominans oranı arttıkça iterasyon sayısı kazanç yüzdeleri de artmaktadır.

Tablo 4.4-5'ten tek gruplu difüzyon teorisi yetkinlik özdeğer problemi için Chebyshev polinomsal hızlandırması kullanılması durumunda ızgara sayıları arttıkça iterasyon sayılarında önemli azalmalar sağladığı ve tek gruplu teori için hızlandırmanın gerekliliği açıkça görülmektedir.

Tablo 4.4-5'te verilen sonuçlar için Şekil 4.3'te, her iki programın farklı ızgara sayılarına göre sayısal k_{etk} değerleri ile analitik k_{etk} değerinin karşılaştırılması verilmiştir.



Şekil 4.3: Tablo 4.4-5'te verilen sayısal k_{etik} değerleri ile analitik k_{etik} değerinin karşılaştırılması

Şekil 4.3'te görüldüğü gibi BMG, BMGCH ve MATHEMATICA'da hesaplanan gerçek ρ dominans oranının BMGCH programına dışarıdan girilmesi sonucu elde edilen k_{etik} değerleri, ızgara inceldikçe analitik k_{etik} değerine yaklaşmaktadır.

Noktasal akı hesabı Ek E'de verildiği gibi,

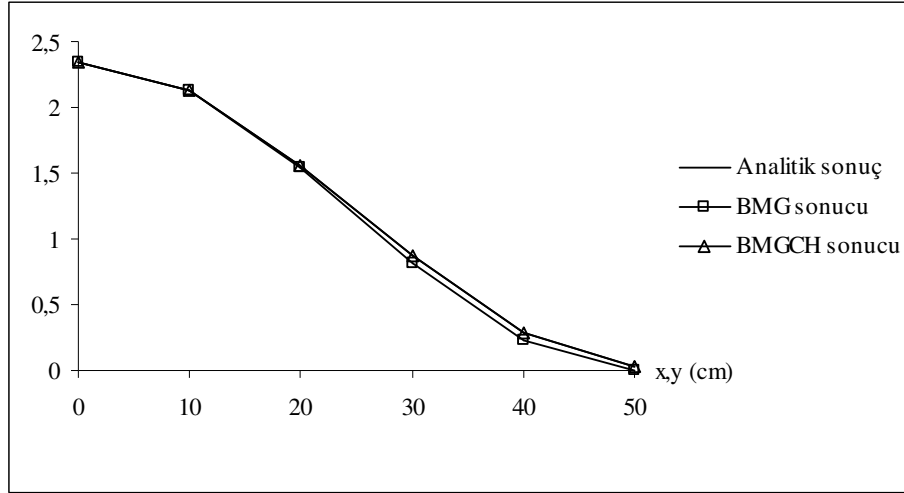
$$\Phi(x, y) = \frac{P}{4\sum_f w_f} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{a}y\right) \quad (4.7)$$

şeklinde hesaplanır ve Tablo 4.2'de verilen nükleer sabitlere göre,

$$\Phi(0,0)=2.34976 \times 10^{13} \text{ cm}^{-2}\text{sn}^{-1}$$

analitik sonucu bulunur.

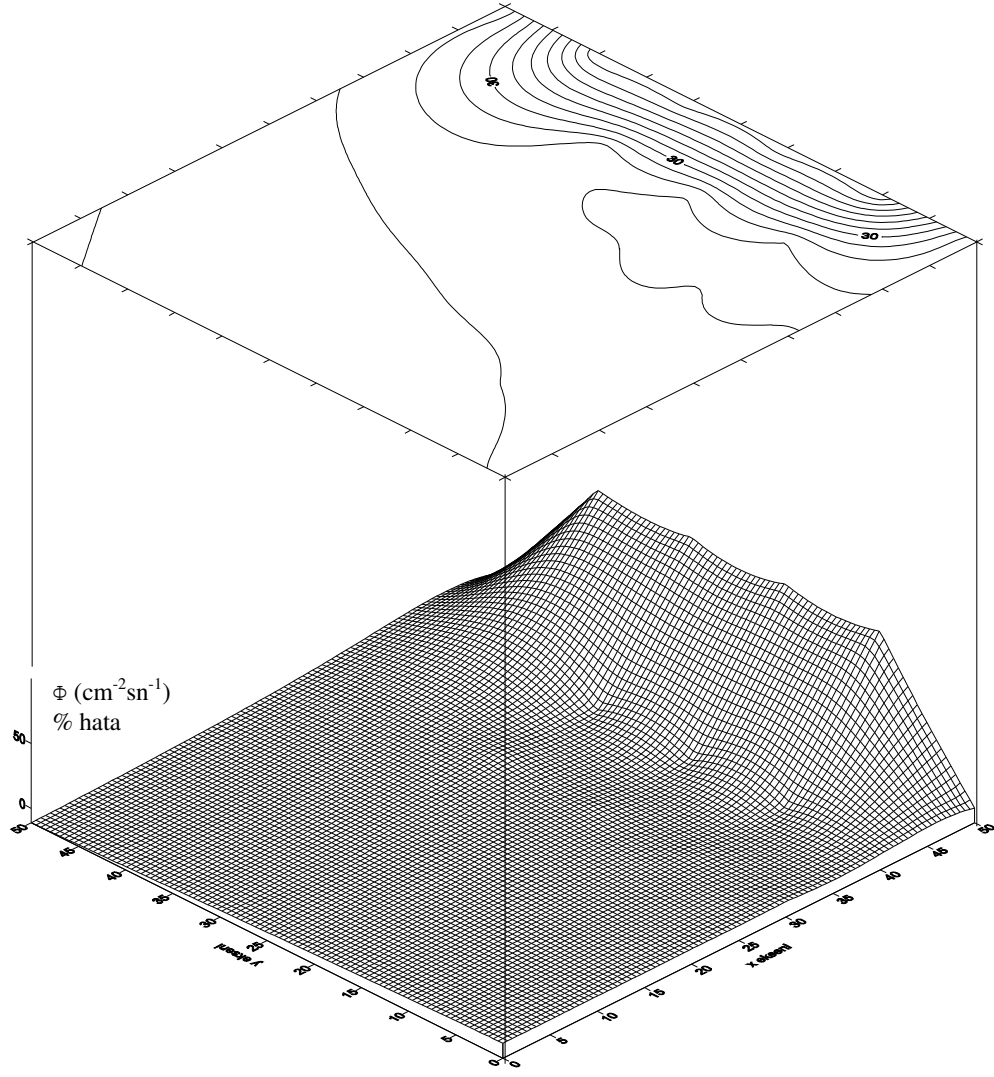
Şekil 4.4'te N1 ızgarası için BMG ve BMGCH programlarından elde edilen köşegen akı dağılımları ile analitik değerlerinin karşılaştırılması verilmiştir.



Şekil 4.4: *N1* ızgarası için BMG-BMGCH programlarından elde edilen köşegen akı dağılımlarının analitik akı dağılımları ile karşılaştırılması

Şekil 4.4'te görüldüğü gibi *N1* ızgarası için sayısal sonuç ile analitik sonuç hemen hemen çakışmaktadır.

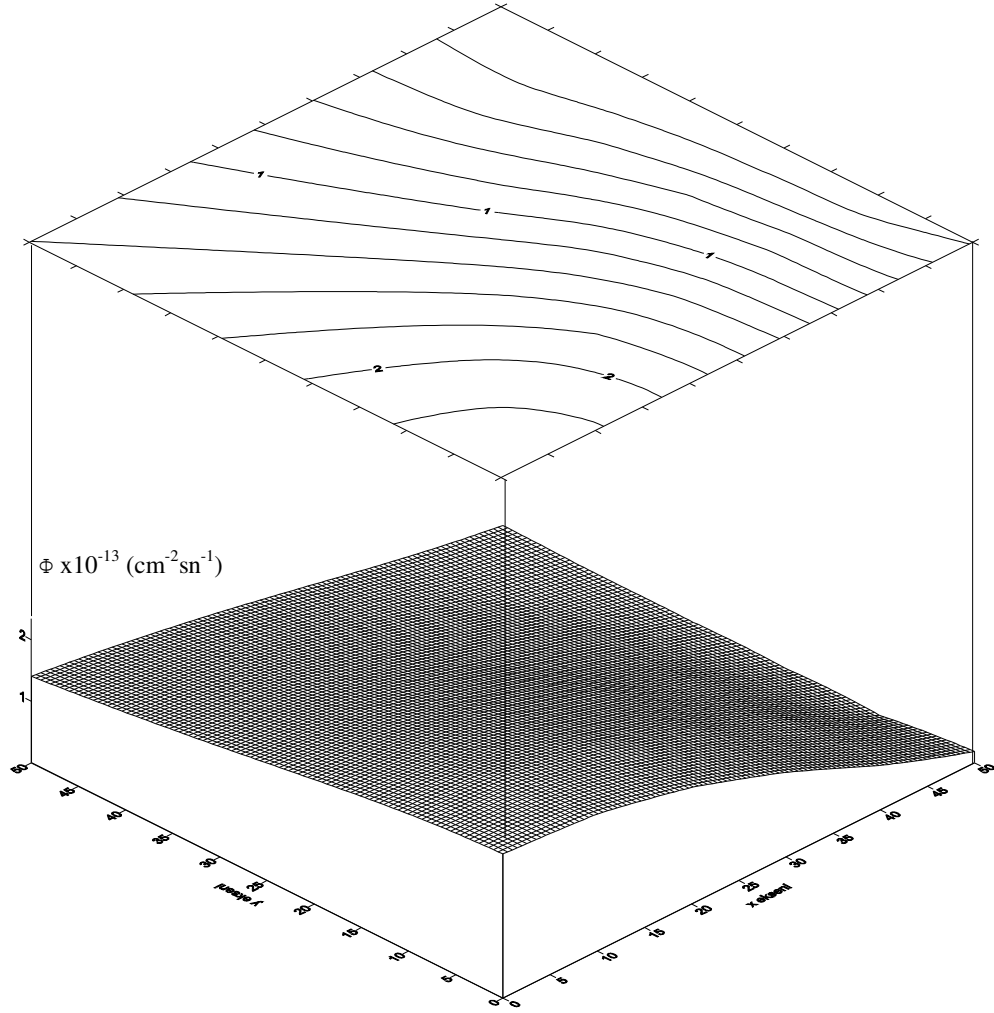
Şekil 4.5'te BMGCH programından *N1* ızgarası için elde edilen akı dağılımlarının yüzdesel hatalarının 2 ve 3 boyutlu grafikleri verilmiştir.



Şekil 4.5: *N1* ızgarası için BMGCH programından elde edilen akı dağılımlarının yüzdesel hatalarının 2-3 boyutlu gösterimi

Şekil 4.5'te görüldüğü gibi, boşluk sınır şartının uygulandığı kenarda akı dağılımlarının yüzdesel hataları giderek büyümektedir.

Şekil 4.6'da *N1* ızgarası için BMGCH programı sonucu elde edilen akı dağılımlarının 2 ve 3 boyutlu grafikleri verilmiştir.



Şekil 4.6: N1 ızgarası için BMGCH programından elde edilen akı dağılımlarının 2-3 boyutlu gösterimi

Şekil 4.6’da iki ve üç boyutta 1/8’lik kosinüs eğrileri görülmektedir.

BMG ve BMGCH programlarının farklı ızgara sayılarına göre ortalama kare hatanın karekökü Tablo 4.6’da verilmiştir.

Tablo 4.6: $a=100$ (cm) örneği için BMG-BMGCH ortalama kare hatanın karekökü

okh-ızgara	BMG	BMGCH
okh- $N1$	0.11719328	0.11751745
okh- $N2$	0.05035811	0.05035098
okh- $N3$	0.01985640	0.01985640
okh- $N4$	0.00744010	0.00744010

Tablo 4.6’da görüldüğü gibi, ızgara inceldikçe ortalama kare hatanın karekökü azalmaktadır.

4.1.2. Tek gruplu problemin lineer sınır elemanları ile çözümü

Eşitlik (4.6)’da verilen tek gruplu özdeğer-özvektör probleminin lineer sınır elemanları kullanılması durumunda MATHEMATICA’da çözülmesi sonucu elde edilen gerçek ρ dominans oranları Tablo 4.7’de verilmiştir.

Tablo 4.7: Tek enerji grubu probleminin lineer sınır elemanları ile farklı ızgaralar için hesaplanan dominans oranları

Izgara	ρ dominans oranı
$N1$	$\frac{0.746432}{1.43964} = 0.518485$
$N2$	$\frac{0.799539}{1.45907} = 0.547979$
$N3$	$\frac{0.815572}{1.46458} = 0.556864$

Tek gruplu problem için lineer sınır elemanları metodunu kullanan hızlandırmasız BMGL ve Chebyshev polinomsal hızlandırılmış BMGLCH program sonuçları Tablo 4.8’de verilmiştir.

Tablo 4.8: Tek gruplu difüzyon teorisi yetkinlik özdeğer probleminin lineer sınır elemanları ile sayısal çözüm sonuçları

Program adı	k_{etk}	k_{etk} % hata	is	isky	ρ dominans oranı	ρ % hata	Izgara
BMGL	1.43963872	1.83687	19	36.84			N1
BMGLCH	1.43963977	1.8368	12		0.521993	0.67204	
BMGL	1.45906835	0.51204	20	40.00			N2
BMGLCH	1.45906989	0.51194	12		0.615529	12.3271	
BMGL	1.46458106	0.13615	21	33.33			N3
BMGLCH	1.46458225	0.13607	14		0.703434	26.3206	
BMGL	1.46605905	0.03537	21	28.57			N4
BMGLCH	1.46606032	0.03529	15		0.759635		

Tablo 4.8’de görüldüğü gibi, farklı ızgara yapılarına göre BMGL ve BMGLCH programından elde edilen k_{etk} özdeğer sonuçları yaklaşık aynı değerleri vermekle birlikte, Chebyshev polinomsal hızlandırması yapan BMGLCH programı, hızlandırmaz program BMGL’ye göre daha hızlı, yani daha az iterasyon yaparak çözüm vermektedir. Ele alınan problemde Chebyshev polinomsal hızlandırması ile % 29-37 civarında iterasyon kazancı sağlanmaktadır.

Lineer sınır elemanı kullanılması durumunda, Tablo 4.4’te verilen sabit sınır elemanı kullanan program sonuçlarına göre iterasyon sayısı kazanç yüzdeleri daha yüksek ve dominans oranları daha küçük hata ile tahmin edilmektedir. Tablo 4.8’de verilen dominans oranı % hataları, Tablo 4.7’de verilen gerçek dominans oranlarından hesaplanmıştır.

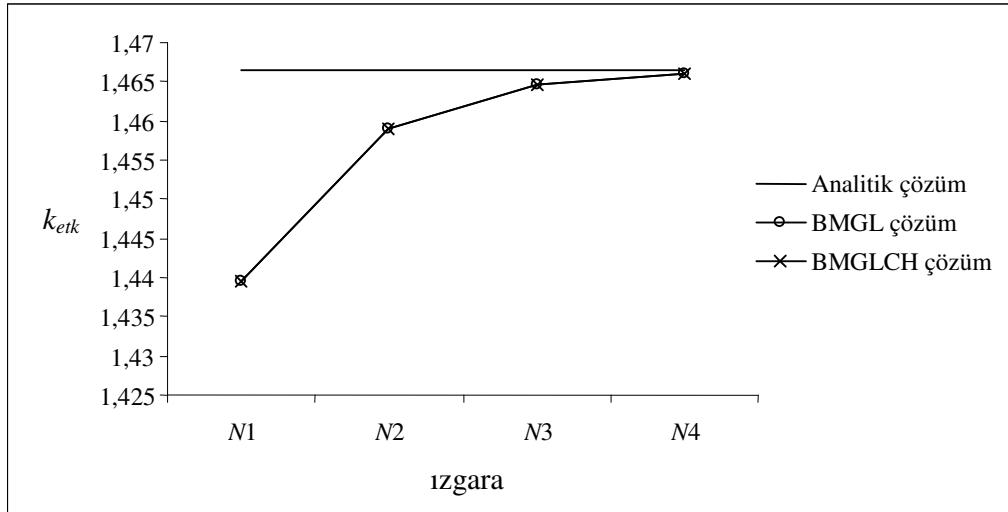
Tablo 4.7’de verilen gerçek dominans oranlarının BMGLCH programına dışarıdan girilmesi sonucu elde edilen sonuçlar Tablo 4.9’da verilmiştir.

