

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**TABAKALI KOMPOZİT PLAKLARIN DOĞRUSAL VE GEOMETRİK BAKIMDAN
DOĞRUSAL OLMAYAN HESABI İÇİN YENİ BİR SONLU ELEMAN**

DOKTORA TEZİ

Kazım Ahmet HAŞİM

İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Yapı Mühendisliği Programı

EKİM 2014

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**TABAKALI KOMPOZİT PLAKLARIN DOĞRUSAL VE GEOMETRİK BAKIMDAN
DOĞRUSAL OLMAYAN HESABI İÇİN YENİ BİR SONLU ELEMAN**

DOKTORA TEZİ

**Kazım Ahmet HAŞİM
(501072013)**

İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Yapı Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ahmet Işın SAYGUN

EKİM 2014

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 501072013 numaralı Doktora Öğrencisi **Kazım Ahmet HAŞİM**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “**TABAKALI KOMPOZİT PLAKLARIN DOĞRUSAL VE GEOMETRİK BAKIMDAN DOĞRUSAL OLMAYAN HESABI İÇİN YENİ BİR SONLU ELEMAN**” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Ahmet I. SAYGUN**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Metin AYDOĞAN**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Mustafa ZORBOZAN
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Gülay ALTAY
Boğaziçi Üniversitesi

Prof. Dr. Engin ORAKDÖĞEN
İstanbul Teknik Üniversitesi

Teslim Tarihi : 24 Temmuz 2014

Savunma Tarihi : 22 Ekim 2014

Çok sevgili annem ve babama,

ÖNSÖZ

Kompozit malzemeler iki veya daha fazla sayıda malzemenin birlikte daha iyi mühendislik özellikleri sergileyebilmeleri amacıyla biraraya getirilmesi sonucu oluşur. Kompozit malzeme oluşturulması ile malzemenin rijitliği, mukavemeti, korozyon dayanımı, termal özellikler ve yorulma ömrü gibi birçok özellik iyileştirilebilmektedir.

Bunun sonucunda geçen yirmi yıl içerisinde birçok mühendislik alanında (uçak, makina, inşaat vb) kompozit malzemenin kullanımında artış gözlenmiş ve buna paralel olarak kompozit malzemelerden oluşturulmuş tabakalı kompozit plak ve kabukların analizi ve tasarımı üzerine yapılan çalışmalar ve yayınlar hız kazanmıştır.

Tabakalı kompozit plak ve kabuklar; prefabrike kirişlerin köprü ayaklarına mesnetlendiği elastomer mesnetlerden uçak-uzay mühendisliğinde uçak kanatlarının tasarımına kadar geniş bir kullanım alanına sahip olmuştur.

Bu çalışmada tabakalı teoriye göre tabakalı kompozit plakların doğrusal ve geometrik bakımdan doğrusal olmayan analizi için yeni bir sonlu eleman geliştirilerek FORTRAN dilinde programlanmış, elde edilen sonuçlar literatürde verilen analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Çalışmamda benden yardımlarını, desteğini, sabrını ve bilgisini esirgemeyen hocam Sayın Prof. Dr. Ahmet Işın SAYGUN başta olmak üzere Prof. Dr. Metin AYDOĞAN'a, Prof. Dr. Mustafa ZORBOZAN'a , Yrd. Doç. Dr. Mecit ÇELİK'e, Yrd. Doç. Dr. Burcu GÜNEŞ'e ve Arş. Gör. Dr. Akif KUTLU'ya teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Son olarak; en zor zamanlarda bana moral veren, yanımda destek olan canım annem ve babama çok teşekkür ederim.

Temmuz 2014

Kazım Ahmet HAŞİM
(İnşaat Mühendisi)

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	vii
İÇİNDEKİLER.....	ix
KISALTMALAR.....	xiii
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xv
ŞEKİL LİSTESİ.....	xvii
ÖZET.....	xxi
SUMMARY.....	xxiii
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Literatür Araştırması	2
1.2 Çalışmanın Amacı ve Kapsamı	5
2. KOMPOZİT PLAKLARDA GERİLME ŞEKİLDEĞİŞTİRME BÜNYE BAĞINTILARI.....	7
2.1 Bünye Bağıntıları Matrisinin Dönüştürülmesi	12
3. LİTERATÜRDE YER ALAN TABAKALI KOMPOZİT PLAK ANALİZLERİ.....	15
3.1 Klasik Tabakalı Plak Teorisi (KPT) (İnce Plak - Kirchhoff Hipotezi)	15
3.2 Tabakalı Plaklarda Birinci Mertebe Kayma Deformasyon Teorisi.....	16
3.2.1 Yerdeğiştirme – şekildeğiştirme bağıntıları	16
3.2.2 Özel tabakalanma tipleri.....	21
3.2.2.1 Simetrik tabakalanma	21
3.2.2.2 Antimetrik tabakalanma	23
3.3 Tabakalı Plaklarda Yüksek Mertebe Kayma Deformasyon Teorisi.....	23
3.4 Tabakalı Plaklarda Zigzag Etkili Yüksek Mertebe Kayma Deformasyon Teorisi	32
4. GELİŞTİRİLEN SONLU ELEMAN ÇÖZÜMLERİ İLE KARŞILAŞTIRILMAK ÜZERE TABAKALI KOMPOZİT PLAKLARIN SİLİNDİRİK EĞİLME HALİNE AİT LİNEER STATİK ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ	35
4.1 Giriş.....	35
4.2 Klasik Plak Teorisi Kullanılarak Silindirik Eğilmeli Duruma Ait Kesin Çözüm	36
4.2.1 Euler-Lagrange Denge Denklemleri	36
4.3 Birinci Mertebe Kayma Deformasyon Teorisi Kullanarak Silindirik Eğilmeli Duruma Ait Kesin Çözüm	44
4.3.1 Euler- Lagrange Denge Denklemleri	44

5. GELİŞTİRİLEN SONLU ELEMAN İLE KARŞILAŞTIRILMAK ÜZERE İZOTROPİK VE ORTOTROPİK DAİRESEL PLAKLARIN LİNEER STATİK KESİN ÇÖZÜMLERİ	49
5.1 Giriş	49
5.2 Dönel Simetrik, Üniform Yayılı Yüklü, İzotrop Dairesel Plaklara Ait Analitik Çözüm.....	49
5.2.1 Eğilmenin Deplasman Eğrisine Etkisi.....	49
5.2.2 Kaymanın Deplasman Eğrisine Etkisi.....	50
5.3 Dönel Simetrik, Üniform Yayılı Yüklü, Ortotrop Dairesel Plaklara Ait Analitik Çözüm.....	51
5.3.1 Eğilmenin Deplasman Eğrisine Etkisi.....	51
5.3.2 Kaymanın Deplasman Eğrisine Etkisi.....	52
6. TABAKA DUYARLI TEORİYE GÖRE GELİŞTİRİLEN TABAKALI KOMPOZİT PLAK SONLU ELEMAN	55
6.1 Tabakalı Plak Sonlu Elemana Ait Yerdeğiştirme Parametreleri ve Şekil Fonksiyonları	56
6.2 Geliştirilen Sonlu Elemana Ait Birinci Mertebe Rijitlik Matrisinin Bulunması	61
6.3 Geliştirilen Sonlu Elemana Ait Yükleme Matrisinin Bulunması	63
6.4 Jacobyen Matrisi ve Lokal Şekil Fonksiyonlarının Global Eksenlere Göre Türevlerinin Alınması.....	64
6.5 Gauss Kuadraturü İle Nümerik İntegrasyon.....	67
6.6 Dikdörtgen Bir Sonlu Elemanın Çarpım Tabloları ile Rijitlik Matrisinin Kurulması.....	68
7. YANAL YÜK VE DÜZLEMİÇİ (MEMBRAN) KUVVETLERİN BİRLİKTE ETKİ ETMESİ HALİNDE TABAKALI KOMPOZİT PLAKLAR.....	75
7.1 Giriş	75
7.2 Başlangıçta Düzlemiçi Kesit Zorları Bilinen Plakların İkinci Mertebe Teorisine Göre Hesabı	76
7.2.1 İkinci Mertebe Rijitlik Matrisi Terimlerinin Elde Edilmesi.....	80
7.2.2 Burkulma Yüünün Bulunması.....	82
7.2.3 Tek Doğrultuda Çalışan (Silindirik Eğilmeli) Plakların (Eksenel Kuvvetin Basınç Olması Hali) İkinci Mertebe Hesabı.....	84
7.2.3.1 Tek Doğrultuda Çalışan (Silindirik Eğilmeli) Plakların Burkulma Yüünün Bulunması	86
7.2.4 Her İki Doğrultuda Eğilmeli Basit Mesnetli İzotrop Plakların Burkulma Yüünün Bulunması	86
7.3 Büyük yerdeğiştirme kabulü altında tabakalı kompozit plakların geometrik nonlineer analizi.....	88
7.3.1 Tek Doğrultuda Çalışan (Silindirik Eğilmeli) Plakların (Eksenel Kuvvetin Çekme Olması Hali) İkinci Mertebe Hesabı	94
8. GENSON BİLGİSAYAR PROGRAMI	97

8.1 Programın Yapısı ve Çalışma Düzeni	97
8.2 Program Giriş Bilgileri	106
9. SAYISAL ÖRNEKLER.....	113
9.1 Giriş	113
9.2 Geliştirilen Sonlu Eleman ile Sinüzoidal Yük Etkisinde Üç Tabakalı [0/90/0] Basit Mesnetli Kompozit Plak Silindirik Eğilme Hali (Lineer Statik Analiz)	113
9.3 Geliştirilen Sonlu Eleman İle Üniform Yük Etkisinde Dairesel İzotrop ve Tek Tabakalı Ortotrop Plakların Lineer Statik Analizi.....	118
9.4 Geliştirilen Sonlu Eleman ile Tabakalı Ortotrop Dairesel Plakların Lineer Statik Analizi	126
9.4.1 Basit Mesnetlenme Durumu	126
9.4.2 Ankastre Mesnetlenme Durumu.....	130
9.5 Geliştirilen Sonlu Eleman ile Üniform Yük Etkisinde Tabakalı Ortotrop Sektör Plakların Lineer Statik Analizi	132
9.6 Geliştirilen Sonlu Eleman ile Tabakalı Ortotrop Kare Plakların Lineer Statik Analizi.....	139
9.7 Geliştirilen Sonlu Elemanla Tek Doğrultuda Çalışan (Silindirik Eğilmeli) Plakların Burkulma Yükünün Bulunması.....	144
9.8 Geliştirilen Sonlu Elemanla Her İki Doğrultuda Eğilmeli, Basit Mesnetli, İzotrop Kare Plak Burkulma Yükünün Hesaplanması.....	145
9.9 Geliştirilen Sonlu Elemanla Her İki Doğrultuda Eğilmeli Basit Mesnetli Tabakalı Ortotrop Kare Plak Burkulma Yükünün Hesaplanması	146
9.10 Geliştirilen Sonlu Elemanla İzotrop Dairesel Plak Burkulma Yükünün Hesaplanması	147
9.11 Geliştirilen Sonlu Elemanla Tabakalı Kompozit Dairesel Plakların Burkulma Yükünün Hesaplanması	148
9.11.1 Çekirdek ve dış yüz tabakalanmalarının farklı izotrop malzemelerden oluşturulması durumu	148
9.11.2 Üç Tabakalı (90/0/90) Kompozit Dairesel Plak Burkulma Yükünün Hesaplanması.....	149
9.12 Geliştirilen Sonlu Elemanla Tabakalı Kompozit Plakların Geometrik Nonlinear Hesabı	149
9.12.1 Geliştirilen Sonlu Elemanla Tek Doğrultuda Çalışan (Silindirik Eğilmeli) Plakların Lineer Olmayan Hesabı (Eksenel Kuvvetin Çekme Olması Hali)	150
9.12.2 Geliştirilen Sonlu Elemanla Her İki Doğrultuda Eğilmeli, Ankastre Mesnetli Tabakalı (0/90) Ortotrop Kare Plak Geometrik Nonlinear Hesabı (Eksenel Kuvvetin Çekme Olması Hali)	152
9.12.3 Geliştirilen Sonlu Elemanla Ankastre Mesnetli, Tabakalı İzotrop Dairesel Plak Geometrik Nonlinear Hesabı (Eksenel Kuvvetin Çekme Olması Hali)	155
10. SONUÇLAR VE İLERİYE DÖNÜK ÇALIŞMALAR.....	159
KAYNAKLAR.....	161

ÖZGEÇMİŞ.....	165
----------------------	------------

KISALTMALAR

KLP	: Klasik Plak Teorisi
BKDT	: Birinci Mertebe Kayma Deformasyon Teorisi
YKDT	: Yüksek Mertebe Kayma Deformasyon Teorisi

ÇİZELGE LİSTESİ

Çizelge 6.1 : Gauss Örnek Nokta Değerleri ve Ağırlıkları.....	68
Çizelge 6.2 : $\int_{-a/2}^{a/2} X Y dx = \int_{-1}^1 X Y \frac{a}{2} dr$ integralleri çarpım tablosu	72
Çizelge 6.3 : $\int_{-h/2}^{h/2} X Y dz = \int_{-1}^1 X Y \frac{h}{2} d\zeta$ integralleri çarpım tablosu	72
Çizelge 6.4 : $\int_{-a/2}^{a/2} X Y dx = \int_{-1}^1 X Y \frac{a}{2} dr$ integralleri çarpım tablosu	73
Çizelge 6.5 : $\int_{-a/2}^{a/2} X Y dx = \int_{-1}^1 X Y \frac{a}{2} dr$ integralleri çarpım tablosu	73
Çizelge 8.1 : Program giriş bilgileri	110
Çizelge 9.1 : Çeşitli a/h değerleri için ortotrop ankastre mesnetli üniform yüklü tek tabaka dairesel plak maksimum boyutsuzlaştırılmış çökme değerleri	122
Çizelge 9.2 : İki tabakalı (0/90) sektör plağın ($r = r_i$; $\theta = \beta/2$) noktasında düzlemiçi gerilmelerinin kalınlık boyunca değişimi	136
Çizelge 9.3 : İki tabakalı (0/90) sektör plağın ($r = (r_0 - r_i)/2$; $\theta = \beta/2$) noktasında düzlemiçi gerilmelerinin kalınlık boyunca değişimi	136
Çizelge 9.4 : İki tabakalı (0/90) sektör plağın ($r = r_0$; $\theta = \beta/2$) noktasında düzlemiçi gerilmelerinin kalınlık boyunca değişimi	137
Çizelge 9.5 : İki tabakalı (0/90) sektör plağın ($r = (r_0 - r_i)/2$; $\theta = 0$) noktasında düzlemiçi gerilmelerinin kalınlık boyunca değişimi	137
Çizelge 9.6 : İki tabakalı (0/90) sektör plağın ($r = (r_0 - r_i)/2$; $\theta = \beta$) noktasında düzlemiçi gerilmelerinin kalınlık boyunca değişimi	137
Çizelge 9.7 : Sinüsoidal düşey yük etkisindeki 3 tabakalı (0/90/0) basit mesnetli kare plak boyutsuzlaştırılmış orta nokta çökme ve gerilme değerleri	141
Çizelge 9.8 : Sinüsoidal yük etkisindeki 4 tabakalı simetrik (0/90/90/0) basit mesnetli kare plak boyutsuzlaştırılmış orta nokta çökme ve gerilme değerleri	144
Çizelge 9.9 : Geliştirilen sonlu eleman ile elde edilen silindirik eğilmeli izotrop plak boyutsuz burkulma yükü değerlerinin karşılaştırılması.....	145
Çizelge 9.10 : İzotrop Kare Plak Boyutsuz Burkulma Yüklerinin Karşılaştırılması	146
Çizelge 9.11 : Basit Mesnetli Simetrik 4 Tabakalı (0/90/90/0) Kare Plak Boyutsuz Burkulma Yükü ($\bar{N} = N_{cr} \frac{a^2}{E_2 h^3}$)	147
Çizelge 9.12 : X Eksenli Doğrultusunda Yüklü, Basit Mesnetli, Simetrik 3 Tabakalı (0/90/0) ve 5 Tabakalı (0/90/0/90/0) Kare Plak Boyutsuz Burkulma Yükünün ($\bar{N} = N_{cr} \frac{a^2}{E_2 h^3}$) malzeme anizotropisine (E_L/E_T) bağlı değişimi.....	147
Çizelge 9.13 : İzotrop, ankastre mesnetli dairesel plakların burkulma faktörlerinin (λ) karşılaştırılması.....	148
Çizelge 9.14 : Üç tabakalı, ankastre mesnetli dairesel plakların burkulma faktörlerinin (Λ) çeşitli (γ) değerleri için karşılaştırılması	149

Çizelge 9.15 : Eksenel kuvvetin çekme olması durumunda silindirik eğilmeli plağın geometrik nonlinear hesabında uygulanan ardışık yaklaşım	151
Çizelge 9.16 : Eksenel kuvvetin çekme olması için tabakalı kare plağın geometrik nonlinear hesabında uygulanan ardışık yaklaşım $q_0 = 100[\text{psi}]$	154
Çizelge 9.17 : Eksenel kuvvetin çekme olması için tabakalı kare plağın geometrik nonlinear hesabında uygulanan ardışık yaklaşım $q_0=200[\text{psi}]$	155

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 1.1 : Kompozit Malzemelerin Sınıflandırılması.....	1
Şekil 1.2 : Farklı malzeme doğrultularına sahip katmanlardan oluşmuş tabakalı	2
Şekil 2.1 : Tabakalı kompozit plakta fiber ve matris malzemelerin görünümü.....	7
Şekil 2.2 : Tabakalı kompozit plakta düzlem içi ve düzlem dışı gerilmeler.....	7
Şekil 2.3 : Kompozit malzemeye σ_1 gerilmesinin uygulanması.....	9
Şekil 2.4 : Kompozit malzemeye σ_2 gerilmesinin uygulanması.....	10
Şekil 2.5 : Kompozit malzemeye kayma gerilmesinin (τ) uygulanması	11
Şekil 2.6 : Global eksen ve asal malzeme eksenleri	13
Şekil 3.1 : Klasik Plak Teorisi (Kayma Etkileri $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$).....	15
Şekil 3.2 : Birinci Mertebe Kayma Deformasyon Teorisi.....	16
Şekil 3.3 : [N], [M], [T] matrisi bileşenleri	18
Şekil 3.4 : Kompozit Plak Katman Kalınlıkları.....	18
Şekil 3.5 : Üç Tabakalı Ortotropik Simetrik Tabakalanma	22
Şekil 3.6 : Üç tabakalı simetrik açılı-katlı tabakalanma	22
Şekil 3.7 : Antisimetrik tabakalanma	23
Şekil 3.8 : Yüksek Mertebe Kayma Deformasyon Teorisinde Kayma Gerilmeleri Sıçramaları.....	32
Şekil 3.9 : Zig-zag fonksiyonunun geometrik anlamı	33
Şekil 3.10 : Tabakalar arası kayma gerilmeleri eşitliğinin sağlanması koşulu.....	34
Şekil 4.1 : Tabakalı Kompozit Plakta Silindirik Eğilme	35
Şekil 4.2 : Silindirik eğilme durumunda klasik plak ve birinci mertebe kayma deformasyon teorilerine ait sınır şartları.....	42
Şekil 5.1 : Dairesel plak üniform yayılı yük ankastre ve basit mesnetli durum	50
Şekil 6.1 : Tabaka kalınlığı doğrultusunda Reddy[9] tarafından kullanılan doğrusal Lagrange interpolasyon fonksiyonları	56
Şekil 6.2 : Üç Tabakadan Oluşan Düğüm Noktası Serbestlikleri.....	57
Şekil 6.3 : Geliştirilen sonlu eleman düğüm noktaları numaraları	57
Şekil 6.4 : Süperparametrik, izoparametrik ve subparametrik sonlu eleman tanımlaması.....	65
Şekil 6.5 : Genel bir dörtgen sonlu eleman.....	69
Şekil 6.6 : Dikdörtgen sonlu eleman	69
Şekil 7.1 : Düzlemiçi (membran) yüke maruz plak.....	76
Şekil 7.2 : N_x düzlemiçi kuvvetinin eğilme sonrası oluşturduğu moment	76
Şekil 7.3 : N_y düzlemiçi kuvvetinin eğilme sonrası oluşturduğu moment	77
Şekil 7.4 : N_{xy} düzlemiçi kayma kuvveti	78
Şekil 7.5 : N_{xy} düzlemiçi kayma kuvvetine eşdeğer N_ξ , N_η kuvvetleri	78
Şekil 7.6 : Düzlemiçi kuvvetlere maruz plakların kritik ve burkulma yükünün bulunması	82
Şekil 7.7 : $P_{yuk} - \det K + K$ grafiğinin çizilerek P_{kr} değerinin hesaplanması	83
Şekil 7.8 : Eksenel kuvvete maruz çubukların ikinci mertebe hesabı	84

Şekil 7.9 : Birim kuvvet sabitlerinin belirlenmesi	85
Şekil 7.10 : Eksenel kuvvet (N) – birim kuvvet sabiti (f_{11}) grafiği ve burkulma yükü	86
Şekil 7.11 : Plâğin eğilmesi sonucu x doğrultusunda oluşan kısalma (ϵ_x).....	88
Şekil 7.12 : Plâğin eğilmesi sonucu oluşan düzlemiçi kayma şekildeğiştirmesi (γ_{xy})	89
Şekil 7.13 : Düzlemiçi çekme kuvvetlerinin doğması sonucu plâğin pekleşmesi	91
Şekil 7.14 : Genson programı geometrik nonlinear analiz akış şeması	93
Şekil 7.15 : Geometrik nonlinear analizin grafik üzerinde gösterimi.....	94
Şekil 7.16 : i ucu ankastre j ucu boşta çubuğun eksenel kuvvet çekme durumu için $\bar{\epsilon}_{j\delta}$ birim deplasman sabitinin belirlenmesi	95
Şekil 8.1 : Ana program akış diyagramı	99
Şekil 8.2 : Elfin19 altprogramı akış diyagramı	127
Şekil 8.3 : Densi3 alt programı akış diyagramı	131
Şekil 9.1 : Sinüzoidal yük altında üç tabakalı [90/0/90] basit mesnetli kompozit plak silindirik eğilme hali	113
Şekil 9.2 : Çeşitli a/h değerleri için tabaka duyarlı sonlu eleman ile elde edilen boyutsuz deplasman değerleri.....	115
Şekil 9.3 : Tabaka duyarlı sonlu eleman ile elde edilen boyutsuz kayma gerilmesi τ_{yz}	115
Şekil 9.4 : Tabaka duyarlı sonlu eleman ile elde edilen boyutsuz normal gerilme σ_{yy}	115
Şekil 9.5 : Pagano [39] tarafından verilen (a/h)=S=4 için boyutsuzlaştırılmış çökme $w(y = a/2, z = 0)$ ve kayma gerilmesi $\tau_{yz}(y = 0, z)$ değerleri.....	116
Şekil 9.6 : Pagano [39] tarafından verilen (a/h)=s=4 için boyutsuzlaştırılmış normal gerilme $\bar{\sigma}_{yy}(y = \frac{a}{2}, z)$ değerinin plak kalınlığı boyunca değişimi (90/0/90)	116
Şekil 9.7 : (90/0/90) tabakalanmanın 8 alt tabakaya ayrılması.....	117
Şekil 9.8 : Sekiz alt tabakalanma sonucu (90/0/90) tabakalı plakta boyutsuz kayma gerilmesinin ($\bar{\tau}_{yz}$) kalınlık boyunca değişimi	117
Şekil 9.9 : Sekiz alt tabakalanma sonucu (90/0/90) tabakalı plakta boyutsuz normal gerilmenin ($\bar{\sigma}_{yy}$) kalınlık boyunca değişimi	118
Şekil 9.10 : 20 elemandan oluşan dönel simetrik üniform yayılı yüklü izotrop ve ortotrop tek tabakalı dairesel plak örneği	119
Şekil 9.11 : İzotrop üniform yayılı yüklü basit ve ankastre mesnetli dairesel tek tabaka plâğin kırıklı sonlu elemanlar kullanılarak elde edilen boyutsuz deplasman eğrisi ($r/h=10$).....	120
Şekil 9.12 : İzotrop üniform yayılı yüklü basit ve ankastre mesnetli dairesel tek tabaka plâğin kırıklı sonlu elemanlar kullanılarak elde edilen boyutsuz deplasman eğrisi ($r/h=50$).....	120
Şekil 9.13 : İzotrop, tek tabaka, basit mesnetli dairesel plâğa ait $M_x(x,y=0)$ ve $M_y(y,x=0)$	121
Şekil 9.14 : İzotrop, basit mesnetli dairesel plâğa ait boyutsuz $\tau_{xz}(x=r,y=0,z)$ ve $\tau_{yz}(y=r,x=0,z)$	121
Şekil 9.15 : Ortotrop tek tabaka dairesel plâğin a/h=10 değeri için deplasman eğrisinin analitik çözüm ile karşılaştırılması.....	122
Şekil 9.16 : Ortotrop tek tabaka dairesel plâğin a/h=25 değeri için deplasman eğrisinin analitik çözüm ile karşılaştırılması.....	123

Şekil 9.17 : Ortotrop tek tabaka dairesel plağın $a/h=50$ değeri için deplasman eğrisinin analitik çözüm ile karşılaştırılması.....	123
Şekil 9.18 : Ortotrop tek tabaka dairesel plağın $a/h=75$ değeri için deplasman eğrisinin analitik çözüm ile karşılaştırılması.....	124
Şekil 9.19 : Ortotrop tek tabaka dairesel plağın $a/h=100$ plak durumu için deplasman eğrisinin analitik çözüm ile karşılaştırılması.....	124
Şekil 9.20 : İzotrop, üniform yayılı yüklü, basit ve ankastre mesnetli dairesel tek tabaka plağın eğrisel sınırlı sonlu elemanlar kullanılarak elde edilen boyutsuz deplasman eğrisi ($r/h=50$)	125
Şekil 9.21 : İzotrop, üniform yayılı yüklü, basit ve ankastre mesnetli dairesel tek tabaka plağın eğrisel sınırlı sonlu elemanlar kullanılarak elde edilen boyutsuz deplasman eğrisi ($r/h=10$)	126
Şekil 9.22 : Üç tabakalı (90/0/90) dairesel dörtte bir plak eleman ve düğüm noktası numaraları.....	127
Şekil 9.23 : Üç tabakalı (90/0/90) dairesel plağın kalınlık doğrultusunda alt tabakalara ayrılması.....	127
Şekil 9.24 : Üç tabakalı (90/0/90) dairesel plak (basit mesnetlenme) x eksen doğrultusunda düzlemine dik yerdeğiştirme (w) eğrisi.....	128
Şekil 9.25 : Üç tabakalı (90/0/90) dairesel plak (basit mesnetlenme) y eksen doğrultusunda düzlemine dik yerdeğiştirme (w) eğrisi.....	128
Şekil 9.26 : Üç tabakalı (90/0/90) dairesel plak (basit mesnetlenme) kayma gerilmesinin $\overline{\tau_{yz}}(x=0, y=r, z)$ kalınlık boyunca değişimi.....	129
Şekil 9.27 : Üç tabakalı (90/0/90) dairesel plak(basit mesnetlenme) boyutsuz normal gerilmenin $\overline{\sigma_{yy}}(x = 0, y = 0.1, z)$ kalınlık boyunca değişimi	129
Şekil 9.28 : Üç tabakalı (90/0/90) dairesel plak (ankastre mesnetlenme) x eksen doğrultusunda boyutsuz düzlemine dik yerdeğiştirme (w) eğrisi	130
Şekil 9.29 : Üç tabakalı (90/0/90) dairesel plak (ankastre mesnetlenme) y eksen doğrultusunda düzlemine dik yerdeğiştirme (w) eğrisi.....	130
Şekil 9.30 : Üç tabakalı (90/0/90) dairesel plak (ankastre mesnetlenme) y eksen doğrultusunda moment (M_{yy}) değişimi	131
Şekil 9.31 : Üç tabakalı (90/0/90) dairesel plak (ankastre mesnetlenme) x eksen doğrultusunda moment (M_{xx}) değişimi.....	131
Şekil 9.32 : Tabakalı sektör plağın geometrik özellikleri.....	133
Şekil 9.33 : Tabakalı sektör plak eleman ve düğüm noktası numaraları	133
Şekil 9.34 : Rektilineer ortotrop, ($\alpha=30$) fiber açısı için tek tabaka sektör plak deplasman değişimi	134
Şekil 9.35 : Tek tabaka sektör plağın çeşitli fiber açılara göre deplasman eğrisinin değişimi	134
Şekil 9.36 : Sektör plağın tek tabaka $\alpha = 0$, $\alpha = 90$ fiber açıları ile iki tabakalı (0/90) durum için radyal merkez doğrusu boyunca deplasman değişimlerinin karşılaştırılması	135
Şekil 9.37 : Sektör plağın tek tabaka $\alpha = 0$, $\alpha = 90$ fiber açıları ile iki tabakalı (0/90) durum için çevresel merkez doğrusu boyunca deplasman değişimlerinin karşılaştırılması	135
Şekil 9.38 : Radyal merkez doğrultusundaki boyutsuz deplasmanların tabaka sayısına bağlı değişimi	138
Şekil 9.39 : Çevresel merkez doğrultusundaki boyutsuz deplasmanların tabaka sayısına bağlı değişimi	138
Şekil 9.40 : Tabakalı sektör plakta diferansiyel kuadratör yöntemiyle deplasman değişimleri	139

Şekil 9.41 : Bisinüsoidal yük etkisinde tabakalı kare plak	140
Şekil 9.42 : Üç tabakalı (0/90/0) kare plağın (6x6) sonlu eleman ile modellenmesi	140
Şekil 9.43 : Üç tabakalı (0/90/0) kare plağa ait boyutsuz kayma gerilmesinin kalınlık boyunca değişimi $\overline{\tau_{yz}}(x = \frac{L}{2}, y = 0, z)$	142
Şekil 9.44 : Üç tabakalı (0/90/0) kare plağa ait boyutsuz kayma gerilmesinin kalınlık boyunca değişimi $\overline{\tau_{xz}}(x = 0, y = \frac{L}{2}, z)$	142
Şekil 9.45 : Üç tabakalı (0/90/0) kare plağa ait boyutsuz normal gerilmenin kalınlık boyunca değişimi $\overline{\sigma_{xx}}(x = \frac{L}{2}, y = \frac{L}{2}, z)$	143
Şekil 9.46 : Silindirik eğilmeli plağın burkulma yükünün bulunması	145
Şekil 9.47 : Ortotrop tabakalı kare plak geometrik özellikler	146
Şekil 9.48 : Düzlemiçi hareketin tutulması sonucu oluşan eksenel çekme kuvvetinin deplasman azaltıcı etkisi	150
Şekil 9.49 : Eksenel kuvvetin çekme olması durumunda silindirik eğilmeli plak yükleme ve geometrik özellikler	150
Şekil 9.50 : Ortotrop tabakalı (0/90) kare plak geometrik özellikler	153
Şekil 9.51 : İki tabakalı (0/90) anksatre kare plak pekleşme grafiği	155
Şekil 9.52 : Tabakalı sandviç plak kalınlıkları	156
Şekil 9.53 : Thiel [23] tarafından elde edilen pekleşme grafiği (m=100)	156
Şekil 9.54 : Geliştirilen sonlu eleman kullanılarak elde edilen tabakalı sandviç dairesel plak pekleşme grafiği	157

TABAKALI KOMPOZİT PLAKLARIN DOĞRUSAL VE GEOMETRİK BAKIMDAN DOĞRUSAL OLMAYAN HESABI İÇİN YENİ BİR SONLU ELEMAN

ÖZET

Tez kapsamında tabakalı yeni bir sonlu eleman geliştirilerek bu elemanla tabakalı kompozit plakların doğrusal ve geometrik bakımdan doğrusal olmayan statik analizleri yapılmıştır. Tez on bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm; malzemenin rijitlik, mukavemet, korozyon dayanımı, termal özellikler ve yorulma ömrü gibi birçok özelliğinin iyileştirilmesine fırsat vermesi nedeniyle son zamanlarda kullanımında önemli artış gözlenen kompozit malzemelere ve bu malzemelerden üretilmiş tabakalı kompozit plakların doğrusal ve geometrik bakımdan doğrusal olmayan analizi konusunda geçmişten günümüze yapılan çalışma ve yayınlara ayrılmış, bu çalışmanın amaç ve kapsamı kısaca özetlenmiştir.

İkinci bölümde; tabakalı kompozit plak gerilme-şekildeğiştirme bünye bağıntılarının mühendislik sabitleri cinsinden elde edilişi ve katman doğrultusuna göre elde edilen bünye bağıntılarının global eksene dönüştürülmesi gösterilmiştir.

Üçüncü bölüm; tabakalı kompozit plak analizinde literatürde sıkça karşılaşılan klasik plak, birinci mertebe ve yüksek mertebe kayma deformasyon teorilerinin açıklanmasına ayrılmış; kullanım alanları ve eksiklerinden bahsedilmiştir.

Dördüncü bölümde; tabakalı kompozit plakların silindirik (tek doğrultuda) eğilme durumuna ait klasik teori (ince plak) ile birinci ve üçüncü mertebe kayma deformasyon teorilerine göre literatürde yer alan analitik çözümlerine yer verilmiştir..

Beşinci bölümün birinci kısmı; geliştirilen sonlu elemanın eğrisel sınırlara sahip geometri üzerinde performansını göstermek amacıyla dairesel ince ve kalın plakların izotrop ve ortotrop durumuna ait analitik çözümlerine ayrılmış; ikinci kısımda ise tabakalı kompozit kare plakların birinci ve üçüncü mertebe kayma deformasyon teorilerine göre analitik çözümlerine yer verilmiştir.

Altıncı bölüm; önceki bölümlerde açıklanan tabakalı kompozit plak teorilerinin eksikliklerini gidermeyi öngörerek geliştirilen tabakalı plak sonlu elemanın tanıtılmasına ayrılmış; geliştirilen sonlu elemana ait birinci mertebe rijitlik matrisinin elde edilişi ile bu sırada kullanılan lokal şekil fonksiyonlarının global eksene göre türevlerinin alınması ve nümerik integrasyon tekniklerinden Gauss Kuadratür yöntemi açıklanmıştır.

Yedinci bölümün birinci kısmı; düzlemiçi kesit zorları bilinen plakların küçük deplasman kabulü altında, geliştirilen sonlu eleman ile ikinci mertebe hesabına ve burkulma yükünün bulunmasına ayrılmıştır. Bölümün ikinci kısmında ise; büyük deplasman kabulü altında tabakalı kompozit plakların geometrik bakımdan doğrusal olmayan statik analizi üzerinde durulmuş; analiz sırasında kullanılan doğrusal olmayan ardışık yaklaşım açıklanmıştır.

Sekizinci bölüm, FORTRAN 77 programlama dilinin kullanıldığı GENSON isimli ana bilgisayar programına ve bu programın geliştirilmesi yoluna gidilerek yazılan ELFIN 19 isimli alt programın açıklanmasına ayrılmıştır.

Dokuzuncu bölüm; geliştirilen sonlu elemanla incelenen sayısal örneklere ayrılmıştır. Birinci kısımda tabakalı kompozit dörtgen plakların sırasıyla silindirik eğilme ve her iki doğrultuda eğilme durumlarına ait lineer statik analiz sonuçları literatürde yer alan analitik çözümlerle karşılaştırılmıştır. Bölümün ikinci kısmında; geliştirilen sonlu elemanın eğrisel sınırlara sahip geometri üzerinde de etkili olduğunu göstermek amacıyla, tabakalı dairesel kompozit plakların lineer statik analizi ele alınmıştır. Bölümün üçüncü kısmı; tabakalı kompozit plakların burkulma problemine ayrılmış; sırasıyla tek doğrultuda ve her iki doğrultuda çalışan dörtgen plaklar ile dairesel plakların burkulma yükleri literatürdeki analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Bölümün dördüncü kısmı; büyük deplasman kabulü altında tabakalı kompozit plakların geometrik nonlinear analize ayrılmış; başlangıçta üzerinde herhangi bir düzlemiçi (membran) kuvvet bulunmamasına karşın; plağın eğilmesi ve mesnetlerde düzlemiçi hareketin engellenmesi sonucunda, oluşan düzlemiçi çekme kuvvetlerinin plak deplasmanlarını azaltıcı pekleşme etkisi geliştirilen sonlu elemanla incelenmiştir.

Sonuncu bölüm ise elde edilen sonuçlara ve gelecekte yapılması düşünülen çalışmalara ayrılmıştır.

LINEAR AND GEOMETRIC NONLINEAR STATIC ANALYSIS OF LAMINATED COMPOSITE PLATES BY A NEW LAYERWISE FINITE ELEMENT

SUMMARY

In this study; a new layerwise finite element is developed for the linear and geometric nonlinear static analysis of laminated plates. The thesis consists of ten chapters. Its first chapter is dedicated to studies and publications made so far on laminated composite plates, the use of which is observed to have risen dramatically recently as the composite materials allow for the improvement of many features such as rigidity, strength, corrosion resistance, thermal properties and fatigue life.

In the second chapter; the constitutive equations(stress-strain relationships) of the laminated plates are obtained in terms of engineering constants, i.e, Young's moduli, Poisson's ratios and shear moduli. Nextly; transformation of constitutive equations from the material coordinates to the global coordinates used in the solution of the problem, are explained since composite laminates have several layers each with different orientation of their material coordinates.

The third chapter is devoted to the explanation of the classical plate(CLT), first(FSDT) and third order shear deformation theories(TSDT) common in literature in the analysis of laminated plates; areas of use and shortnesses thereof are mentioned. The drawback of FSDT comes from the representation of the constant transverse shear strains through laminate thickness and this discrepancy between the actual quadratic stress state and the constant stress state predicted by the FSDT is corrected in computing transverse shear force resultants by multiplying the transverse stress integrals with a shear correction coefficient parameter. Due to the need for shear correction coefficients used in the FSDT; TSDT is developed to have quadratic variation of the transverse shear strains and transverse shear stresses by expanding the displacement field in terms of the thickness coordinate up to third degree. These type of theories such as CLT, FSDT or TSDT are named as Equivalent Single Layer Theories (ESL) which assume that the in-plane displacement fields are continuous functions of the thickness coordinate and independent of the number of constitutive layers. This in turn results in all stresses in ESL models are discontinuous at layer interfaces contrary to the actual transverse stress state.

In the fourth chapter; analytical solutions for the laminated plate strips in cylindrical bending, available in the literature according to the classical(thin plate), first and third order shear deformation theories are included.

The analytical solutions of isotropic and orthotropic layered circular plates available in the literature are also presented in the fifth chapter's first part. In the second part of this chapter; the analytical solutions of the laminated rectangular plates are mentioned.

The sixth chapter is one of the most significant parts of the thesis where a new layerwise finite element and its formulations are introduced to overcome the deficiencies of laminated plate theories explained in the previous chapter. Finite elements based on first order shear deformation theory or third order shear deformation theory, assuming that the in-plane displacement fields are continuous of the thickness coordinate and derivative at layer interfaces, results in all transverse stresses are discontinuous at layer interfaces contrary to the actual transverse stress state. As a direct consequence of exhibition of different mechanical and physical properties in the thickness direction, layered composite plates show higher transverse shear and transverse normal stress deformability than single layer plates. To consider zig-zag effect of the in-plane displacement fields and overcome the discontinuity of transverse stress state at layer interfaces which becomes more significant in design as a result of higher transverse shear stress deformability; a new layerwise finite element which has four nodes (cubic) per side in plan and three nodes (quadratic) in the thickness direction is developed. The layerwise finite element has two in-plane degrees of freedom per plan and thickness nodes and a one out of plane degrees of freedom (w). Derivation of the first order stiffness matrix relating to the finite element developed, Jacobien matrix and Gauss Quadrature method in which is one of the numerical integration techniques used, are also explained.

Another significant part of the thesis is the seventh chapter and its first section is devoted to the laminated plates under combined lateral and membrane loads that are known initially before the analysis step. The derivation of second order stiffness matrix and buckling analysis of laminated plates is presented here. The second section of this chapter is concerned about the geometrically nonlinear static analysis of composite laminates under large deflection assumption and nonlinear iteration technique employed during the analysis is explained.

The eight chapter is dedicated to the explanation of computer program called GENSON and a subroutine called ELFIN19 developed under this thesis. The main program GENSON and its subroutine ELFIN19 flow charts and program data inputs are also introduced here.

The ninth chapter being dedicated to the numerical samples examined with the layerwise finite element developed, the first section thereof compares the linear static analysis results relating to the cylindrical deflection of laminated composite quadrilateral plates and deflection thereof into both directions, respectively, to the analytical results available in the literature and mentioned in the fifth and sixth chapters of the thesis. The second section of this part handles the linear static analysis of laminated circular plates to show the finite element developed is also efficient for the geometry holding curvilinear limits. The third section is about the buckling analysis problem and the dimensionless buckling load factors obtained using the layerwise finite element for quadrilateral and circular laminated plates are compared with the analytical results in the literature which is also explained in the seventh chapter. The fourth section is devoted to the geometric nonlinear analysis of laminated composite plates under large displacement assumption and the hardening deflection effect as a result of inplane tensile forces owing to bending and constrained support states, is also shown in laminated rectangular and circular plates samples respectively. The geometric nonlinear static analysis of the laminated composite plates is based on the Newton-Raphson iteration technique.

The last chapter is dedicated to the concluding remarks and studies planned in the future. From the results it is clear that the new layerwise finite element, developed for the linear and geometric nonlinear static analysis of laminated composite plates, is efficient and more effective than the other finite elements based on the first or third order shear deformation theories. The layerwise finite element can represent the zig zag behavior of the in-plane displacements through the thickness and results from the developed layerwise finite element, show that the transverse stresses at the interface of the two layers are continuous as known from 3-D elasticity theories. The finite element is also efficient for geometries that has curved boundaries such as laminated circular and sector composite plates. This new layerwise finite element is also capable of the buckling analysis of laminated strip, rectangular, circular and sector plates by determining the determinant of the second order rigidity matrix of the system.

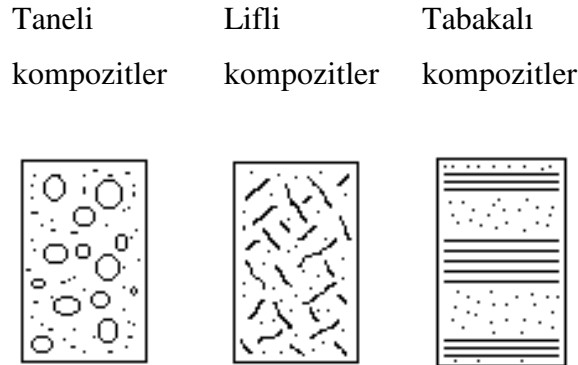
One of the studies planned in the future is the extension of the layerwise finite element to the linear and geometric nonlinear static analyses of laminated composite shell elements and the other one is the dynamic analysis of laminated composite plates. Also; isogeometric analysis that uses B-spline functions for the shape functions, could be included in this new layerwise finite element in the future.

1. GİRİŞ

Kompozit malzemeler iki veya daha fazla sayıda malzemenin birlikte daha iyi mühendislik özellikleri sergileyebilmeleri amacıyla biraraya getirilmesi sonucu oluşur. Kompozit malzeme oluşturulması ile malzemenin rijitliği, mukavemeti, korozyon dayanımı, termal özellikler ve yorulma ömrü gibi birçok özellik iyileştirilebilmektedir.

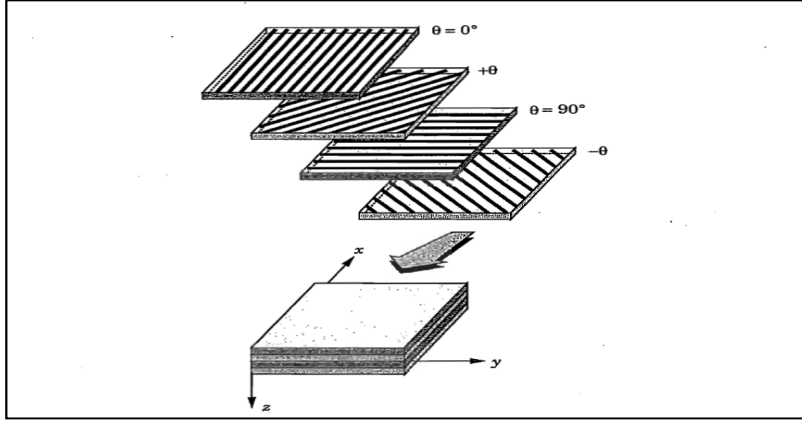
Bunun sonucunda geçen yirmi yıl içerisinde birçok mühendislik alanında (uçak, makina, inşaat vb) kompozit malzemenin kullanımında artış gözlenmiş ve buna paralel olarak kompozit malzemeden üretilmiş yapı elemanlarının analizi ve tasarımı üzerine yapılan araştırmalar ve yayınlar hız kazanmıştır.

Kompozit malzemeler donatılı veya pekiştirilmiş türüne göre üç gruba ayrılır. (Şekil 1.1)



Şekil 1.1 : Kompozit Malzemelerin Sınıflandırılması [16].

Şekil 1.2’den görüleceği üzere taneli ve lifli kompozitlerden farklı olarak, kompozit tabakalı plaklar farklı malzeme doğrultularına sahip katmanların biraraya getirilmesi sonucu oluşturulabilir. Dolayısıyla kompozit tabakalı plak analizinde bünye bağıntılarında katman doğrultularının (malzeme doğrultusu) tabaka doğrultusuna (global x-y-z doğrultusu) dönüştürülmeleri gerekecektir.



Şekil 1.2 : Farklı malzeme doğrultularına sahip katmanlardan oluşmuş tabakalı kompozit plak [16].

1.1 Literatür Araştırması

Bu bölümde konu benzerliği ve kronoloji dikkate alınarak tek tabakalı plak ve kabuk teorilerinden çok tabakalı plak ve kabuk teorilerine geçişe kadar yapılmış çalışmalar açıklanmıştır.

Kabuk ve plak teorisinde yapılmış ilk çalışma [1]'de yapılmıştır. Bu çalışmada başlangıçta plak eksenine dik ve düzlem olan kesitlerin şekildeğiştirdikten sonra da plak eksenine dik ve düzlem kaldıkları kabulü yapılmış; kayma şekildeğiştirmeleri γ_{xz} , γ_{yz} ve enine normal şekildeğiştirme ϵ_{zz} 'nin plak kalınlığının fazla olmaması nedeniyle ihmal edilebileceği belirtilmiştir.

Benzer şekilde [2], [3] ve [4]'te birinci grup olarak adlandırılan ince plak ve ince kabuk teorisi üzerine çalışmalar yapılmıştır.

İnce plak teorisinin geçersiz kaldığı, plak kalınlığı arttıkça kayma deformasyonlarının önem kazanarak kayma deformasyonlarının yaptığı işleri de dikkate alan Reissner-Mindlin plak teorisi ise ikinci grup çalışmalar olarak ortaya çıkmıştır.

[5]'de yapılan çalışmalarda, kayma deformasyonun etkisini dikkate alırken enine normal şekildeğiştirmelerin ihmal edilmemesi gerektiğini belirten önerilerde bulunulmuştur.

Reissner-Mindlin plak teorisinin tabakalı kompozit plaklara genişletilmesi Birinci Mertebe Kayma Deformasyon Teorisi (BKDT) olarak isimlendirilmiştir [6]. Bu teoride kullanılan sabit kayma gerilmesi kabulü nedeniyle ortaya çıkan; gerçekte ise üst ve alt sınırlarda kayma gerilmelerinin bulunmayacak olma çelişkisi, kayma düzeltme katsayıları ile giderilmiştir.

[7]'de BKDT'ye göre ince ve kalın tabakalı plakların lineer statik analizini yapmak üzere dört düğüm noktalı, sırasıyla 20 ve 24 serbestlik dereceli alternatif bir dörtgen sonlu plak eleman sunulmuştur.

[8]'de BKDT'ye göre yerdeğiştirme bazlı üç düğüm noktalı ve 18 serbestlik dereceli üçgen plak sonlu eleman geliştirilmiş olup plak kalınlığının azalmasıyla meydana gelecek kayma kilitlenmesi problemini aşmak amacıyla eleman sınırlarında Timoshenko'nun tabakalı kompozit kiriş fonksiyonları kullanılmıştır.

[9]'da mevcut BKDT; kullanılan yerdeğiştirme bilinmeyenlerinin (u , v , w , ϕ_x , ϕ_y) sayısının, düzleme dik yerdeğiştirmenin (w) sırasıyla eğilme ve kaymaya bağlı yerdeğiştirmelere w_b , w_s ayrılıp azaltılmasıyla yeniden ele alınmıştır.

Daha sonraki çalışmalar ise kayma düzeltme katsayıları gerektirmeyecek ve tabaka kalınlığı doğrultusunda parabolik kayma gerilme dağılımını sağlayacak daha yüksek mertebeden deplasman alanı belirlemeler üzerine kurulmuş ve bu çalışmalar üçüncü mertebe kayma deformasyon teorisi (ÜKDT) veya yüksek mertebe kayma deformasyon teorisi adıyla literatüre geçmiştir.

[10] ve [11]'de; ÜKDT'ne göre bilinmeyen sayısında herhangi bir artışa gerek kalmadan tüm tabakalar boyunca deplasman alanı üçüncü mertebeden fonksiyon olarak tanımlanmış; deplasman ve gerilmeler BKDT'ne göre daha gerçekçi olarak elde edilmiştir.

[12]'de Reddy(1984)'nin ÜKDT'ne göre bir sonlu eleman formülasyonu geliştirilmiş ve bu sonlu eleman kullanılarak tabakalı kompozit ve sandviç plakların farklı tabakalanmalar altında titreşim analizleri yapılmıştır.

[13]'de ÜKDT'ne göre dört düğüm noktalı bir sonlu eleman tanımlanarak tabakalı kalın kompozit plakların lineer statik, dinamik ve titreşim analizleri yapılmıştır.

[14]'de ÜKDT kullanılarak geliştirilen tabakalı kompozit kiriş sonlu elemanda eğilme şekildeğiştirmesinin kesit dönmesi (ϕ) veya çökme (w) ve kayma şekildeğiştirmesi (γ) cinsinden yazılmasına bağlı olarak elde edilen sonuçlardaki farklılıklar incelenmiştir.

[15]'de tabakalı kompozit sektör plakların rektilineer ve polar ortotropik durumları için diferansiyel kuadratör yöntemiyle lineer statik analitik çözümleri yapılmıştır.

Yüksek mertebe kayma deformasyon teorisi ile ilgili çalışmalar her ne kadar tabakalanmanın en üst ve en alt noktalarında kayma gerilmelerini sıfırlayacak bir deplasman alanı üzerine kurulmuş olsa da; sonuçlar incelendiğinde; farklı malzemelerden oluşan iki tabaka arasındaki geçişlerde kayma gerilmelerinin

birbirine eşit olması gerekirken ilgili noktalarda sıçrama yaptıkları gözlemlenmiştir. Literatürde bu durum; tabakalar arası gerilme süreksizliği olarak adlandırılmıştır.

Tabakalar arası gerilme süreksizliğinin nedeni olarak tüm plak kalınlığı boyunca tek bir deplasman alanı alınmasından kaynaklı tabakalar arası geçiş sınırlarında deplasman birinci türevinin sürekliliğinin korunması (C1 sürekliliği) gösterilmiştir. Buna göre C1 (1.Türev sürekliliği) sağlanması ile kayma şekildeğiştirmeleri, iki farklı kayma malzeme sabitinden oluşan iki tabaka için de aynı değere sahip olarak kayma gerilmelerinin birbirine eşit olma imkanını ortadan kaldırmaktadır [16].

[16]'da yukarıda söz edilen BKDT ve ÜKDT teorileri eşdeğer tek tabaka teorisi (ESL) olarak isimlendirilmiş ve gerçekte mevcut tabakalar arasındaki zigzag deplasman biçiminin, tüm tabakalanma boyunca tek bir deplasman alanı ile belirlendiği bu teorilerle tam yansıtılamadığı belirtilerek; her bir tabakanın birbirinden bağımsız olarak ele alındığı tabaka duyarlı model tanımlanmıştır.

Tabaka duyarlı modelleme üzerine [17]'de yapılan çalışmada her bir tabaka üzerinde klasik plak teorisi uygulanırken; [18]'de yapılan çalışmada ise her bir tabakada yüksek mertebe kayma deformasyon teorisi kullanılmıştır.

[19]'da yapılan tabaka duyarlı çalışmada, zigzag biçimi sağlatılarak kayma gerilmelerindeki sıçramayı ortadan kaldırmak için Reissner'in karışık sonlu eleman metodu kullanılmıştır.

Tabakalı kompozit plakların geometri bakımından doğrusal olmayan davranışlarının hesaba katılması, bu elemanlarla oluşturulan yapıların analizlerinin daha gerçekçi biçimde yapılmasına olanak sağlamaktadır. Bu konuyla ilgili literatürde çeşitli çalışmalar bulunmaktadır.

[20]'de tabakalı kompozit plakların geometrik bakımından doğrusal olmayan analizini gerçekleştirmek üzere melez bir sonlu eleman tanımlanmıştır.

[21]'de tabakalı kompozit plakların geometrik nonlinear analizini gerçekleştirmek üzere yerdeğiştirme bazlı, 4 düğüm noktalı sırasıyla 20 ve 24 serbestlik dereceli iki basit dörtgen plak sonlu eleman geliştirilmiştir. Formülasyon Von Karmann'ın geometrik bakımından doğrusal olmayan teorisine ve toplam Lagrange yaklaşımına dayanmaktadır.

[22]'de ise; [11]'deki çalışmanın geometrik nonlinear statik analize genişletilmesi kapsamında genel bir geometrik nonlinear üçüncü mertebe teori geliştirilmiştir.

[23]'de ise tabakalı kompozit dairesel plakların geometrik nonlinear analizi amacıyla yeni bir sonlu eleman geliştirilmiştir.

Tabakalanmaların ince olması halinde tasarım aşamasında büyük önem kazanan tabakalı plak burkulması ve ilgili kritik burkulma yükünün bulunması üzerine literatürde çeşitli çalışmalar bulunmaktadır.

[24]'de tabakalı kompozit dörtgen plakların üç boyutlu elastisite çözümüne göre burkulma yükleri elde edilmiştir.

[25]'de tabakalı kompozit dairesel plakların üç boyutlu elastisite çözümüne göre burkulma yükleri elde edilmiştir.

[26]'da kayma düzeltme katsayılarının kullanıldığı BKDT'ne göre yeni bir sonlu eleman geliştirilmiş ve tabakalı kompozit dörtgen plakların burkulma analizleri gerçekleştirilmiştir.

[27]'de BKDT'ne göre sekiz düğüm noktalı ve her düğüm noktasında 5 serbestlik dereceli, isoparametrik bir tabakalı plak sonlu eleman geliştirilmiş olup sınır şartları, en/boy oranı ve tabakalanma dizilişlerine bağlı olarak burkulma analizleri gerçekleştirilmiştir.

[28]'de ÜKDT'ne göre sekiz düğüm noktalı ve her düğüm noktasında 10 serbestlik dereceli, isoparametrik bir tabakalı plak sonlu eleman geliştirilerek burkulma analizleri yapılmıştır.

1.2 Çalışmanın Amacı ve Kapsamı

İkincil öneme sahip, ince tabakalanmanın söz konusu olduğu dolayısıyla kayma gerilmelerinin fazla etkin olmadığı sistemlerde Birinci veya Yüksek Mertebe Kayma Deformasyon Teorilerinin de içinde yer aldığı ve tüm tabakalar boyunca sürekli ve türevlenebilir tek bir deplasman alanının belirlendiği Eşdeğer Tek Tabaka Teorilerinin kullanılması uygun sonuçlar verebilmekte iken birincil öneme sahip, kalın tabakalanmanın söz konusu olduğu ve kayma gerilmelerinin önem kazandığı sistemlerde bu teorilere dayalı sonlu elemanlar yeterli olmamakta; tabakalar arası ayrışmanın ilk nerede başlayacağı sorusuna cevap aramak gerekmekte ve tabakalar arası kayma gerilmeleri eşitliğinin sağlandığı, doğru kayma gerilme dağılımını verecek sonlu elemana ihtiyaç duyulmaktadır. Bu amaçla her bir tabakanın bağımsız olarak ele alındığı, düzlemde her iki doğrultuda kübik (dört noktalı), toplamda oniki düğüm noktalı; tabaka kalınlığı doğrultusunda her bir tabakada üst, orta ve alt düğüm noktaları olmak üzere üç düğüm noktalı; maksimum onbeş tabaka ve bir düğüm noktasında altmış üç serbestliğe sahip olabilecek kapasitede, eğrisel sınırlara sahip

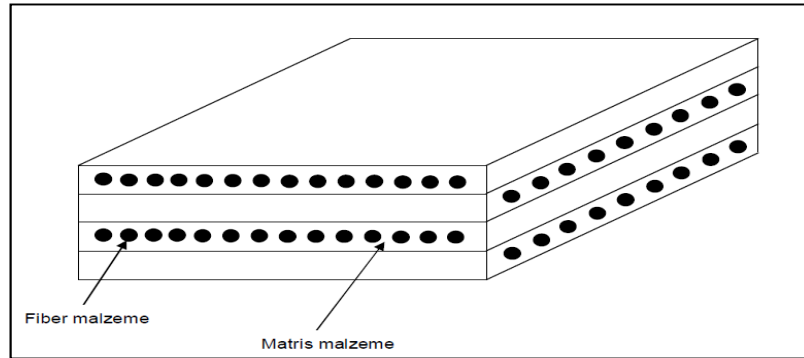
plaklar üzerinde de etkin olabilecek yeni bir tabakalı sonlu eleman ve algoritması geliştirilmiştir. Geliştirilen bu sonlu eleman kullanılarak kenarları eğrisel olabilen, genel dörtgen tabakalı kompozit plakların doğrusal statik hesabı yapılabilmektedir. Tez kapsamında yazılan Elfin 19 alt programının yanında [29] 'da yazılan GENSON adlı genel sonlu eleman ana programı da geliştirilerek bu tür plakların geometrik bakımdan doğrusal olmayan hesabının yapılması ve burkulma yüklerinin bulunması da mümkün olmuştur.

2. KOMPOZİT PLAKLARDA GERİLME ŞEKİLDEĞİŞTİRME BÜNYE BAĞINTILARI

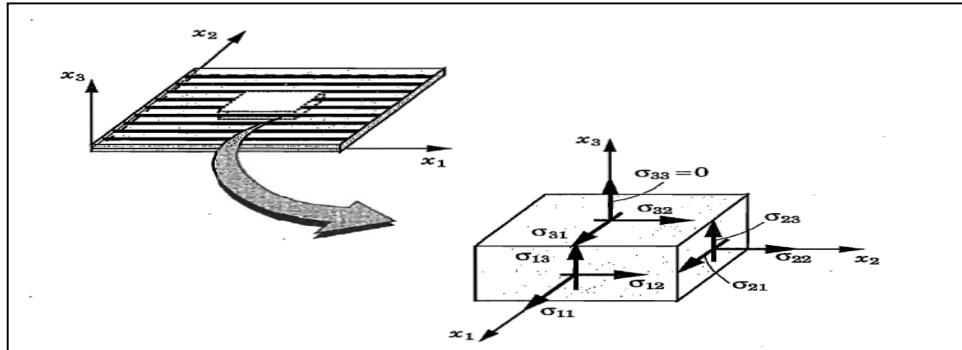
Düzlemiçi ve düzlemdışı gerilmelere sahip tabakalı kompozit plakların gerilme şekildeğiştirme bünye bağıntıları elde edilirken;

- i) Tabakaların sürekli olduğu, herhangi bir boşluğun olmadığı
- ii) Tabakaları oluşturan malzemelerin lineer elastik malzeme oldukları kabul edilmiştir.

Birinci kabul Şekil 2.1’de görülen; tabakaları oluşturan fiber ve matris malzemeler arasındaki bağın sürekli olduğu, herhangi bir fiber-matris ayrışması olmadığı; ikinci kabul ile ise malzemelerin genel Hooke yasasına uyduğu; lineer olmayan davranış sergilemedikleri anlaşılmaktadır.



Şekil 2.1 : Tabakalı kompozit plakta fiber ve matris malzemelerin görünümü.



Şekil 2.2 : Tabakalı kompozit plakta düzlem içi ve düzlem dışı gerilmeler [16].

