

**SPEKTRAL RENORMALİZASYON GRUBU İLE
ÖLÇEK ENVARYANT ÇİZGELER ÜZERİNDE
KRİTİK ÜSTELLERİN HESAPLANMASI**

DOKTORA TEZİ

Ash TUNCER ÖZDEMİR

Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı

Fizik Mühendisliği Programı

OCAK 2016

**SPEKTRAL RENORMALİZASYON GRUBU İLE
ÖLÇEK ENVARYANT ÇİZGELER ÜZERİNDE
KRİTİK ÜSTELLERİN HESAPLANMASI**

DOKTORA TEZİ

**Ash TUNCER ÖZDEMİR
(509072110)**

Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı

Fizik Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ayşe ERZAN

OCAK 2016

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 509072110 numaralı Doktora Öğrencisi **Ash TUNCER ÖZDEMİR**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “**SPEKTRAL RENORMALİZASYON GRUBU İLE ÖLÇEK EN-VARYANT ÇİZGELER ÜZERİNDE KRİTİK ÜSTELLERİN HESAPLANMASI**” başlıklı tezini aşağıdaki imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Ayşe ERZAN**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Ayşe ERZAN**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Haluk ÖZBEK
İstanbul Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Cem SERVANTIE
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Muhittin MÜNGAN
Boğaziçi Üniversitesi

Prof. Dr. Uğur TIRNAKLI
Ege Üniversitesi

Teslim Tarihi : **23 Aralık 2015**

Savunma Tarihi : **28 Ocak 2016**

kızına,

ÖNSÖZ

Yalnızca bu teze katkıları değil, bilimsel çalışmanın nasıl yapılması gerekliliğini ve sorumluluğunu bana gösteren tez danışmanım, Ayşe ERZAN'a, yoğun çalışma saatlerime anlayış gösteren aileme ve ilgiye en çok ihtiyacı olduğu dönemde beni anlayan kızıma teşekkür ederim.

Ocak 2016

Aslı TUNCER ÖZDEMİR

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ	vii
İÇİNDEKİLER	ix
KISALTMALAR.....	xi
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xiii
ŞEKİL LİSTESİ.....	xv
ÖZET	xxv
SUMMARY	xxvii
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Ağ Yapıları, Önemi ve Yaygınlığı	1
1.1.1 Temel tanımlar	1
1.1.2 Klasik ve karmaşık çizgelerin derece dağılımları.....	3
1.2 Çizge Laplasyeni ve Laplace Spektrumu	4
1.2.1 Özdeğerler ve Özvektörler.....	5
1.3 Ağ Yapıları Üzerinde Kritik Fenomenler	6
1.4 Spektral Yöntemler.....	8
1.5 Tez planı	10
2. ALAN TEORİK RENORMALİZASYON GRUBU.....	11
2.1 Ginzburg-Landau Yaklaşımı	11
2.2 Wilson Tipi Renormalizasyon Grubu Yöntemi	13
3. SPEKTRAL RENORMALİZASYON GRUBU: GAUSSIYEN MODELİ ...	15
3.1 Temel Tanım	15
3.1.1 Ölçeklenme Stratejileri	17
3.1.1.1 Kip sayısının ölçeklenmesi	18
3.1.1.2 En büyük özdeğerin ölçeklenmesi	19
3.2 Laplasyen Özdeğerleri ve Özdeğer Dağılımları	21
3.2.1 Periyodik çizgeler.....	21
3.2.2 Cayley örgü yapısı	25
3.2.3 Elmas hiyerarşik örgüsü	31
4. GAUSSIEN MODELİN KRİTİK DAVRANIŞI.....	37
4.1 Peryodik Çizgeler İçin Gaussiyen Model Sabit Noktası	37
4.2 Cayley Ağacı İçin Gaussiyen Model Sabit Noktası	41
4.3 Elmas Örgü İçin Gaussiyen Model Sabit Noktası	45
5. SONLU ÖRGÜ ÖLÇEKLENMESİ (Finite Size Scaling).....	47
5.1 Tam Toplam (Exact enumeration): Gaussiyen Model.....	47
5.2 Çizgeler Üzerinde Sonlu Örgü Ölçeklenmesi	47
5.2.1 Uzaysal örgülerde sonlu boyut ölçeklenmesi: $d = 2$ ve $d = 3$ boyutta..	50

5.2.2 Uzaysal Olmayan Çizgelerde Sonlu Örgü Ölçeklenmesi: Cayley ağacı ve elmas örgü	51
6. GAUSSIEN MODELE ψ^4 TEDİRİGEMESİ VE ISING EVRENSELLİK SINIFI	55
6.1 Birinci Mertebeden Terimler	57
6.2 İkinci Mertebeden Terimler	62
7. SPEKTRAL BOYUTU $\tilde{d} > 2$ OLAN ÖRGÜLERDE SRG	67
7.1 $\tilde{d} > 2$ için İkinci Mertebeden Pertürbasyon Hesabı	69
7.1.1 $\tilde{d} > 2$ için birinci ve ikinci mertebeden etkileşim terimlerinin ölçeklenme diyagramları	74
7.1.2 $\tilde{d} > 2$ için mod sayısı ölçeklenmesi.....	79
8. RASTGELE ÇİZGELER	81
8.1 Gilbert Çizgeleri	83
8.1.1 Gilbert çizgeleri sayısal sonuçları	85
8.1.1.1 Gilbert çizgelerinde kritik davranış	89
B'nin belirlenmesi	90
8.1.1.2 Isı sığası üstelinin kesin hesabı.....	91
8.2 ER Rastgele Çizgesi	92
8.2.1 ER çizgeleri üzerinde kritik davranış	98
8.2.2 ER çizgeleri üzerinde Spektral RG yapabilir miyiz?	98
8.2.2.1 B'nin belirlenmesi.....	98
8.2.3 Isı sığası üstelinin kesin hesaplanması	99
8.3 İlintisiz Ölçekten Bağımsız Çizgeler.....	101
8.4 Barabasi Albert Modeli	103
9. SONUÇ VE ÖNERİLER	105
KAYNAKLAR.....	109
EKLER	115
EK A : Cayley Ağacında Laplasyen Özvektörlerinin Parametrizasyonu	117
EK B : Kümulant Açılımı.....	119
EK C : İkinci Mertebeden Pertürbasyon Açılımında Tekrarlama Bağıntısının Analizi	120
EK D: Genelleştirilmiş Elmas Örgünün (Şekil 7.1) $\tilde{d} > 2$ Boyutlarında Mod Sayısının Ölçeklenmesi Yöntemi İle Elde Edilen Üsteller.....	122
EK E : Cayley Ağacı Üzerinde $I_K(0)$ Fonksiyonunun Ölçeklenmesi	123
EK F : Elmas Hiyerarşik Örgüsü Üzerinde $I_1(0)$ ve $I_2(0)$ Fonksiyonunun Ölçeklenmesi	125
EK G : Cayley Ağacı ve Elmas Örgü'de Çizge Laplasyeninin Özdeğer ve Özvektörleri İçin Nümerik Sonuçlar.....	126
ÖZGEÇMİŞ	128

KISALTMALAR

OAT	: Ortalama Alan Teorisi
RG	: Renormalizasyon Grubu
ER	: Erdős-Rényi
BA	: Barabasi-Albert
SRG	: Spektral Renormalizasyon Grubu
TD	: Termodinamik

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

- Çizelge 4.1:** Uzaysal ve uzaysal olmayan çizgelerde Gaussiyen model için elde edilen spektral yoğunluk üsteli β , ölçeklenme üstelleri ve kritik üsteller α ve δ . İlk üstel seti en büyük özdeğerin ölçeklenmesi (Bkz. Bölüm 3.1.1.2) yöntemi kullanılarak, ikinci üstel seti ise mod sayısının ölçeklenmesi (Bkz. Bölüm 3.1.1.1) yöntemi ile elde edilmiştir. İlk set için kritik üstelleri $\alpha = 2 - p_1/p_2$ ve $\delta = (p_1 + p_2)/(p_1 - p_2)$; ikinci set için $\alpha = 2 - 1/\phi_2$ ve $\delta = (1 + \phi_2)/(1 - \phi_2)$ bağıntılarından hesapladık. Manyetik alan kritik üsteli δ için, sıfıra çok yakın bir hata aralığının tersi mertbesinde değerler bulduğumuzdan, bu değerleri sonsuz olarak aldık. Kare örgü, Cayley ağacı ve elmas hiyerarşik örgüsü için spektral boyut $\tilde{d} = 2$ olup, Gaussiyen modelin bu örgüler üzerinde uygulanması ile elde edilen sonuç hepsi için aynıdır. Gaussiyen modelin kesin sonuçlarını G alt indisi kullanarak kritik üsteller α_G ve δ_G ile tablonun sonunda verdik. 46
- Çizelge 6.1:** Cayley ağacı ve elmas örgü üzerinde renormalize edilmiş hamiltonyenin ikinci mertebeye kadar pertürbasyon hesabındaki farklı terimlerin ölçeklenme üstelleri. $D_{2,1}, \dots, D_{4,2}$ diyagramları Şekil 6.1'de gösterilmiş olup, $r_0 = 0$ 'da elde edilmiştir. Sonuçlar en büyük özdeğerin, Ω , ölçeklenmesi yöntemine göre elde edilmiştir. 65
- Çizelge 7.1:** İki adımdan oluşan paralel bağ sayısı p 'nin farklı değerleri için sayısal olarak elde edilen genelleştirilmiş elmas örgülerin spektral ölçeklenme üsteli β , fraktal boyut d_f ve spektral boyut $\tilde{d}$ değerleri. 69
- Çizelge 7.2:** Farklı p değerleri için elde edilen hiyerarşik örgülerin spektral ölçeklenme üsteli β , σ_1 ve σ_2 için her iki ölçeklenme yönteminden elde edilen üsteller p_i ve ϕ_i , $i = 1, 2$ 72
- Çizelge 7.3:** Daha yüksek spektral boyut değerlerinde; genelleştirilmiş elmas örgü (Şekil 7.1). Spektral yoğunluk üsteli β , spektral boyut $\tilde{d}$, alan renormalizasyon faktörünün üstelleri z^4 ve 4ncü mertebeden etkileşim terimlerine karşı gelen Feynman diyagramları için, a^Ω ve kararlı sabit nokta v^* farklı $p \leq 7$ değerleri için elde edilmiştir. Spektral boyut, $p \geq 7$ için $\tilde{d} > 4$ tür. 76
- Çizelge 7.4:** Daha yüksek spektral boyutlar: kuadratik terimler için üsteller ve özgül ısı kritik üsteli α 80

- Çizelge 8.1:** Farklı çizge büyüklüklerinde, 20 gerçekleştirim üzerinden ortalama alınarak elde edilen ω_μ seti ile hesaplanan spektral ölçeklenme üsteli β ve ölçeklenme üstelleri p_1 ve p_2 . Ölçeklenme faktörleri, B 'nin tamsayı değerleri için sayısal olarak hesaplanmıştır. Ölçeklenme üsteli p_2 , tanım gereği 1 olup, sayısal olarak elde edilen değer tutarlıdır. Ayrıca, $p_1 = 1 + \beta$ bağıntısının geçerli olduğu görülüyor. 100
- Çizelge A.1** Dallanma sayısı $b = 3$ olan iki kuşak büyütülmüş Cayley ağacının özdeğer ve özvektörleri. Çizelgenin ilk satırındaki tamsayılar μ etiket değerlerini, ikinci satırındaki tamsayılar ise $nnci$ ayrık özdeğeri belirtmektedir. Küçükten büyüğe doğru sıralanmış özdeğerler, $\alpha_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1+4/b}}{2}$ olmak üzere, $\omega^{(1)} = 0$, $\omega^{(2)} = (\alpha_+ - 1)/\alpha_+$, $\omega^{(3)} = 1$, $\omega^{(4)} = b + 1 - \sqrt{b}$, $\omega^{(5)} = (\alpha_- - 1)/\alpha_- = 1/\omega^{(2)}$, $\omega^{(6)} = b + 1 + \sqrt{b}$ 'dir. Burada $\theta = 2\pi/b$ olarak tanımlanmış olup, $\mu = 2, 3, 11, 12$ and $4, \dots, 9$ etiketine sahip özvektörler içinde gözüken nümerik faktörler $\exp(i\ell\theta)$, $\ell = 1, 2, \dots, b$ ifadesinin gerçel ve imajiner kısımlarına karşı gelir. Çizgenin ikinci satırında 4 ve 6 ile işaretlenmiş sütunlarda görünen sabitlerin değerleri $p = -b - \sqrt{b}$, ve $q = -b + \sqrt{b}$ 'dir. Normalizasyon sabitleri dahil edilmemiştir. Benzer simetriye sahip özvektörlere ait olmalarına rağmen 2nci ve 5nci ayrık özdeğerler ile 4ncü ve 6ncı ayrık özdeğerler oldukça farklıdır. 118
- Çizelge A.2** Daha yüksek spektral boyut değerlerinde; genelleştirilmiş elmas örgü (Şekil 7.1). Spektral yoğunluk üsteli β , spektral boyut $\tilde{d}$, alan renormalizasyon faktörünün üstelleri z^4 ve 4ncü mertebeden etkileşim terimlerine karşı gelen Feynman diyagramları için, a_1^V ve stabil sabit nokta v^* farklı $p \leq 7$ değerleri için elde edilmiştir. Spektral boyut, $p \geq 7$ için $\tilde{d} > 4$ tür. 122