Tablo 4.9: Tek enerji grubu problemi için gerçek dominans oranının BMGLCH programına dışarıdan girdirilmesi sonucunda elde edilen sayısal sonuçlar

Program adı	k_{etk}	k_{etk} % hata	is	isky	Gerçek dominans oranı	Izgara
BMGL	1.43963872	1.83687	19	42.11		N1
BMGLCH	1.43963972	1.8368	11		0.518485	
BMGL	1.45906835	0.51204	20	40.00		N2
BMGLCH	1.45906992	0.51193	12		0.547979	
BMGL	1.46458106	0.13615	21	42.86		N3
BMGLCH	1.46458223	0.13607	12		0.556864	

Tablo 4.9’da görüldüğü gibi, k_{etk} değerleri ızgara incelidikçe analitik sonuca yakınsamaktadır. Gerçek dominans oranlarının BMGLCH programına dışarıdan girdirilmesi sonucu elde edilen iterasyon sayısı kazanç yüzdeleri, sabit ve lineer eleman kullanılması durumunda N2 ve N3 ızgaraları için aynı değerleri vermektedir. N1 ızgarası için ise sabit elemanlara göre daha iyi iterasyon kazancı sağlanmaktadır.

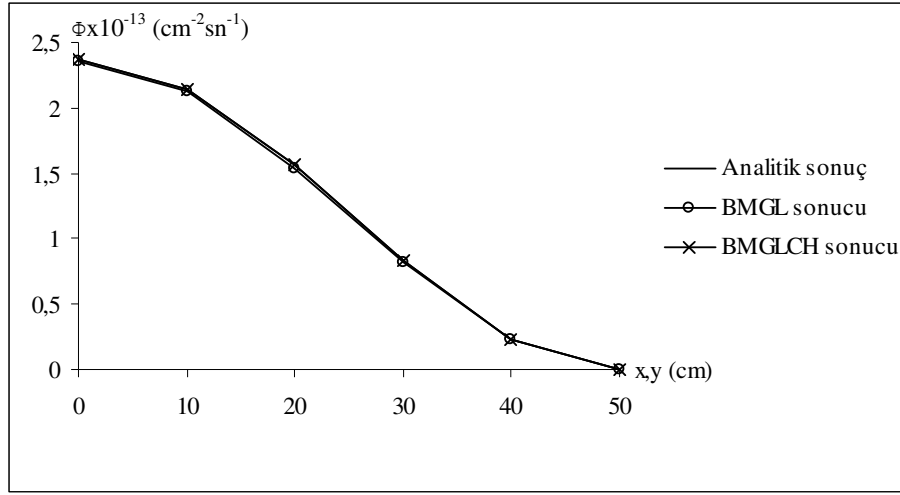
Tablo 4.8’de verilen k_{etk} sonuçları ile analitik k_{etk} değerinin karşılaştırılması Şekil 4.7’de verilmiştir.



Şekil 4.7: Tablo 4.8’de verilen sayısal k_{etk} değerleri ile analitik k_{etk} değerinin karşılaştırılması

Şekil 4.7’den BMGL ve BMGLCH programı sonucu elde edilen k_{etk} değerlerinin ızgara incelidikçe analitik sonuca yakınsadığı görülmektedir.

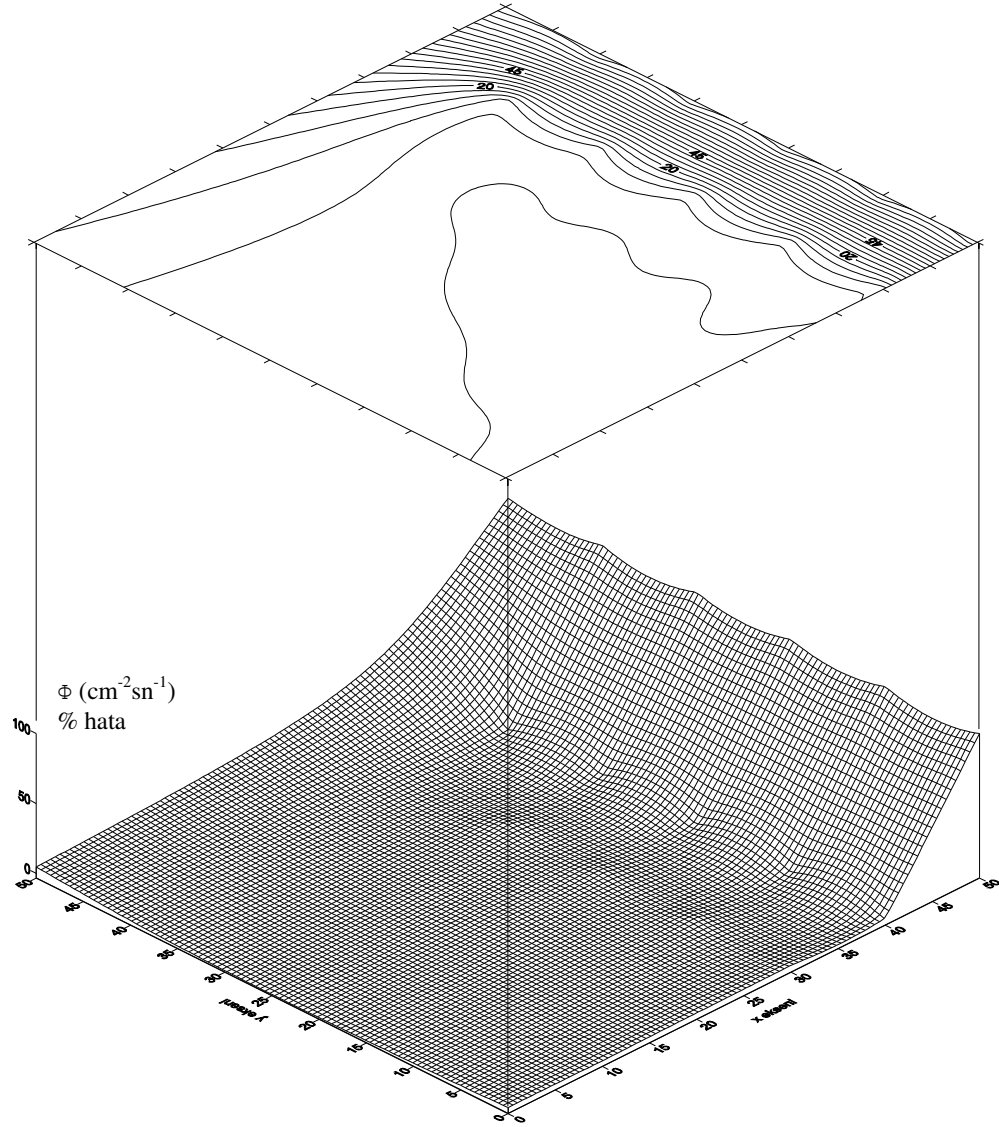
Şekil 4.8’de *N1* ızgarası için BMGL ve BMGLCH programlarından elde edilen köşegen akı dağılımları ile analitik akı dağılımlarının karşılaştırılması verilmiştir.



Şekil 4.8: *N1* ızgarası için BMGL-BMGLCH programlarından elde edilen köşegen akı dağılımları ile analitik akı dağılımlarının karşılaştırılması

Şekil 4.8’de görüldüğü gibi lineer sınır elemanları kullanılması durumunda *N1* ızgarası için sayısal sonuçlar ile analitik sonuçlar çakışmakta ve eğriler birbirlerinden ayırt edilememektedir.

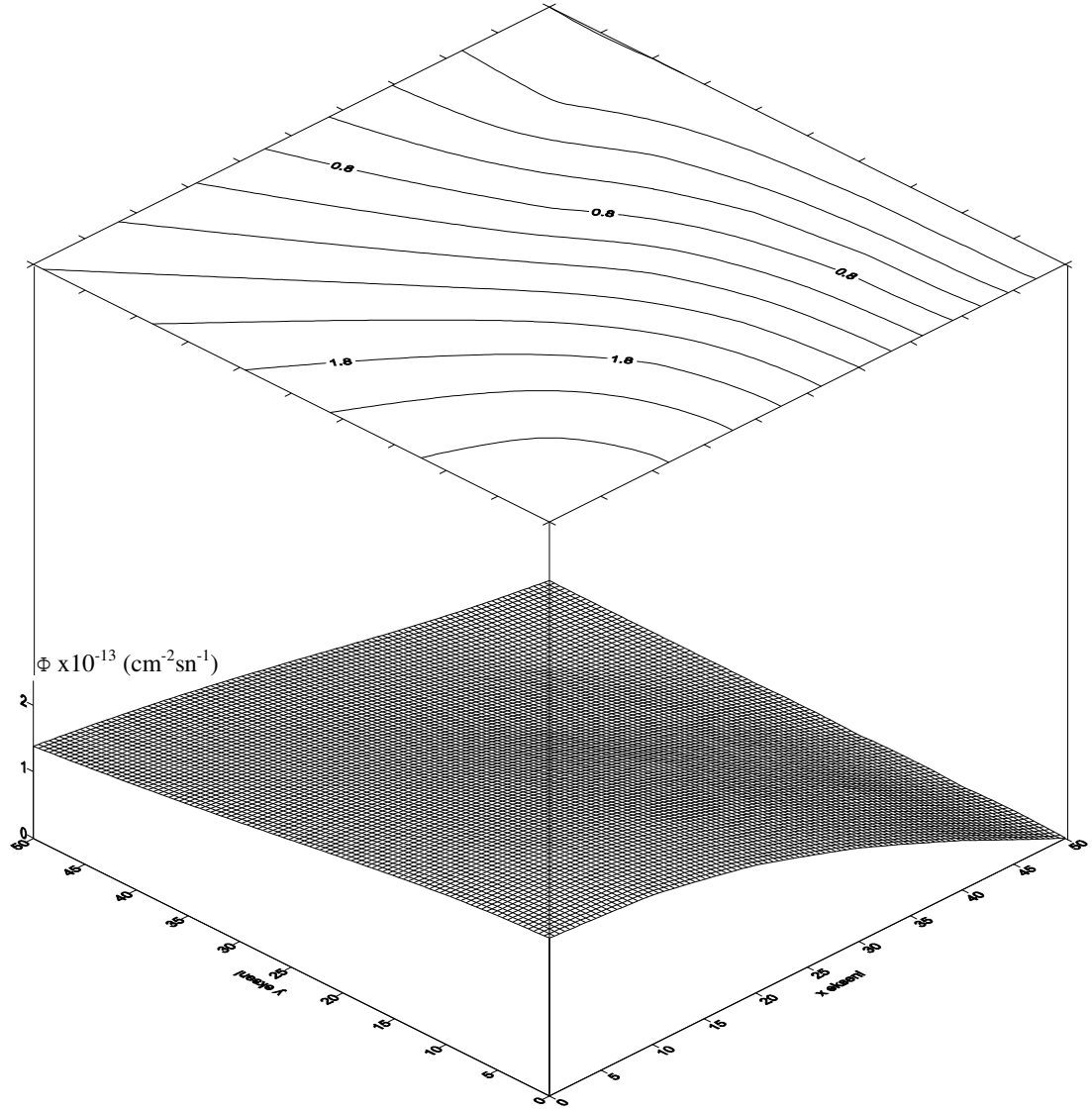
Şekil 4.9’da BMGLCH programından *N1* ızgarası için elde edilen akı dağılımlarının yüzdesel hatalarının 2 ve 3 boyutlu grafikleri verilmiştir.



Şekil 4.9: *N1* ızgarası için BMGLCH programından elde edilen akı dağılımlarının yüzdesel hatalarının 2-3 boyutlu gösterimi

Şekil 4.9'da görüldüğü gibi, boşluk sınır şartının uygulandığı kenarda akı dağılımlarının yüzdesel hataları giderek büyümektedir.

Şekil 4.10'da *N1* ızgarası için BMGLCH programı sonucu elde edilen akı dağılımlarının 2 ve 3 boyutlu grafikleri verilmiştir.



Şekil 4.10: *N1* ızgarası için BMGLCH programından elde edilen akı dağılımlarının 2-3 boyutlu gösterimi

Şekil 4.10'da iki ve üç boyutta 1/8'lik kosinüs eğrileri görülmektedir.

Tablo 4.10'da, BMGL ve BMGLCH programlarının farklı ızgara sayılarına göre ortalama kare hatanın karekökü verilmiştir.

Tablo 4.10: a=100 (cm) örneği için BMGL-BMGLCH ortalama kare hatanın karekökü

okh-ızgara	BMGL	BMGLCH
okh-N1	0.11669452	0.11669451
okh-N2	0.05025853	0.05025852
okh-N3	0.01983935	0.01983935
okh-N4	0.00743715	0.00743715

Tablo 4.10’da görüldüğü gibi ızgara inceldikçe ortalama kare hataları azalmaktadır.

4.2. İki Gruplu Nötron Difüzyon Teorisi Yetkinlik Özdeğer Problemi

Eşitlik (2.73)’te verilen tanım ile (2.99) ve (2.105) denklemleri iki gruplu nötron difüzyon yetkinlik özdeğer problemi için önce birinci grup denklemleri ele alınarak çözüme başlanır. Bu durumda birinci grup denklemleri,

$$\underline{A}_{\underline{1}} \underline{u}_1 = \frac{w_1}{k_{\text{etk}}} \underline{P}_{\underline{1}} (\nu_1 \Sigma_{f1} \tilde{\varphi}_1 + \nu_2 \Sigma_{f2} \tilde{\varphi}_2) \quad (4.8)$$

$$\tilde{\varphi}_1 = \underline{T}_{\underline{1}} \underline{u}_1 + \frac{w_1}{k_{\text{etk}}} \underline{R}_{\underline{1}} (\nu_1 \Sigma_{f1} \tilde{\varphi}_1 + \nu_2 \Sigma_{f2} \tilde{\varphi}_2) \quad (4.9)$$

şeklinde yazılır. $g=1$ için (3.3)’te verildiği gibi,

$$\begin{aligned} w_1 \nu_1 \Sigma_{f1} \underline{P}_{\underline{1}} &= \underline{P}_{\underline{11}} & \text{ve} & & w_1 \nu_1 \Sigma_{f1} \underline{R}_{\underline{1}} &= \underline{R}_{\underline{11}} \\ w_1 \nu_2 \Sigma_{f2} \underline{P}_{\underline{1}} &= \underline{P}_{\underline{12}} & & & w_1 \nu_2 \Sigma_{f2} \underline{R}_{\underline{1}} &= \underline{R}_{\underline{12}} \end{aligned}$$

tanımları ile eşitlik (4.8-9),

$$\underline{A}_{\underline{1}} \underline{u}_1 = \frac{1}{k_{\text{etk}}} (\underline{P}_{\underline{11}} \tilde{\varphi}_1 + \underline{P}_{\underline{12}} \tilde{\varphi}_2) \quad (4.10)$$

$$\tilde{\varphi}_1 = \underline{T}_{\underline{1}} \underline{u}_1 + \frac{1}{k_{\text{etk}}} (\underline{R}_{\underline{11}} \tilde{\varphi}_1 + \underline{R}_{\underline{12}} \tilde{\varphi}_2) \quad (4.11)$$

şeklinde olur. Eşitlik (4.10)’da u_1 ’in yalnız bırakılıp, (4.11) denkleminde yerine yerleştirilmesiyle,

$$\tilde{\varphi}_{\underline{1}} = \frac{1}{k_{etk}} \left\{ (T_{\underline{1}\underline{1}} A_{\underline{1}\underline{1}}^{-1} P_{\underline{1}\underline{1}} + R_{\underline{1}\underline{1}}) \tilde{\varphi}_{\underline{1}} + (T_{\underline{1}\underline{1}} A_{\underline{1}\underline{1}}^{-1} P_{\underline{1}\underline{2}} + R_{\underline{1}\underline{2}}) \tilde{\varphi}_{\underline{2}} \right\} \quad (4.12)$$

ifadesi elde edilir.

$$\begin{aligned} B_{\underline{1}\underline{1}} &= (T_{\underline{1}\underline{1}} A_{\underline{1}\underline{1}}^{-1} P_{\underline{1}\underline{1}} + R_{\underline{1}\underline{1}}) \\ B_{\underline{1}\underline{2}} &= (T_{\underline{1}\underline{1}} A_{\underline{1}\underline{1}}^{-1} P_{\underline{1}\underline{2}} + R_{\underline{1}\underline{2}}) \end{aligned}$$

tanımlarının yapılması ile eşitlik (4.12)'den,

$$k_{etk} \tilde{\varphi}_{\underline{1}} = B_{\underline{1}\underline{1}} \tilde{\varphi}_{\underline{1}} + B_{\underline{1}\underline{2}} \tilde{\varphi}_{\underline{2}} \quad (4.13)$$

şeklinde birinci grup denklemini elde edilir.