Bu kabuller altında; Şekil 2.2’de görülen σ_{ij} gerilme bileşenlerinin; ϵ_{ij} şekildeğiştirme bileşenleri ve Q_{ij} malzeme katsayıları cinsinden ortogonal kartezyen koordinat sistemi (x_1, x_2, x_3)’e göre yazılmasıyla;

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix}^k \quad (2.1)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \end{bmatrix}^k \quad (2.2)$$

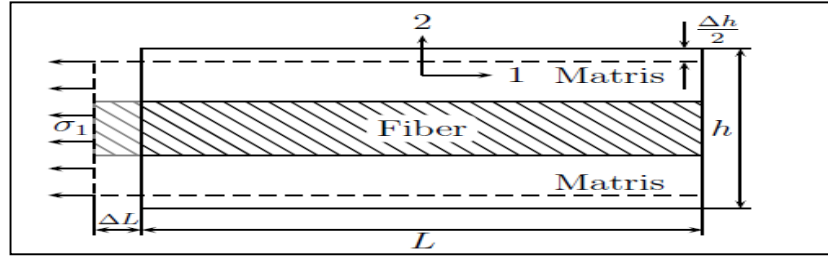
(k). katman için gerilme-şekildeğiştirme kompozit plak bünye bağıntıları elde edilir. (2.1) ve (2.2) gerilme-şekildeğiştirme bünye bağıntılarında Q_{ij} terimlerini mühendislik sabitlerine göre (2.3) ve (2.4) deki gibi yazacak olursak;

$$\begin{aligned} Q_{11}^k &= \frac{E_1^k}{1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k}, & Q_{12}^k &= \frac{\nu_{12}^k E_2^k}{1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k}, \\ Q_{22}^k &= \frac{E_2^k}{1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$Q_{66}^k = G_{12}^k, \quad Q_{44}^k = G_{23}^k, \quad Q_{55}^k = G_{13}^k \quad (2.4)$$

şeklindedir. (2.3) ve (2.4) denklemlerinde E_1 boyuna doğrultu elastisite modülü, E_2 enine doğrultu elastisite modülü, G_{12} , G_{13} , G_{23} kayma modülleri olmak üzere bu modüller fiber ve matris elemanların malzeme özelliklerinin birleşiminden elde edilirler. [30]

(2.3) denkleminde kullanılan boyuna doğrultuda elastisite modülünün (E_1) fiber ve matris malzemelerinin birleşiminden elde edilişi için Şekil 2.3’de görüldüğü üzere kompozit malzemeye fiber doğrultusunda σ_1 gerilmesi uygulanırsa;



Şekil 2.3 : Kompozit malzemeye σ_1 gerilmesinin uygulanması [30].

Kompozit malzemeyi oluşturan elemanlar (2.5) denkleminde görüldüğü üzere aynı miktarda şekildeğiştirme ε_1 ' e sahip olurlar.

$$\varepsilon_m = \varepsilon_f = \varepsilon_1 = \frac{\Delta L}{L} \quad (2.5)$$

Matris ve fiber malzemelerinin gerilmeleri; E elastisite modülü, σ gerilme ve m,f,1 indisleri ise sırasıyla matris, fiber ve 1 yönüne ait değerleri ifade etmek üzere;

$$\sigma_m = E_m \varepsilon_1 \quad \sigma_f = E_f \varepsilon_1 \quad (2.6)$$

şeklindedir. Gerilmelerden, oluşacak toplam kuvvet F'ye geçilecek olursa;

$$\frac{F}{A} = \sigma_1 = \frac{\sigma_m A_m}{A} + \frac{\sigma_f A_f}{A} \quad (2.7)$$

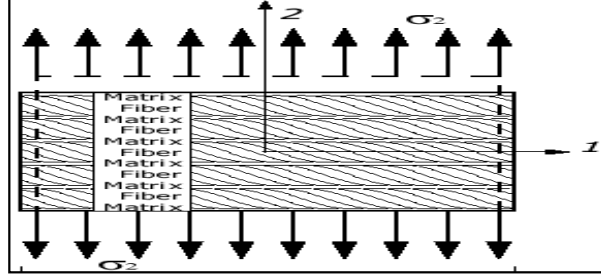
olmak üzere;

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma_m A_m}{\varepsilon_1 A} + \frac{\sigma_f A_f}{\varepsilon_1 A} \quad (2.8)$$

şeklindedir. (2.8) denkleminde matris malzemenin hacimsel yüzde oranı $V_m = \frac{A_m}{A}$ ile fiber malzemenin hacimsel yüzde oranı $V_f = \frac{A_f}{A}$ olmak üzere ve (2.6) denkleminin yerine konulmasıyla (2.8) denklemi;

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = E_m V_m + E_f V_f \quad (2.9)$$

halini alır. (2.3) ve (2.4) denklemlerinde kullanılan enine doğrultuda elastisite modülünün (E_2) fiber ve matris malzemelerin birleşiminden elde edilişi için Şekil 2.4’de görüldüğü üzere kompozit malzemeye enine (2) doğrultusunda σ_2 gerilmesi uygulanırsa;



Şekil 2.4 : Kompozit malzemeye σ_2 gerilmesinin uygulanması [30].

oluşacak enine doğrultuda şekildeğiştirme (ϵ_2); matris ve fiber matrislerin uzamaları sırasıyla Δh_m ve Δh_f olmak üzere;

$$\epsilon_2 = \frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta h_m}{h} + \frac{\Delta h_f}{h} \quad (2.10)$$

şeklindedir. Matris ve fiber malzemelerinin şekildeğiştirmeleri ise;

$$\epsilon_m = \frac{\Delta h_m}{h_m} \quad \epsilon_f = \frac{\Delta h_f}{h_f} \quad (2.11)$$

olmak üzere matris ve fiber malzemenin şekildeğiştirmelerinin sırasıyla matris ve fiber malzemelerin hacimsel oranı $V_m = \frac{h_m}{h}$; $V_f = \frac{h_f}{h}$ cinsinden (2.11) denkleminde yazılmasıyla (2.10) denklemindeki enine doğrultuda şekildeğiştirme (ϵ_2);

$$\epsilon_2 = \epsilon_m V_m + \epsilon_f V_f \quad (2.12)$$

olarak elde edilir. Enine doğrultuda gerilme şekildeğiştirme ilişkisinde; çıkarılan (2.12) denklemi yerine yazılacak olursa;

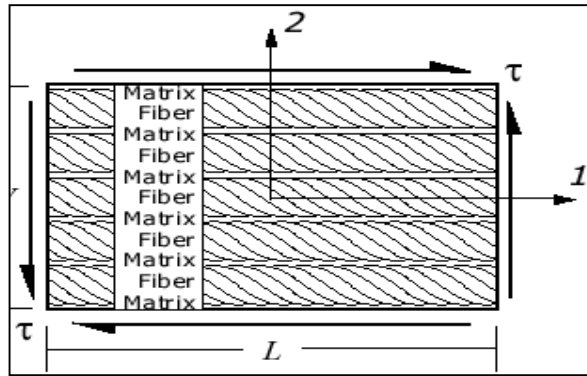
$$E_2 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_2} = \frac{\sigma_2}{\epsilon_m V_m + \epsilon_f V_f} = \frac{1}{\frac{\epsilon_m V_m + \epsilon_f V_f}{\sigma_2}} \quad (2.13)$$

olmak üzere ve matris ve fiber malzemelerinde oluşan gerilmelerin birbirine eşit ve σ_2 olacağı ($\sigma_f = \sigma_m = \sigma_2$) gözönünde bulundurularak (2.13) denklemi;

$$E_2 = \frac{1}{\frac{\varepsilon_m V_m + \varepsilon_f V_f}{\sigma_2}} = \frac{1}{\frac{\varepsilon_m V_m}{\sigma_m} + \frac{\varepsilon_f V_f}{\sigma_f}} = \frac{1}{\frac{\varepsilon_m V_m}{E_m \varepsilon_m} + \frac{\varepsilon_f V_f}{E_f \varepsilon_f}} = \frac{1}{\frac{V_m}{E_m} + \frac{V_f}{E_f}} \quad (2.14)$$

$$= \frac{E_f E_m}{E_f V_m + E_m V_f}$$

halini alır. (2.4) denkleminde kullanılan kayma modülünün (G_{12}) fiber ve matris malzemelerinin birleşiminden elde edilişi için; Şekil 2.5’de görüldüğü üzere kompozit malzemeye kayma gerilmesi uygulanırsa;



Şekil 2.5 : Kompozit malzemeye kayma gerilmesinin (τ) uygulanması [30].

Fiber ve matris elemanlarda oluşan kayma gerilmelerinin birbirine eşit olduğu kabulü altında;

$$\tau = G_f \gamma_f = G_m \gamma_m \quad (2.15)$$

ve kayma şekildeğiştirmesinin fiber ve matris elemanlarda hacimsel yüzdeleri ile orantılı olarak paylaştığı gözönünde tutularak;

$$\gamma = V_f \gamma_f + V_m \gamma_m \quad (2.16)$$

olmak üzere kayma modülü (G_{12});

$$\begin{aligned}
G_{12} = G_{13} = \frac{\tau}{\gamma} &= \frac{1}{\frac{\gamma}{\tau}} = \frac{1}{\frac{V_f \gamma_f + V_m \gamma_m}{\tau}} = \frac{1}{\frac{V_f \gamma_f}{G_f \gamma_f} + \frac{V_m \gamma_m}{G_m \gamma_m}} = \frac{1}{\frac{V_f}{G_f} + \frac{V_m}{G_m}} \\
&= \frac{G_m G_f}{V_f G_m + V_m G_f}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

olarak elde edilir. Fiber malzemenin kesite hiç girmedığı kayma düzlemindeki kayma modülü ise doğrudan $G_{23} = G_m$ alınmalıdır. (2.3) denklemlerinde kullanılan Poisson oranının (v_{12}) fiber ve matris malzemelerin birleşiminden elde edilişi için;

$$v_{12} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \tag{2.18}$$

olmak üzere Şekil 2.3 de gözüken σ_1 gerilmesi altında fiber ve matris elemanlarda meydana gelen şekildeğiştirme birbirine eşit ve;

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_m = \varepsilon_f \tag{2.19}$$

şeklindedir. Sırasıyla fiber ve matris elemanın hacimsel yüzdesi V_f ve V_m ile Poisson oranları v_f ve v_m olmak üzere yükleme doğrultusuna dik şekildeğiştirme ε_2 ise;

$$\varepsilon_2 = V_f \varepsilon_{f2} + V_m \varepsilon_{m2} = -(V_f v_f \varepsilon_f + V_m v_m \varepsilon_m) \tag{2.20}$$

şeklindedir. (2.18) denkleminde (2.19) ve (2.20) denklemleri yerlerine konulursa Poisson oranı (v_{12});

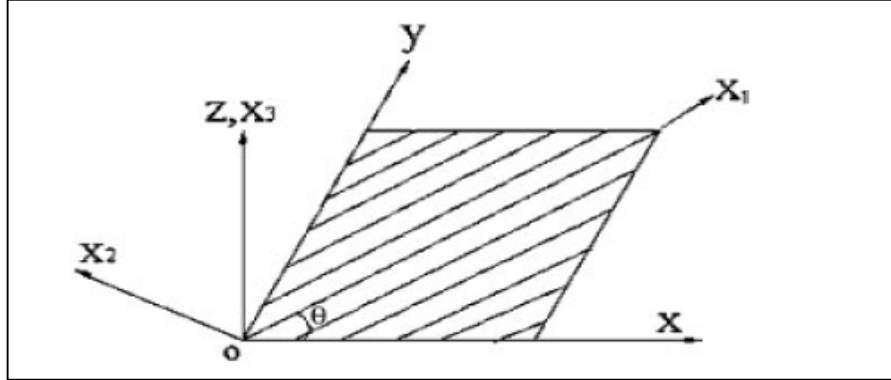
$$v_{12} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{V_f v_f \varepsilon_f}{\varepsilon_f} + \frac{V_m v_m \varepsilon_m}{\varepsilon_m} = V_f v_f + V_m v_m \tag{2.21}$$

olarak bulunur.

2.1 Bünye Bağlıları Matrisinin Dönüştürülmesi

(2.1) ve (2.2) denklemlerindeki $[Q]$ bünye matrisinin katman doğrultusuna göre elde edilmiş olması nedeniyle global eksen takımına (2.22) ve (2.23) denklemleri kullanarak dönüştürülmesi gerekmektedir.

Global eksen X, Y, Z ve asal malzeme eksenleri (katman doğrultusu) X_1, X_2, X_3 Şekil 2.6'da görülebilir.



Şekil 2.6 : Global eksen ve asal malzeme eksenleri [16].

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -\sin 2\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & \sin 2\theta \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

şeklinde tanımlanabilecek dönüştürme matrisi uygulanarak (2.1) denkleminde tanımlanmış bünye matrisi terimlerinin global eksen takımı doğrultusundaki bileşenlerine;

$$[\bar{Q}] = [T][Q][T]^T \quad (2.23)$$

matris dönüştürme işlemi ile geçilebilir [31]. (2.23) denkleminde elde edilen $[\bar{Q}]$ matrisi terimleri sırasıyla;

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11}\cos^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\cos^2\theta\sin^2\theta + Q_{22}\sin^4\theta \quad (2.24)$$

$$\bar{Q}_{12} = Q_{12}\cos^4\theta + (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})\cos^2\theta\sin^2\theta + Q_{12}\sin^4\theta \quad (2.25)$$

$$\bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\cos^3\theta\sin\theta + (2Q_{66} + Q_{12} - Q_{22})\cos\theta\sin^3\theta \quad (2.26)$$

$$\overline{Q_{22}} = Q_{22}\cos^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\cos^2\theta\sin^2\theta + Q_{11}\sin^4\theta \quad (2.27)$$

$$\overline{Q_{26}} = (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\cos^3\theta\sin\theta + (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\cos\theta\sin^3\theta \quad (2.28)$$

$$\overline{Q_{66}} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})\cos^2\theta\sin^2\theta + Q_{66}(\cos^4\theta + \sin^4\theta) \quad (2.29)$$

(2.2) denkleminde tanımlanmış bünye matrisi terimlerinin global eksen doğrultusunda dönüştürülmesi ise;

$$\overline{Q_{44}} = Q_{44}\cos^2\theta + Q_{55}\sin^2\theta \quad (2.30)$$

$$\overline{Q_{45}} = (Q_{55} - Q_{44})\cos\theta\sin\theta \quad (2.31)$$

$$\overline{Q_{55}} = Q_{55}\cos^2\theta + Q_{44}\sin^2\theta \quad (2.32)$$

şeklindedir. Bu sayede gerilme şekildeğiştirme ilişkisini global eksen takımına göre (2.33) ve (2.34) denklemlerinde yazacak olursak;

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{16}} \\ \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{26}} \\ \overline{Q_{16}} & \overline{Q_{26}} & \overline{Q_{66}} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^k \quad (2.33)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \overline{Q_{55}} & \overline{Q_{45}} \\ \overline{Q_{45}} & \overline{Q_{44}} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}^k \quad (2.34)$$

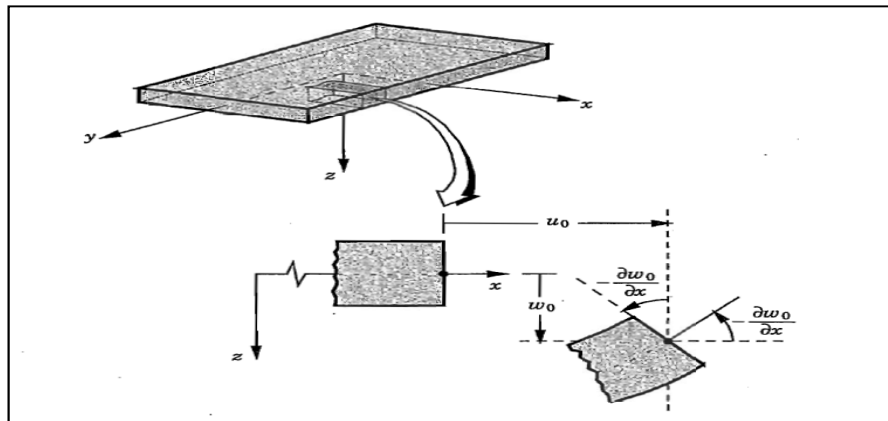
halini alır.

3. LİTERATÜRDE YER ALAN TABAKALI KOMPOZİT PLAK ANALİZLERİ

Kompozit tabakalı plak analizi temelde üç teoriye dayanmaktadır. Kompozit tabakalı plakların lineer ve geometrik nonlinear analizi amacıyla günümüze kadar kullanılan mevcut üç teorinin kullanılabilme koşulları, avantajları ve dezavantajları sırasıyla aşağıda açıklanmıştır.

3.1 Klasik Tabakalı Plak Teorisi (KPT) (İnce Plak - Kirchhoff Hipotezi)

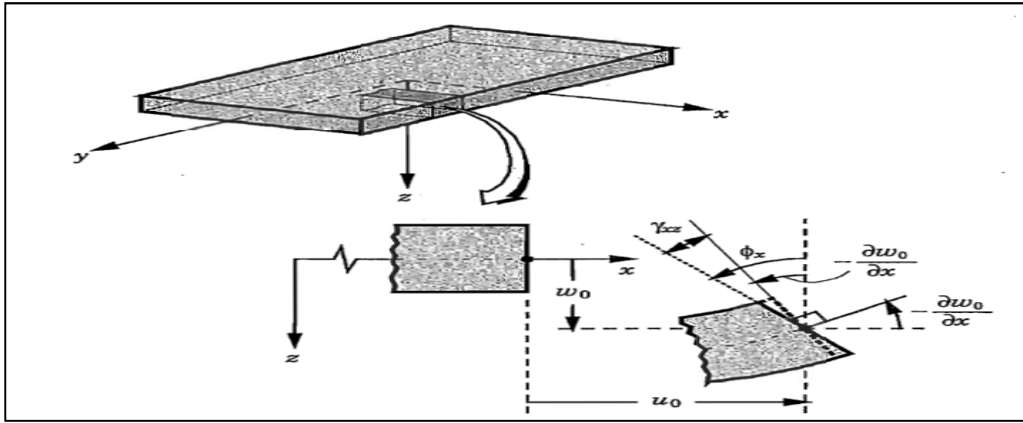
Klasik tabakalı plak teorisi; başlangıçta plak eksenine dik ve düzlem olan kesitler şekildeğıştirdikten sonra da plak eksenine dik ve düzlem kalır kabulüne dayanmaktadır. (Şekil 3.1) Kayma etkilerinin dikkate alınmadığı bu teorinin kullanım alanı çok ince plaklarla sınırlıdır [31]. Homojen izotrop plaklarda kayma modülünün elastisite modülüne oranı Poisson oranına bağlı olarak 0,4 mertebesinde iken tabakalı kompozit plaklarda bu oran özellikle fiberlere dik kesitlerde 0,02 mertebesine düşmekte dolayısıyla kaymaya bağlı yerdeğıştirmelerin önemi artmaktadır.



Şekil 3.1 : Klasik Plak Teorisi (Kayma Etkileri $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$) [16].

3.2 Tabakalı Plaklarda Birinci Mertebe Kayma Deformasyon Teorisi

Birinci mertebe kayma deformasyon teorisi; başlangıçta plak eksenine dik ve düzlem olan kesitler şekildeğiştirdikten sonra kayma deformasyonları (γ_{xz}, γ_{yz}) sonucunda plak eksenine dik kalamazlar kabulüne dayanmaktadır. (Şekil 3.2) Plak kalınlığı boyunca parabolik kayma gerilmesi dağılımı elde etmek amacıyla kayma düzeltme katsayılarına ihtiyaç duyulmaktadır. Bu teoriye göre hesap formülasyonu [31]'den alınarak aşağıda kısaca özetlenmiştir.



Şekil 3.2 : Birinci Mertebe Kayma Deformasyon Teorisi [16].

3.2.1 Yerdeğiştirme – şekildeğiştirme bağıntıları

Birinci mertebe kayma deformasyon teorisine göre yapılacak hesaplarda x, y, z doğrultularındaki yerdeğiştirme bileşenleri sırasıyla u, v ve w olmak üzere tabakalı plak orta düzlem yerdeğiştirme bileşenleri u^0, v^0 ve w^0 ile orta düzlem dönmeleri ϕ_x ve ϕ_y cinsinden;

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u^0(x, y) + z\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v^0(x, y) + z\phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w^0(x, y) \end{aligned} \quad (3.1)$$

şeklinde yazılır. β_x, β_y sırasıyla x ve y eksenleri etrafındaki dönmeleri göstermek üzere sağ el kuralına göre;

$$\phi_y = -\beta_x \quad \phi_x = \beta_y \quad (3.2)$$

olarak yazılabilir. Yerdeğiştirmelerin küçük olmadığı, geometrik nonlinear durumun söz konusu olduğu plaklar için Green şekildeğiştirme matrisi;

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

olmak üzere, (3.1) denklemini (3.3)'de yerine konulursa,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

halini alır. (3.4) denklemini $\varepsilon = \varepsilon^m + z\varepsilon^b$ (membran ve eğilme) olmak üzere iki matrise ayrıştırılırsa;

$$\varepsilon^m = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}^m \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^b = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{bmatrix}^b \quad (3.5)$$

elde edilir.

$$\varepsilon^m = \epsilon_L^m + \epsilon_{nL}^m \quad (3.6)$$

(3.6) denklemindeki gibi membran şekildeğiştirme matrisi, lineer ve nonlinear membran matris olarak ayrıştırılırsa;

$$\epsilon_L^m = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix}_L^m \quad \epsilon_{nL}^m = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}_{nL}^m \quad (3.7)$$

elde edilir. Enine kayma şekildeğiştirme matrisi ise;

$$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_x - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \phi_y - \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

şeklindedir.

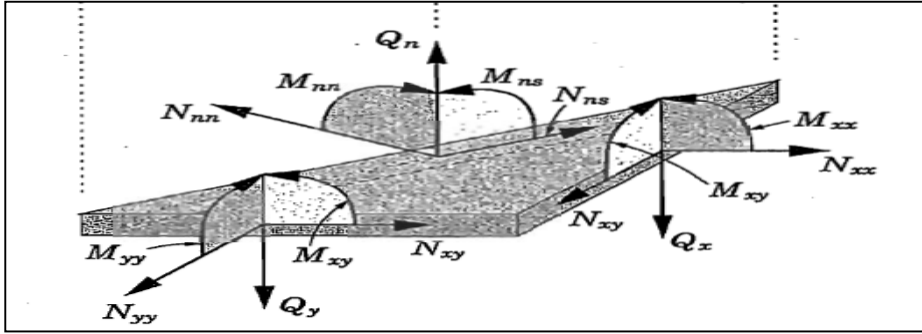
$$\sigma^* = \begin{bmatrix} [N] \\ [M] \\ [T] \end{bmatrix} \quad D^* = \begin{bmatrix} [A] & [B] & [0] \\ [B] & [D] & [0] \\ [0] & [0] & [C_s] \end{bmatrix} \quad \epsilon^* = \begin{bmatrix} \epsilon^m \\ \epsilon^b \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

olmak üzere

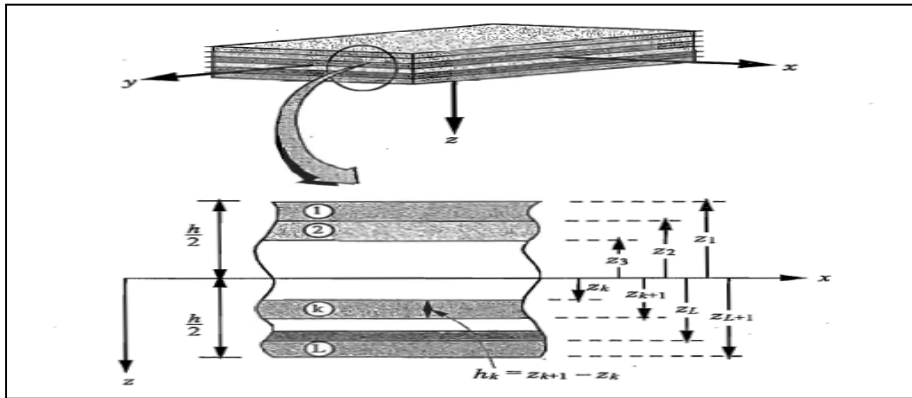
$$\sigma^* = D^* \epsilon^* \quad (3.10)$$

kompozit tabakalı plak bünye bağıntısı elde edilir. (3.9) denkleminde D^* matrisini oluşturan $[A]$ matrisi eksenel uzamaya, $[B]$ matrisi eğilme-eksenel uzama çiftine, $[C_s]$ matrisi ise enine kaymaya karşı gelen rijitlik matrisleridir.

(3.9) denklemindeki σ^* matrisini oluşturan $[N]$, $[M]$, $[T]$ matris bileşenleri ise tabaka kalınlıkları boyunca ilgili gerilmelerin integrasyonu ile elde edilir. (Şekil 3.3 – Şekil 3.4)



Şekil 3.3 : $[N]$, $[M]$, $[T]$ matrisi bileşenleri [16].



Şekil 3.4 : Kompozit Plak Katman Kalınlıkları [16].

$$[N] = \begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}^k dz \quad (3.11)$$

olmak üzere (3.11) denkleminde (2.29) denklemi yerine konulur;

$$[N] = \begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{16}} \\ \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{26}} \\ \overline{Q_{16}} & \overline{Q_{26}} & \overline{Q_{66}} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^k dz \quad (3.12)$$

ve (3.12) denkleminde şekildeğişiklikler yerine (3.5) denklemi konulursa;

$$\begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{16}} \\ \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{26}} \\ \overline{Q_{16}} & \overline{Q_{26}} & \overline{Q_{66}} \end{bmatrix}^k \left[\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^m + z \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^b \right]^k dz \quad (3.13)$$

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \overline{Q_{ij}}^k dz = \sum_{k=1}^N \overline{Q_{ij}}^k (z_{k+1} - z_k) \quad (3.14)$$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \overline{Q_{ij}}^k z dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \overline{Q_{ij}}^k (z_{k+1}^2 - z_k^2) \quad (3.15)$$

olmak üzere (3.13) denklemi;

$$\sigma_{11}^* = \begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^m + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^b \quad (3.16)$$

şeklini alır. Benzer şekilde moment bileşenleri için;

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}^k z dz \quad (3.17)$$

(3.17) denkleminde (2.29) denklemi yerine konulur;

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{16}} \\ \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{26}} \\ \overline{Q_{16}} & \overline{Q_{26}} & \overline{Q_{66}} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^k dz \quad (3.18)$$

ve (3.18) denkleminde şekildeğiştirmeler yerine (3.5) denklemini konulursa;

$$\begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{16}} \\ \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{26}} \\ \overline{Q_{16}} & \overline{Q_{26}} & \overline{Q_{66}} \end{bmatrix}^k \left[\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^m + z \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^b \right]^k dz \quad (3.19)$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \overline{Q_{ij}}^k z^2 dz = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \overline{Q_{ij}}^k (z_{k+1}^3 - z_k^3) \quad (3.20)$$

olmak üzere (3.19) denklemini;

$$\begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^m + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^b \quad (3.21)$$

şeklini alır. Benzer şekilde kesme kuvveti bileşenleri için;

$$[T] = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}^k dz \quad (3.22)$$

olmak üzere (3.22) denkleminde (2.30) denklemini yerine konulursa;

$$[T] = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \kappa_1 \overline{Q_{55}} & \sqrt{\kappa_1 \kappa_2} \overline{Q_{45}} \\ \sqrt{\kappa_1 \kappa_2} \overline{Q_{45}} & \kappa_2 \overline{Q_{44}} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}^k dz \quad (3.23)$$

$$A_{44} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \overline{Q_{44}}^k dz = \sum_{k=1}^N \overline{Q_{44}}^k (z_{k+1} - z_k) \quad (3.24)$$

$$A_{45} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \overline{Q_{45}}^k dz = \sum_{k=1}^N \overline{Q_{45}}^k (z_{k+1} - z_k) \quad (3.25)$$

$$A_{55} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \overline{Q}_{55}^k dz = \sum_{k=1}^N \overline{Q}_{55}^k (z_{k+1} - z_k) \quad (3.26)$$

olmak üzere (3.23) denklemi;

$$\sigma_{31}^* = [T] = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = [C_s] \begin{bmatrix} Y_{xz} \\ Y_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_1 A_{55} & \sqrt{\kappa_1 \kappa_2} A_{45} \\ \sqrt{\kappa_1 \kappa_2} A_{45} & \kappa_2 A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{xz} \\ Y_{yz} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

şeklini alır.

3.2.2 Özel tabakalanma tipleri

Simetrik veya antisimetrik tabakalanmanın temelinde açı, malzeme ve tabaka kalınlığındaki farklılık yer alır. Buna bağlı olarak (3.14), (3.15) ve (3.20) denklemlerinde gösterilen [A], [B] ve [D] matrislerinden biri veya birkaçı sıfır olabilir. Bu durum eğilme momentlerinin, normal ve kesme kuvvetlerinin, eğilme-burulma momentlerinin ve kuvvet çiftlerinin sıfır veya sıfıra çok yakın olması ile sonuçlanabilir. Bu durum, kompozitlerin mekanik analizini basitleştirir.

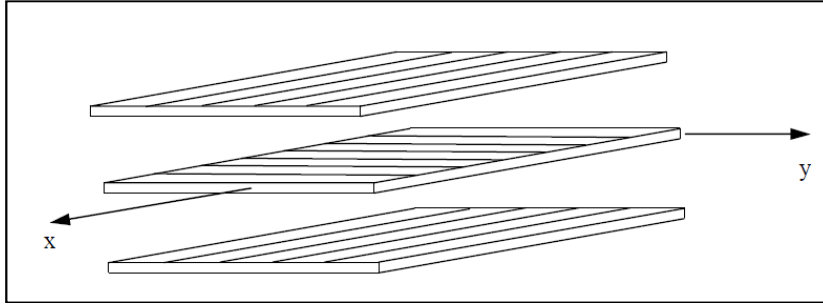
3.2.2.1 Simetrik tabakalanma

Hem malzeme özelliği hem de geometrik özellikleri ile orta düzleme göre simetrik olan tabakalanmaya “simetrik tabakalanma” denilmektedir.[32] Özellikle $(\overline{Q}_{ij})_k$ ‘nın ve tabaka kalınlığının simetrik olması sebebiyle tüm bağlanma rijitlikleri olan B_{ij} ’lerin (3.15) denkleminden sıfır olduğu görülebilir.

Simetrik tabakalarda [B] matrisinin sıfır olmasından dolayı uzama-eğrilik çifti girişimsizdir yani simetrik tabakalarda girişim etkisi yoktur. Bu durum simetrik tabakaların analizini daha kolay hale getirir. Ayrıca simetrik tabakalar, iyileştirme sürecine müteakip soğutma esnasında, kasılma ve büzülme neden olan kaçınılmaz ısı etkisinden dolayı bir bükülme eğilimi göstermezler. Sonuç olarak, özel bir durum nedeniyle antisimetrik tabakaların kullanılması gerekmediği müddetçe, simetrik tabakalar kullanılır.

3.2.2.1.1 Özel ortotropik simetrik tabakalanma

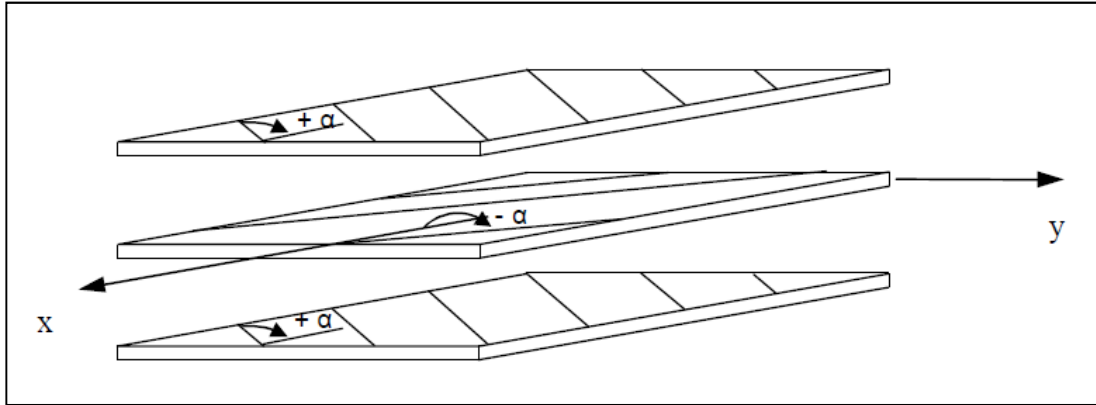
Analitik karmaşıklıklar içermesi sebebiyle denklemlerde bulunan A_{16} , A_{26} , D_{16} ve D_{26} rijitliklerinin olmaması arzu edilir. Tabakalanma, tabaka aksı ile fiber malzeme doğrultusu aynı hizaya gelecek şekilde ortotropik tabakalarla oluşturulabilir. Tabakaların kalınlıkları, konumu ve malzeme özellikleri, tabakanın orta düzlemine göre simetrikse, uzama ve eğrilik arasında bir girişim mevcut değildir. Üç tabakalı özel ortotropik simetrik tabakalanmaya Şekil 3.5 örnek olarak verilebilir. Tabaka fiberlerinin 0° veya 90° derece dizilmesi durumunda (2.20) – (2.28) denklemlerinden görüleceği üzere $\overline{Q}_{16}$, $\overline{Q}_{26}$ ve $\overline{Q}_{45}$ sıfır olacak dolayısıyla (3.14) ve (3.20) denklemlerinden $A_{16} = A_{26} = A_{45} = D_{16} = D_{26} = 0$ durumuna geleceklerdir.



Şekil 3.5 : Üç Tabakalı Ortotropik Simetrik Tabakalanma [16].

3.2.2.1.2 Genel ortotropik simetrik tabakalanma

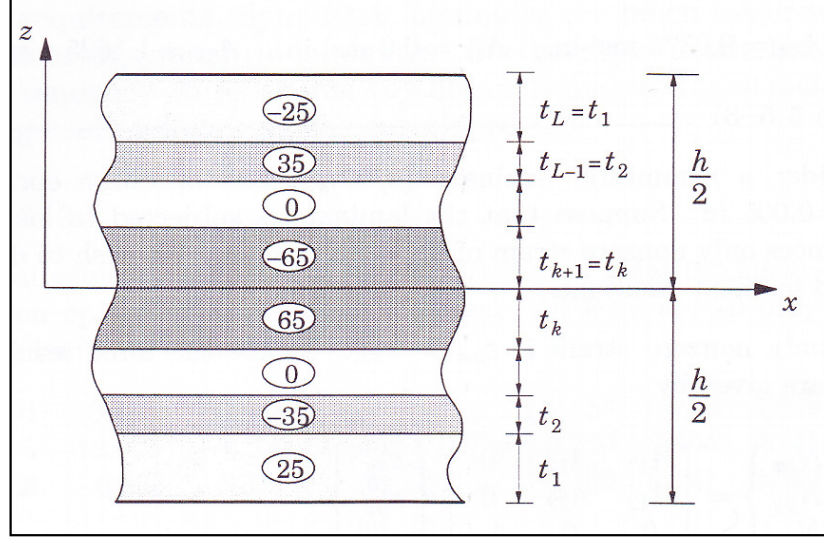
Genel ortotropik simetrik tabakalanma, orta yüzey çevresinde simetrik olarak yerleştirilmiş genel ortotropik katmanlardan meydana gelmiştir. Bu tabakalı eleman, eğilme ve uzama arasında bir ilişki sergilemez, yani B_{ij} ler sıfırdır. A_{ij} ve D_{ij} ler sıfır değildir. (Şekil 3.6)



Şekil 3.6 : Üç tabakalı simetrik açılı-katlı tabakalanma [16].

3.2.2.2 Antimetrik tabakalanma

Simetrik tabakalanma analiz kolaylığı bakımından daha çok arzu edilen bir durum olmakla beraber bazı tasarım ihtiyaçları Şekil 3.7’de görüldüğü gibi tabaka kalınlıkları simetrik kalmakla beraber tabakalanmanın antisimetrik şekilde dizilimini gerektirebilir.



Şekil 3.7 : Antisimetrik tabakalanma [16].

Tabakalanmanın antisimetrik, tabaka kalınlıklarının simetrik olması nedeniyle (3.14) ve (3.20) denklemlerinde yer alan $A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = 0$ tabaka rijitlikleri hesaplamalarda ortadan kalkacaklardır.

3.3 Tabakalı Plaklarda Yüksek Mertebe Kayma Deformasyon Teorisi

[10]’da geliştirilen yüksek mertebe kayma deformasyon teorisi; kayma deformasyonunun etkisini gözönüne almasının yanısıra birinci mertebe kayma deformasyon teorisinden farklı olarak kayma şekildeğiştirmelerinin tabaka kalınlığı boyunca parabolik değişim göstermesi esasına dayanır. Bu nedenle birinci mertebe kayma deformasyon teorisinde kullanılan kayma düzeltme katsayılarının kullanım gereğini ortadan kaldırmış olur.

[10]’da geliştirilen yüksek mertebe kayma deformasyon teorisinde düzlem içi yerdeğiştirmeler u ve v ; tabaka kalınlığının kübik değişimi olarak dikkate alınmış olup

$$u = u_0(x, y) + z u_1(x, y) + z^2 u_2(x, y) + z^3 u_3(x, y) \quad (3.28)$$

$$v = v_0(x, y) + z v_1(x, y) + z^2 v_2(x, y) + z^3 v_3(x, y) \quad (3.29)$$

$$w = W(x, y) \quad (3.30)$$

şeklindedir.

$z = h/2$ ve $z = -h/2$ tabaka sınırlarında kayma gerilmelerinin sıfır olması gerekeceğinden bu sınırlarda kayma şekildeğiştirmesi değerlerinin de sıfır olması durumundan;

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = u_1 + 2zu_2 + 3z^2u_3 + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.31)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = v_1 + 2zv_2 + 3z^2v_3 + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.32)$$

(3.31) ve (3.32) denklemlerinde $\gamma_{zx}\left(x, y, \pm \frac{h}{2}\right)$ ve $\gamma_{yz}\left(x, y, \pm \frac{h}{2}\right) = 0$ olduğu yazılırsa;

$$u_2 = v_2 = 0 \quad (3.33)$$

bulunur. Ortalama düzlemiçi yerdeğiştirmeler;

$$U = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} u \, dz \quad (3.34)$$

$$V = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} v \, dz \quad (3.35)$$

olmak üzere (3.34) ve (3.35) denklemlerinde sırasıyla (3.28) ve (3.29) denklemlerini yerleştirip integrasyon uygulandığında;

$$U = u_0 \quad V = v_0 \quad (3.36)$$

olarak bulunur. Ortalama yüzeye dik x ve y eksenindeki ortalama dönmeler β_x ve β_y ;

$$\begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix} = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} z \, dz \quad (3.37)$$

olmak üzere (3.37) denkleminde u ve v yerdeğiştirme alanları yerine sırasıyla (3.28) ve (3.29) denklemleri yerleştirildiğinde;

$$\beta_x = u_1 + \frac{3h^2}{20} u_3 \quad (3.38)$$

$$\beta_y = v_1 + \frac{3h^2}{20} v_3 \quad (3.39)$$

olarak bulunur.

(3.31) denkleminde $z=h/2$ için $\gamma_{zx} = 0$ eşitlenmesiyle;

$$u_1 + \frac{3}{4} u_3 h^2 = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.40)$$

olmak üzere;

$$u_3 = \frac{-4}{3h^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + u_1 \right) \quad (3.41)$$

halini alır. (3.38) denkleminde (3.41) denkleminin yerine yazılmasıyla;

$$u_1 = \frac{5\beta_x}{4} + \frac{1}{4} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.42)$$

(3.42) denkleminin (3.41) denkleminde yerine yazılmasıyla;

$$u_3 = \frac{-5}{3h^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \right) \quad (3.43)$$

olarak bulunur. Benzer şekilde diğerk düzlemiçi yerdeğiştirme v için ;

$$v_1 = \frac{5\beta_y}{4} + \frac{1}{4} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.44)$$

olmak üzere;

$$v_3 = \frac{-5}{3h^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \beta_y \right) \quad (3.45)$$

olarak elde edilir. Kesit zorları ile uç yerdeğiştirmeler arasında ilişki kurulması amacıyla;

$$\begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}^k z \, dz \quad (3.46)$$

(3.46) denkleminde gerilme şekildeğiştirme ilişkisi yazılacak olursa;

$$\begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{13}} \\ \overline{Q_{21}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{23}} \\ \overline{Q_{31}} & \overline{Q_{32}} & \overline{Q_{33}} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^k z \, dz \quad (3.47)$$

Şekildeğiştirmeler ile yerdeğiştirmeler arasındaki bağıntılardan yararlanarak;

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (u_0 + u_1 z + u_3 z^3) = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial u_1}{\partial x} + z^3 \frac{\partial u_3}{\partial x} \quad (3.48)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (v_0 + v_1 z + v_3 z^3) = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial v_1}{\partial y} + z^3 \frac{\partial v_3}{\partial y} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} (u_0 + u_1 z + u_3 z^3) + \frac{\partial}{\partial x} (v_0 + v_1 z + v_3 z^3) \\ &= \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) + z^3 \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3.50)$$

(3.48), (3.49) ve (3.50) denklemleri (3.47) denkleminde yerine konulursa;

$$\begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{13}} \\ \overline{Q_{21}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{23}} \\ \overline{Q_{31}} & \overline{Q_{32}} & \overline{Q_{33}} \end{bmatrix}^k \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ \frac{\partial v_1}{\partial y} \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \end{bmatrix} + z^2 \begin{bmatrix} \frac{\partial u_2}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial y} \\ \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \end{bmatrix} \right) z \, dz \quad (3.51)$$

$$\overline{C_{ij}^{(1)}} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \overline{Q_{ij}^{(k)}} \, z \, dz$$

$$\overline{C_{ij}^{(2)}} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \overline{Q_{ij}^{(k)}} \, z^2 \, dz$$

$$\overline{C_{ij}^{(4)}} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \overline{Q_{ij}^{(k)}} \, z^4 \, dz \quad (3.52)$$

olmak üzere (3.51) denklemi;

$$\begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} = [J] [\Phi] = \begin{bmatrix} \overline{C_{11}^{(1)}} & \overline{C_{12}^{(1)}} & \overline{C_{13}^{(1)}} \\ \overline{C_{21}^{(1)}} & \overline{C_{22}^{(1)}} & \overline{C_{23}^{(1)}} \\ \overline{C_{31}^{(1)}} & \overline{C_{32}^{(1)}} & \overline{C_{33}^{(1)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{C_{11}^{(2)}} & \overline{C_{12}^{(2)}} & \overline{C_{13}^{(2)}} \\ \overline{C_{21}^{(2)}} & \overline{C_{22}^{(2)}} & \overline{C_{23}^{(2)}} \\ \overline{C_{31}^{(2)}} & \overline{C_{32}^{(2)}} & \overline{C_{33}^{(2)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{C_{11}^{(4)}} & \overline{C_{12}^{(4)}} & \overline{C_{13}^{(4)}} \\ \overline{C_{21}^{(4)}} & \overline{C_{22}^{(4)}} & \overline{C_{23}^{(4)}} \\ \overline{C_{31}^{(4)}} & \overline{C_{32}^{(4)}} & \overline{C_{33}^{(4)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ \frac{\partial v_1}{\partial y} \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial y} \\ \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

halini alır. Benzer şekilde normal kuvvet kesit zorları için;

$$\begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}^k dz$$

$$\begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{13}} \\ \overline{Q_{21}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{23}} \\ \overline{Q_{31}} & \overline{Q_{32}} & \overline{Q_{33}} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^k dz \quad (3.54)$$

olmak üzere (3.54) denkleminde (3.48), (3.49) ve (3.50) denklemlerinin konulması ve

$$\overline{C_{ij}^{(0)}} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \overline{Q_{ij}^{(k)}} z^0 dz$$

$$\overline{C_{ij}^{(1)}} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \overline{Q_{ij}^{(k)}} z^1 dz$$

$$\overline{C_{ij}^{(3)}} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \overline{Q_{ij}^{(k)}} z^3 dz \quad (3.55)$$

olmak üzere (3.54) denklemi;

$$\begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \overline{C_{11}^{(0)}} & \overline{C_{12}^{(0)}} & \overline{C_{13}^{(0)}} \\ \overline{C_{21}^{(0)}} & \overline{C_{22}^{(0)}} & \overline{C_{23}^{(0)}} \\ \overline{C_{31}^{(0)}} & \overline{C_{32}^{(0)}} & \overline{C_{33}^{(0)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{C_{11}^{(1)}} & \overline{C_{12}^{(1)}} & \overline{C_{13}^{(1)}} \\ \overline{C_{21}^{(1)}} & \overline{C_{22}^{(1)}} & \overline{C_{23}^{(1)}} \\ \overline{C_{31}^{(1)}} & \overline{C_{32}^{(1)}} & \overline{C_{33}^{(1)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{C_{11}^{(3)}} & \overline{C_{12}^{(3)}} & \overline{C_{13}^{(3)}} \\ \overline{C_{21}^{(3)}} & \overline{C_{22}^{(3)}} & \overline{C_{23}^{(3)}} \\ \overline{C_{31}^{(3)}} & \overline{C_{32}^{(3)}} & \overline{C_{33}^{(3)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \overline{\overline{\partial u_1}} \\ \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_1}{\partial y} \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \\ \overline{\overline{\partial u_3}} \\ \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_3}{\partial y} \\ \frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

halini alır. (3.36) denklemi gözönüne alınarak;

$$\frac{\partial u_o}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \frac{\partial v_o}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \quad (3.57)$$

olmak üzere; (3.42) ve (3.44) denklemlerinde bulunan u_1 ve v_1 yerdeğiştirme parametrelerinin kısmi türevlerinin alınmasıyla;

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{5}{4} \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{5}{4} \frac{\partial \beta_y}{\partial x} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{5}{4} \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{5}{4} \frac{\partial \beta_y}{\partial x} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.58)$$

elde edilir. Benzer şekilde sırasıyla (3.43) ve (3.45) denklemlerinde bulunan u_3 ve v_3 yerdeğiştirme parametrelerinin kısmi türevlerinin alınmasıyla;

$$\frac{\partial u_3}{\partial y} = -\frac{5}{3h^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \beta_x}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial y} = -\frac{5}{3h^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial x} = \frac{-5}{3h^2} \frac{\partial \beta_x}{\partial y} - \frac{5}{3h^2} \frac{\partial \beta_y}{\partial x} - \frac{10}{3h^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.59)$$

olarak elde edilir.

$$[H] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/4 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5/4 & 5/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5/3h^2 & 0 & 0 & -5/3h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5/3h^2 & 0 & 0 & -5/3h^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5/3h^2 & 0 & -10/3h^2 \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

$$[\psi] = \begin{bmatrix} \psi_S \\ \psi_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial U / \partial x \\ \partial U / \partial y \\ \partial V / \partial x \\ \partial V / \partial y \\ \partial \beta_x / \partial x \\ \partial \beta_y / \partial y \\ \partial \beta_x / \partial y \\ \partial \beta_y / \partial x \\ \partial^2 w / \partial x^2 \\ \partial^2 w / \partial y^2 \\ \partial^2 w / \partial x \partial y \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

(3.60) ve (3.61) denklemleri kullanılarak;

$$[\phi] = [H][\psi] \quad (3.62)$$

olmak üzere; sırasıyla (3.53) ve (3.56) denklemlerinde bulunan moment ve normal kuvvet kesit zorları (3.63) ve (3.64) denklemlerinde; ortalama düzlemiçi yerdeğiştirmeler (U, V) ve ortalama düzlem dönmeleri (β_x, β_y) ile çökme (w) bilinmeyenleri cinsinden elde edilir.

$$[N] = [I][H][\psi] \quad (3.63)$$

$$[M] = [J][H][\psi] \quad (3.64)$$

olarak elde edilir. Benzer işlemler [Q] kayma matrisi için yapılacak olursa;

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} C_{55} & C_{56} \\ C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} dz \quad (3.65)$$

olmak üzere γ_{xz} ve γ_{yz} düzlem dışı kayma şekildeğiştirmeleri yerdeğiştirme alanı cinsinden yazılacak olursa;

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} (u_1 z + u_3 z^3) + \frac{\partial w}{\partial x} = u_1 + 3u_3 z^2 + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.66)$$

(3.42) ve (3.43) denklemlerinin (3.66) denkleminde yerine yazılmasıyla;

$$\gamma_{xz} = \left(\frac{5\beta_x}{4} + \frac{1}{4} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + 3z^2 \left(-\frac{5}{3h^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \right) \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.67)$$

bulunur. Benzer şekilde γ_{yz} için düzenlemeler yapılırsa;

$$\gamma_{yz} = \left(\frac{5\beta_y}{4} + \frac{1}{4} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + 3z^2 \left(-\frac{5}{3h^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \beta_y \right) \right) + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.68)$$

bulunur. (3.67) ve (3.68) denklemleri (3.65) denkleminde yerine yazılıp düzenlenirse kesme kuvvet zorları;

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = & \left(\sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} C_{55} & 3z^2 C_{55} & C_{56} & 3z^2 C_{56} \\ C_{56} & 3z^2 C_{56} & C_{66} & 3z^2 C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ -5/(3h^2) & 0 & -5/(3h^2) & 0 \\ 0 & 5/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & -5/(3h^2) & 0 & -5/(3h^2) \end{bmatrix} dz \right) \\ & + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{bmatrix} C_{55} & C_{56} \\ C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} dz \begin{bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \partial w / \partial x \\ \partial w / \partial y \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.69)$$

halini alır. Moment ve kuvvet denge denklemleri,;

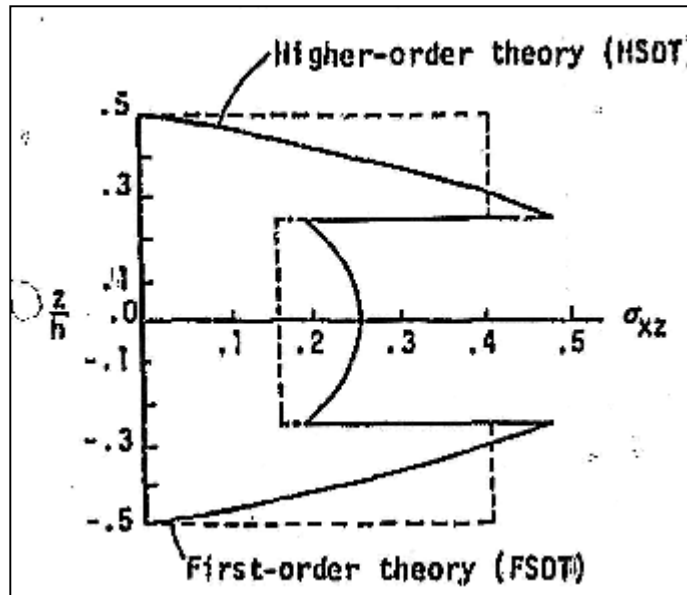
$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x \quad (3.70)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = Q_y \quad (3.71)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q \quad (3.72)$$

olmak üzere [10]'da geliştirilen üçüncü mertebe kayma deformasyon teorisinde (3.70) – (3.72) moment ve kuvvet denge denklemlerinde; (3.63), (3.64), (3.69) denklemleriyle w, β_x ve β_y cinsinden elde ettiği ilgili kesit zorlarını yerine yazarak üç bilinmeyenli üç denklemin çözümünü sağlamıştır.

[10]'da geliştirilen üçüncü mertebe kayma deformasyon teorisi ile elde edilen tabakalı kompozit plak çözümleri incelendiğinde; tabakalar arası kayma gerilmeleri $\tau_{xz}^{küst} \neq \tau_{xz}^{k+1alt}$ ile $\tau_{yz}^{küst} \neq \tau_{yz}^{k+1alt}$ değerlerinin birbirine eşit olmadığı; tabaka geçişlerinde istenmeyen bir biçimde Şekil 3.8'de görüldüğü üzere sıçrama yaptıkları fark edilerek belirtilen teorinin düzenlenmesi gerektiği ortaya çıkmıştır.



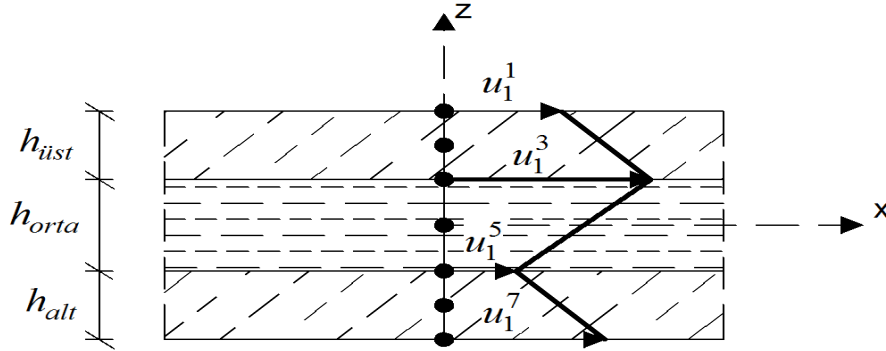
Şekil 3.8 : Yüksek Mertebe Kayma Deformasyon Teorisinde Kayma Gerilmeleri Sıçramaları [10].

3.4 Tabakalı Plaklarda Zigzag Etkili Yüksek Mertebe Kayma Deformasyon Teorisi

[10] ve [11]'de geliştirilen yüksek mertebe kayma deformasyon teorilerine göre yapılan plak çözümlerindeki tabakalar arası kayma gerilmeleri sıçramalarına [33]'de

bu teorilerde tek bir deplasman alanının kullanılarak gerçekte mevcut zigzag deplasman biçiminin sağlanılamamasının neden olduğu belirtilmiştir.

Tabakalar arasındaki malzeme özellikleri farklılıklarının deplasmanların eğimlerinde ani değişikliklere neden olduğu belirtilen [33]'de; Şekil 3.9'da gösterilen bu zigzag etkisini yerdeğiştirme alanlarında $2\zeta_k(-1)^k D_1(x,y)$ zigzag terimini ekleyerek dikkate alınmıştır.



Şekil 3.9 : Zig-zag fonksiyonunun geometrik anlamı.

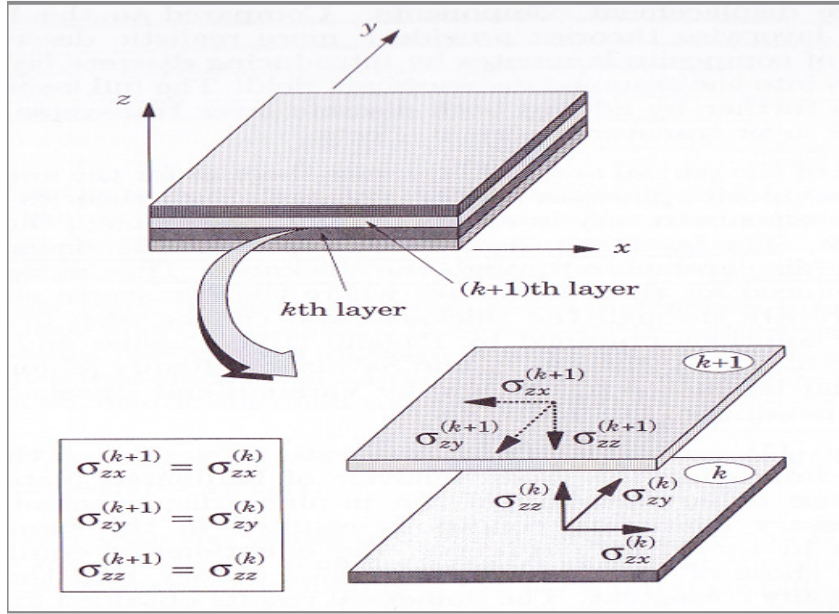
Zigzag terimi, k tabaka sayısı olmak üzere her bir tabaka geçişinde (3.73) – (3.75) denklemlerindeki yerdeğiştirme alanlarını arttırıp azaltarak C^1 tipi süreksizlik meydana getirebilmektedir.

$$u_1^k(x,y,z) = U_1^0(x,y) + \frac{h}{2} \zeta U_1^1(x,y) + 2\zeta_k(-1)^k D_1(x,y) \quad (3.73)$$

$$u_2^k(x,y,z) = U_2^0(x,y) + \frac{h}{2} \zeta U_2^1(x,y) + 2\zeta_k(-1)^k D_2(x,y) \quad (3.74)$$

$$u_3^k(x,y,z) = U_3^0(x,y) \quad (3.75)$$

[19]'da, Şekil 3.10'da gösterilen tabakalar arası kayma gerilmelerinin eşitlenmesi amacıyla virtüel deplasman teorisi yerine Reissner'ın karışık (RMVT) (bilinmeyenlerin hem deplasman hem de kayma gerilmeleri olması nedeniyle) varyasyonel teoremi kullanılmıştır.



Şekil 3.10 : Tabakalar arası kayma gerilmeleri eşitliğinin sağlanması koşulu [19].

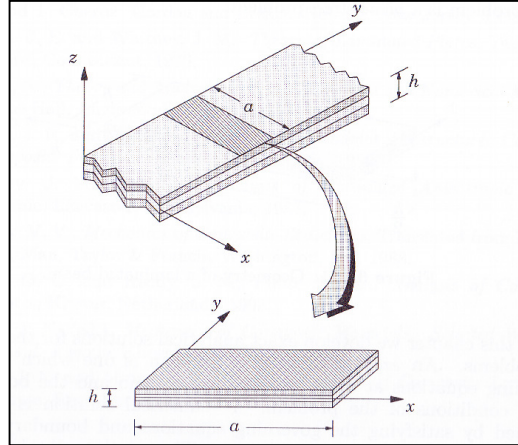
4. GELİŞTİRİLEN SONLU ELEMAN ÇÖZÜMLERİ İLE KARŞILAŞTIRILMAK ÜZERE TABAKALI KOMPOZİT PLAKLARIN SİLİNDİRİK EĞİLME HALİNE AİT LİNEER STATİK ANALİTİK ÇÖZÜMLERİ

4.1 Giriş

Tabakalı kompozit plakların bir boyutlu analizinde rastlanabilecek iki durum mevcuttur. Bunlardan birincisi tabakalı kompozit kirişlerin analizi olmakla beraber ikinci bir durum tabakalı kompozit plakların silindirik eğilme halidir.

Silindirik eğilme hali; Şekil 4.1’de görüldüğü gibi tabakalı kompozit plağın y doğrultusunda çok uzun, diğer x doğrultusunda a uzunluğu gibi belirli bir boyuta sahip olması durumudur.

Silindirik eğilme halinde oluşacak deplasmanlar (u_0, v_0 ve $w_0 = f(x)$) şeklinde x ’in fonksiyonu olup; deplasmanların y ye bağlı türevleri sıfır durumuna gelirler.



Şekil 4.1 : Tabakalı Kompozit Plakta Silindirik Eğilme [16].

Bir problemin analitik (kesin) çözümü denilince; oluşturulan denge denklemlerinin incelenen bölgenin başlangıç ve sınır koşulları da dahil olmak üzere bölgenin tümünde sağlandığının anlaşılması gerekir.

Nümerik çözüm ise problemin sonlu farklar, sonlu eleman veya sınır eleman metodlarından biri ile elde edildiği yaklaşık çözümdür [16]. Silindirik eğilme halinin

klasik ve birinci merteye kayma deformasyon teorilerine göre kesin çözümleri Bu [16]'dan alınarak sırasıyla Bölüm 4.2 ve Bölüm 4.3'de kısaca özetlenmiştir.