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1	: Toplam düğüm noktaları sayısı $N = 9$, toplam kenar sayısı $e = 10$ olan örnek çizge. Düğüm noktası (a) 'nın kenar sayısı 5 olup derecesi en büyük olan düğümdür. Hiçbir düğüme bağlı olmayan (b) düğümü ise <i>yalıtılmış düğüm</i> noktasıdır.	2
Şekil 1.2	: (a) Yönelimli çizge. (b) Ağırlıklandırılmış çizge (weighted graph). Çizgedeki kenarlar farklı kalınlıklarda çizdirilmiş olup ilgili düğüm noktaları arasındaki bağlantıların ağırlıklarının farklı olmasını ifade eder. (c) Ağaç. (d) Çoklu çizge.	2
Şekil 3.1	: Düğüm noktaları sayısı 100, 10000 ve 40000 olan üç farklı büyüklükte kare örgü için Laplasyen özdeğerlerinin küçükten büyüğe doğru sıralanmasıyla elde edilen grafikler görülmektedir. Kare örgü için Laplasyen özdeğerlerinin, çizge büyüklüğünden bağımsız olarak, aynı değer aralığında oldukları gösterilmiştir. Kullanılan kare örgüler periyodik sınır koşullarına uymaktadır.	22
Şekil 3.2	: Kare örgüde, en büyük ve sıfırdan büyük en küçük Laplasyen özdeğerlerinin, Ω ve ω_2 , çizge büyüklüğü ile değişimi. Çizge büyüklüğü ile $\omega_2 \sim N^{-2}$ şeklinde sıfıra yaklaşmaktadır. En büyük özdeğer ise çizge büyüklüğü ile değişmemektedir.	23
Şekil 3.3	: Laplasyen özdeğerlerinin dağılımı çift logaritmik eksenle çizdirilmiştir. Küçük özdeğer bölgesinde kuvvet yasası yaklaşımından, $\rho(\omega) \simeq \omega^\beta$ ve $\beta = 0$ elde edilmiştir. Periyodik sınır koşulları kullanılmıştır.	24
Şekil 3.4	: Düğüm noktası sayısı 27, 1000 ve 39304 olan üç farklı büyüklükte kübik örgü için, sıralı Laplasyen özdeğerleri grafiği. Periyodik sınır koşulları uygulanmıştır.	24
Şekil 3.5	: Kübik örgüde, Ω ve ω_2 özdeğerlerinin çizge büyüklüğü ile değişimi. Çizge büyüdükçe $\omega_2 \sim N^{-0.73}$ şeklinde sıfıra yaklaşmakta, Ω ise bir sabite yakınsamaktadır.	25
Şekil 3.6	: Düğüm noktası sayısı $N = 43875$ olan kübik örgünün spektral dağılım grafiği. Küçük özdeğer bölgesinden kuvvet yasası yaklaşımı ile spektral dağılım üsteli $\beta = 0.5 \pm 0.03$ bulunmuştur. Periyodik sınır koşulları uygulanmıştır.	25
Şekil 3.7	: Dallanma sayısı $b = 2$ ve kuşak sayısı $r = 3$ olan Cayley örgüsü. ...	26
Şekil 3.8	: (a) Dallanma sayısı $b = 3$, kuşak sayısı $r = 9$ olan Cayley ağacının Laplasyen özdeğerlerinin etiket indisi μ 'ya göre grafiği. (b) Dallanma sayısı $b = 5$ ve kuşak sayısı $r = 6$ olan Cayley örgüsünün sıralı Laplasyen özdeğerlerinin μ etiketine göre değişimi grafiği. Her iki dallanma sayısı için de Cayley ağacında $n > 1$ için n nci ayırık özdeğerin yozluğu $\tau_n = b^{n-1} - b^{n-2}$ olmaktadır.	27

- Şekil 3.9** : Ayrık $\omega^{(n)}$ özdeğerlerinin yozlukları, τ_n , kuşak sayısı $r = 9$ ve dallanma sayısı $b = 3$ olan Cayley örgüsü için çift logaritmik eksenle çizdirilmiştir. Grafikte $\omega_1 = 0$ gösterilmemiştir. Yozluk değerleri lineer bir çizgi üzerine düşmektedir (kırmızı renkle gösterilmiştir). Spektral dağılım üsteli β , $\rho(\omega) \sim \omega^\beta$ tanımından, küçük ω bölgesinde $\beta = 0$ 'dır. 28
- Şekil 3.10** : Dallanma sayısı $b = 3$ ve $r = 9$ olan Cayley ağacında, denklem 3.43'da görülen a_n katsayısı büyük kuşak sayılarında küçük n değerleri için bir sabite gitmektedir. 29
- Şekil 3.11** : Elmas Hiyerarşik Örgüsü. Çizge, ok yönünde, her bir kenar yerine bir baklava deseni gelmesi kuralı ile büyümektedir. Başlangıçta 2 düğüm noktası ve bir kenarı olan ve $r = 0$ ıncı kuşakta bulunan çizgenin, toplam kenar sayısı 4^r şeklinde artmaktadır. Çizgedeki toplam düğüm noktası sayısı r kuşak büyütülmesi durumunda $N = 2(1 + \sum_{n=1}^r 4^{n-1})$ ile belirlenir. 31
- Şekil 3.12** : Düğüm noktası sayısı $N = 10924$ olan elmas hiyerarşik örgüsü için, (a) Laplasyen özdeğerlerinin etiket indisi μ 'ya göre doğrusal grafiği, (b) Laplasyen özdeğerlerinin etiket indisi μ 'ya göre çift logaritmik eksenle çizdirilen grafiği. Grafik üzerinde gösterilen $\omega_{maks}^{(i)}$ ve $i = I, II, \dots$ değerleri yerel maksimum yozluk değerine sahip özdeğerlere karşı gelir. 32
- Şekil 3.13** : Düğüm noktası sayısı $N = 10924$ olan bir elmas örgüde Laplasyenin ayrık özdeğerleri n 'ye göre çizdirilmiştir. Grafik içindeki resimde küçük özdeğerlerin, $\omega^{(n)}$, ölçeklenme davranışları verilmiştir. 32
- Şekil 3.14** : Kuşak sayısı $r = 7$ olan elmas örgüde çizge Laplasyenin özdeğerlerinin çoklu-fraktal spektral dağılımı grafiği. Yalnızca küçük özdeğer bölgesi, $0 \leq \omega \leq 2$, gösterilmiştir. 33
- Şekil 3.15** : Düğüm noktası sayısı $N = 10924$ olan bir elmas örgü için elde edilen Laplasyen özdeğerlerinin yozluk sayıları, özdeğer büyüklüğüne göre çift logaritmik eksenle çizdirilmiştir. Grafikte $\omega_1 = 0$ gösterilmemiştir. Aynı yozluk değerine sahip özdeğer aileleri, r adet, ve bu ailelere mensup özdeğerler, her bir set için $r - 1$ adet, görülmektedir. 33
- Şekil 3.16** : Sıfırdan farklı en küçük Laplasyen özdeğeri ω_2 ve en büyük özdeğer Ω 'nın örgü büyüklüğüne göre değişimi çift logaritmik eksenle çizdirilmiştir. Burada sıfırdan farklı en küçük özdeğerin $\omega_2 \sim N^{-1}$ ile sıfıra yaklaştığı ve en büyük özdeğerin $\Omega \sim N^{0.5}$ ile büyüdüğü görülmüştür. 34
- Şekil 3.17** : Kuşak sayısı $r = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ için elmas örgüde en büyük Laplasyen özdeğeri Ω ve sıfırdan farklı en küçük özdeğer ω_2 'nin örgü büyüklüğüne göre çift logaritmik eksenle çizdirilmiştir. Burada Şekil 3.16'de olduğu gibi, Ω değeri örgü büyüklüğünün karekökü olan 2^r değerine yaklaşmakta, ω_2 ise örgü büyüklüğü ile sıfıra yaklaşmaktadır. Grafikte Ω , siyah kareler ile, ω_2 ise mavi daireler ile temsil edilmiştir. 35

- Şekil 4.1** : Kare örgü için ölçeklenme faktörleri σ_1^V ve σ_2^V sırasıyla mavi ve siyah renkte gösterilmiştir. Ölçeklenme üstelleri küçük ω bölgesinde $\phi_1 = 1$ ve $\phi_2 = 0.996 \pm 0.003$ olarak elde edilmiştir. Ölçeklenme katsayısı $B \equiv B(k)$ ve $k = 1, \dots, N/2$ dir. 38
- Şekil 4.2** : Kare örgü için ölçeklenme faktörleri ölçeklenme katsayısı B' ye göre çift logaritmik eksenle çizdirilmiştir. Küçük ω bölgesi için grafiklerin eğiminden, ölçeklenme üstelleri, $p_1 = 1.00 \pm 0.01$ ve $p_2 = 0.99 \pm 0.03$ olarak bulunur. Ölçeklenme bölgesini $B(k) = N/k$ için $k = 4$ ile $k = 1000$ arasında aldık. 39
- Şekil 4.3** : Kübik örgü için, sayısal olarak hesaplanan ölçeklenme faktörleri σ_1^V (mavi) ve σ_2^V 'nin (siyah) ölçeklenme katsayısı B' ye göre çift logaritmik eksenle çizdirilen grafiği. Burada uygulanan doğrusal fit ile $\phi_1 = 1$ ve $\phi_2 = 0.66 \pm 0.05$ bulunur. 40
- Şekil 4.4** : Kübik örgü için en büyük özdeğerin ölçeklenmesi yöntemi ile elde edilen RG faktörleri σ_1^Ω ve σ_2^Ω 'nin ölçekleme üstelleri sırasıyla $p_1 = 1.49 \pm 0.02$ ve $p_2 = 0.98 \pm 0.05$ 'tir. 40
- Şekil 4.5** : Dallanma sayısı $b = 3$ olan Cayley örgüsü için ölçeklenme faktörleri σ_1^V and σ_2^V Denklem 4.11 ve 4.12 kullanılarak sayısal olarak hesaplanmıştır. Cayley örgüsünün ayrık ölçeklenme davranışına göre, ölçeklenme faktörü, r toplam kuşak sayısı olmak üzere, $B(k) = b^k$, $k = 1, \dots, r$ olarak seçilmiştir. Üsteller ϕ_1 , ϕ_2 sırasıyla 1 ve 1.03 ± 0.04 olarak bulunmuştur. Buradan özgül ısı kritik üsteli $\alpha = 2 - \phi_2^{-1} = 1.03 \pm 0.04$ 'tür. 43
- Şekil 4.6** : Dallanma sayısı $b = 3$ olan Cayley örgüsü için ölçeklenme faktörleri σ_1^Ω and σ_2^Ω Denklem 4.25 ve 4.26 kullanılarak sayısal olarak hesaplanmıştır. Cayley örgüsünün ayrık ölçeklenme davranışına göre, ölçeklenme faktörü, r toplam kuşak sayısı olmak üzere, $B(k) = b^k$, $k = 1, \dots, r$ olarak seçilmiştir. Üsteller p_1 , p_2 sırasıyla 1 ve 1.01 ± 0.01 olarak bulunmuştur. Buradan özgül ısı kritik üsteli $\alpha = 2 - p_2^{-1} = 1.00 \pm 0.02$ 'dir. 43
- Şekil 4.7** : Düğüm noktası sayısı $N = 10924$ ve $r = 7$ kuşak büyüttüğümüz elmas örgü için σ_1^Ω (siyah kare), σ_2^Ω (kırmızı daire) ve σ_2^V (mavi üçgen) ve σ_2^V 'nin (yeşil daire) ölçeklenme davranışlarının çift logaritmik eksenle çizdirilen grafiği. Ölçeklenme katsayısı $B(k) = 4^k$ ve $k = 1, \dots, r+1$ olup $\Omega/B_{maks} > \omega_2$ 'dir. Ölçeklenme üstelleri $p_1 = 0.97 \pm 0.04$, $p_2 = 1.06 \pm 0.07$ ve $\phi_1 = 1$ ve $\phi_2 = 1.01 \pm 0.03$ 'tür. 45
- Şekil 5.1** : Dallanma sayısı $b = 3, 5$ olan Cayley ağacı, elmas örgü, kare ve kübic örgüler için denklem 5.1'den elde edilen özgül ısı kritik üsteli α . Kullanılan örgülerin büyüklükleri garfiğin sağ üst köşesindeki kutu içinde verilmiştir. Çizge Laplasyeninın sıfırdan farklı ilk özdeğerinin yeri grafik üzerinde, ait oldukları modelin rengi ile aynı olarak verilen üçgenlerle işaretlenmiştir. Ölçeklenme bölgesi her model için aynı renkteki üçgen ile başlar. Kübik örgü haricinde tüm modellered eğimden $\alpha = 1$ değeri elde edilmiştir. Kübik örgü için grafiğin eğiminden $\alpha = 0.5$ bulunur. 48