Yine eşitlik (2.73)'te verilen tanım ile (2.99) ve (2.105) denklemlerinden ikinci grup denklemleri,

$$\underline{A}_{\underline{2}\underline{2}} \underline{u}_{\underline{2}} = \frac{w_2}{k_{etk}} P_{\underline{2}\underline{2}} (\nu_1 \Sigma_{f1} \tilde{\varphi}_{\underline{1}} + \nu_2 \Sigma_{f2} \tilde{\varphi}_{\underline{2}}) \quad (4.14)$$

$$\tilde{\varphi}_{\underline{2}} - s_{12} \tilde{\varphi}_{\underline{1}} = T_{\underline{2}\underline{2}} \underline{u}_{\underline{2}} + \frac{w_2}{k_{etk}} R_{\underline{2}\underline{2}} (\nu_1 \Sigma_{f1} \tilde{\varphi}_{\underline{1}} + \nu_2 \Sigma_{f2} \tilde{\varphi}_{\underline{2}}) \quad (4.15)$$

şeklinde yazılır. Burada,

$$s_{12} = \frac{\Sigma_{s,2\leftarrow 1}}{(k_2^2 - k_1^2) D_2}$$

şeklinde tanımlıdır.

$g=2$ için (3.3)'te verildiği gibi,

$$\begin{aligned} w_2 \nu_1 \Sigma_{f1} P_{\underline{2}\underline{2}} &= P_{\underline{2}\underline{21}} & \text{ve} & & w_2 \nu_1 \Sigma_{f1} R_{\underline{2}\underline{2}} &= R_{\underline{2}\underline{21}} \\ w_2 \nu_2 \Sigma_{f2} P_{\underline{2}\underline{2}} &= P_{\underline{2}\underline{22}} & & & w_2 \nu_2 \Sigma_{f2} R_{\underline{2}\underline{2}} &= R_{\underline{2}\underline{22}} \end{aligned}$$

tanımlarının yapılması ve eşitlik (4.14)'te u_2 'nin yalnız bırakılması ile (4.15) eşitliği,

$$\tilde{\varphi}_{\underline{2}} - s_{12} \tilde{\varphi}_{\underline{1}} = \frac{1}{k_{etk}} \left\{ (T_{\underline{2}\underline{2}} A_{\underline{2}\underline{2}}^{-1} P_{\underline{2}\underline{21}} + R_{\underline{2}\underline{21}}) \tilde{\varphi}_{\underline{1}} + (T_{\underline{2}\underline{2}} A_{\underline{2}\underline{2}}^{-1} P_{\underline{2}\underline{22}} + R_{\underline{2}\underline{22}}) \tilde{\varphi}_{\underline{2}} \right\} \quad (4.16)$$

şeklinde olur.

$$\begin{aligned}\underline{\underline{B}}_{21} &= (\underline{\underline{T}}_2 \underline{\underline{A}}_2^{-1} \underline{\underline{P}}_{21} + \underline{\underline{R}}_{21}) \\ \underline{\underline{B}}_{22} &= (\underline{\underline{T}}_2 \underline{\underline{A}}_2^{-1} \underline{\underline{P}}_{22} + \underline{\underline{R}}_{22})\end{aligned}$$

tanımlarının (4.16) eşitliğinde yerine yerleştirilmesi ile,

$$\underline{\underline{\tilde{\varphi}}}_2 - s_{12} \underline{\underline{\tilde{\varphi}}}_1 = \frac{1}{k_{etk}} (\underline{\underline{B}}_{21} \underline{\underline{\tilde{\varphi}}}_1 + \underline{\underline{B}}_{22} \underline{\underline{\tilde{\varphi}}}_2) \quad (4.17)$$

ifadesi elde edilir. (4.13) ve (4.17) eşitlikleri matrisyel biçiminde,

$$k_{etk} \begin{bmatrix} \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{0}} \\ -s_{12} \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{I}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\tilde{\varphi}}}_1 \\ \underline{\underline{\tilde{\varphi}}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{B}}_{11} & \underline{\underline{B}}_{12} \\ \underline{\underline{B}}_{21} & \underline{\underline{B}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\tilde{\varphi}}}_1 \\ \underline{\underline{\tilde{\varphi}}}_2 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

şeklinde yazılabilir.

$$\underline{\underline{V}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{0}} \\ -s_{12} \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{I}} \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\varphi}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\tilde{\varphi}}}_1 \\ \underline{\underline{\tilde{\varphi}}}_2 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{B}}_{11} & \underline{\underline{B}}_{12} \\ \underline{\underline{B}}_{21} & \underline{\underline{B}}_{22} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

burada $\underline{\underline{I}}$, birim matris ve $\underline{\underline{0}}$, sıfır matrisidir. Bu matrislerin boyutları $\underline{\underline{B}}_{gg}$, matrisleri ile aynı, yani (KxK) boyutundadırlar. (4.19)'da verilen tanımlar ile (4.18) matrisyel denklemi,

$$\begin{aligned}k_{etk} \underline{\underline{V}} \underline{\underline{\tilde{\varphi}}} &= \underline{\underline{B}} \underline{\underline{\tilde{\varphi}}} \\ k_{etk} \underline{\underline{\tilde{\varphi}}} &= \underline{\underline{V}}^{-1} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{\tilde{\varphi}}} \\ \underline{\underline{L}} &= \underline{\underline{V}}^{-1} \underline{\underline{B}} \\ k_{etk} \underline{\underline{\tilde{\varphi}}} &= \underline{\underline{L}} \underline{\underline{\tilde{\varphi}}}\end{aligned} \quad (4.20)$$

şeklinde olur. Burada $\underline{\underline{L}}$, 2x(KxK) boyutunda matristir. (4.20) açık bir biçimde,

$$k_{etk} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\tilde{\varphi}}}_1 \\ \underline{\underline{\tilde{\varphi}}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{B}}_{11} & \underline{\underline{B}}_{12} \\ s_{12} \underline{\underline{B}}_{11} + \underline{\underline{B}}_{21} & s_{12} \underline{\underline{B}}_{12} + \underline{\underline{B}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\tilde{\varphi}}}_1 \\ \underline{\underline{\tilde{\varphi}}}_2 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

şeklinde yazılabilir ve iki gruplu nötron difüzyon denklemleri için yetkinlik özdeğer-özvektör problemi MATHEMATICA programında çözülmeye hazır hale gelir.

İki gruplu nötron difüzyon yetkinlik özdeğer-özvektör problemi için, Şekil 4.1'deki gibi kenar uzunluğu 50 (cm) olan bir kare alınmış ve sistem simetrisinden yararlanılarak sistemin sağ üst oktantı ele alınmıştır. İki gruplu nötron difüzyon yetkinlik özdeğer-özvektör probleminin analitik çözümü EK E'de verilmiştir.

İki gruplu nötron difüzyon yetkinlik özdeğer-özvektör problemi için nükleer sabitler Tablo 4.11'de verilmiştir.

Tablo 4.11: İki gruplu yetkinlik özdeğer problemi için nükleer sabitler

<i>Grup Sabiti</i>	<i>1. Grup</i>	<i>2. Grup</i>
$D_g (cm)$	1.2245	1.2245
$\Sigma_{f,g} (cm^{-1})$	0.063	0.06776
$\nu_g \Sigma_{f,g} (cm^{-1})$	0.16695	0.172788
ν_g	2.65	2.55
$\Sigma_{r,g} (cm^{-1})$	0.13552	0.08228
$L_g (cm^{-1})$	3.0059219	3.8577338
$\omega_f (joul)$	3.2042×10^{-11}	
$P(Watt.cm^{-1})$	32000	
χ_g	0.575	0.425
$\Sigma_{s,2 \leftarrow 1}$		0.0676

Tablo 4.11'de verilen nükleer sabitlerine göre Ek E'den $k_{etk} = 1.962938$ analitik sonucu bulunmuştur.

Eşitlik (4.21)'de verilen iki enerji grubu için özdeğer-özvektör problemi MATHEMATICA programında çözülmüş, çözüm sonucu bulunan gerçek dominans oranları Tablo 4.12'de verilmiştir.

Tablo 4.12: İki enerji grubu probleminin sabit sınır elemanları ile farklı ızgaralar için hesaplanan dominans oranları

Izgara	ρ dominans oranı
N2	$\frac{1.3319}{1.9641} = 0.6781$
N3	$\frac{1.3566}{1.9630} = 0.6911$

4.2.1. İki gruplu problemin sabit sınır elemanları ile çözümü

Tablo 4.11’de verilen nükleer sabitler için iki gruplu problem, hızlandırmaz BMG ve Chebyshev polinomsal hızlandırmalı BMGCH programlarında koşturulduğunda elde edilen sonuçlar Tablo 4.13’te verilmiştir.

Tablo 4.13: İki gruplu difüzyon teorisi yetkinlik özdeğer probleminin sabit sınır elemanları ile sayısal çözüm sonuçları

Program adı	k_{etk}	k_{etk} % hata	is	isky	ρ dominans oranı	ρ % hata	Δ / L_2	Izgara
BMG	1.964078	0.0581	28	50.00			0.648	N2
BMGCH	1.964082	0.0583	14		0.7157	5.55		
BMG	1.963029	0.0046	29	48.28			0.324	N3
BMGCH	1.963033	0.0048	15		0.7833	13.34		
BMG	1.962877	0.0031	30	43.33			0.162	N4
BMGCH	1.962881	0.0029	17		0.8278			

Tablo 4.13’te iki gruplu nötron difüzyon yetkinlik özdeğer-özvektör problemine Chebyshev polinomsal hızlandırmasının uygulanmasıyla iterasyon sayısı kazanç yüzdelerinin %50’den başladığı görülmektedir. Dominans oranı yüzde hatalarının oldukça küçük hesaplanmakta, burada ele alınan iki gruplu problem için Chebyshev polinomsal hızlandırmasının oldukça etkin olduğu görülmektedir.

Tablo 4.12’de verilen gerçek dominans oranlarının BMGCH programına dışarıdan girdirildiğinde elde edilen sonuçlar Tablo 4.14’te verilmiştir.

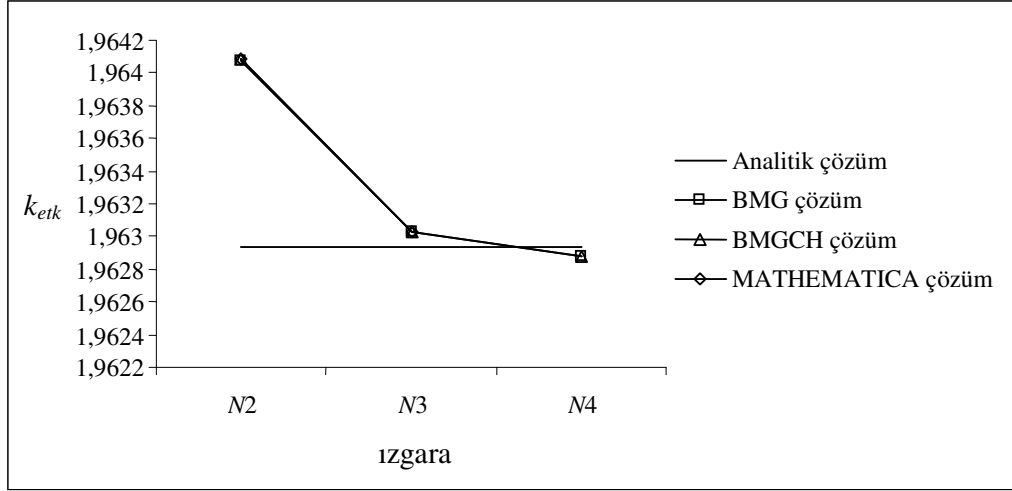
Tablo 4.14: İki enerji grubu problemi için gerçek dominans oranının BMGCH programına dışarıdan girdirilmesi sonucunda elde edilen sayısal sonuçlar

Program adı	k_{etk}	k_{etk} % hata	is	isky	Gerçek dominans oranı	Izgara
BMG	1.964078	0.0581	28	50.00		N2
BMGCH	1.964082	0.0583	14		0.6781	
BMG	1.963029	0.0046	29	51.72		N3
BMGCH	1.963033	0.0048	14		0.6911	

Tablo 4.14’te görüldüğü gibi, iki gruplu difüzyon yetkinlik özdeğer problemi için, beklendiği gibi ızgara inceldikçe dominans oranları ve iterasyon sayısı kazanç yüzdesi artmaktadır. Chebyshev polinomsal hızlandırması ile iterasyon sayılarında

%52 civarında kazanç sağlandığı görülmektedir. Ele alınan iki gruplu problem için Chebyshev polinomsal hızlandırmasının oldukça etkin olduğu görülmektedir.

Tablo 4.13'te verilen sayısal k_{etk} değerleri ile analitik k_{etk} değerinin karşılaştırılması Şekil 4.11'de verilmiştir.



Şekil 4.11: Tablo 4.13-14'te verilen sayısal k_{etk} değerleri ile analitik k_{etk} değerinin karşılaştırılması

Şekil 4.11'den BMG ve BMGCH programlarından elde edilen k_{etk} değerleri, analitik k_{etk} değerlerine ızgara inceldikçe yukarıdan yaklaştığı görülmektedir.

Ek E'de eşitlik E.16'dan,

$$\Phi_2 = 9.7709 \times 10^{12} \text{ cm}^{-2} \text{ sn}^{-1}$$

bulunur. Eşitlik E.14 ve E.15'ten birinci ve ikinci grup akıları,

$$\Phi_1(0,0) = 5.13636 \times 10^{12} \text{ cm}^{-2} \text{ sn}^{-1}$$

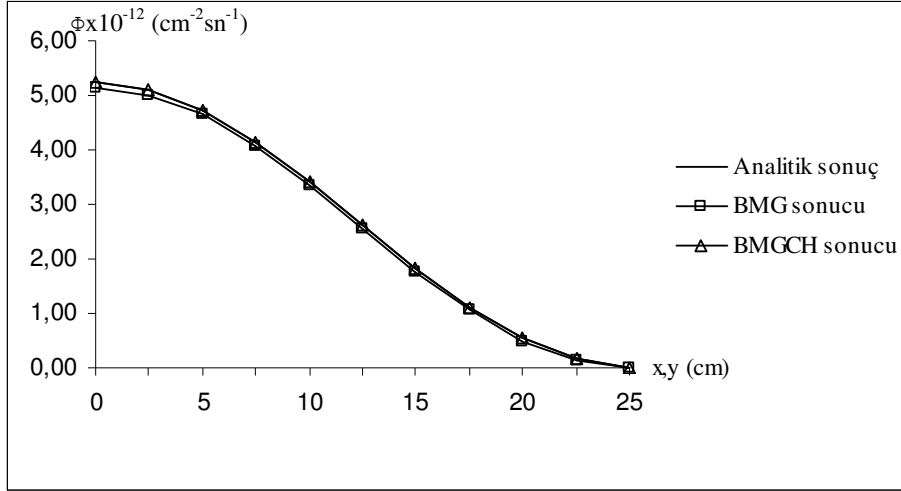
$$\Phi_2(0,0) = 9.7709 \times 10^{12} \text{ cm}^{-2} \text{ sn}^{-1}$$

olarak hesaplanmıştır. E.12 eşitliğinden birinci grup ile ikinci grup akılarının oranı

$$S = 0.52568$$

olarak hesaplanmıştır.