4.2 Klasik Plak Teorisi Kullanılarak Silindirik Eğilmeli Duruma Ait Kesin Çözüm

4.2.1 Euler-Lagrange Denge Denklemleri

Nonlinear klasik tabakalı plak teorisine ait Euler-Lagrange denge denklemleri yazılacak olursa [16];

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (4.1)$$

$$\delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (4.2)$$

$$\delta w_0 : \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + N(w_0) + q = 0 \quad (4.3)$$

(4.1) ve (4.2) denklemlerine konulacak normal kuvvet kesit zorları (3.16) denkleminde yararlanarak ve klasik plak teorisi gereği;

$$\begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

şeklindedir. (4.3) denklemlerine konulacak moment kesit zorları ise (3.21) denkleminde yararlanarak ve klasik plak teorisi gereği;

$$\begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

şeklindedir. (4.4) denkleminin (4.1) denkleminde yerine konulmasıyla;

$$\begin{aligned} & A_{11} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + A_{12} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \\ & + A_{16} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \\ & - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - B_{12} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} - 2B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \\ & + A_{16} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + A_{26} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\ & + A_{66} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \\ & - B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} - B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial x^2} - 2B_{66} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

(4.4) denkleminin (4.2) denkleminde yerine konulmasıyla;

$$A_{16} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + A_{26} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + A_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \\
& - B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} - 2B_{66} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \\
& + A_{12} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + A_{22} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\
& + A_{26} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \\
& - B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} - B_{12} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial x^2} - 2B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} = 0
\end{aligned} \tag{4.7}$$

(4.5) denkleminin (4.3) denkleminde yerine konulmasıyla;

$$\begin{aligned}
& B_{11} \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \right) \\
& + B_{12} \left(\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \right) \\
& + B_{16} \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \frac{\partial w_0}{\partial y} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \right) + N(w_0) + q \\
& - D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - D_{12} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - 2D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} \\
& + 2B_{16} \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \right) \\
& + 2B_{26} \left(\frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^2 \partial x} \right) + 2B_{66} \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right) \\
& \quad - 2D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} - 2D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} \\
& \quad - 4D_{66} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + B_{12} \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right) \\
& + B_{22} \left(\frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right) + B_{26} \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\
& + B_{26} \left(2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} \right) - D_{12} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - 2D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} = 0
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Silindirik eğilme durumunda (4.6), (4.7) ve (4.8) denklemlerindeki deplasmanların y koordinatına bağlı türevleri düşeceğinden ve lineer statik analiz durumu dikkate alınacağından nonlinear terimlerin de denklemlerde ortadan kalkmasıyla sırasıyla (4.6), (4.7) ve (4.8) denklemleri sırasıyla;

$$A_{11} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right) + A_{16} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} = 0 \quad (4.9)$$

$$A_{16} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right) + A_{66} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) - B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} = 0 \quad (4.10)$$

$$B_{11} \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} \right) + B_{16} \left(\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} \right) - D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\hat{N}_{xx} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + q = 0 \quad (4.11)$$

durumuna gelirler. (4.9) denkleminin her iki tarafı A_{66} ile çarpılır; (4.10) denklemini de $(-A_{16})$ ile çarparak (4.9) ve (4.10) denklemleri birbirinden çıkarılırsa;

$$(A_{66}A_{11} - A_{16}A_{16}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = (B_{11}A_{66} - B_{16}A_{16}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \quad (4.12)$$

$$A = (A_{66}A_{11} - A_{16}A_{16}) \quad (4.13)$$

$$B = (B_{11}A_{66} - B_{16}A_{16}) \quad (4.14)$$

olmak üzere (4.12) denklemi;

$$A \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = B \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \quad (4.15)$$

halini alır.

$$\bar{B} = \frac{B}{A} \quad (4.16)$$

olmak üzere (4.15) denklemi (4.17) denklemi şeklinde yazılabilir.

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = \bar{B} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \quad (4.17)$$

Benzer şekilde; (4.9) denkleminin her iki tarafı A_{16} ile çarpılır; (4.10) denklemini de $(-A_{11})$ ile çarparak (4.9) ve (4.10) denklemleri birbirinden çıkarılırsa;

$$(A_{16}A_{16} - A_{11}A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} = (B_{11}A_{16} - B_{16}A_{11}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \quad (4.18)$$

$$C = (B_{16}A_{11} - B_{11}A_{16}) \quad (4.19)$$

olmak üzere (4.18) denklemi;

$$A \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} = C \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \quad (4.20)$$

halini alır.

$$\bar{C} = \frac{C}{A} \quad (4.21)$$

olmak üzere (4.20) denklemi (4.22) denklemi şeklinde yazılabilir.

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} = \bar{C} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} \quad (4.22)$$

halini alır. (4.11) denkleminde (4.17) ve (4.22) denklemleri yerlerine yazılıp türevleri alınır;

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - B_{11} \bar{B} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - B_{16} \bar{C} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\widehat{N_{xx}} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + q \quad (4.23)$$

$$D = D_{11} - B_{11} \bar{B} - B_{16} \bar{C} \quad (4.24)$$

olmak üzere (4.23) denklemi;

$$D \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\widehat{N_{xx}} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + q \quad (4.25)$$

halini alır. Eksenel yükleme ($\widehat{N_{xx}}$) olmaması ve üzerinde düzgün yayılı $q=-q_0$ yükü bulunması durumu için (4.25) denklemi;

$$D \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} = -q_0 \quad (4.26)$$

halini alır. (4.26) denkleminde gerekli integrasyonlar yapıldığında;

$$\widehat{B} = \frac{B}{D} \quad ; \quad \widehat{C} = \frac{C}{D} \quad (4.27)$$

olmak üzere;

$$Dw_0(x) = -q_0 \frac{x^4}{24} + c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4 \quad (4.28)$$

elde edilir. (4.17) ve (4.22) denklemlerinden yararlanarak düzlemiçi yerdeğiştirmeler;

$$Au_0(x) = -\widehat{B}q_0 \frac{x^3}{6} + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 x + a_3 \quad (4.29)$$

$$Av_0(x) = -\widehat{C}q_0 \frac{x^3}{6} + b_1 \frac{x^2}{2} + b_2 x + b_3 \quad (4.30)$$

olarak bulunur. Şekil 4.2’de yazılan sınır şartları dikkate alınarak (4.28), (4.29) ve (4.30) denklemlerinde yer alan katsayılar belirlenebilir. Örnek olarak; $x=0$ ve $x=a$ kenarlarında basit mesnetlenme durumunda;

$$u_0(x=0) = u_0(x=a) = \frac{du_0(x=0)}{dx} = \frac{du_0(x=a)}{dx} = 0 \quad (4.31)$$

$$v_0(x=0) = v_0(x=a) = \frac{dv_0(x=0)}{dx} = \frac{dv_0(x=a)}{dx} = 0 \quad (4.32)$$

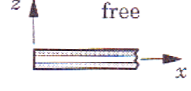
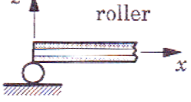
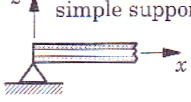
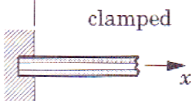
sınır şartları dikkate alındığında;

$$u_0(x) = -\frac{B}{AD} \frac{q_0 a^3}{12} \left(2 \left(\frac{x}{a} \right)^3 - 3 \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right) \quad (4.33)$$

$$v_0(x) = -\frac{C}{AD} \frac{q_0 a^3}{12} \left(2 \left(\frac{x}{a} \right)^3 - 3 \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right) \quad (4.34)$$

$$w_0(x) = -\frac{q_0 a^4}{24D} \left(\left(\frac{x}{a} \right)^4 - 2 \left(\frac{x}{a} \right)^3 + \left(\frac{x}{a} \right) \right) \quad (4.35)$$

yerdeğiştirme alanları elde edilmiş olur.

Edge Condition	CLPT	FSDT
 free	$N_{xx}=0$ $N_{xy}=0$ $M_{xx}=0$ $\frac{dM_{xx}}{dx}=0$	$N_{xx}=0$ $N_{xy}=0$ $M_{xx}=0$ $Q_x=0$
 roller	$w_0=0$ $\frac{dv_0}{dx}=0$ $N_{xx}=0$ $M_{xx}=0$	$w_0=0$ $\frac{dv_0}{dx}=0$ $N_{xx}=0$ $M_{xx}=0$
 simple support	$u_0=0$ $w_0=0$ $\frac{dv_0}{dx}=0$ $M_{xx}=0$	$u_0=0$ $w_0=0$ $\frac{dv_0}{dx}=0$ $M_{xx}=0$
 clamped	$u_0=0$ $v_0=0$ $w_0=0$ $\frac{dw_0}{dx}=0$	$u_0=0$ $v_0=0$ $w_0=0$ $\phi_x=0$

Şekil 4.2 : Silindirik eğilme durumunda klasik plak ve birinci mertbe kayma deformasyon teorilerine ait sınır şartları [16].

(4.4) ve (4.5) denklemlerinde (4.33)-(4.35) denklemlerinde elde edilen yerdeğiştirmeler yerine yazılırsa basit mesnet koşulu için kesit zorları;

$$N_{xx} = 0, \quad N_{xy} = 0 \quad (4.36)$$

$$N_{yy} = -\frac{q_0 a^2}{2AD} (A_{12}B + A_{26}C - B_{12}A) \left(\left(\frac{x}{a} \right)^2 - \left(\frac{x}{a} \right) \right) \quad (4.37)$$

$$M_{xx} = \frac{q_0 a^2}{2} \left(\left(\frac{x}{a} \right)^2 - \left(\frac{x}{a} \right) \right) \quad (4.38)$$

$$M_{xy} = -\frac{q_0 a^2}{2AD} (B_{16}B + B_{66}C - D_{16}A) \left(\left(\frac{x}{a} \right)^2 - \left(\frac{x}{a} \right) \right) \quad (4.39)$$

$$M_{yy} = -\frac{q_0 a^2}{2AD} (B_{12}B + B_{26}C - D_{12}A) \left(\left(\frac{x}{a} \right)^2 - \left(\frac{x}{a} \right) \right) \quad (4.40)$$

olarak bulunur. Maksimum çökmenin $x=a/2$ de oluşacağı durum için (4.35) denklemi;

$$w_{\max} = -\frac{5q_0 a^4}{384D} \quad (4.41)$$

dir. (4.41) denkleminde eğilme-uzama etkileşimini görebilmek için D; (4.24) denklemi yardımıyla;

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{D_{11}} \left(\frac{D_{11}}{D} \right) = \frac{1}{D_{11}} \left(\frac{D + B_{11}\bar{B} + B_{16}\bar{C}}{D} \right) \quad (4.42)$$

şeklinde yazılırsa (4.41) denklemi;

$$w_{\max} = -\frac{5q_0 a^4}{384D_{11}} \left(1 + \frac{B_{11}\bar{B} + B_{16}\bar{C}}{D} \right) \quad (4.43)$$

halini alır. Ortotrop simetrik tabakalanma durumları için $B_{ij} = A_{16} = D_{16} = 0$ olduğundan; (4.43) denkleminde yer alan $B_{11} = B_{16} = 0$ terimleri düşeceğinden (4.43) denklemi simetrik tabakalanma durumları için;

$$w_{\max} = -\frac{5q_0 a^4}{384D_{11}} \quad (4.44)$$

halini alır.

4.3 Birinci Mertebe Kayma Deformasyon Teorisi Kullanarak Silindirik Eğilmeli Duruma Ait Kesin Çözüm

4.3.1 Euler- Lagrange Denge Denklemleri

Nonlineer birinci mertebe kayma deformasyon teorisine ait Euler-Lagrange denge denklemleri yazılacak olursa [16];

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (4.46)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N(w_0) + q = 0 \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (4.49)$$

(4.45) ve (4.46) denklemlerinde normal kuvvet kesit zorları yerine;

$$\begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

konulur ve (4.48) ve (4.49) denklemlerinde moment kesit zorları yerine ise;

$$\begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

(4.47), (4.48) ve (4.49) denklemlerinde yer alan kesme kuvveti kesit zorları yerine ise birinci mertebe kayma deformasyon teorisi gereği;

$$\begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

denklemlerinin konulmasıyla (4.45)-(4.49) denklemleri sırasıyla;

$$\begin{aligned} & A_{11} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + A_{12} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \right) + \\ & A_{16} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \right) + \\ & B_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} + B_{16} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) + \\ & A_{16} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + A_{26} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \\ & A_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \\ & B_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + B_{66} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned}
& A_{16} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + A_{26} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \right) + \\
& A_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \right) + \\
& B_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + B_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} + B_{66} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) + \\
& A_{12} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + A_{22} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \\
& A_{26} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \\
& B_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + B_{26} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} \right) = 0
\end{aligned} \tag{4.54}$$

$$\begin{aligned}
& KA_{55} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + KA_{45} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) + \\
& KA_{45} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) + KA_{44} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + N(w) + q = 0
\end{aligned} \tag{4.55}$$

$$\begin{aligned}
& B_{11} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + B_{12} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \right) + \\
& B_{16} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \right) + \\
& D_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} + D_{16} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) + \\
& B_{16} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + B_{26} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \\
& B_{66} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \right) + \\
& D_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + D_{66} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} \right) -
\end{aligned}$$

$$KA_{55} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \right) - KA_{45} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \right) = 0 \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} & B_{16} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + B_{26} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \right) + \\ & B_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \right) + \\ & D_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} + D_{66} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) + \\ & B_{12} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + B_{22} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \\ & B_{26} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial x} \right) + \\ & D_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + D_{26} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y \partial x} \right) - \\ & KA_{45} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \right) - KA_{44} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.57)$$

Silindirik eğilme durumunda (4.53) – (4.57) denklemlerinde y ye bağlı türevler ve $\phi_y=0$ olacak; (4.55) denklemi düşecek ve yalnız lineer statik analiz durumunda denklemler sırasıyla;

$$A_{11} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right) + A_{16} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) + B_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} = 0 \quad (4.58)$$

$$A_{16} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right) + A_{66} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) + B_{16} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} = 0 \quad (4.59)$$

$$B_{11} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right) + B_{16} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) + D_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} - KA_{55} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \right) = 0 \quad (4.60)$$

$$KA_{55} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + q = 0 \quad (4.61)$$

haline dönüşecektir. (4.58)-(4.61) denklemleri çözüldüğünde basit mesnetli ve düzgün yayılı yük ve merkezde F_0 tekil yük durumu için;

$$\phi_x(x) = \frac{q_0 a^3}{24D} \left(4 \left(\frac{x}{a} \right)^3 - 6 \left(\frac{x}{a} \right)^2 + 1 \right) - \frac{F_0 a^2}{16D} \left(1 - 4 \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right) \quad (4.62)$$

$$w_0(x) = -\frac{q_0 a^4}{24D} \left(\left(\frac{x}{a} \right)^4 - 2 \left(\frac{x}{a} \right)^3 + \left(\frac{x}{a} \right) \right) - \frac{q_0 a^2}{2KA_{55}} \left(\left(\frac{x}{a} \right) - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right) \\ - \frac{F_0 a^3}{48D} \left(3 \left(\frac{x}{a} \right) - 4 \left(\frac{x}{a} \right)^3 \right) - \frac{F_0 a}{2KA_{55}} \left(\frac{x}{a} \right) \quad (4.63)$$

halini alır. Maksimum deplasman $x=a/2$ için birinci mertebe kayma deformasyon teorisine göre;

$$w_{\max} = - \left(\frac{5q_0 a^4}{384D} + \frac{q_0 a^2}{8KA_{55}} + \frac{F_0 a^3}{48D} + \frac{F_0 a}{4KA_{55}} \right) \quad (4.64)$$

olarak bulunur.

5. GELİŞTİRİLEN SONLU ELEMAN İLE KARŞILAŞTIRILMAK ÜZERE İZOTROPİK VE ORTOTROPİK DAİRESEL PLAKLARIN LİNEER STATİK KESİN ÇÖZÜMLERİ

5.1 Giriş

Geliştirilen sonlu elemanın eğrisel sınırlara sahip geometri üzerinde performansı ile Jacobyen matrisinin doğru hesaplandığını göstermek amacıyla dairesel plaklar üzerinde özellikle durulmuştur. Öncelikle dairesel ince ve kalın plakların izotrop durumuna ait literatürde yer alan analitik çözümleri gösterilmiş; sonrasında ortotrop ince ve kalın duruma ait analitik çözümler incelenmiş ve bu çözümlerle; geliştirilen sonlu eleman çözümleri karşılaştırılmıştır..

5.2 Dönel Simetrik, Üniform Yayılı Yüklü, İzotrop Dairesel Plaklara Ait Analitik Çözüm

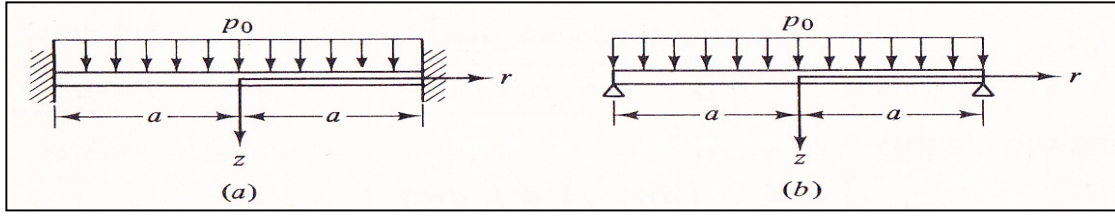
5.2.1 Eğilmenin Deplasman Eğrisine Etkisi

[34]'de Şekil 5.1'de gösterilen izotrop, dönel simetrik, üniform yayılı yüklü (p_0) dairesel plakların ankastre ve basit mesnetli durumlarına ait eğilme nedeniyle oluşan deplasman eğrisi sırasıyla;

$$w_{\text{eğilme-ankastre}} = \frac{p_0}{64D} (a^2 - r^2)^2 \quad (5.1)$$

$$w_{\text{eğilme-basit mesnet}} = \frac{p_0 a^4}{64D} \left(\frac{r^4}{a^4} - 2 \frac{(3 + \nu) r^2}{(1 + \nu) a^2} + \frac{(5 + \nu)}{(1 + \nu)} \right) \quad (5.2)$$

olarak verilmiştir.



Şekil 5.1 : Dairesel plak üniform yayılı yük ankastre ve basit mesnetli durum [16].

Ankastrelik durumda radyal ve teğet doğrultularındaki eğilme momentleri ise sırasıyla;

$$M_r = \frac{p_0}{16} ((1 + \nu)a^2 - (3 + \nu)r^2) \quad (5.3)$$

$$M_\theta = \frac{p_0}{16} ((1 + \nu)a^2 - (3 + \nu)r^2) \quad (5.4)$$

olarak verilmiştir [34]. Basit mesnetli durumda radyal ve teğet doğrultularındaki eğilme momentleri ise sırasıyla;

$$M_r = \frac{p_0}{16} (3 + \nu)(a^2 - r^2) \quad (5.5)$$

$$M_\theta = \frac{p_0}{16} ((3 + \nu)a^2 - (1 + 3\nu)r^2) \quad (5.6)$$

olarak gösterilmiştir [34].

5.2.2 Kaymanın Deplasman Eğrisine Etkisi

Bilindiği üzere plak kalınlığı arttıkça kayma deformasyonları plak üzerinde önem kazanmakta ve plağın deplasman eğrisinde eğilmenin yanında kaymadan gelen etkilerin de gözönüne alınması gerekmektedir. Kaymadan oluşan deplasman eğrisi w_s , kayma düzeltme katsayısı $k=2/3$, t plak kalınlığı, G kayma modülü olmak üzere

$\tau = G \gamma_{rz} = G \frac{dw_s}{dr} = \frac{3}{2} \frac{Q_r}{t}$ olması nedeniyle;

$$w_s = \frac{3}{2Gt} \int_a^r Q_r dr \quad (5.7)$$

olmak üzere merkezden r uzaklığında düşey denge denklemi yazılacak olursa;

$$Q_r = \frac{\pi r^2 p_0}{2\pi r} = \frac{r p_0}{2} \quad (5.8)$$

(5.8) denklemi (5.7) denkleminde yerleştirilirse ve $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ olduğu gözönünde tutulursa; kaymaya bağlı yerdeğiştirme eğrisi;

$$w_s = \frac{3p_0}{8Gt} (a^2 - r^2) = \frac{p_0 t^2}{16(1-\nu)D} (a^2 - r^2) \quad (5.9)$$

olarak sunulmuştur [34]. Mesnetlenme durumundan bağımsız olarak (5.9) denkleminin (5.1) ve (5.2) denklemlerine ilave edilmesiyle kalın plak durumuna ait toplam deformasyon eğrisi elde edilmiş olmaktadır.

5.3 Dönel Simetrik, Üniform Yayılı Yüklü, Ortotrop Dairesel Plaklara Ait Analitik Çözüm

5.3.1 Eğilmenin Deplasman Eğrisine Etkisi

[35]'de eliptik plakların üniform yayılı yük ankastre mesnetli durumu için $w=0$ ve $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$ sınır koşullarını sağlayan

$$w_{\text{eğilme}} = k \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2 \quad (5.10)$$

deplasman eğrisi kabulü yapılmış ve ortotropik ince plağın diferansiyel denklemini

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{xy} + 2G_{xy}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p_0 \quad (5.11)$$

olmak üzere (5.11) denkleminde (5.10) denkleminin yerleştirilmesiyle;

$$k = \frac{p_0}{8} \frac{a^4 b^4}{3b^4 D_x + 2a^2 b^2 (D_{xy} + 2G_{xy}) + 3a^4 D_y} \quad (5.12)$$

olmak üzere deplasman eğrisi

$$w_{\text{eğilme}} = \frac{p_0}{8} \frac{a^4 b^4}{3b^4 D_x + 2a^2 b^2 (D_{xy} + 2G_{xy}) + 3a^4 D_y} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2 \quad (5.13)$$

olarak verilmiştir [35]. (5.13) denklemi ile elde edilen eliptik plağa ait deplasman eğrisi çözümü $a=b$ alınarak ortotrop dairesel plağa ait çözüme indirgenmesiyle;

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad D_1 = \frac{1}{8} (3D_x + 2(D_{xy} + 2G_{xy}) + 3D_y) \quad (5.14)$$

olmak üzere

$$w_{eğilme} = \frac{p_0}{64D_1} (a^2 - r^2)^2 \quad (5.15)$$

olarak elde edilir. Ortotropik ince dairesel plağa ait eğilme momentleri ise sırasıyla;

$$M_x = \frac{p_0}{16D_1} \left((D_x + D_{xy})(a^2 - r^2) - 2(D_x x^2 + D_{xy} y^2) \right) \quad (5.16)$$

$$M_y = \frac{p_0}{16D_1} \left((D_y + D_{xy})(a^2 - r^2) - 2(D_y y^2 + D_{xy} x^2) \right) \quad (5.17)$$

$$M_{xy} = \frac{p_0}{4D_1} D_{xy} xy \quad (5.18)$$

olarak verilmiştir [35].

5.3.2 Kaymanın Deplasman Eğrisine Etkisi

$w_s(r = a) = 0$ ve $\frac{\partial w_s}{\partial r}(r = 0) = 0$ sınır koşullarını sağlayacak şekilde deplasman eğrisi $w_s = w_{s0} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)$ olarak seçilip kayma modülleri arasındaki ilişki;

$$G_0 = \frac{G_{xz} + G_{yz}}{2} \quad ; \quad G_F = \frac{G_{xz} - G_{yz}}{2} \quad (5.19)$$

olmak üzere yarıçap (r) doğrultusundaki kesme kuvveti T_r ' nin θ 'ya bağlı değişimi;

$$T_r(\theta) = \tau t = G_r \gamma_{rz} t = G_r \frac{\partial w_s}{\partial r} t = (G_0 + G_F \cos 2\theta) \frac{\partial w_s}{\partial r} t \quad (5.20)$$

olarak elde edilir. Merkezden r uzaklığında düşey denge denklemi yazılmasıyla;

$$\int_0^{2\pi} T_r(\theta) r d\theta = -q\pi r^2 \quad (5.21)$$

(5.21) düşey denge denkleminde $T_r(\theta)$ ' nin (5.20) denkleminde bulunan ifadesinin yerine yazılması ve

$$w_s = w_{s0} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \quad (5.22)$$

şeklinde olduğu kabul edilen deplasman alanının türevinin $\left(\frac{\partial w_s}{\partial r} \right)$ alınmasıyla;

$$w_{s0} = \frac{qa^2}{2(G_{xz} + G_{yz})t} \quad (5.23)$$

olarak bulunur. Buna göre kaymaya bağlı deformasyon eğrisi;

$$w_s = \frac{qa^2}{2(G_{xz} + G_{yz})t} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \quad (5.24)$$

olarak verilmiştir [35].

,

6. TABAKALI TEORİYE GÖRE GELİŞTİRİLEN TABAKALI KOMPOZİT PLAK SONLU ELEMAN

Analizin esas amacının tabakalı plağın global cevaplarını aramak olması durumunda (örneğin deplasmanlar, kritik burkulma yükü gibi) o zaman Birinci Mertebe veya Yüksek Mertebe ile Zigzag Etkili / Etkisiz Kayma Deformasyon Teorilerinin içinde yer aldığı Eşdeğer Tek Tabaka Teorisi (ESL) kullanılarak uygun sonuçlar alınabilir. (Özellikle ince tabakalanma durumlarında)

İkincil öneme haiz taşıyıcı sistemlerde ince tabakalanma kullanılırken; birincil öneme sahip taşıyıcı sistemlerde kalın tabakalanma olmakta; bu durum kayma gerilmelerinin önemini arttırmakta; tabakalar arası ayrışmanın ilk nerede başlayacağı sorusuna cevap aramayı gerektirmektedir. Bu da ESL'den (Eşdeğer Tek Tabaka Teorisinden) her bir tabakanın ayrı ele alındığı tabaka duyarlı teoriye geçişi gerekli kılmaktadır [31].

Eşdeğer tek tabaka teorisinde tüm tabakalar için geçerli tek bir deplasman alanı kabulü yapılırken tabaka duyarlı teoride her bir tabakanın kendi içinde deplasman alanları belirlenir.

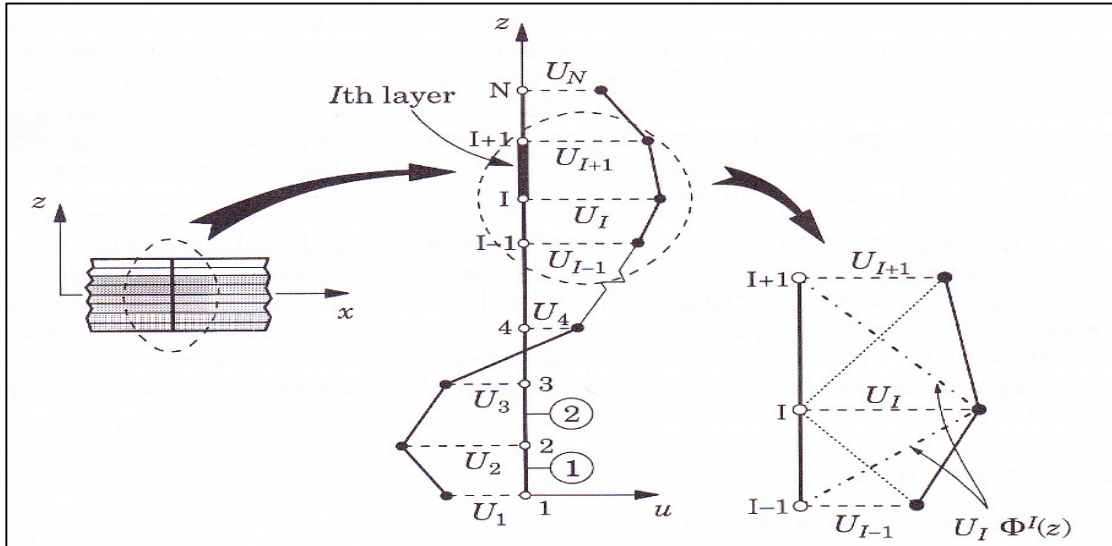
[31]'de; I tabaka numarasını; $\phi_I(z)$ deplasmanın tabaka kalınlığı doğrultusunda değişimini göstermek üzere tabakalı kompozit plağın sırasıyla x ve y doğrultularındaki düzlemiçi yerdeğiştirmeler (u, v) ve düzleme dik yerdeğiştirme (w) alanlarını denklem (6.1), (6.2) ve (6.3) denklemlerinde gösterildiği şekilde belirlenmiştir.

$$u(x, y, z) = \sum_{I=1}^N U_I(x, y) \phi_I(z) \quad (6.1)$$

$$v(x, y, z) = \sum_{I=1}^N V_I(x, y) \phi_I(z) \quad (6.2)$$

$$w(x, y, z) = W(x, y) \quad (6.3)$$

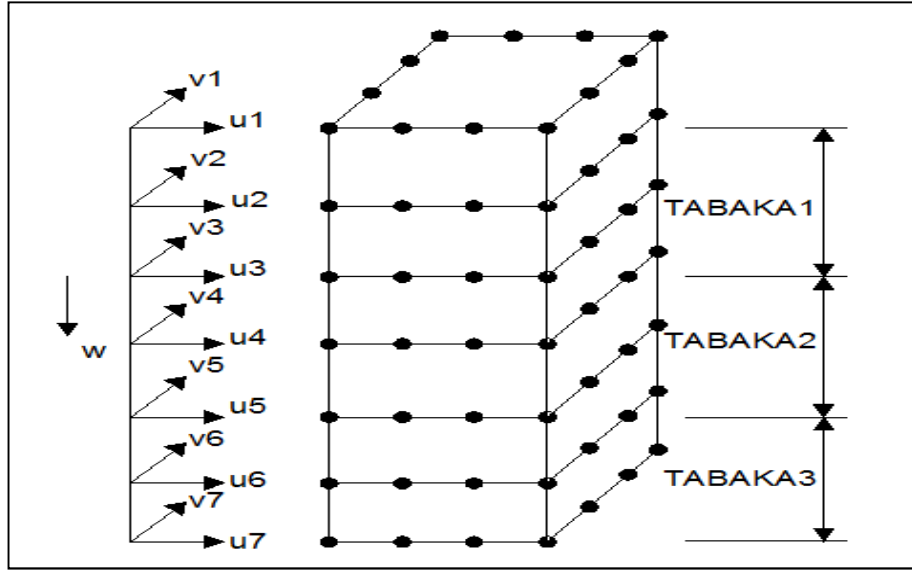
Şekil 6.1’de gösterildiği gibi [31]’de yapılan çalışmada; herbir tabakanın tabaka kalınlığı doğrultusunda iki düğüm noktası alınarak, deplasmanlar parçalı doğrusal Lagrange interpolasyon fonksiyonları ile belirlenmiştir. Deplasman alanlarını tabaka kalınlığı doğrultusunda parçalı sürekli fonksiyon biçiminde oluşturmak sayesinde, malzeme özellikleri bakımından farklı iki tabakanın birleşim noktasında, deplasmanların türevinde $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right)$ süreksizlik oluşacak ve bu sayede iki tabaka arası kayma şekildeğiştirmeleri birbirinden farklı duruma gelerek tabakalar arası kayma gerilmelerinin birbirine eşit olma olasılığı doğacaktır [31].



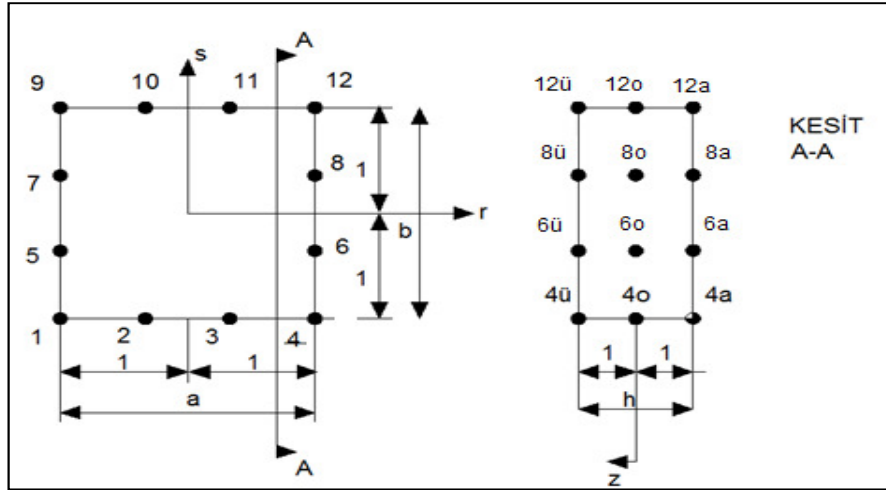
Şekil 6.1 : Tabaka kalınlığı doğrultusunda Reddy tarafından kullanılan doğrusal Lagrange interpolasyon fonksiyonları [31].

6.1 Tabakalı Plak Sonlu Elemana Ait Yerdeğiştirme Parametreleri ve Şekil Fonksiyonları

Bu tez kapsamında geliştirilen sonlu elemanda ise düzlemde her iki r ve s doğrultusunda kübik (dört noktalı); toplamda planda oniki düğüm noktalı serendipiti eleman; tabaka kalınlığı doğrultusunda ise [31]’de yapılan çalışmada kullanılan doğrusal Lagrange interpolasyon fonksiyonlarından farklı olarak herbir tabakada üst, orta ve alt düğüm noktaları olmak üzere üç düğüm noktalı Şekil 6.2’deki gibi kuadratik Lagrange interpolasyon fonksiyonları kullanılmıştır.



Şekil 6.2 : Üç Tabakadan Oluşan Düğüm Noktası Serbestlikleri.



Şekil 6.3 : Geliştirilen sonlu eleman düğüm noktaları numaraları.

Şekil 6.3'de gözüken sonlu elemanın r-s lokal düzlemindeki şekil fonksiyonları [36]'ya göre köşe düğüm noktaları için;

$$N_a = \frac{1}{32}(1 + r_a r)(1 + s_a s)[9(r^2 + s^2) - 10] \quad (6.4)$$

olmak üzere r eksenine paralel kenar noktalarda;

$$N_a = \frac{9}{32}(1 + 9r_a r)(1 + s_a s)(1 - r^2) \quad (6.5)$$

s eksenine paralel kenar noktalarda ise;

$$N_a = \frac{9}{32} (1 + 9s_a s)(1 + r_a r)(1 - s^2) \quad (6.6)$$

denklemleri kullanılarak bulunabilir.

$$T_1(r) = \frac{-1}{16} (1 - 9r^2)(1 + r) \quad ; \quad T_2(r) = \frac{-1}{16} (1 - 9r^2)(1 - r) \quad (6.7)$$

$$T_1(s) = \frac{-1}{16} (1 - 9s^2)(1 + s) \quad ; \quad T_2(s) = \frac{-1}{16} (1 - 9s^2)(1 - s) \quad (6.8)$$

$$S_1(r) = \frac{9}{16} (1 - r^2)(1 + 3r) \quad ; \quad S_2(r) = \frac{9}{16} (1 - r^2)(1 - 3r) \quad (6.9)$$

$$S_1(s) = \frac{9}{16} (1 - s^2)(1 + 3s) \quad ; \quad S_2(s) = \frac{9}{16} (1 - s^2)(1 - 3s) \quad (6.10)$$

$$L_1(r) = \frac{1}{2} (1 + r) \quad ; \quad L_2(r) = \frac{1}{2} (1 - r) \quad (6.11)$$

$$L_1(s) = \frac{1}{2} (1 + s) \quad ; \quad L_2(s) = \frac{1}{2} (1 - s) \quad (6.12)$$

(6.7) – (6.12) denklemlerini kullanarak (6.4) denklemi ile bulunan köşe düğüm noktaları şekil fonksiyonlarında r ve s fonksiyonları birbirinden ayrıştırılarak yazılmış ve

$$N_1(r, s) = T_2(r)L_2(s) + L_2(r)T_2(s) - L_2(r)L_2(s) \quad (6.13)$$

$$N_4(r, s) = T_1(r)L_2(s) + L_1(r)T_2(s) - L_1(r)L_2(s) \quad (6.14)$$

$$N_9(r, s) = T_2(r)L_1(s) + L_2(r)T_1(s) - L_2(r)L_1(s) \quad (6.15)$$

$$N_{12}(r, s) = T_1(r)L_1(s) + L_1(r)T_1(s) - L_1(r)L_1(s) \quad (6.16)$$

olarak elde edilmiştir. Benzer şekilde kenar düğüm noktaları şekil fonksiyonlarında r ve s fonksiyonları birbirinden ayrıştırılarak;

$$N_{11}(r, s) = S_1(r)L_1(s) \quad ; \quad N_{10}(r, s) = S_2(r) L_1(s) \quad (6.17)$$

$$N_3(r, s) = S_1(r)L_2(s) \quad ; \quad N_2(r, s) = S_2(r)L_2(s) \quad (6.18)$$

$$N_8(r, s) = S_1(s)L_1(r) \quad ; \quad N_6(r, s) = S_2(s)L_1(r) \quad (6.19)$$

$$N_7(r, s) = S_1(s)L_2(r) \quad ; \quad N_5(r, s) = S_2(s)L_2(r) \quad (6.20)$$

olarak elde edilmiştir. Şekil 6.3’de gösterilen Kesit A-A ya bakılacak olursa; tabaka kalınlığı doğrultusunda yapılan kuadratik şekil fonksiyonları tanımı gereği tabaka kalınlığı zeta doğrultusunda üst,orta ve alt düğüm noktaları şekil fonksiyonları;

$$\psi_{\bar{u}}(\zeta) = \frac{1}{2} \zeta (1 + \zeta) \quad (6.21)$$

$$\psi_a(\zeta) = \frac{-1}{2} \zeta (1 - \zeta) \quad (6.22)$$

$$\psi_o(\zeta) = (1 - \zeta^2) \quad (6.23)$$

olarak alınmıştır. Şekil 6.2’den görüleceği üzere geliştirilen sonlu elemanın r-s düzlemindeki oniki düğüm noktanın herbirinde w çökme yerdeğiştirmesi bilinmeyen olarak alınmış; tabaka kalınlığı doğrultusunda $\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ olduğu kabul edilmiştir.

Oniki düğüm noktasının yükseklik boyunca herbirinde L tabaka sayısını göstermek üzere 4L+2 kadar düzlemiçi yerdeğiştirme serbestlikleri (u,v) tanımlanmıştır. Buna göre; l inci tabakada (l=1,...,L); (r,s, ζ) lokal koordinatlara bağılı yerdeğiştirme bileşenleri;

$$u(r, s, \zeta) = \sum_{I=1}^3 \sum_{i=1}^{12} U_{i,I} N_i(r, s) \psi_I(\zeta) \quad (6.24)$$

$$v(r, s, \zeta) = \sum_{I=1}^3 \sum_{i=1}^{12} V_{i,I} N_i(r, s) \psi_I(\zeta) \quad (6.25)$$

$$w(r, s) = \sum_{i=1}^{12} W_i N_i(r, s) \quad (6.26)$$

(6.24) – (6.26) denklemlerinde; i indisi köşe veya kenar düğüm noktalarını; I=1,2,3 ise sırasıyla üst, orta ve alt düzlemdeki düğüm noktalarını göstermektedir.

Toplamda maksimum 15 tabaka ve herbir düğüm noktasında 63 serbestliğe sahip olabilecek kapasitede yeni bir tabakalı kompozit plak sonlu eleman geliştirilmiştir.

Buna göre; tek tabaka durumunda, 1 üst, alt ve orta düğüm noktalarında birim yerdeğiştirme; diğer düğüm noktalarında yerdeğiştirmelerin sıfır olması durumu için;

$$i=1 \text{ durumu} \rightarrow u_{1\bar{u}} = 1 \text{ durumu} \rightarrow u = N_1(r, s) \psi_{\bar{u}}(\zeta) ; v = 0 ; w = 0 \quad (6.27)$$

$$i=2 \text{ durumu} \rightarrow v_{1\bar{u}} = 1 \text{ durumu} \rightarrow v = N_1(r, s) \psi_{\bar{u}}(\zeta) ; u = 0 ; w = 0 \quad (6.28)$$

$$i=3 \text{ durumu} \rightarrow u_{1a} = 1 \text{ durumu} \rightarrow u = N_1(r, s) \psi_a(\zeta) ; v = 0 ; w = 0 \quad (6.29)$$

$$i=4 \text{ durumu} \rightarrow v_{1a} = 1 \text{ durumu} \rightarrow v = N_1(r, s) \psi_a(\zeta) ; u = 0 ; w = 0 \quad (6.30)$$

$$i=5 \text{ durumu} \rightarrow u_{1o} = 1 \text{ durumu} \rightarrow u = N_1(r, s) \psi_o(\zeta) ; v = 0 ; w = 0 \quad (6.31)$$

$$i=6 \text{ durumu} \rightarrow v_{1o} = 1 \text{ durumu} \rightarrow v = N_1(r, s) \psi_o(\zeta) ; u = 0 ; w = 0 \quad (6.32)$$

$$i=7 \text{ durumu} \rightarrow w_1 = 1 \text{ durumu} \rightarrow w = N_1(r, s) ; u = 0 ; v = 0 \quad (6.33)$$

olarak elde edilmiştir.

6.2 Geliştirilen Sonlu Elemana Ait Birinci Mertebe Rijitlik Matrisinin Bulunması

Virtüel iş teoremi uyarınca iç kuvvetler ile dış kuvvetlerin işlerinin eşitliği yazılırsa;

$$\iiint (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dx dy dz = \iint q_w(x, y) \delta w dx dy \quad (6.34)$$

(6.34) denkleminde eşitliğin sol tarafında yer alan tabii durum gerilmeleri, (i) birim durumlarının; virtüel şekildeğiştirmeleri ise (j) birim durumlarının lineer kombinasyonu biçiminde ifade edilmesiyle; birinci mertebe rijitlik matrisi terimi (k_{ij}) (j inci yerdeğiştirme parametresinin birim değeri sonucu i inci yerdeğiştirme parametresi doğrultusunda oluşacak kuvvet);

$$k_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} (\sigma_{xi} \delta \varepsilon_{xj} + \sigma_{yi} \delta \varepsilon_{yj} + \tau_{xyi} \delta \gamma_{xyj} + \tau_{xzi} \delta \gamma_{xzj} + \tau_{yzi} \delta \gamma_{yzj}) dx dy dz \quad (6.35)$$

olarak yazılmış; Şekil 2.6'daki gibi tabakadaki laminaların global x eksenine θ açısı yaptığı kabulü altında; düzlemiçi ve düzlemdışı gerilme şekildeğiştirme bağıntıları (2.33) ve (2.34) denklemlerinden hatırlanacağı üzere;

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{16}} \\ \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{26}} \\ \overline{Q_{16}} & \overline{Q_{26}} & \overline{Q_{66}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_i \quad \begin{bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \overline{Q_{44}} & \overline{Q_{45}} \\ \overline{Q_{54}} & \overline{Q_{55}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}_i \quad (6.36)$$

şeklindedir. Şekildeğiştirmeler ile yerdeğiştirmeler arasındaki ilişkinin;

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xi} \\ \varepsilon_{yi} \\ \gamma_{xyi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x} \\ \frac{\partial v_i}{\partial y} \\ \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} \gamma_{yzi} \\ \gamma_{xzi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_i}{\partial z} + \frac{\partial w_i}{\partial y} \\ \frac{\partial u_i}{\partial z} + \frac{\partial w_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

olduğu gözönünde tutularak (6.35) denkleminde gerilmeler yerine (6.33) denkleminin; şekildeğiştirmeler yerine ise (6.37) denkleminin konulmasıyla birinci mertebe rijitlik matrisi k_{ij} ;

$$\begin{aligned}
k_{ij} = & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\overline{Q}_{11} \frac{\partial u_i(r, s, \zeta)}{\partial x} \frac{\partial u_j(r, s, \zeta)}{\partial x} + \overline{Q}_{12} \frac{\partial v_i(r, s, \zeta)}{\partial y} \frac{\partial u_j(r, s, \zeta)}{\partial x} \right. \\
& + \overline{Q}_{16} \left(\frac{\partial u_i(r, s, \zeta)}{\partial y} + \frac{\partial v_i(r, s, \zeta)}{\partial x} \right) \frac{\partial u_j(r, s, \zeta)}{\partial x} + \overline{Q}_{12} \frac{\partial u_i(r, s, \zeta)}{\partial x} \frac{\partial v_j(r, s, \zeta)}{\partial y} \\
& + \overline{Q}_{22} \frac{\partial v_i(r, s, \zeta)}{\partial y} \frac{\partial v_j(r, s, \zeta)}{\partial y} + \overline{Q}_{26} \left(\frac{\partial u_i(r, s, \zeta)}{\partial y} + \frac{\partial v_i(r, s, \zeta)}{\partial x} \right) \frac{\partial v_j(r, s, \zeta)}{\partial y} \\
& + \overline{Q}_{16} \frac{\partial u_i(r, s, \zeta)}{\partial x} \left(\frac{\partial u_j(r, s, \zeta)}{\partial y} + \frac{\partial v_j(r, s, \zeta)}{\partial x} \right) \\
& + \overline{Q}_{26} \frac{\partial v_i(r, s, \zeta)}{\partial y} \left(\frac{\partial u_j(r, s, \zeta)}{\partial y} + \frac{\partial v_j(r, s, \zeta)}{\partial x} \right) \\
& + \overline{Q}_{66} \left(\frac{\partial u_i(r, s, \zeta)}{\partial y} + \frac{\partial v_i(r, s, \zeta)}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_j(r, s, \zeta)}{\partial y} + \frac{\partial v_j(r, s, \zeta)}{\partial x} \right) \\
& + \overline{Q}_{44} \left(\frac{\partial v_i(r, s, \zeta)}{\partial z} + \frac{\partial w_i(r, s, \zeta)}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v_j(r, s, \zeta)}{\partial z} + \frac{\partial w_j(r, s, \zeta)}{\partial y} \right) \\
& + \overline{Q}_{45} \left(\frac{\partial u_i(r, s, \zeta)}{\partial z} + \frac{\partial w_i(r, s, \zeta)}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v_j(r, s, \zeta)}{\partial z} + \frac{\partial w_j(r, s, \zeta)}{\partial y} \right) \\
& + \overline{Q}_{54} \left(\frac{\partial v_i(r, s, \zeta)}{\partial z} + \frac{\partial w_i(r, s, \zeta)}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u_j(r, s, \zeta)}{\partial z} + \frac{\partial w_j(r, s, \zeta)}{\partial x} \right) + \\
& \left. + \overline{Q}_{55} \left(\frac{\partial u_i(r, s, \zeta)}{\partial z} + \frac{\partial w_i(r, s, \zeta)}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_j(r, s, \zeta)}{\partial z} + \frac{\partial w_j(r, s, \zeta)}{\partial x} \right) \right) dx dy dz \quad (6.38)
\end{aligned}$$

uç yerdeğiştirme parametreleri cinsinden yazılmıştır. (6.38) denkleminde $i=1$ ve $j=1$ alınarak k_{11} terimi yazılmak istenirse;

$$\begin{aligned}
k_{11} = & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\overline{Q}_{11} \frac{\partial u_1(r, s, \zeta)}{\partial x} \frac{\partial u_1(r, s, \zeta)}{\partial x} + \overline{Q}_{16} \frac{\partial u_1(r, s, \zeta)}{\partial y} \frac{\partial u_1(r, s, \zeta)}{\partial x} \right. \\
& + \overline{Q}_{16} \frac{\partial u_1(r, s, \zeta)}{\partial x} \frac{\partial u_1(r, s, \zeta)}{\partial y} + \\
& \left. \overline{Q}_{66} \frac{\partial u_1(r, s, \zeta)}{\partial y} \frac{\partial u_1(r, s, \zeta)}{\partial y} + \overline{Q}_{55} \frac{\partial u_1(r, s, \zeta)}{\partial z} \frac{\partial u_1(r, s, \zeta)}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (6.39)
\end{aligned}$$

olmak üzere (6.27) denklemi dikkate alınarak (6.39) denkleminin düzenlenmesiyle birinci mertebeye rijitlik matrisinin ilk terimi k_{11} şekil fonksiyonları cinsinden;

$$k_{11} =$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} [\overline{Q_{11}} \frac{\partial N_1(r, s)}{\partial x} \psi_{\bar{u}}(\zeta) \frac{\partial N_1(r, s)}{\partial x} \psi_{\bar{u}}(\zeta) + \\ & \quad + \overline{Q_{16}} \frac{\partial N_1(r, s)}{\partial y} \psi_{\bar{u}}(\zeta) \frac{\partial N_1(r, s)}{\partial x} \psi_{\bar{u}}(\zeta) + \\ & + \overline{Q_{16}} \frac{\partial N_1(r, s)}{\partial x} \psi_{\bar{u}}(\zeta) \frac{\partial N_1(r, s)}{\partial y} \psi_{\bar{u}}(\zeta) + \overline{Q_{66}} \frac{\partial N_1(r, s)}{\partial y} \psi_{\bar{u}}(\zeta) \frac{\partial N_1(r, s)}{\partial y} \psi_{\bar{u}}(\zeta) + \\ & \quad + \overline{Q_{55}} N_1(r, s) \frac{d\psi_{\bar{u}}(\zeta)}{dz} N_1(r, s) \frac{d\psi_{\bar{u}}(\zeta)}{dz}] dx dy dz \end{aligned} \quad (6.40)$$

olarak bulunmuştur.

6.3 Geliştirilen Sonlu Elemana Ait Yükleme Matrisinin Bulunması

(6.34) denkleminde eşitliğin sağında yer alan plak düzlemine dik (q_w) lateral yükünün plak düzlemine dik virtüel yerdeğiştirme (δw) ile yaptığı iş;

$$\int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} q_w(x, y) \delta w dx dy \quad (6.41)$$

dir. Düzleme dik yerdeğiştirmenin (w), şekilfonksiyonları ve uç yerdeğiştirmeleri cinsinden aşağıdaki gibi yazılıp;

$$w = \sum_{i=1}^{12} w_i N_i(r, s) \quad (6.42)$$

$$\delta w = \sum_{i=1}^{12} \delta w_i N_i(r, s) \quad (6.43)$$

olmak üzere (6.43) denkleminin (6.41) denkleminde yerine konulmasıyla;

$$\begin{aligned} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} q_w(x, y) \delta w dx dy &= \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} q_w(x, y) \sum_{i=1}^{12} \delta w_i N_i(r, s) dx dy \\ &= \sum_{i=1}^{12} \delta w_i \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} q_w(x, y) N_i(r, s) dx dy \end{aligned} \quad (6.44)$$

halini alır. Buradan (i) inci uç deplasman parametresinin birim durumunda elemana etkiyen q_w lateral yükünün yaptığı iş $P_{i,0}$;

$$P_{i,0} = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} q_w(x,y) N_i(r,s) dx dy \quad (6.45)$$

olarak bulunmuştur.

6.4 Jacobyen Matrisi ve Lokal Şekil Fonksiyonlarının Global Eksenlere Göre Türevlerinin Alınması

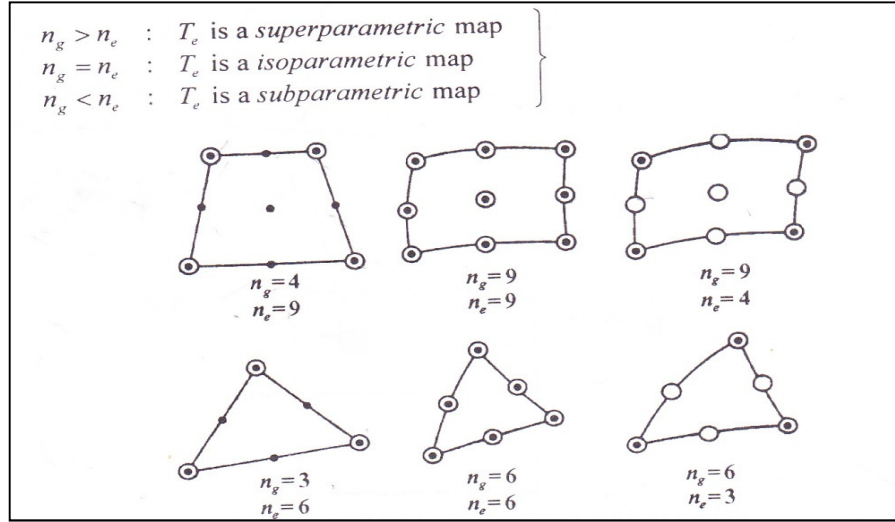
(6.40) denkleminde görüleceği üzere; r ve s fonksiyonları cinsinden ifade edilen $N_1(r,s)$ şekil fonksiyonunun global x ve y eksenlerine türevlerinin alınması gerekmiştir. [37]'de global x,y,z koordinatlarını sonlu elemanın düğüm noktaları koordinatları biçiminde ifade ederken; kullanılan şekilfonksiyonlarının sayısının, yerdeğiştirme alanını belirtirken kullanılan şekilfonksiyonlarının sayısına eşit alınabileceği gibi (izoparametrik) Şekil 6.4'de gösterildiği gibi daha fazla (süperparametrik) veya daha az (subparametrik) da alınabileceği belirtilmiştir. Geliştirilen sonlu elemanda ise izoparametrik sonlu eleman tanımına uyulmuş; global x,y,z koordinatları; sonlu elemanın düğüm noktaları koordinatları cinsinden;

$$x = x_1 N_1(r,s) + x_2 N_2(r,s) + \dots + x_{12} N_{12}(r,s) \quad (6.46)$$

$$y = y_1 N_1(r,s) + y_2 N_2(r,s) + \dots + y_{12} N_{12}(r,s) \quad (6.47)$$

$$z = z_1 \psi_{\bar{u}}(\zeta) + z_2 \psi_a(\zeta) + z_3 \psi_o(\zeta) \quad (6.48)$$

olarak tanımlanmıştır.



Şekil 6.4 : Süperparametrik, izoparametrik ve subparametrik sonlu eleman tanımlaması [37].

Zincir kuralına göre x, y biçiminde yazılı şekil fonksiyonlarının sırasıyla r ve s 'ye göre kısmi türevleri alınacak olursa;

$$\frac{\partial N_i(x, y)}{\partial r} = \frac{\partial N_i(x, y)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial N_i(x, y)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \quad (6.49)$$

$$\frac{\partial N_i(x, y)}{\partial s} = \frac{\partial N_i(x, y)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial N_i(x, y)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \quad (6.50)$$

(6.49) ve (6.50) denklemlerinde x ve y yerine sırasıyla tanımlanan (6.46) ve (6.47) denklemleri yazılarak;

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i(x, y)}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i(x, y)}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \frac{\partial N_i(r, s)}{\partial r} x_i & \sum \frac{\partial N_i(r, s)}{\partial r} y_i \\ \sum \frac{\partial N_i(r, s)}{\partial s} x_i & \sum \frac{\partial N_i(r, s)}{\partial s} y_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i(x, y)}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]_{xy} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i(x, y)}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (6.51)$$

olmak üzere (6.52) denklemi ile geliştirilen sonlu elemanın Jakobyen matrisi tanımlanmıştır.

$$[J]_{xy} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \dots & \frac{\partial N_{m=12}}{\partial r} \\ \frac{\partial N_1}{\partial s} & \frac{\partial N_2}{\partial s} & \dots & \frac{\partial N_{m=12}}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_{m=12} & y_{m=12} \end{bmatrix} \quad (6.52)$$

(6.52) denklemi ile elde edilen Jacobyen matrisinin tersi $[J]_{xy}^{-1}$ alınarak; (6.40) denkleminde gerek duyulan r ve s fonksiyonları cinsinden yazılmış şekil

fonksiyonlarının global x ve y eksenlerine göre türevleri $(\frac{\partial N_i(r,s)}{\partial x}, \frac{\partial N_i(r,s)}{\partial y})$; (6.53) denklemi kullanılarak elde edilmiştir.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i(r,s)}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i(r,s)}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]_{xy}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i(r,s)}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i(r,s)}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i(r,s)}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i(r,s)}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (6.53)$$

Benzer şekilde z koordinatı; sonlu elemanın düğüm noktaları koordinatları biçiminde ifade edilerek;

$$z = z_1 \psi_{\bar{u}}(\zeta) + z_2 \psi_a(\zeta) + z_3 \psi_o(\zeta) \quad (6.54)$$

olmak üzere (6.54) denkleminin zeta'ya bağlı türevi alınarak;

$$J_z = \frac{dz}{d\zeta} = \frac{h}{2} \quad (6.55)$$

olmak üzere kalınlık doğrultusundaki lokal ζ eksenini cinsinden yazılı şekil fonksiyonunun global z eksenine göre türevi;

$$\frac{d\psi_i(\zeta)}{dz} = J_z^{-1} \frac{d\psi_i(\zeta)}{d\zeta} = \frac{2}{h} \frac{d\psi_i(\zeta)}{d\zeta} \quad (6.56)$$

olacaktır.

$$dx dy dz = \det(J_{xy}) \det(J_z) dr ds d\zeta \quad (6.57)$$

olmak üzere (6.40) denklemi (6.53), (6.56) ve (6.57) denklemleri gözönüne alınarak;

$k_{11} =$

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\overline{Q_{11}} (J_{11}^* \frac{\partial N_1(r,s)}{\partial r} \\ & \quad + J_{12}^* \frac{\partial N_1(r,s)}{\partial s}) (J_{11}^* \frac{\partial N_1(r,s)}{\partial r} + J_{12}^* \frac{\partial N_1(r,s)}{\partial s}) \psi_{\bar{u}}(\zeta) \psi_{\bar{u}}(\zeta) \\ & + \overline{Q_{16}} \left(J_{21}^* \frac{\partial N_1(r,s)}{\partial r} + J_{22}^* \frac{\partial N_1(r,s)}{\partial s} \right) \psi_{\bar{u}}(\zeta) \left(J_{11}^* \frac{\partial N_1(r,s)}{\partial r} + J_{12}^* \frac{\partial N_1(r,s)}{\partial s} \right) \psi_{\bar{u}}(\zeta) \\ & + \overline{Q_{16}} \left(J_{11}^* \frac{\partial N_1(r,s)}{\partial r} + J_{12}^* \frac{\partial N_1(r,s)}{\partial s} \right) \psi_{\bar{u}}(\zeta) \left(J_{21}^* \frac{\partial N_1(r,s)}{\partial r} + J_{22}^* \frac{\partial N_1(r,s)}{\partial s} \right) \psi_{\bar{u}}(\zeta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \overline{Q_{66}} \left(J_{21}^* \frac{\partial N_1(r,s)}{\partial r} + J_{22}^* \frac{\partial N_1(r,s)}{\partial s} \right) \psi_{\bar{u}}(\zeta) \left(J_{21}^* \frac{\partial N_1(r,s)}{\partial r} + J_{22}^* \frac{\partial N_1(r,s)}{\partial s} \right) \psi_{\bar{u}}(\zeta) \\
& + \overline{Q_{55}} N_1(r,s) \frac{2}{h} \frac{d\psi_{\bar{u}}(\zeta)}{d\zeta} N_1(r,s) \frac{2}{h} \frac{d\psi_{\bar{u}}(\zeta)}{d\zeta}] \det(I_{xy}) dr ds d\zeta
\end{aligned} \tag{6.58}$$

şekline dönüştürülmüştür.

6.5 Gauss Kuadratürü İle Nümerik İntegrasyon

(6.58) denkleminde Jakobyen matrisi terimleri girilip türev alma işlemleri gerçekleştirildiğinde (6.58) denklemi;

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r,s) f(\zeta) dr ds d\zeta \tag{6.59}$$

haline dönüşmüş ve bu üç katlı integral çözümünü belirlemede; tabaka kalınlığı doğrultusundaki integrasyon $\int_{-1}^1 f(\zeta) d\zeta$ için Çizelge 6.3 deki çarpım tablosundan yararlanılmış; plak düzlemindeki $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r,s) dr ds$ iki katlı integrali için nümerik integrasyon yöntemlerinden Gauss Kuadratür metoduna başvurulmuştur. Bu metod ile iki katlı integralin çözümü ;

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r,s) dr ds = \sum_i \sum_j W_i W_j f(r_i, s_j) \tag{6.60}$$

r_i, s_j örnek nokta sayısı; W_i, W_j değerleri de bu örnek noktaların fonksiyondaki ağırlık değerlerini ifade etmek üzere belli bir yaklaşıklıkla veya tam olarak (6.60) denklemi ile elde edilebilmektedir. Tam fonksiyon değerinin elde edilmesi alınacak olan örnek nokta sayısı ile ilgilidir. $ax^2 + bx + c$ şeklinde ikinci dereceden bir polinomu tam olarak elde etmek için a,b,c olmak üzere 3 sabite ihtiyaç duyulmaktadır. Dolayısı ile m mertebesinde olan bir polinomu tam olarak elde etmek için m+1 sabite ihtiyaç duyacağımız kesindir. Alınan herbir örnek nokta bize W_i ve $f(r_i)$ değerini verdiğine göre n tane örnek nokta alırsak elimizde 2n tane sabit bilinmiş olacak ve bu da;

$$m+1 = 2n \tag{6.61}$$

eşitliğini verir. (6.61) denkleminde m; integral sonrasında elde edilecek polinomun mertebesi ve n örnek nokta sayısı olmak üzere fonksiyonun değerinin tam olarak elde edilmesi için gerekli örnek nokta sayısı n; (6.61) denkleminin düzenlenmesi ile;

$$n = (m+1) / 2 \quad (6.62)$$

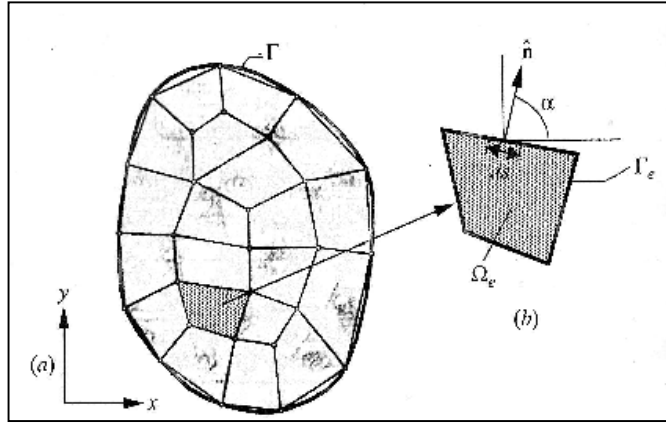
kadardır. (6.58) denklemindeki eleman rijitlik matrisinin r ve s doğrultularının herbiri için 7. dereceden bir polinom şeklinde ortaya çıkmış olması nedeniyle bu polinomların tam olarak elde edilmesi için herbir doğrultuda n=4 örnek noktaya ihtiyaç duyulmuştur. Çizelge 6.1’de ise çeşitli Gauss örnek nokta değerleri ve ağırlıkları gösterilmiştir.