Şekil 5.2	: Kare örgü için sonlu boyut ölçeklenmesi. Düğüm noktası sayısı $20^2, 30^2, 40^2, 50^2, 60^2, 100^2$ ve 200^2 için periyodik sınır koşulları uygulanan kare örgüde düşük sıcaklık bölgesinde eğrilerin üstüste geldiği a ve b değerleri için özgül ısı kritik üsteli $\alpha = a/b = 1$ 'dir.	51
Şekil 5.3	: Kübik örgü için sonlu boyut ölçeklenmesi. Dört farklı büyüklükte ($N = 50^3, 60^3, 100^3, 200^3$) kübik örgü için düşük sıcaklık bölgesinde eğrilerin üstüste geldiği a ve b değerlerinde özgül ısı kritik üsteli $\alpha = a/b = 0.5$ olarak hesaplanır.	52
Şekil 5.4	: Farklı büyüklükte Cayley ağaçları için özgül ısı ölçeklenme diyagramı. Düşük sıcaklık bölgesinde üstüste gelen grafiklerden özgül ısı kritik üsteli $\alpha = 1$ olarak elde edilir.	53
Şekil 5.5	: Farklı büyüklükte elmas örgüler için özgül ısı ölçeklenme diyagramı. Düşük sıcaklık bölgesinde üstüste gelen grafiklerden özgül ısı kritik üsteli $\alpha = 1$ olarak elde edilir.	53
Şekil 6.1	: Kuplaj sabitinin ikinci mertebeye kadar açılımında ikinci ve dördüncü dereceden etkileşimlere karşı gelen Feynman diyagramları. Her bir sütun için yukarıdan aşağıya doğru kullanılan etiketler (a) $D_{2,1}$, $D_{4,1}$, (b) $D_{2,2}$, $D_{2,2'}$, $D_{2,2''}$, (c) $D_{4,2'}$ ve $D_{4,2''}$ 'dir.	58
Şekil 6.2	: Cayley ağacında ölçeklenme faktörleri $\sigma_{2,1}$ ve $\sigma_{4,1}$ 'in ölçeklenme davranışları çift logaritmik eksenle çizdirilmiştir. Ölçeklenme faktörleri için sırasıyla daire ve küçük üçgenler kullanılmıştır. Büyük B değerlerinde doğrusal fit kesikli çizgilerle gösterilmiştir....	60
Şekil 6.3	: Elmas örgüde ölçeklenme faktörleri $\sigma_{2,1}$ ve $\sigma_{4,1}$ 'in ölçeklenme davranışları çift logaritmik eksenle çizdirilmiştir. Ölçeklenme faktörleri için sırasıyla daire ve küçük üçgenler kullanılmıştır. Büyük B değerlerinde doğrusal fit kesikli çizgilerle gösterilmiştir. ..	61
Şekil 6.4	: Cayley ağacı ve elmas örgülerde renormalizasyon grubu faktörü $\sigma_{4,2}$ 'nin ölçeklenme davranışı. Ölçeklenme üstellerinin hesapacağı küçük özdeğer bölgesinde alınan doğrusal fitler kesikli çizgilerle gösterilmiştir. Çift logaritmik eksenle çizdirilen grafikte ölçeklenme üsteli grafiğin eğiminden, Cayley ağacı için $\phi_{4,2} = 1.11 \pm 0.03$, elmas örgü için $\phi_{4,2} = 1.11 \pm 0.04$ bulunur.	63
Şekil 7.1	: Itzykson ve Luck tarzı [1] genelleştirilmiş hiyerarşik örgülerin, $b_s = 2$ için $p = 3, 4, 5$ ve 7 paralel bağlantı sayısına sahip durumlarda gösterimi.	67
Şekil 7.2	: Farklı fraktal boyuta sahip hiyerarşik örgülerin spektral dağılım grafikleri. Paralel bağ sayısı $p = 3, 4, 5$ olan örgülerin grafikleri sırasıyla içi dolu mavi üçgenler, kırmızı kareler ve siyah yıldızlar ile gösterilmiş olup $p = 4$ ve $p = 5$ grafikleri daha iyi görünürlük açısından sağ tarafa doğru 2şer birim kaydırılarak çizdirilmiştir. Doğrusal fitler ölçeklenme bölgesinde dağılımın zarfindan alınmış ve grafikte ait oldukları dağılımın renginde çizdirilmiştir. Küçük resimde gösterilen $p = 7$ için spektral dağılım grafiğinden, üstel $\beta = 1.21 \pm 0.07$ bulunmuştur. Büyük p değerlerine gidildikçe, ölçeklenme bölgesinin daraldığı ve bu bölgedeki doğrusal fit hesabına giren nokta sayısının azaldığı görülür.	68

- Şekil 7.3** : Ayrık Laplasyen özdeğerlerinin n 'ye göre çift logaritmik eksen çizdirilen grafiği. Paralel bağ sayısı $p = 3, 4, 5, 7$ olan örgüler sırasıyla, içi dolu mavi üçgenler, kırmızı kareler, siyah yıldızlar ve yeşil daireler ile gösterilmiş olup doğrusal fitler ölçeklenme bölgesinde, $\omega < \omega^*$, alınmış ve değerleri grafik içinde verilmiştir. .. 70
- Şekil 7.4** : Paralel bağ sayısı $p = 3, 4, 5, 7$ ve spektral boyutu $\tilde{d} > 2$ olan hiyerarşik örgülerde σ_1 ve σ_2 'nin ölçeklenme davranışı. Mavi üçgenler $p = 3$, kırmızı kareler $p = 4$, siyah yıldızlar $p = 5$ ve yeşil daireler $p = 7$ paralel bağ sayısına sahip örgüleri temsil etmektedir. 72
- Şekil 7.5** : Ölçeklenme sabiti $\sigma_{4,1}^{-1}$ 'in ölçeklenme davranışı. Kırmızı karelerle gösterilen $p = 4$ dağılımı 1-birim, siyah yıldızlarla gösterilen $p = 5$ dağılımı 3-birim ve yeşil daireler ile gösterilen $p = 7$ dağılımı 6-birim (+y) doğrultusunda ötelenerek çizdirilmiştir. 75
- Şekil 7.6** : Paralel bağ sayısı $p = 3, 4, 5, 7$ olan hiyerarşik örgülerde $\sigma_{4,2}$ ve $\sigma_{4,2'}$ için ölçeklenme davranışları. (a) $\sigma_{4,2}^{-1}$, kırmızı karelerle gösterilen $p = 4$ dağılımı 3-birim, siyah yıldızlarla gösterilen $p = 5$ dağılımı 9-birim(-y)-doğrultusunda ve yeşil daireler ile gösterilen $p = 7$ dağılımı ise 1-birim (+x) doğrultusunda, 15-birim (-y) doğrultusunda ötelenerek, (b) $\sigma_{4,2'}^{-1}$, kırmızı karelerle gösterilen $p = 4$ dağılımı 2-birim, siyah yıldızlarla gösterilen $p = 5$ dağılımı 9-birim (-y) doğrultusunda, yeşil daireler ile gösterilen $p = 7$ dağılımı ise 0.75-birim (-x) doğrultusunda ve 25-birim (-y) doğrultusunda ötelenerek çizdirilmiştir. 76
- Şekil 7.7** : Paralel bağ sayısı $p = 3, 4, 5, 7$ olan hiyerarşik örgülerde $\sigma_{2,1;0}$ ve $\sigma_{2,1;1}$ için ölçeklenme davranışları. Grafik $\sigma_{2,1;0}$, (-y)-doğrultusunda $p = 4$ için 1 birim, $p = 5$ için 5 birim ötelenerek çizdirilmiştir. 77
- Şekil 7.8** : Paralel bağ sayısı $p = 3, 4, 5, 7$ olan hiyerarşik örgülerde $\sigma_{2,1;0}$ ve $\sigma_{2,1;1}$ için ölçeklenme davranışları. Grafik $\sigma_{2,1;0}$, (-y)-doğrultusunda $p = 4$ için 1 birim, $p = 5$ için 1 birim, $p = 7$ için 4 birim ötelenerek çizdirilmiştir. 77
- Şekil 7.9** : Ölçeklenme sabiti $\sigma_{2,2}^{-1}$ 'nin ölçeklenme davranışı. Ölçeklenme üstelleri, $p = 3$ için $\phi_{2,2} = 1.06 \pm 0.08$, $p = 4$ için $\phi_{2,2} = 1.91 \pm 0.26$, $p = 5$ için $\phi_{2,2} = 1.69 \pm 0.13$ ve $p = 7$ için $\phi_{2,2} = 2.03 \pm 0.25$. Yeşil renkle gösterilen $p = 4$ dağılımı (-y)-doğrultusunda 5-birim ötelenerek çizdirilmiştir. 78
- Şekil 7.10** : Ölçeklenme sabiti $\sigma_{2,2'}^{-1}$ 'nin ölçeklenme davranışı. Ölçeklenme üstelleri, $p = 3$ için $\phi_{2,2'} = 0.73 \pm 0.13$, $p = 4$ için $\phi_{2,2'} = 1.37 \pm 0.21$, $p = 5$ için $\phi_{2,2'} = 1.31 \pm 0.11$ ve $p = 7$ için $\phi_{2,2'} = 1.71 \pm 0.23$. Yeşil renkle gösterilen $p = 4$ dağılımı (-y)-doğrultusunda 6-birim ötelenerek çizdirilmiştir. 78
- Şekil 7.11** : Ölçeklenme sabiti $\sigma_{2,2''}^{-1}$ 'nin ölçeklenme davranışı. Ölçeklenme üstelleri, $p = 3$ için $\phi_{2,2''} = 0.90 \pm 0.06$, $p = 4$ için $\phi_{2,2''} = 1.49 \pm 0.09$, $p = 5$ için $\phi_{2,2''} = 1.34 \pm 0.16$ ve $p = 7$ için $\phi_{2,2''} = 1.76 \pm 0.23$. Yeşil renkle gösterilen $p = 4$ dağılımı (-y)-doğrultusunda 10-birim ötelenerek çizdirilmiştir. 79
- Şekil 8.1** : Sabit bağlanma olasılığı $p = 0.2$ ve düğüm noktası sayısı $N = 10000$ olan Gilbert rastgele çizgesinde derece dağılımı grafiği. 85

Şekil 8.2	: Sabit bağlanma olasılığı $p = 0.2$ olan Gilbert rastgele çizgesinde 20 gerçekleşim üzerinden alınan ortalama derece, $\langle k \rangle$ 'nin N ile değişimi grafiği.	85
Şekil 8.3	: Sıfırdan farklı en küçük değer ω_2 , $N/2$ nci en küçük özdeğer $\omega_{N/2}$ ve en büyük özdeğer $\Omega \equiv \omega_N$ 'nin çizge büyüklüğü N ile değişimi grafiği.	86
Şekil 8.4	: Bağlanma olasılığı $p = 0.2$ olan ve $N = 1000$ düğüm noktasına sahip Gilbert rastgele çizgesinde, farklı gerçekleşimlerde özdeğerlerin dalgalanması. Gerçekleşim sayısı $T = 1000$ olup özdeğerlerin bu gerçekleşimler üzerinden hesaplanan varyans değerleri şekil içinde verilmiştir.	87
Şekil 8.5	: Bağlanma olasılığı $p = 0.2$ olan, farklı büyüklüklerdeki Gilbert rastgele çizgelerde (a) sıralı Laplasyen özdeğerlerinin herbiri için 100 gerçekleşimdeki varyans değerlerinin etiket μ 'ya göre lineer grafiği. Küçük resimde, lineer grafik $0 \leq \text{var}(\omega_\mu) \leq 1$ değer aralığında gösterilmiştir. (b) Laplace özdeğerlerinin varyanslarının 100 farklı gerçekleşim için, çift-logaritmik eksenle çizdirilen grafiği. Küçük özdeğerler için bir kuvvet yasası, $\text{var}(\omega_\mu) \sim \mu^{-1}$, görülmektedir.	87
Şekil 8.6	: Gilbert rastgele çizgelerde, spektral dağılım için $\rho(\omega)$ 'nin $(\omega - \omega^*)$ ile değişimi, x-ekseni $N^{0.5}$ ile ölçeklenerek dağılımların tepe noktaları hizalanmıştır. Küçük resimde her iki eksen de $N^{0.5}$ ile ölçeklenerek dağılımların üstüste geldiği gösterilmiştir.	88
Şekil 8.7	: Farklı büyüklükteki Gilbert rastgele çizgelerde yarı logaritmik eksenle ve ölçekli çizdirilen spektral dağılım grafiği. Spektral dağılım eksponansiyel davranış gösterir ve üsteli $\beta \rightarrow \infty$ 'dur. Dağılımları üstüste düşürebilmek için, $N = 4000$ 'de; 400 birim, $N = 10000$ 'de, 1600 birim dağılımlar sola kaydırılmıştır.	88
Şekil 8.8	: Bağlanma olasılığı $p = 0.2$ olan farklı büyüklüklerdeki Gilbert çizgeleri için çift logaritmik eksenle ve ölçeksiz çizdirilen spektral dağılım grafiği. Grafikte $N = 2000$ ve $N = 4000$ dağılımları tepe noktaları $N = 10000$ ile aynı noktaya gelecek biçimde sağa kaydırılmıştır. Her bir çizge büyüklüğü için, 20 gerçekleşim üzerinden ortalama alarak elde ettiğimiz özdeğer seti kullanılmıştır. Küçük özdeğer bölgesinde, kuvvet yasası yaklaşımı uygulandığında N ile artan β değerleri resim içinde verilmiştir.	89
Şekil 8.9	: Düğüm noktası sayısı $N = 2000, 4000, 10000$ ve sabit bağlanma olasılığı $p = 0.2$ olan Gilbert rastgele çizgesinde en büyük özdeğerin ölçeklenmesi yöntemi ile sayısal olarak hesaplanan ölçeklenme katsayısı, σ_1 'in davranışı. Ölçeklenme bölgesinde, $\sigma_1 \sim B^{p_1}$ kuvvet yasası yaklaşımı ile elde edilen p_1 değerleri resim içinde verilmiştir. Ancak, davranış eksponansiyeldir, $\sigma_1 \sim \exp(B)$. Bu da daha önce belirttiğimiz $\beta \sim \infty$ sonucu ile uyumludur. Ölçeklenme bölgesine, en küçük özdeğerleri, varyansları çok büyük olduğu için dahil etmedik.	90