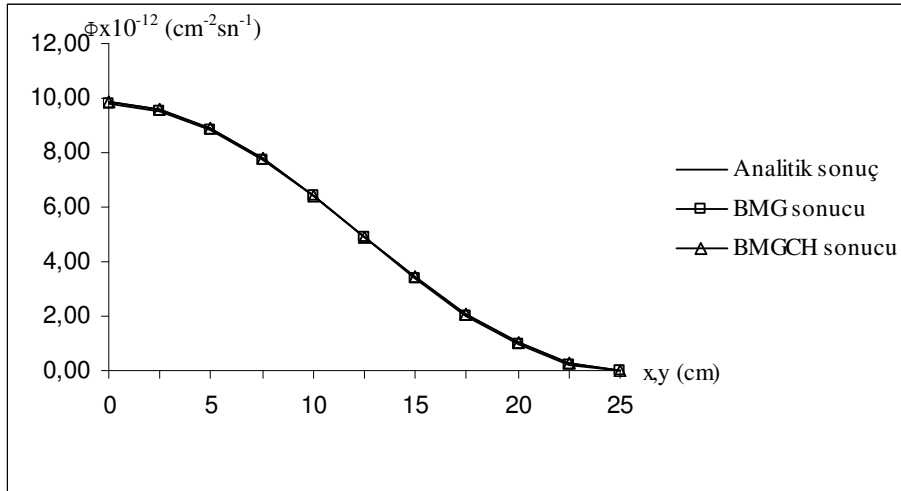
İki gruplu nötron difüzyon teorisi yetkinlik özdeğer problemi için, Şekil 4.12’de birinci grup köşegen akı dağılımları ile analitik köşegen akı dağılımlarının karşılaştırılması verilmiştir.



Şekil 4.12: N2 ızgarası için BMG-BMGCH programlarından elde edilen birinci grup köşegen akı dağılımlarının analitik akı dağılımları ile karşılaştırılması

Şekil 4.12’de birinci grup köşegen akı dağılımları, analitik değerleri ile yaklaşık aynı olmaktadır.

İkinci grup köşegen akı dağılımları ile analitik köşegen akı dağılımlarının karşılaştırılması Şekil 4.13’te gösterilmiştir.



Şekil 4.13: N2 ızgarası için BMG-BMGCH programlarından elde edilen ikinci grup köşegen akı dağılımlarının analitik akı dağılımları ile karşılaştırılması

İkinci grup köşegen akı değerleri ile analitik köşegen akı değerleri Şekil 4.13'te görüldüğü gibi birbirlerinden ayırt edilememektedir.

4.2.2. İki gruplu problemin lineer sınır elemanları ile çözümü

Eşitlik 4.21'de verilen özdeğer-özvektör probleminin lineer sınır elemanları ile MATHEMATICA'da çözümünden elde edilen gerçek dominans oranları Tablo 4.15'te verilmiştir.

Tablo 4.15: İki enerji grubu probleminin lineer sınır elemanları ile farklı ızgaralar için hesaplanan dominans oranları

Izgara	ρ dominans oranı
$N2$	$\frac{1.3296}{1.9543} = 0.6803$
$N3$	$\frac{1.3547}{1.9607} = 0.6909$

Aynı problemin lineer sınır elemanı kullanılması durumunda BMGL ve BMGLCH programlarında koşturulması sonucunda elde edilen veriler Tablo 4.16'da verilmiştir.

Tablo 4.16: İki gruplu difüzyon teorisi yetkinlik özdeğer probleminin lineer sınır elemanları ile sayısal çözüm sonuçları

Program adı	k_{etk}	k_{etk} % hata	is	isky	ρ dominans oranı	ρ % hata	Izgara
BMGL	1.954309	0.4396	29	44.83			$N2$
BMGLCH	1.954312	0.4394	16		0.6812	0.1323	
BMGL	1.960661	0.116	29	51.72			$N3$
BMGLCH	1.960666	0.1157	14		0.7131	3.2132	
BMGL	1.962349	0.0300	30	50.00			$N4$
BMGLCH	1.962352	0.0299	15		0.7802		

Tablo 4.16'dan lineer sınır elemanları ile Chebyshev hızlandırmasının %52 civarında etkin bir hızlandırma sağladığı görülmektedir. $N2$ ızgarası için dominans oranının, gerçek dominans oranına oldukça yakın olduğu Tablo 4.15'ten görülmektedir. ρ dominans oranı tahminindeki yüzde hatanın çok küçük olması, bu problem için dominans oranı tahmin yönteminin oldukça iyi sonuç verdiğini göstermektedir.

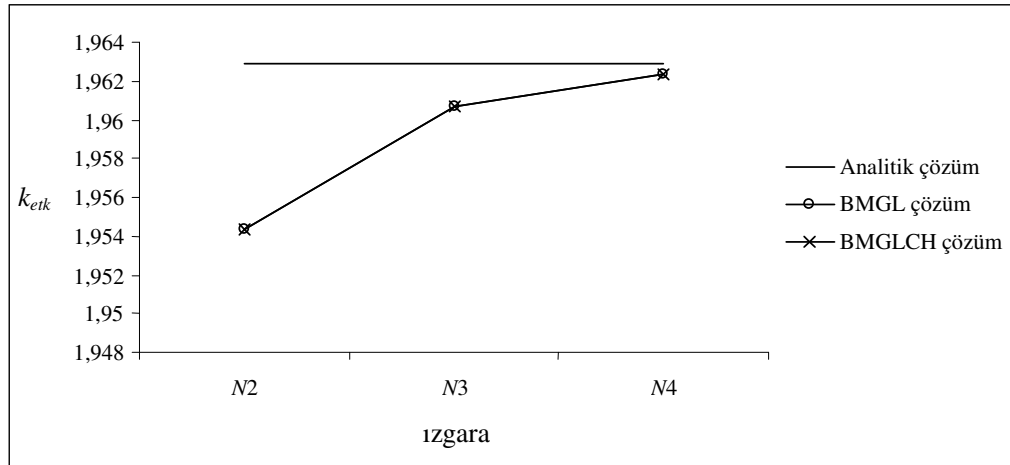
Tablo 4.15'te verilen gerçek dominans oranlarının BMGLCH programına dışarıdan girdirilmesi sonucu elde edilen değerler Tablo 4.17'de verilmiştir.

Tablo 4.17: İki enerji grubu problemi için gerçek dominans oranının BMGLCH programına dışarıdan girdirilmesi sonucunda elde edilen sayısal sonuçlar

Program adı	k_{etk}	k_{etk} % hata	is	isky	Gerçek dominans oranı	Izgara
BMGL	1.954309	0.4396	29	51.72		N2
BMGLCH	1.954312	0.4394	14		0.6803	
BMGL	1.960661	0.116	29	51.72		N3
BMGLCH	1.960666	0.1157	14		0.6909	

Tablo 4.17'den görüldüğü gibi Chebyshev hızlandırması ile iterasyon sayısı kazançları % 52 civarında olmakta ve hızlandırma ile oldukça yüksek verim elde edilmektedir.

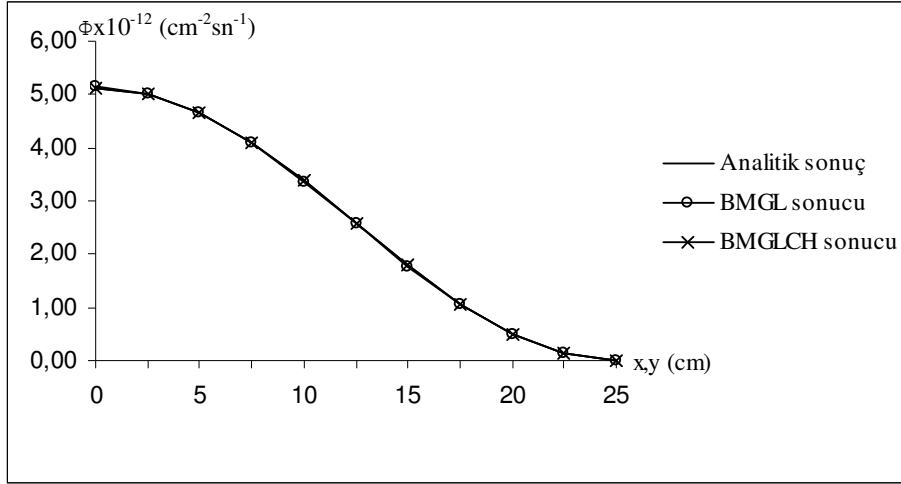
Tablo 4.16'da verilen sayısal k_{etk} değerleri ile analitik k_{etk} değerinin karşılaştırılması Şekil 4.14'te verilmiştir.



Şekil 4.14: Tablo 4.16'da verilen sayısal k_{etk} değerleri ile analitik k_{etk} değerinin karşılaştırılması

Şekil 4.14'te BMGL ve BMGLCH programından elde edilen k_{etk} değerleri çakışmakta, ızgara sayısı arttıkça analitik k_{etk} değerine yaklaşmaktadır.

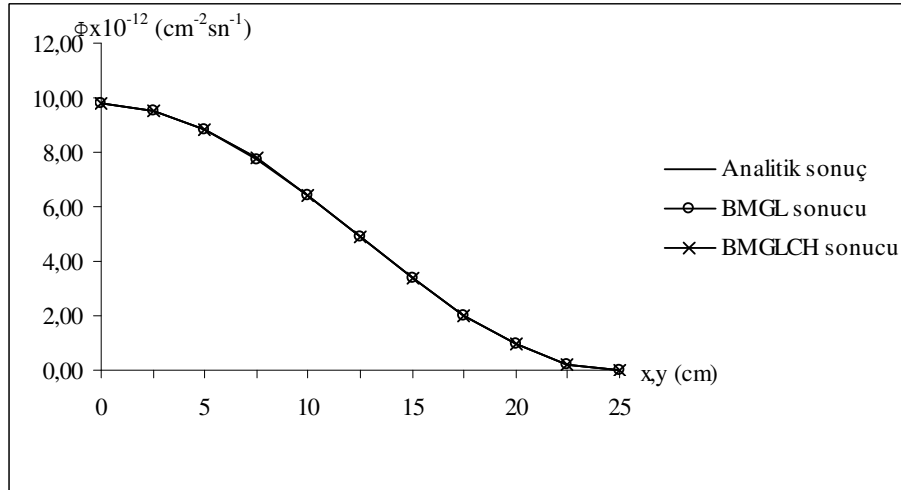
Şekil 4.15'te N2 ızgarası için BMGL ve BMGLCH programlarından elde edilen birinci grup köşegen akı dağılımları ile analitik köşegen akı dağılımlarının karşılaştırılması verilmiştir.



Şekil 4.15: N2 ızgarası için BMGL-BMGLCH programlarından elde edilen birinci grup köşegen akı dağılımlarının analitik akı dağılımları ile karşılaştırılması

Şekil 4.15'ten görüldüğü gibi birinci grup köşegen akı dağılımları ile analitik köşegen akı dağılımlarının eğrileri çakışmaktadır.

Şekil 4.16'da ikinci grup köşegen akı dağılımları ile analitik köşegen akı dağılımlarının karşılaştırılması verilmiştir.



Şekil 4.16: N2 ızgarası için BMGL-BMGLCH programlarından elde edilen ikinci grup köşegen akı dağılımlarının analitik akı dağılımları ile karşılaştırılması

Şekil 4.16'dan görüldüğü gibi ikinci grup köşegen akı dağılımları ile analitik köşegen akı dağılımlarının eğrileri çakışmaktadır.

4.3. Üç Gruplu Nötron Difüzyon Teorisi Yetkinlik Özdeğer Problemi

Üç gruplu nötron difüzyon teorisi yetkinlik özdeğer probleminin çözümü için eşitlik (2.99) ve (2.105)'te verilen denklemlerin birinci grup denklemleri,

$$\underline{A}_{\underline{1}} \underline{u}_1 = \frac{w_1}{k_{\text{etk}}} \underline{P}_{\underline{1}} (\nu_1 \Sigma_{f1} \tilde{\varphi}_{\underline{1}} + \nu_2 \Sigma_{f2} \tilde{\varphi}_{\underline{2}} + \nu_3 \Sigma_{f3} \tilde{\varphi}_{\underline{3}}) \quad (4.22)$$

$$\tilde{\varphi}_{\underline{1}} = \underline{T}_{\underline{1}} \underline{u}_1 + \frac{w_1}{k_{\text{etk}}} \underline{R}_{\underline{1}} (\nu_1 \Sigma_{f1} \tilde{\varphi}_{\underline{1}} + \nu_2 \Sigma_{f2} \tilde{\varphi}_{\underline{2}} + \nu_3 \Sigma_{f3} \tilde{\varphi}_{\underline{3}}) \quad (4.23)$$

şeklinde yazılır. $g=1$ için (3.3)'te verildiği gibi,

$$\begin{aligned} w_1 \nu_1 \Sigma_{f1} \underline{P}_{\underline{1}} &= \underline{P}_{\underline{11}} & w_1 \nu_1 \Sigma_{f1} \underline{R}_{\underline{1}} &= \underline{R}_{\underline{11}} \\ w_1 \nu_2 \Sigma_{f2} \underline{P}_{\underline{1}} &= \underline{P}_{\underline{12}} & w_1 \nu_2 \Sigma_{f2} \underline{R}_{\underline{1}} &= \underline{R}_{\underline{12}} \\ w_1 \nu_3 \Sigma_{f3} \underline{P}_{\underline{1}} &= \underline{P}_{\underline{13}} & w_1 \nu_3 \Sigma_{f3} \underline{R}_{\underline{1}} &= \underline{R}_{\underline{13}} \end{aligned}$$

tanımları ile eşitlik (4.22-23),

$$\underline{A}_{\underline{1}} \underline{u}_1 = \frac{1}{k_{\text{etk}}} (\underline{P}_{\underline{11}} \tilde{\varphi}_{\underline{1}} + \underline{P}_{\underline{12}} \tilde{\varphi}_{\underline{2}} + \underline{P}_{\underline{13}} \tilde{\varphi}_{\underline{3}}) \quad (4.24)$$

$$\tilde{\varphi}_{\underline{1}} = \underline{T}_{\underline{1}} \underline{u}_1 + \frac{1}{k_{\text{etk}}} (\underline{R}_{\underline{11}} \tilde{\varphi}_{\underline{1}} + \underline{R}_{\underline{12}} \tilde{\varphi}_{\underline{2}} + \underline{R}_{\underline{13}} \tilde{\varphi}_{\underline{3}}) \quad (4.25)$$

şeklinde olur. Eşitlik (4.24)'te u_1 'in yalnız bırakılıp, (4.25)'te yerine yerleştirilmesi ile,

$$\tilde{\varphi}_{\underline{1}} = \frac{1}{k_{\text{etk}}} \left\{ (\underline{T}_{\underline{1}} \underline{A}_{\underline{1}}^{-1} \underline{P}_{\underline{11}} + \underline{R}_{\underline{11}}) \tilde{\varphi}_{\underline{1}} + (\underline{T}_{\underline{1}} \underline{A}_{\underline{1}}^{-1} \underline{P}_{\underline{12}} + \underline{R}_{\underline{12}}) \tilde{\varphi}_{\underline{2}} + (\underline{T}_{\underline{1}} \underline{A}_{\underline{1}}^{-1} \underline{P}_{\underline{13}} + \underline{R}_{\underline{13}}) \tilde{\varphi}_{\underline{3}} \right\} \quad (4.26)$$

ifadesi elde edilir.

$$\begin{aligned} \underline{B}_{\underline{11}} &= (\underline{T}_{\underline{1}} \underline{A}_{\underline{1}}^{-1} \underline{P}_{\underline{11}} + \underline{R}_{\underline{11}}) \\ \underline{B}_{\underline{12}} &= (\underline{T}_{\underline{1}} \underline{A}_{\underline{1}}^{-1} \underline{P}_{\underline{12}} + \underline{R}_{\underline{12}}) \\ \underline{B}_{\underline{13}} &= (\underline{T}_{\underline{1}} \underline{A}_{\underline{1}}^{-1} \underline{P}_{\underline{13}} + \underline{R}_{\underline{13}}) \end{aligned}$$

tanımlarının eşitlik (4.26)'da yerine yerleştirilmesi ile,

$$k_{\text{etk}} \tilde{\varphi}_{\underline{1}} = \underline{B}_{\underline{11}} \tilde{\varphi}_{\underline{1}} + \underline{B}_{\underline{12}} \tilde{\varphi}_{\underline{2}} + \underline{B}_{\underline{13}} \tilde{\varphi}_{\underline{3}} \quad (4.27)$$

birinci grup denklemi elde edilir.