Çizelge 6.1 : Gauss Örnek Nokta Değerleri ve Ağırlıkları.

n	r_i	W_i
1	$r_1=0.000$	$W_1=2.000$
2	$r_2 = -r_1 = 0.57735027$	$W_2 = W_1 = 1.000$
3	$r_2 = 0.000$	$W_2 = 0.888889$
	$r_3 = -r_1 = 0.77459667$	$W_3 = W_1 = 0.555556$
4	$r_1 = -r_4 = -0.86113631$	$W_1 = W_4 = 0.347854$
	$r_2 = -r_3 = -0.33998104$	$W_2 = W_3 = 0.652145$

6.6 Dikdörtgen Bir Sonlu Elemanın Çarpım Tabloları ile Rijitlik Matrisinin Kurulması

Şekil 6.5’deki gibi genel bir dörtgen sonlu elemanın rijitlik matrisini bulmak için (6.58) denkleminde rijitlik matrisinin k_{11} terimini hesaplarken görüldüğü üzere Jacobyen matrisinin tersinin elemanları olan J_{11}^* , J_{12}^* , J_{21}^* , J_{22}^* terimlerinin bulunması gerekirken,



Şekil 6.5 : Genel bir dörtgen sonlu eleman [37].

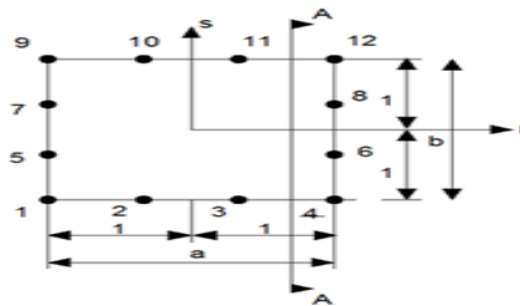
Şekil 6.6'daki gibi dikdörtgen bir sonlu elemanın rijitlik matrisinin hesabında;

$$dx = \frac{a}{2} dr \quad (6.63)$$

$$dy = \frac{b}{2} ds \quad (6.64)$$

$$dz = \frac{h}{2} d\zeta \quad (6.65)$$

olmak üzere rijitlik matrisi terimleri Çizelge 6.2-Çizelge 6.5 arasındaki çarpım tabloları kullanılarak kolayca bulunabilmektedir. Bu çarpım tabloları; tez kapsamında geliştirilen Elfin19 altprogramının verdiği dikdörtgen tabakalı plak elemana ait rijitlik matrisi terimlerinin doğrulamasında kullanılmıştır. Örnek olarak tabakadaki fiberleri global x ekseniiyle aynı doğrultuda ($\theta = 0$) olan takabalı kompozit plak sonlu elemanın k_{11} rijitlik matrisi terimi çarpım tabloları yardımıyla hesaplanırsa;



Şekil 6.6 : Dikdörtgen sonlu eleman.

$\theta = 0$ olması nedeniyle (6.40) denkleminde $\overline{Q_{16}}$ terimi düşeceğinden (6.40) denklemi;

$$k_{11} =$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} [\overline{Q_{11}} \frac{\partial N_1(r, s)}{\partial x} \psi_{\bar{u}}(\zeta) \frac{\partial N_1(r, s)}{\partial x} \psi_{\bar{u}}(\zeta) \\ & + \overline{Q_{66}} \frac{\partial N_1(r, s)}{\partial y} \psi_{\bar{u}}(\zeta) \frac{\partial N_1(r, s)}{\partial y} \psi_{\bar{u}}(\zeta) \\ & + \overline{Q_{55}} N_1(r, s) \frac{d\psi_{\bar{u}}(\zeta)}{dz} N_1(r, s) \frac{d\psi_{\bar{u}}(\zeta)}{dz}] dx dy dz \end{aligned} \quad (6.66)$$

halini alır. (6.66) denkleminde $N_1(r, s)$ şekil fonksiyonu yerine (6.13) denklemi konulursa (6.66) denklemi;

$$k_{11} =$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} [\overline{Q_{11}} \frac{\partial (T_2(r)L_2(s) + L_2(r)T_2(s) - L_2(r)L_2(s))}{\partial x} \psi_{\bar{u}}(\zeta) \\ & * \frac{\partial (T_2(r)L_2(s) + L_2(r)T_2(s) - L_2(r)L_2(s))}{\partial x} \psi_{\bar{u}}(\zeta) \\ & + \overline{Q_{66}} \frac{\partial (T_2(r)L_2(s) + L_2(r)T_2(s) - L_2(r)L_2(s))}{\partial y} \psi_{\bar{u}}(\zeta) \\ & * \frac{\partial (T_2(r)L_2(s) + L_2(r)T_2(s) - L_2(r)L_2(s))}{\partial y} \psi_{\bar{u}}(\zeta) \\ & + \overline{Q_{55}} (T_2(r)L_2(s) + L_2(r)T_2(s) - L_2(r)L_2(s)) \frac{d\psi_{\bar{u}}(\zeta)}{dz} \\ & * (T_2(r)L_2(s) + L_2(r)T_2(s) - L_2(r)L_2(s)) \frac{d\psi_{\bar{u}}(\zeta)}{dz}] dx dy dz \end{aligned} \quad (6.67)$$

halini alır.

$$\frac{dT_2(r)}{dr} = T_2'(r), \quad \frac{dL_2(r)}{dr} = L_2'(r) \quad (6.68)$$

$$\frac{dT_2(s)}{ds} = T_2'(s) \quad \frac{dL_2(s)}{ds} = L_2'(s) \quad (6.69)$$

$$\frac{d\psi_{\ddot{u}}(\zeta)}{d\zeta} = \psi_{\ddot{u}}'(\zeta) \quad (6.70)$$

olmak üzere (6.67) denkleminde zincir kuralı uygulanırsa ve (6.63), (6.64) ve (6.65) denklemleri yerine konulursa (6.67) denklemi;

$$\begin{aligned} k_{11} = & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\overline{Q_{11}} \left(\frac{dr}{dx} \right)^2 \psi_{\ddot{u}}(\zeta) \psi_{\ddot{u}}(\zeta) (T_2'(r)L_2(s) + L_2'(r)T_2(s) - L_2'(r)L_2(s))^2 \\ & + \overline{Q_{66}} \left(\frac{ds}{dy} \right)^2 \psi_{\ddot{u}}(\zeta) \psi_{\ddot{u}}(\zeta) (T_2(r)L_2'(s) + L_2(r)T_2'(s) - L_2(r)L_2'(s))^2 \\ & + \overline{Q_{55}} \left(\frac{d\zeta}{dz} \right)^2 \psi_{\ddot{u}}'(\zeta) \psi_{\ddot{u}}'(\zeta) (T_2(r)L_2(s) + L_2(r)T_2(s) \\ & - L_2(r)L_2(s))^2] \frac{a}{2} dr \frac{b}{2} ds \frac{h}{2} d\zeta \end{aligned} \quad (6.71)$$

halini alır. Çizelge 6.2-Çizelge 6.5 arasındaki integrasyon çarpım tablolarında (6.71) denkleminde yer alan $\left(\frac{dr}{dx}\right)^2$, $\left(\frac{ds}{dy}\right)^2$ ve $\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)^2$ terimleri dikkate alınmış olup bu tablolar kullanılarak (6.71) denklemindeki integrasyon;

$$k_{11} = \left(\frac{47b}{60a} + \frac{27ab}{560} \right) \overline{Q_{11}} \frac{2h}{15} + \left(\frac{47a}{60b} + \frac{27ab}{560} \right) \overline{Q_{66}} \frac{2h}{15} + \frac{2063ab}{50400} \frac{7}{3h} \overline{Q_{55}} \quad (6.72)$$

olarak bulunmuştur.

Çizelge 6.2 : $\int_{-a/2}^{a/2} X Y \, dx = \int_{-1}^1 X Y \frac{a}{2} dr$ integralleri çarpım tablosu.

X-Y	T ₁	T ₂	S ₁	S ₂	T' ₁	T' ₂	S' ₁	S' ₂
T ₁	$\frac{32a}{420}$	$\frac{4,75a}{420}$	$\frac{24,75a}{420}$	$\frac{-9a}{420}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-7}{80}$	$\frac{-57}{80}$	$\frac{24}{80}$
T ₂		$\frac{32a}{420}$	$\frac{-9a}{420}$	$\frac{24,75a}{420}$	$\frac{7}{80}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-24}{80}$	$\frac{57}{80}$
S ₁			$\frac{162a}{420}$	$\frac{-20,25a}{420}$	$\frac{57}{80}$	$\frac{24}{80}$	0	$\frac{-81}{80}$
S ₂				$\frac{162a}{420}$	$\frac{-24}{80}$	$\frac{-57}{80}$	$\frac{81}{80}$	0
T' ₁					$\frac{148}{40a}$	$\frac{-13}{40a}$	$\frac{-189}{40a}$	$\frac{54}{40a}$
T' ₂						$\frac{148}{40a}$	$\frac{54}{40a}$	$\frac{-189}{40a}$
S' ₁							$\frac{432}{40a}$	$\frac{-297}{40a}$
S' ₂								$\frac{432}{40a}$

Çizelge 6.3 : $\int_{-h/2}^{h/2} X Y \, dz = \int_{-1}^1 X Y \frac{h}{2} d\zeta$ integralleri çarpım tablosu.

X-Y	$\psi_{\bar{u}}(\zeta)$	$\psi_a(\zeta)$	$\psi_o(\zeta)$	$\psi'_{\bar{u}}(\zeta)$	$\psi'_a(\zeta)$	$\psi'_o(\zeta)$
$\psi_{\bar{u}}(\zeta)$	$\frac{2h}{15}$	$\frac{-h}{30}$	$\frac{h}{15}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{-2}{3}$
$\psi_a(\zeta)$		$\frac{2h}{15}$	$\frac{h}{15}$	$\frac{-1}{6}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{2}{3}$
$\psi_o(\zeta)$			$\frac{8h}{15}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{-2}{3}$	0
$\psi'_{\bar{u}}(\zeta)$				$\frac{7}{3h}$	$\frac{1}{3h}$	$\frac{-8}{3h}$
$\psi'_a(\zeta)$					$\frac{7}{3h}$	$\frac{-8}{3h}$

Çizelge 6.4 : $\int_{-a/2}^{a/2} X Y \, dx = \int_{-1}^1 X Y \frac{a}{2} dr$ integralleri çarpım tablosu.

X-Y	L_1	L_2	L'_1	L'_2
T_1	$\frac{13a}{120}$	$\frac{a}{60}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{-1}{8}$
T_2	$\frac{a}{60}$	$\frac{13a}{120}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{-1}{8}$
T'_1	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{-1}{a}$
T'_2	$\frac{-1}{8}$	$\frac{-7}{8}$	$\frac{-1}{a}$	$\frac{1}{a}$

Çizelge 6.5 : $\int_{-a/2}^{a/2} X Y \, dx = \int_{-1}^1 X Y \frac{a}{2} dr$ integralleri çarpım tablosu.

X-Y	L_1	L_2	L'_1	L'_2
L_1	$\frac{a}{3}$	$\frac{a}{6}$	$\frac{a}{4}$	$\frac{-a}{4}$
L_2		$\frac{a}{3}$	$\frac{a}{4}$	$\frac{-a}{4}$
L'_1			$\frac{a}{4}$	$\frac{-a}{4}$
L'_2				$\frac{a}{4}$

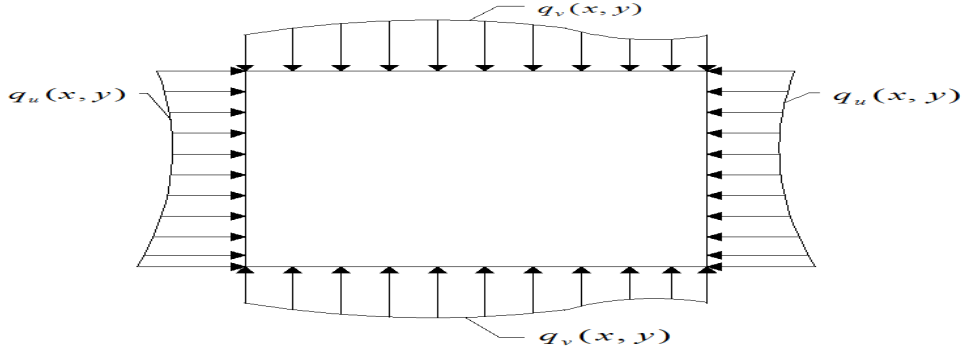
7. YANAL YÜK VE DÜZLEMİÇİ (MEMBRAN) KUVVETLERİN BİRLİKTE ETKİ ETMESİ HALİNDE TABAKALI KOMPOZİT PLAKLAR

7.1 Giriş

Bu bölümün birinci kısmı; düzlemiçi kesit zorları bilinen plaklarda yerdeğiştirmelerin denge denklemlerine etkisinin dikkate alındığı ikinci mertebe hesabın da gerçekleştirilebilmesi amacıyla geliştirilen tabakalı sonlu elemanın ikinci mertebe rijitlik matrisinin çıkarılışına ve herhangi bir sistemde oluşturulan sistem rijitlik matrisinin determinantının sıfırlanmasıyla elde edilen sistem burkulma yükünün bulunmasına ayrılmıştır. Ayrıca; tek doğrultuda eğilmenin (silindirik eğilme hali) hakim olduğu tabakalı plakların ikinci mertebe hesabında; geliştirilen tabakalı sonlu elemanla karşılaştırılmak üzere [38]'de çıkarılan, diferansiyel denklem çözümlerinden elde edilmiş birim kuvvet ve birim deplasman sabitlerine yer verilmiştir.

Bölümün ikinci kısmında; büyük deplasman kabulü altında tabakalı kompozit plakların geometrik nonlineer statik analizi ele alınmış; başlangıçta üzerinde herhangi bir düzlemiçi (membran) kuvvet bulunmamasına karşın; plağın eğilmesi ve mesnetlerde düzlemiçi hareketin engellenmesi sonucunda oluşan düzlemiçi çekme kuvvetlerinin plakların deplasmanını azaltıcı etkisi (pekleşme) özelliği üzerinde durulmuş; geometrik nonlineer statik analizi gerçekleştirmek amacıyla Genson programında geliştirilen ardışık yaklaşım prosedürüne yer verilmiştir.

7.2 Başlangıçta Düzlemiçi Kesit Zorları Bilinen Plakların İkinci Mertebe Teorisine Göre Hesabı

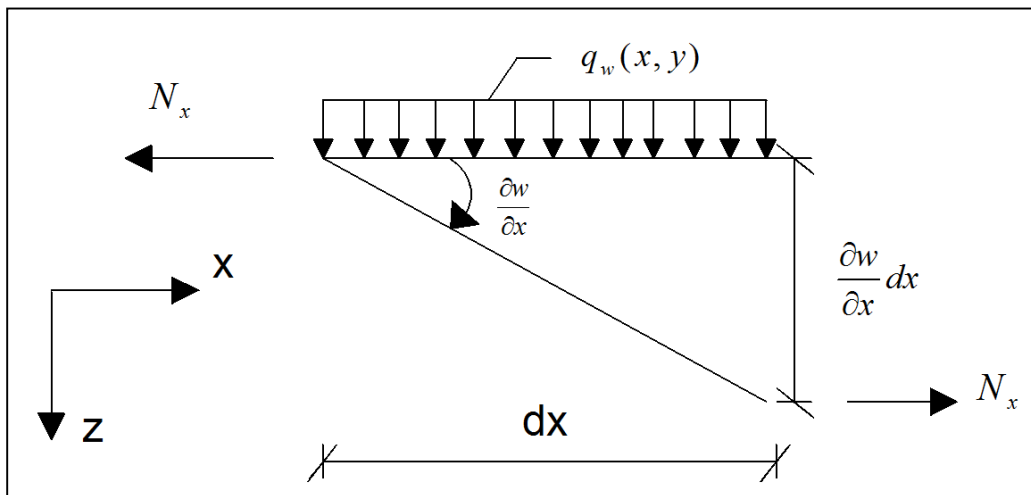


Şekil 7.1 : Düzlemiçi (membran) yüke maruz plak.

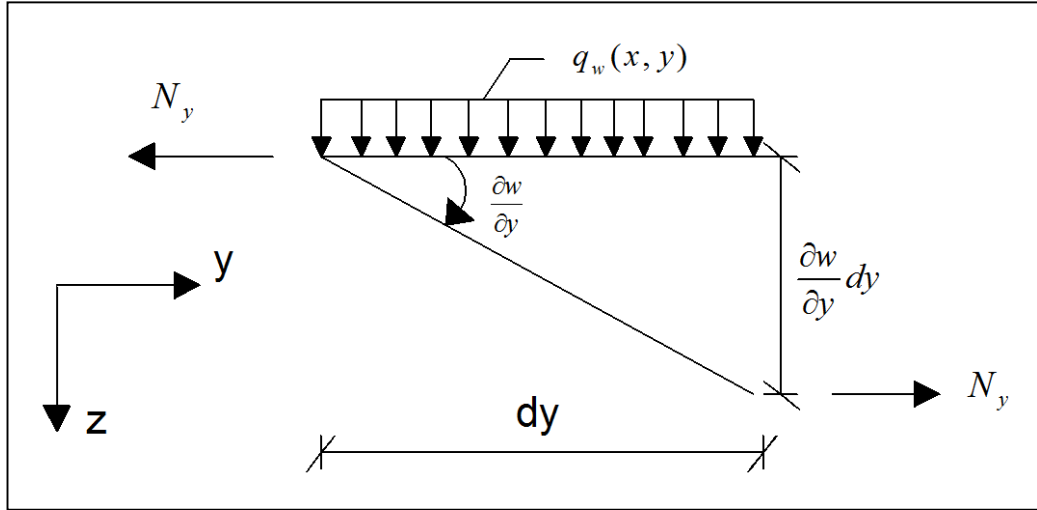
Şekil 7.1'den görüleceği üzere tabakalı kompozit plağın eğilmeden önce düzlemiçi (membran) kuvvetlere maruz kalması varsayımı altında virtüel iş teoremine göre iç kuvvetlerin işinin dış kuvvetlerin işine eşitliğinden;

$$\iiint (\sigma_x \delta \epsilon_{xj} + \sigma_y \delta \epsilon_{yj} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xyj}) dx dy dz = \iint (q_u(x, y) \delta u_j + q_v(x, y) \delta v_j) dx dy \quad (7.1)$$

(7.1) denkleminin çözülerek $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ düzlemiçi gerilmelerinin elde edilip N_x, N_y, N_{xy} kuvvetlerinin bulunduğu kabul edilir; sonrasında plak eğilmeye zorlanırsa;



Şekil 7.2 : N_x düzlemiçi kuvvetinin eğilme sonrası oluşturduğu moment.



Şekil 7.3 : N_y düzlemiçi kuvvetinin eğilme sonrası oluşturduğu moment.

Şekil 7.2 ve Şekil 7.3'den görüleceği üzere N_x ve N_y düzlemiçi kuvvetlerinin eğilme sonrası oluşturdukları $N_x \frac{\partial w}{\partial x} dx$ ve $N_y \frac{\partial w}{\partial y} dy$ momentlerinin sırasıyla virtüel dönmeler $\frac{\partial \delta w}{\partial x}$ ve $\frac{\partial \delta w}{\partial y}$ ile yapacakları iş;

$$\int \int -N_x \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} dx dy - \int \int N_y \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} dx dy \quad (7.2)$$

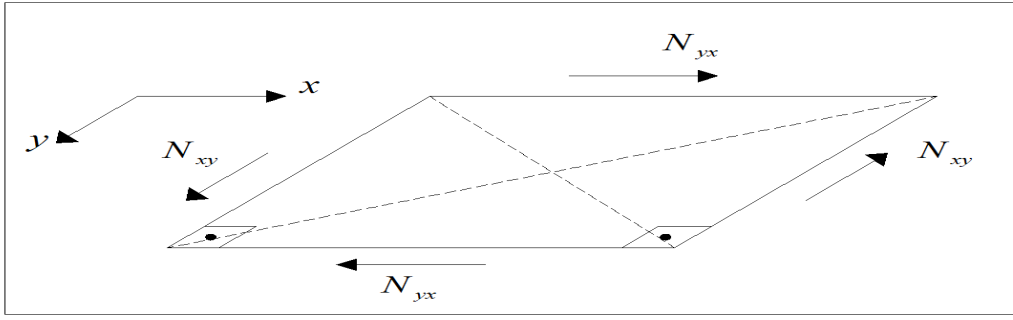
ikinci mertebe etkileri olarak ortaya çıkar. Şekil 7.4'de görülen $N_{xy} = N_{yx}$ düzlemiçi kayma kuvvetlerinin ikinci mertebe etkilerinin belirlenmesi için önce bu kuvvetler cinsinden 45 derece dönük $\xi - \eta$ eksen takımındaki N_ξ, N_η kesit zorlarının ifade edilmesi gerekir. (Şekil 7.5)

$$a\sqrt{2} N_\xi = \frac{N_{xy}a\sqrt{2}}{2} + \frac{N_{yx}a\sqrt{2}}{2} \quad (7.3)$$

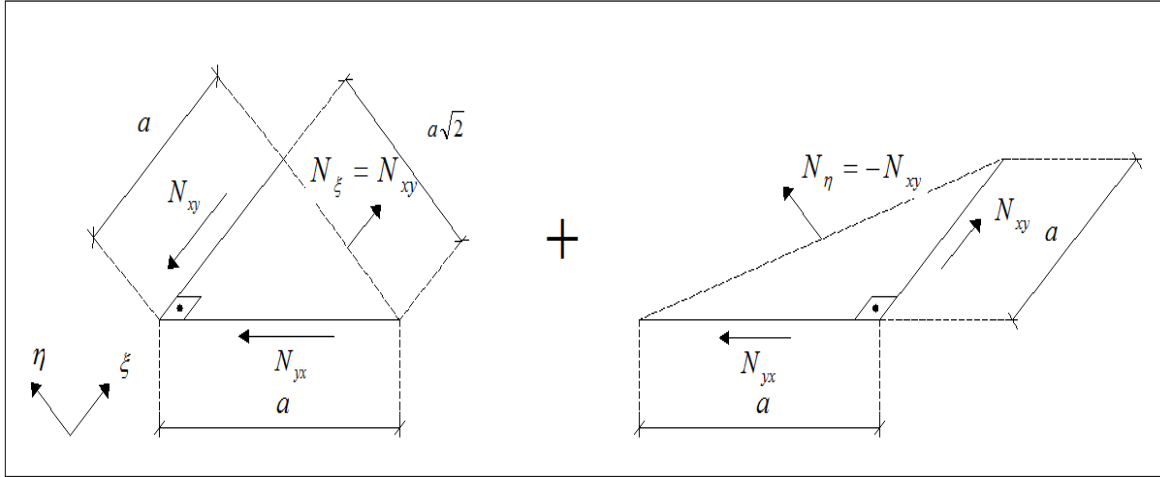
olmak üzere;

$$N_\xi = N_{xy} \quad ; \quad N_\eta = -N_{xy} \quad (7.4)$$

olarak bulunur.



Şekil 7.4 : N_{xy} düzlemiçi kayma kuvveti.



Şekil 7.5 : N_{xy} düzlemiçi kayma kuvvetine eşdeğer N_{ξ} , N_{η} kuvvetleri.

Plağın düzlemine dik yerdeğiştirme yapması halinde (7.4) denkleminde bulunan N_{ξ} ve N_{η} normal kuvvelerinin oluşturacağı ikinci mertbe momentler;

$$M_{\xi} = N_{\xi} \frac{\partial w}{\partial \xi} = N_{xy} \frac{\partial w}{\partial \xi} \quad (7.5)$$

$$M_{\eta} = N_{\eta} \frac{\partial w}{\partial \eta} = -N_{xy} \frac{\partial w}{\partial \eta} \quad (7.6)$$

dir. Bu momentlerin herhangi bir virtüel yerdeğiştirme durumundaki virtüel dönmeler $\frac{\partial \delta w}{\partial \xi}$ ve $\frac{\partial \delta w}{\partial \eta}$ ile yapacakları iş;

$$N_{xy} \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial \delta w}{\partial \xi} - N_{xy} \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial \delta w}{\partial \eta} \quad (7.7)$$

dir.

$$\partial w / \partial \xi = \sqrt{2} / 2 (\partial w / \partial x + \partial w / \partial y) \quad (7.8)$$

$$\partial w / \partial \eta = \sqrt{2} / 2 (-\partial w / \partial x + \partial w / \partial y) \quad (7.9)$$

olmak üzere $\frac{\partial w}{\partial \xi}$ ve $\frac{\partial w}{\partial \eta}$ dönmelerinin $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ cinsinden ifadesi olan (7.8) ve (7.9) denklemleri (7.7) denkleminde yerine konulursa;

$$\frac{1}{2} N_{xy} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} N_{xy} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} - \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) \quad (7.10)$$

ve gerekli basitleştirmeler yapılsa N_{xy} düzlemiçi kayma kuvvetlerinin yapacakları iş;

$$-N_{xy} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) \quad (7.11)$$

olarak bulunur. (7.2) ve (7.11) denklemleri ile elde edilen düzlemiçi kuvvetlerin işine plak lateral yükünün (q_w) virtüel deplasman ile yapacağı iş ilave edilirse dış yüklemelerin toplam işi;

$$\begin{aligned} & \int \int q_w(x, y) \delta w dx dy - \int \int N_x \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} dx dy - \int \int N_y \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} dx dy \\ & - \int \int (N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial x}) dx \end{aligned} \quad (7.12)$$

olarak belirlenir ve (7.12) denkleminin; tabii yükleme durumu sonucu sistemde oluşan gerilmelerin virtüel şekildeğiştirmelerle yapacakları işe eşitlenmesiyle;

$$\begin{aligned} & \int \int \int (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dx dy dz = \\ & \int \int q_w(x, y) \delta w dx dy - \int \int N_x \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} dx dy - \int \int N_y \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} dx dy \\ & - \int \int (N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial x}) dx dy \end{aligned} \quad (7.13)$$

denklemini elde edilir.

7.2.1 İkinci Mertebe Rijitlik Matrisi Terimlerinin Elde Edilmesi

(7.13) denkleminde yazılan virtüel iş ifadesinden; ikinci mertebe hesapta; birinci mertebe hesapta yazılan (6.34) denklemindeki virtüel iş ifadesine, ilave olarak (7.14) denkleminde görülen membran kuvvetlerin virtüel deplasmanlarla yaptıkları işlerin geldiği görülmektedir.

$$\begin{aligned} \int \int N_x \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} dx dy + \int \int N_y \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} dx dy + \int \int (N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \\ + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial x}) dx dy \end{aligned} \quad (7.14)$$

Eleman bazında, (7.14) denkleminde yer alan virtüel ve gerçek deplasmanların; düğüm noktaları yerdeğiştirmelerinin şekil fonksiyonlarıyla çarpımlarının lineer kombinasyonu biçiminde yazılmasıyla N_x için;

$$\begin{aligned} \int \int N_x \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} dx dy &= \int \int N_x \sum_{i=1}^{12} w_i \frac{\partial N_i}{\partial x} \sum_{j=1}^{12} \delta w_j \frac{\partial N_j}{\partial x} dx dy \\ &= \sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^{12} w_i \delta w_j \int \int N_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} dx dy \end{aligned} \quad (7.15)$$

elde edilir. (7.15) denkleminde benzer şekilde N_y ;

$$\begin{aligned} \int \int N_y \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} dx dy &= \int \int N_y \sum_{i=1}^{12} w_i \frac{\partial N_i}{\partial y} \sum_{j=1}^{12} \delta w_j \frac{\partial N_j}{\partial y} dx dy \\ &= \sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^{12} w_i \delta w_j \int \int N_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} dx dy \end{aligned} \quad (7.16)$$

ve N_{xy} için;

$$\begin{aligned} \int \int \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) dx dy &= \\ \int \int N_{xy} \sum_{i=1}^{12} w_i \frac{\partial N_i}{\partial x} \sum_{j=1}^{12} \delta w_j \frac{\partial N_j}{\partial y} dx dy &+ \int \int N_{xy} \sum_{i=1}^{12} w_i \frac{\partial N_i}{\partial y} \sum_{j=1}^{12} \delta w_j \frac{\partial N_j}{\partial x} dx dy \\ &= \sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^{12} 2w_i \delta w_j \int \int N_{xy} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} dx dy \end{aligned} \quad (7.17)$$

olarak bulunur. (i) birim durumunu yükleme, j birim durumunu virtüel yerdeğiştirme durumu alarak virtüel iş teoreminin uygulanması ile bulunacak $\overline{k}_{ij}$ ikinci mertebe rijitlik matrisi terimlerinin;

$$\overline{k}_{ijN_x} = \int \int N_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} dx dy \quad (7.18)$$

$$\overline{k}_{ijN_y} = \int \int N_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} dx dy \quad (7.19)$$

$$\overline{k}_{ijN_{xy}} = \int \int 2N_{xy} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} dx dy \quad (7.20)$$

olmak üzere N_x , N_y ve N_{xy} ye bağlı olarak üç terimden oluştuğu görülmektedir. (7.15), (7.16) ve (7.17) denklemlerinden ikinci mertebe etkilerin yalnızca düzlemine dik (w) yerdeğiştirmelerine bağlı olduğu, yani $\overline{k}_{ij}$ ikinci mertebe rijitlik matrisi terimlerinin çökme serbestliklerine karşı gelen satır ve sütunlarda sıfırdan farklı değerler vereceği; düşey serbestlik dışındaki serbestliklerin birim değerleri için bu serbestlikler doğrultusunda herhangi bir kuvvet oluşmayacağı anlaşılmaktadır. (7.18), (7.19) ve (7.20) denklemleri kullanılarak elde edilen ikinci mertebe rijitlik matrisi terimleri $\overline{k}_{ij}$ (7.13) denkleminde eşitliğin soluna geçirilip; (6.38) denklemi kullanılarak elde edilen birinci mertebe rijitlik matrisi terimleri (k_{ij}) ile birlikte elemanın i. serbestliğine ait denge denklemi LSAY tabaka sayısı, $P_{i,0}$ dış yük matrisi terimi olmak üzere;

$$\sum_{j=1}^{12 \times (4(LSAY)+3)} k_{ij} d_j + \sum_{j=1}^{12 \times (4(LSAY)+3)} \overline{k}_{ij} d_j = P_{i,0} \quad (7.21)$$

şeklinededir. (7.21) denkleminin matris formunda gösterilmesi ve eleman rijitlik matrislerinin sistem rijitlik matrisinde toplanmasıyla;

$$([K] + [\overline{K}]) [d] = [P]_0 \quad (7.22)$$

tüm sistem için bulunur. (7.22) denklem takımının çözülmesiyle; $[d]$ ikinci mertebe deplasman matrisi elde edilir. Bu formüller çıkarılırken N_x, N_y çekme ise pozitif alınmıştır. Bu halde $[\overline{K}]$ matrisinin esas köşegen üzerindeki terimleri pozitif çıkar ve

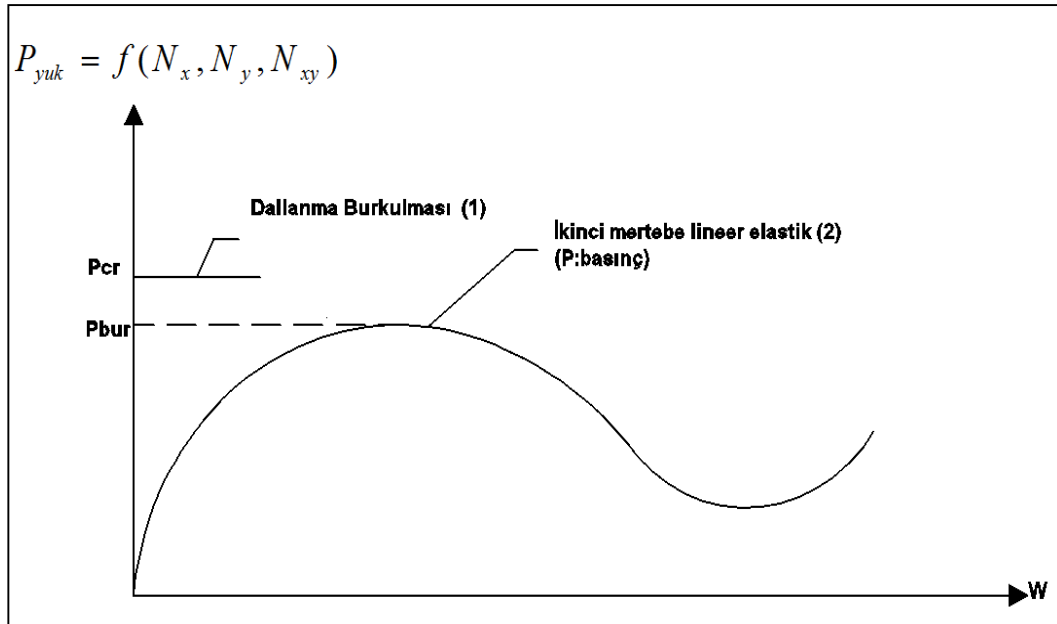
sistemi pekleştirici etki yaratır. N_x, N_y basınç halinde ise tersine $[\bar{K}]$ matrisi esas köşegen üzerinde negatif olup bu durumun sistem rijitliğini azaltacağı ve bulunan yerdeğişirmeleri büyüteceği açıktır.

7.2.2 Burkulma Yükünün Bulunması

Burkulma yüklerinin hesabında sistemleri iki gruba ayırarak incelemek uygun olacaktır.

- a) Burkulmadan önce yalnız düzlemiçi (membran) kuvvetlerin meydana geldiği herhangi bir lateral (yanal) yük $[P]_0 = [0]$ hali) bulunmayan sistemler
- b) Burkulmadan önce , membran kuvvetlerin yanında eğilme tesirlerinin de doğarak biçim değiştiren sistemler

Birinci gruba giren ve Şekil 7.6'da (1) no ile gösterilen sistemlerde burkulma yükü, sistemin ilk durumunu kararsız hale getiren en küçük yük parametresi olarak tanımlanır.



Şekil 7.6 : Düzlemiçi kuvvetlere maruz plakların kritik ve burkulma yükünün bulunması.

Bu gruba giren sistemlerde düzlemiçi (membran) kuvvetler, yük parametresi ($\phi_{yük}$) cinsinden;

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \phi_{yük} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{bmatrix} \quad (7.23)$$

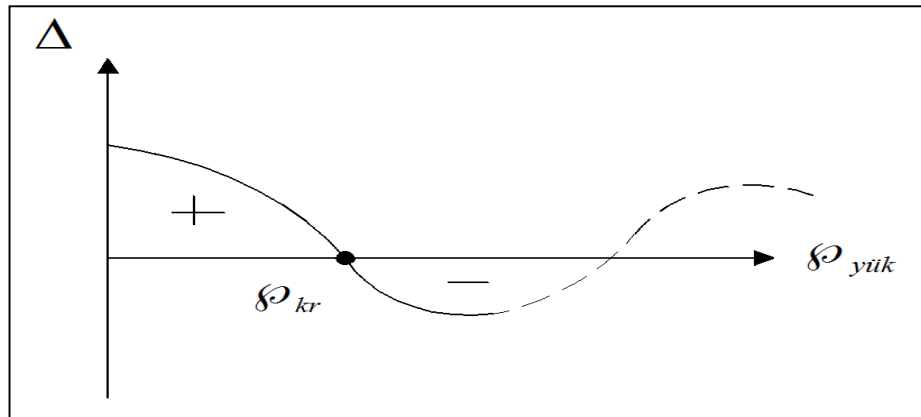
şeklindedir. İkinci mertebe rijitlik matrisi $[\bar{K}]$ için de benzer şekilde;

$$[\bar{K}] = \wp_{yük} [\bar{K}]_{\wp_{yük}=1} \quad (7.24)$$

yazılabilir. (7.22) denklemi (7.24) ve $[P]_0 = [0]$ hali gözönünde bulundurularak yeniden düzenlenirse;

$$([K] + \wp_{yük} [\bar{K}]_{\wp_{yük}=1}) [d] = [0] \quad (7.25)$$

halini alır. Sistemin bu ilk konumunun kararsız hale gelmesi ve $[d]=0$ dan farklı kararlı başka bir denge konumunun bulunması için yük parametresinin $\wp_{yük} = \wp_{kr}$ dallanma burkulma yükü değerinde (7.25) denklem takımı katsayılar matrisinin Δ determinantının sıfır olması gerekmektedir. $\Delta = \Delta(\wp_{yük})$ bağıntısının Şekil 7.7'deki gibi olduğu bilinmektedir. Sıfırdan başlayarak belirli aralıklarla $\wp_{yük}$ 'e artan değerler verip her seferinde Δ determinanı hesaplanır ve bu değerler pozitiften negatife geçtiği bölgede aralıklar sıklaştırılarak işlemler tekrarlanır ve bu sıklaştırılan bölgede lineer interpolasyon uygulanırsa $\wp_{kr}$ burkulma yükü istenilen hassasiyette belirlenir. İkinci gruba giren sistemlerde ise burkulma yükünün bulunması için iki yol izlenebilmektedir. Birincisi; yukarıda anlatılan $\Delta = \Delta(\wp_{yük})$ determinantını sıfır yapan yük parametresi değerinin lineer interpolasyonla bulunması iken; bir diğer yol olarak $\wp_{yük}$ parametresine sıfırdan başlayarak artan değerler verilip, her seferinde ikinci mertebe hesabının yapılmasıdır. Sistemin deplasman durumunu belirleyen karakteristik bir deplasman (w) bileşeni ile $\wp_{yük}$ arasındaki bağıntı Şekil 7.6'da (2) no ile gösterildiği gibi çizilecek olursa $\wp_{yük}$ parametresinin bir maksimumdan geçtiği görülür. Bu maksimum $\wp_{yük}$ parametresi değeri sistemin burkulma yüküdür.

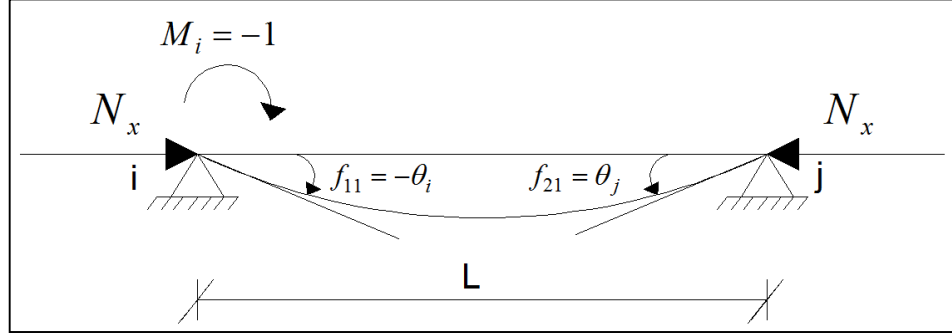


Şekil 7.7 : $P_{yük} - \det([K] + [\bar{K}])$ grafiğinin çizilerek P_{kr} değerinin hesaplanması.

$$\bar{\alpha}^2 = \frac{N}{\bar{k}_m} = \frac{N}{k_m \left(1 - \frac{N}{k_t}\right)} \quad (7.30)$$

$$\bar{k}_m = k_m \left(1 - \frac{N}{k_t}\right) \quad (7.31)$$

olarak verilmiştir.



Şekil 7.9 : Birim kuvvet sabitlerinin belirlenmesi.

Şekil 7.9’da gösterilen duruma ait sınır şartları;

$$x = 0 \text{ da : } \quad v(0) = 0 ; \quad M_i = \bar{k}_m v''(0) = -1 \quad (7.32)$$

$$x = L \text{ de : } \quad v(L) = 0 ; \quad M_j = \bar{k}_m v''(L) = 0 \quad (7.33)$$

olmak üzere; birim kuvvet sabitleri f_{11} ve f_{21} sırasıyla;

$$f_{11} = \frac{L}{k_m} \left(-\frac{\cos(\bar{\alpha} L)}{\bar{\alpha} L \sin(\bar{\alpha} L)} + \frac{1}{(\bar{\alpha} L)^2 \left(1 - \frac{N}{k_t}\right)} \right) \quad (7.34)$$

$$f_{21} = \frac{L}{k_m} \left(\frac{1}{\bar{\alpha} L \sin(\bar{\alpha} L)} - \frac{1}{(\bar{\alpha} L)^2 \left(1 - \frac{N}{k_t}\right)} \right) \quad (7.35)$$

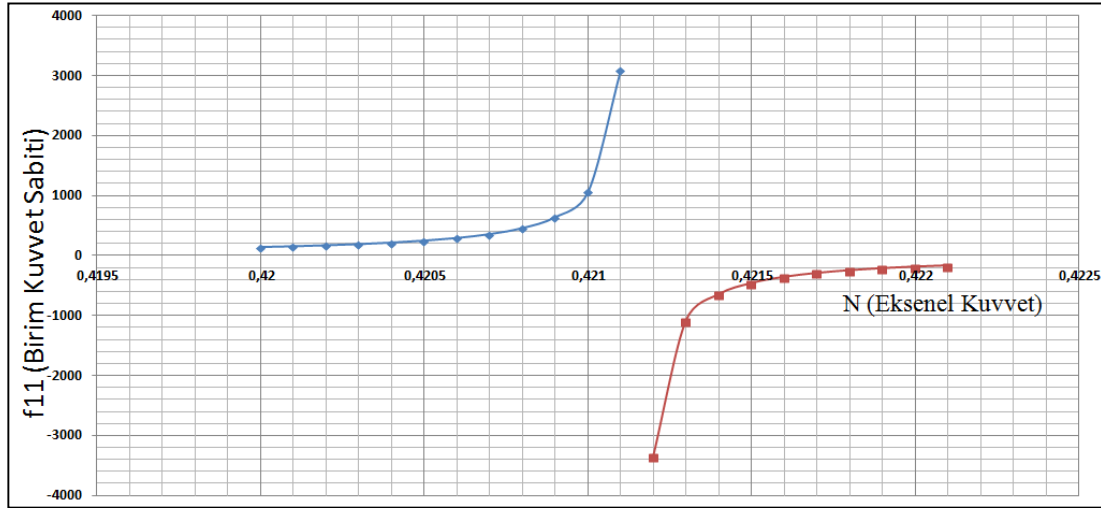
olarak verilmiştir.

7.2.3.1 Tek Doğrultuda Çalışan (Silindirik Eğilmeli) Plakların Burkulma Yükünün Bulunması

(7.34) denkleminde bulunan birim kuvvet sabiti (f_{11}) ile normal kuvvet arasındaki grafik Şekil 7.10'da görüldüğü gibi oluşturulduğunda; burkulma yükü değerine (N_{bur}) ulaşıldığında birim kuvvet sabitinin;

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow N_{bur}^+} (f_{11}) &= +\infty \\ \lim_{N \rightarrow N_{bur}^-} (f_{11}) &= -\infty \end{aligned} \quad (7.36)$$

sonsuz gittiği görülmektedir. (7.34) ve (7.35) denklemleri sayesinde birim kuvvet sabitleri ile normal kuvvet arasındaki ilişki çıkarılarak; tek doğrultuda çalışan plakların burkulma yükü bulunabilmektedir.



Şekil 7.10 : Eksenel kuvvet (N) – birim kuvvet sabiti (f_{11}) grafiği ve burkulma yükü.

7.2.4 Her İki Doğrultuda Eğilmeli Basit Mesnetli İzotrop Plakların Burkulma Yükünün Bulunması

[39]'da; her iki doğrultuda eğilmenin hakim olduğu; N_x düzlemiçi kuvvetine maruz basit mesnetli, a, b boyutlu dikdörtgen, izotrop plakların düzleme dik deplasman yüzeyi;

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (7.37)$$

$$a_{mn} = \frac{4Q \sin\left(\frac{m\pi\xi}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi\eta}{b}\right)}{abD\pi^4 \left(\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 - \frac{m^2 N_x}{\pi^2 a^2 D} \right)} \quad (7.38)$$

olarak belirlenmiştir. Burkulma yüküne ulaşılınca deplasmanların sonsuza ulaşması için (7.38) denkleminde paydanın sıfır olması dolayısıyla;

$$\left(\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 - \frac{m^2 N_x}{\pi^2 a^2 D} \right) = 0 \quad (7.39)$$

olması gerekmektedir. (7.39) denkleminin düzenlenmesiyle (7.39) denklemi;

$$N_x = \frac{\pi^2 D}{a^2} \left(m + \frac{n^2 a^2}{m b^2} \right)^2 \quad (7.40)$$

halini alır. (7.40) denkleminin en küçük değeri vermesi için $n=1$ ve kare plaklarda ($a=b$) için $m=1$ olması durumunda (7.40) denklemi;

$$N_{kr} = \frac{4\pi^2 D}{a^2} \quad (7.41)$$

olarak belirlenmiştir. Plâğın her iki doğrultuda düzlemiçi kuvvetlerine (N_x, N_y) maruz kalması durumunda (7.38) denklemi;

$$a_{mn} = \frac{4Q \sin\left(\frac{m\pi\xi}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi\eta}{b}\right)}{abD\pi^4 \left(\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 - \frac{m^2 N_x}{\pi^2 a^2 D} - \frac{n^2 N_y}{\pi^2 b^2 D} \right)} \quad (7.42)$$

halini alır. N_x ve N_y kuvvetlerinin kritik değeri (7.42) denkleminin paydasının sıfır olması şartından;

$$\frac{m^2 (N_x)_{kr}}{\pi^2 a^2 D} + \frac{n^2 (N_y)_{kr}}{\pi^2 b^2 D} = \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \quad (7.43)$$

olmak üzere; ortalama düzlemine tesir eden üniform basınca maruz bir kare plak halinde $a=b$ ve $N_x = N_y = p$ dir. Buna göre (7.43) denkleminden;

$$p = \frac{\pi^2 D}{a^2} (m^2 + n^2)_{\min} \quad (7.44)$$

bulunur. p' nin kritik değeri $m=n=1$ alınarak;

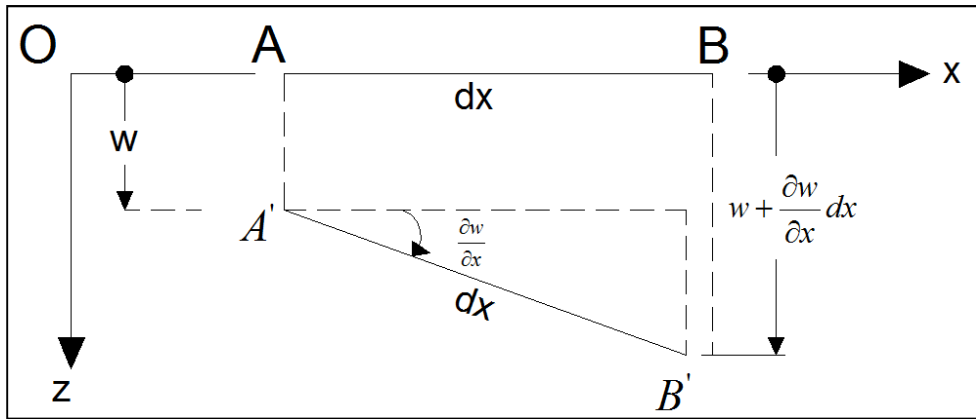
$$P_{kr} = \frac{2\pi^2 D}{a^2} \quad (7.45)$$

olarak elde edilir.

7.3 Büyük yerdeğiştirme kabulü altında tabakalı kompozit plakların geometrik nonlinear analizi

Bölüm 7.2 de anlatılan başlangıçta düzlemiçi kesit zorları bilinen sistemlerde düzleme dik yerdeğiştirmelerin düzlem içi geometrik süreklilik koşullarını etkilemeyecek kadar küçük olduğu varsayımına dayanarak düzlemiçi kesit zorlarının (N_x, N_y, N_{xy}) eğilmeden etkilenmediği kabul edilmiştir.

Büyük yerdeğiştirme kabulü altında ise düzleme dik kuvvetler altında ortalama yüzeyin eğilmesi sonucu, sınır şartlarına bağlı olarak (düzlemiçi yerdeğiştirmenin tutulu olması hali) düzlemiçi kuvvetler (N_x, N_y, N_{xy}) ortaya çıkabilir.



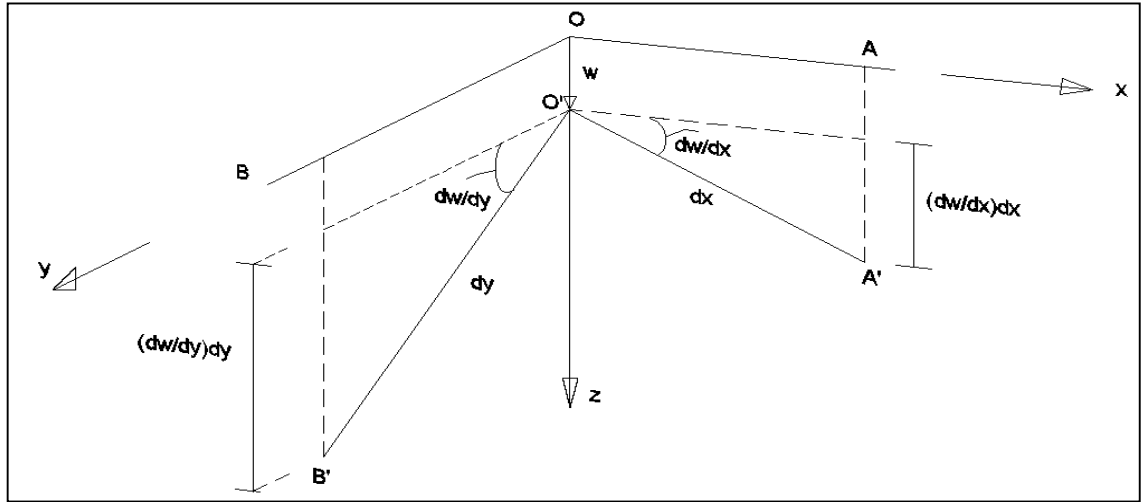
Şekil 7.11 : Plagın eğilmesi sonucu x doğrultusunda oluşan kısalma (ϵ_x).

Şekil 7.11’de görüldüğü üzere plak lineer elemanı AB eğilme sonrası orjinal boyu dx korunarak $A'B'$ konumuna gelerek; yeni konumun yatay izdüşümü;

$$\left(dx^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx \right)^2 \right)^{1/2} = dx - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + \dots \quad (7.46)$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (7.47)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad (7.48)$$



Şekil 7.12 : Plağın eğilmesi sonucu oluşan düzlemiçi kayma şekildeğiştirmesi (γ_{xy}).

$$l_1 = \frac{\left(dx^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx\right)^2\right)^{1/2}}{dx} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \quad ; \quad m_1 = 0 \quad ; \quad n_1 = \frac{\frac{\partial w}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (7.49)$$

$$l_2 = 0 ; \quad m_2 \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 ; \quad n_2 = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (7.50)$$

olacaktır. Kayma şekildeğiştirmesi (γ_{xy}) bir dik açının diklikten sapması olarak tarif edilir ve küçük açılar için radyan cinsinden açı ile sinüsünün aynı olacağı kabulü yapılırsa;

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \widehat{A'O'B'} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \widehat{A'O'B'}\right) = \cos(\widehat{A'O'B'}) = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 \quad (7.51)$$

yazılabilir. (7.49) ve (7.50) denklemleri (7.51) denkleminde yerine konulup düzenlenirse eğilmeden meydana gelen kayma şekildeğiştirmesi (γ_{xy});

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (7.52)$$

olarak bulunur. Lateral (yanal) yük ve düzlemiçi kuvvetlere maruz plakta meydana gelecek toplam düzlemiçi şekildeğiştirmeler;

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (7.53)$$

olarak belirlenir. Plağın düzlemiçi hareketinin tutulu olması sonucu (7.47), (7.48) ve (7.52) denklemlerinde bulunan şekildeğiştirmeler plakta düzlemiçi gerilmelere neden olacaktır. Gerilme şekildeğiştirme arasındaki ilişki yazılacak olursa;

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{16}} \\ \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{26}} \\ \overline{Q_{16}} & \overline{Q_{26}} & \overline{Q_{66}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{16}} \\ \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{26}} \\ \overline{Q_{16}} & \overline{Q_{26}} & \overline{Q_{66}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (7.54)$$

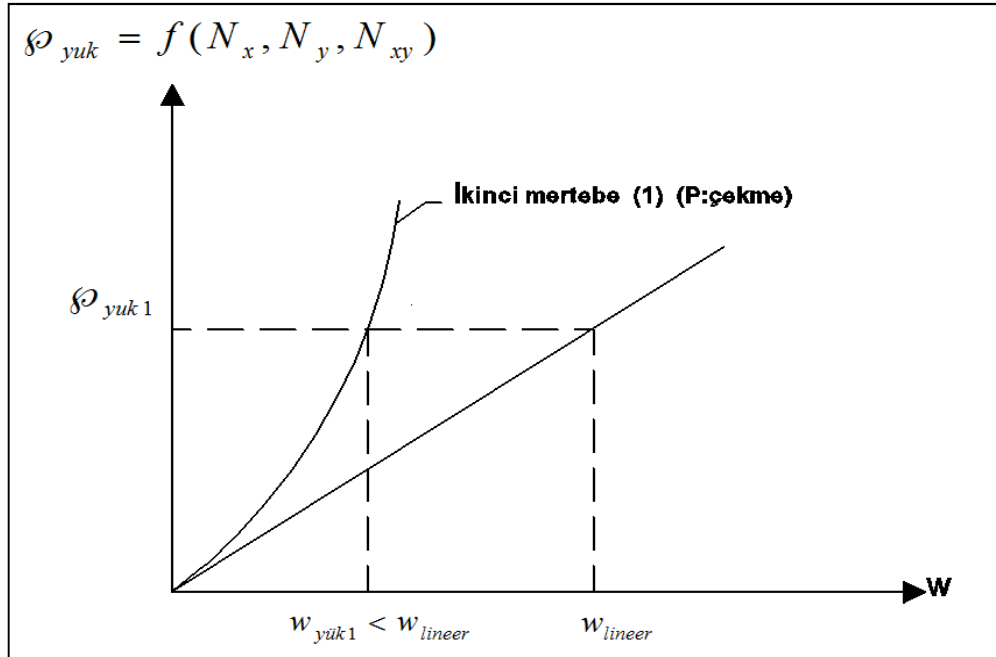
olmak üzere (7.72) denkleminde oluşan lineer ve nonlinear gerilmeler ayrıştırılarak yazılırsa; lineer düzlemiçi gerilme matrisi (ENDM);

$$\text{ENDM} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_{\text{Lin}} = \begin{bmatrix} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{16}} \\ \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{26}} \\ \overline{Q_{16}} & \overline{Q_{26}} & \overline{Q_{66}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_{\text{Lin}} = \begin{bmatrix} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{16}} \\ \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{26}} \\ \overline{Q_{16}} & \overline{Q_{26}} & \overline{Q_{66}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (7.55)$$

nonlinear gerilme matrisi ENDK ise;

$$\text{ENDK} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_{\text{NL}} = \begin{bmatrix} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{16}} \\ \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{26}} \\ \overline{Q_{16}} & \overline{Q_{26}} & \overline{Q_{66}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_{\text{NL}} = \begin{bmatrix} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{16}} \\ \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{26}} \\ \overline{Q_{16}} & \overline{Q_{26}} & \overline{Q_{66}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (7.56)$$

şeklindedir. (7.74) denkleminde düzlemiçi gerilmelerin, dolayısıyla oluşan düzlemiçi kuvvetlerin (N_x, N_y, N_{xy}) başlangıçta dış yük olarak verilen düzlemiçi kuvvetler olarak sabit kalmadığı eğilme sonucunda her adımda değiştiği görülmektedir. Plağın başlangıçta herhangi bir düzlemiçi kuvvete maruz bırakılmasa dahi düzleme dik (lateral) yük altındaki eğilme sırasında düzlemiçi doğrultuda kısalma isteyeceği ama düzlemiçi yerdeğiştirmenin sınırlarda tutulması halinde bu hususun gerçekleşemeyip düzlemiçi çekme kuvvetlerinin doğacağı (7.56) denkleminde görülmektedir.

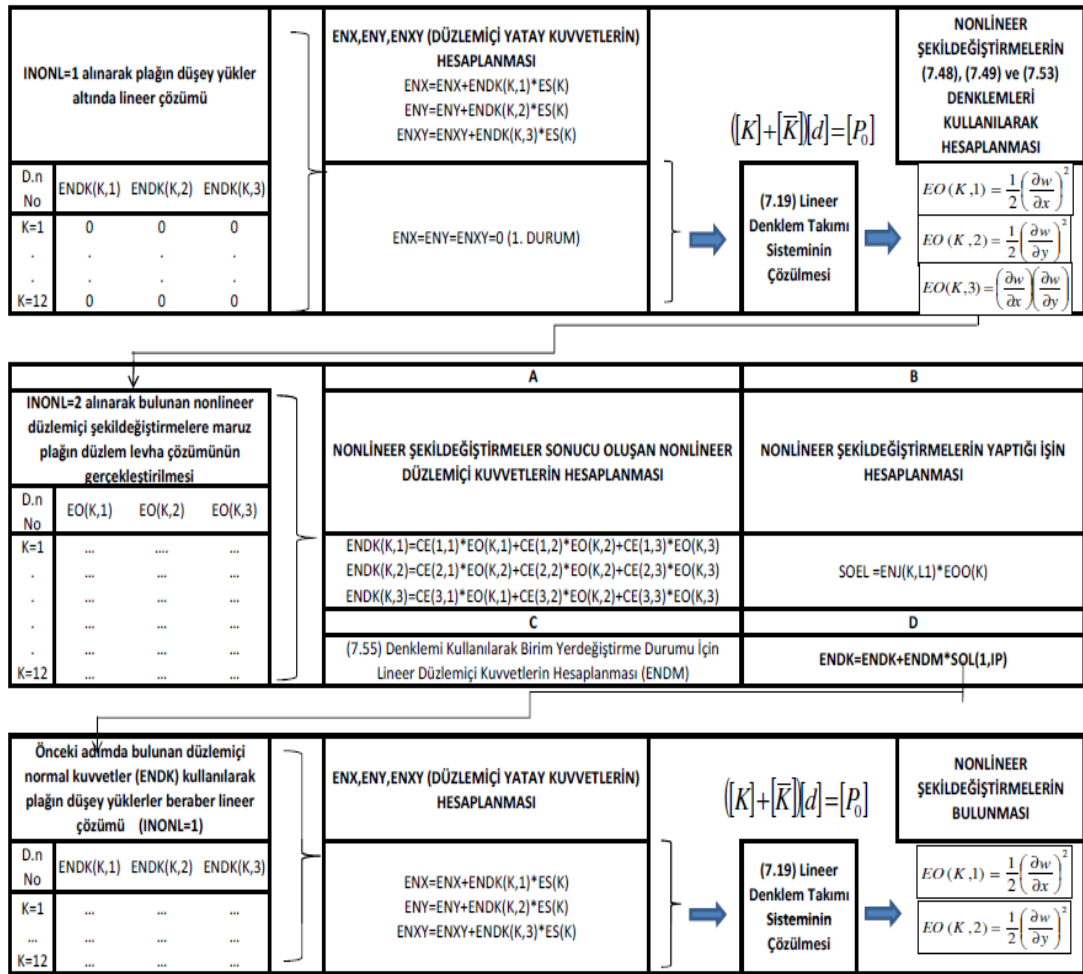


Şekil 7.13 : Düzlemiçi çekme kuvvetlerinin doğması sonucu plağın pekleşmesi.

Şekil 7.13'den görüleceği üzere eğilmeden dolayı meydana gelen düzlemiçi çekme kuvvetleri sonucunda plak belli bir yük parametresi altında lineer durumda oluşacak deplasman (w) değerlerinden daha düşük değerlere sahip olmakta; bir başka deyişle plak pekleşme özelliği göstermektedir.