- Şekil 8.10** : Düğüm noktası sayısı $N = 2000, 4000, 10000$ için farklı büyüklüklerde ve sabit bağlanma olasılığı $p = 0.2$ olan Gilbert rastgele çizgesinde en büyük özdeğerin ölçeklenmesi yöntemi ile hesaplanan ölçeklenme katsayısı σ_2 'nin davranışı. Ölçeklenme bölgelerinde kesikli çizgilerle gösterilen eğimlerden σ_2 'nin ölçeklenme üsteli $p_2 \sim 1$ 'dir. 91
- Şekil 8.11** : Farklı büyüklükteki Gilbert rastgele çizgelerde özgül ısı tam toplam grafiği. Her çizge büyüklüğü için özdeğerler, 20 ayrı gerçeğin ortalamasından elde edilmiştir. Farklı çizge büyüklükleri farklı renklerde gösterilmiş olup, aynı renkteki küçük üçgenler o çizge büyüklüğü için sıfırdan farklı en küçük Laplace özdeğerinin ortalama değerini gösterir. 92
- Şekil 8.12** : Farklı büyüklüklerdeki ER çizgeleri için $T = 20$ gerçeğin üzerinden alınan ortalama derecenin çizge büyüklüğü ile değişimi çift logaritmik eksenle gösterilmiştir. 93
- Şekil 8.13** : Sıfırdan farklı ilk özdeğer ω_2 ve en büyük özdeğer Ω 'nın 20 gerçeğin üzerinden alınan ortalama değerlerinin, çizge büyüklüğü N ile değişimi. Küçük resimde çift logaritmik eksenle çizdirilen grafik gösterilmiştir. Kırmızı kareler, Ω değerlerini, mavi daireler ise ω_2 değerlerini vermektedir. En büyük özdeğer için küçük resimde alınan doğrusal yaklaşım sonucunda $\Omega \sim N^{-(0.69 \pm 0.05)}$ bağıntısı elde edilmiştir. 94
- Şekil 8.14** : Sabit kenar sayısına sahip farklı büyüklüklerdeki ER çizgelerde spektral dağılım grafiği. Her çizge büyüklüğünde, 20 farklı gerçeğinden elde edilen Laplasyen özdeğerlerinin ortalamaları alınmıştır. Ortalama özdeğer seti için elde edilen spektral aralık her farklı çizge büyüklüğü için, N 'ye bölünerek binleme yapılmıştır. 94
- Şekil 8.15** : Farklı büyüklüklerdeki ER çizgelerde çift-logaritmik eksenle çizdirilen spektral dağılım grafiği. Her çizge büyüklüğünde, spektral dağılım üsteli β 'nin küçük özdeğer bölgesinde kuvvet yasası yaklaşımı ile elde edilen değerleri grafik içinde verilmiştir. Kullanılan özdeğer seti, her büyüklükte, 20 gerçeğin üzerinden alınan ortalama özdeğerlerden oluşmaktadır. 95
- Şekil 8.16** : Düğüm noktası sayısı $N = 1000$ olan ER çizgesinin $T = 100$ farklı gerçeğin için elde edilen sıralı özdeğer dağılımında, farklı μ etiket değerine sahip özdeğerlerin gerçeğinden gerçeğe dalgalanmaları. Etiket değeri aşağıdan yukarı doğru sırasıyla $\mu = 2, 5, 20, 100, 500, 900, 980, 995, 1000$ alınmıştır. 96
- Şekil 8.17** : Toplam kenar sayısı $m = 50000$ için, sayısal olarak ürettiğimiz farklı büyüklükteki ER çizgelerinin $T = 20$ gerçeğin üzerinden hesaplanan varyans değerleri. Dağılımın varyansı her iki ekstra uçta da ıraksamaktadır. Farklı çizge büyüklükleri farklı renklerde gösterilmiş olup grafik içinde renk kodları belirtilmiştir. Küçük resimde eksenler tüm değerleri içerecek şekilde gösterilmiştir. 97

- Şekil 8.18** : Toplam kenar sayısı $m = 50000$ değeri için sayısal olarak elde ettiğimiz ER çizgelerinin $T = 20$ gerçekleştirim üzerinden hesaplanan varyans değerleri çift logaritmik ekseninde gösterilmiştir. Küçük özdeğer bölgesine uygulanan kuvvet yasası yaklaşımından $var(\omega_\mu) \sim \mu^{-g}$, $g \approx 1$ bulunmuştur. Düğüm noktası sayısı arttırıldıkça küçük μ yani küçük özdeğer bölgesinde varyansın daha fazla dalgalanmalar içerdiğini görürüz. 97
- Şekil 8.19** : Spektral RG ölçeklenme faktörleri. Farklı çizge büyüklüklerinde, sabit kenar sayısı $m = 50000$ için 20 gerçekleştirim üzerinden ortalama alınarak elde edilen özdeğer seti ile hesapladığımız ve çift logaritmik ekseninde çizdirdiğimiz ölçeklenme faktörlerinin ortalama değerlerinden elde edilen ölçeklenme üstelleri (a) $p_1 = \frac{\ln \sigma_1^\Omega}{\ln B}$, (b) $p_2 = \frac{\ln \sigma_2^\Omega}{\ln B}$ 99
- Şekil 8.20** : Özgül ısı yoğunluğu için, farklı çizge büyüklüklerinde ve sabit kenar sayısında üretilen ER çizgeleri için Laplas özdeğerleri üzerinden alınan tam toplam ifadesi. Çizgenin düğüm noktası sayısı büyütüldüğünde, $N \rightarrow \infty$ yani termodinamik limitte özgül ısı kritik üsteli $\alpha \rightarrow 0$ olur. 100
- Şekil 8.21** : Düğüm noktası sayısı 40000 olan ilintisiz, ölçekten bağımsız çizgelerin en küçük derece $k_{min} = 4$ için farklı γ değerlerinde üretilerek çift logaritmik ekseninde çizdirilen spektral dağılım grafiği. Küçük resimde dağılımın tamamı görülmektedir. Her bir γ değeri için 10 farklı gerçekleştirim üzerinden alınan ortalama özdeğerler kullanılmıştır. 101
- Şekil 8.22** : Yarı logaritmik ekseninde çizdirilen spektral dağılım grafiği. Düğüm noktası sayısı 40000, $k_{min} = 4$, ve $3 < \gamma < 5$ için sayısal olarak üretilen 10 farklı gerçekleştirim üzerinden ortalaması alınan Laplasyen özdeğerleri kullanılmıştır. 102
- Şekil 8.23** : Düğüm noktası sayısı 40000, k_{min} olan ve 10 farklı gerçekleştirimde ürettiğimiz ilintisiz, ölçekten bağımsız çizgeler için sıfırdan farklı en küçük özdeğerin, ω_2 , derece dağılımı üsteli γ ile $\omega_2 \sim -0.02\gamma$ biçiminde sıfıra yaklaşmaktadır. 102
- Şekil 8.24** : Sayısal olarak ürettiğimiz ölçekten bağımsız BA çizgesi için derece dağılım grafiği. Çizge büyüklüğü arttıkça γ değeri 3'e yaklaşacaktır. 103
- Şekil 8.25** : Çift logaritmik ekseninde çizdirilen spektral dağılım grafiği. Başlangıç düğüm sayısı $m_0 = 3$ ve her adımda eklenecek düğümün bacak sayısı $m = 3$ alınarak, düğüm noktası sayısı 40000 olacak şekilde oluşturulan çizge kullanılmıştır. 104
- Şekil A.1** : İkinci mertebeden etkileşimler dahil edilerek bulunan $f(x)$ fonksiyonu için iki farklı x_0 başlangıç değeri ile elde edilen iterasyon resminde ölçeklenme sabiti $B = 2$ olarak alınmıştır. Fonksiyonun köşegeni kestiği noktalar x^* sabit noktaları olup yeşil yıldız işareti ile gösterilmiştir. Gaussian sabit noktası $x^* = 0$ dışında, her iki başlangıç değeri için bulunan sabit nokta değeri $x^* = 0.04774$ 'tür. 120

Şekil A.2 : Cayley ağacı için $I_1^{(0)}$ ve $I_2^{(0)}$, in ölçeklenme davranışları sırasıyla daire ve küçük karelerle gösterilmiştir. Lineer fit çizgisinin eğimi 1.09 ± 0.04 'tür. Küçük resimde $I_1^{(0)}$, in $\ln B$ 'ye göre yarı logaritmik ekseninde çizdirilen grafiği görülmektedir. 124

Şekil A.3 : Cayley ağacı için $I_1^{(0)}$ ve $I_2^{(0)}$, in ölçeklenme davranışları sırasıyla daire ve küçük karelerle gösterilmiştir. Büyük B değerlerinde (küçük özdeğer bölgesinde) uygulanan kuvvet yasası yaklaşımından $I_2^{(0)}$, nin davranışı $I_2^{(0)} \sim B^{0.92 \pm 0.07}$ olur. Küçük resimde $I_1^{(0)}$, in $\ln B$ 'ye göre yarı logaritmik ekseninde çizdirilen grafiğinde, ölçeklenme bölgesinde $I_1^{(0)} \sim \ln B$ doğrusal ilişkisi gösterilmiştir. 125

SPEKTRAL RENORMALİZASYON GRUBU İLE ÖLÇEK ENVARYANT ÇİZGELER ÜZERİNDE KRİTİK ÜSTELLERİN HESAPLANMASI

ÖZET

Wilson-Kogut alan teorik renormalizasyon grubu, keyfi çizgelere uygulanabilir biçimde genelleştirilmeye çalışılmıştır. Wilson tipi renormalizasyon yönteminde, düzen parametresi yoğunluğunun kısa erimli dalgalanmalara karşı gelen, göreceli olarak küçük dalgaboyuna sahip alan bileşenleri elimine edilir. Bunun için bir b ölçeklenme parametresi ile bölüşüm fonksiyonu, $0 \leq k \leq \Lambda/b$ aralığında kısa ve $\Lambda/b \leq k \leq \Lambda$ uzun dalgaboylu bileşenlerine ayrılarak yeniden yazılır ve ilk olarak uzun erimli dalgalanmalar üzerinden integral alınarak bu dalgalanmalar elimine edilir. Daha sonra ölçeklenme faktörleri ile beraber orjinal formuna getirilen hamiltonyende, k^2 teriminin katsayısı sabit tutularak ölçeklenme faktörleri elde edilir. Wilson tipi renormalizasyon grubu ile Gaussiyen model için kesin çözüm yapılabilmektedir. Ancak Etkileşim terimlerinin dahil edildiği durumda pertürbatif yaklaşım kullanılmaktadır.

Metrik bir uzaya gömülü olmayan çizgelerde, komşu düğümler arasındaki kenarlar bir "uzaklık" bilgisinden yoksundur. Çizgenin düğüm noktaları arasındaki mesafe, uzunluk ile değil, bir düğüm noktasından diğerine giderken arada kaç kenar olduğu ile ilişkilidir. Bizim çalıştığımız, uzaysal olmayan ve öteleme simetrisi bulunmayan çizgeler için, Wilson'ın periyodik örgülerde yaptığından farklı olarak, çizge momentum vektörü, $\mathbf{k}$, gibi bir kavram tanımlayamıyoruz. Renormalizasyon grubunun sıcaklık uzamındaki özdeğerini, uzunluk ölçeklenmesi altında korelasyon uzunluğu kritik üstelinin tersi cinsinden ifade etmek de mümkün olmayacağından, bir uzunluk kavramı içermeyen RG geliştirmeye çalışılmıştır.

Çizge üzerinde yaşayan bir istatistiksel alanın, çizge Laplasyeninin özvektörleri cinsinden açılımını, genelleştirilmiş bir Fourier dönüşümü yaparak elde ediyoruz. Çizge Laplasyeninin özdeğerlerini büyüktan küçüğe doğru elimine ederek, yeniden ölçeklenmiş etkin Hamiltonyenden kritik üstelleri hesaplamak için kullanacağımız ölçeklenme faktörlerini elde ediyoruz.