Eşitlik (2.73)'te verilen tanım yardımıyla (2.99) ve (2.105) denklemlerinden ikinci grup denklemleri,

$$\underline{\underline{A}}_2 \underline{u}_2 = \frac{w_2}{k_{etik}} \underline{\underline{P}}_2 (\nu_1 \Sigma_{f1} \tilde{\underline{\varphi}}_1 + \nu_2 \Sigma_{f2} \tilde{\underline{\varphi}}_2 + \nu_3 \Sigma_{f3} \tilde{\underline{\varphi}}_3) \quad (4.28)$$

$$\tilde{\underline{\varphi}}_2 - s_{12} \tilde{\underline{\varphi}}_1 = \underline{\underline{T}}_2 \underline{u}_2 + \frac{w_2}{k_{etik}} \underline{\underline{R}}_2 (\nu_1 \Sigma_{f1} \tilde{\underline{\varphi}}_1 + \nu_2 \Sigma_{f2} \tilde{\underline{\varphi}}_2 + \nu_3 \Sigma_{f3} \tilde{\underline{\varphi}}_3) \quad (4.29)$$

şeklinde yazılır. $g=2$ için (3.3)'te verildiği gibi,

$$\begin{aligned} w_2 \nu_1 \Sigma_{f1} \underline{\underline{P}}_2 &= \underline{\underline{P}}_{21} & w_2 \nu_1 \Sigma_{f1} \underline{\underline{R}}_2 &= \underline{\underline{R}}_{21} \\ w_2 \nu_2 \Sigma_{f2} \underline{\underline{P}}_2 &= \underline{\underline{P}}_{22} & w_2 \nu_2 \Sigma_{f2} \underline{\underline{R}}_2 &= \underline{\underline{R}}_{22} \\ w_2 \nu_3 \Sigma_{f3} \underline{\underline{P}}_2 &= \underline{\underline{P}}_{23} & w_2 \nu_3 \Sigma_{f3} \underline{\underline{R}}_2 &= \underline{\underline{R}}_{23} \end{aligned}$$

tanımlarının yapılması ve eşitlik (4.28)'de u_2 'nin yalnız bırakılıp (4.29) eşitliğinde yerine yerleştirilmesiyle,

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{\varphi}}_2 - s_{12} \tilde{\underline{\varphi}}_1 &= \frac{1}{k_{etik}} \left\{ (\underline{\underline{T}}_2 \underline{\underline{A}}_2^{-1} \underline{\underline{P}}_{21} + \underline{\underline{R}}_{21}) \tilde{\underline{\varphi}}_1 + (\underline{\underline{T}}_2 \underline{\underline{A}}_2^{-1} \underline{\underline{P}}_{22} + \underline{\underline{R}}_{22}) \tilde{\underline{\varphi}}_2 \right. \\ &\quad \left. + (\underline{\underline{T}}_2 \underline{\underline{A}}_2^{-1} \underline{\underline{P}}_{23} + \underline{\underline{R}}_{23}) \tilde{\underline{\varphi}}_3 \right\} \end{aligned} \quad (4.30)$$

şeklinde olur.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{B}}_{21} &= (\underline{\underline{T}}_2 \underline{\underline{A}}_2^{-1} \underline{\underline{P}}_{21} + \underline{\underline{R}}_{21}) \\ \underline{\underline{B}}_{22} &= (\underline{\underline{T}}_2 \underline{\underline{A}}_2^{-1} \underline{\underline{P}}_{22} + \underline{\underline{R}}_{22}) \\ \underline{\underline{B}}_{23} &= (\underline{\underline{T}}_2 \underline{\underline{A}}_2^{-1} \underline{\underline{P}}_{23} + \underline{\underline{R}}_{23}) \end{aligned}$$

tanımlarının (4.30) eşitliğinde yerine yerleştirilmesi ile,

$$\tilde{\underline{\varphi}}_2 - s_{12} \tilde{\underline{\varphi}}_1 = \frac{1}{k_{etik}} (\underline{\underline{B}}_{21} \tilde{\underline{\varphi}}_1 + \underline{\underline{B}}_{22} \tilde{\underline{\varphi}}_2 + \underline{\underline{B}}_{23} \tilde{\underline{\varphi}}_3) \quad (4.31)$$

şeklinde ikinci grup denklemleri elde edilir.

Yine (2.73)'te verilen tanım kullanılarak (2.99) ve (2.105) eşitliklerinden üçüncü grup denklemleri,

$$\underline{\underline{A}}_3 \underline{u}_3 = \frac{w_3}{k_{etk}} \underline{\underline{P}}_3 (\nu_1 \Sigma_{f1} \underline{\tilde{\varphi}}_1 + \nu_2 \Sigma_{f2} \underline{\tilde{\varphi}}_2 + \nu_3 \Sigma_{f3} \underline{\tilde{\varphi}}_3) \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{\varphi}}_3 - s_{23} \underline{\tilde{\varphi}}_2 - (s_{13} - s_{12} s_{23} \frac{k_2^2 - k_1^2}{k_3^2 - k_1^2}) \underline{\tilde{\varphi}}_1 \\ = \underline{\underline{T}}_3 \underline{u}_3 + \frac{w_3}{k_{etk}} \underline{\underline{R}}_3 (\nu_1 \Sigma_{f1} \underline{\tilde{\varphi}}_1 + \nu_2 \Sigma_{f2} \underline{\tilde{\varphi}}_2 + \nu_3 \Sigma_{f3} \underline{\tilde{\varphi}}_3) \end{aligned} \quad (4.33)$$

şeklinde yazılabilir.

$g=3$ için (3.3)'te verildiği gibi,

$$\begin{aligned} w_3 \nu_1 \Sigma_{f1} \underline{\underline{P}}_3 &= \underline{\underline{P}}_{31} & w_3 \nu_1 \Sigma_{f1} \underline{\underline{R}}_3 &= \underline{\underline{R}}_{31} \\ w_3 \nu_2 \Sigma_{f2} \underline{\underline{P}}_3 &= \underline{\underline{P}}_{32} & w_3 \nu_2 \Sigma_{f2} \underline{\underline{R}}_3 &= \underline{\underline{R}}_{32} \\ w_3 \nu_3 \Sigma_{f3} \underline{\underline{P}}_3 &= \underline{\underline{P}}_{33} & w_3 \nu_3 \Sigma_{f3} \underline{\underline{R}}_3 &= \underline{\underline{R}}_{33} \end{aligned}$$

tanımlarının ve eşitlik (4.32)'de u_3 'ün yalnız bırakılıp (4.33) eşitliğinde yerine yerleştirilmesiyle,

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{\varphi}}_3 - s_{23} \underline{\tilde{\varphi}}_2 - (s_{13} - s_{12} s_{23} \frac{k_2^2 - k_1^2}{k_3^2 - k_1^2}) \underline{\tilde{\varphi}}_1 \\ = \frac{1}{k_{etk}} \left\{ (\underline{\underline{T}}_3 \underline{\underline{A}}_3^{-1} \underline{\underline{P}}_{31} + \underline{\underline{R}}_{31}) \underline{\tilde{\varphi}}_1 + (\underline{\underline{T}}_3 \underline{\underline{A}}_3^{-1} \underline{\underline{P}}_{32} + \underline{\underline{R}}_{32}) \underline{\tilde{\varphi}}_2 + (\underline{\underline{T}}_3 \underline{\underline{A}}_3^{-1} \underline{\underline{P}}_{33} + \underline{\underline{R}}_{33}) \underline{\tilde{\varphi}}_3 \right\} \end{aligned} \quad (4.34)$$

ifadesi elde edilir.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{B}}_{31} &= (\underline{\underline{T}}_3 \underline{\underline{A}}_3^{-1} \underline{\underline{P}}_{31} + \underline{\underline{R}}_{31}) \\ \underline{\underline{B}}_{32} &= (\underline{\underline{T}}_3 \underline{\underline{A}}_3^{-1} \underline{\underline{P}}_{32} + \underline{\underline{R}}_{32}) \\ \underline{\underline{B}}_{33} &= (\underline{\underline{T}}_3 \underline{\underline{A}}_3^{-1} \underline{\underline{P}}_{33} + \underline{\underline{R}}_{33}) \end{aligned}$$

tanımlarının (4.34)'te yerine yerleştirilmesi ile,

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{\varphi}}_3 - s_{23} \underline{\tilde{\varphi}}_2 - (s_{13} - s_{12} s_{23} \frac{k_2^2 - k_1^2}{k_3^2 - k_1^2}) \underline{\tilde{\varphi}}_1 \\ = \frac{1}{k_{etk}} (\underline{\underline{B}}_{31} \underline{\tilde{\varphi}}_1 + \underline{\underline{B}}_{32} \underline{\tilde{\varphi}}_2 + \underline{\underline{B}}_{33} \underline{\tilde{\varphi}}_3) \end{aligned} \quad (4.35)$$

şeklinde üçüncü grup denklemleri elde edilir. Burada (4.27), (4.31) ve (4.35) denklemleri matrisyel biçiminde,

$$k_{etk} \begin{bmatrix} \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ -s_{12}\underline{\underline{I}} & \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{0}} \\ -(s_{13} - s_{12}s_{23})\frac{k_2^2 - k_1^2}{k_3^2 - k_1^2}\underline{\underline{I}} & -s_{23}\underline{\underline{I}} & \underline{\underline{I}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\tilde{\varphi}}_1 \\ \underline{\tilde{\varphi}}_2 \\ \underline{\tilde{\varphi}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{B}}_{11} & \underline{\underline{B}}_{12} & \underline{\underline{B}}_{13} \\ \underline{\underline{B}}_{21} & \underline{\underline{B}}_{22} & \underline{\underline{B}}_{23} \\ \underline{\underline{B}}_{31} & \underline{\underline{B}}_{32} & \underline{\underline{B}}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\tilde{\varphi}}_1 \\ \underline{\tilde{\varphi}}_2 \\ \underline{\tilde{\varphi}}_3 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

şeklinde yazılabilir.

$$\underline{\underline{Y}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ -s_{12}\underline{\underline{I}} & \underline{\underline{I}} & \underline{\underline{0}} \\ -(s_{13} - s_{12}s_{23})\frac{k_2^2 - k_1^2}{k_3^2 - k_1^2}\underline{\underline{I}} & -s_{23}\underline{\underline{I}} & \underline{\underline{I}} \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} \underline{\tilde{\varphi}}_1 \\ \underline{\tilde{\varphi}}_2 \\ \underline{\tilde{\varphi}}_3 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{B}}_{11} & \underline{\underline{B}}_{12} & \underline{\underline{B}}_{13} \\ \underline{\underline{B}}_{21} & \underline{\underline{B}}_{22} & \underline{\underline{B}}_{23} \\ \underline{\underline{B}}_{31} & \underline{\underline{B}}_{32} & \underline{\underline{B}}_{33} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

tanımları ile (4.36),

$$\begin{aligned} k_{etk} \underline{\underline{Y}} \underline{\underline{\Phi}} &= \underline{\underline{B}} \underline{\underline{\Phi}} \\ k_{etk} \underline{\underline{\Phi}} &= \underline{\underline{Y}}^{-1} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{\Phi}} \\ \underline{\underline{N}} &= \underline{\underline{Y}}^{-1} \underline{\underline{B}} \\ k_{etk} \underline{\underline{\Phi}} &= \underline{\underline{N}} \underline{\underline{\Phi}} \end{aligned} \quad (4.38)$$

şeklinde üçüncü grup denklemleri için özdeğer-özvektör problemi elde edilir.

$$s = s_{12}^2 + s_{13} - s_{12}s_{23} \frac{k_2^2 - k_1^2}{k_3^2 - k_1^2} \quad \text{ve} \quad s_{hg} = \frac{\Sigma_{s,g \leftarrow h}}{(k_g^2 - k_h^2) D_g} \quad (4.39)$$

şeklinde tanımlanması ile (4.37) açık biçimde,

$$k_{etk} \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_1 \\ \tilde{\phi}_2 \\ \tilde{\phi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{B_{11}}{(s_{12} B_{11} + B_{21})} & \frac{B_{12}}{(s_{12} B_{12} + B_{22})} & \frac{B_{13}}{(s_{12} B_{13} + B_{23})} \\ (s B_{11} + s_{12} B_{21} + B_{31}) & (s B_{12} + s_{12} B_{22} + B_{32}) & (s B_{13} + s_{12} B_{23} + B_{33}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_1 \\ \tilde{\phi}_2 \\ \tilde{\phi}_3 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

şeklinde yazılabilir ve üç gruplu nötron difüzyon teorisi yetkinlik özdeğer-özvektör problemi MATHEMATICA programında çözülmeye hazır hale gelir.

Üç gruplu nötron difüzyon teorisi yetkinlik özdeğer problemi için kenar uzunluğu 50 (cm) olan bir kare alınmış ve Tablo 4.18’de verilen nükleer sabitler kullanılmıştır.

Tablo 4.18: Üç gruplu yetkinlik özdeğer problemi için nükleer sabitler

Grup Sabiti	1. Grup	2. Grup	3. Grup
$D_g (cm)$	3.0034	2.2297	1.4627
$\Sigma_{f,g} (cm^{-1})$	0.0131267	0.006102	0.008317
$\nu_g \Sigma_{f,g} (cm^{-1})$	0.034735	0.01543	0.020542
$\Sigma_{r,g} (cm^{-1})$	0.05286	0.016704	0.01414
$L_g (cm^{-1})$	7.53777221	11.55348424	10.17074875
$\omega_f (joul)$	3.2042x10 ⁻¹¹		
$P(Watt.cm^{-1})$	300		
χ_g	0.575	0.326	0.099
$\Sigma_{s,g+1 \leftarrow g}$	0.02705	0.00822	
$\Sigma_{s,g+2 \leftarrow g}$	0.01181		

Tablo 4.18’de verilen değerler kullanılarak a=50 (cm) için $k_{etk}=0.750242$ analitik sonucu bulunmuştur.

Eşitlik (4.40)’da verilen üç enerji grubu için özdeğer-özvektör probleminin MATHEMATICA programında çözülmesi sonucu bulunan gerçek ρ dominans oranları Tablo 4.19’da verilmiştir.

Tablo 4.19: Üç enerji grubu probleminin sabit sınır elemanları ile farklı ızgaralar için hesaplanan dominans oranları

Izgara	ρ dominans oranı
$M1$	$\frac{0.1809}{0.7233} = 0.2501$
$M2$	$\frac{0.2159}{0.7433} = 0.2905$

4.3.1. Üç gruplu problemin sabit sınır elemanları ile çözümü

Tablo 4.18’de verilen değerler kullanılarak üç gruplu problem, hızlandırmaz BMG ve Chebyshev polinomsal hızlandırmalı BMGCH programlarında koşturulduğunda elde edilen veriler Tablo 4.20’de verilmiştir.

Tablo 4.20: Üç gruplu difüzyon teorisi yetkinlik özdeğer probleminin sabit sınır elemanları ile sayısal çözüm sonuçları

Program adı	k_{etk}	k_{etk} % hata	is	isky	ρ dominan s oranı	ρ % hata	Δ/L_2	Izgara
BMG	0.723330	3.58711	11	9.09			0.541	$M1$
BMGCH	0.723331	3.58698	10		0.45426	81.63		
BMG	0.743264	0.93001	12	16.67			0.270	$M2$
BMGCH	0.743264	0.93001	10		0.55211	90.06		
BMG	0.748352	0.25192	12	16.67			0.135	$M3$
BMGCH	0.748352	0.25192	10		0.60931			
BMG	0.749667	0.07664	12	0			0.068	$M4$
BMGCH	0.749667	0.07664	12		0.64572			

Tablo 4.20’de görüldüğü gibi, üç gruplu problemde dominans oranı hata yüzdesi oldukça yüksektir. Bu durum ele alınan üç gruplu problem için, dominans oranı tahmin yönteminin yeterli doğrulukta elde edilemediğini göstermektedir. Yine de üç gruplu nötron difüzyon teorisi yetkinlik özdeğer problemine Chebyshev polinomsal hızlandırmasının uygulanmasıyla %17 civarında iterasyon kazancı sağlanmıştır.