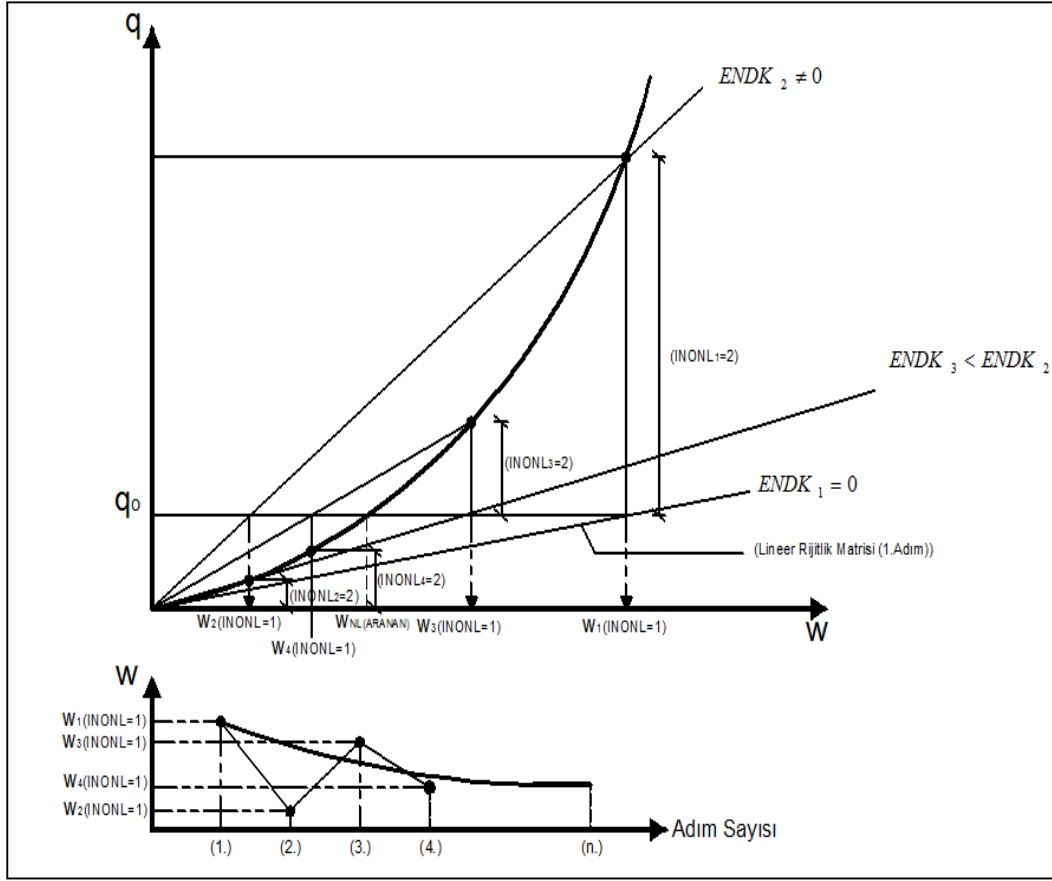
Genson programında Şekil 7.14’de görüleceği üzere; plak nonlinear parametresi (INONL) 1 alınarak önce düşey yükler altında plağın lineer statik analizi gerçekleştirilmekte; meydana gelen düzleme dik yerdeğiştirmeler (w) ve bu yerdeğiştirmelerden doğan nonlinear düzlemiçi şekildeğiştirmeler (7.47), (7.48) ve (7.52) denklemleri kullanılarak bulunmaktadır. Sonrasında; INONL parametresi 2 alınarak bir önceki adımda bulunan nonlinear düzlemiçi şekildeğiştirmeler bilgi girişinde okunmakta; bu nonlinear düzlemiçi şekildeğiştirmelerden oluşacak nonlinear düzlemiçi kuvvet matrisi (ENDK) (7.56) denklemi yardımıyla hesaplanmakta ve bu şekildeğiştirmeler altında plağın düzlem levha çözümü yapılarak (nonlinear şekildeğiştirmelerin lineer gerilmelerle yaptıkları işin dış yük matrisi SOEL olarak alınmasıyla); yerdeğiştirme matrisi SOL(1,IP) elde edilmektedir. SOL(1,IP) matrisinin birim yerdeğiştirme durumu için hesaplanan lineer düzlemiçi kuvvet matrisi (ENDM) ile çarpımına başlangıçta hesaplanan nonlinear düzlemiçi kuvvet matrisinin (ENDK) eklenmesiyle; nonlinear düzlemiçi şekildeğiştirmelere maruz plakta oluşacak düzlemiçi kuvvetler de bu sayede elde edilmiş olmaktadır.

Üçüncü adımda ise; bir önceki adımda bulunan düzlemiçi kuvvetlerin (ENDK) data olarak okunmasıyla; düşey yük ve düzlemiçi kuvvetlere maruz plağın ikinci mertebe hesabı (7.22) denklemi kullanılarak çözülmekte ve bulunan düzleme dik yerdeğiştirmelerden (w), düzlemiçi nonlinear şekildeğiştirmeler elde edilmekte ve bu şekildeğiştirmelerin birinci adımda bulunan şekildeğiştirmelere yeterince yakınsaması durumunda analiz sonlandırılmakta; aksi durumda üçüncü adımda bulunan nonlinear şekildeğiştirmeler kullanılarak INONL=2 parametresi altında düzlem levha çözümü tekrarlanmakta ve bu ardışık yaklaşım nonlinear şekildeğiştirmelerin birbirine yeter derecede eşitlenmesine kadar sürdürülmektedir.



Şekil 7.14 : Genson programı geometrik nonlineer analiz akış şeması.

Şekil 7.15’de ise geometrik nonlineer analizin grafik üzerinde işleyişi görülmektedir. Şekil 7.15’de gösterilen q(Düşey yük parametresi) – w (Düşey deplasman) grafiğinde; birinci adım olan düzlemiçi kuvvetlerin bulunmadığı lineer analiz durumuna ait $ENDK_1$ doğrusu ile üçüncü duruma ait $ENDK_2$ doğruları karşılaştırıldığında; $ENDK_2$ doğrusunun eğiminin arttığı bir başka deyişle çözülecek olan plak sisteminin rijitliğinin arttığı gözükmemektedir. Üçüncü durumda meydana gelen bu rijitlik artışına plak üzerindeki düşey yüklerle beraber ikinci adım sonucunda hesaplanan düzlemiçi kuvvetlerin de dikkate alınmasından kaynaklandığı açıktır. Şekil 7.15’de görüldüğü üzere q düşey yük parametresi altındaki plağın aranan nonlineer düşey yerdeğiştirmesine Şekil 7.14’de anlatılan akış şeması ile giderek yaklaşılarak elde edilebileceği görülmektedir.



Şekil 7.15 : Geometrik nonlinear analizin grafik üzerinde gösterimi.

7.3.1 Tek Doğrultuda Çalışan (Silindirik Eğilmeli) Plakların (Eksenel Kuvvetin Çekme Olması Hali) İkinci Mertebe Hesabı

[38]'de; eksenel kuvvetin çekme olması halinde, Bölüm 7.2.3 dekine benzer hesaplar sonunda; diferansiyel denklemin genel çözümü;

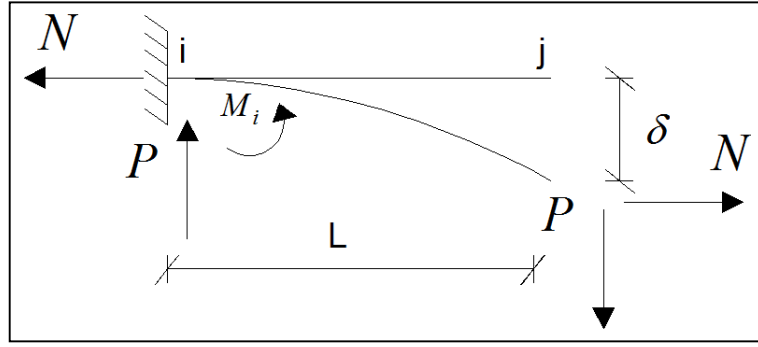
$$v = A \operatorname{sh}(\bar{\alpha}x) + B \operatorname{ch}(\bar{\alpha}x) - \frac{M_i}{\bar{\alpha}^2 k_m} + \frac{P}{\bar{\alpha}^2 k_m} x \quad (7.57)$$

olmak üzere yerdeğiştirmelerin birinci ve ikinci türevleri ise;

$$v' = A \bar{\alpha} \operatorname{ch}(\bar{\alpha}x) + B \operatorname{sh}(\bar{\alpha}x) + \frac{P}{\bar{\alpha}^2 k_m} \quad (7.58)$$

$$v'' = A \bar{\alpha}^2 \operatorname{sh}(\bar{\alpha}x) + B \bar{\alpha}^2 \operatorname{ch}(\bar{\alpha}x) \quad (7.59)$$

olarak verilmiştir.



Şekil 7.16 : i ucu ankastre j ucu boşta çubuğun aksenal kuvvet çekme durumu için $\overline{t}_{j\delta}$ birim deplasman sabitinin belirlenmesi.

Şekil 7.16’da görülen duruma ait sınır şartları $v(0) = 0$, $v'(0) = \frac{P}{k_t}$ ve $M(x=L)=0$ kullanılarak birim düşey yerdeğiştirme sonucu j ucunda oluşacak P kuvveti olan $\overline{t}_{j\delta}$;

$$\mu(P) = \left(\frac{1}{\overline{\alpha}^3 \overline{k}_m} - \frac{1}{\overline{\alpha} \overline{k}_t} \right) \overline{k}_m \overline{\alpha}^2 \frac{\text{Sh}(\overline{\alpha} L)}{\text{Ch}(\overline{\alpha} L)} \quad (7.60)$$

olmak üzere;

$$\overline{t}_{j\delta} = P = \frac{\overline{\alpha}^2 \overline{k}_m}{L - \mu(P)} \quad (7.61)$$

olarak verilmiştir [38].

8. GENSON BİLGİSAYAR PROGRAMI

Bu çalışmada, tabakalı kompozit plakların geliştirilen sonlu elemanlarla lineer statik ve geometrik nonlinear statik analizlerinin yapılabilmesi amacıyla Saygun, A. (1989) tarafından hazırlanmış, FORTRAN 77 programlama dilinin kullanıldığı GENSON isimli bilgisayar programının geliştirilmesi yoluna gidilmiştir. Bu amaçla GENSON bilgisayar programına ELFIN 19 isimli bir alt program yazılmış; ayrıca ana programın alt rutinlerinden DENSİ 3 programında bazı düzenlemeler gerçekleştirilmiştir.

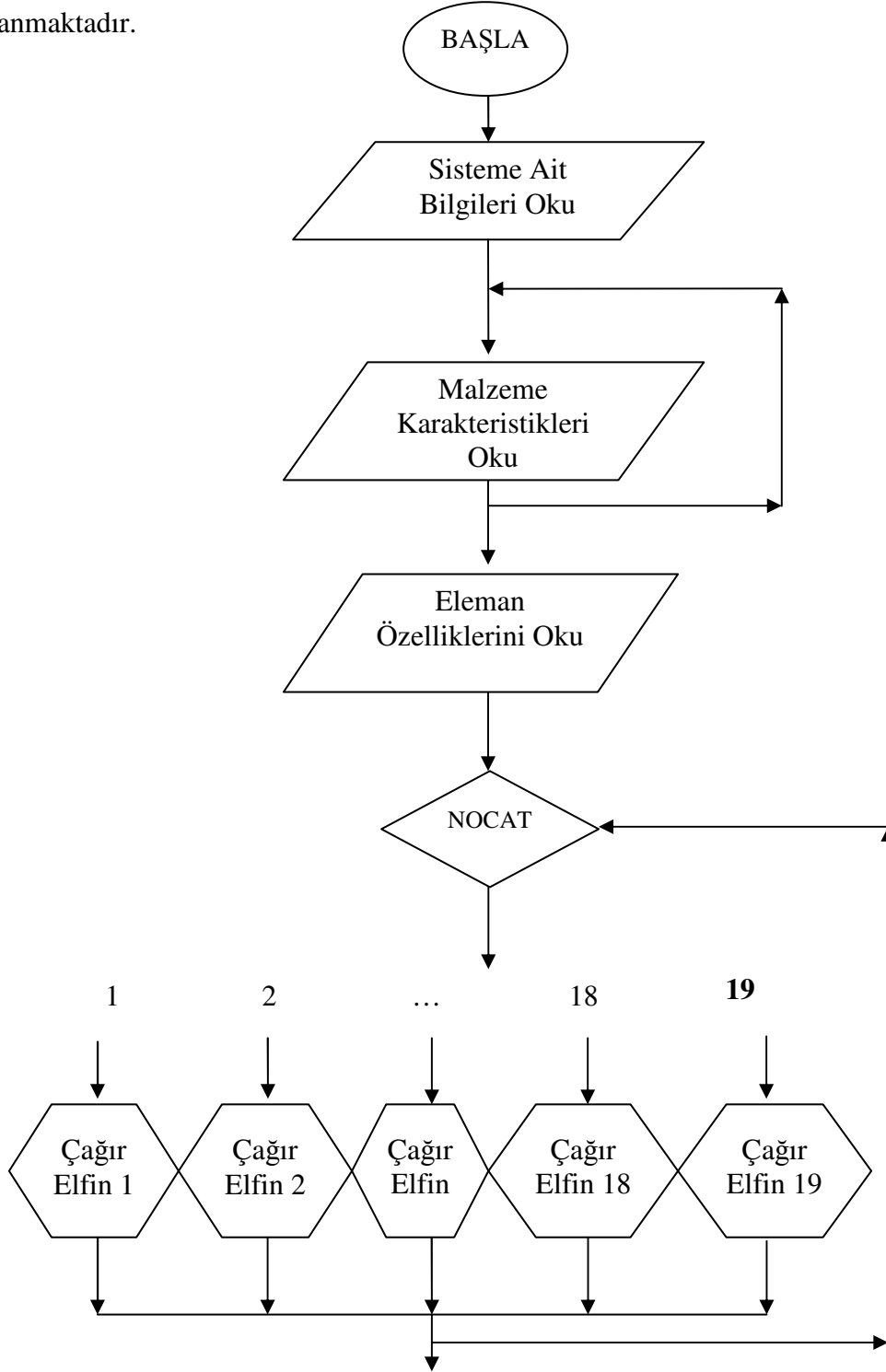
8.1 Programın Yapısı ve Çalışma Düzeni

GENSON bilgisayar programı sisteme ait bilgileri okuyan bir ana program, herbir eleman tipi için eleman matrislerini hesaplayan alt programlar ve sistemin bütünü için rijitlik ve yükleme matrislerini kuran, sınır şartları ve düğüm noktalarına etkiyen tekil yükleri okuyup denklem takımını çözen ve düğüm noktalarının serbestlik değerlerine bağlı olarak elemanlarda kesit zorlarını hesaplayan ardışık üç alt programdan oluşmaktadır. Bu bölümde ana program ve alt programların basitleştirilmiş akış diyagramları verilip, yaptığı işler kısaca açıklanacaktır.

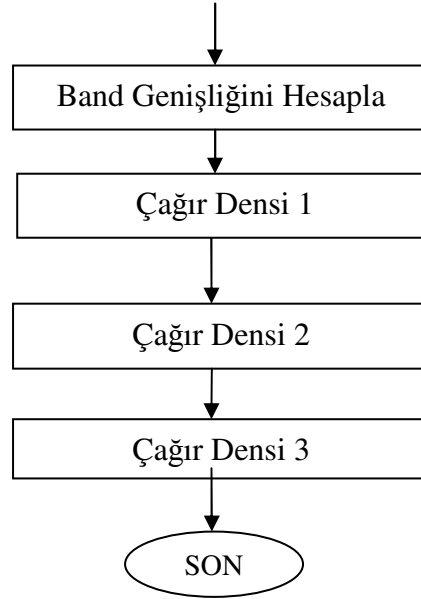
ANA PROGRAM: Akış diyagramı Şekil 8.1’de verilen ve sisteme ait bilgileri okuyarak başlayan bu programda sistemi oluşturan elemanların farklı elastik özellikli malzemeden oluşmasına izin verilmektedir. Bu malzemelerin sayısı ve elastik özelliklerinin sayısı ve değerleri okunur. Sistemde düğüm noktalarının serbestliklerinin sayısı da farklı olabilmekte, bu takdirde her düğüm noktasındaki bilinmeyen sayısı okutulmaktadır. Daha sonra sistemdeki eleman sayısı kadar tekrarlanan bir çevrime gidilerek, her elemanın türünü belirleyen katalog numarası, farklı boyut (IEL), yük (IELY) veya malzeme karakteristiğine (MATNO) bağlı olarak verilen tip numarası ve düğüm noktası numaraları okutulmaktadır. Eleman tip numarası yeni ise elemanın katalog numarasına göre sonlu eleman alt programlarına dallanarak eleman matrisleri

hesaplanmaktadır; tip numarası daha önceki bir elemanın aynı ise o elemanın benzeri olduğu anlaşılıp gereksiz hesap tekrarı yapılmamaktadır.

Çevrimden sonra ana programda son olarak elemanların düğüm noktaları numaraları ve serbestlik derecelerine bağlı olarak sistem rijitlik matrisinin bant genişliği hesaplanmaktadır.



Şekil 8.1 : Ana program akış diyagramı



Şekil 8.1 (devam) : Ana program akış diyagramı.

ELFIN19 Alt Programı : Akış diyagramı Şekil 8.2’de verilen altprogramda; 12 düğüm noktalı, maksimum 15 tabaka ($L_{say}=15$) ve bir düğüm noktasında 63 ($4 \times L_{say} + 3$) kadar serbestliğe sahip; tabakalı plakların lineer veya geometrik nonlinear statik analizine yönelik eleman matrisleri oluşturulmaktadır. Lineer statik veya geometrik nonlinear statik analizlerinden hangisinin işleneceğini belirleyen anahtar değişken $INONL$ olup; $INONL$ değerinin sıfır olması durumunda çözüm için bir ardışık yaklaşım yapılmayarak lineer statik analiz gerçekleştirileceği anlaşılmakta ve eleman rijitlik ile gerilme matrisleri hesaplanmaktadır. Bu durumda Şekil 8.2’de verilmiş akış diyagramında yalnız sarı ile boyalı kutular icra edilecektir. Bunun için öncelikle elemanı oluşturan her bir tabakada tabaka kalınlığı ve fiber açısı okunup, malzeme özellikleri de dikkate alınarak global eksen doğrultusundaki bünye matrisi (gerilme-şekildeğiştirme matrisi) oluşturulur. Eleman rijitlik matrisi hesabı için ζ ve η doğrultularında alınacak Gauss integral noktası sayıları ve eleman düğüm noktalarının global eksen takımındaki x, y koordinatları okunarak, nokta sayısı kadar bir çevrimle her bir integral noktasında şekil fonksiyonları ve türevleri, Jacobien matrisi determinantı ve inversi bulunup her bir serbestlik için bu noktalardaki global eksen takımı doğrultusundaki şekildeğiştirmeler ve gerilmeler elde edilip, eleman rijitlik matrisi terimlerine bu integral noktalarından gelen katkılar hesaplanır.

Eleman gerilme matrisinin hesabında ise her bir düğüm noktasında şekil fonksiyonları ve türevlerinin değerleri, Jacobien matrisi, determinantı ve inversi bulunup, her bir serbestlik için bu noktalardaki global eksen takımı doğrultusundaki

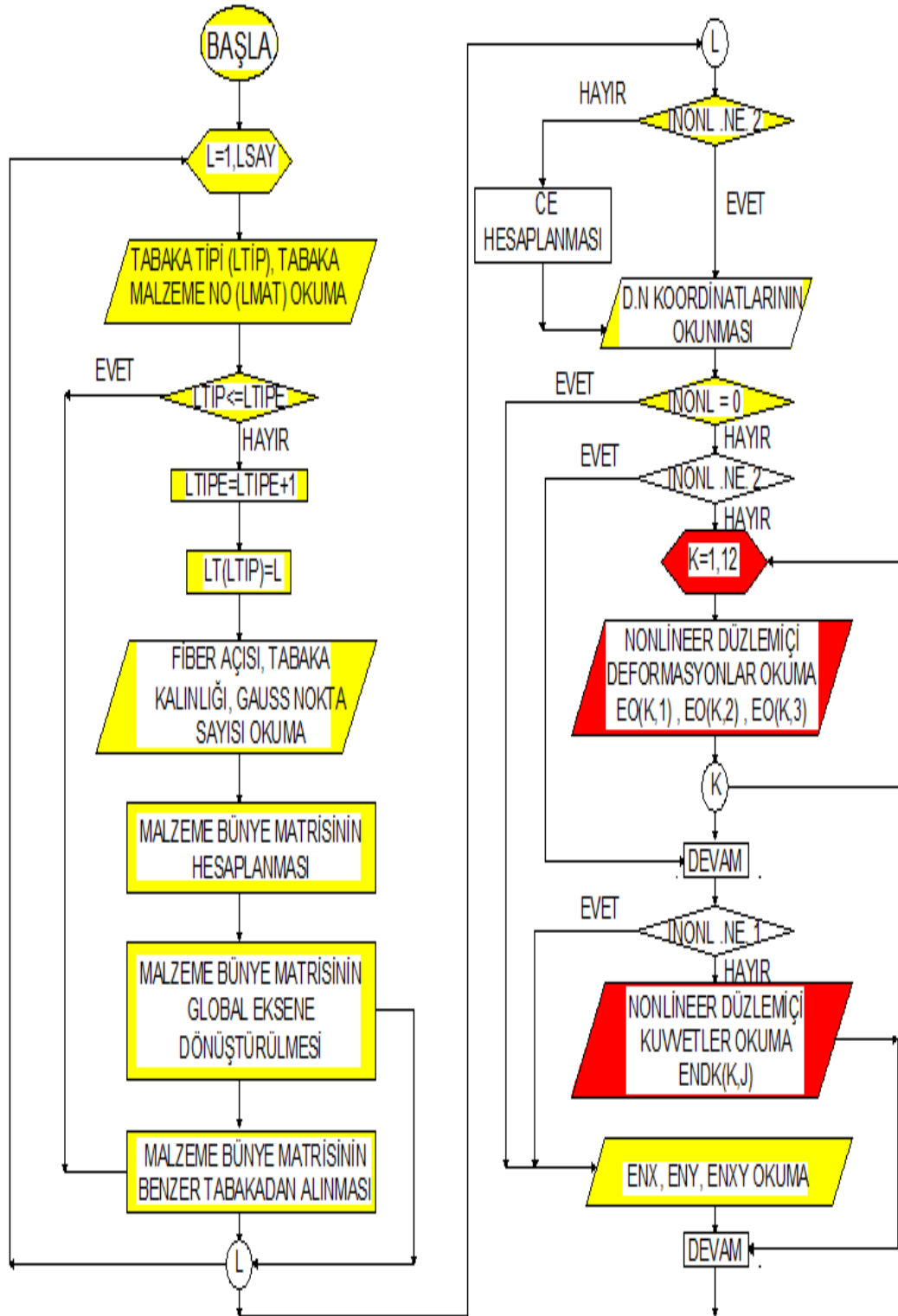
şekildeğiştirmeler ve bunların malzeme bünye matrisleri ile çarpılmasıyla gerilmeler elde edilmektedir. Programda çıkış bilgisi hacmini sınırlı tutmak için eleman gerilme matrisi elemanın bütün düğüm noktalarında değil yalnız köşe noktalarında gerilmeler hesaplanacak şekilde oluşturulmuştur.

INONL=0 halinde lineer statik hesap yanında ayrıca sabit, düzlemiçi N_x , N_y ve N_{xy} kesit zorları okutulabilmekte; eleman rijitlik matrisi, bu kesit zorlarının düzlemine dik doğrultudaki ikinci mertebe etkilerini de dikkate alarak oluşturulmakta ve sonrasında diske oluşturulan eleman rijitlik ve gerilme matrisleri diske yüklenerek alt program sonlandırılmaktadır.

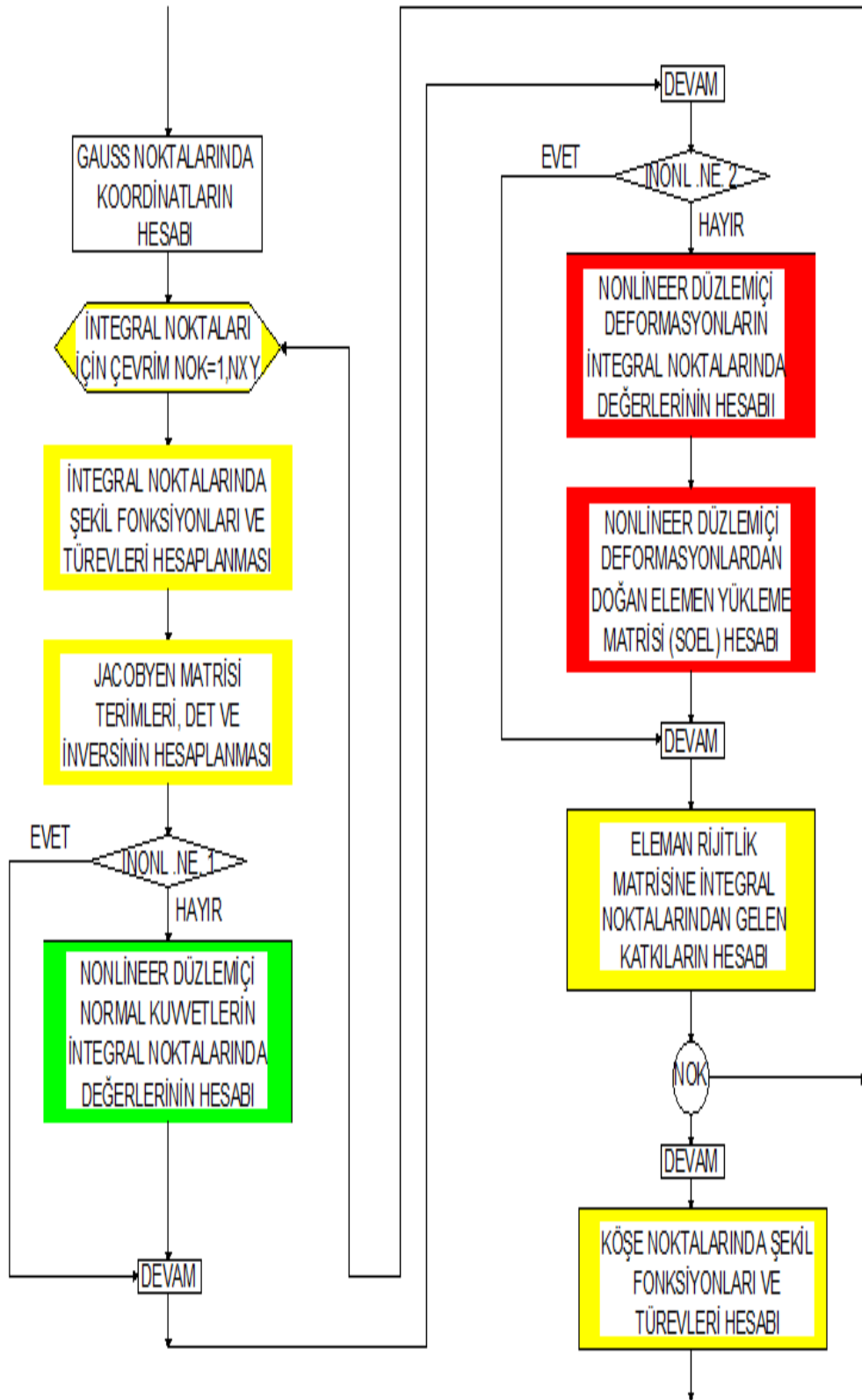
Geometrik nonlinear analiz yapılmak istendiğinde bir ardışık yaklaşım zorunda olup, dönüşümlü olarak anahtar değişken INONL'ye 1 ve 2 değerleri verilmektedir. INONL=1 alınarak sistemin hesabında amaç, gerek düzlemine dik yükleri, gerek düzlem içi kN/m olarak N_x , N_y ve N_{xy} kesit zorları yayılışı belli bir sistemin ikinci mertebe hesabını yapıp sistemin her noktasında $w(x,y)$ çökme yüzeyi ve $\epsilon_{x0} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$, $\epsilon_{y0} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2$, $\epsilon_{xy0} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)$ lineer olmayan deformasyon bileşenlerini belirlemektir. Bu bakımdan INONL=1 alınarak Elfin 19 alt programı icra edildiğinde, alt programın giriş bilgisi olarak ayrıca elemanın düğüm noktalarındaki N_x , N_y , N_{xy} kesit zorları okutulmakta, bu kesit zorlarının eleman içinde yayılışının şekil fonksiyonları ile belirlendiği kabulü yapılarak bunların Gauss integral noktalarında aldığı değerler hesaplanıp bu değerlerle düzleme dik doğrultudaki ikinci mertebe etkilerinin eleman rijitlik matrisine katkıları dikkate alınmaktadır.

INONL sıfırdan farklı ise eleman rijitlik ve gerilme matrisleri diske yüklendikten sonra alt program devam eder. Düğüm noktalarında şekil fonksiyonları ve türevleri, Jacobien matrisi, determinantı ve inversi ile şekil fonksiyonlarının x,y global eksenlerdeki türevleri bulunur. INONL=1 halinde bunlar yardımıyla biri $\frac{\partial w}{\partial x}$ hesabı için WDX(12,12); diğeri $\frac{\partial w}{\partial y}$ hesabı için WDY(12,12) iki tane matris oluşturulur ve diske yüklenir. Bu matrisler elemanda düğüm noktalarının dönmelerini, düğüm noktaları çökmeleri cinsinden ifade etmeye yarayan matrislerdir. Örneğin WDX(i,j) terimi; j düğüm noktasının birim çökmesi nedeniyle i düğüm noktasında oluşacak $\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i$ dönmeyi göstermektedir.

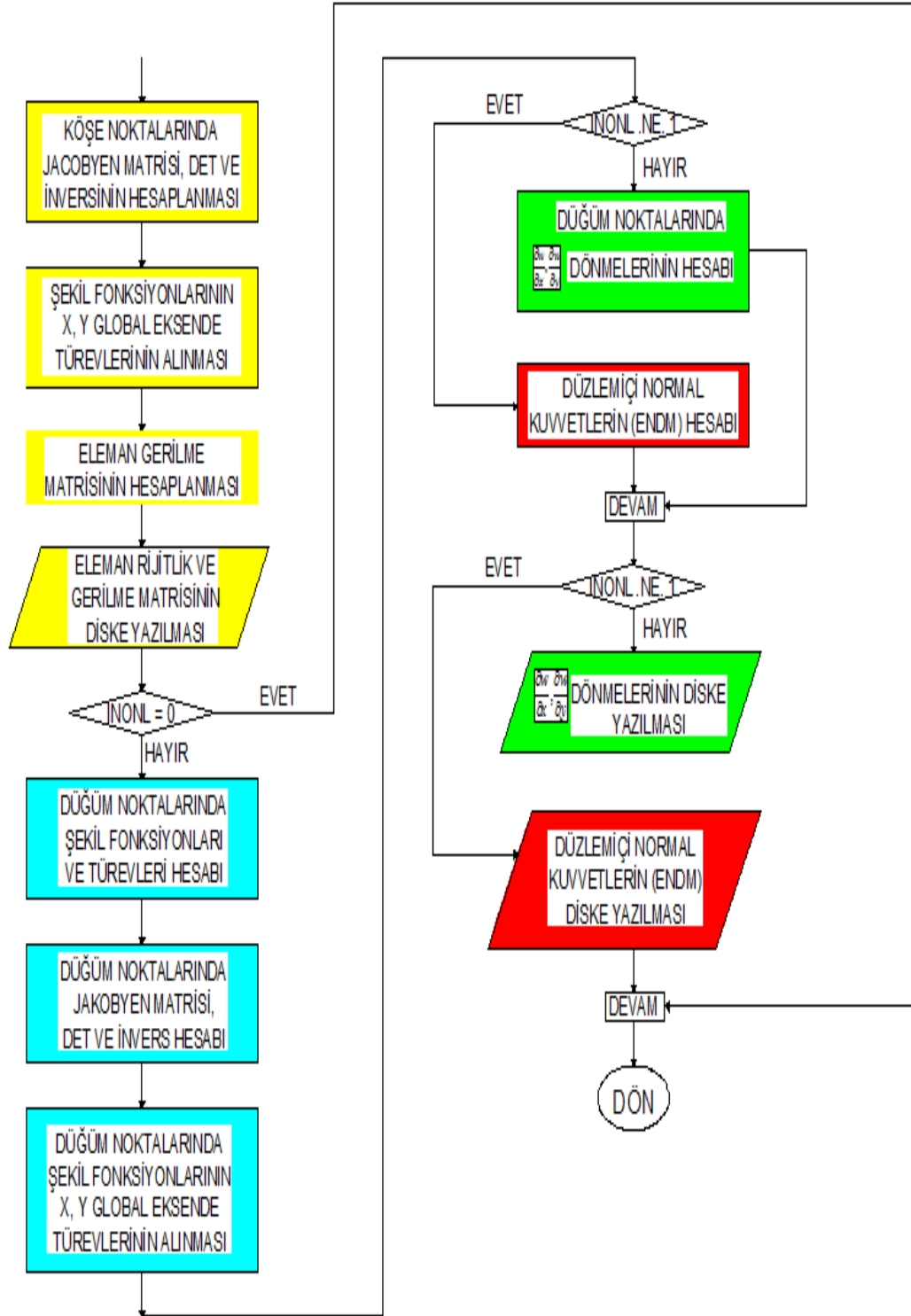
INONL=2 alınarak hesapta amaç, sistemin her noktasında $\epsilon_{xo} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$, $\epsilon_{yo} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2$, $\epsilon_{xyo} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)$ lineerlik dışı ön şekildeğiştirme bileşenleri nedeniyle, tabakalı kompozit levha sistemin, kenarlarındaki düzlem içindeki yüklemeye karşı gelen sınır şartları da dikkate alınarak çözümün yapılması ve sistemin her noktasında öncelikle kN/m olarak N_x , N_y , N_{xy} bileşke kesit zorlarının ve bunun yanında kesit yüksekliği boyunca tabakalarda oluşan σ_x , σ_y , τ_{xy} gerilmelerinin bulunmasıdır. Bu bakımdan INONL=2 alınarak Elfin 19 alt programı icra edildiğinde, alt programın giriş bilgisi olarak standart giriş bilgilerine ilave olarak eleman düğüm noktalarındaki ϵ_{xo} , ϵ_{yo} , ϵ_{xyo} değerleri okunmakta, bu değerlerin eleman içinde yayılışının şekil fonksiyonları ile belirlendiği kabulü yapılarak bunların Gauss integral noktalarında aldığı değerler hesaplanıp, Bölüm 7 de açıklanan şekilde, eleman serbestliklerinin birim değerlerine karşı gelen bu noktalardaki σ_x , σ_y , τ_{xy} gerilmelerinin bu değerlerle çarpımının sayısal integrasyonu yapılarak eleman yükleme matrisi (SOEL) hesaplanmakta ve diske aktarılmaktadır. Elfin 19 alt programının sonunda; serbestlik dereceleri tayin edildikten sonra düğüm noktalarında kesit yüksekliği boyunca σ_x , σ_y , τ_{xy} gerilmelerinin tayinine imkan veren ENDM matrisi hesaplanarak diske yüklenmektedir. Programın akış diyagramında yalnız INONL=1 iken icra edilen komutlar yeşille, yalnız INONL=2 iken icra edilen komutlar kırmızı ile, her ikisi içinde ortak olarak icra edilen komutlar turkuaz renkle gösterilmiştir.



Şekil 8.2 : Elfin19 altprogramı akış diyagramı



Şekil 8.2 (devam) : Elfin19 altprogramı akış diyagramı.



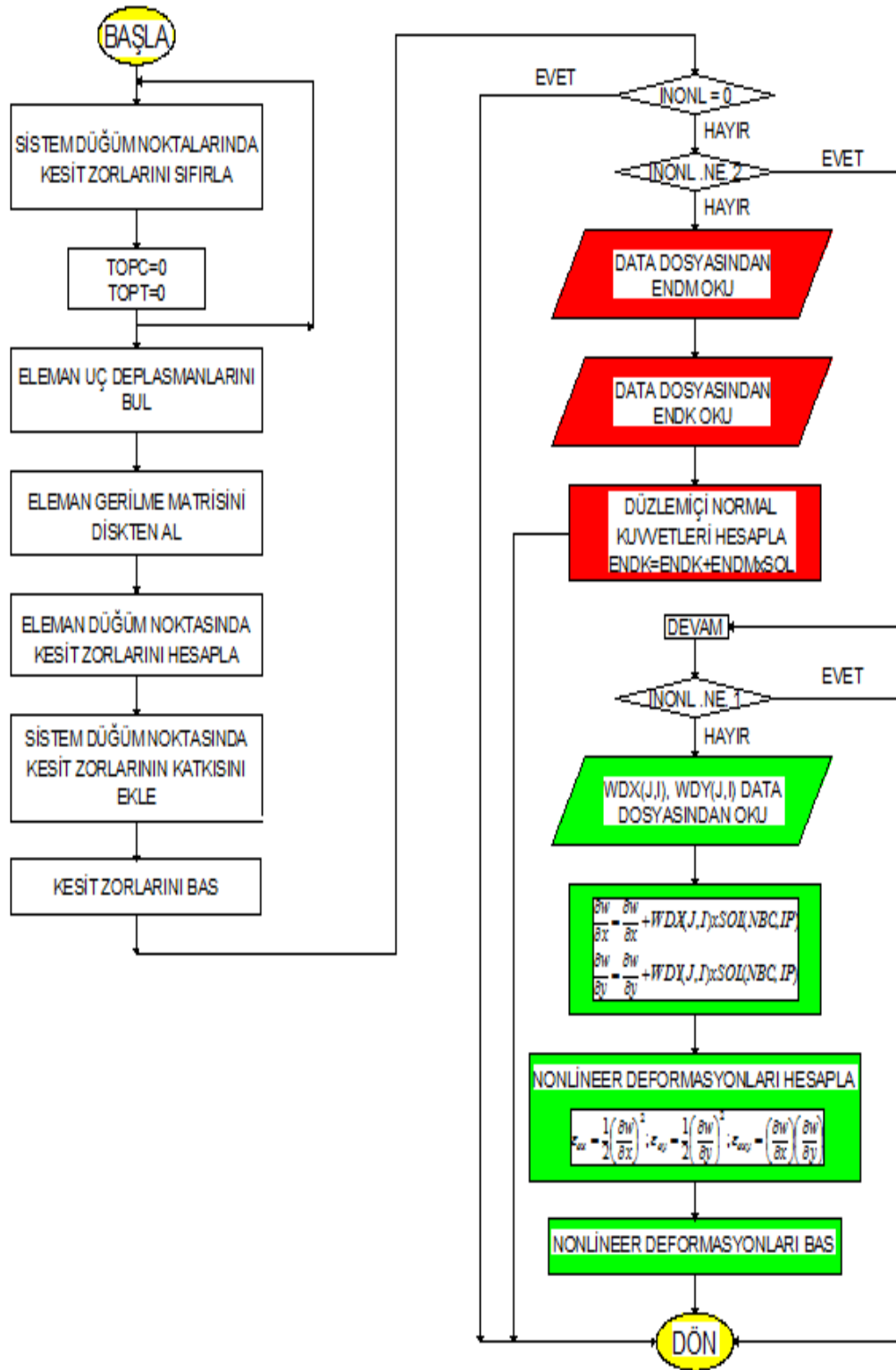
Şekil 8.2 (devam) : Elfin19 altprogramı akış diyagramı.

DENSI 1 Alt Programı: Bu alt programda Elfin 19 alt programında hesaplanmış olan eleman rijitlik ve yükleme matrisi diskten alınarak sisteme ait rijitlik ve yükleme matrisi oluşturulur. Bu alt program standart bir işlem olduğu için akış diyagramı verilmesine gerek görülmemiştir.

DENSI 2 Alt Programı: Densi1 de oluşturulan sistem rijitlik matrisine sınır şartları ve tekil dış yükler ilave edilerek Gauss indirgeme yöntemi ile sistem rijitlik matrisi çözülür ve bilinmeyen uç deplasmanları sonuç dosyasına yazılır. Bu alt program standart bir işlem olduğu için akış diyagramı verilmesine gerek görülmemiştir.

DENSI 3 Alt Programı: Akış diyagramı Şekil 8.3 'de gösterilen alt programda; her elemana ait uç deplasmanlarının bulunması ve Elfin19 alt programında hesaplanarak diske yüklenmiş olan birim uç deplasmanlarına karşı gelen eleman gerilme matrisinin(SIGEL) çağrılmasıyla; eleman köşe düğüm noktalarındaki gerilmeler tabaka kalınlığı boyunca hesaplanarak bastırılır. Geometrik nonlinear analiz anahtar değişkeni INONL=2 olması durumunda; Elfin19 alt programında düğüm noktası serbestliklerinin birim değerleri için hesaplanarak diske yüklenen ENDM matrisi çağrılıp, bulunan yerdeğiştirme matrisi(SOL) ile çarpılmasıyla; tabakalı plakta oluşacak düzlemiçi normal kuvvetler ENDK hesaplanır.

INONL=1 olması durumunda ise Elfin19 alt programında oluşturularak diske yüklenmiş, elemanda düğüm noktalarının dönmelerini, düğüm noktaları çökmeleri cinsinden ifade eden WDX(12,12) ve WDY(12,12) matrisleri çağrılarak; düğüm noktaları yerdeğiştirme matrisi SOL(NBC,IP) nin de bilinmesiyle; j. düğüm noktası dönmeleri $(\partial w / \partial x)_j = WDX(J,I) \times SOL(NBC,IP)$ ve $(\partial w / \partial y)_j = WDY(J,I) \times SOL(NBC,IP)$ hesaplanır. Son adımda; bulunan bu düğüm noktası dönmeleri kullanılarak nonlinear şekildeğiştirmeler $\epsilon_{0x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$; $\epsilon_{0y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2$ ve $\epsilon_{0xy} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)$ hesaplanıp sonuç dosyasına yazdırılmaktadır.



Şekil 8.3 : Densi3 altprogramı akış diyagramı.

8.2 Program Giriş Bilgileri

Bu bölüm; Çizelge 8.1’de görülen örnek program giriş bilgileri tablosunu oluşturan değişkenlerin açıklanmasına ayrılmış olup; sırasıyla bu değişkenler;

- NBEL :** Sistemdeki eleman sayısı.
- NBCACH :** Sistemdeki farklı yükleme durumları sayısı.
- NMAT :** Sistemdeki farklı malzeme cinsi sayısı.
- NZEM :** Sistemdeki farklı zemin cinsi sayısı.
- NBNOK :** Sistemdeki düğüm noktası sayısı.
- IFDESE :** Düğüm noktalarındaki serbestlik derecelerini gösteren anahtar değişken olup sifıra eşitse her düğüm noktasında serbestlik derecesi farklı olduğunu gösterir; eğer sıfırdan farklı bir sayı ise düğüm noktalarının tümünde serbestlik derecesi aynı ve bu sayıdır.
- LSAY :** Tabaka sayısı.
- INONL :** Geometrik nonlinear statik analiz için anahtar değişken olup; sıfır olması durumunda lineer statik analiz gerçekleştirilir. INONL=1 alınması durumunda sistemin gerek düzlemine dik yükleri, gerek düzlem içi N_x , N_y ve N_{xy} kesit zorları yayılımı altında ikinci mertebe hesabı yapılarak her noktadaki $w(x,y)$ çökme yüzeyi ve $\epsilon_{xo} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$, $\epsilon_{yo} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2$, $\epsilon_{xyo} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)$ lineer olmayan deformasyon bileşenleri bulunur. INONL=2 alınması durumunda ise; sistemin her noktasında $\epsilon_{xo} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$, $\epsilon_{yo} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2$, $\epsilon_{xyo} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)$ lineerlik dışı ön şekildeğiştirme bileşenlerinin giriş bilgisi olarak verilmesiyle, tabakalı kompozit levha sistemin, kenarlarındaki düzlem içindeki yüklemeye karşı gelen sınır şartları da dikkate alınarak çözümü gerçekleştirilir ve sistemin her noktasında bu nonlinear şekildeğiştirmelerden doğacak N_x , N_y , N_{xy} bileşke kesit zorları ve kesit yüksekliği boyunca tabakalarda oluşacak σ_x , σ_y , τ_{xy} gerilmelerinin bulunur.
- IYUKP :** Düşey yük parametresi değeri olup verilen düşey yükler bu parametre ile çarpılarak büyütülebilmektedir.
- NPM :** Malzeme özellikleri sayısı.
- ESMA(1,1)** Boyuna doğrultuda elastisite modülü (E_1)
- ESMA(2,1)** Enine doğrultuda elastisite modülü (E_2)
- ESMA(3,1)** Kayma modülleri ($G_{12} = G_{13}$)
- ESMA(4,1)** Kayma modülü (G_{23})

ESMA(5,1) Poisson oranı (v_{12})

NOCAT : Eleman katalog numarası olup tez kapsamında geliştirilen tabaka duyarlı sonlu eleman kullanılmak isteniyorsa; Elfin 19 altprogramının çağırılması için 19 değeri girilir.

IEL : Eleman tip numarası olup; benzer eleman önceden kullanılmışsa yeni elemanda tekrarı gerektiren işlemlerin yapılmasından kaçınmayı sağlar.

IELY : Eleman yük tipi numarası olup benzer yükleme önceden gerçekleştirilmişse tekrardan kaçınılmayı sağlar.

NNLE : Eleman düğüm noktası sayısı olup Elfin 19 alt programındaki elemanlar 12 düğüm noktasından oluşmaktadır.

MATNO : Eleman malzeme numarası olup daha önce tanımlanmış malzemelerden biri verilecek değerle elemana atanır.

NUNOEL: Eleman düğüm noktası numaraları 14I5 formatında girilir.

LTIP : Tabaka tipi olup benzer tabaka tipinin önceden girilmesi durumunda yeniden tabakaya ait fiber açısı, kalınlığı gibi özelliklerin girilmesinden kaçınmayı sağlar.

TETADER:Tabakadaki fiberlerin global x eksenine yaptığı açı olup derece cinsinden girilir.

H(L) : L. tabakanın kalınlığı girilir.

NGAUSS: Gauss örnek nokta sayısı olup; 44 girilmesi durumunda 4x4 örnek nokta seçildiği anlaşılır.

XK(I), YK(I) : Eleman düğüm noktasının I=1'den 12 ye kadar olmak üzere 8E10.3 formatında önce X sonra Y koordinatları okutulur.

ENDK(I,1) : I. düğüm noktasındaki nonlinear düzlemiçi normal kuvvetin $N_x(I)$ girilmesi (INONL=1 durumunda girilir.)

ENDK(I,2) : I. düğüm noktasındaki nonlinear düzlemiçi normal kuvvetin $N_y(I)$ girilmesi (INONL=1 durumunda girilir.)

ENDK(I,3) : I. düğüm noktasındaki nonlinear düzlemiçi normal kuvvetin $N_{xy}(I)$ girilmesi (INONL=1 durumunda girilir.)

EO(I,1) : I. düğüm noktasındaki nonlinear düzlemiçi şekildeğiştirme $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_I}{\partial x} \right)^2$ girilmesi (INONL=2 durumunda girilir.)

- EO(I,2)** : I. düğüm noktasındaki nonlinear düzlemiçi şekildeğiştirme $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_I}{\partial y} \right)^2$ girilmesi (INONL=2 durumunda girilir.)
- EO(I,3)** : I. düğüm noktasındaki nonlinear düzlemiçi şekildeğiştirme $\left(\frac{\partial w_I}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_I}{\partial y} \right)$ girilmesi (INONL=2 durumunda girilir.)
- NSINIR** : Sınır şartı okunacak düğüm noktası sayısı.
- NOD** : Düğüm noktası numarası.
- NOCOD(I)** : İlgili düğüm noktası numarasındaki I. serbestlik doğrultusunda hareketin engellenmesinin belirtilmesi olup eğer 1 ise tutulu; 0 ise serbest olduğu programa bildirilir.
- NYUK** : Yük okunacak düğüm noktası sayısı.
- PYUK(L)** : $L=4*LSAY+3$ olmak üzere düşey serbestlik doğrultusunda uygulanacak yük değerinin girilmesi.

Çizelge 8.1 : Program giriş bilgileri.

1	NBEL (Eleman Sayısı)	NBCACH (Yükleme Durumu Sayısı)	NMAT (Malzeme Cinsi Sayısı)	NZEM	NBNOK (Sistemdeki Düğüm Noktası Sayısı)	IMP	IFDESE	LSAY (Tabaka Sayısı)	INONL (Nonlineer Durum)	IYUKP (Yük Paremetresi)
	4	1	1	0	33	0	11	2	2	1000
2	NPM (Malzeme Özellikleri Sayısı)	ESMA(1,1) E ₁	ESMA(2,1) E ₂	ESMA(3,1) G _{xy} = G _{xz}	ESMA(4,1) G _{yz}	ESMA(5,1) v _{xy}	(Malzeme özellikleri)			
	5	40x10 ⁶	10 ⁶	6x10 ⁵	5x10 ⁵	0.25				
3	NOCAT (Eleman Katalog Numarası)	IEL	IELY	NNLE (Eleman D.n Sayısı)	MATNO (Eleman Malzeme Numarası)	NUART (Eleman D.n No Artış)	(Eleman katalog no)			
	19	1	1	12	1	0				
4	NUNOEL(1,1)	NUNOEL(1,2)			NUNOEL(1,12)	(Eleman Düğüm Noktası Numaraları I=1,12)				
	1	2	3	4	17					
5	LTIP (Tabaka Tipi)									
	1									
6	TETADER (Fiberlerin global x ekseniyle yaptığı açı-derece)	H(L) L. Tabaka Kalınlığı	NGAUSS (Gauss örnek nokta sayısı)							
	0.00	0.150	44							
7	XK(1) 1. D.n X koordinatı	XK(2) 2. D.n X koordinatı				XK(8) 8. D.n X Koordinatı	(Eleman Düğüm Noktası Koordinatlarının Okunması)			
	XK(9)	XK(10)		XK(12)	YK(1)	YK(12)				

Çizelge 8.2 (devam) : Program giriş bilgileri.

8 (INONL değerine göre girilecek datanın farklılaşması)	EĞER INONL = 0	ENX	ENY	ENXY		Açıklamalar 1-) ENX,ENY,ENXY düzlemiçi normal kuvvetler 2-) ENDK Nonlinear Düzlemiçi Normal Kuvvetler 3-) $EO(I,1)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_I}{\partial x}\right)^2$ $EO(I,2)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_I}{\partial y}\right)^2$ $EO(I,3)=\left(\frac{\partial w_I}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w_I}{\partial y}\right)$ Nonlinear Düzlemiçi Şekildeğiştirmeler
						
	EĞER INONL = 1	ENDK(1,1)	ENDK(1,2)	ENDK(1,3)		
						
		ENDK(2,1)	ENDK(2,2)	ENDK(2,3)		
		.	.	.		
		ENDK(12,1)	ENDK(12,2)	ENDK(12,3)		
	EĞER INONL = 2					
		EO(1,1)	EO(1,2)	EO(1,3)		
						
		EO(2,1)	EO(2,2)	EO(2,3)		
		.	.	.		
		EO(12,1)	EO(12,2)	EO(12,3)		
						
		ENX	ENY	ENXY		
0	0	0				
9	NSINIR (Sınır Şartı Okunacak D.n Sayısı)					
	24					
10	NOD (D.n Numarası)	NOCOD(1) 1. Serbestlik Doğrulsunda Tutulma(1 veya 0)	NOCOD(2) 2. Serbestlik Doğrulsunda Tutulma(1 veya 0)	-----	-----	NOCOD(35) 35. Serbestlik Doğrulsunda Tutulma(1 veya 0)
	1	1	1	1	1	0
	2	1	1	1	0	1

Çizelge 8.3 (devam) : Program giriş bilgileri.

11	NYUK (Yük Okunacak D.n Sayısı)
	1
12	NOD (D.n Numarası)
	5
13	PYUK(L) L=4LSAY+3 olmak üzere Düşey serbestlik doğrultusunda uygulanacak yük değeri
	-1.125

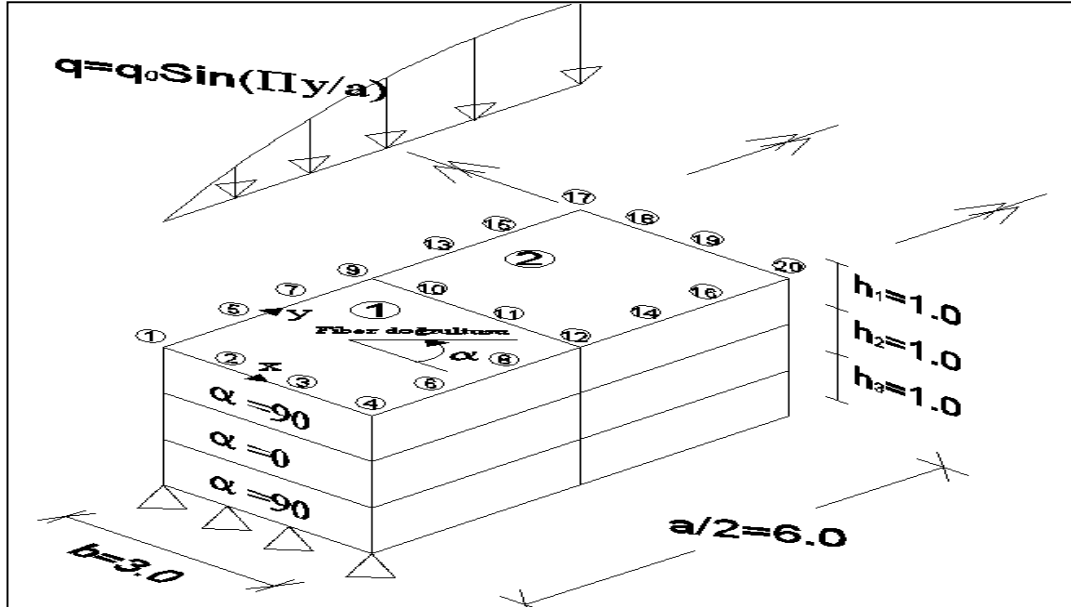
9. SAYISAL ÖRNEKLER

9.1 Giriş

Bu bölümde; literatürde analitik çözümleri bulunan ve daha önceki bölümlerde açıklanan teorilere dayalı bu çözümlerin; tez kapsamında geliştirilen tabaka duyarlı sonlu eleman çözümleri ile karşılaştırılmasına yer verilmiştir.

9.2 Geliştirilen Sonlu Eleman ile Sinüzoidal Yük Etkisinde Üç Tabakalı [0/90/0] Basit Mesnetli Kompozit Plak Silindirik Eğilme Hali (Lineer Statik Analiz)

[40]'da üç boyutlu elastisite çözümü gerçekleştirilen üç tabakalı [90/0/90]; $q = q_0 \sin(\frac{\pi y}{a})$ sinüzoidal yük etkisindeki basit mesnetli tabakalı kompozit plağın silindirik eğilme problemi için Şekil 9.1'de görüldüğü üzere; sistemin yarısı, geliştirilen tabaka duyarlı sonlu eleman ile iki parçaya bölünerek incelenmiştir.



Şekil 9.1 : Sinüzoidal yük altında üç tabakalı [90/0/90] basit mesnetli kompozit plak silindirik eğilme hali.

L ve T altindisleri sırasıyla boyuna ve enine doğrultuyu göstermek üzere elastisite (E), kayma modülleri (G) ile Poisson oranı (ν);

$$E_L = 25 \times 10^6 \text{psi} = 172250 [\text{Mpa}] \quad ; \quad E_T = 10^6 \text{psi} = 6890 [\text{Mpa}]$$

$$G_{LT} = 0.5 \times 10^6 \text{psi} = 3445 [\text{Mpa}] \quad ; \quad G_{TT} = 0.2 \times 10^6 \text{psi} = 1378 [\text{Mpa}]$$

$$\nu_{LT} = \nu_{TT} = 0.25 \quad (9.1)$$

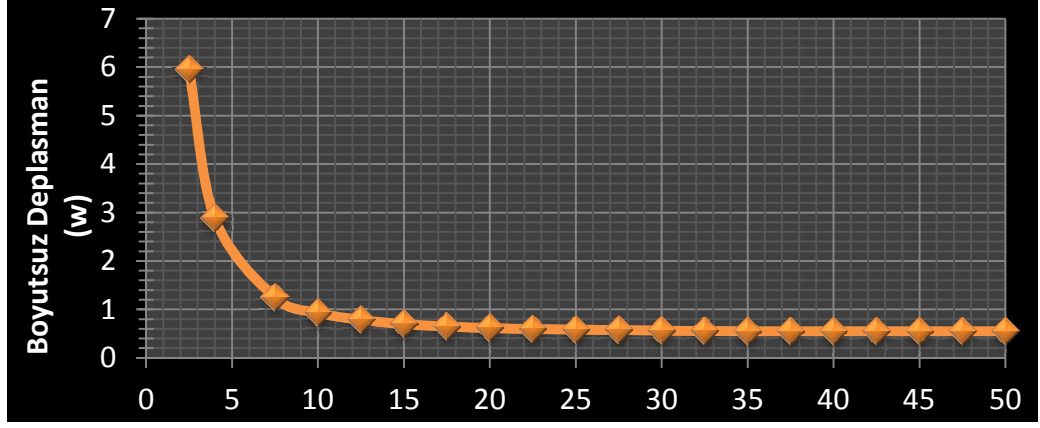
olarak alınmıştır. $\overline{\sigma}_{yy}$, $\overline{\tau}_{yz}$, $\overline{w}$ sırasıyla boyutsuz normal gerilme, kayma gerilmesi ve plak düzlemine dik yerdeğiştirme olmak üzere boyutsuzlandırma;

$$\overline{\sigma}_{yy} \left(y = \frac{a}{2}, z \right) = \frac{\sigma_{yy} \left(y = \frac{a}{2}, z \right)}{q_0} \quad (9.2)$$

$$\overline{\tau}_{yz} (y = 0, z) = \frac{\tau_{yz} (y = 0, z)}{q_0} \quad (9.3)$$

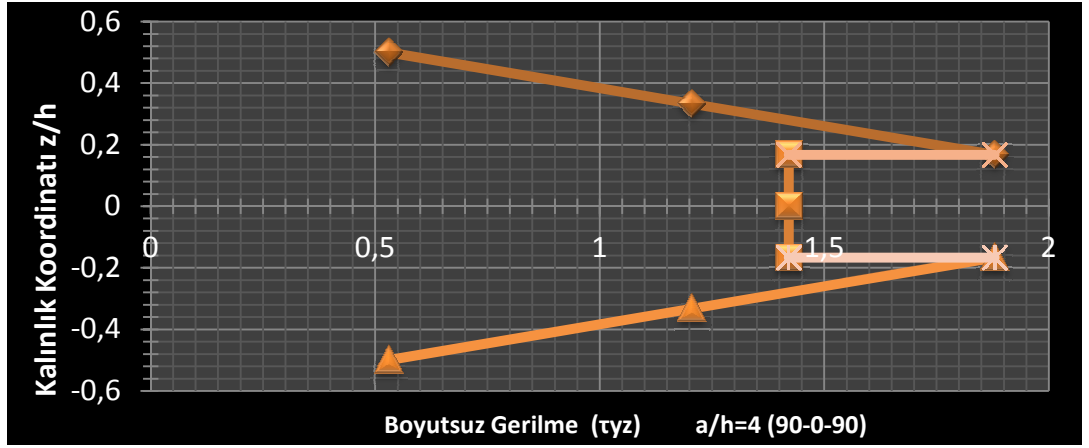
$$\overline{w} \left(y = \frac{a}{2}, z = 0 \right) = \frac{100 E_T h_T^3 w \left(y = \frac{a}{2}, z = 0 \right)}{q_0 a^4} \quad (9.4)$$

olarak tanımlanmıştır. Şekil 9.1’de düğüm noktası numaraları gözükten tabakalı kompozit plağın sınır şartları olarak; $x=0$ ve $x=b$ eksenini üzerinde x eksenini doğrultusundaki düğüm noktası yerdeğiştirmeleri $u=0$ olarak alınmış; $y=a/2$ eksenini üzerinde yer alan 17,18,19,20 no lu düğüm noktalarının y doğrultusundaki yerdeğiştirme değerleri ise simetri nedeniyle $v=0$ olarak tanımlanmıştır. 1,2,3,4 nolu düğüm noktaları ise basit mesnetlenmenin söz konusu olduğu; plak düzlemine dik yerdeğiştirme (w) nin tutulu olduğu yerlerdir. Şekil 9.2’de, geliştirilen sonlu eleman kullanılarak elde edilen; plak açıklığı (a) ; toplam tabaka kalınlığı (h_T) olmak üzere çeşitli a/h_T değerleri için boyutsuz orta nokta deplasman $\overline{w} \left(y = \frac{a}{2}, z = 0 \right)$ değerlerini gösteren grafik görülmektedir.