Öteleme simetrisi olmayan iki farklı çizge kullanarak (elmas örgü ve Cayley ağacı), Gaussiyen model ve ötesinde (etkileşim terimlerini, ikinci mertebeye kadar pertürbasyon açılımı yaparak elde ettiğimiz etkileşim terimlerini dahil ederek) kritik davranışı elde ettik. Öteleme simetrisi olmayan elmas örgü ve Cayley ağacı yanında, $d = 2$ ve $d = 3$ boyuta sahip periyodik örgüler için de Gaussiyen model sonuçlarını bulduk. Spektral renormalizasyon grubu ile elde ettiğimiz Gaussiyen model sonuçlarını sonlu boyut ölçeklenmesi (finite size scaling) yöntemi ile karşılaştırıp kontrol ettik. Sistemin yeterince büyük olmaması durumunda, kritik bölgenin dışına düşerek, yanlış ölçeklenme davranışını gözlemleme ihtimaline karşı sonlu boyut ölçeklenmesi kullanılmaktadır. Serbest enerjinin sıcaklığa göre ikinci türevini alarak elde ettiğimiz özgül ısıнын baskın terimi üzerinden alınan tam toplam ile sonlu boyut ölçeklenmesini, sistemin boyutu yerine çizgedeki toplam düğüm noktası sayısını

kullanarak, keyfi çizgelere uyarladık ve nümerik hesaplarımızda erişebildiğimiz düğüm sayıları için doğru ölçeklenme davranışını elde edebildiğimizi gösterdik.

Bir sistemin hangi evrensellik sınıfına dahil olduğunun belirlenmesinde rol oynayan iki önemli parametre, spin boyutu ve sistemdeki etkileşimlerin (en yakın komşu etkileşmesi vs.) tanımıdır. Bir çizgenin içine gömülü bulunduğu uzayın boyutu (öklidyen boyut), çizgenin fraktal veya spektral boyutu tanımlanabilmektedir. Periyodik örgülerde bu boyutlar birbirine eşittir. Ancak, keyfi çizgelerde bunlar her zaman eşit olmadığı için, çizgenin üzerindeki istatistiksel modelin kritik davranışını belirleyen boyutun hangisi olduğu ve evrensellik sınıfını belirlemek için hangi boyutun alınacağına açıklık getirmeye çalıştık. Kritik bölgede büyük dalgaboylu dalgalanmalar belirleyici olmaktadır. Gaussiyen model için de kritik üstellerin, çizge Laplasyeninin küçük özdeğer bölgesindeki ölçeklenme davranışına bakarak hesapladığımız, ve $\tilde{d}$ ile göstereceğimiz, spektral boyuta bağlı olduğunu bulduk. Ancak etkileşimlerin dahil edildiği teoride, etkileşim terimleri Laplasyen özvektörleri üzerinden hesaplandığı ve özvektörler de çizgenin simetri özelliklerini barındırdığı için, kritik üsteller çizgenin simetri özelliklerine sıkı biçimde bağlı olmaktadır.

Çiftlenim sabitlerinde (coupling constants) ikinci mertebeye kadar pertürbasyon açılımı ile, etkileşen teoremin renormalizasyon davranışını araştırdık. Gaussiyen model hamiltonyenine dördüncü mertebeden etkileşim terimlerini ekleyerek, Gaussiyen teoriden, Ising evrensellik sınıfına geçtik. Ising simetrisine sahip modeller için alt kritik boyut $\tilde{d} = 2$ olduğundan, Cayley ağacı ve elmas örgüde ikinci mertebeden pertürbasyon teorisi, $\tilde{d} = 2$ için Gaussiyen sabit noktasının haricinde bir sabit nokta vermemektedir. Ising evrensellik sınıfı sonuçlarına ulaşamadığımız için, spektral boyutu farklı hiyerarşik örgüler elde etme yoluna gittik. Elmas örgünün genelleştirilmesi ile spektral boyutu $2 < \tilde{d} < 4$ aralığında örgüler elde edip, bu örgüler için Gaussiyen model sabit noktası haricinde bir sabit nokta elde edebildik ve bu spektral boyutlar için kritik üstelleri hesapladık .

Cayley ağacı, elmas örgü gibi deterministik örgülerin yanında rastgele çizgelerde spektral renormalizasyon grubu sonuçlarını araştırdık. Burada kullandığımız rastgele çizgeler, sabit bağlanma olasılığına sahip Gilbert rastgele çizgesi ve sabit bağ sayısına sahip Erdős-Rényi çizgesidir. Gilbert rastgele çizgesinde, spektral dağılım grafiklerinden spektral yoğunluğun, küçük özdeğer bölgesinde, kuvvet yasası davranışına uymadığını ve termodinamik limitte eksponansiyel davrandığını gördük. Buradan $\tilde{d}$ 'nin sonsuz olduğunu ve kritik davranışın beklenildiği gibi ortalama alan türü olduğunu gösterdik. Erdős-Rényi çizgelerinde ise, sabit bağ sayısına karşı düğüm sayısı büyüdükçe seyrekleşen çizgenin, yine de büyük bir bağlı bileşene sahip olduğu aralıkta, spektral boyutun mutlaka kritik değerinin üzerinde kaldığını gördük. Böylece bu çizge üzerinde de beklenen davranışın ortalama alan olduğunu söyleyebiliriz.

Bunun yanında, ilintisiz ölçekten bağımsız çizgeler (uncorrelated scale free networks) ve yine ölçekten bağımsız olan Barabasi-Albert çizgesi için spektral dağılım davranışlarını inceledik.

**CRITICAL EXPONENTS
ON SCALE INVARIANT NETWORKS
BY USING SPECTRAL RENORMALIZATION GROUP**

SUMMARY

The aim of this study is to generalize the Wilson Renormalization Group method to arbitrary networks. Discrete amorphous materials are best described in terms of networks. An obvious application might be amorphous materials and spin- as well as structural glasses. These networks can be embedded in three dimensional space. The most important contribution of the method developed in this thesis is its applicability to networks which are not embedded in a metric space.

Both static and dynamical phenomena on networks, which typically lack translational invariance and may not be naturally embedded in a metric space, have been the subject of intense study over the last decade and a half. Phase transitions and critical phenomena on complex networks have been studied by various analytical and numerical methods. In the Wilson renormalization group approach, relatively small wavelength constituents of the intensity of the order parameter, corresponding to more rapid fluctuations, are eliminated. The partition function is separated into short wavelength ($0 \leq k \leq \Lambda/b$) and long wavelength ($\Lambda/b \leq k \leq \Lambda$) components by using a scaling parameter, b . Long wavelength fluctuations are eliminated by integrating out these components in the partition function, and restoring the effective Hamiltonian with the rescaling factors which are obtained by keeping the term k^2 constant. For the Gaussian model, the exact solution can be obtained by using the renormalization group a la Wilson. A perturbative approach may used when an interaction term between Fourier components at different length (and time) scales is included.

In analogy with the momentum shell renormalization group a la Wilson, Aygun and Erzan have recently proposed a general approach to studying fluctuations on arbitrary undirected lattices. In this spectral renormalization group (SRG) approach, fluctuations of the order parameter are expanded in terms of the eigenvectors of the graph Laplacian in a generalized Fourier transform. Elimination of the large eigenvalue fluctuations and rescaling of the effective Hamiltonian then yield, in the same spirit as in the Wilson renormalization group, the rescaling factors for the coupling constant, which can then be related to the critical exponents.

We have two possible strategies for eliminating large ω fluctuations from partition functions and obtaining the rescaling factors in analogy with the usual renormalization group a la Wilson. In the absence of length-like quantity, the first method is to truncate the number of *modes*, N , by a constant factor, B . Since the eigenvalues are numbered in increasing order, we keep the fluctuations associated with first N/B eigenvalues in the effective Hamiltonian and integrate out the rest. The second method is to scale the largest eigenvalue, Ω by a constant arbitrary scale factor, B . In this alternative strategy depends on elimination of degrees of freedom with large ω with $\omega \geq \Omega/B$. After the elimination of the eigenvalues, restoring the Hamiltonian to its full range

yields rescaling factors which have different scaling exponents for the two methods; nevertheless, the critical exponents come out to be the same for both approaches. On the other hand, if the spectral dimension and fractal dimension of the network are not equal to each other, scaling the number of nodes does not yield correct results. The spectral dimension is found from the eigenvalue distribution and does not depend on the metric properties of the embedding space. For non-spatial networks, it is therefore appropriate to use the largest-eigenvalue-scaling strategy.

Eliminating those fluctuations associated with large- ω side of the spectrum means eliminating the higher-energy modes. We have seen that on the non-spatial lattices, namely the Cayley tree and diamond lattices, eigenvectors with the same symmetry properties may have widely differing eigenvalues. Thus, eliminating those fluctuations associated with large- ω side of the spectrum cannot be naively interpreted as eliminating the "small wavelength" or "high frequency" fluctuation. On the other hand, when we look the construction of tree or hierarchical lattices as a fine-graining operation, we see that increasing the localization of the eigenvectors on the most recently added nodes may be thought of as greater articulation on smaller scales.

On non-spatial networks, edges between adjacent nodes lack a length-like character, although a "distance" between the nodes may be associated with the least number of edges connecting the nodes. The eigenvalues of the graph Laplacian do not have an obvious interpretation in terms of the lattice momenta ($|\mathbf{k}|^2$) and an isotropic, translationally invariant correlation length is not available. Therefore the exponent of the RG eigenvalue in the temperature-like direction under length-rescaling cannot be interpreted in terms of the inverse of the correlation length exponent. In this situation, RG schemes which do not involve length-like concepts must be developed.

In this thesis, we first implemented the spectral renormalization group theory for the Gaussian model on two non-spatial networks which lack translational invariance, namely, the Cayley tree and the diamond lattice. Moreover, we obtained the critical behavior for the square and cubic periodic lattices for the Gaussian model. The nearest neighbor interaction is diagonalized by using the eigenvectors of the graph Laplacian, giving rise to a Gaussian theory for continuous fields. The scaling dimensions of the field and of the "mass" term are determined numerically as well as analytically, in terms of β , the scaling exponent of the spectral density for small eigenvalues. We compute the specific heat and magnetic field exponents on the critical isotherm, α and δ , defined respectively as $c_h \propto t^{-\alpha}$, and $h \propto m^\delta$, where $t = (T - T_c)/T_c$ is reduced temperature and m is magnetization per spin. We obtained the Gaussian model values, which go over to the mean field results if one takes into account the dangerous irrelevant fourth order term in the Landau expansion.

We check our SRG results against conventional methods which we here adapt to nonspatial lattices, namely exact summation of the leading term in the specific heat, obtained by differentiating the free energy, and finite size scaling by the number of nodes of the lattice, instead of the linear size of the system. To double-check the consistency of our method, we have also computed the critical exponents for the Gaussian model on periodic lattices in on the $d = 2$ and $d = 3$ dimensions, Cayley tree and hierarchical lattice. Finite size scaling is used in order to eliminate possible errors due to the finiteness of the lattices considered; a finite size scaling analysis adapted to non-spatial lattices, was also performed on each lattice. The relevant effective field in this case is taken to be N^{-1} , in place of the linear scale, as is customary for

spatial lattices. We calculate the specific heat explicitly by taking a summation over the eigenvalues of Laplace operator. To see the correct critical scaling behavior, we should take the region between the first nonzero Laplace eigenvalue and the van Hove singularity in the Laplacian spectral density. We obtained the critical exponent α in agreement with the SRG results and showed that the scaling behaviour can indeed be correctly obtained for the graph sizes we have been able to numerically attain.

We have then extended our results to ψ^4 theory, which, for a scalar field on periodic lattices is known to carry the "trivial" theory into the Ising universality class. The ψ^4 interaction terms are treated perturbatively, using the usual Feynman graph expansion. We investigate the renormalization behavior of the interacting theory within a perturbation expansion up to second order in the coupling constant and the deviation from the critical temperature. This interaction term leads to couplings between different fluctuation modes, and the precise nature of the eigenvectors come to play an important role.

The Ising model exhibits mean-field critical behaviour on the Bethe lattice (Cayley tree in the infinite limit). As should be expected, we find that a calculation to second order does not yield a non-Gaussian fixed point on the Cayley tree. However, on the diamond lattice, with $\tilde{d} = 2$, on which the Ising model is known to have nontrivial critical behaviour, we find the Gaussian fixed point to be stable with respect to the introduction of quartic coupling, up to second order in perturbation theory. A similar failure of the perturbation approach for $d = 2$ was found by Wilson and co-authors on periodic lattices. We extend our calculations to a series of generalized diamond lattices with higher spectral dimensions. Thus, we establish the existence of the non-trivial (non-Gaussian) fixed point of the SRG for $2 < \tilde{d} < 4$, and we calculate critical exponents for these dimensions. When the spectral dimension is bigger than four, although the non-trivial fixed points still exists, it loses its stability. For $\tilde{d} > 4$, iterations for the coupling constant v_0 exhibit a period-four attractor. However, this is not physical; it depends purely on the truncation of the perturbation expansion.

The most important parameters to define the universality class for a system are spin size and definition of the interaction (e.g. nearest neighbor interaction) in the system. Embedding dimension (Euclidean dimension), fractal and spectral dimension can be defined. Although these dimensions are equal to each other on periodic lattices, they do not have to be equal on arbitrary networks. We find that the spectral dimension determines the critical behaviour of the statistical model on the graph.