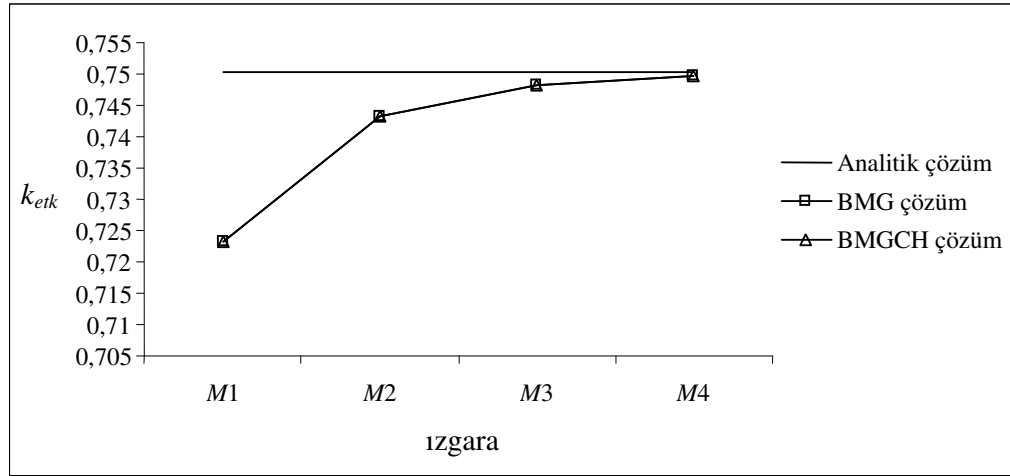
Tablo 4.19’da verilen gerçek ρ dominans oranının BMGCH programına dışarıdan girilmesi sonucu elde edilen sonuçlar Tablo 4.21’de verilmiştir.

Tablo 4.21: Üç enerji grubu problemi için gerçek dominans oranının BMGCH programına dışarıdan girilmesi sonucunda elde edilen sayısal sonuçlar

Program adı	k_{etk}	k_{etk} % hata	is	isky	Gerçek dominans oranı	Izgara
BMG	0.723330	3.5871	11	27.27		M1
BMGCH	0.723330	3.5871	8		0.2501	
BMG	0.743264	0.9301	12	33.33		M2
BMGCH	0.743264	0.9301	8		0.2905	

Tablo 4.21’de verilen sonuçlara göre Chebyshev polinomsal hızlandırması ile %27-33 civarında kazanç sağlanmıştır. Bölüm 3’te bahsedildiği gibi dominans oranı 1’e ne kadar yakın olursa hızlandırma o kadar etkin olacaktır. Bu problemde görüldüğü gibi, dominans oranı 1’den çok küçük, dolayısıyla hızlandırma diğer problemlerdeki kadar etkin olmamaktadır.

Şekil 4.17’de üçüncü grup nötron difüzyon teorisi yetkinlik özdeğer problemlerinin çözümü sonucu elde edilen k_{etk} değerlerinin analitik k_{etk} değerleri ile karşılaştırılması verilmiştir.



Şekil 4.17: Tablo 4.20’de verilen sayısal k_{etk} değerleri ile analitik k_{etk} değerinin karşılaştırılması

Şekil 4.17’de görüldüğü gibi sayısal k_{etk} değerleri, ızgara sayısı arttıkça analitik k_{etk} değerine yaklaşmaktadır.

4.3.2. Üç gruplu problemin lineer sınır elemanları ile çözümü

Lineer sınır elemanları kullanılması durumunda eşitlik (4.40)'ta verilen özdeğer-özvektör probleminin MATHEMATICA programında çözülmesi sonucu elde edilen gerçek dominans oranları Tablo 4.22'de verilmiştir.

Tablo 4.22: Üç enerji grubu probleminin lineer sınır elemanları ile farklı ızgaralar için hesaplanan dominans oranları

Izgara	ρ dominans oranı
$M1$	$\frac{0.1951}{0.7245} = 0.2693$
$M2$	$\frac{0.2171}{0.7427} = 0.2923$

Aynı problemin lineer sınır elemanları ile çözülmesi sonucu elde edilen sonuçları Tablo 4.23'te verilmiştir.

Tablo 4.23: Üç gruplu difüzyon teorisi yetkinlik özdeğer probleminin lineer sınır elemanları ile sayısal çözüm sonuçları

Program adı	k_{etk}	k_{etk} % hata	is	isky	ρ dominans oranı	ρ % hata	Izgara
BMGL	0.724517	3.42889	11	27.27			$M1$
BMGLCH	0.724518	3.42876	8		0.33698	25.132	
BMGL	0.742702	1.00501	12	25.00			$M2$
BMGLCH	0.742702	1.00501	9		0.46659	59.627	
BMGL	0.748183	0.27445	12	8.33			$M3$
BMGLCH	0.748183	0.27445	11		0.54976		
BMGL	0.749700	0.07224	12	16.67			$M4$
BMGLCH	0.749700	0.07224	10		0.60341		

Tablo 4.23'ten görüldüğü gibi lineer sınır elemanları kullanılması durumunda Chebyshev hızlandırması ile iterasyon sayısı kazanç oranları sabit sınır elemanlarına göre daha iyi olmaktadır. Sabit sınır elemanı kullanılması durumunda iterasyon kazancı %17 iken, lineer sınır elemanları ile %27 civarında kazanç sağlanmıştır.

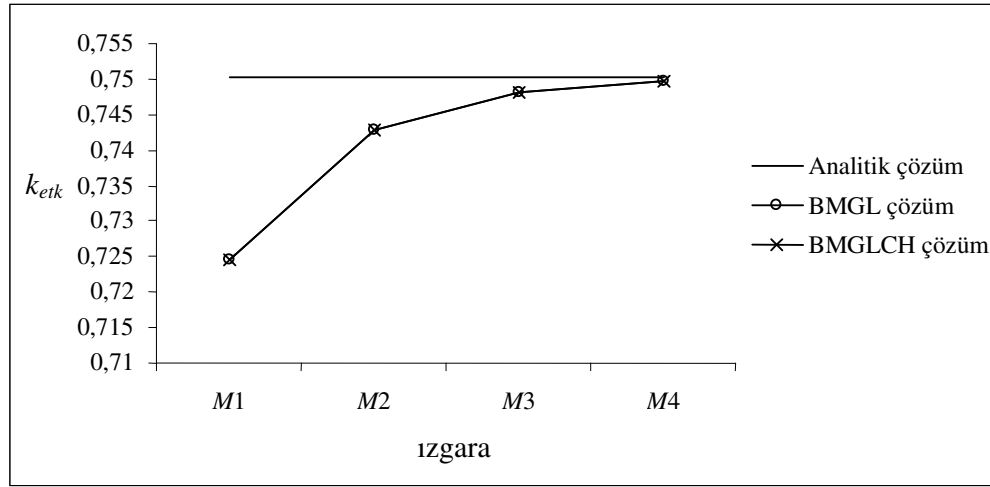
Tablo 4.22'de verilen gerçek dominans oranlarının BMGLCH programına dışarıdan girildiğinde elde edilen sonuçlar Tablo 4.24'te verilmiştir.

Tablo 4.24: Üç enerji problemi için gerçek dominans oranının BMGLCH programına dışarıdan girilmesi sonucunda elde edilen sayısal sonuçlar

Program adı	k_{etk}	k_{etk} % hata	is	isky	Gerçek dominans oranı	Izgara
BMGL	0.724517	3.42902	11	27.27		M1
BMGLCH	0.724518	3.42889	8		0.2693	
BMGL	0.742702	1.00501	12	33.33		M2
BMGLCH	0.742702	1.00501	8		0.2923	

Tablo 4.24'ten Chebyhev polinomsal hızlandırması ile %27-33 civarında iterasyon kazancı sağlanmakta ve sabit sınır elemanları ile aynı kazanç elde edilmektedir.

Şekil 4.18'de BMGL ve BMGLCH programlarından elde edilen k_{etk} değerleri ile analitik k_{etk} değerinin karşılaştırılması verilmiştir.



Şekil 4.18: Tablo 4.23'te verilen sayısal k_{etk} değerleri ile analitik k_{etk} değerinin karşılaştırılması

Şekil 4.18'de görüldüğü gibi, sayısal k_{etk} değerleri ızgara sayısı arttıkça analitik k_{etk} değerine yaklaşmaktadır.

4.4. Chebyshev Polinomsal Hızlandırmasının Sabit ve Lineer Sınır Elemanları Üzerindeki Etkisi

Bu bölümde Chebyshev polinomsal hızlandırmasının sabit ve lineer sınır elemanları kullanılması durumunda nasıl bir değişim göstereceği incelenecektir. Tablo 4.25'te tek gruplu nötron difüzyon yetkinlik özdeğer problemi için sabit ve lineer elemanlar kullanılması durumunda iterasyon sayısı kazanç yüzdeleri ve programların hesapladığı dominans oranı tahminindeki yüzde hatalar verilmektedir.

Tablo 4.25: Tek gruplu yetkinlik özdeğer problemi için BMGCH ve BMGLCH program sonuçları

Izgara	İterasyon sayısı kazanç yüzdesi		ρ dominans oranı tahminindeki yüzde hata	
	Sabit	Lineer	Sabit	Lineer
$N1$	33.33	36.84	23.05	0.67
$N2$	30.00	40.00	28.99	12.33
$N3$	28.57	33.33	37.16	26.32
$N4$	19.05	28.57		

Tablo 4.25 incelendiğinde lineer elemanların hesapladığı dominans oranı tahminlerinin, sabit elemanlara göre çok daha iyi olduğu görülmektedir. Örneğin $N1$ ızgarası için, sabit elemanlar dominans oranını %23 hata ile hesaplarken lineer elemanlar ile sadece %0.7 hata ile hesaplamaktadır. Beklendiği gibi iterasyon sayılarındaki kazanç yüzdesi lineer elemanlarda daha fazla olmaktadır. Yine $N1$ ızgarasına bakılacak olursa lineer elemanlar kullanılması durumunda iterasyon sayısındaki kazanç %37 olurken sabit elemanlarda bu kazanç %33 civarında olmaktadır.

İki gruplu yetkinlik özdeğer problemi için sabit ve lineer sınır elemanları kullanılması durumunda iterasyon sayısı kazanç yüzdeleri ve dominans oranı tahminindeki yüzde hataları Tablo 4.26'da verilmiştir.

Tablo 4.26: İki gruplu yetkinlik özdeğer problemi için BMGCH ve BMGLCH program sonuçları

Izgara	İterasyon sayısı kazanç yüzdesi		ρ dominans oranı tahminindeki yüzde hata	
	Sabit	Lineer	Sabit	Lineer
<i>N2</i>	50.00	44.83	5.55	0.13
<i>N3</i>	48.28	51.72	13.34	3.21
<i>N4</i>	43.33	50.00		

Tablo 4.26 incelenecek olursa, yine lineer eleman kullanan programın dominans oranlarını, sabit elemanlara göre çok daha iyi tahmin ettiği görülmektedir. İterasyon sayısı kazanç yüzdesi lineer elemanlarda *N3* ve *N4* ızgaralarında daha yüksektir. Fakat *N2* ızgarası için lineer eleman kullanan program dominans oranını daha iyi tahmin ettiği halde bu durum iterasyon sayısı kazanç yüzdesine yansımamaktadır.

Üç gruplu yetkinlik özdeğer problemi için Tablo 4.27 incelenecek olursa;

Tablo 4.27: Üç gruplu yetkinlik özdeğer problemi için BMGCH ve BMGLCH program sonuçları

Izgara	İterasyon sayısı kazanç yüzdesi		ρ dominans oranı tahminindeki yüzde hata	
	Sabit	Lineer	Sabit	Lineer
<i>M1</i>	9.09	27.27	81.63	25.13
<i>M2</i>	16.67	25.00	90.06	59.63
<i>M3</i>	16.67	8.33		
<i>M4</i>	0.00	16.67		

M1 ve *M2* ızgaralarında dominans oranı tahmini yine lineer elemanlarda sabit elemanlara göre daha az hata ile tahmin edilmektedir. *M1* ızgarası için lineer elemanlar dominans oranını %25 hata ile hesaplarken, sabit elemanlarda %82'lere kadar çıkmaktadır. Problem üç boyutlu olduğundan ortaya çıkan matrislerin boyutları çok büyük olmakta, dolayısıyla *M3* ve *M4* ızgaraları için MATHEMATICA programı aracılığıyla dominans oranları hesaplanamamıştır. Bu nedenle, bu ızgaralar için dominans oranı tahminleri ve iterasyon sayısı kazançlarını karşılaştırmak mümkün olmamıştır. İterasyon sayısı kazanç yüzdeleri karşılaştırıldığında *M3*

ızgarası dışında lineer elemanlar kullanılması durumunda kazanç yüzdelерinin daha büyük olduğu gözlenmektedir.

4.5. Chebyshev Polinomsal Hızlandırmasının Etkinliğinin Dominans Oranına Bağımlılığı

Sayısal uygulamalar çerçevesinde birden üçe kadar enerji grubu kullanılarak Chebyshev hızlandırmasının sınır elemanları yetkinlik özdeğer problemleri çözümü üzerindeki etkinliği irdelenmeye çalışıldı. Şimdi grup sayısına göre dominans oranının değişimini ve bunun hızlandırmanın etkinliği üzerindeki olası etkilerini tespit etmek amacıyla Tablo 4.28 incelenecek olursa:

Tablo 4.28: Sabit sınır elemanları ile grup sayısına bağlı olarak dominans oranı ve hızlandırma etkinliğinin değişimi

Grup sayısı	Gerçek dominans oranı	İterasyon sayısı kazancı	Dominans oranı tahminindeki hata	Izgara
3	0.2501	%9	%82	<i>M1</i>
1	0.4982	%33	%23	<i>N1</i>
2	0.6781	%50	%5.5	<i>N2</i>

Tablo 4.28’de dominans oranının problemden probleme büyük çapta değişebileceği görölmektedir. Chebyshev hızlandırması dolayısıyla iterasyon sayısında sağlanan kazanç yüzdesinin yüksek dominans oranına sahip problemlerde büyük olduğu anlaşılmaktadır. 0.2501 dominans oranına sahip olan üç gruplu problemde iterasyon sayısı kazancı %9 iken, 0.6781 dominans oranına sahip iki gruplu problemde bu %50’ye çıkmaktadır. Ayrıca yüksek dominans oranlarında kullandığımız dominans oranı tahmin yönteminin etkin olduğu, düşük dominans oranlarında ise pek etkin olamadığı görölmektedir. 0.6781 dominans oranına sahip iki gruplu problemde dominans oranı %5.5 gibi çok küçük bir hatayla tahmin edilebilirken 0.2501 dominans oranına sahip üç gruplu problemde dominans oranı tahminindeki hata %82 gibi büyük bir hata oranına çıkabilmektedir. Kısacası Chebyshev hızlandırmasının dominans oranının yüksek olduğu problemlerde daha etkili olduğu söylenebilir.

Burada yapılan tüm koşullar dikkate alınırse belli bir problem için sınır elemanları ızgarası incelidikçe dominans oranının arttığı görölmektedir. Bu nedenle ızgara incelidikçe iterasyon sayısı kazanç yüzdesi dominans oranına bağılı olarak artmamakta hatta biraz daha azalabilmektedir. Bu etkinin belki dominans oranı tahminini iyileştirecek bir değışiklikle optimize edilmesi düşünölebilir.

BÖLÜM 5

SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, çok gruplu nötron difüzyon denklemlerinin sınır elemanları yöntemi ile ayrıklaştırılması sonucu ortaya çıkan özdeğer-özvektör probleminin en büyük özdeğerinin ve bu özdeğere karşılık gelen özvektörlerin hesaplanması için kullanılan güç iterasyonunun Chebyshev polinomları kullanılarak hızlandırılması incelenmiş ve yapılan sayısal uygulamalar aracılığı ile irdelenmiştir. Chebyshev polinomsal hızlandırması, çok gruplu nötron difüzyon denklemlerinin almaşık (sonlu farklar, sonlu elemanlar) yöntemlerle ayrıklaştırılması sonucu ortaya çıkan özdeğer-özvektör probleminin çözümlerinde de başka araştırmacılar tarafından kullanılmıştı. Ancak, yukarıda anılan sonlu farklar, sonlu elemanlar gibi sayısal yöntemler simetrik ve seyrek yapıda matrisler üretirken, sınır elemanları yöntemi dolu ve simetrik olmayan yapıda katsayılar matrisleri üretmektedir. Sınır elemanları yönteminin pek de arzu edilmeyen bu matris yapısına tahammül edilmesinin tek nedeni, tüm sistem içinde bilinmeyenler çıkaran almaşık yöntemlerden farklı olarak sadece sistem sınırında bilinmeyenler içermesidir. Bu nedenle sınır elemanları kullanıldığı zaman üç boyutlu problem adeta iki boyuta, iki boyutlu problem ise adeta tek boyuta indirgenmekte, lineer sistem boyutları almaşık yöntemlere göre çok azalabilmektedir. Fakat sınır elemanları yönteminde matris yapısının almaşık yöntemlere göre radikal bir biçimde değişimi, almaşık yöntemlerde etkin olan sayısal tekniklerin, sınır elemanları söz konusu olduğu zaman ne denli etkin olabileceği sorusunu ortaya çıkarmaktadır. Bu çalışma kapsamında da daha önce almaşık yöntemlerde başarı ile uygulanabilmiş olan özdeğer probleminin Chebyshev polinomları tekniği ile hızlandırılması araştırılmıştır.