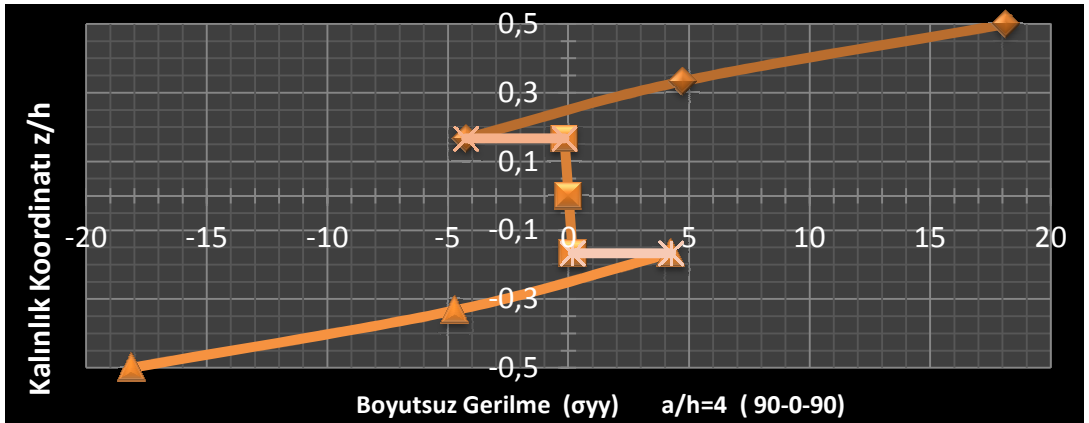


Şekil 9.2 : Çeşitli a/h değerleri için tabaka duyarlı sonlu eleman ile elde edilen boyutsuz deplasman değerleri.

Şekil 9.3 ve Şekil 9.4’de $a/h_T=12/3=4.0$ olmak üzere sırasıyla tabaka duyarlı sonlu eleman ile elde edilen boyutsuz kayma gerilmesi $\overline{\tau_{yz}}(y = 0, z)$ ve boyutsuz normal gerilme $\overline{\sigma_{yy}}\left(y = \frac{a}{2}, z\right)$ değerlerinin plak kalınlığı boyunca değişimi görülmektedir.

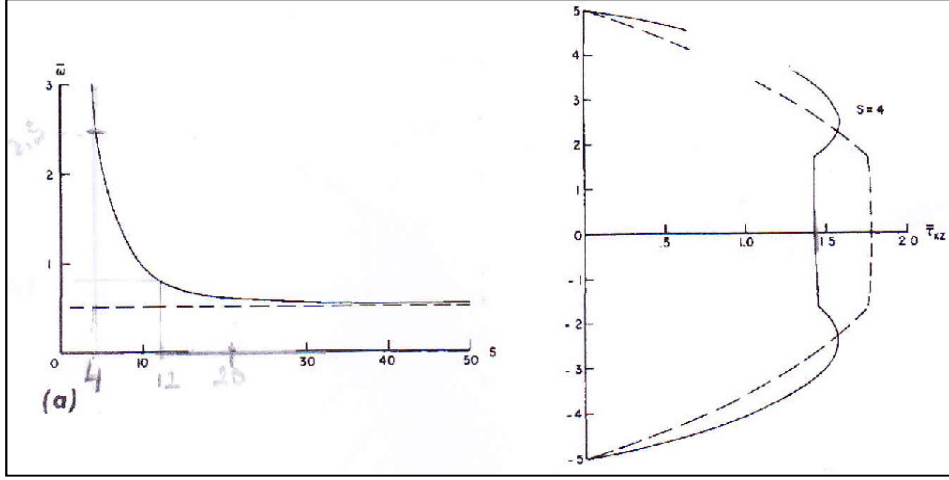


Şekil 9.3 : Tabaka duyarlı sonlu eleman ile elde edilen boyutsuz kayma gerilmesi $(\overline{\tau_{yz}})$.

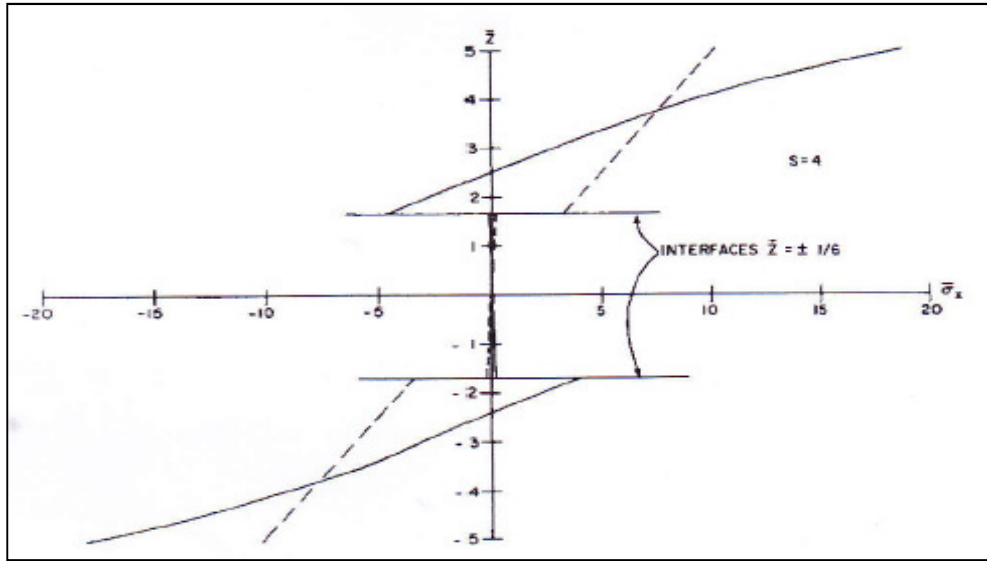


Şekil 9.4 : Tabaka duyarlı sonlu eleman ile elde edilen boyutsuz normal gerilme $(\overline{\sigma_{yy}})$.

Şekil 9.5 ve Şekil 9.6'da aynı problemin [40]'da elde edilen üç boyutlu elastisite çözümleri ile karşılaştırılmasında; geliştirilen tabaka duyarlı sonlu eleman sonuçlarının elastisite çözümü değerlerine özellikle $\bar{w}$ çökmesi ve $\bar{\sigma}_{yy}$ normal gerilmeleri bakımından çok yakın olduğu görülmektedir.



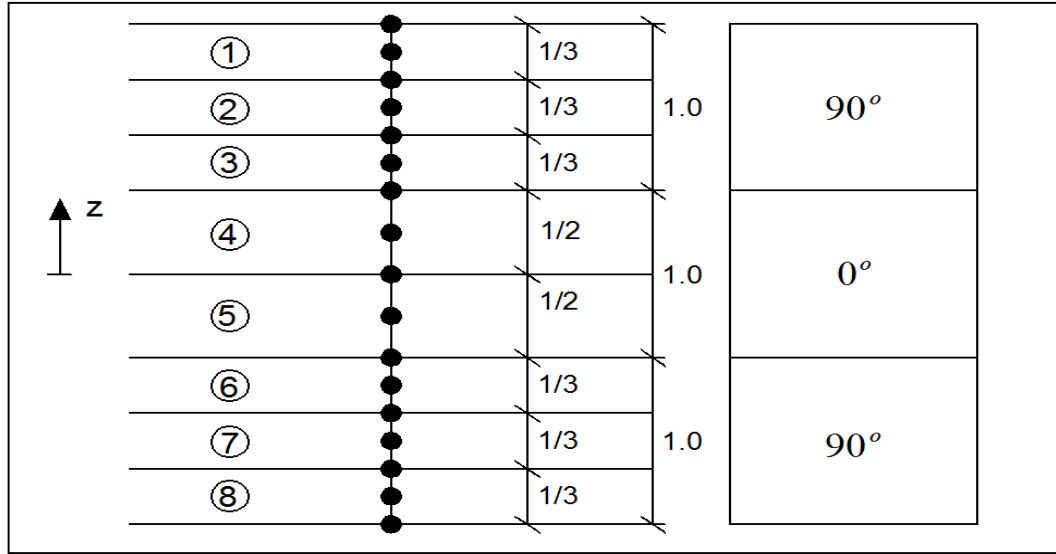
Şekil 9.5 : Pagano tarafından verilen $(a/h)=S=4$ için boyutsuzlaştırılmış çökme $\bar{w}(y = \frac{a}{2}, z = 0)$ ve kayma gerilmesi $\bar{\tau}_{yz}(y = 0, z)$ değerleri [40].



Şekil 9.6 : Pagano tarafından verilen $(a/h)=s=4$ için boyutsuzlaştırılmış normal gerilme $\bar{\sigma}_{yy}(y = \frac{a}{2}, z)$ değerinin plak kalınlığı boyunca değişimi (90/0/90) [40].

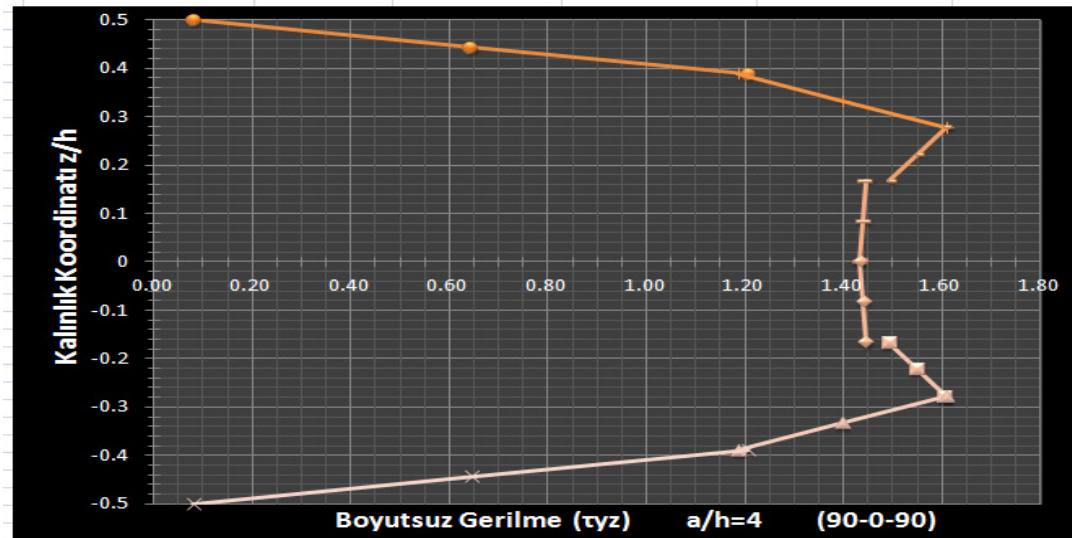
Ancak; Şekil 9.3 de görülen boyutsuz kayma gerilmesinin üst ve alt sınırlarda $\bar{\tau}_{yz}(z = \pm 0.5h) = 0$ olma koşulu ile tabakalar arası kayma gerilmelerinin birbirine eşit olma şartı $\bar{\tau}_{yz}^{(90)}(z = \pm 0.167h) = \bar{\tau}_{yz}^{(0)}(z = \pm 0.167h)$ tam sağlanmamaktadır. Boyutsuz kayma gerilmesinin z doğrultusu boyunca

değişiminindeki hassasiyeti arttırmak amacıyla Şekil 9.7’de görüldüğü üzere aynı problem 90 derece tabakalar üç; 0 derece tabaka da iki alt tabakaya ayrılmak üzere kalınlık doğrultusunda toplam 8 tabakaya bölünerek yeniden incelenmiştir.

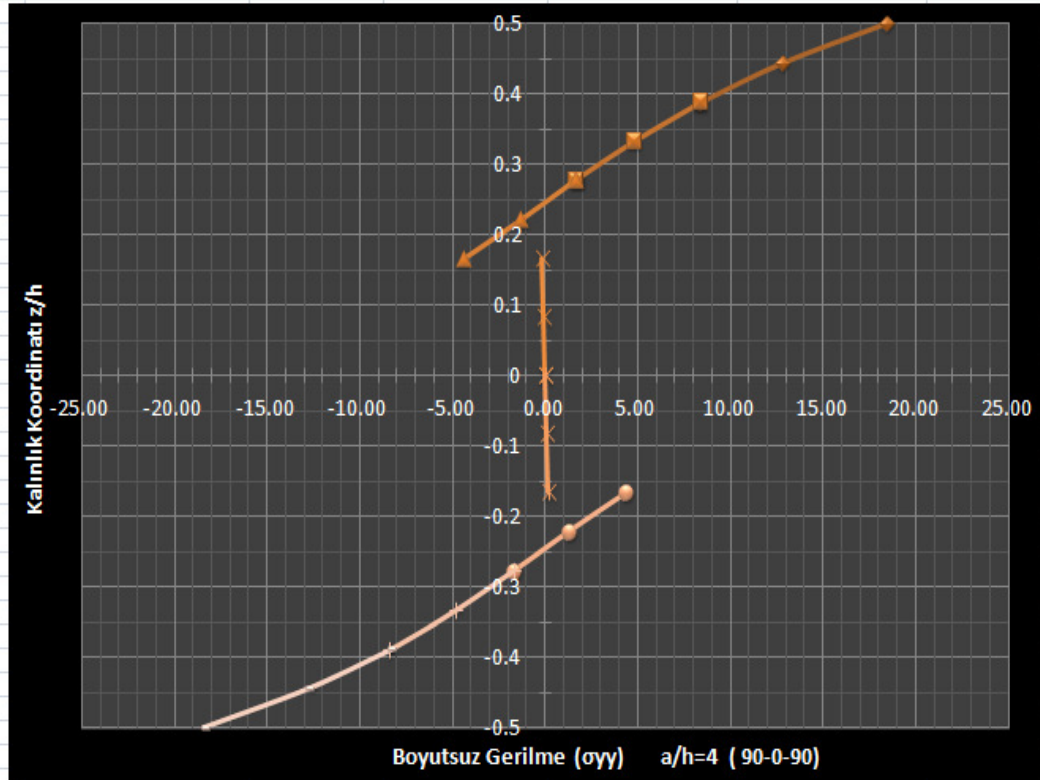


Şekil 9.7 : (90/0/90) tabakalanmanın 8 alt tabakaya ayrılması.

Şekil 9.8 ve Şekil 9.9’da sırasıyla (90/0/90) derece tabakalanmanın 8 alt tabakaya bölünerek incelenmesi sonucunda boyutsuz kayma gerilmesi ($\overline{\tau_{yz}}$) ve normal gerilme ($\overline{\sigma_{yy}}$) değerlerinin tabaka kalınlığı boyunca değişimi görülmektedir. Şekil 9.8, Şekil 9.3 ile karşılaştırıldığında tabaka kalınlığı doğrultunda daha sık tabakalanma alınmasıyla $\overline{\tau_{yz}}(z = \pm 0.5h) = 0.079964 \cong 0$ değerine yaklaştığı ve tabakalar arası kayma gerilmelerinde sıçramaların büyük ölçüde giderildiği görülmektedir.



Şekil 9.8 : Sekiz alt tabakalanma sonucu (90/0/90) tabakalı plakta boyutsuz kayma gerilmesinin ($\overline{\tau_{yz}}$) kalınlık boyunca değişimi.



Şekil 9.9 : Sekiz alt tabakalanma sonucu (90/0/90) tabakalı plakta boyutsuz normal gerilmenin ($\overline{\sigma_{yy}}$) kalınlık boyunca değişimi.

9.3 Geliştirilen Sonlu Eleman İle Üniform Yük Etkisinde Dairesel İzotrop ve Tek Tabakalı Ortotrop Plakların Lineer Statik Analizi

Geliştirilen sonlu elemanın eğrisel sınırlara sahip geometri üzerinde performansını göstermek amacıyla izotrop ve tek tabakalı ortotrop dairesel plak sonlu eleman sonuçları altıncı bölümde verilen analitik sonuçlar ile karşılaştırılmış; Şekil 9.10’da gösterilen $a = r = 6$ [m] yarıçaplı 20 elemandan oluşan tek tabakalı tam dairesel plak örneği çözülmüştür. İzotrop elemanda malzeme özellikleri;

$$E_1 = E_2 = 30 \times 10^6 \text{ (psi)} = 206700 \text{ [Mpa]} \quad (9.5)$$

$$\nu = 0.25 \quad (9.6)$$

$$G_{xy} = G_{xz} = G_{yz} = \frac{E}{2(1 + \nu_{12})} = 12 \times 10^6 \text{ (psi)} = 82680 \text{ [Mpa]} \quad (9.7)$$

olmak üzere ortotrop dairesel plakta malzeme özellikleri; fiberlerin global x eksenini ile yaptığı açının $\theta=0$ derece alınmasına bağlı olarak;

$$E_1 = E_x = 30 \times 10^6 \text{ (psi)} = 206700 \text{ [MPa]} \quad (9.8)$$

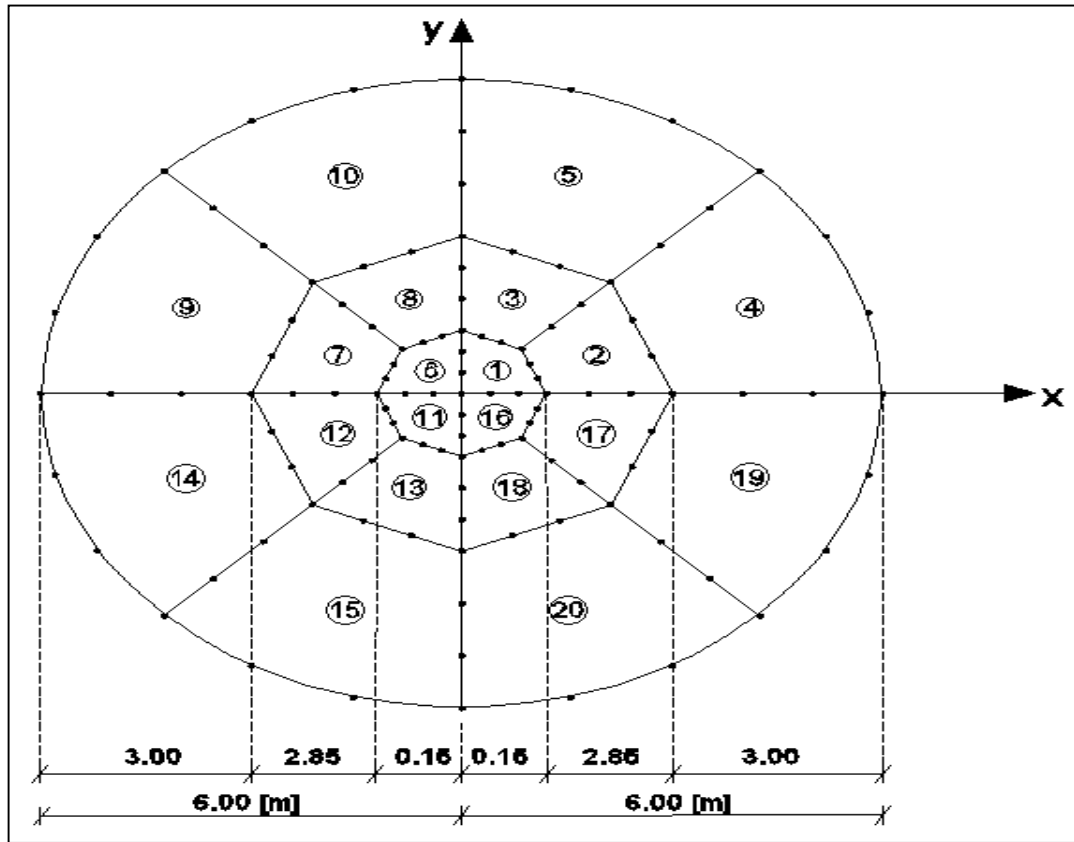
$$E_2 = E_y = 0.75 \times 10^6 \text{ (psi)} = 5167.5 \text{ [MPa]} \quad (9.9)$$

$$\nu_{12} = 0.25 \quad ; \quad \nu_{21} = \frac{E_2}{E_1} \nu_{12} = 6.25 \times 10^{-3} \quad (9.10)$$

$$G_{xy} = G_{xz} = 0.45 \times 10^6 \text{ (psi)} = 3100.5 \text{ [MPa]} \quad (9.11)$$

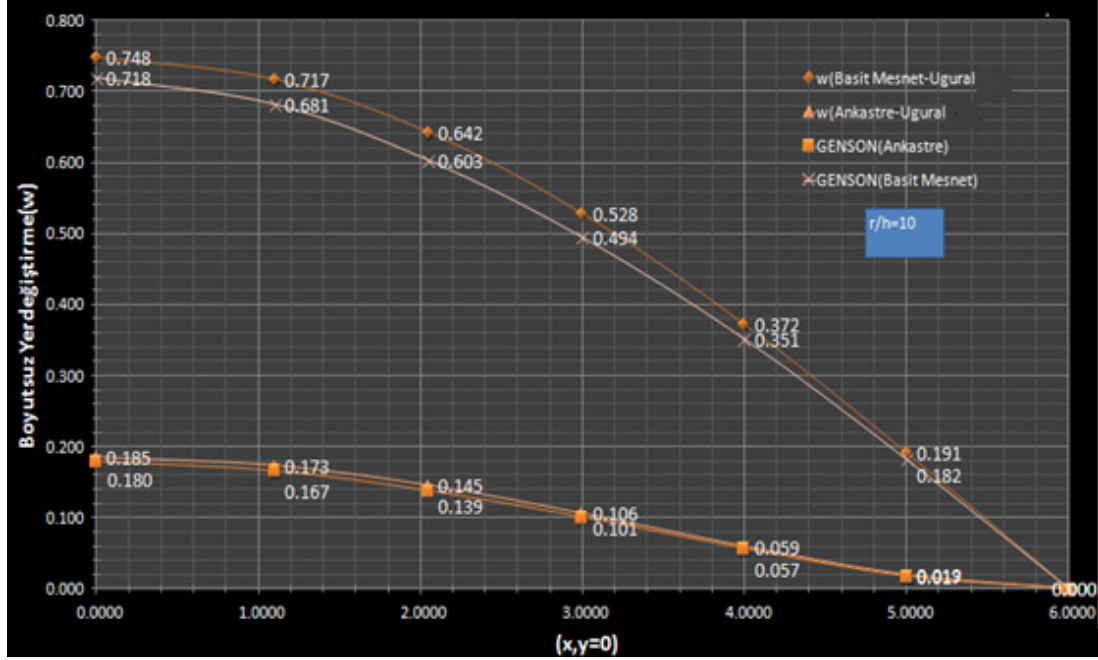
$$G_{yz} = 0.375 \times 10^6 = 2583.75 \text{ [MPa]} \quad (9.12)$$

olarak belirlenmiştir.

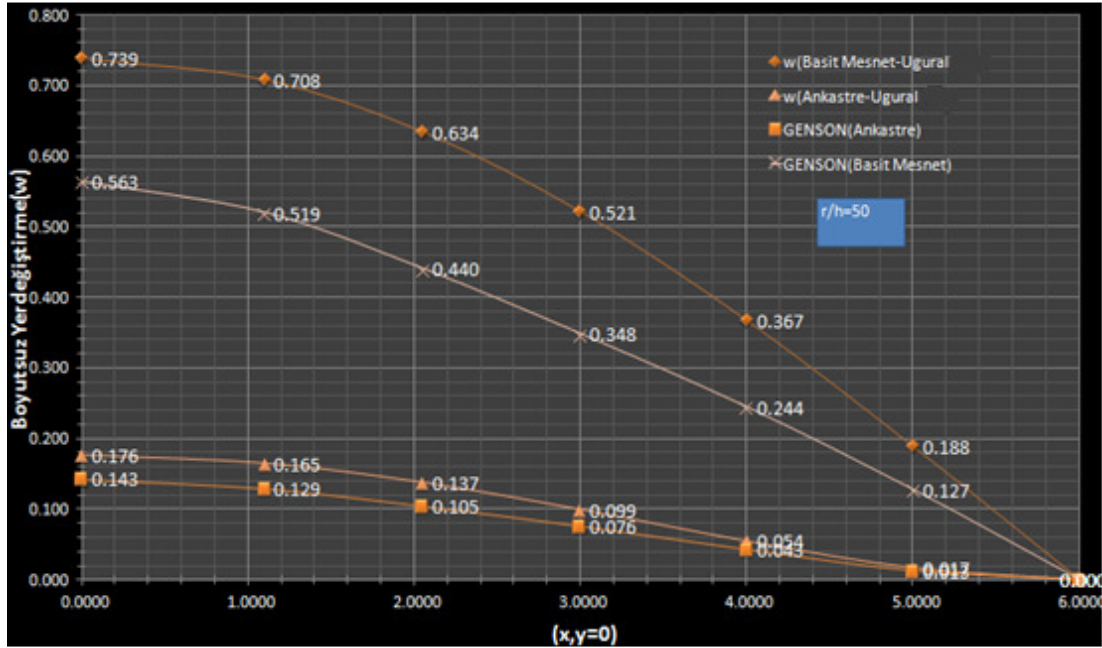


Şekil 9.10 : 20 elemandan oluşan dönel simetrik üniform yayılı yüklü izotrop ve ortotrop tek tabakalı dairesel plak örneği.

İzotrop, üniform yayılı yüklü, basit ve ankastre mesnetli durumlar için Genson programından $a/h=10$ ve $a/h=50$ için elde edilen tek tabakalı çözümler Şekil 9.11 ve Şekil 9.12’de gösterildiği üzere Bölüm 5.2’de anlatılan analitik çözümler ile karşılaştırılmıştır.

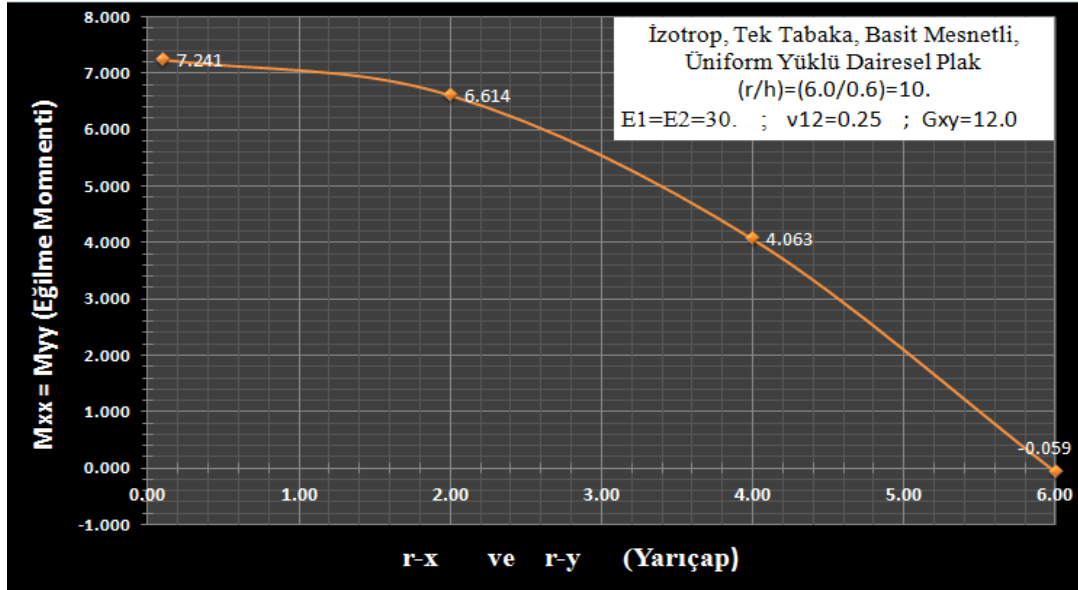


Şekil 9.11 : İzotrop üniform yayılı yüklü basit ve ankastre mesnetli dairesel tek tabaka plağın kırıklı sonlu elemanlar kullanılarak elde edilen boyutsuz deplasman eğrisi ($r/h=10$).



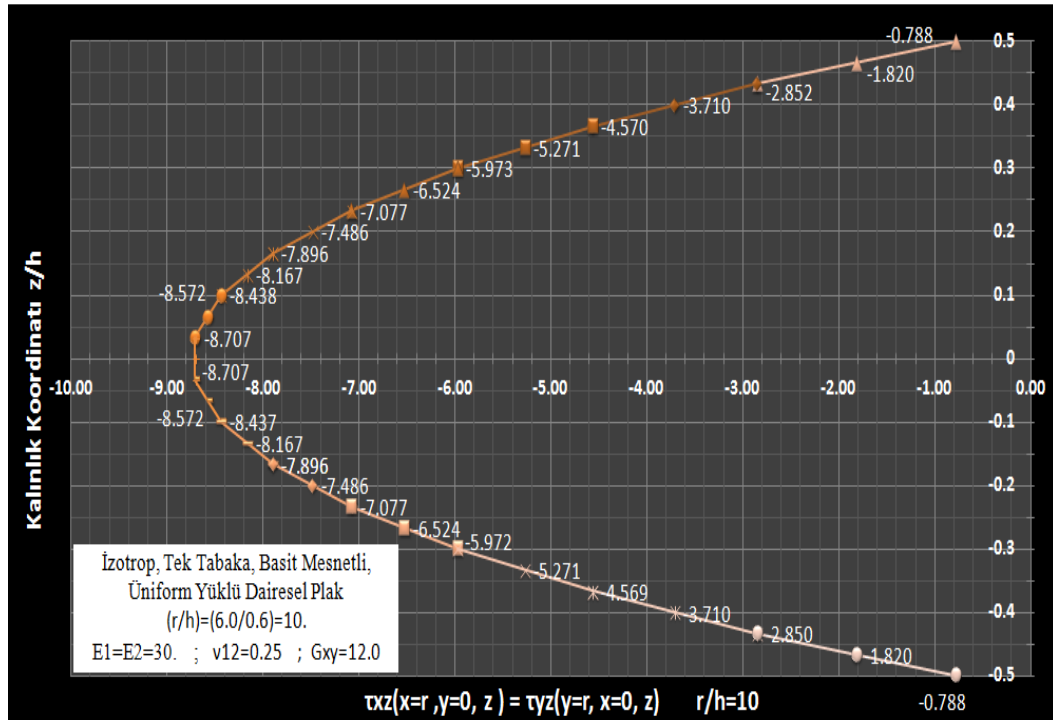
Şekil 9.12 : İzotrop üniform yayılı yüklü basit ve ankastre mesnetli dairesel tek tabaka plağın kırıklı sonlu elemanlar kullanılarak elde edilen boyutsuz deplasman eğrisi ($r/h=50$).

Şekil 9.13'de $r/h=10$ için izotrop tek tabaka, basit mesnetli plağın üniform yük altındaki moment değerleri $M_x(x,y=0)$ ve $M_y(x=0,y)$ görülmektedir.



Şekil 9.13 : İzotrop, tek tabaka, basit mesnetli dairesel plağa ait $M_x(x,y=0)$ ve $M_y(y,x=0)$.

Şekil 9.14'de ise izotrop, tek tabaka, basit mesnetli dairesel plağın kayma gerilmelerinin $\tau_{xz}(x=r,y=0) = \tau_{yz}(y=r,x=0)$ kalınlık doğrultusundaki parabolik değişimi verilmiştir.



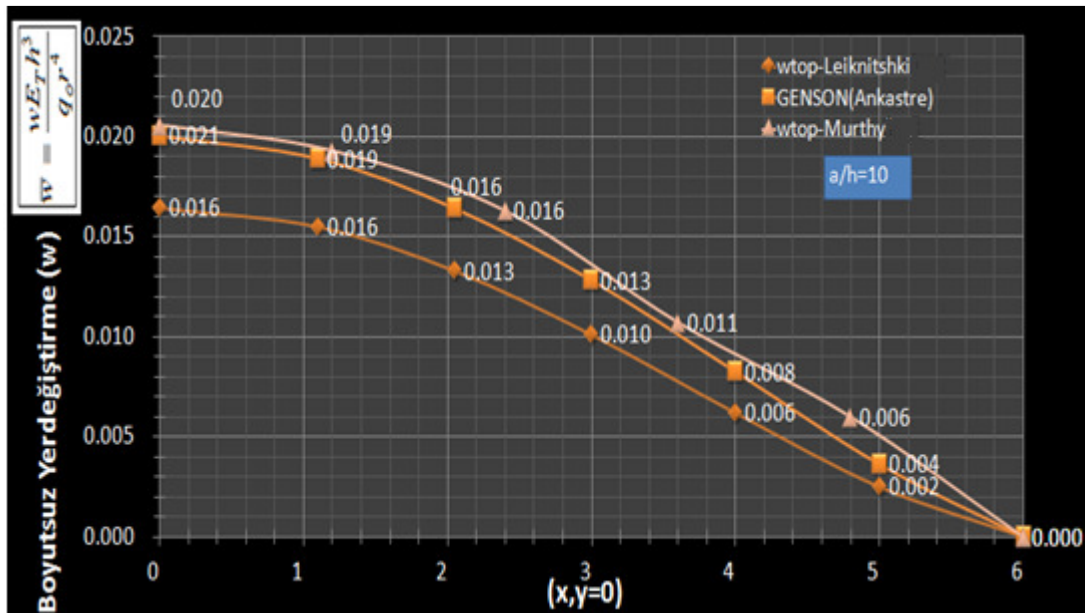
Şekil 9.14 : İzotrop, basit mesnetli dairesel plağa ait boyutsuz $\tau_{xz}(x=r,y=0,z)$ ve $\tau_{yz}(y=r,x=0,z)$.

Ortotrop üniform yayılı yüklü ankastre mesnetli tek tabaka dairesel plağın çeşitli a/h değerleri için Genson programından elde edilen sonuçları [41]'de farklı sonlu eleman sayısı ile elde edilen çözümlerle Çizelge 9.1'de karşılaştırılmıştır. Boyutsuzlaştırılmış çökme değeri için $D_{11}, D_{22}, D_{12}, D_{66}$ eğilme rijitlikleri kullanılarak $D = 3(D_{11} + D_{22}) + 2(D_{12} + 2D_{66})$ olmak üzere $w^* = wD/(q_0a^4)$ kullanılmıştır.

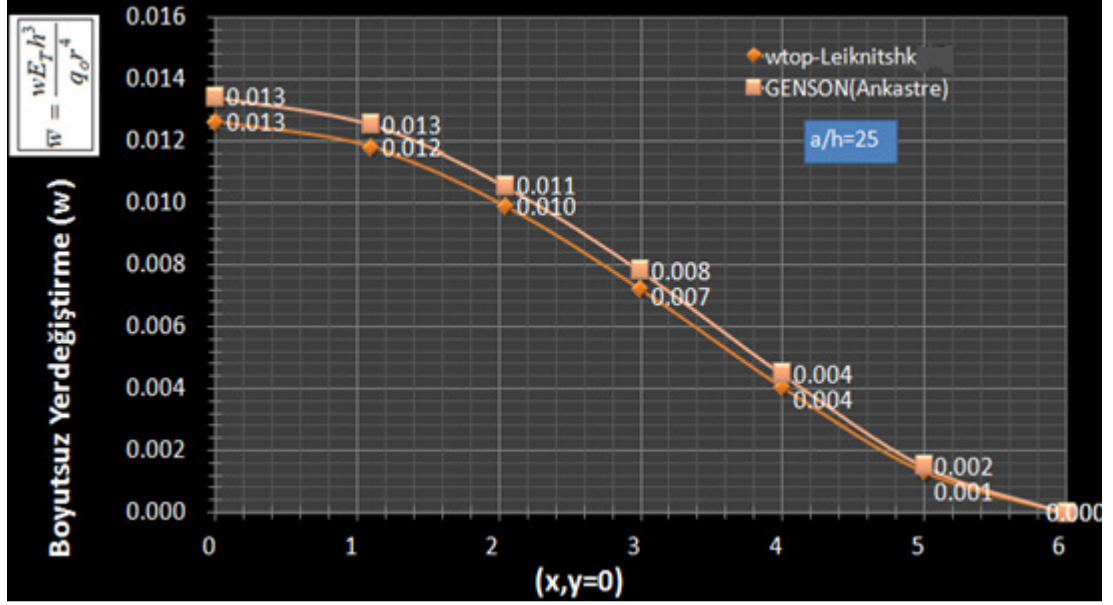
Çizelge 9.1 : Çeşitli a/h değerleri için ortotrop ankastre mesnetli üniform yayılı yüklü tek tabaka dairesel plak maksimum boyutsuzlaştırılmış çökme değerleri.

Boyutsuzlaştırılmış merkez çökme değeri, w^*				
a/h	Eleman Sayısı			20(GENSON)
	12	48	192	
100	0.1159	0.1144	0.1137	0.1160
50	0.1242	0.1277	0.1285	0.1280
25	0.1373	0.1400	0.1407	0.1409
16.67	0.1574	0.1600	0.1608	0.1580
10	0.2209	0.2239	0.2248	0.2110

Ortotrop üniform yayılı yüklü ankastre mesnetli tek tabaka dairesel plağın çeşitli a/h değerleri için Genson programından elde edilen deplasman eğrisinin değişiminin Bölüm 5.3 de anlatılan [35]'de elde edilen analitik çözüm ve Bölüm 3.3'de anlatılan [10]'da geliştirilen yüksek mertebe kayma deformasyon teorisine göre elde edilen sonuçlarla karşılaştırılması Şekil 9.15-Şekil 9.19 arasında gösterilmiştir.

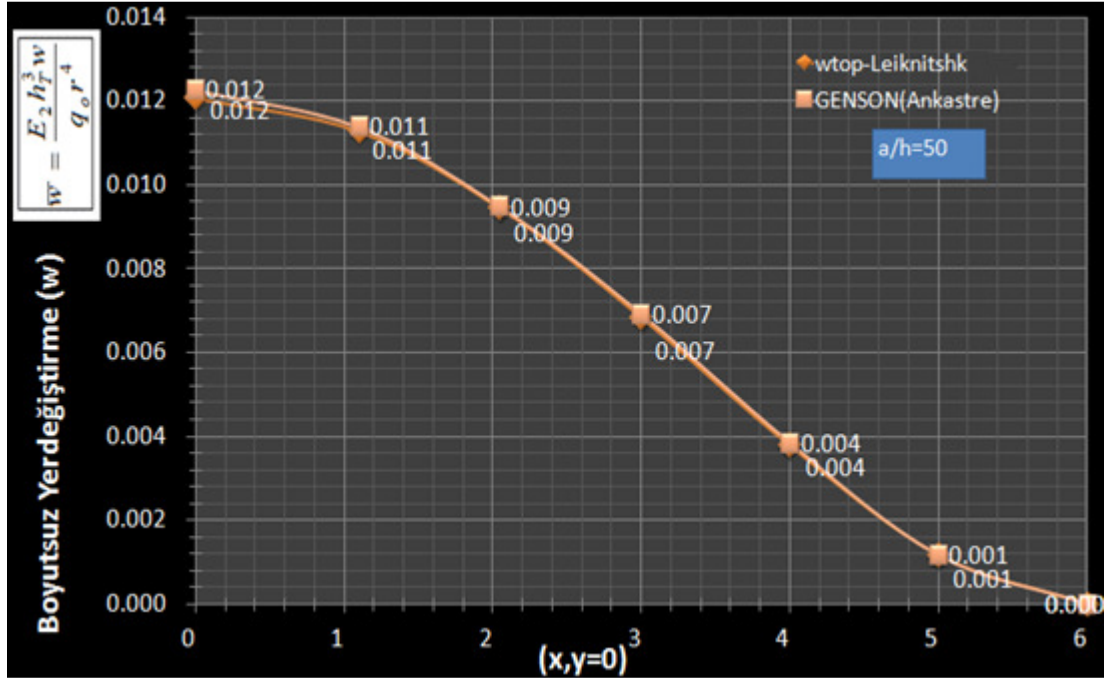


Şekil 9.15 : Ortotrop tek tabaka dairesel plağın $a/h=10$ değeri için deplasman eğrisinin analitik çözüm ile karşılaştırılması.

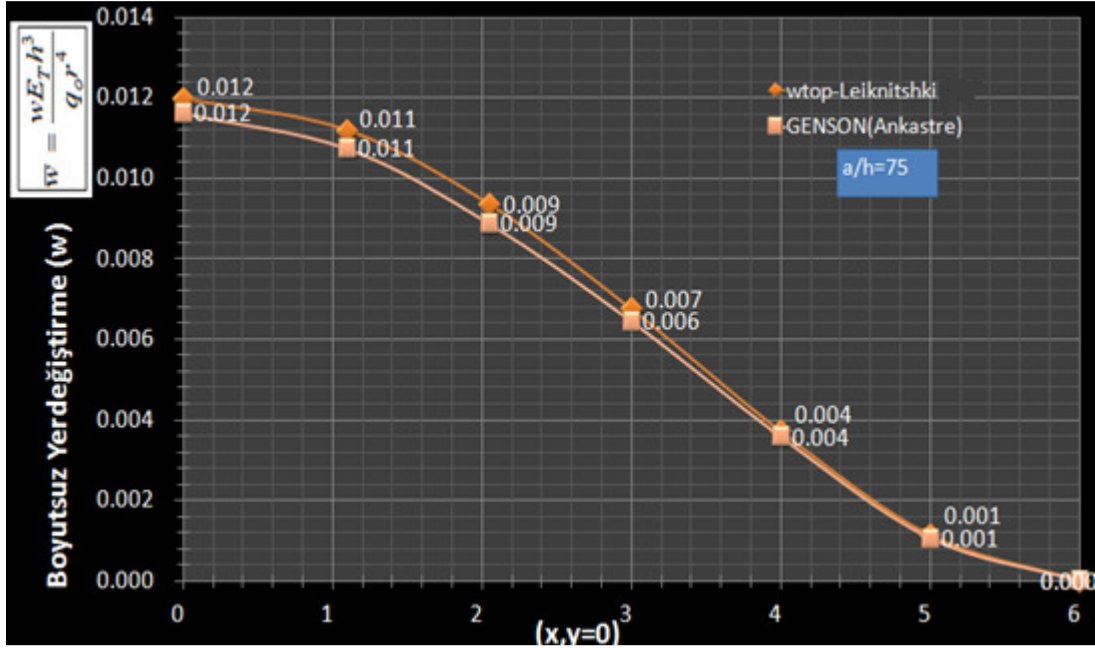


Şekil 9.16 : Ortotrop tek tabaka dairesel plağın $a/h=25$ değeri için deplasman eğrisinin analitik çözüm ile karşılaştırılması.

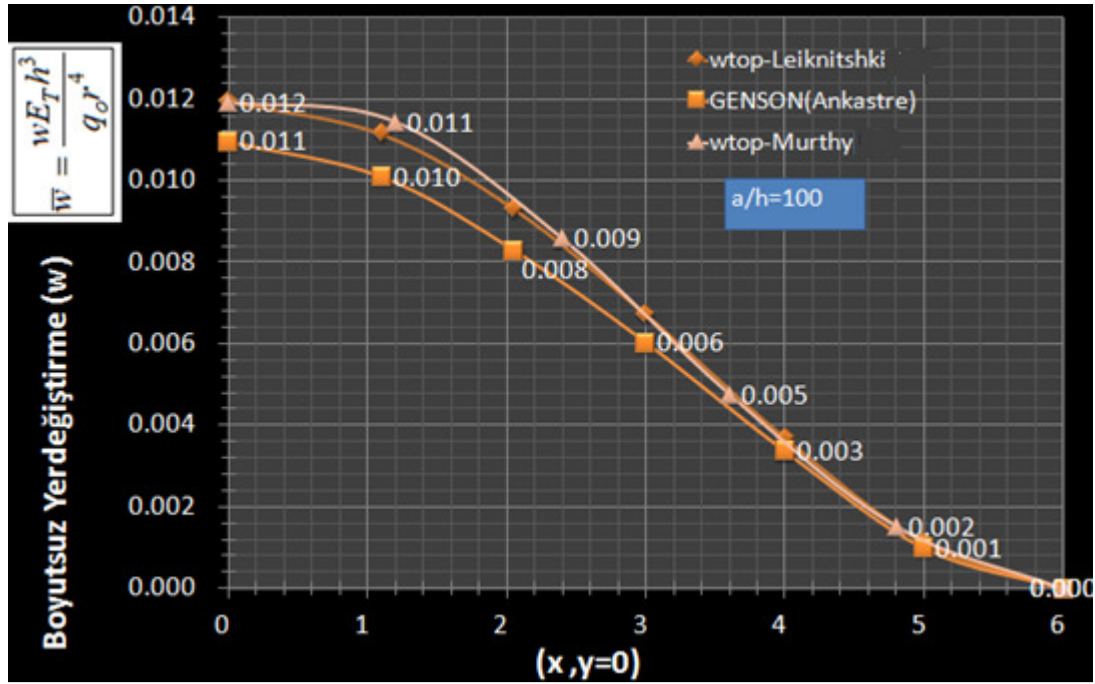
Şekil 9.17'den görüleceği üzere $a/h=50$ değeri için üniform yayılı yüklü ankastre mesnetli tek tabaka dairesel plak için [35]'de elde edilen analitik çözüm ile Genson programından 20 eleman kullanılarak elde edilen çözüm üst üste gelmiştir.



Şekil 9.17 : Ortotrop tek tabaka dairesel plağın $a/h=50$ değeri için deplasman eğrisinin analitik çözüm ile karşılaştırılması.



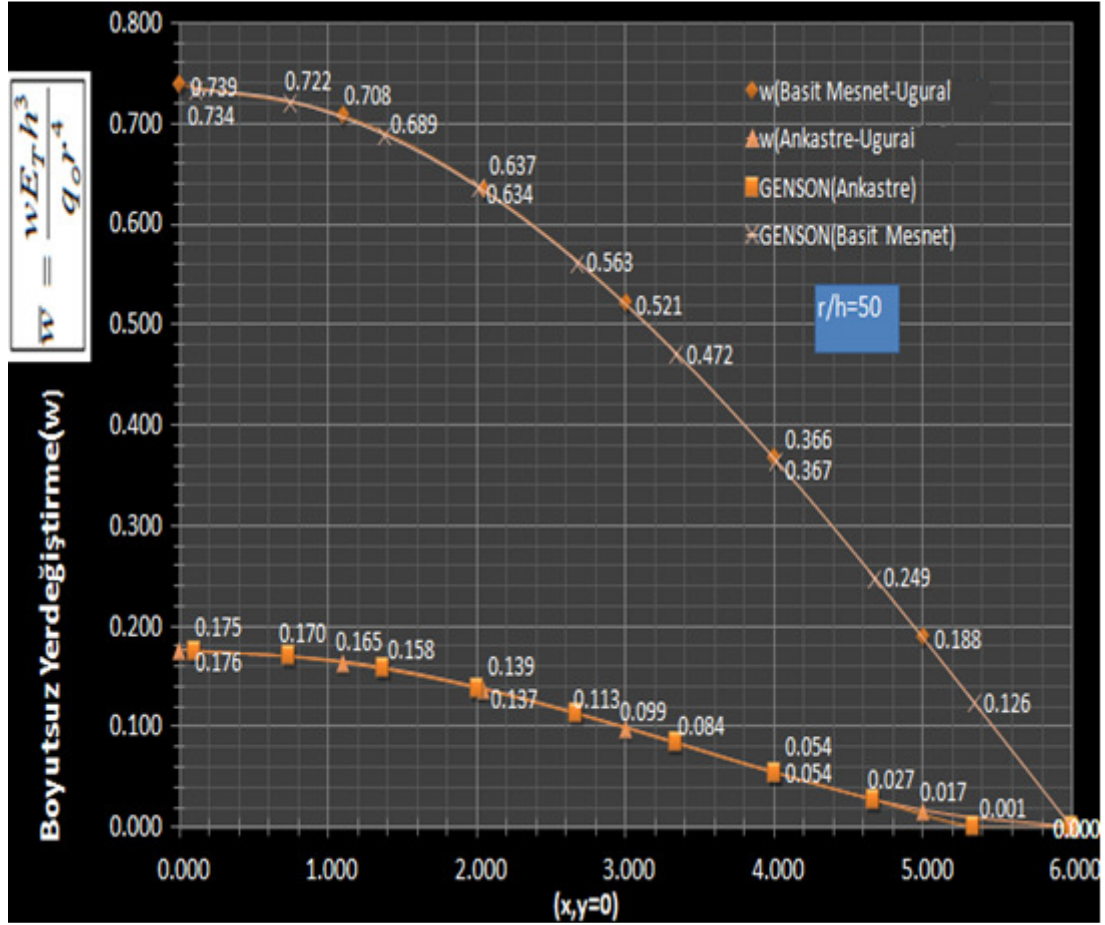
Şekil 9.18 : Ortotrop tek tabaka dairesel plağın a/h=75 değeri için deplasman eğrisinin analitik çözüm ile karşılaştırılması.



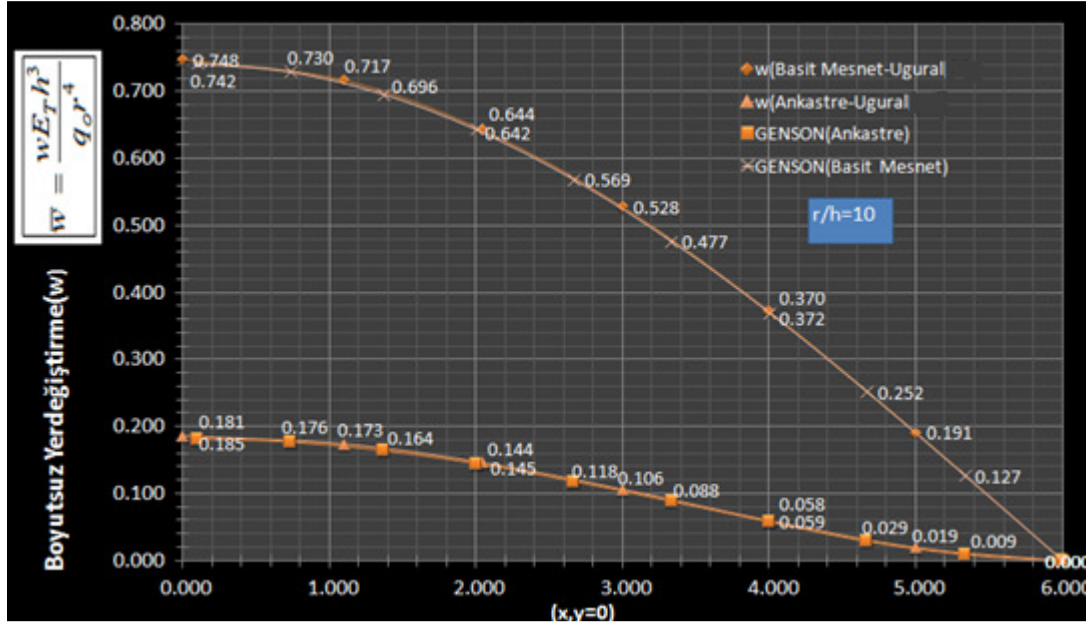
Şekil 9.19 : Ortotrop tek tabaka dairesel plağın a/h=100 plak durumu için deplasman eğrisinin analitik çözüm ile karşılaştırılması.

Şekil 9.11 ve Şekil 9.12 incelendiğinde r/h değeri büyüdükçe basit mesnet sınır şartlarında daha belirgin olmak üzere; elde edilen basit ve ankastre mesnet, izotrop dairesel plak deplasman değişimlerinin [34]'de verilen deplasman eğrileriyle tam uyuşmadıkları görülmüştür. Bu durumun Şekil 9.10'da görülen 1,2 ve 3 no'lu kırık sonlu elemanların kullanılmasından kaynaklı olabileceği düşünülerek bu amaçla basit

ve ankastre mesnet, izotrop tek tabaka dairesel plak örnekleri $r/h=10$ ve $r/h=50$ değerleri için Şekil 9.22’de görüldüğü üzere eğrisel sınırlara sahip sonlu elemanlardan oluşacak biçimde yeniden analiz edilmiştir. Şekil 9.20 ve Şekil 9.21’de sırasıyla $r/h=50$ ve $r/h=10$ değerleri için yeniden elde edilen ankastre ve basit mesnet sınır şartları için boyutsuz deplasman eğrileri verilmiş olup görüldüğü üzere [34]’de verilen analitik çözümlerle eğrisel sınırlara sahip sonlu elemanlar kullanılarak elde edilen çözümler üst üste gelmişlerdir.



Şekil 9.20 : İzotrop, üniform yayılı yüklü, basit ve ankastre mesnetli dairesel tek tabaka plağın eğrisel sınırlı sonlu elemanlar kullanılarak elde edilen boyutsuz deplasman eğrisi ($r/h=50$).



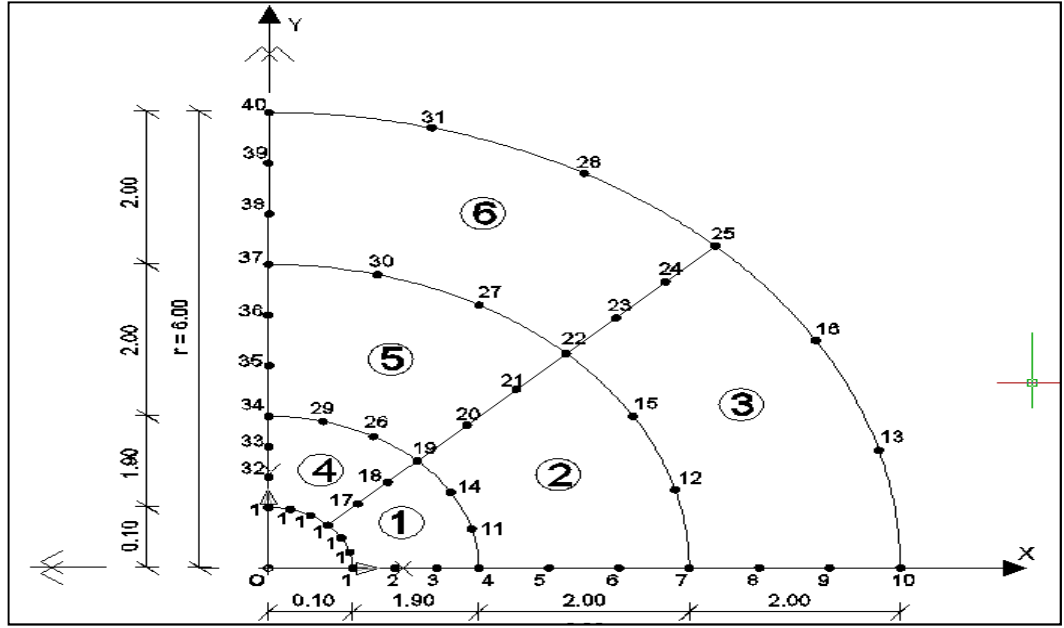
Şekil 9.21 : İzotrop, üniform yayılı yüklü, basit ve ankastre mesnetli dairesel tek tabaka plağın eğrisel sınırlı sonlu elemanlar kullanılarak elde edilen boyutsuz deplasman eğrisi ($r/h=10$).

9.4 Geliştirilen Sonlu Eleman ile Tabakalı Ortotrop Dairesel Plakların Lineer Statik Analizi

Bölüm 9.3 de anlatılan tek tabaka izotrop ve ortotrop dairesel plakların çok tabakalı plaklara genişletilmesi kapsamında geliştirilen sonlu elemanla üç tabakalı (90/0/90) dairesel plağın basit ve ankastre mesnetlenme sınır şartları ile üniform yük etkisi altında lineer statik analizleri gerçekleştirilmiş; ortotrop malzeme özellikleri olarak Bölüm 9.3 de verilen değerler kullanılmıştır.

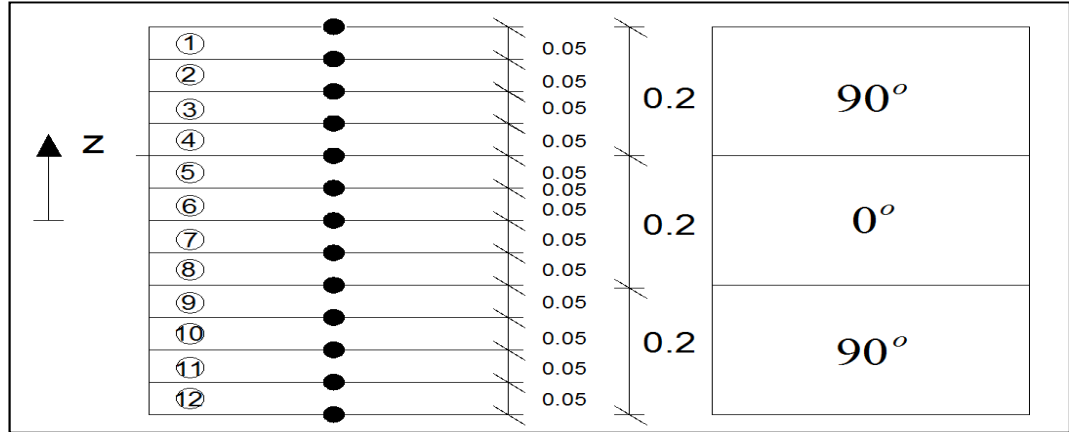
9.4.1 Basit Mesnetlenme Durumu

Şekil 9.22’de görüldüğü üzere geometrinin simetrik olması nedeniyle dörtte bir (çeyrek) plak, altı sonlu elemana bölünerek incelenmiş; y eksenini üzerindeki düğüm noktalarının x doğrultusundaki u yerdeğiştirmeleri ile x eksenini üzerindeki düğüm noktalarının y doğrultusundaki v yerdeğiştirmeleri simetri nedeniyle tutulmuştur. Dairesel plağın 0.1 m yarıçaplı çekirdeği çevresindeki noktalar tek nokta olarak düşünülmüş olup bu noktada her iki doğrultuda dönmeler ($\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$) simetri nedeniyle olmayacağından kesit yüksekliği boyunca u ve v yerdeğiştirmeleri sıfır olarak alınmıştır.



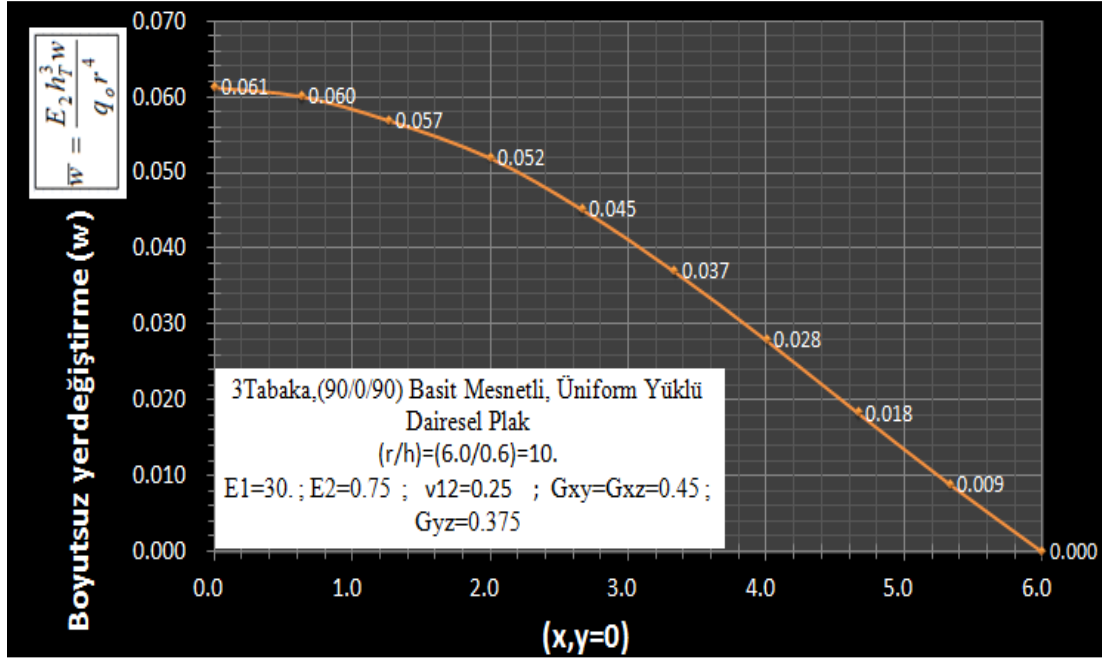
Şekil 9.22 : Üç tabakalı (90/0/90) dairesel dörtte bir plak eleman ve düğüm noktaları numaraları.

Kayma gerilmelerinin hassasiyetini arttırmak amacıyla üç tabakanın herbiri Şekil 9.23’de görüldüğü üzere dört alt tabakaya bölünerek incelenmiştir.