Besides the deterministic lattices (Cayley tree and generalized diamond lattices), we investigated the SGR results on random networks. We used the Gilbert random lattice which has constant connection probability p , and the Erdős-Rényi random lattice which has constant edge number. We see that spectral density function depends on the eigenvalues exponentially (or with an effective power which is exceedingly large) for Gilbert lattices where the expected degree diverges with the size of the network. Thus, we showed that spectral dimension is infinity. The Erdős-Rényi random lattice becomes infinitely sparse in the thermodynamic limit. For lattices which are still connected, one finds a power law in small ω scaling region, with, however powers in excess of the upper critical value $\beta_c = 1$. The critical behaviour is mean field as expected.

Moreover, we obtained the spectral density behaviour for uncorrelated scale free networks. We find that the spectral dimension once again diverges exponentially for

small ω , and does not permit a perturbative SRG approach to interacting statistical models on these networks.

On the Barabasi-Albert (preferential attachment) networks with $\gamma = 3$ and long range correlations between the edges, it is known that the critical temperature $T_c \rightarrow \infty$ as $N \rightarrow \infty$ and the magnetization decays as $M \sim \exp(-\text{const}.T)$. However, we have not been able to go beyond an effective MFT on these (finite) lattices.

1. GİRİŞ

1.1 Ağ Yapıları, Önemi ve Yaygınlığı

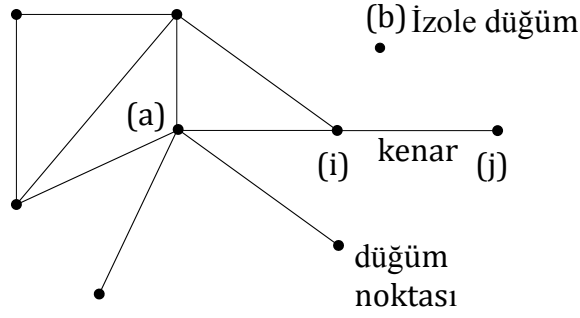
Fiziksel, biyolojik, kimyasal ve sosyal pek çok kompleks yapı, sistemin elemanlarını düğüm noktaları, bu elemanlar arasındaki etkileşimleri kenarlar ile temsil etmek suretiyle, ağ yapısı ile modellenenir. Bu sistemleri modellemek için farklı ağ yapıları kullanılabilmektedir. Örneğin hiyerarşik örgüler [1], Erdős-Rényi tarafından geliştirilen rastgele çizgeler [2], Watts-Strogatz rastgele çizgesi [3], ölçekten bağımsız [4] çizgeler bunlardan sadece birkaçıdır.

Ağ yapıları üzerinde statik ve dinamik olguların araştırılmasının yanında özellikle öteleme değişmezliği bulunmayan ve metrik bir uzaya gömülemeyen çizge yapılarına ilgi artmıştır [5–7]. Ağ yapıları üzerinde kritik olgular ve faz geçişleri konusu da yaygın olarak araştırmalara konu olmaktadır [4, 8].

1.1.1 Temel tanımlar

Tanım olarak bir çizge, *düğüm noktaları* (node) ve bunları bağlayan *kenarlardan* (edge) oluşan bir küme olarak ifade edilebilir. Düğüm noktalarının ne şekilde bağlandığı çizgenin yapısını belirler. N tane bağlantı noktası (veya düğüm noktası) olan bir çizge için, N 'nin arttırılması ile sistem büyütülerek, ele alınan çizgeden bir *ağ* (network) oluşturulması mümkündür. Çizge teorisinde bir düğüm noktasının toplam bağlantı sayısına *derece* denir. Herhangi bir i düğüm noktasına bir kenar ile bağlı olan düğümler i düğümünün komşularıdır. Komşu düğümlerin sayısı k ise, i düğüm noktasının derecesi $d(i) = k$ olur. Derecesi sıfır olan düğüm noktası *yalıtılmış*dir. Şekil 1.1'de, (b) düğüm noktası yalıtılmış düğüm noktasıdır. Bir çizgenin düğüm noktalarının derece dağılımı o çizgenin temel istatistiksel karakterlerinden biridir.

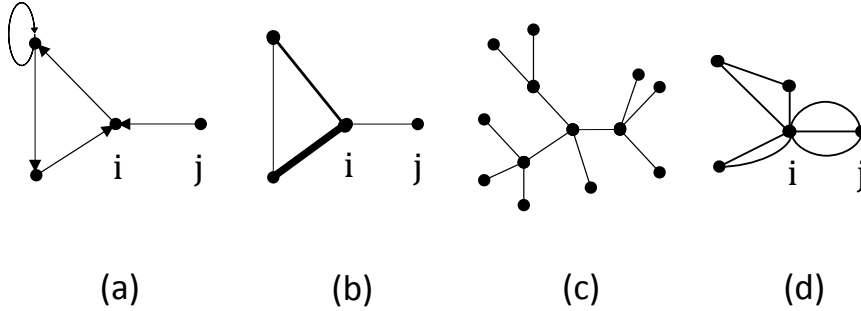
Yönelimsiz (undirected) olan bir çizgede kenarlar bir doğrultu göstermez. Şekil 1.1'de gösterilen örnek yönelimsiz çizgede (i) ve (j) düğüm noktalarını bağlayan kenar $\{i, j\}$ kenarı olsun. Bu durumda yönelimsiz çizge için, $\{j, i\} = \{i, j\}$ aynı kenara karşı gelir.



Şekil 1.1: Toplam düğüm noktaları sayısı $N = 9$, toplam kenar sayısı $e = 10$ olan örnek çizge. Düğüm noktası (a)'nın kenar sayısı 5 olup derecesi en büyük olan düğümdür. Hiçbir düğüme bağlı olmayan (b) düğümü ise *yalıtılmış düğüm* noktasıdır.

Yönelimli çizgede (directed graph) ise Şekil 1.2(a)'da görüldüğü gibi düğüm noktaları arasındaki bağlantılar oklarla gösterilir ve herhangi bir kenar için yönelsiz çizgenin aksine $\{j, i\} \neq \{i, j\}$ olur.

Bir çizge için birbirini takip eden düğümler ve bunlar arasındaki kenarlardan oluşan diziye *yol* (path) denir. Bu yol üzerinde kendini tekrar eden düğüm noktası yoktur. Başlangıç ve bitiş düğüm noktasının aynı olduğu yola ise *döngü* (cycle, loop) denir.



Şekil 1.2: (a) Yönelimli çizge. (b) Ağırlıklandırılmış çizge (wheighted graph). Çizgedeki kenarlar farklı kalınlıklarda çizdirilmiş olup ilgili düğüm noktaları arasındaki bağlantıların ağırlıklarının farklı olmasını ifade eder. (c) Ağaç. (d) Çoklu çizge.

Yine Şekil 1.2(d)'de çizgede düğüm noktalarının birden fazla düğüm noktasına bağlı olduklarını görürüz. Bu şekilde çoklu bağlantılar ve döngüler içeren çizgelere *çoklu-çizge* (multi-graph) denmektedir. *Basit çizgeler* (simple graph) ise döngüler ve çoklu bağlantılar içermeyen çizgelerdir.

Düğüm noktaları arasındaki bağlantıların birbirine eşit olmadığı *ağırlıklandırılmış çizgelere* bir örnek Şekil 1.2(b)'de verilmiş olup, farklı ağırlıklı kenarları farklı çizgi kalınlıklarında gösterdik. Döngü içermeyen çizgeler ise *ağaç* (tree) yapısında olup,

Şekil 1.2(c)'de görüldüğü gibi en yakın komşu düğümler arasında tek bir kenar bulunur.

Eğer bir G çizgesinin düğüm noktaları arasından seçilen her i ve j düğüm noktası çifti bir yol ile bağlı ise bu G çizgesine *bağlı çizge* (connected graph) denir.

Verilen bir yönelimsiz G çizgesi için, düğüm noktaları arasındaki tüm bağlantıları tanımlayan *komşuluk matrisi* (adjacency matrix) A 'nın elemanları denklem 1.1'deki gibi ifade edilir.

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & i \text{ ve } j \text{ komşu ise,} \\ 0, & i \text{ ve } j \text{ komşu değil.} \end{cases} \quad (1.1)$$

Düğüm noktası sayısı N olan bir çizgede A matrisi $N \times N$ boyutundadır ve yönelimsiz bir çizge için A matrisi simetriktir.

$$A_{ij} = A_{ji} . \quad (1.2)$$

Çizgenin i nci düğüm noktasının derecesi, k_i , i düğümünün kenar sayısına, başka bir deyişle komşu sayına eşittir ve $k_i = \sum_j A_{ij}$ dir. Çizge literatüründe k_i için, i nci düğüm noktasının “derecesi” de denilmektedir.

Metrik bir uzaya gömülü olamayan çizgelerle çalışırken komşu düğümler arasındaki kenarlar bir "uzaklık" bilgisinden yoksundur. Çizgenin düğüm noktaları arasındaki mesafe, uzunluk ile değil bir düğüm noktasında diğerine giderken arada kaç kenar olduğu ile ilişkilidir [9].

1.1.2 Klasik ve karmaşık çizgelerin derece dağılımları

Bölüm 8.1 ve 8.2'de ele alacağımız Gilbert ve Erdős-Renyi çizgelerinin derece dağılımları, $P(k)$, Poisson dağılımına tabidir. Bu tür çizgelere klasik rasgele çizgeler denilmektedir [2, 10–12]. Bölüm 8'de ayrıntılı biçimde incelenmiştir.

Son onbeş yıl içerisinde, ister doğada, ister sosyal ya da teknolojik uygulamalarda kendiliğinden ortaya çıkan pek çok çizgenin, kuvvet yasalarına tabi derece dağılımları olduğu anlaşılmıştır [4]. Bu tür dağılımlar, en azından büyük dereceler için $P(k) \sim k^{-\gamma}$ biçiminde davranmaktadır. Sonlu çizgeler için bu dağılım, eksponansiyel bir sönümlenme ile sonlanır. Ölçekten bağımsız çizgeleri oluşturmak için bizim kullandığımız model, Barabasi-Albert modelidir [13]. Temel olarak iki prensibe dayanan bu modelde, çizgedeki düğüm sayısı zamanla artar ve yeni bağlanacak

düğüm noktaları derecesi yüksek olan düğümlere bağlanmayı seçerler (*preferential attachment*). Derecesi k_i olan bir i düğümünün yeni bir bağlantı yapma olasılığı, $p(k_i) \sim \frac{k_i}{\sigma_i k_i}$ ile verilir. BA modeli algoritması aşağıdaki gibidir:

(i) Büyüme: Az sayıda (m_0) bağlı düğümden oluşan bir yapı alınıp, her bir adım için $m < m_0$ bacağı olan yeni bir düğüm noktası sisteme eklenir.

(ii) Tercihli bağlanma: Eklenen düğümün kenarlarının bağlanacağı m farklı düğümün seçimi, $i = 1, 2, \dots$ olmak üzere, $p(k_i) \sim \frac{k_i}{\sigma_i k_i}$ olasılığı ile yapılır.

Bu dağılımlarda $\gamma < 3$ için dağılımın varyansının; $\gamma < 2$ için ise ortalamasının bile ıraksaması, bu çizgeler üzerinde karakteristik bir derecenin tanımlanamaması, derece dağılımlarının “ölçek envaryant” olarak nitelendirilmesine yol açmaktadır. Ölçek envaryant çizgeler, çok sayıda yüksek dereceli düğüm noktalarına sahip olmaları ile klasik çizgelerden ayırt edilirler. Bu özellikleri ile kendilerine *karmaşık* (complex) çizgeler de denilir [8, 13].

1.2 Çizge Laplasyeni ve Laplace Spektrumu

Çizge Laplasyeni, Laplace operatörünün (∇^2) bir çizge üzerine izdüşümüne benzerdir ve aşağıdaki biçimde tanımlanır [14–16].