Bu araştırma kapsamında, ilk önce MATHEMATICA yazılımı kullanılarak sınır elemanları ayrıklaştırması sonucu dolaylı olarak ortaya çıkan özdeğer-özvektör probleminin tüm özdeğerleri hesaplanmıştır. Burada yapılan sayısal deneylerle, sınır elemanlarının simetrik olmayan matris yapısına rağmen, tüm özdeğerlerin gerçel ve

nonnegatif olduğu anlaşılmıştır. Bu tespit, sınır elemanları metodunun Chebyshev polinomsal hızlandırması için gerekli alt yapının bulunduğu anlamına gelmektedir. Nitekim geliştirilen Chebyshev hızlandırılmalı sabit ve lineer sınır elemanları programları BMGCH ve BMGLCH'in koşulması sonucu Chebyshev polinomsal hızlandırmasının sınır elemanları nötron difüzyon uygulamalarında etkin olduğunu göstermiştir. Bu bağlamda bilinen bir sayısal yöntem (Chebyshev polinomsal hızlandırması) yeni bir sahaya (sınır elemanları çok gruplu nötron difüzyon formülasyonu) uygulanarak özgün bir çalışma üretilmiştir.

Yapılan sayısal incelemeler sonunda, Chebyshev polinomsal hızlandırmasının özellikle yüksek dominans oranına sahip problemlerde çok verimli olduğu gözlemlenmiştir. Öte yandan, belirli bir problemde sınır elemanları ızgarası incelidikçe, dominans oranının arttığı görülmüştür. Ancak ızgara incelidikçe önerilen dominans oranı tahmin yönteminin ürettiği dominans oranı tahmininde yüzde hata artabilmektedir. Bu da ızgara incelidikçe Chebyshev polinomsal hızlandırmasının arzu edilenden biraz daha az verimli olmasına yol açmaktadır. Bu nedenle gelecekteki araştırmalar için dominans oranı tahmini algoritmasında başka alternatiflerin de değerlendirilmesi akılcı bir yol olacaktır. Bu araştırma sadece homojen nükleer sistemlerle sınırlı olarak yürütülmüştür. Oysa karmaşık yapıya sahip çok bölgeli sistemlerde yüksek dominans oranı görülmesi ve Chebyshev polinomsal hızlandırmasının etkin olması beklenebilir. Chebyshev polinomsal hızlandırmasının çok gruplu çok bölgeli problemlere de uygulanabilir hale getirilmesi faydalı olacaktır.

KAYNAKLAR

- [1] **Brebbia, C.A. and Dominguez, J.**, 1989. Boundary Elements an Introductory Course, Computational Mechanics Publications, Avon.
- [2] **Itagaki, M.**, 1985. Boundary element methods applied to two-dimensional neutron diffusion equation, *Journal of Nuclear Science and Technology*, **22**, 565.
- [3] **Ozgener, B. and Ozgener, H.A.**, 1993. The solution of the criticality eigenvalue problems in the application of the boundary element method to the neutron diffusion equation, *Annals of Nuclear Energy*, **20**(7), 503-518.
- [4] **Ozgener, B. and Ozgener, H.A.**, 1994. The application of the multiple reciprocity method to the boundary element formulation of the neutron diffusion equation, *Annals of Nuclear Energy*, **21**(11), 711-723.
- [5] **Nowak, A.J. and Neves, A.C.**, 1994. The Multiple Reciprocity Boundary Element Methods, Computational Mechanics Publications, Southampton, Boston.
- [6] **Ozgener, B.**, 1998. A boundary integral equation for boundary element applications in multigroup neutron diffusion theory, *Annals of Nuclear Energy*, **25**(6), 347-357.
- [7] **Purwadi, M.D., Tsuji, M.N., Narita, M. and Itagaki, M.**, 1998. A hierarchical domain decomposition boundary element method applied to the multiregion problems of neutron diffusion equations, *Nuclear Science and Engineering*, **129**, 88-96.
- [8] **Ozgener, B. and Ozgener, H.A.**, 2001. A multi-region boundary element method for multigroup neutron diffusion calculations, *Annals of Nuclear Energy*, **28**(6), 585-616.
- [9] **Purwadi, M.D., Tsuji, M.N., Narita, M. and Itagaki, M.**, 1998. An application of the domain decomposition method into the boundary element method for solving the multi-region neutron diffusion equation, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **20**, 197-204.
- [10] **Maiani, M., Montagnini, B.**, 1999. A boundary element-response matrix method for the multigroup neutron diffusion equations, *Annals of Nuclear Energy*, **26**, 1341-1369.

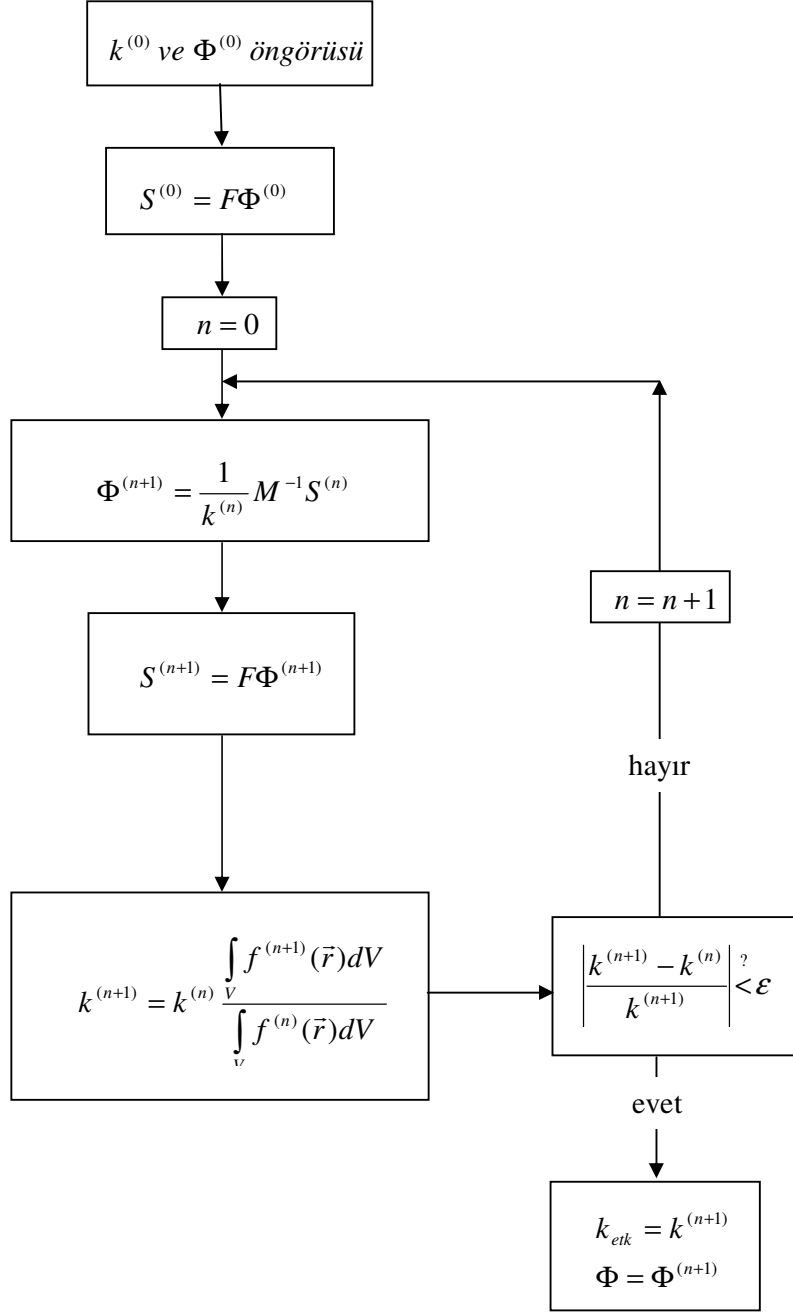
- [11] **Maiani, M., Montagnini, B.,** 2004. A Galerkin approach to the boundary element-response matrix method for the multigroup neutron diffusion equations, *Annals of Nuclear Energy*, **31**, 1447-1475.
- [12] **Cavdar, S., Ozgener, H.A.,** 2004. A finite element/boundary element hybrid method for 2-D neutron diffusion calculations, *Annals of Nuclear Energy*, **31**, 1555-1582.
- [13] **Itagaki, M., Nishiyama, S., Tomioka, S., Enoto, T., Sahashi, N.,** 1997. Power iterative multiple reciprocity boundary element method for solving three-dimensional Helmholtz eigenvalue problems, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **20**, No.2, pp.113-121.
- [14] **Vidal, V., Verdu, G., Ginestar, D., Munoz-Cobo, J.L.,** 1997. Eigenvalues calculation algorithms for λ -modes determination. Parallelization approach, *Annals of Nuclear Energy*, **24**, No.5, pp.387-410.
- [15] **Verdu, G., Miro, R., Ginestar, D., Vidal, V.,** 1999. The implicit restarted Arnoldi method, an efficient alternative to solve the neutron diffusion equation, *Annals of Nuclear Energy*, **26**, pp. 579-593.
- [16] **Verdu, G., Ginestar, D., Vidal, V., Munoz-Cobo, J.L.,** 1994. 3D λ -modes of the neutron diffusion equation, *Annals of Nuclear Energy*, **21**, No.7, pp. 405-421.
- [17] **Vidal, V., Verdu, G., Ginestar, D., Munoz-Cobo, J.L.,** 1998. Variational acceleration for subspace iteration method. Application to Nuclear Power Reactors, *Annals of Nuclear Energy*, **41**, pp. 391-407.
- [18] **Smithe, D., Ludeking, L.,** 1997. An eigenmode solution algorithm based on high-order power iteration with fractally ordered shifts, *Computer Physics Communications*, **106**, 95-104.
- [19] **Woznicki, Z.I.,** 1998. The numerical analysis of eigenvalue problem solutions in the multigroup neutron diffusion theory, *Progress in Nuclear Energy*, **33**, No.3, pp.301-391.
- [20] **Saad, Y.,** 1984. Chebyshev acceleration techniques for solving nonsymmetric eigenvalue problems, *Mathematics of Computation*, **42**, No.166, pp.567-588.
- [21] **Nakamura, S.,** 1970. A variational rebalancing method for linear iterative convergence scheme of neutron diffusion and transport equations, *Nuclear Science and Engineering*, **39**, 278-283.
- [22] **Nakamura, S.,** 1971. Coarse mesh acceleration of iterative solution of neutron diffusion equation, *Nuclear Science and Engineering*, **43**, 116-120.

- [23] **Nakamura, S.**, 1977. Computational Methods in Engineering and Science, John Wiley&Sons, Inc, USA.
- [24] **Ozgener, B.**, 1988. Sonlu elemanlar yönteminin üç boyutlu çok gruplu difüzyon denklemlerine uygulanması, *Doktora Tezi*, İ.T.Ü. Nükleer Enerji Enstitüsü, İstanbul.
- [25] **Santandrea, S., Sanchez, R.**, 2002. Acceleration techniques for the characteristic method in unstructured meshes, *Annals of Nuclear Energy*, **29**, 323-352.
- [26] **Patton, B.W., Holloway, J.P.**, 2000. Application of preconditioned GMRES to the numerical solution of the neutron transport equation, *Annals of Nuclear Energy*, **29**, 109-136.
- [27] **Park, J.P., Cho, N.Z.**, 2001. A linear multiple balance method with high order accuracy for discrete ordinates neutron transport equations, *Annals of Nuclear Energy*, **28**, 1499-1517.
- [28] **Kosaka, S., Saji, E.**, 2000. Transport theory calculation for a heterogeneous multi-assembly problem by characteristics method with direct neutron path linking technique, *Journal of Nuclear Science and Technology*, **37**, No.12, p.1015-1023.
- [29] **Kitada, T., Takeda, T.**, 2001. Effective convergence of fission source distribution in Monte Carlo simulation, *Journal of Nuclear Science and Technology*, **38**, No.5, p.324-329.
- [30] **Alp, C.**, 1976. Dama tahtası biçiminde yeni bir havuz tipi araştırma reaktörünün nötron fizik dizayn hesapları, *Doktora Tezi*, İ.T.Ü. Nükleer Enerji Enstitüsü, İstanbul.
- [31] **Özgener, B., Kabadayı, Y.**, 1996. Difüzyon teorisi yetkinlik özdeğer probleminin sonlu elemanlar yöntemiyle çözümünde Chebyshev polinomsal hızlandırması, *VII. Ulusal Nükleer Bilimler ve Teknoloji Kongresi*, İ.T.Ü. Nükleer Enerji Enstitüsü, 1-6 Eylül.
- [32] **Duderstadt, J.J., Hamilton, L.J.**, 1976. Nuclear Reactor Analysis, John Wiley&Sons, Inc., Newyork.
- [33] **Varga, R.S.**, 1962. Matrix Iterative Analysis, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.
- [34] **Gene, H.G. and Loan, C.F.V.**, 1989. Matrix Computations, Johns Hopkins Uni. Press, Baltimore.
- [35] **Hageman, L.A. and Young, D.M.**, 1981. Applied Iterative Methods, Academics Press, Inc.

- [36] **Özgener, H.A.**, 1987. Reaktör Teorisi ders notları, İ.T.Ü. Nükleer Enerji Enstitüsü, İstanbul.
- [37] **Güngördü, E.**, 1987. İki boyutlu silindrisel geometride çok gruplu nötron difüzyon denklemlerinin sonlu fark metodu ile sayısal çözümü, *Yüksek Lisans Tezi*, İ.T.Ü. Nükleer Enerji Enstitüsü, İstanbul.
- [38] **Banerjee, P.K.**, 1994. The Boundary Element Methods in Engineering, McGraw-Hill London; New York.
- [39] **Paris, F., Canas, J.**, 1997. Boundary Element Method: Fundamentals and Applications, Oxford: Oxford University Press.
- [40] **Çavdar, Ş.**, 1995. İki boyutlu iki gruplu nötron difüzyon denkleminin çözümünde sınır elemanları yönteminin kullanılması, *Yüksek Lisans Tezi*, İ.T.Ü. Nükleer Enerji Enstitüsü, İstanbul.
- [41] **Ustaaramoğlu, S.**, 1997. İki boyutlu iki gruplu nötron difüzyon denkleminin lineer sınır elemanları ile çözümü, *Yüksek Lisans Tezi*, İ.T.Ü. Nükleer Enerji Enstitüsü, İstanbul.
- [42] **Işıklı, H.**, 1999. Tek gruplu nötron difüzyon denkleminin kuadratik sınır elemanları metodu ile çözülmesi, *Yüksek Lisans Tezi*, İ.T.Ü. Nükleer Enerji Enstitüsü, İstanbul.
- [43] **İzgi, N.**, 2001. İki boyutlu iki gruplu nötron difüzyon denkleminin kuadratik sınır elemanları metodu ile çözümü, *Yüksek Lisans Tezi*, İ.T.Ü. Nükleer Enerji Enstitüsü, İstanbul.
- [44] **Zienkiewicz, O.C., Morgan, K.**, 1983. Finite Elements and Approximation, New York, Wiley.
- [45] **Kabadayı, Y., Özgener, B.**, 1993. Nötron difüzyon hesapları için bir genel geometri sonlu elemanlar yöntemi, "VI. Ulusal Nükleer Bilimler Kongresi, Uludağ Üni., Bursa.
- [46] **Atkinson, K.E.**, 1989. An Introduction to Numerical Analysis, New York, Wiley.
- [47] **Faddeeva, V.N.**, 1959. Computational Methods of Linear Algebra (Translated by C.D. Benster). Dover Pub. Inc., New York.
- [48] **Fox, L., Parker, I.B.**, 1968. Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis, Oxford University Press, London.
- [49] **Mason, J.C., Handscomb, D.C.**, 2003. Chebyshev Polynomials, Boca Raton, Fla., Chapman&Hall/CRC.