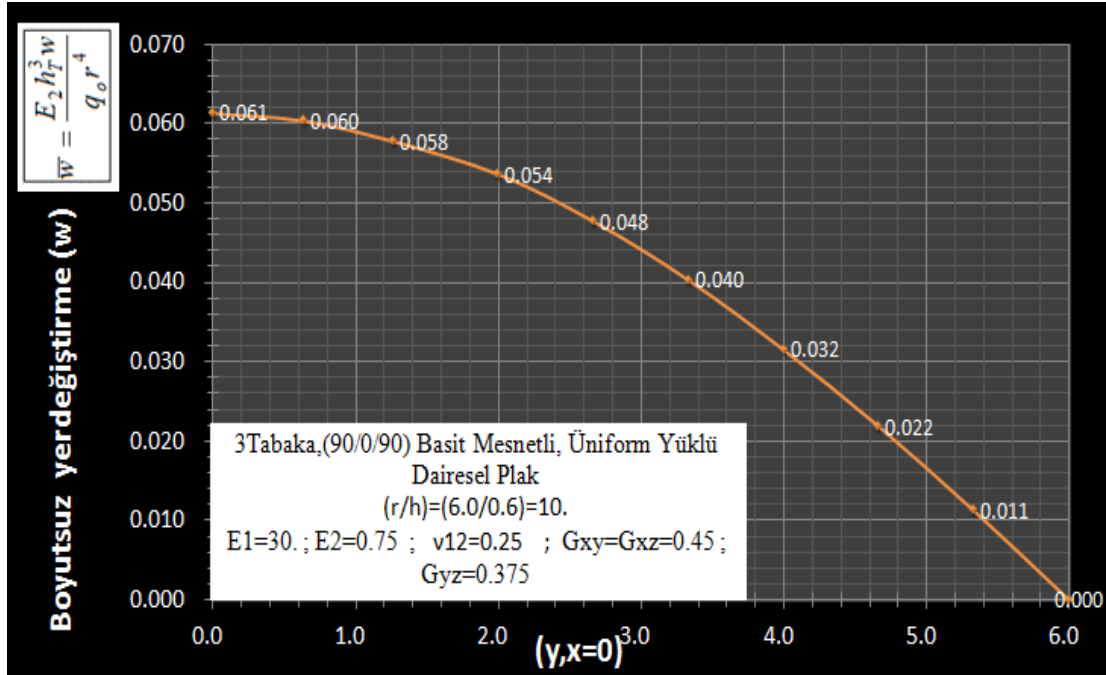


Şekil 9.23 : Üç tabakalı (90/0/90) dairesel plağın kalınlık doğrultusunda alt tabakalara ayrılması.

Şekil 9.24 ve Şekil 9.25’de sırasıyla ortotrop dairesel plağın x ve y eksenleri doğrultusundaki plak düzlemine dik boyutsuz yerdeğiştirme eğrileri (w) görülmektedir.



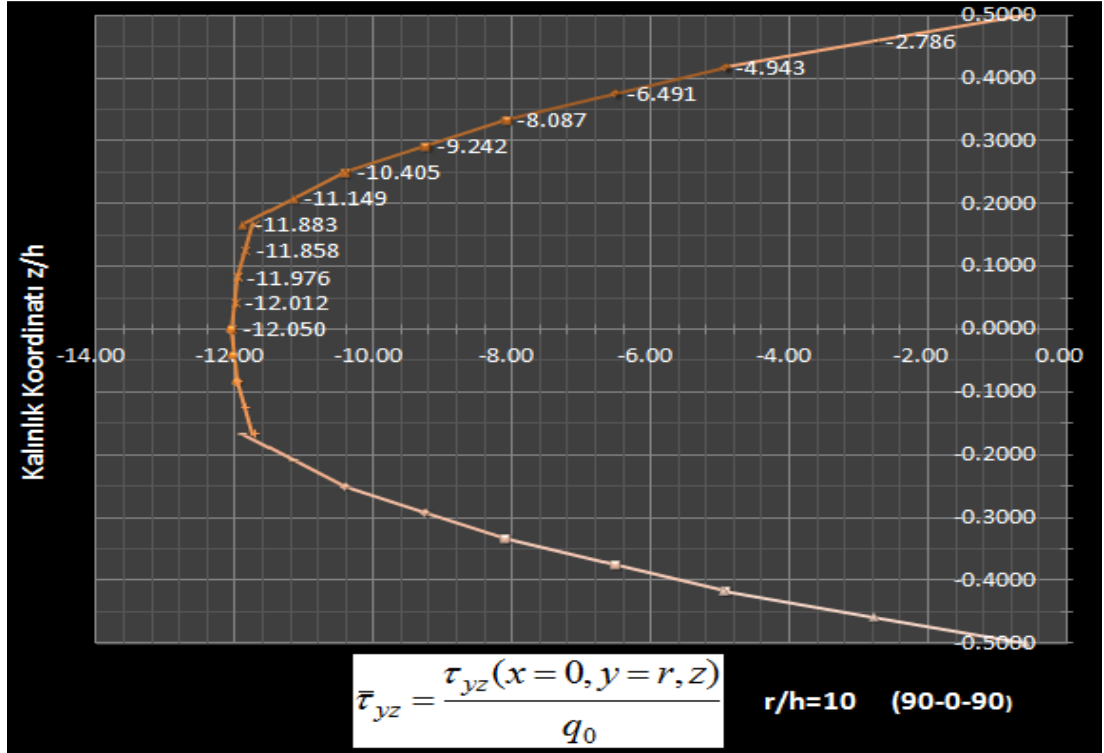
Şekil 9.24 : Üç tabakalı (90/0/90) dairesel plak (basit mesnetlenme) x eksenı doğrultusunda düzlemine dik yerdeğistirme (w) eğrisi.



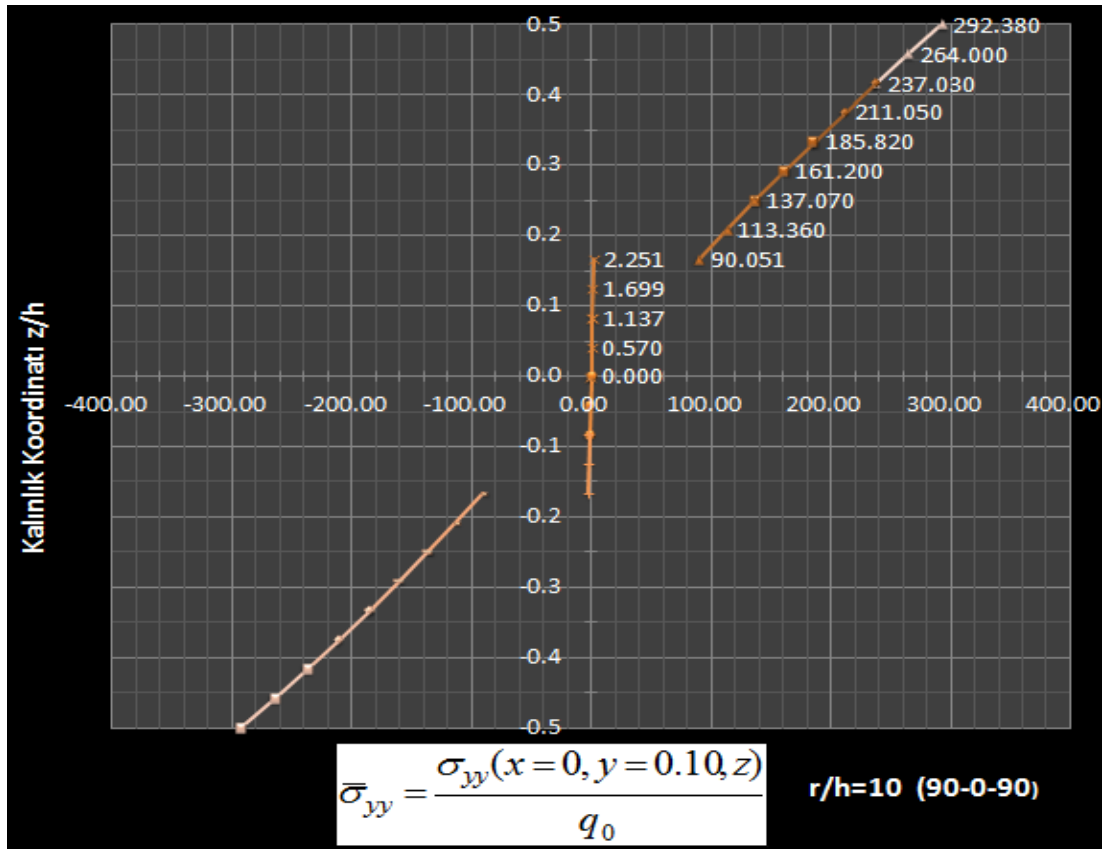
Şekil 9.25 : Üç tabakalı (90/0/90) dairesel plak (basit mesnetlenme) y eksenı doğrultusunda düzlemine dik yerdeğistirme (w) eğrisi.

Şekil 9.26'da üç tabakalı dairesel plak boyutsuz kayma gerilmesinin $\overline{\tau_{yz}}(x=0, y=r, z)$ kalınlık boyunca değışimi verilmiş olup görüldüğü üzere tabakalar arası kayma gerilmelerinde sıçramaların önüne geçilmiş; $\overline{\tau_{yz}}(z=\pm h/2) \cong 0$ değeri sağlanmıştır.

Şekil 9.27'de ise üç tabakalı dairesel plağa ait açıklıktaki boyutsuz normal gerilmenin $\overline{\sigma_{yy}}(x=0, y=0.1, z)$ kalınlık boyunca değışimi görülmektedir.



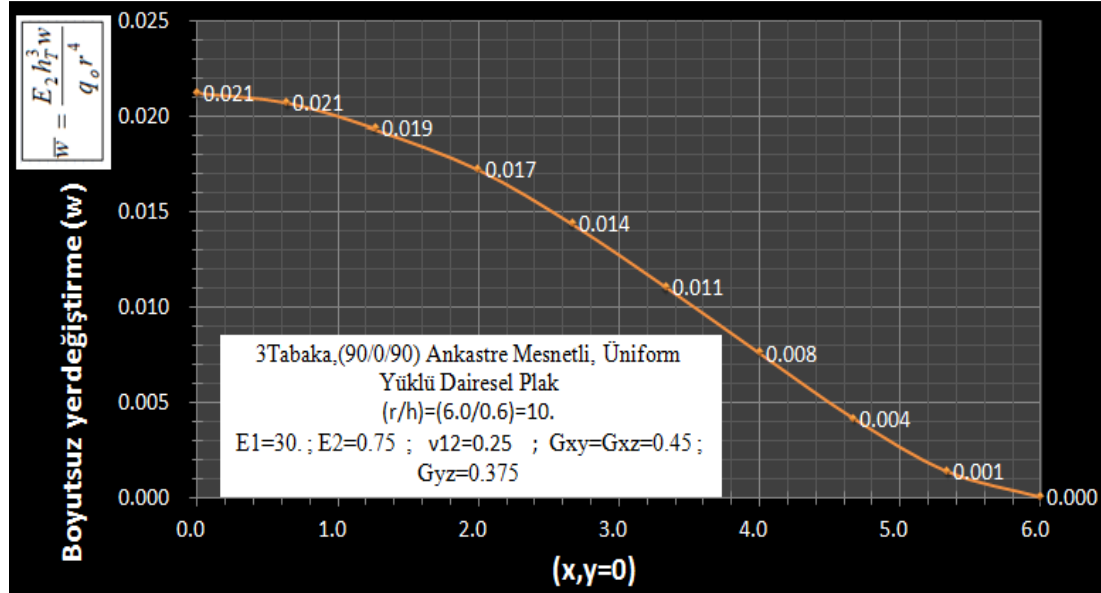
Şekil 9.26 : Üç tabakalı (90/0/90) dairesel plak (basit mesnetlenme) kayma gerilmesinin $\tau_{yz}(x=0, y=r, z)$ kalınlık boyunca değişimi.



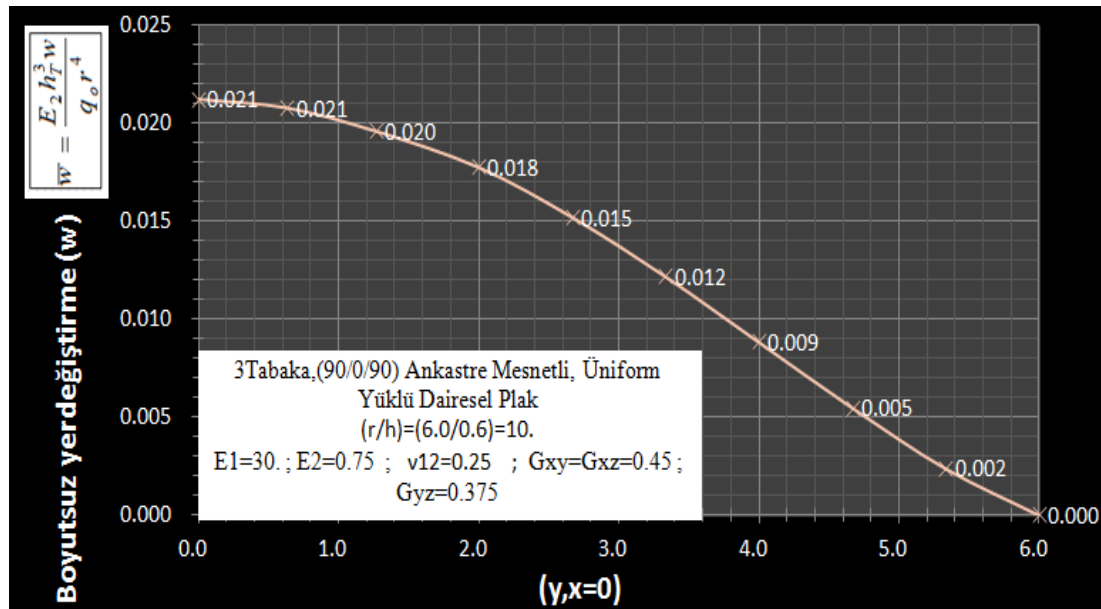
Şekil 9.27 : Üç tabakalı (90/0/90) dairesel plak(basit mesnetlenme) boyutsuz normal gerilmenin $\bar{\sigma}_{yy}(x=0, y=0.1, z)$ kalınlık boyunca değişimi.

9.4.2 Ankastre Mesnetlenme Durumu

Şekil 9.22’de geometrisi görülen tabakalı (90/0/90) dairesel plağın ankastre mesnetlenme durumu için üniform yük etkisi altındaki x ve y eksenleri doğrultusundaki düzlemine dik deplasman eğrileri (w) sırasıyla Şekil 9.28 ve Şekil 9.29’da verilmişlerdir.

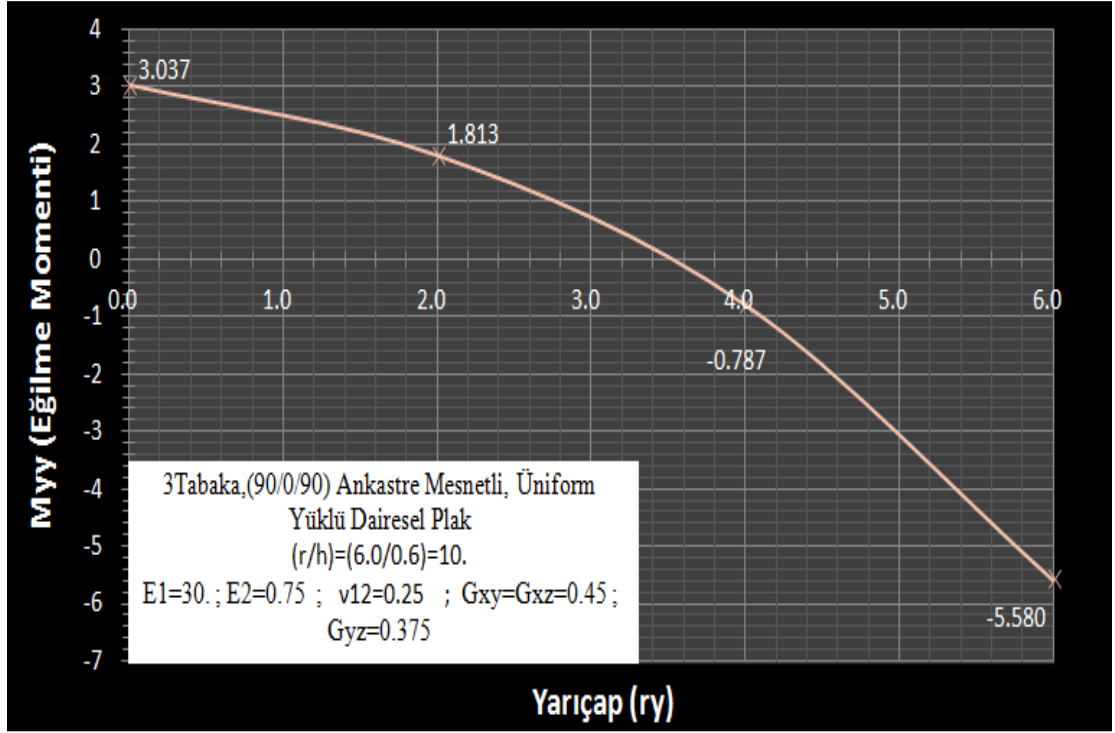


Şekil 9.28 : Üç tabakalı (90/0/90) dairesel plak (ankastre mesnetlenme) x eksen doğrultusunda boyutsuz düzlemine dik yerdeğiştirme (w) eğrisi.

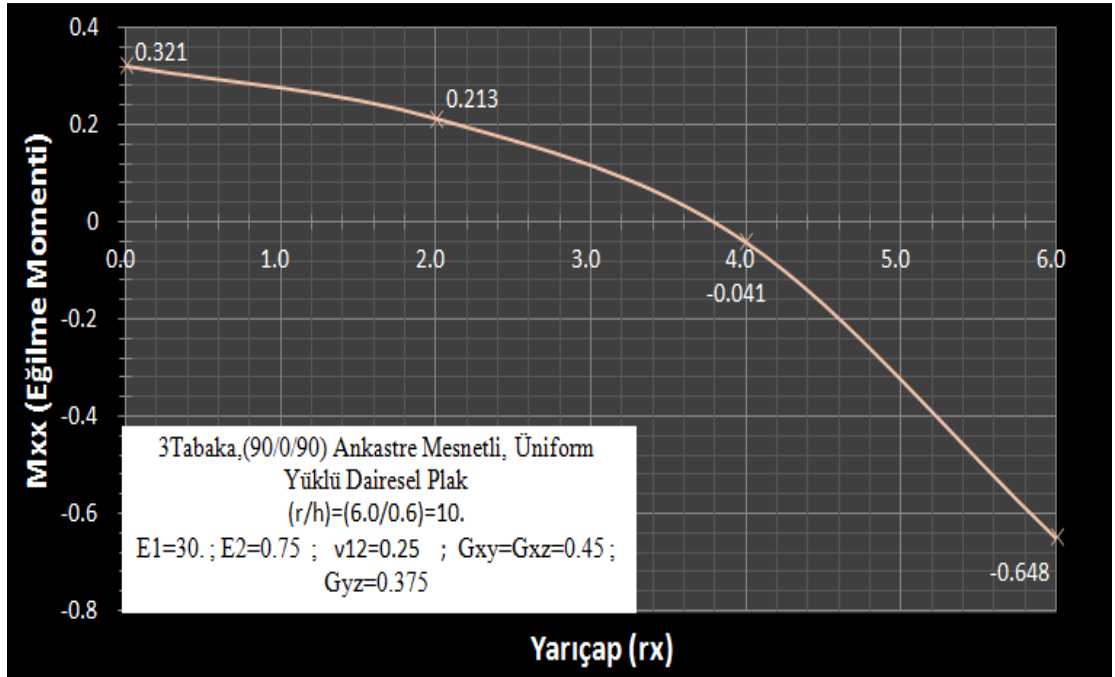


Şekil 9.29 : Üç tabakalı (90/0/90) dairesel plak (ankastre mesnetlenme) y eksen doğrultusunda düzlemine dik yerdeğiştirme (w) eğrisi.

Şekil 9.30 ve Şekil 9.31’de ise sırasıyla M_{xx} ve M_{yy} momentlerinin x ve y eksenleri doğrultusundaki değişimleri görülmektedir.



Şekil 9.30 : Üç tabakalı (90/0/90) dairesel plak (ankastre mesnetlenme) y eksenini doğrultusunda moment (M_{yy}) değişimi.



Şekil 9.31 : Üç tabakalı (90/0/90) dairesel plak (ankastre mesnetlenme) x eksenini doğrultusunda moment (M_{xx}) değişimi.

9.5 Geliştirilen Sonlu Eleman ile Üniform Yük Etkisinde Tabakalı Ortotrop Sektör Plakların Lineer Statik Analizi

Geliştirilen sonlu eleman ile Şekil 9.32’de gösterilen $r_i=1.0$ [m] ; $r_o=2.0$ [m] ; plak toplam kalınlığı $h_T=0.10$ [m] ve merkez açısı $\beta = 60^0$ olan tabakalı ortotrop sektör plağın üniform yük ve ankastre mesnetlenme durumunda çeşitli fiber açlarına (α) göre lineer statik analizi gerçekleştirilmiştir. Rektilineer ortotrop plakta malzeme asal koordinatları ($\alpha = 0$) global x - y - z kartezyen koordinat sistemi ile örtüşmüş olup malzeme özellikleri;

$$E_1 = 25 \text{ [GPa]} \quad (9.13)$$

$$E_2 = 1.0 \text{ [GPa]} \quad (9.14)$$

$$G_{12} = G_{13} = \frac{E_2}{2} \quad ; \quad G_{23} = \frac{E_2}{5} \quad (9.15)$$

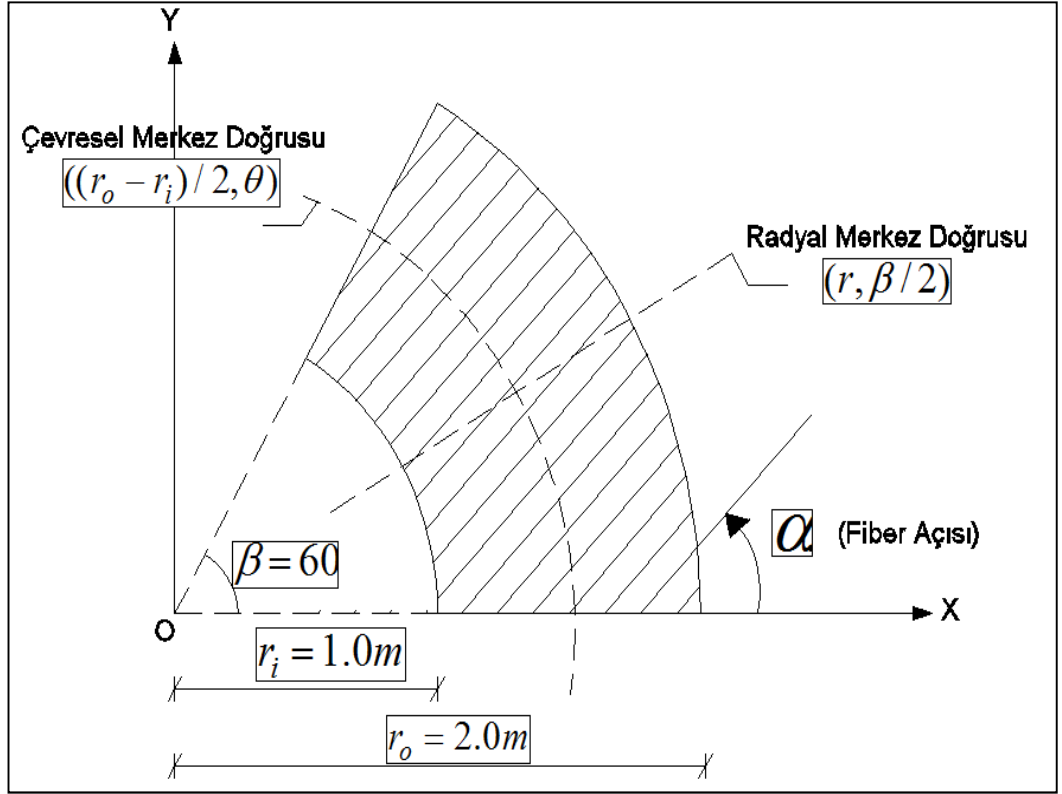
$$\nu_{12} = 0.25 \quad (9.16)$$

olarak tanımlanmıştır. Şekil 9.32’den görüleceği üzere elde edilen sonuçlar çevresel merkez doğrusu $((r_o - r_i)/2, \theta)$ ve radyal merkez doğrusu $(r, \beta/2)$ üzerinde elde edilmiş olup boyutsuzlaştırma işlemi için;

$$\bar{w} = \frac{wE_2h^3}{q_o(r_o - r_i)^4} \quad (9.17)$$

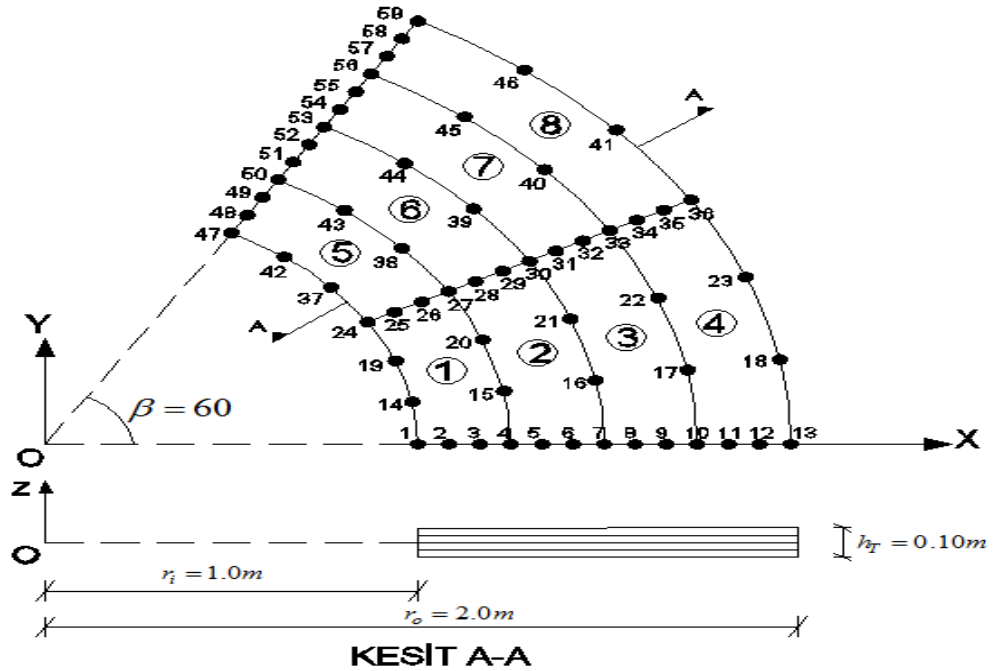
$$\bar{r} = \frac{r - r_i}{r_o - r_i} \quad ; \quad \bar{\theta} = \frac{\theta}{\beta} \quad (9.18)$$

denklemlerinden yararlanılmıştır.



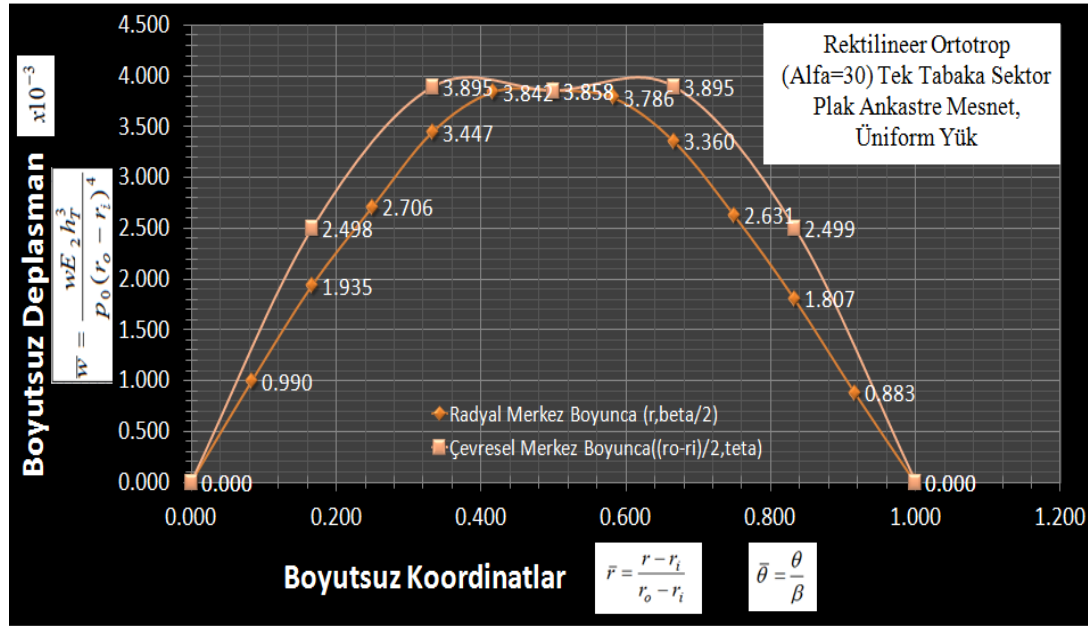
Şekil 9.32 : Tabakalı sektör plağın geometrik özellikleri.

Şekil 9.33'den görüleceği üzere tabakalı sektör plak 8 sonlu elemana ayrılarak incelenmiş; sınır koşulları olarak iç ve dış eğrisel kenarlar ile $\theta = 0$ ve $\theta = 60$ daki radyal kenarlar ankastre mesnet alınarak analiz gerçekleştirilmiştir.



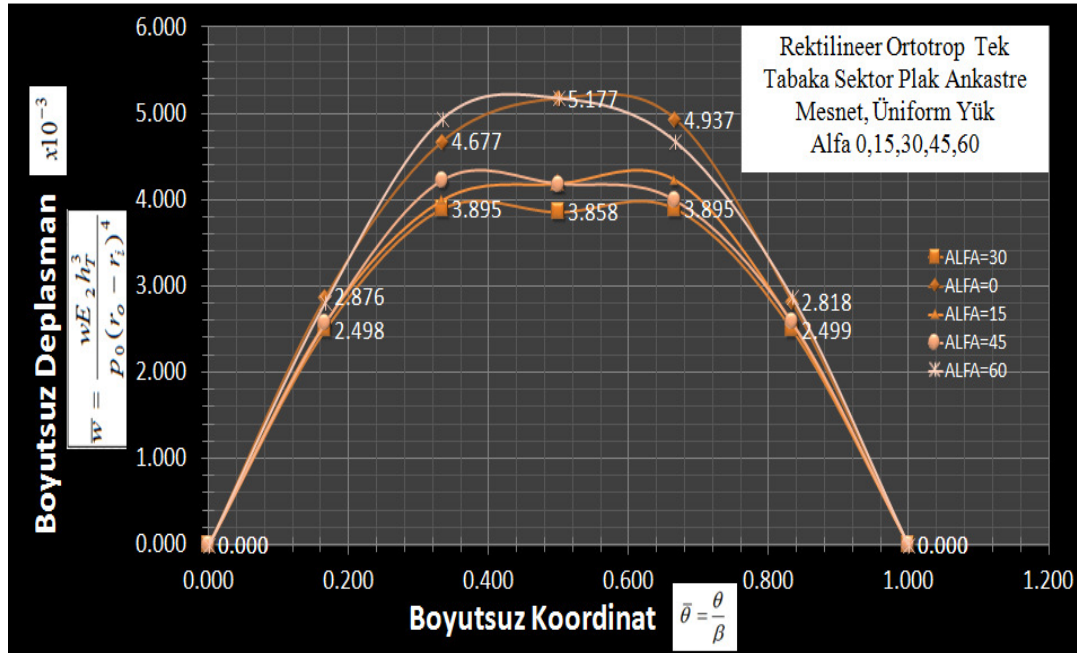
Şekil 9.33 : Tabakalı sektör plak eleman ve düğüm noktası numaraları.

Şekil 9.34’de tek tabaka sektör plağın fiber açısı $\alpha=30$ derece için radyal ve çevresel merkez doğruları boyunca olan boyutsuz deplasman değişimleri görülmektedir.



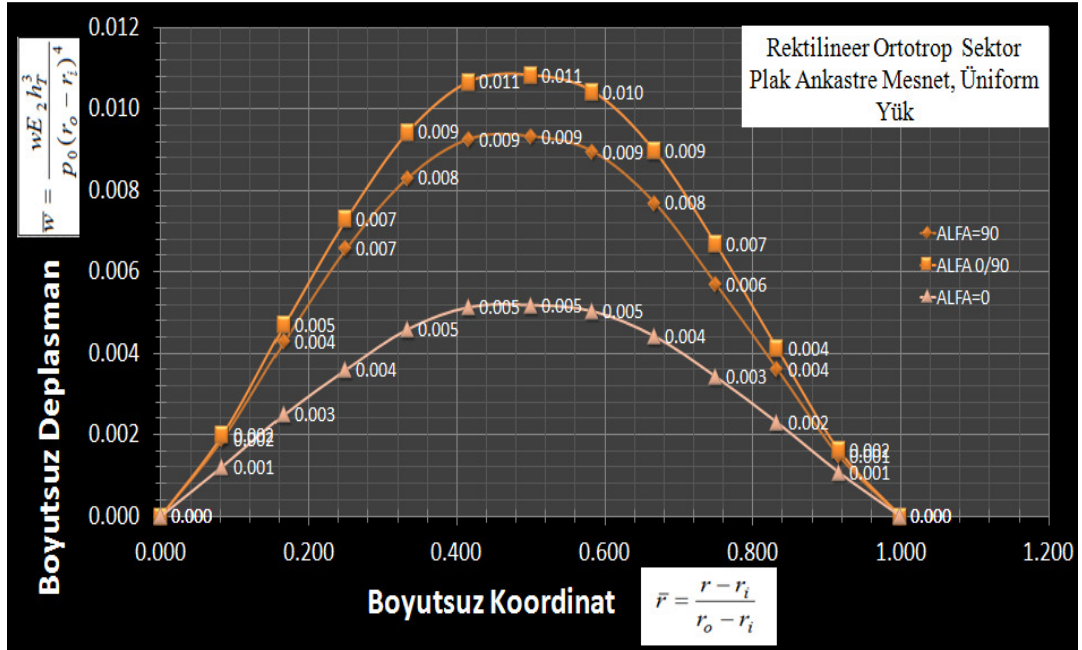
Şekil 9.34 : Rektilineer ortotrop, ($\alpha=30$) fiber açısı için tek tabaka sektör plak deplasman değişimi.

Şekil 9.35’de ise aynı plağın değişen fiber açıları için çevresel merkez doğrusu boyunca deplasman değişimleri elde edilmiştir.

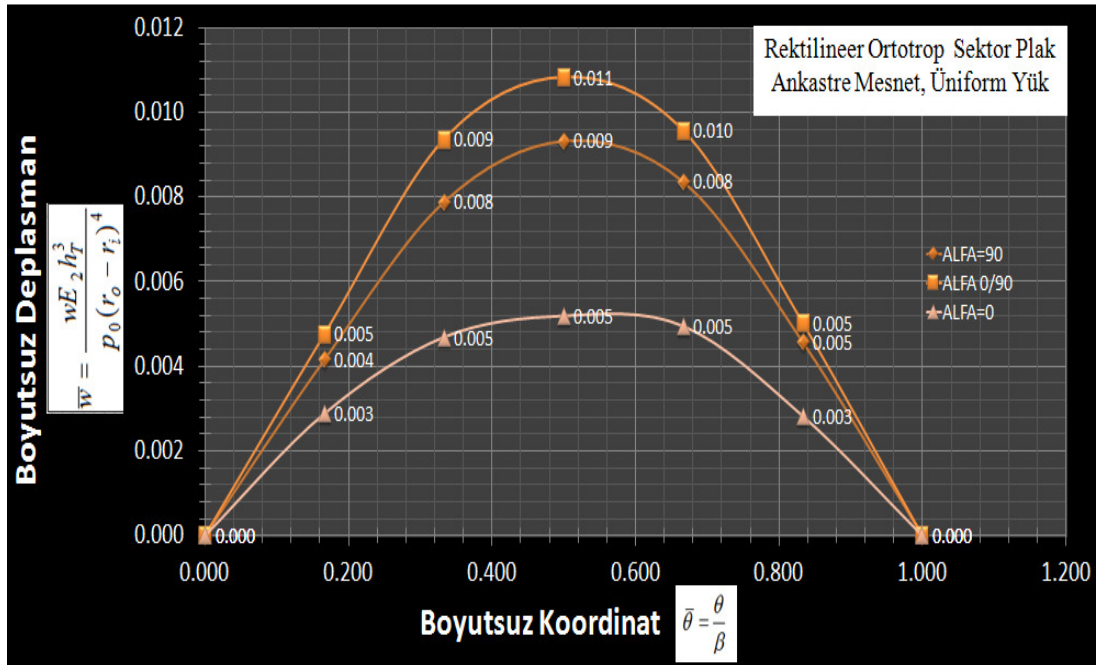


Şekil 9.35 : Tek tabaka sektör plağın çeşitli fiber açılara göre deplasman eğrisinin değişimi.

Şekil 9.35’den görüleceği üzere fiber açısı $\alpha = 30$ derece durumunda, merkez açısı $\beta = 60$ derece olan sektör plağın deplasman eğrisi beklendiği üzere $\bar{\theta}=0.50$ doğrusuna göre simetrik olarak elde edilmiştir.



Şekil 9.36 : Sektör plağın tek tabaka $\alpha = 0$, $\alpha = 90$ fiber açıları ile iki tabakalı (0/90) durum için radyal merkez doğrusu boyunca deplasman değişimlerinin karşılaştırılması.



Şekil 9.37 : Sektör plağın tek tabaka $\alpha = 0$, $\alpha = 90$ fiber açıları ile iki tabakalı (0/90) durum için çevresel merkez doğrusu boyunca deplasman değişimlerinin karşılaştırılması.

Şekil 9.36 ve Şekil 9.37’den görüleceği üzere tek tabaka sektör plağın $\alpha = 0$ ve $\alpha = 90$ derece fiber açılarına ait durumları karşılaştırıldığında $\alpha = 0$ fiber açısına sahip plağın daha rijit davranış sergilediği görülmektedir. Şekil 9.36 ve Şekil 9.37’de deplasman değişimi verilen iki tabakalı (0/90) sektör plağa ait çevresel ve radyal merkez doğruları boyunca mesnet ve açıklık gerilmelerinin tabaka kalınlığı boyunca değişimi Çizelge 9.2-Çizelge 9.6’da görülmektedir.

Çizelge 9.2 : İki tabakalı (0/90) sektör plağın ($r = r_i$; $\theta = \frac{\beta}{2}$) noktasında düzlemiçi gerilmelerinin kalınlık boyunca değişimi.

$\sigma_x(r = r_i; \theta = \frac{\beta}{2}; z)$	σ_y	τ_{xy}
-157.710	-9.164	-8.346
-4.908	-4.049	-3.495
113.760	-0.950	-0.479
4.048	-51.187	-0.479
9.959	3.645	2.916

Çizelge 9.3 : İki tabakalı (0/90) sektör plağın ($r = (r_0 - r_i)/2$; $\theta = \frac{\beta}{2}$) noktasında düzlemiçi gerilmelerinin kalınlık boyunca değişimi.

$\sigma_x(r = (r_0 - r_i)/2; \theta = \frac{\beta}{2}; z)$	σ_y	τ_{xy}
60.769	5.392	1.959
4.485	3.039	0.809
-50.680	0.854	-0.178
-1.700	33.601	-0.178
-4.322	-3.724	-1.107
-7.115	-42.169	-2.353

Çizelge 9.4 : İki tabakalı (0/90) sektör plağın ($r = r_0$; $\theta = \frac{\beta}{2}$) noktasında düzlemiçi gerilmelerinin kalınlık boyunca değişimi.

$\sigma_x(r = r_0; \theta = \frac{\beta}{2}; z)$	σ_y	τ_{xy}
-135.110	-7.772	-7.086
-3.977	-3.445	-2.975
98.412	-0.821	-0.416
3.502	-44.246	-0.416
8.591	2.646	2.497
18.011	62.117	7.025

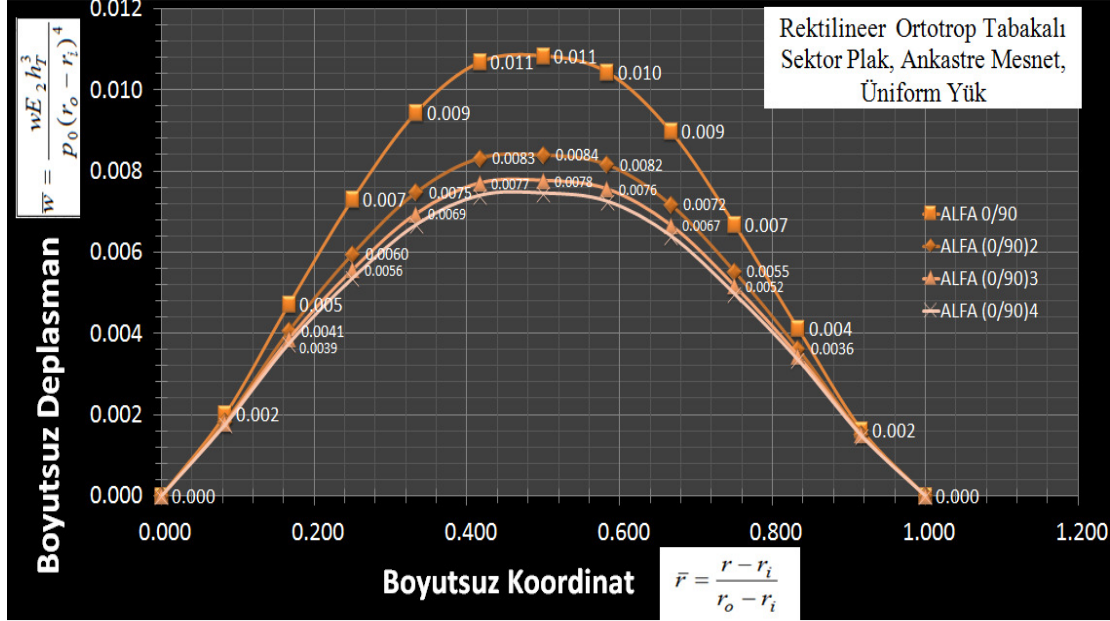
Çizelge 9.5 : İki tabakalı (0/90) sektör plağın ($r = (r_0 - r_i)/2$; $\theta = 0$) noktasında düzlemiçi gerilmelerinin kalınlık boyunca değişimi.

$\sigma_x(r = (r_0 - r_i)/2; \theta = 0; z)$	σ_y	τ_{xy}
-2.604	-10.417	0.086
-1.551	-6.205	0.025
-0.724	-2.897	-0.053
-0.724	-72.412	-0.053
0.045	4.540	-0.161

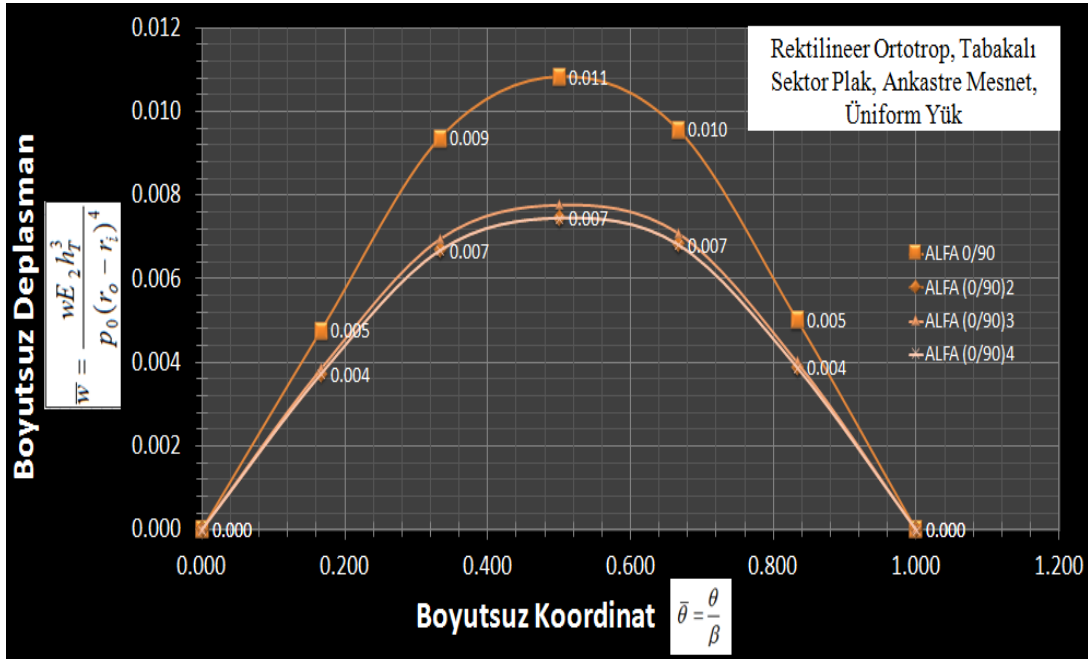
Çizelge 9.6 : İki tabakalı (0/90) sektör plağın ($r = (r_0 - r_i)/2$; $\theta = \beta$) noktasında düzlemiçi gerilmelerinin kalınlık boyunca değişimi.

$\sigma_x(r = (r_0 - r_i)/2; \theta = \beta; z)$	σ_y	τ_{xy}
-62.560	-3.696	3.363
-3.726	-1.894	1.639
48.042	-0.365	0.171
1.718	-20.705	0.171
4.350	2.818	-1.312
7.769	28.455	-3.084

Şekil 9.38 ve Şekil 9.39’da sırasıyla radyal ve çevresel merkez doğruları boyunca 2 tabakalı (0/90), 4 tabakalı (0/90/0/90), 6 tabakalı (0/90/0/90/0/90) ve 8 tabakalı (0/90/0/90/0/90/0/90) sektör plakların boyutsuz deplasman değişimleri görülmektedir.

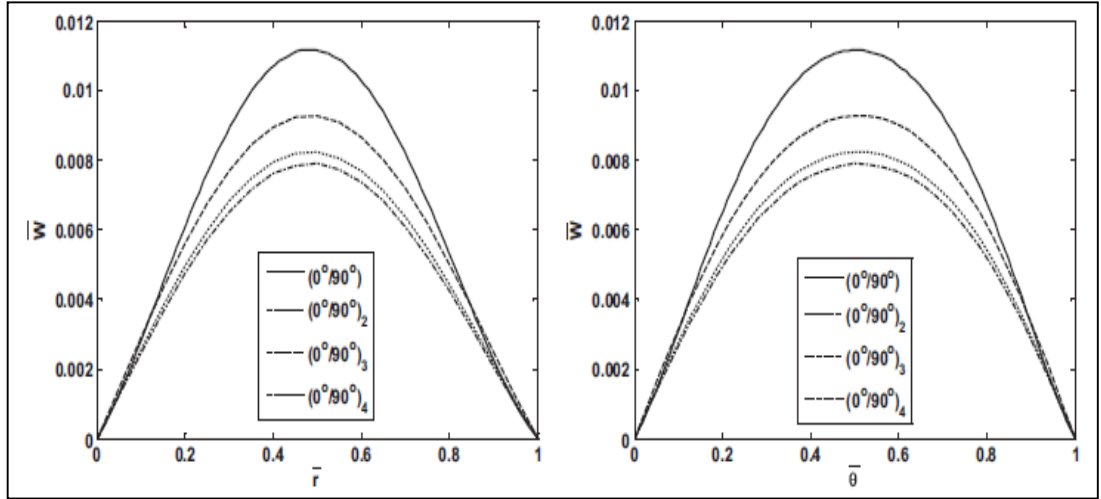


Şekil 9.38 : Radyal merkez doğrultusundaki boyutsuz deplasmanların tabaka sayısına bağlı değişimi.



Şekil 9.39 : Çevresel merkez doğrultusundaki boyutsuz deplasmanların tabaka sayısına bağlı değişimi.

[15]'de yapılan çalışmaya ait; tabakalı sektör plağın diferansiyel kuadratur yöntemiyle elde edilen deplasman değişimleri Şekil 9.40'da görülmektedir.

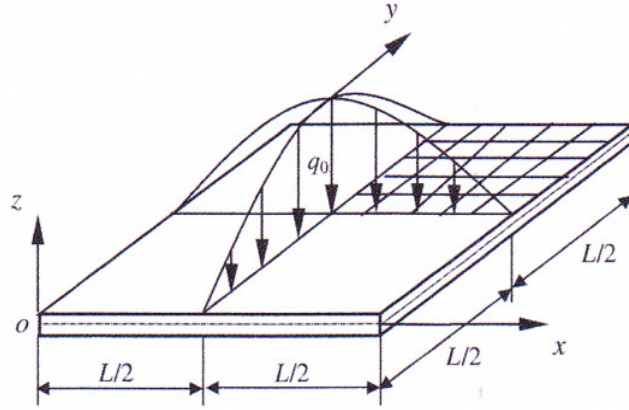


Şekil 9.40 : Tabakalı sektör plakta diferansiyel kuadrator yöntemiyle deplasman değişimleri.

[15]'de elde edilen sonuçlar ile Genson tarafından elde edilen Şekil 9.38 ve Şekil 9.39'daki deplasman değişimleri karşılaştırıldığında deplasman değişiminin birbirine yeter ölçüde yakın olduğu görülmektedir.

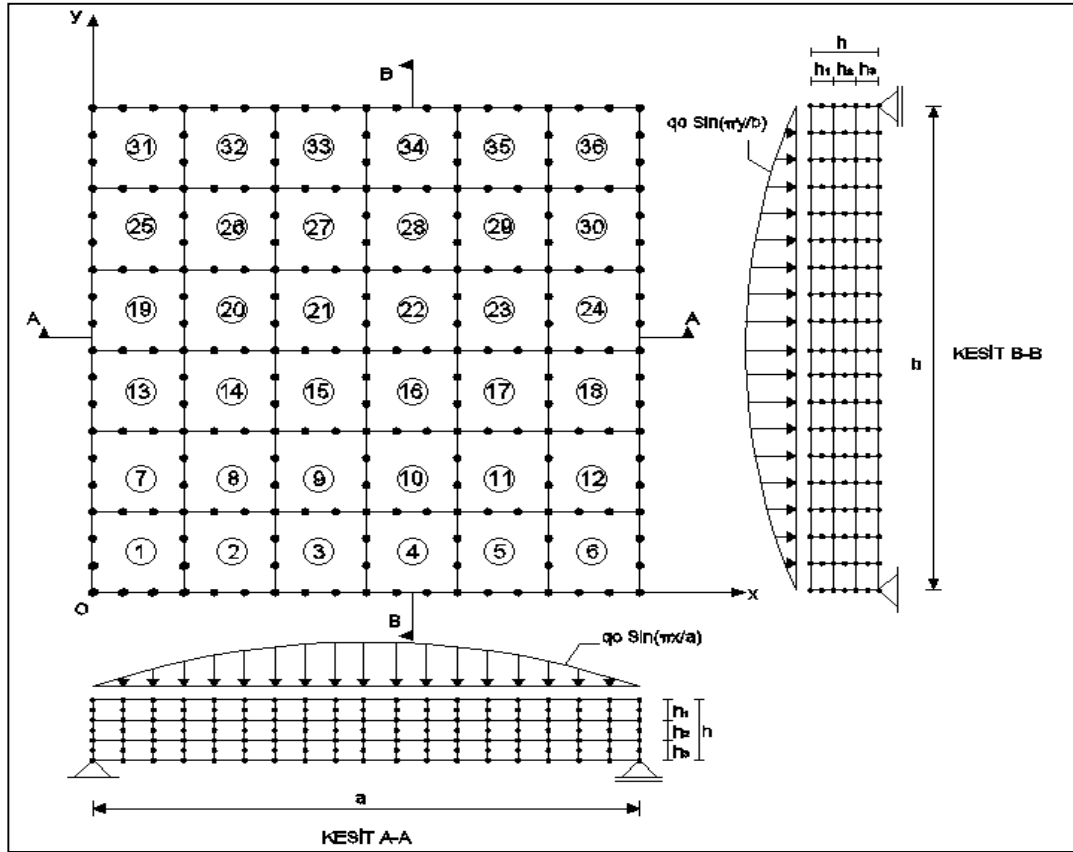
9.6 Geliştirilen Sonlu Eleman ile Tabakalı Ortotrop Kare Plakların Lineer Statik Analizi

Şekil 9.41'de gösterilen bisinüsoidal düşey yük $q = q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)$ etkisinde 3 tabakalı (0/90/0) ve 4 tabakalı (0/90/90/0) olmak üzere basit mesnetli kare plak çözümleri yapılmış; elde edilen boyutsuzlaştırılmış orta nokta çökme $\bar{w} = w_0 \left(\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right) \left(\frac{E_2 h^3}{L^4 q_0}\right)$; $(x=L/2, y=L/2, z=h/2)$ noktasında düzlem içi gerilmeler $[\bar{\sigma}_{xx} \quad \bar{\sigma}_{yy}]^T = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy}]^T \left(\frac{h^2}{L^2 q_0}\right)$ ve sırasıyla $(x=L/2, y=0, z=0)$ ve $(x=0, y=L/2, z=0)$ noktalarında düzlem dışı $[\bar{\sigma}_{yz} \quad \bar{\sigma}_{xz}]^T = [\sigma_{yz} \quad \sigma_{xz}]^T \left(\frac{h}{L q_0}\right)$ kayma gerilmeleri sonuçları çeşitli L/h değerleri için literatürdeki ESL(Elastisite Çözümü), TSDT(Üçüncü Mertebe Kayma Deformasyon Teorisi), çeşitli kayma düzeltme faktörü değerleri (K) için FSDT (Birinci Mertebe Kayma Deformasyon Teorisi) ve CLPT (Klasik ince plak teorisi) ile karşılaştırılmıştır. Malzeme özellikleri olarak $E_1 = 25.0$, $E_2 = 1.0$, $G_{12} = G_{13} = 0.5$, $G_{23} = 0.2$, $\nu_{12} = \nu_{13} = 0.25$ alınmıştır.



Şekil 9.41: Bisinüsoidal yük etkisinde tabakalı kare plak [16].

Şekil 9.42’de üç tabakalı (0/90/0) $a=b=L=6.0$ olan kompozit kare plağın 6x6 sonlu eleman ile modellenmesi görülmektedir.



Şekil 9.42 : Üç tabakalı (0/90/0) kare plağın (6x6) sonlu eleman ile modellenmesi.

Çizelge 9.7’de Genson programı ile elde edilen 3 tabakalı simetrik (0/90/0) basit mesnetli kare plağa ait çökme ve gerilme değerlerinin literatürdeki diğer teorilerle elde edilen sonuçlarla karşılaştırılması görülmektedir.

Çizelge 9.7 : Sinüsoidal düşey yük etkisindeki 3 tabakalı (0/90/0) basit mesnetli kare plakların boyutsuzlaştırılmış orta nokta çökme ve gerilme değerleri.

a/h	Değişken	Genson	ELS ¹	TSDT	FSDT				CLPT
					K=1	K=5/6	K=3/4	K=1/2	
4	$\bar{w} \times 10^2$	2.065	-----	1.9218	1.5681	1.7758	1.9122	2.5770	0.4313
	$\bar{\sigma}_{xx}$	0.804	0.755	0.7345	0.4475	0.4370	0.4308	0.4065	0.5387
	$(\bar{\tau}_{yz})$	0.231	0.217	0.1832	0.1227	0.1561	0.1793	0.3030	-----
	²	-----	-----	0.2086	0.1850	0.1968	0.2038	0.2311	0.0823
10	$\bar{w} \times 10^2$	0.765	-----	0.7125	0.6306	0.6693	0.6949	0.8210	0.4313
	$\bar{\sigma}_{xx}$	0.599	0.590	0.568	0.517	0.513	0.510	0.499	0.538
	$(\bar{\tau}_{yz})$	0.108	0.123	0.103	0.073	0.091	0.103	0.172	-----
		-----	-----	0.116	0.106	0.110	0.113	0.126	0.082
100	$\bar{w} \times 10^2$	0.434	-----	0.434	0.433	0.433	0.434	0.435	0.431

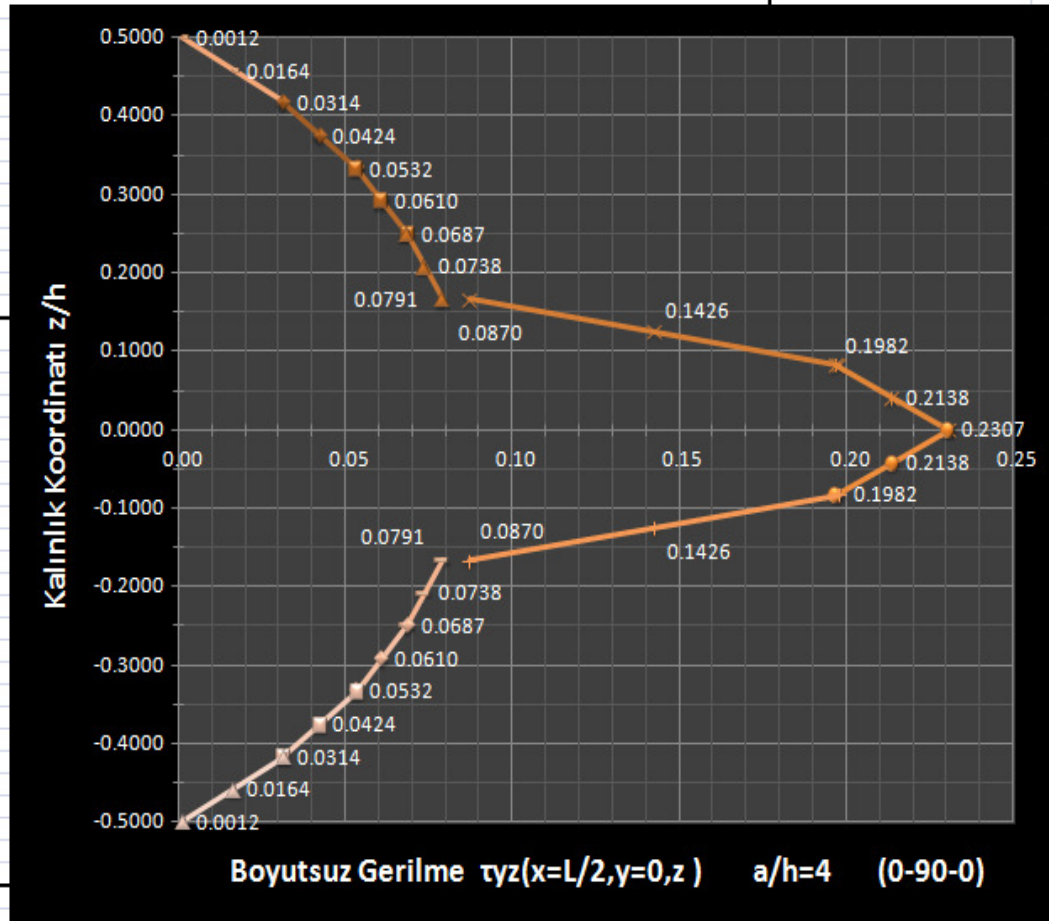
Çizelge 9.7’den görüleceği üzere tüm plağın modellendiği (6x6) tabaka duyarlı sonlu eleman (Genson) ile gerçekleştirilen çözümlerin çeşitli (L/h) değerleri için ELS (Elastisite Çözümü) sonuçları ile örtüştüğü görülmektedir.

Şekil 9.43’de üç tabakalı (0/90/0) kare plağın a/h=4 değeri için x=L/2, y=0 noktasındaki boyutsuz kayma gerilmesinin $\bar{\tau}_{yz}$ kalınlık boyunca değişimi görülmektedir. Benzer şekilde Şekil 9.44’de aynı plağa ait boyutsuz kayma gerilmesi $\bar{\tau}_{xz}$ nin x=0, y=L/2 noktasında kalınlık boyunca değişimi verilmiştir.