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A} \quad (1.3)$$

Burada $\mathbf{D}$ matrisinin elemanları, i nci düğüm noktasının derecesi k_i olmak üzere, $D_{ij} = \delta_{ij}k_i$ 'dir. Düğüm noktası sayısı N olan bir çizge üzerinde tanımlı skalar alan $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_N)$ için, çizge Laplasyeninin bu alan üzerindeki izdüşümü,

$$(\mathbf{L}\mathbf{f}) = \sum_{i,j} L_{ij}f_j = \sum_i k_i f_i - \sum_i \sum_j A_{ij}f_j, \quad (1.4)$$

olur. Yalnızca komşu düğüm noktaları için $A_{ij} \neq 0$ olacağından, son terimden katkı, bir i düğümünün komşularından oluşan $\mathcal{N}_i$ seti için gelir.

$$(\mathbf{L}\mathbf{f}) = \sum_{i,j} L_{ij}f_j = \sum_i k_i f_i - \sum_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} f_j. \quad (1.5)$$

Çizge Laplasyeninin yapısı gereği $\sum_j L_{ij} = 0$ 'dır.

$$\sum_j L_{ij} = \sum_j D_{ij} - A_{ij} = \sum_j \delta_{ij}k_i - k_i = 0. \quad (1.6)$$

Şimdi d -boyutlu bir hiperkübik örgüde, inci düğüm noktasının komşu sayısı $k_i = 2d$ olup 1-boyutlu bir sistem için denklem 1.4'de görülen en yakın komşular üzerinden toplama terimi, aşağıdaki gibi olacaktır.

$$(\mathbf{L}f) = \sum_{i,j} L_{ij} f_j = \sum_i k_i f(x_i) - \sum_i [f(x_i - \Delta) + f(x_i + \Delta)] . \quad (1.7)$$

Burada $d = 1$ için $k_i = 2d = 2$ değeri denklem 1.7'de yerine konularak yeniden yazılırsa,

$$(\mathbf{L}f) = \sum_{i,j} L_{ij} f_j = \sum_i [(f(x_i) - f(x_i - \Delta)) + (f(x_i) - f(x_i + \Delta))] , \quad (1.8)$$

ve diğer taraftan,

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(x_i) &= \frac{d^2 f(x_i)}{dx_i^2} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left(\frac{df(x_i + \Delta)}{dx_i} - \frac{df(x_i)}{dx_i} \right) \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left(\frac{f(x_i + \Delta) - f(x_i)}{\Delta} - \frac{f(x_i) - f(x_i - \Delta)}{\Delta} \right) \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta^2} (-\mathbf{L}f) \end{aligned} \quad (1.9)$$

olacaktır. Böylece çizge Laplasyeni için, sürekli limitte, Laplace operatörünün eksi işaretli değeridir diyebiliriz [9, 14, 15].

$$\mathbf{L} = -\nabla^2 . \quad (1.10)$$

1.2.1 Özdeğerler ve Özvektörler

Çizge Laplasyeninin, $\mu = 1, \dots, N$ etiket değerleri için özdeğerleri ω_μ ve özvektörleri u_μ ,

$$\mathbf{L}u_\mu = \omega_\mu u_\mu . \quad (1.11)$$

özdeğer-özvektör bağıntısıyla hesaplanır. Yönelimsiz bir çizge için komşuluk matrisi $\mathbf{A}$ simetrik olduğundan, çizge Laplasyenin özvektörleri ortogonaldır ve özdeğerleri gerçel ve pozitif sayılardır. Her $\mu_1, \mu_2 = 1, 2, \dots, N$ için,

$$\sum_i u_{\mu_1}(i) u_{\mu_2}(i) = 0 . \quad (1.12)$$

bağıntısı geçerlidir. Bununla beraber, çizgenin içerdiği *bağlı bileşen* (connected component) sayısı sıfır değerli özdeğerinin katlılığı ile ilişkilidir:

- i. Eğer, çizge tek bir bağlı-bileşenden oluşuyorsa, en küçük Laplasyen özdeğeri olan $\omega_1 = 0$ özdeğeri yoz değildir. Laplasyen özdeğerleri artan sırada dizildiğinde, $\omega_1 =$

$0 < \omega_2 < \dots < \omega_N = \Omega$ olur. Burada en büyük özdeğer Ω 'dır. Bir *sonlu çizge* için en küçük ilk iki özdeğeri arasında sonlu bir fark, $\omega_2 - \omega_1 > 0$, vardır.

Sıfır değerli özdeğere karşı gelen özvektörün, $\mathbf{u}_1$, tüm elemanları sabit ve $N^{-1/2}$ değerine eşittir.

$$u_1(i) = N^{-1/2}, i = 1, 2, \dots, N . \quad (1.13)$$

- ii. Eğer çizge bağlı değil ve birden fazla bağımsız kümeden oluşuyorsa, sıfıra eşit özdeğerlerin sayısı bu bağımsız küme sayısına eşittir. Çizge Laplasyeni $\mathbf{L}$, blok-köşegen yapıdadır ve sıfır özdeğerlerine karşı gelen özvektörlerin elemanları sabit olup, herbiri için bu sabit değer, çizgenin ayrık parçalarının içerdiği düğüm noktası sayısı ile ilişkilidir.

Sıfırdan farklı özdeğerlere karşı gelen herhangi bir $\mathbf{u}_\mu$ özvektörü için, elemanlarının toplamı sıfıra eşittir.

$$\sum_i u_\mu(i) = 0 . \quad (1.14)$$

Ancak Laplasyenin özvektörleri, düzlem dalgadan farklı olarak, denklem 1.15'ten görüldüğü gibi bir δ -fonksiyonu vermez

$$\sum_\mu u_\mu(i) u_\mu(j) \neq \delta_{ij} , \quad (1.15)$$

ve denklem 1.16'daki gibi tüm özvektörlerin inci elemanları üzerinden alınan toplamın sıfıra eşit olmadığı görülür.

$$\sum_\mu u_\mu(i) \neq 0 . \quad (1.16)$$

1.3 Ağ Yapıları Üzerinde Kritik Fenomenler

Farklı istatistiksel fizik modellerinin, Öklidyen uzay yerine, metrik bir uzaya gömülü olamayan ağ yapıları üzerine yerleştirildiklerinde, nasıl davranacakları, özel olarak da kritik davranışlarının nasıl olacağı doğal olarak ilgi çeken bir konudur.

Bu tezde, "en yakın komşuluk" kavramının "bir kenar ile birbirine bağlı olmak" biçiminde tanımlandığı en yakın komşu etkileşimlerine sahip Ising modeli, ağ yapıları üzerinde kritik fenomenleri incelemek için paradigmatik bir model olarak ele alınacaktır.

Çizgeler üzerinde Ising modeli çözümleri yapabileceğimiz farklı yöntemler de mevcuttur. Ancak bu yöntemlerin eksikliği evrensel bir teori vermemeleridir. Öyle ki, farklı çizge yapıları ya da modeller için elde edilen çözümlerin herbiri kendine özgü olup genelleştirilmeye imkan tanımamaktadırlar. Wilson ve Kogut [17–20] tarafından periyodik çizgeler üzerinde geliştirilen renormalizasyon grubu yöntemi bugüne kadar keyfi çizgelere uygulanamamıştır. Oysa ki, renormalizasyon grubu teorisinin başarısı, farklı tipteki etkileşimlere, uzayın ve düzen parametresinin boyutuna göre evrensellik sınıflarını belirlemede ve kritik alt ve üst boyut kavramlarını ve bunların değerlerini ortaya koymasındadır. Bu nedenledir ki, farklı, periyodik olmayan çizgelere uygulanabilmesi, çizgeler üzerinde kritik davranışın anlaşılabilmesi açısından önemlidir. Bunun yanında renormalizasyon grubu (RG) teorisinin farklı tipteki etkileşimlere göre evrensellik sınıflarını belirlemedeki başarısı, kritik alt ve üst boyut kavramları ile uzayın boyutunun ve düzen parametresinin evrensellik sınıflarının boyutlandırılmasındaki rolünün açıklanması oldukça önemlidir.

Literatürde ağaç benzeri çizge yapıları için kullanılan başlıca yöntemlerden biri *Bethe yaklaşımı* [21] olmuştur. Daha sonra Peierls tarafından Ising modeline uygulanmıştır [22]. Literatürde Bethe-Peierls yaklaşımı olarak bilinen bu yaklaşım ortalama alan teorisi için bir temel oluşturur ve en yakın komşu etkileşimlerinin dikkate alınmasıyla, N tane etkileşen parçacık sistemi problemi, bir sonlu küme problemine dönüşür [8]. Ağaç benzeri çizgeler ve tam bağlı çizgelerde bu yaklaşım kesin sonuç verir.

Bir diğer yöntem ise düzenli Cayley ağacı yapılarında Ising modeli çözümünü elde edebileceğimiz *tekrarlama yöntemi* (recursion method) [23–25]. Baxter tarafından Cayley ağaçları ve Bethe çizgeleri için geliştirilen kesin tekrarlama yöntemi ile düzenli bir ağaç üzerinde Ising modeli çözülebilir [8, 25]. Tanımı gereği Bethe çizgesi sonsuz olmakla beraber bir Cayley ağacı sonlu bir Bethe ağacıdır diyebiliriz. Ancak, Cayley ağacı ve Bethe çizgesinin termodinamik limitte Ising modeli çözümleri farklıdır [8].

Onsager'in iki boyutlu Ising modeli için verdiği kesin çözüm ve daha yüksek boyutlu öklidyen uzaylarda ya da daha uzun erişimli etkileşimler için, Ising modeli'ne farklı pertürbatif yaklaşımlar (küme açılımları, yüksek ve alçak sıcaklık açılımları, bunlara Padé yaklaşımları [26] vb.) bize, Ising modelinin kritik davranışının, uzayın boyutu

ve etkileşimin kısa ya da uzun erişimli olmasına göre evrensellik sınıflarına ayrıldığını göstermiştir [27,28].

Çizgeler üzerinde, evrensel bir teoriye sahip bulunmasak da, Dorogovtsev, Goltsev ve Mendes [8] ölçekten bağımsız ve ilintisiz çizgelerde kritik davranışın, derece dağılımının ölçeklenme üsteli γ 'ya nasıl bağlı olduğunu göstermişlerdir (Bkz. 1.1.2). Ferromanyetik Ising modelinin ölçekten bağımsız çizgelere uygulanması sonucu, evrensel kritik davranış γ 'ya bağlı olarak üç sınıfta toplanabilir: (i) Derece dağılımı üsteli, $\gamma > 5$ için ölçekten bağımsız çizgelerde, standart ortalama-alan kritik davranışı, (ii) Ölçekten bağımsız çizgelerde $3 < \gamma \leq 5$ için, derece dağılımına bağlı olarak bulunan ve evrensel olmayan kritik üsteller, (iii) Ölçekten bağımsız çizgelerde $2 < \gamma \leq 3$ için, sonsuz mertebeden faz geçişi. Klasik rastgele çizgelerde Ising modeli $N \rightarrow \infty$ için standart ortalama-alan kritik davranışı gösterir [8].

Bradde, Caccioli, Dall'Asta ve Bianconi 2010 yılında yayınladıkları çalışmalarında [29] uzaysal, ölçekten bağımsız çizgeler için etkin spektral boyut cinsinden bir Ginzburg kriterini nasıl türettiklerini gösterdiler. Keyfi çizgeler [30] için önerilmiş pek çok "gerçek uzay renormalizasyon grubu" (RSRG) [31–33] çözümleri mevcuttur. Ancak bu çözümlerin çoğu uzaysal çizgeler içindir ve uzaysal olmayan çizgelerde kritik olguların evrensellik özelliklerini, onların spektral ve topolojik özellikleri cinsinden açıklama konusunda hala eksikler vardır.

1.4 Spektral Yöntemler

Bu tezde, Wilson-Kogut alan teorik renormalizasyon grubu, keyfi çizgelere uygulanabilir biçimde genelleştirilmeye çalışılacaktır.

Peryodik örgülerde Wilson'ın yaptığından farklı olarak bizim çalıştığımız uzaysal olmayan ve öteleme simetrisi bulunmayan çizgeler için uzunluk kavramı olmadığından, çizge momentum vektörü $\mathbf{k}$ gibi bir büyüklük tanımlayamıyoruz. Metrik bir uzaya gömülü olmayan çizgeler için, sıcaklık uzamındaki renormalizasyon grubu özdeğerlerini uzunluk ölçeklenmesi altında korelasyon uzunluğu kritik üstelinin tersi cinsinden ifade etmek de mümkün olmayacağından, bir uzunluk kavramı içermeyen RG geliştirmek gerekiyor. Bu tezin üstesinden gelmeye çalıştığı ana sorulardan biri budur.

Çizge üzerinde yaşayan bir istatistiksel alanın, çizge Laplasyeninin özvektörleri cinsinden açılımını, genelleştirilmiş bir Fourier dönüşümü yaparak elde ediyoruz ve doğrudan doğruya çizge Laplasyeninin özdeğerlerini büyükten küçüğe doğru elimine ediyoruz. Böylece yeniden ölçeklenmiş etkin Hamiltonyenden kritik üstelleri hesaplamak için kullanacağımız ölçeklenme faktörlerini elde ediyoruz.

Öteleme simetrisi olmayan iki farklı çizge kullanarak, Gaussiyen model ve ötesinde kritik davranışı elde ettik. Kullandığımız öteleme simetrik olmayan çizgeler Cayley ağacı ve elmas örgü [34] yanında, $d = 2$ ve $d = 3$ boyutta periyodik örgüler için de Gaussiyen model sonuçlarını bulduk. Gaussiyen model hamiltonyenine dördüncü mertebeden etkileşim terimini ekleyerek Gaussiyen teoriden Ising evrensellik sınıfına [19, 35] geçtik. *Çiftlenim sabitlerinde* (coupling constants) ikinci mertebeye kadar pertürbasyon açılımı ile etkileşen teorinin renormalizasyon davranışını araştırdık.

Elmas hiyerarşik örgüsünde ikinci mertebeden pertürbasyon teorisi ile Ising evrensellik sınıfı sonuçlarına ulaşamadığımız için, spektral boyutu farklı hiyerarşik örgüler [1] elde etme yoluna gittik. Burada Gaussiyen teorinin sıcaklık uzamındaki renormalizasyon grubu üstelinin doğrudan doğruya Laplace operatörünün spektral yoğunluğuna bağlı olduğunu göstermek mümkündür. Eğer bu spektral yoğunluk küçük özdeğerler için bir kuvvet yasası biçiminde ise, bu kuvvet (β) spektral boyuta ($\tilde{d}$) basit bir biçimde, $\tilde{d} = 2\beta + 2$, bağlı olmaktadır.

Gaussiyen teori için bulduğumuz kritik üstellerin, kritik bölgede büyük dalgaboylu dalgalanmaların belirleyici olmalarına benzer biçimde, çizge Laplasyeninin küçük özdeğer bölgesinden hesapladığımız spektral boyuta bağlı olduğunu gördük. Bu tezde yaptığımız en önemli saptamalardan birisi, en azından kısa erimli Ising modeli için, kritik davranışın, çizgenin fraktal (ölçeklenme) boyutuna değil sadece spektral boyutuna bağlı olmasıdır.