- [50] **Varga, R.S.**, 1961. Numerical methods for solving multigroup diffusion equations. In Proc. Symp. Appl. Math. **XI**, pp.164-189. *American Mathematical Society*, Providence, Rhode Islands.
- [51] **Hagemann, L.A.**, 1963. Numerical methods and techniques used in two-dimensional neutron diffusion program, PDQ-5, WAPD-TM 364.

EK A
Fisyon Kaynağı İterasyonu Algoritması



Şekil A.1: Fisyon kaynağı iterasyonu algoritması

EK B

İki Boyutlu Sistemler için Temel Çözüm

Homojen bir sistemin temel çözümü, (2.18) eşitliğindeki sonsuz ortam Green fonksiyonunun temel çözümüdür.

$$\nabla^2 G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) - k_g^2 G_g(\vec{r}, \vec{\rho}) = -\delta(\vec{r} - \vec{\rho}) \quad (\text{B.1})$$

Dirac Delta fonksiyonunun özelliğinden, işlemlerin basitleştirilmesi amacıyla merkezde,

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{\rho} \\ \rho_1 &= \rho \cdot \cos \theta \\ \rho_2 &= \rho \cdot \sin \theta \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

şeklinde alınmaktadır. Bu durumda,

$$\vec{r} = \sqrt{(x - \rho_1)^2 + (x - \rho_2)^2} \quad (\text{B.3})$$

olur.

$\vec{r} = |\vec{r} - \vec{\rho}|$ tanımından (B.1)

$$\nabla^2 G_g(\vec{r}) - k_g^2 G_g(\vec{r}) = -\delta(\vec{r}) \quad (\text{B.4})$$

şeklinde olur. Dirac Delta fonksiyonunun özelliğinden dolayı r 'nin iki farklı durumu incelenmelidir.

$\vec{r} \neq 0$ durumu:

$$\nabla^2 G_g(\vec{r}) - k_g^2 G_g(\vec{r}) = 0 \quad (\text{B.5})$$

i merkezli r yarıçaplı sonsuz uzunluktaki silindir için,

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dG_g(\vec{r})}{dr} \right) - k_g^2 G_g(\vec{r}) = 0 \quad (\text{B.6})$$

şeklinde ve (B.6) denkleminin çözümü modifiye Bessel fonksiyonudur. K_0 ve I_0 “0” ıncı mertebe modifiye Bessel fonksiyonları olmak üzere,

$$G_g(\vec{r}) = AK_0(k_g r) + CI_0(k_g r) \quad (\text{B.7})$$

şeklinde olmaktadır. (B.7) denkleminin sınır şartları uygulandığında, $r \rightarrow \infty$ olduğunda $G(r)$ sonlu olmalıdır.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} I_0(k_g r) \rightarrow \infty \quad (\text{B.8})$$

olduğundan $C=0$ olmalıdır. Bu durumda çözüm,

$$G_g(\vec{r}) = AK_0(k_g r) \quad (\text{B.9})$$

şeklinde elde edilir.

$\vec{r} = 0$ durumu:

(B.4) eşitliğinin bütün terimlerinin V hacmi üzerinden integrali alınır,

$$\int_V \nabla^2 G_g(\vec{r}) dV - k_g^2 \int_V G_g(\vec{r}) dV = - \int_V \delta(\vec{r}) dV \quad (\text{B.10})$$

şeklinde olur. (B.10) denkleminin ilk terimine Gauss teoremi uygulanırsa,

$$\int_V \nabla^2 G_g(\vec{r}) dV = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} G_g(\vec{r}) dV = \int_S \frac{\partial G_g(\vec{r})}{\partial n} dS \quad (\text{B.11})$$

şeklinde olur ve çember üzerinde herhangi bir noktanın normal vektörü ile yarıçap vektörü aynı doğrultuda olduğundan $n \equiv r$ olarak alınabilir. Bu durumda (B.11) denklemi,

$$\int_S \frac{\partial G_g(\vec{r})}{\partial n} dS = \frac{\partial G_g(\vec{r})}{\partial n} 2\pi r \quad (\text{B.12})$$

şeklinde olur. V hacmi çok küçük olduğundan (B.10) denklemindeki ikinci terim “0” olmaktadır. Bu durumda (B.10) eşitliği (B.12)’den,

$$\frac{\partial G_g(\vec{r})}{\partial n} 2\pi r = -1 \quad (\text{B.13})$$

şeklinde olmaktadır. $r \rightarrow 0$ için limit alınır,

$$\lim_{r \rightarrow 0} AK_0(k_g r) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2\pi} \ln r \right) \quad (\text{B.14})$$

olur ve

$$\lim_{r \rightarrow 0} AK_0(k_g r) + \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \ln r \quad (\text{B.15})$$

şeklinde olur. $K_0(k_g r)$ açılımında $r \rightarrow 0$ durumunda “-lnr” dışındaki bütün terimlerin limiti “0” olmaktadır. Bu durumda (B.15) eşitliği,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(-A \ln r + \frac{1}{2\pi} \ln r \right) \quad (\text{B.16})$$

şeklinde olur ve buradan

$$A = \frac{1}{2\pi}$$

elde edilir, buradan (B.9) denkleminin çözümü

$$G_g(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} K_0(k_g r) \quad (\text{B.17})$$

şeklinde elde edilir [40,42].

EK C

BMG Yazılımındaki Alt Programların Açıklaması

ANA PROGRAM: Değişken boyutlama parametrelerini okumaktadır. Sistemin geometrik yapısı, malzeme dağılımı ile ilgili verileri ve dış iterasyon yakınsama ölçütlerini okumaktadır. k_{etk} çoğaltma katsayısının yakınsamasını kontrol eder ve gerekli alt programları çağırır.

SETINT: Sayısal integrasyon için gerekli integrasyon noktalarını ve integrasyon ağırlıklarını okumaktadır. Integrasyon noktaları, bilinear dörtgen elemanlar için XIQ dizisinde, üçgen elemanlar için XIT dizisinde, integrasyon ağırlıkları dörtgen elemanlar için WQ dizisinde, üçgen elemanlar için WT dizisinde depolanmaktadır.

INPUTPC: Grup sayısını, malzeme verisini, düğüm noktası koordinatlarını okumaktadır.

RNODE: Düğüm noktası koordinatlarını okuma ve üretme altprogramıdır.

RELEM: Eleman verilerini okuma ve üretme altprogramıdır.

GHMATPC: G ve H matrislerini G matrisi altında toplayıp, A sistem katsayılar matrisini oluşturmaktadır.

LUDCMP: A sistem katsayılar matrisini Crout ayrışım metodu ile alt ve üst matrislere ayırmaktadır.

FORM: Filyon kaynak teriminin ve iç akıların hesaplanması için gerekli matrisleri çözmektedir.

FISOR: Filyon kaynağı iterasyonunun yapıldığı alt programdır, filyon kaynak vektörünü ve k_{etk} çoğaltma katsayısını hesaplamaktadır.

LUBKSB: Kaynak vektörünü hesaplamaktadır.

INTERPC: İç akıları hesaplamaktadır.

OUTPTPC: Hesaplanan sınır akısı ve iç akı değerlerini çıkış dosyasına yazmaktadır.

Alt programlar içindeki alt programlar:

QUAD: Kuadratik dörtgen elemanlar için P ve R matrislerini hesaplamaktadır.

TRI: Kuadratik üçgen elemanlar için P ve R matrislerini hesaplamaktadır.

EXTINPC: G, H ve P, R integrallerini hesaplamaktadır.

LOCINPC: G matrisinin köşegen elemanlarını hesaplamaktadır.

BMGCH'de BMG programındaki FISOR altprogramı yerine, filyon kaynağı iterasyonunu Chebyshev polinomsal metodu ile hızlandıran CHEB altprogramı vardır.

EK D

BMG Yazılımındaki Giriş Verileri

INPUTPC

N	: Toplam sınır elemanı sayısı
NGT	: Toplam grup sayısı
DIF(I)	: g 'inci grup difüzyon sabiti
DIFL(I)	: g 'inci grup difüzyon uzunluğu
SIGF(I)	: g 'inci grup makroskopik fisyon verim tesir kesiti
XF(I)	: g 'inci grup makroskopik fisyon tesir kesiti
XKSI(I)	: Fisyonda yayınlanan bir nötronun g 'inci gruba ait olması olasılığı
XSECT(I)	: h grubundan g grubuna makroskopik saçılma tesir kesiti
X(I),Y(I)	: İlgili kayıttaki ilk nodun koordinatlarının x-y eksenindeki izdüşümü
KODE(I)	: Elemanlara ait sınır şartları, 0/1 boşluk/yansıtıcı sınır şartları
NNODE	: Sistemdeki toplam nod sayısı
NELEM	: Sistemdeki toplam eleman sayısı
NETSOR	: 0/1 serbest kaynak yok/ serbest kaynak var
NFISOR	: 0/1 fisyon kaynağı yok/ fisyon kaynağı var
ITMAX	: Maksimum iterasyon sayısı
EPS	: Yakınsama ölçütü
ENGEN1	: k_{eff} öngörüsü
FINOR	: Normalizasyon parametresi

RNODE

NREC	: Kayıt sayısı
N1	: İlgili kayıttaki ilk nod numarası
NUM	: Oluşturulacak nod sayısı
INC	: İlgili kayıttaki nodların kaçar arttığı
X1	: İlgili kayıttaki ilk nodun x eksenindeki izdüşümü
Y1	: İlgili kayıttaki ilk nodun y eksenindeki izdüşümü
XN	: İlgili kayıttaki son nodun x eksenindeki izdüşümü
YN	: İlgili kayıttaki son nodun y eksenindeki izdüşümü

RELEM

NREC	: Kayıt sayısı
NUM	: İlgili kayıttaki ilk elemanın numarası
INC	: İlgili kayıttaki elemanların kaçar arttığı
NEE	: İlgili elemanın kaç nod sayısı içerdiği

OUTPTPC

P	: Güç
---	-------

EK E

Tek ve İki Gruplu Nötron Difüzyon Teorisi Yetkinlik Özdeğer Problemleri için Analitik Çözümler

Tek gruplu nötron difüzyon teorisi yetkinlik özdeğer probleminin analitik çözümü

Bir nükleer sistem için nötron difüzyon denkleminin çözülmesi sonucunda yetkinlik şartı,

$$k_{etk} = \frac{\nu \Sigma_f / \Sigma_a}{1 + L^2 B_g^2} \quad (E.1)$$

ve

$$\Phi(\vec{r}) = 0 \quad ; \vec{r} \in S \quad (E.2)$$

sınır şartı altında bir kenarının uzunluğu a birim olan kare şeklindeki bir nükleer sistemin akı dağılımı

$$\Phi(x, y) = \Phi_0 \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{\pi}{a} y\right) \quad (E.3)$$

$$\Phi_0 = \frac{P}{\omega_f \Sigma_f \int \int \Phi(x, y) dx dy} \quad (E.4)$$

ve geometrik akı bükümü ile difüzyon uzunluğu,

$$B_g^2 = 2 \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \quad L = (D / \Sigma_a)^{1/2} \quad (E.5)$$

eşitliklerinden hesaplanır.

İki gruplu nötron difüzyon teorisi yetkinlik özdeğer probleminin analitik çözümü

İki gruplu nötron difüzyon denklemi,

$$\begin{aligned} -D_1 \nabla^2 \Phi_1(\vec{r}) + \Sigma_{r,1} \Phi_1(\vec{r}) &= \frac{1}{k_{etk}} \chi_1 (\nu_1 \Sigma_{f,1} \Phi_1(\vec{r}) + \nu_2 \Sigma_{f,2} \Phi_2(\vec{r})) \quad \vec{r} \in V \\ -D_2 \nabla^2 \Phi_2(\vec{r}) + \Sigma_{r,2} \Phi_2(\vec{r}) &= \frac{1}{k_{etk}} \chi_2 (\nu_1 \Sigma_{f,1} \Phi_1(\vec{r}) + \nu_2 \Sigma_{f,2} \Phi_2(\vec{r})) + \Sigma_{s,2 \leftarrow 1} \Phi_1(\vec{r}) \quad (E.6) \end{aligned}$$

şeklindedir. Denklemin çözümü için,

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi_g(x, y) = \Phi_g \Psi_g(x, y) \quad (E.7)$$

yaklaşımı yapılır ve yukarıdaki denkleme yerleştirilip akının konuma bağıllığı için

$$\nabla^2 \Psi_g(\vec{r}) + B_g^2 \Psi_g(\vec{r}) = 0 \quad (E.8)$$

yaklaşımı yapılırsa,

$$\begin{aligned} (D_1 B_g^2 + \Sigma_{r,1}) \Phi_1 &= \frac{1}{k_{etk}} \chi_1 (\nu_1 \Sigma_{f,1} \Phi_1 + \nu_2 \Sigma_{f,2} \Phi_2) \\ (D_2 B_g^2 + \Sigma_{r,2}) \Phi_2 - \Sigma_{s,2 \leftarrow 1} \Phi_1 &= \frac{1}{k_{etk}} \chi_2 (\nu_1 \Sigma_{f,1} \Phi_1 + \nu_2 \Sigma_{f,2} \Phi_2) \quad (E.9) \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Problemin yetkinlik şartı için,

$$\det \begin{vmatrix} D_1 B_g^2 + \Sigma_{r,1} - \frac{1}{k_{etk}} \chi_1 \nu_1 \Sigma_{f,1} & -\frac{1}{k_{etk}} \chi_1 \nu_2 \Sigma_{f,2} \\ -(\Sigma_{s,2 \leftarrow 1} + \frac{1}{k_{etk}} \chi_2 \nu_1 \Sigma_{f,1}) & D_2 B_g^2 + \Sigma_{r,2} - \frac{1}{k_{etk}} \chi_2 \nu_2 \Sigma_{f,2} \end{vmatrix} = 0 \quad (E.10)$$

determinantı hesaplanmalıdır. Determinant açılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$k_{etk} = \frac{\chi_2 \nu_2 \Sigma_{f,2}}{D_2 B_g^2 + \Sigma_{r,2}} + \frac{\chi_1 \nu_1 \Sigma_{f,1}}{D_1 B_g^2 + \Sigma_{r,1}} + \frac{\chi_1 \nu_2 \Sigma_{f,2} \Sigma_{s,2 \leftarrow 1}}{(D_1 B_g^2 + \Sigma_{r,1})(D_2 B_g^2 + \Sigma_{r,2})} \quad (E.11)$$

eşitliği elde edilir.

Burada $B_g^2 = 2 \left(\frac{\pi}{a} \right)^2$ geometrik akı bükümü olmak üzere, birinci grup akısının ikinci grup akısına oranı S ile gösterilirse,

$$S = \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{\left(D_2 B_g^2 + \Sigma_{a,2} - \frac{1}{k_{eff}} \nu_2 \Sigma_{f,2} \right)}{\left(\Sigma_{s,2 \leftarrow 1} + \frac{1}{k_{eff}} \nu_1 \Sigma_{f,1} \right)} \quad (E.12)$$

elde edilir. Kenar uzunluğu a (cm) olan kare biçimindeki bir nükleer sistem üzerindeki akının konum bağımlılığı,

$$\Psi(x, y) = \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{a}y\right) \quad (E.13)$$

$$\Phi_1(x, y) = S\Phi_2\Psi(x, y) \quad (E.14)$$

$$\Phi_2(x, y) = \Phi_2\Psi(x, y) \quad (E.15)$$

şeklindedir.

$$\Phi_2 = \frac{P}{\omega_f(\Sigma_{f,2} + S\Sigma_{f,1}) \iint_{x,y} \Psi(x, y) dx dy} \quad (E.16)$$

şeklinde grup akıları elde edilir.

ÖZGEÇMİŞ

21.03.1971 tarihinde Erzurum’da doğdu, ilk ve ortaokulu İstanbul Küçükçekmece’de, liseyi ise İstanbul Çamlıca Kız Lisesi’nde tamamladı. İstanbul üniversitesi Fen Fakültesi Astronomi ve Uzay Bilimleri bölümünü 1989-1993 yılları arasında tamamladı. 1993 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Dil Tarih bölümünde İngilizce hazırlık okuduktan sonra, Nükleer Enerji Enstitüsü yüksek lisans programını Şubat 1997 döneminde bitirdi. Şubat 1998 döneminde aynı enstitüde doktora eğitimine başladı. Şu anda Yıldız Teknik Üniversitesi Bilgi İşlem dairesinde uzman kadrosunda çalışmaktadır.