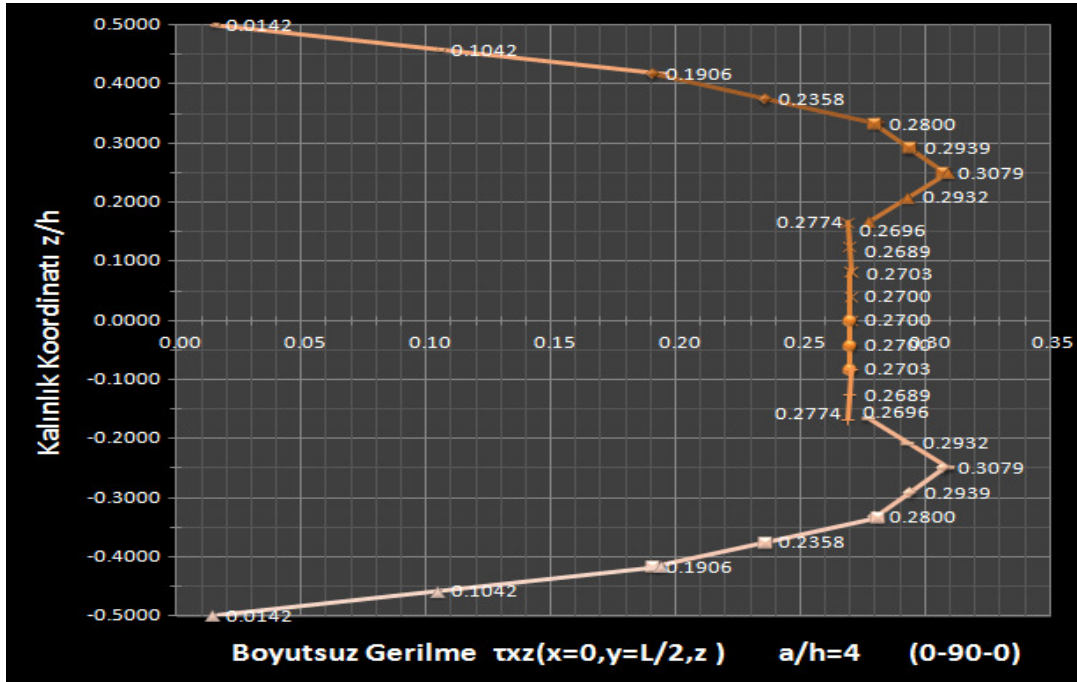
Plağın güçlü eksenini tabakalı plağın orta düzleminden en uzaktaki liflerin açısı belirlediğinden ve en dıştaki tabakaların x eksenine yaptığı açının 0 derece olması nedeniyle Şekil 9.45’de plak açıklığında, (x=L/2, y=L/2) noktasındaki boyutsuz normal gerilme ($\bar{\sigma}_{xx}$)’ in kalınlık boyunca değişimi gösterilmiştir.

¹ Pagano [42] tarafından yapılmış olan üç boyutlu elastisite çözümü

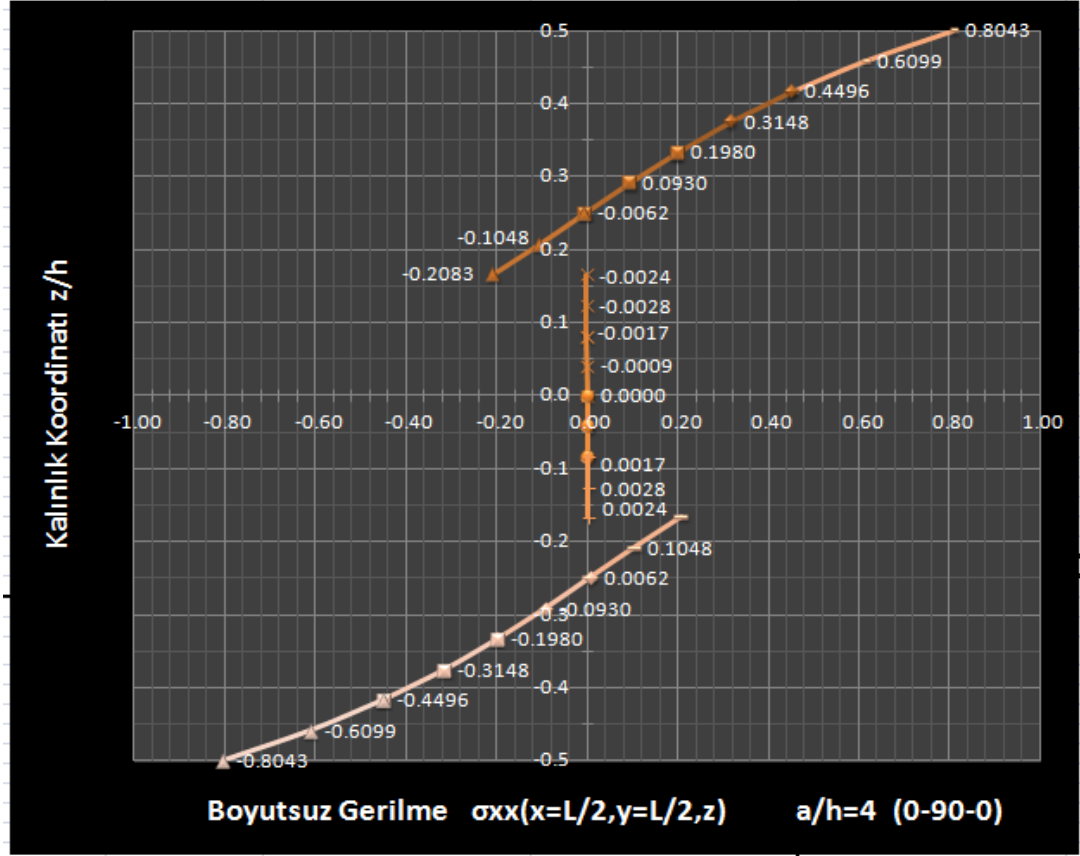
² Çizelgede ($\bar{\sigma}_{yz}$) için ayrılan ikinci satır üç boyutlu elastisite denge denklemleri yardımıyla elde edilmiştir.



Şekil 9.43 : Üç tabakalı (0/90/0) kare plağa ait boyutsuz kayma gerilmesinin kalınlık boyunca değişimi $\bar{\tau}_{yz}(x=L/2, y=0, z)$.



Şekil 9.44 : Üç tabakalı (0/90/0) kare plağa ait boyutsuz kayma gerilmesinin kalınlık boyunca değişimi $\bar{\tau}_{xz}(x=0, y=L/2, z)$.



Şekil 9.45 : Üç tabakalı (0/90/0) kare plağa ait boyutsuz normal gerilmenin kalınlık boyunca değişimi $\bar{\sigma}_{xx}(x=L/2, y=L/2, z)$.

Benzer şekilde Genson programı ile elde edilen 4 tabakalı (0/90/90/0) basit mesnetli kare plağa ait boyutsuzlaştırılmış orta nokta çökme ve gerilme değerlerinin karşılaştırılması Çizelge 9.8’de verilmiştir.

Çizelge 9.8 : Sinüsoidal yük etkisindeki 4 tabakalı simetrik (0/90/90/0) basit mesnetli kare plakların boyutsuzlaştırılmış orta nokta çökme ve gerilme değerleri.

a/h	Kaynak	$\bar{w} \times 10^2$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\tau}_{yz}$	$\bar{\tau}_{xz}$
4	Genson	1.992	0.715	0.686	0.340	0.228
	ELS ³	1.954	0.720	0.663	0.292	0.219
	TSDT	1.894	0.665	0.632	0.239	0.206
					0.298	0.231 ⁴
	FSDT	1.710	0.406	0.576	0.196	0.140
					0.280	0.269
10	Genson	0.747	0.568	0.406	0.235	0.312
	ELS	0.743	0.559	0.401	0.196	0.301
	TSDT	0.715	0.546	0.389	0.153	0.264
					0.192	0.307
	FSDT	0.663	0.4989	0.361	0.130	0.167
					0.181	0.318
20	Genson	0.517	0.548	0.310	0.197	0.338
	ELS	0.517	0.543	0.308	0.156	0.328
	TSDT	0.506	0.539	0.304	0.123	0.282
					0.154	0.330
	FSDT	0.491	0.527	0.296	0.109	0.175
					0.150	0.333
100	Genson	0.434	0.542	0.274	0.242	0.375
	ELS	0.438	0.539	0.276	0.141	0.337
	TSDT	0.434	0.539	0.271	0.112	0.290
					0.139	0.339
	FSDT	0.434	0.538	0.270	0.101	0.178
					0.139	0.339
	CLPT	0.431	0.539	0.269	0.138	0.339

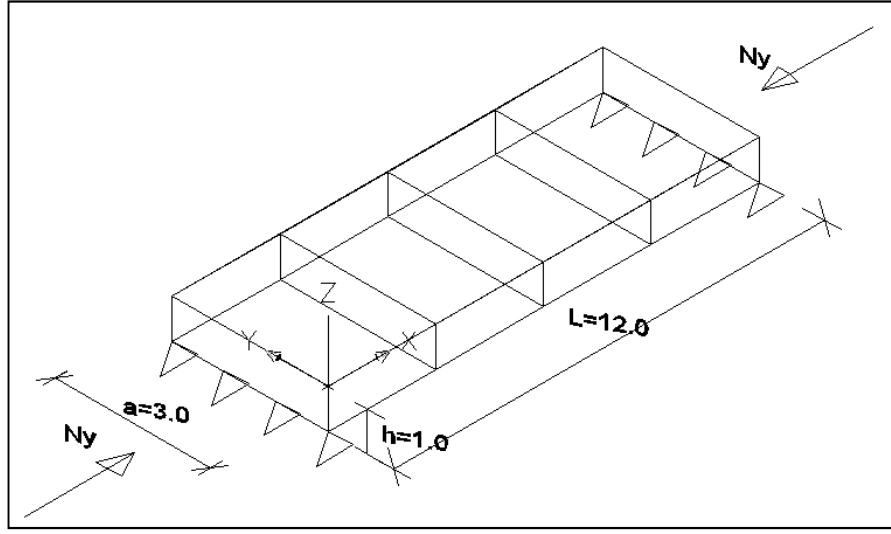
9.7 Geliştirilen Sonlu Elemanla Tek Doğrultuda Çalışan (Silindirik Eğilmeli) Plakların Burkulma Yükünün Bulunması

Tek doğrultuda çalışan (silindirik eğilmeli) plakların burkulma yükünün bulunması amacıyla Genson programında geliştirilen sonlu elemanla Şekil 9.46'da gösterilen basit mesnetli, $a=3.0$ [m] genişliğinde, $h=1.0$ [m] kalınlığında; $L=12.0$ [m] uzunluğunda tek tabaka izotrop plak problemi çözülmüştür. Malzeme özellikleri olarak izotrop malzemede elastisite modülleri $E_1 = E_2 = 25.0$ ve Poisson oranı

³ Pagano ve Hatfield [43] tarafından yapılmış olan 3 boyutlu elastisite çözümü

⁴ Denge denklemlerinden türetilen kayma gerilmeleri

$\nu = 0.25$ olarak alınmıştır. Kayma modülü yüksek ($G_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} = 10.0$) ve düşük ($G_{yz}=0.5$) olmak üzere iki ayrı durum incelenmiştir.



Şekil 9.46 : Silindirik eğilmeli plağın burkulma yükünün bulunması.

Çizelge 9.9’da; geliştirilen sonlu eleman kullanılarak kayma modülü yüksek ($G_{yz}=10.0$) ve düşük ($G_{yz}=0.5$) her iki durum için elde edilen boyutsuz burkulma yükü değerleri ile önceki bölümde anlatılan Çakıroğlu (1978) tarafından elde edilen çözümler karşılaştırılmıştır.

Çizelge 9.9 : Geliştirilen sonlu eleman ile elde edilen silindirik eğilmeli izotrop plak

boyutsuz burkulma yükü $\bar{N}_{y(bur)} = N_{y(bur)} \frac{a^2}{Eh^3}$ değerlerinin karşılaştırılması.

$\bar{N}_{ybur}$	$G_{yz} = 10.0$	$G_{yz} = 0.50$
Genson	2.433	1.924
Çakıroğlu [38]	2.426	1.838

9.8 Geliştirilen Sonlu Elemanla Her İki Doğrultuda Eğilmeli, Basit Mesnetli, İzotrop Kare Plak Burkulma Yükünün Hesaplanması

Her iki doğrultuda çalışan izotrop kare plağın burkulma yükünün önceki bölümde anlatılan [39]’da elde edilen çözümlerle örtüştüğünü göstermek amacıyla Genson programında geliştirilen sonlu elemanla; basit mesnetli, sadece x eksenli doğrultusunda düzlemiçi kuvvete maruz ile her iki doğrultuda düzlemiçi kuvvetlere maruz iki ayrı izotrop kare plak durumu ele alınmıştır. Malzeme özellikleri; $E_1 = E_2 = 20.0$; $G_{xy} = G_{xz} = G_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} = 8.0$ olmak üzere; $a=b=6.0[m]$; $a/h = 10$ geometrik özelliklerine sahip plaklar incelenmiştir. Çizelge 9.10’da izotrop kare

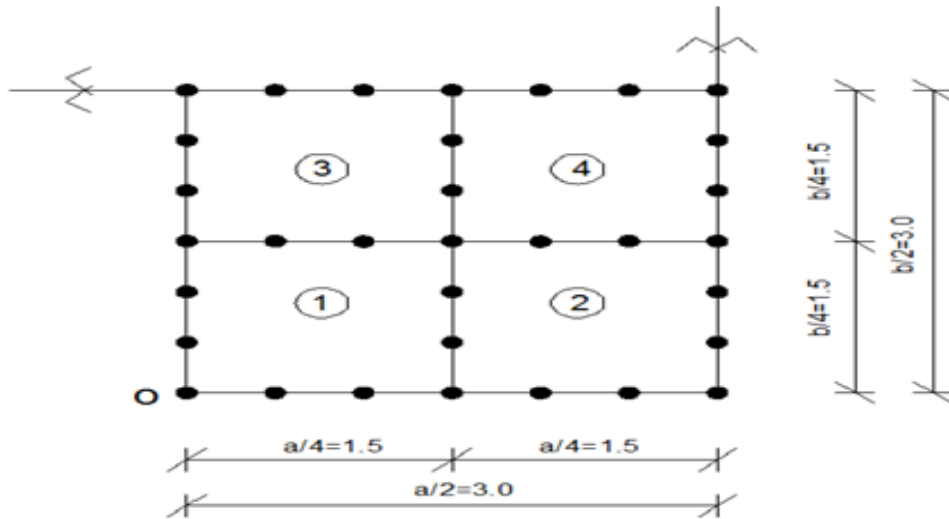
plakların iki ayrı durum için Genson programından elde edilen boyutsuz burkulma yüklerinin $\bar{N}_{x(bur)} = N_{x(bur)} \frac{a^2}{Eh^3}$ [39] çözümleriyle karşılaştırılması verilmiştir.

Çizelge 9.10 : İzotrop Kare Plakların Boyutsuz Burkulma Yüklerinin Karşılaştırılması.

$P_{(bur)}$	N_x Yüklü	$N_x - N_y$ Yüklü
Genson	2.705	1.351
Timoshenko [39]	2.806	1.407

9.9 Geliştirilen Sonlu Elemanla Her İki Doğrultuda Eğilmeli Basit Mesnetli Tabakalı Ortotrop Kare Plak Burkulma Yükünün Hesaplanması

Her iki doğrultuda çalışan ortotrop tabakalı plakların burkulma yüklerinin bulunması amacıyla Genson programında; Şekil 9.47’de görülen geometri ve eleman ağı özelliklerine sahip; x eksenini doğrultusunda düzlemiçi kuvvete maruz basit mesnetli simetrik 3 tabaka (0/90/0), 4 tabaka (0/90/90/0) ve 5 tabakalı (0/90/0/90/0) üç ayrı durum ele alınmıştır. Yükleme ve sistemin simetrik olma özelliğinden yararlanılarak tabakalı plaklar; dörtte bir sistem üzerinde (2x2) sonlu elemana bölünerek incelenmiştir.



Şekil 9.47 : Ortotrop tabakalı kare plak geometrik özellikler.

Çizelge 9.11’de çeşitli a/h değerleri için 4 tabakalı (0/90/90/0) kare plak boyutsuz burkulma yükünün Genson programından elde edilen değerleri birinci mertebe kayma deformasyon teorisi(FSDT), klasik plak teorisi (CLPT) ve üçüncü mertebe kayma deformasyon teorisine (TSDT) göre elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Çizelge 9.11 : Basit Mesnetli Simetrik 4 Tabakalı (0/90/90/0) Kare Plak Boyutsuz

$$\text{Burkulma Yüğü, } \bar{N} = N_{cr} \frac{a^2}{E_2 h^3}$$

$$(E_1/E_2 = 40.0, \quad G_{12} = G_{13} = 0.6E_2, \quad G_{23} = 0.5E_2, \nu_{12} = 0.25).$$

a/h	CLPT	FSDT	TSDT	GENSON
5	36.160	11.575	11.997	11.917
10	36.160	23.453	23.340	23.300
20	36.160	31.707	31.660	31.600
50	36.160	35.356	35.347	35.417
100	36.160	35.955	35.953	38.167

Çizelge 9.12’de basit mesnetli simetrik 3 tabakalı (0/90/0) ve 5 tabakalı (0/90/0/90/0) kare plak boyutsuz burkulma yükünün malzeme anizotropisine bağlı değişimi görülmektedir.

Çizelge 9.12 : X Eksenli Doğrultusunda Yüklü, Basit Mesnetli, Simetrik 3 Tabakalı (0/90/0) ve 5 Tabakalı (0/90/0/90/0) Kare Plak Boyutsuz Burkulma Yükünün

$$(\bar{N} = N_{cr} \frac{a^2}{E_2 h^3}), \text{ malzeme anizotropisine } (E_L/E_T) \text{ bağlı değişimi.}$$

Kare Plak Boyutsuz Burkulma Yüğü ($\bar{N} = N_{cr} \frac{a^2}{E_2 h^3}$) ($G_{12} = G_{13} = 0.6E_2, G_{23} = 0.5E_2, \nu_{12} = 0.25, a/h = 10$)				
E_L/E_T	TABAKA SAYISI			
	3		5	
	GENSON	ELASTİSİTE [24]	GENSON	ELASTİSİTE [24]
3	5.400	5.3044	5.417	5.3255
10	9.833	9.762	10.083	9.960
20	15.000	15.0191	15.667	15.653
30	18.883	19.304	20.333	20.466
40	22.117	22.881	24.300	24.593

9.10 Geliştirilen Sonlu Elemanla İzotrop Dairesel Plak Burkulma Yükünün Hesaplanması

İzotrop dairesel plak burkulma yükünün hesaplanması amacıyla Genson programında; Şekil 9.22’de görülen çeyrek dairesel plak elemana ait malzeme özellikleri;

$$E_1 = E_2 = 30 \times 10^6 \text{ (psi)} = 206700 \text{ [Mpa]} \quad (9.19)$$

$$G_{xy} = G_{xz} = G_{yz} = 11.538 \times 10^6 \text{ (psi)} = 79500 \text{ [MPa]} \quad (9.20)$$

$$\nu_{xy} = 0.30 \quad (9.21)$$

olarak alınmıştır. İzotrop, ankastre mesnetli plağın $r=6$ [m] çevresinde radyal basınç yükü P_r 'ye maruz kalması durumunda çeşitli h/r değerleri için geliştirilen sonlu elemanla elde edilen burkulma faktörleri (λ) ;

$$\lambda = \frac{\sigma_r h r^2}{D} \quad (9.22)$$

olmak üzere; [44] ve [25]'de yer alan analitik çözümlerle karşılaştırılarak Çizelge 9.13'de verilmiştir.

Çizelge 9.13 : İzotrop, ankastre mesnetli dairesel plakların burkulma faktörlerinin (λ) karşılaştırılması.

h/r	Genson	[44]	[25]
0.05	14.560	14.552	14.552
0.10	14.214	14.177	14.177
0.15	13.637	13.586	13.587
0.20	12.904	12.824	12.824

9.11 Geliştirilen Sonlu Elemanla Tabakalı Kompozit Dairesel Plakların Burkulma Yükünün Hesaplanması

9.11.1 Çekirdek ve dış yüz tabakalanmalarının farklı izotrop malzemelerden oluşturulması durumu

[25]'deki elastisite çözümüne dayalı çalışmada; tabaka kalınlıkları sırasıyla h_f ve h_c olan iki dış yüz ve çekirdek tabakadan oluşan üç tabakalı dairesel plakların $h_f/h=0.1$ ve $h_c/h=0.8$ oranları için burkulma probleminde; E_c izotrop çekirdek tabakanın elastisite modülü; E_f izotrop dış yüz tabakalarının elastisite modülleri olmak üzere;

$$\gamma = \frac{E_c}{E_f} \quad (9.23)$$

olarak tanımlanmıştır. Geliştirilen sonlu elemanla Genson programından elde edilen sonuçlar; [25]'e ait elastisite çözümleri ile çeşitli r/h ve γ değerleri için karşılaştırılarak;

$$\Lambda = 10^2 \sigma_r / E_f \quad (9.24)$$

olmak üzere ankastre mesnetli durum için burkulma yükü faktörleri (Λ) Çizelge 9.14'de verilmiştir.

Çizelge 9.14 : Üç tabakalı, ankastre mesnetli dairesel plakların burkulma faktörlerinin (Λ) çeşitli (γ) değerleri için karşılaştırılması.

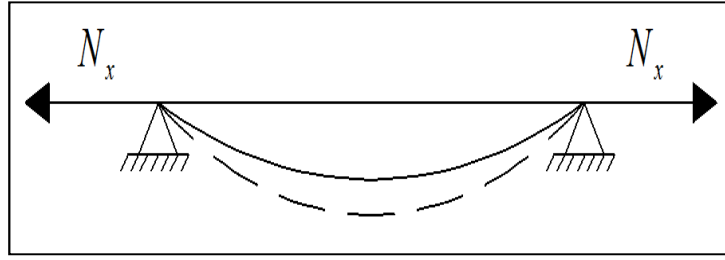
h/r	$\gamma = 0.1$		$\gamma = 0.5$	
	Genson	[25]	Genson	[25]
0.05	0.1835	0.1735	0.2450	0.2469
0.10	0.6075	0.6143	0.9210	0.9524
0.15	1.1420	1.1572	1.9445	2.0201
0.20	1.6313	1.6712	3.1965	3.3203
0.30	2.4190	2.4356	5.8830	6.1168

9.11.2 Üç Tabakalı (90/0/90) Kompozit Dairesel Plak Burkulma Yükünün Hesaplanması

Ortotrop dairesel plak burkulma yükünün hesaplanması amacıyla (9.4.a)-(9.4.d) denklemlerinde verilen malzeme özellikleri kullanılarak ankastre mesnetli ve $r/h=10$ durumu için üç tabakalı (90/0/90) dairesel plağa ait radyal doğrultudaki boyutsuz burkulma yükü $\bar{N}_{bur} = N_{bur} \frac{r^2}{E_T h^3} = 0.0396 \times \frac{6^2}{0.75 \times 0.6^3} = 8.8$ olarak bulunmuştur.

9.12 Geliştirilen Sonlu Elemanla Tabakalı Kompozit Plakların Geometrik Nonlineer Hesabı

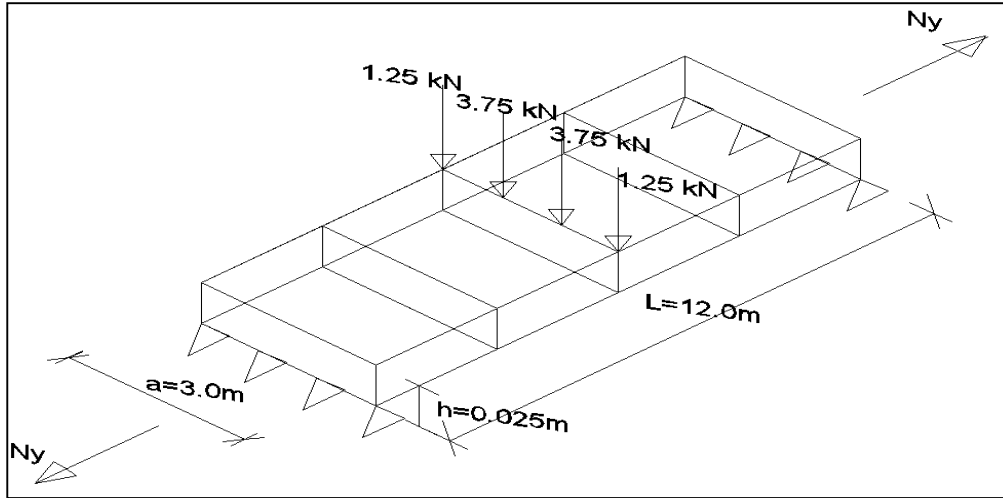
Bu bölüm; Bölüm 7.3 de açıklanan ve Şekil 9.48'de görüldüğü üzere mesnetlerinde düzlemiçi hareketin engellenmesi nedeniyle eğilme sırasında oluşan eksenel çekme kuvvetlere maruz plakların geometrik nonlineer hesabına ayrılmış olup sırasıyla tek doğrultuda (silindirik eğilmeli) ve her iki doğrultuda çalışan dörtgen plaklar ile dairesel plakların sonuçları açıklanmıştır.



Şekil 9.48 : Düzlemiçi hareketin tutulması sonucu oluşan eksenel çekme kuvvetinin deplasman azaltıcı etkisi.

9.12.1 Geliştirilen Sonlu Elemanla Tek Doğrultuda Çalışan (Silindirik Eğilmeli) Plakların Lineer Olmayan Hesabı (Eksenel Kuvvetin Çekme Olması Hali)

Tek doğrultuda çalışan (silindirik eğilmeli) plakların mesnetlerde düzlemiçi hareketin engellenmesi nedeniyle eğilme sırasında oluşacak eksenel kuvvetin çekme olacağı nonlinear hesabında; Genson programında Şekil 9.49’da gösterilen basit mesnetli, $a=3.0$ [m] genişliğinde, $h=0.025$ [m] kalınlığında; $L=12.0$ [m] açıklığında tek tabaka izotrop plak problemi çözülmüştür. Malzeme özellikleri olarak $E_1 = E_2 = 25.0 \times 10^6$ [psi] = 17.225×10^7 [$\frac{kN}{m^2}$], $G_{xy} = G_{xz} = G_{yz} = 6.89 \times 10^7$ [$\frac{kN}{m^2}$], $\nu = 0.25$ olarak alınmıştır.



Şekil 9.49 : Eksenel kuvvetin çekme olması durumunda silindirik eğilmeli plak yükleme ve geometrik özellikler.

Çizelge 9.15’den görüleceği üzere yapılan hesaplar sonucunda aranan nonlinear düşey yerdeğiştirmenin $0,0203[kN] < N_{max} < 20000[kN]$ çekme kuvveti aralığında olduğu bulunmuş ve yakınsamayı hızlandırmak amacıyla önce çözüm $N = \frac{N_{max}}{50}$ çevresinde aranmış; girilen N_{max} değeri ile sonuçta bulunan N_{max} değeri birbirinden farklı olduğu görülünce çözüm $N = \frac{N_{max}}{110}$ çevresinde aranarak

$N=176.9[\text{kN/m}]$ çekme değeri için açıklık ortasındaki düşey yerdeğiştirme $w_{\max}=0.0468 [\text{m}]$ olarak bulunmuştur.

Çizelge 9.15 : Eksenel kuvvetin çekme olması durumunda silindirik eğilmeli plağın geometrik nonlineer hesabında uygulanan ardışık yaklaşım.

$N_{\max}[\text{kN}]$	$EO_{\max}$	INONL		$w_{\max}[\text{m}]$	$EO_{\max}$	$N_{\max}[\text{kN}]$
0	(---)	1	$\Rightarrow$	0.5016	0.264×10^{-4}	0
(---)	0.264×10^{-4}	2	$\Rightarrow$	(---)	(---)	20000
20000	(---)	1	$\Rightarrow$	0.487×10^{-3}	0.530×10^{-8}	(---)
(---)	0.530×10^{-8}	2	$\Rightarrow$	(---)	(---)	0.0203
$N_{\max} = 0.0203 \leftrightarrow 20000 [\text{kN}]$ aralığında $\rightarrow$ Çözüm $N = \frac{N_{\max}}{50} = 400[\text{kN}]$ aralığında aranırsa;						
400.0	(---)	1	$\Rightarrow$	0.0223	0.933×10^{-5}	(---)
(---)	0.933×10^{-5}	2	$\Rightarrow$	(---)	(---)	$40.9 \neq 400.0$
Çözüm $N = \frac{N_{\max}}{110} \cong 181[\text{kN}]$ aralığında aranırsa						
181.8	(---)	1	$\Rightarrow$	0.0457	0.440×10^{-4}	(---)
(---)	0.440×10^{-4}	2	$\Rightarrow$	(---)	(---)	$168 \neq 181.8$
173.9	(---)	1	$\Rightarrow$	0.0475	0.480×10^{-4}	(---)
(---)	0.480×10^{-4}	2	$\Rightarrow$	(---)	(---)	$181 \neq 173.9$
176.9	(---)	1	$\Rightarrow$	0.0469	0.465×10^{-4}	(---)
(---)	0.465×10^{-4}	2	$\Rightarrow$	(---)	(---)	$176 \cong 176.9$

Genson programı tarafından bulunan deplasman çözümünü doğrulamak amacıyla; [38] 'de yer alan ve Bölüm 7.3.1 de anlatılan çözümle karşılaştırılırsa;

$$k_m = \frac{E_1}{(1 - \nu^2)} \frac{bh^3}{12} = \frac{17,225 \cdot 10^7}{(1 - 0,25^2)} \frac{3,0 \cdot (0,025)^3}{12} = 717,71 \quad (9.25)$$

$$k_t = G k F = \frac{E}{2(1 + \nu)} k F = \frac{17,225 \cdot 10^7}{2(1 + 0,25)} (1,0)(3,0)(0,025) = 5167500 \quad (9.26)$$

olmak üzere Genson programından birim genişlik için bulunan normal kuvvet $N=176.9[\text{kN/m}]$ değeri için;

$$\overline{k_m} = k_m \left(1 + \frac{N}{k_t} \right) = 717,71 \left(1 + \frac{176,9 \times 3,0}{5167500} \right) = 717,78 \quad (9.27)$$

$$\overline{k_t} = k_t \left(1 + \frac{N}{k_t} \right) = 5167500 \left(1 + \frac{176,9 \times 3,0}{5167500} \right) = 5168030 \quad (9.28)$$

olarak bulunur. (7.30) denkleminde;

$$\overline{\alpha} = \sqrt{\frac{N}{k_m \left(1 + \frac{N}{k_t} \right)}} = \sqrt{\frac{176,9 \times 3}{717,78}} = 0,860 \quad (9.29)$$

olarak bulunur. (7.60) denkleminde;

$$\mu(P) = \left(\frac{1}{0,860^3 \times 717,78} - \frac{1}{0,860 \times 5168030} \right) 717,8 \times 0,860^2 \frac{\text{Sh}(0,860 \times 6)}{\text{Ch}(0,860 \times 6)} = 1,163 \quad (9.30)$$

olmak üzere birim deplasman sabiti $\overline{t_{j\delta}}$;

$$\overline{t_{j\delta}} = \frac{(0,860)^2 \times 717,78}{(6 - 1,163)} = 109,741 \quad (9.31)$$

olarak bulunur. Sistemin yarısıyla hesap yapıldığı gözönünde tutularak; toplam düşey yükün yarısı 5,0 [kN] yükleme için meydana gelecek açıklık ortasındaki düşey yerdeğiştirme δ ;

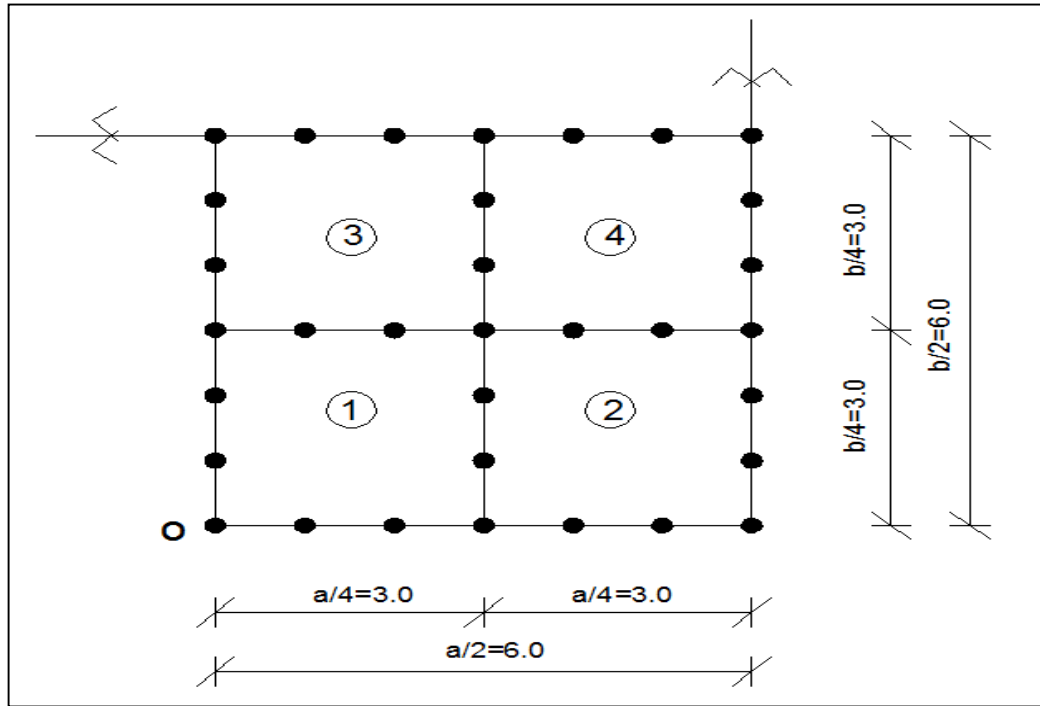
$$\delta = \frac{5,0}{109,741} = 0,0455 [\text{m}] \cong \delta_{\text{GENSON}} = 0,0469[\text{m}] \quad (9.32)$$

olarak bulunur.

9.12.2 Geliştirilen Sonlu Elemanla Her İki Doğrultuda Eğilmeli, Ankastre Mesnetli Tabakalı (0/90) Ortotrop Kare Plak Geometrik Nonlineer Hesabı (Eksenel Kuvvetin Çekme Olması Hali)

Her iki doğrultuda çalışan ortotrop tabakalı plakların eksenel kuvvetin çekme olması hali için geometrik nonlinear hesabında Genson programında; Şekil 9.50'de görülen

geometri ve eleman ağı özelliklerine sahip; x ve y eksenleri doğrultusunda eğilme sonrası oluşacak düzlemiçi çekme kuvvetlerine maruz, ankastre mesnetli, üniform düşey yüklü, 2 tabakalı (0/90) durum ele alınmıştır. Yükleme ve sistemin simetrik olma özelliğinden yararlanılarak tabakalı plak; dörtte bir sistem üzerinde (2x2) sonlu elemana bölünerek incelenmiştir. Malzeme özellikleri olarak; $E_1 = 40 \times 10^6 [\text{psi}] = 275600 [\text{Mpa}]$; $E_2 = 1 \times 10^6 [\text{psi}] = 6890 [\text{Mpa}]$; $G_{xy} = G_{xz} = 0.6E_2$; $G_{yz} = 0.5E_2$; $\nu_{xy} = 0.25$ olarak alınmıştır. Kullanılan geometrik parametreler olarak; toplam tabaka kalınlığı $h_T = 0.3 [\text{in}] = 7.62 \times 10^{-3} [\text{m}]$; $a = b = 12 [\text{in}] = 0.3048 [\text{m}]$ olmak üzere; $a/h_T = 40$ olarak alınmıştır. Düşey yük parametresi artışı; $\Delta q_0 = 200 [\text{psi}] = 1.378 [\text{Mpa}]$ olarak belirlenmiştir.



Şekil 9.50 : Ortotrop tabakalı (0/90) kare plak geometrik özellikler.

Çizelge 9.16 ve Çizelge 9.17’de sırasıyla $q_0=100 [\text{psi}]$ ve $q_0=200 [\text{psi}]$ düşey yük parametreleri için tabakalı plak (0/90) geometrik nonlinear hesapta yapılan ardışık yaklaşım görülmektedir.

Çizelge 9.16 : Eksenel kuvvetin çekme olması için tabakalı kare plağın (0/90) geometrik nonlineer hesabında uygulanan ardışık yaklaşım ($q_0 = 100[\text{psi}] = 0.689[\text{Mpa}]$ için).

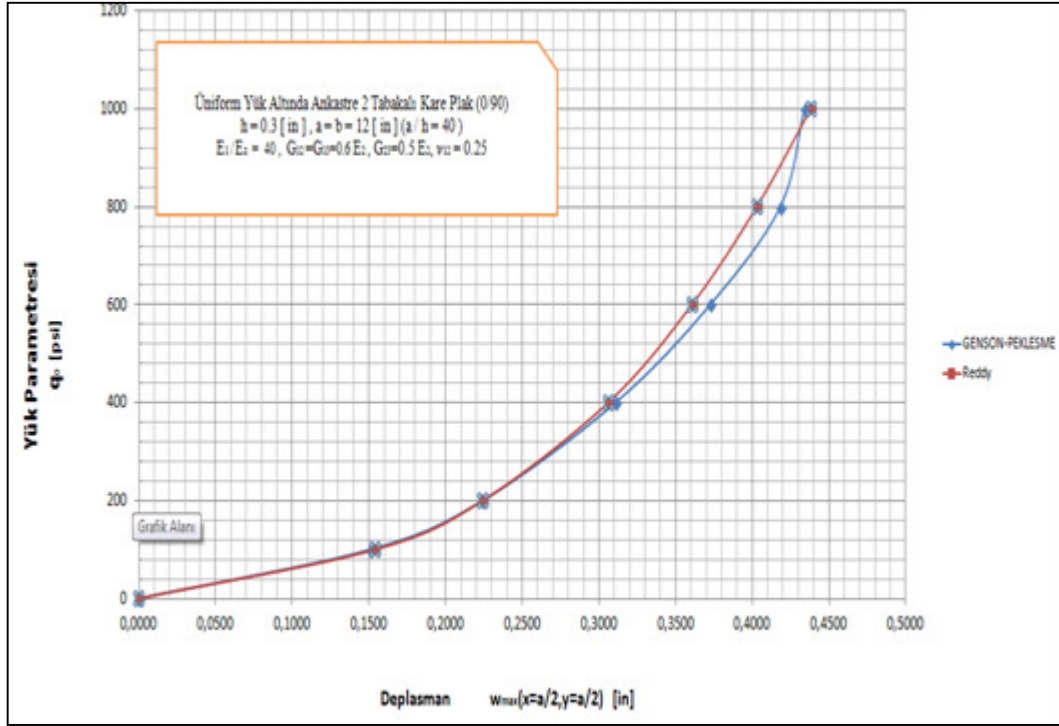
$q_0 = 100[\text{psi}]$	$N_{\max}$ $x=a/2, y=a/2$	$EO_{\max}$	INONL	$w_{\max} (x=a/2, y=a/2)$	$EO_{\max}$	$N_{\max}$ $x=a/2, y=a/2$
(gensonN1H)	0	(X)	1	0,2133	(...)	(X)
(gensonN2H)	(X)	(...)	2	(X)	(X)	N_1 (5990,5770)
(gensonN5H)	$N_1/10$ (599,577)	(X)	1	0,1970	(...)	(X)
(gensonN6H)	(X)	(...)	2	(X)	(X)	$N_2 \neq N_1/10$ (5090,4880)
(gensonN7H)	$N_1/5$ (1200,1150)	(X)	1	0,1830	(...)	(X)
(gensonN8H)	(X)	(...)	2	(X)	(X)	$N_3 \neq N_1/5$ (4390,4170)
(gensonN9H)	$N_1/2$ (2990,2890)	(X)	1	0,1510	(...)	(X)
(gensonN10H)	(X)	(...)	2	(X)	(X)	$N_4 \approx N_1/2$ (2980,2870)

Çizelge 9.17 : Eksenel kuvvetin çekme olması durumunda tabakalı kare plağın (0/90) geometrik nonlineer hesabında uygulanan ardışık yaklaşım ($q_0 = 200[\text{psi}] = 1.378[\text{Mpa}]$ için).

$q_0 = 200[\text{psi}]$	$N_{\max}$ $x=a/2, y=a/2$	$EO_{\max}$	INONL	$w_{\max} (x=a/2, y=a/2)$	$EO_{\max}$	$N_{\max}$ $x=a/2, y=a/2$
(gensonN1G)	0	(X)	1	0,4270	(...)	(X)
(gensonN2G)	(X)	(...)	2	(X)	(X)	N_1 (23700,23200)
(gensonN5G)	$N_1/10$ (2370,2320)	(X)	1	0,3210	(...)	(X)
(gensonN6G)	(X)	(...)	2	(X)	(X)	$N_2 \neq N_1/10$ (13200,12800)
(gensonN7G)	$N_1/5$ (4730,4650)	(X)	1	0,2571	(...)	(X)
(gensonN8G)	(X)	(...)	2	(X)	(X)	$N_3 \neq N_1/5$ (8490,8060)
(gensonN19G)	$N_1/3.65$ (6480,6360)	(X)	1	0,2243	(...)	(X)
(gensonN10H)	(X)	(...)	2	(X)	(X)	$N_9 \approx N_1/3.65$ (6470,6040)

Benzer şekilde diğer düşey yük parametreleri için de ardışık yaklaşımlar uygulanarak ankastre mesnetli, 2 tabakalı (0/90) plağa ait elde edilen, Şekil 9.51’de mavi eğri ile görülen pekleşme grafiğinin birinci mertebe kayma deformasyon teorisi (FSDT)

kullanılarak [16]'da elde edilen sonlu eleman çözümleri (kırmızı grafik) ile örtüştüğü görülmektedir.



Şekil 9.51 : İki tabakalı (0/90) anksatre kare plak pekleşme grafiği.

9.12.3 Geliştirilen Sonlu Elemanla Anksatre Mesnetli, Tabakalı İzotrop Dairesel Plak Geometrik Nonlineer Hesabı (Eksenel Kuvvetin Çekme Olması Hali)

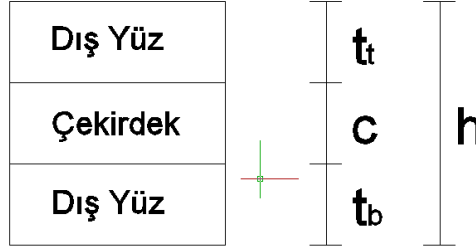
Tabakalı dairesel plakların eksenel kuvvetin çekme olması hali için geometrik nonlinear hesabında Genson programında; Şekil 9.22’de görülen geometri ve eleman ağı özelliklerine sahip; eğilme sonrası oluşacak düzlemiçi çekme kuvvetlerine maruz, anksatre mesnetli, üniform düşey yüklü, izotrop 3 tabakalı sandviç plak (Dış yüz-Çekirdek-Dış yüz) ele alınmıştır. Yükleme ve sistemin simetrik olma özelliğinden yararlanılarak tabakalı plak; dörtte bir sistem üzerinde 6 sonlu elemana bölünerek incelenmiştir. Karşılaştırmak amacıyla malzeme ve geometri özellikleri [23]’de incelenen problemten alınarak; Poisson oranı $\nu_{12} = 0.30$; E_f ve E_c sırasıyla dış yüz ve çekirdek(orta) tabakalarının elastisite modülleri olmak üzere;

$$m = \frac{E_f}{E_c} = 100 \quad (9.33)$$

olarak alınmıştır. Şekil 9.52’den görüleceği üzere sırasıyla üst ve alt dış yüz ile çekirdek tabakalarının kalınlıkları t_t , t_b ve c olmak üzere;

$$\frac{c}{t_t} = \frac{c}{t_b} = 10 \quad (9.34)$$

olarak tanımlanmıştır.

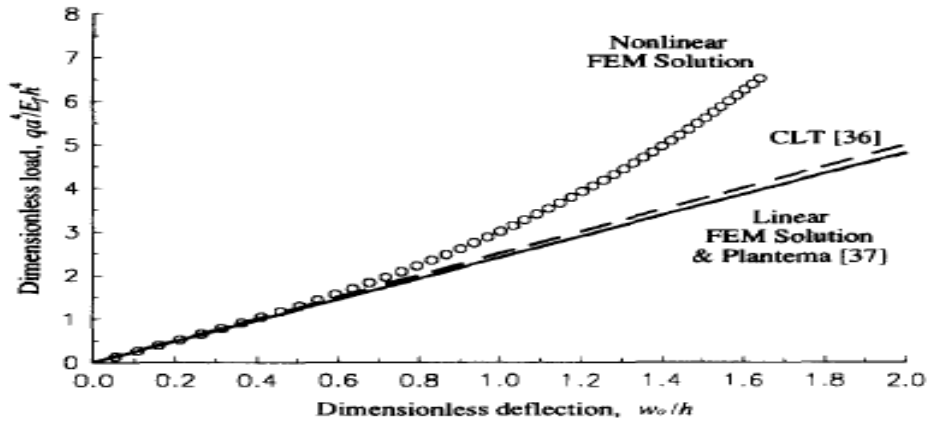


Şekil 9.52 : Tabakalı sandviç plak kalınlıkları.

Şekil 9.52’den görüleceği üzere toplam tabaka kalınlığı h ; yarıçap r olmak üzere;

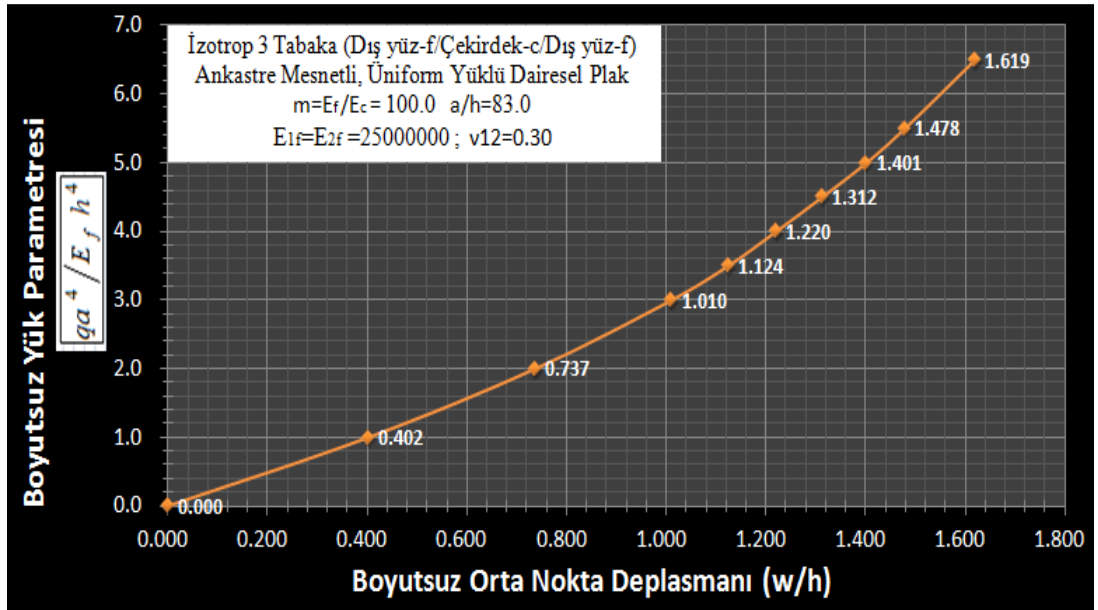
$$\frac{r}{h} = \frac{6.0}{0.0723} = 83 \quad (9.35)$$

olarak alınmıştır. Genson programında elde edilen geometrik nonlineer analiz sonuçlarının [23]’de geliştirilen sonlu eleman sonuçları ile karşılaştırılması gerçekleştirilmiştir. [23]’de radyal doğrultuda 20 sonlu elemana bölünerek elde edilen geometrik nonlineer pekleşme grafiği Şekil 9.53’de görülmektedir.



Şekil 9.53 : Thiel tarafından elde edilen pekleşme grafiği ($m=100$) [23].

Geliştirilen sonlu eleman kullanılarak Genson programından elde edilen pekleşme grafiği ise Şekil 9.54’de görülmektedir.



Şekil 9.54 : Geliştirilen sonlu eleman kullanılarak elde edilen tabakalı sandviç dairesel plak pekleşme grafiği.

Şekil 9.53 ve Şekil 9.54 grafikleri karşılaştırıldığında iki grafiğin birbiriyle örtüştüğü öte yandan tez kapsamında geliştirilen sonlu elemanla daha az sayıda eleman ağının kullanılarak (6 sonlu eleman) sonuca gidilebileceği görülmektedir.

10. SONUÇLAR VE İLERİYE DÖNÜK ÇALIŞMALAR

Bu çalışmada; düzlemde her iki doğrultuda kübik (dört noktalı), toplamda oniki düğüm noktalı, tabaka kalınlığı doğrultusunda herbir tabakada üst, orta ve alt düğüm noktaları olmak üzere üç düğüm noktalı; maksimum onbeş tabaka ve bir düğüm noktasında altmış üç serbestliğe sahip olabilecek kapasitede yeni bir tabaka duyarlı sonlu eleman geliştirilmiş olup bu sonlu eleman kullanılarak tabakalı kompozit plakların lineer ve geometrik nonlinear statik analizi gerçekleştirilmiştir. Geliştirilen sonlu eleman kullanılarak gerçekleştirilen tabakalı dörtgen ve dairesel plak analizlerinin üç boyutlu elastisite çözümleri ve literatürde yer alan eşdeğer tek tabaka teorilerinden birinci mertebe ve üçüncü mertebe kayma deformasyon teorileri ile karşılaştırılmasında;

1-) Eşdeğer tek tabaka teorilerinde tüm tabakalar boyunca sürekli ve türevlenebilir tek bir deplasman alanı belirlenmesine bağlı olarak tabaka geçişlerinde görülen düzlem dışı kayma gerilmelerinin olmaması gereken sıçramaları; geliştirilen sonlu elemanla kalınlık doğrultusunda tabaka sayısının arttırılmasıyla büyük ölçüde giderilmiş olup plağın en üst ve en alt noktalarında düzlem dışı kayma gerilmeleri (τ_{xz} , τ_{yz}) beklendiği üzere sifıra çok yakın olarak elde edilebilmiştir.

2-) Birinci Mertebe Kayma Deformasyon Teorisi kullanılarak geliştirilen sonlu elemanlardan farklı olarak yeni tabaka duyarlı sonlu elemanla herhangi bir kayma düzeltme katsayısına gerek kalmamaktadır.

3-) Geliştirilen sonlu elemanın eğrisel sınırlara sahip geometri üzerinde de etkin oluşu; gerçekleştirilen tabakalı dairesel plakların lineer ve geometrik nonlinear statik analiz sonuçlarının literatürde yer alan analitik çözümlerle karşılaştırılmasıyla kanıtlanmıştır.

4-) Tabakalı kompozit dörtgen ve dairesel plakların burkulma problemi de ayrıca ele alınmış olup geliştirilen sonlu eleman rijitlik matrisinde; plağa etkiyen düzlemiçi N_x , N_y , N_{xy} kesit zorlarının düzlemine dik doğrultudaki ikinci mertebe etkilerin de

dikkate alınması ve bu rijitlik matrisinin determinantının sıfırlanmasıyla elde edilen burkulma yükleri literatür sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır.

5-) Tabakalı kompozit plakların geometrik nonlinear statik analizi kapsamında bir ardışık yaklaşım prosedürü uygulanarak başlangıçta üzerinde herhangi bir düzlemiçi (membran) kuvvet bulunmamasına karşın; plağın eğilmesi ve mesnetlerde düzlemiçi hareketin engellenmesi sonucunda; oluşan düzlemiçi çekme kuvvetlerinin plak düzlemine dik deplasmanları azaltıcı etkisi (pekleşme) geliştirilen sonlu elemanla incelenmiştir.

İleriye dönük olarak yapılabilecek çalışmalar arasında; geliştirilen sonlu elemanla elde edilen tabaka kalınlıkları doğrultusundaki kayma gerilme dağılımına bağlı olarak tabakalar arası ayrışmanın nasıl ve nerede başlayacağı sorularına cevap aranabileceği düşünülmektedir. Ayrıca; geliştirilen sonlu elemanın tabakalı kompozit kabuk yapılar üzerine genişletilebilme imkanı da bulunmakta olup bu sayede tabakalı kompozit kabukların lineer ve geometrik nonlinear statik analizleri üzerine çalışmaların da ileride yapılması planlanmaktadır. İleride yapılması planlanan bu çalışmalarda [45]'de açıklanan ve şekil fonksiyonları olarak B-splines eğrilerinin kullanıldığı izogeometrik analize girilmesi düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] **Love, A. E.** (1828). "On the Small Free Vibrations and Deformations of the Elastic Shells,". *Philosophical Transaction of the Royal Society (London)*, 491-549.
- [2] **Cauchy, A.** (1828). Sur l'equilibre et le mouvement d'une plaque solide. *Exercices de Matematique*, 328-355.
- [3] **Poisson, S.** (1829). Memoire sur l'equilibre et le mouvement des corps elastique,, *Mem. Acad. Sci.*, 357.
- [4] **Kirchhoff, G.** (1850). Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. *J. Angew Math*, 51-88.
- [5] **Koiter, W.** (1959). A consistent first approximations in the general theory of thin elastic shells. *Proc. of Symp. on the Theory of Thin Elastic Shells*,, (s. 12-23). North-Holland, Amsterdam .
- [6] **Whitney, J.** (1969). The effects of transverse shear deformation on the bending of laminated plates. *J. Compos. Mater.* , 534-547.
- [7] **Y.X. Zhang & K.S. Kim.** (2004). Two simple and efficient displacement – based quadrilateral elements for the analysis of composite laminated plates, *Int. J. Numer. Meth. Engng*; **61**, 1771-1796
- [8] **Y.X. Zhang & K.S. Kim.** (2005). A simple displacement-based 3-node triangular element for linear and geometrically nonlinear analysis of laminated composite plates, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, **194**, 4607-4632.
- [9] **Huu-Tai Thai & Dong-Ho Choi.** (2013). A simple first order shear deformation theory for laminated composite plates, *Composite Structures*, **106**, 754-763
- [10] **M. V. V. Murthy.** (1981). An Improved Transverse Shear Deformation Theory For Laminated Anisotropic Plates (No. 1903) NASA Technical Paper.
- [11] **Reddy, J.N.** (1984). Simple Higher Order Theory For Laminated Composite Plates, *J. Appl. Mech.*, **51**(4), 745-752.
- [12] **Liu, S.** (1991) Vibration analysis of composite laminated plates, *Finite Element Analysis Design*, **9**(4), 295-307.
- [13] **Latheswary, S, Valsarajan KV, Sadasiva Rao YVK.** (2004) Dynamic response of moderately thick composite plates, *J. Sound Vib*, **270**, 417-426.
- [14] **G. Shi, K.Y. Lam, T.E. Tay.** (1998) On efficient finite element modeling of composite beams and plates using higher order theories and an accurate composite beam element, *Composite Structures*, **41**, 159-165.
- [15] **Maleki, S. and Tahani, M.** (2013). Bending analysis of laminated sector plates with polar and rectilinear orthotropy, *European Journal of Mechanics A/Solids*, **40**, 84-96.
- [16] **Reddy, J.N.** (1997). *Mechanics of Laminated Composite Plates, Theory and Analysis*. CRC Press.

- [17] Srinivas, S. (1973). A refined analysis of composite laminates, *J. Sound Vib.*, 495-507.
- [18] Lo, K., Christensen, R., & Wu, E. (1977). A higher order theory of plate deformation, Part 2: Laminated plates, *ASME J. Appl. Mech.*, 669-676.
- [19] Carrera, E., (2001) Developments, ideas and evaluations based upon Reissner's Mixed Variational Theorem in the modeling of multilayered plates and shells, *Appl Mech Rev*, **54**(4), 301-329.
- [20] Gunay, E, Erdem A.U. (1997) A new heterosis plate element for geometrically nonlinear finite element analysis of laminated plates, *Comput Struct*, **65**, 819-828.
- [21] Y.X. Zhang, K.S. Kim. (2006). Geometrically nonlinear analysis of laminated composite plates by two new displacement – based quadrilateral plate elements, *Composite Structures* **72** , 301-310.
- [22] Reddy, J.N. (1990). A general nonlinear third order theory of plates with moderate thickness, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **25**(6), 677-686.
- [23] Thiel, G.H. and Miller, R.E. (1994). A finite element for the nonlinear analysis of laminated circular plates, *Composite Structures*, **28**, 405-432.
- [24] Noor, A.K. (1975). Stability of Multilayered Composite Plates, *Fibre Science and Technology*, **8**, 81-88.
- [25] Ye, J. (1995). Axisymmetric buckling of homogenous and laminated circular plates, *Journal of Structural Engineering*, **121**(8), 1221-1224.
- [26] Kam TY, Chang, RR. (1992). Buckling of shear deformable laminated composite plates, *Composite Structures*, **22**, 223-234.
- [27] Sundaresan P, Singh G, Venkateswara Rao G. (1996). Buckling and post buckling analysis of moderately thick laminated rectangular plates, *Comput Struct*, **61**, 79-86.
- [28] Moita Jose Simoes, Mota Soares, Mota Soares Cristovao M, Mota Carlos A. (1996). Buckling behavior of laminated composite structures using a discrete higher order displacement model, *Composite Structures*, **35**, 75-92.
- [29] Saygun, A.I. (1974). *Yüzeysel Taşıyıcı Sistemlerin Hesabı İçin Eğrisel Sonlu Elemanlar*. (Doktora Tezi). İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [30] Url-1 <http://www.efunda.com/formulae/solid_mechanics/composites>, 09.09.2013.
- [31] Murakami H. (1986). Laminated composite plate theory with improved in-plane responses, *ASME J. Appl. Mech*, **53**, 661-666.
- [32] Jones, R.M. (1999). *Mechanics of Composite Materials*. Taylor & Francis, Inc. 325. Chestnut Street, Philadelphia, PA19106, 519.
- [33] Reddy, J.N. (2004). *Mechanics of Laminated Composite Plates – Theory and Analysis* CRC Press: Boca Raton.
- [34] Ugural, A.C. (1981). *Stresses in Plates and Shells*. McGraw-Hill.
- [35] Lekhnitskii, S. (1968). *Anisotropic Plates*.
- [36] Reddy, J.N. (2006). *An Introduction to the Finite Element Method* McGraw Hill.
- [37] Bathe, Klaus-Jürgen. (1996). *Finite Element Procedures*, Englewood Cliffs, N.J. : Prentice Hall.

- [38] **Çakıroğlu, A.** (1978). *Kayma şekildeğiştirmeleri gözönünde tutulan II. mertebe teorisine ait çubuk sabitleri* (Rapor No: 32). İstanbul: İ.T.Ü İnşaat Fak.
- [39] **Timoshenko, S.P. and Gere, J.M.** (1961) , *Theory of Elastic Stability*.-McGraw-Hill.
- [40] **Pagano, N.J.** (1969). Exact Solutions for Composite Laminates in Cylindrical Bending, *Journal of Composite Materials*,3, 398-411.
- [41] **Wilt, T.E., Saleeb, A.F. and Chang, T.Y.** (1990). A mixed element for laminated plates and shells, *Computers and Structures*, **37**, 597-611.
- [42] **Pagano, N.J.** (1970). Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates, *Journal of Composite Materials*, **4**, 20-34.
- [43] **Pagano, N.J. and Hatfield, S.J.** (1972). Elastic Behavior of Multilayered Bidirectional Composites, *AIAA Journal*, **10**, 931-933.
- [44] **Hong, G.M., Wang, C.M., and Tan, T.J.** (1993). Analytical buckling solutions for circular Mindlin plates: inclusion of inplane prebuckling deformation, *Archive Appl. Mech.*, **63**(8), 534-542.
- [45] **Cottrell, A.J., Hughes, T.J.R. & Bazilevs Y.** (2009) *Isogeometric Analysis Toward Integration of CAD and FEA*, Wiley.



ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Kazım Ahmet Haşim
Doğum Yeri ve Tarihi: İSTANBUL-12/01/1983
Adres: Yenifişekhane Cad. Ataköy 1. Kısım İB Blok No:53 K1
D.2 Bakırköy / İSTANBUL
E-Posta: hasim@itu.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU

Lisans: 2004, İ.T.Ü, İnşaat Fakültesi, İnşaat Mühendisliği
Yüksek Lisans: 2007, İ.T.Ü, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı, Yapı Mühendisliği

DOKTORA TEZİNDEN TÜRETİLEN YAYINLAR

- **Haşim, K.A.**, Saygun, A.I. (2014). Linear static analysis of laminated composite plates with layerwise finite element, *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, 32(3), 297-309.
- **Haşim, K.A.** (2014). A common evaluation of the multilayered composite plate and shells analysis, *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, 32(2), 176-188.