Düşük spektral boyutlara sahip deterministik, hiyerarşik çizgeler üzerinde yaptığımız nümerik hesaplarda, Ising simetrisini veren etkileşim terimlerinin kritik davranışa etki edip etmemelerinin, sadece spektral boyutun $2 < \tilde{d} < 4$ aralığında olmasına bağlı olduğunu gösterdik (Bölüm.7). Ancak "etkileşen teori" için kritik üsteller çizgenin simetrisine sıkı biçimde bağlıdır. Öyle ki etkileşim terimleri çizge Laplasyeninin

özvektörleri üzerinden hesaplanmakta ve özvektörler ise çizgenin simetri özelliklerini barındırmaktadır.

Yüksek spektral boyutlara sahip rastgele çizgeler (Gilbert çizgeleri) ve uzun kuyruklu, "ölçekten bağımsız" rastgele çizgelerde spektral boyut ıraksadığından, naif bir yaklaşımla her iki tür için de kritik davranışın Gaussiyen davranışla sınırlı olacağını düşünmek mümkündür. Ancak, yukarıda Bölüm.1.3'te belirtildiği gibi, ölçekten bağımsız çizgelerin derece dağılımı üstelinin $3 < \gamma < 5$ olduğu aralıkta, Gaussiyen olmayan, γ 'ya bağlı kritik davranış gözlenmektedir. Bu konuda söyleyebileceğimiz şey, spektral boyut ıraksıyor olsa da, bu çizgelerin özvektörlerinin, etkileşim terimlerinin sonlu (sıfırdan farklı) sabit noktalara sahip olmalarına olanak tanıyabileceğidir. Bu olasılık araştırılması gereken açık bir soru olarak durmaktadır.

1.5 Tez planı

Bölüm.2'de alan teorik renormalizasyon grubu, Ginzburg-Landau yaklaşımı ile Wilson tipi renormalizasyon yöntemine kısaca değinilmiştir. Bölüm.3'te spektral renormalizasyon grubu anlatılmıştır. Burada spektral renormalizasyon grubu yaklaşımında kullandığımız ölçeklenme metodları verilmiş ve Gaussiyen modeli için ölçeklenme faktörlerinin tanımı yapılmıştır. Çizge Laplasyeni ve özdeğer dağılımları örnek çizge yapıları üzerinden tartışılmıştır. Kullanılan $d = 2$ ve $d = 3$ boyutlu periyodik örgülerin yanında Cayley ağacı ve elmas örgülerinin yapısal özelliklerinden bahsedilmiş ve spektral dağılım grafikleri ile β spektral dağılım üsteli, her iki örgü için tartışılmıştır. Bölüm.4'te Gaussiyen modelin kritik davranışı incelenmiştir. Burada ele alınan periyodik örgüler, Cayley ağacı ve elmas örgünün yanında, elmas örgünün genelleştirilmesiyle elde ettiğimiz ve spektral boyutu $\tilde{d} > 2$ olan örgülerdir. Bölüm.5'te sonlu boyut ölçeklenmesi ve kesin hesaplamalar spektral renormalizasyon grubu yöntemi ile elde ettiğimiz sonuçları kontrol etmek amacıyla verilmiştir. Bölüm.6'te Gaussiyen modeli hamiltonyenine ψ^4 etkileşimlerini dahil ettik. Yine Cayley ağacı ve elmas örgü için bulduğumuz sonuçları verdik. Bölüm.7'de spektral boyutu $\tilde{d} > 2$ olan örgüler üzerinde, spektral renormalizasyon grubu çözümlerimizi verdik. Bölüm.8'de Gilbert klasik rastgele çizgesi ve ER rastgele çizgesi üzerinde Gaussiyen model sonuçlarını verdik. İlaveten ölçekten bağımsız ilintisiz çizgeler ve yine ölçekten bağımsız olan BA çizgesi için spektral dağılım grafiklerini verdik.

2. ALAN TEORİK RENORMALİZASYON GRUBU

Bir fiziksel sistemin hangi evrensellik sınıfına dahil olduğunun belirlenmesinde etkili olan parametrelerden biri spin boyutudur. Örneğin Ising modeli için spin $s_i = \pm 1$ değerlerini alır ve bir skalere karşı gelir. Bunun yanında evrensellik sınıfını belirleyen bir diğer parametre, sistemdeki etkileşimlerin (en yakın komşu etkileşmesi vs.) tanımıdır. Bir çizgenin içine gömülü bulunduğu uzayın boyutu, fraktal boyutu veya spektral boyutu tanımlanabilir. Peryodik örgülerde bunlar birbirine eşittir. Keyfi çizgelerde bunlardan hangisinin, çizgenin üzerindeki istatistiksel modelin kritik davranışını belirleyen boyuta karşı geldiği net değildir. Evrensellik sınıfını belirlemede yol gösterici olan *boyut* kavramı tek olmadığı için bu çizgelerin hangi evrensellik sınıfına ait olduğu da net değildir. Biz bu çalışmada bu konuya açıklık getirmeye çalışacağız.

Ising modelinde, spin $\sigma_i = \pm 1$ ve hamiltonyen herhangi verili bir $\{\sigma_i\}$ seti için denklem 2.1'deki gibidir. Burada $\langle ij \rangle$, bir kenar ile birbirine bağlı en yakın komşular kümesini ifade eder.

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i . \quad (2.1)$$

Etkileşim sabiti J 'nin pozitif değerleri için, sistem minimum enerji durumuna komşu spinlerin yöneliminin aynı doğrultuda olması ile gelir. Dış manyetik alan, h 'nın sıfıra eşit, sıcaklığın yeterince düşük ve çizgenin bağlanabilirliğinin yeterince yüksek olduğu durumda (periyodik örgülerde gömülü boyut, $d_e \geq 2$ için) spinler düzenli hale gelir ve mıknatıslanma, yani termodinamik beklenen değer $\langle \sum_i \sigma_i \rangle$, sıfırdan farklı bir değer alır. Mıknatıslanma burada düzen parametresinin yerine geçmiştir. Sonlu bir T_c kritik sıcaklık değerinde, spinlerin düzenli hale geldiği bu durumda, eğer mıknatıslanma sıfırdan tedricen farklılaşıyorsa, sürekli bir faz geçişi gerçekleşmiş olur.

2.1 Ginzburg-Landau Yaklaşımı

Landau teorisine göre düzen parametresinin küçük değerleri için serbest enerji bir kuvvet serisi şeklinde yazılabilir. Ginzburg- Landau yaklaşımını [9, 36] için örgü

üzerinde tanımlanan skalar bir istatistiksel alan, ayrık değişkeninin yerel ortalaması, sistemin toplam büyüklüğüne göre çok küçük bir hacim üzerinden alınarak, tüm sistemin büyüklüğü sonsuz olarak düşünülebilir. Buradan elde edilen yerel düzen parametresi yoğunluğu, $\mathbf{x}$ uzaysal koordinatlara karşı gelmek üzere, $\psi(\mathbf{x})$ olarak adlandırılırsa, istatistiksel alan için tanımlanan ayrık değişkenden sürekli bir değişkene geçilmiş olur.

Etkin Ginzburg- Landau hamiltonyeni skalar düzen parametresi $\psi(\mathbf{x})$ için 2.2'deki gibidir.

$$H = \int_V d\mathbf{x} \left\{ \frac{1}{2} [r_0 \psi^2(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}) \nabla^2 \psi(\mathbf{x})] + v_0 \psi^4(\mathbf{x}) - h \psi(\mathbf{x}) \right\} . \quad (2.2)$$

Sistemin hacmi üzerinden entegral alınarak tanımlanan hamiltonyende, h dış manyetik alana; r_0 ise indirgenmiş sıcaklığa ($t = (T - T_c)/T_c$) orantılıdır. Burada k_B Boltzmann sabiti olmak üzere, hamiltonyenin ısı enerjisi ($k_B T$) biriminde olduğunu varsayacağız.

Düzen parametresinin Fourier katsayıları cinsinden ifadesi,

$$\hat{\psi}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.3)$$

olup $i\mathbf{k}$ burada dalgavektörüdür. Aynı zamanda $\mathbf{k}$ 'nın gradyan operatörünün kompleks eksponansiyeller üzerindeki özdeğerleri ve Ginzburg-Landau hamiltonyenindeki Laplace operatörünün de kompleks eksponansiyeller üzerindeki özdeğerlerinin ise $-\|\mathbf{k}\|^2$ olduğu kolayca görülebilir.

Momentum uzayında düzen parametresi için 2.3'de elde ettiğimiz ifadeyi 2.2'de yerine koyduğumuzda, d boyutlu hiperkübik fourier uzayında sürekli limitte, etkin hamiltonyen düzen parametresi yoğunluğunun denklem 2.3'te verilen Fourier katsayıları cinsinden yazılabilir.

Peryodik örgülerde, eğer örgü aralığı l ise, dalga vektörlerinin maksimum boyu $\Lambda = 2\pi/l$ ve böylece entegralin üst limiti $\Lambda = \frac{2\pi}{l}$ olur. Momentum uzayının izotropik olduğunu varsayarak, polar koordinatlarda çalışabiliriz. Böylece bir dk aralığında dalga vektörü yoğunluğu, d -boyutlu birim kürenin yüzey alanı S_d olmak üzere, k için bir kuvvet yasası formunda, $S_d \frac{k^{d-1}}{(2\pi)^d}$, olacaktır.

Etkin hamiltonyeni, sistemin etkileşmeyen H_0 ve etkileşen H_{etk} kısmı için ikiye ayırıp $H = H_0 + H_{etk}$ şeklinde toplam olarak yazabiliriz. Böylece sistemin etkileşmeyen kısmı için, peryodik örgülerde, kuadratik ve köşegenleştirilmiş hamiltonyen H_0

denklem 2.4'deki gibi olur.

$$H_0 = \frac{1}{2} \int_0^\Lambda \frac{k^{d-1} dk}{(2\pi)^d} (r_0 + k^2) \hat{\psi}^*(\mathbf{k}) \hat{\psi}(\mathbf{k}) . \quad (2.4)$$

Etkileşim hamiltonyeni, H_{etk} , farklı dalga sayılarına sahip Fourier katsayıları arasında eşlenimler (kuplajlar) içerir ve denklem 2.5'deki gibi tanımlanır.

$$H_{etk} = v_0 \int_0^\Lambda d\mathbf{k}_1 \dots d\mathbf{k}_4 \hat{\psi}(\mathbf{k}_1) \dots \hat{\psi}(\mathbf{k}_4) \delta\left(\sum_{i=1}^4 \mathbf{k}_i\right) \quad (2.5)$$

Sistemin bölüşüm fonksiyonu ise denklem 2.6'deki gibidir.

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{0 \leq |\mathbf{k}| \leq \Lambda} d\hat{\psi}_{\mathbf{k}} e^{-H} \quad (2.6)$$

2.2 Wilson Tipi Renormalizasyon Grubu Yöntemi

Ölçeklenme parametresi b için ölçek değişikliği, $\Lambda/b < k < \Lambda$ aralığındaki fourier bileşenleri üzerinden bir toplam alınarak gerçekleştirilir.

Wilson tipi renormalizasyon [17] yönteminde düzen parametresi yoğunluğunun kısa erimli dalgalanmalara karşı gelen, göreceli olarak küçük dalgaboyuna sahip, alan bileşenleri elimine edilir [36–38]. Bunun için k 'nın erimi b ile ölçeklenerek, denklem 2.6'da verdiğimiz bölüşüm fonksiyonu kısa ve uzun dalgaboylu bileşenlerine ayrılarak yeniden yazılabilir.

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{0 \leq |\mathbf{k}| \leq \Lambda/b} d\hat{\psi}_{\mathbf{k}}^< \prod_{\Lambda/b \leq |\mathbf{k}| \leq \Lambda} d\hat{\psi}_{\mathbf{k}}^> e^{-H} . \quad (2.7)$$

Uzun erimli dalgalanmaları elimine etmek için ilk olarak büyük k değerlerine karşı gelen dalgalanmaların entegrali alınır. Sonraki adımda ölçeklenme faktörleri ile beraber hamiltonyen orjinal formuna getirilir. Son olarak ölçeklenme altında r , v ve $\hat{\psi}(\mathbf{k})$ alanı için gelen ölçeklenme faktörleri, Hamiltonyendeki k^2 teriminin katsayısı sabit tutulmak suretiyle elde edilir.

Wilson'ın alan teorik yaklaşımı ile etkileşim terimlerini içermeyen hamilton fonksiyonu (yani Gaussien model) için kesin çözüm yapılabilmektedir. Ginzburg-Landau hamiltonyeninin etkileşen kısmı için ise pertürbatif yaklaşım kullanılmaktadır.

3. SPEKTRAL RENORMALİZASYON GRUBU: GAUSSIYEN MODELİ

Bu bölümde, alan teorisi yöntemleri ile öteleme ve dönme simetrisine sahip olmayan çizgeler üzerinde de RG uygulamalarının nasıl yapılabileceğini göstereceğiz. Ölçeklenme stratejilerimizden ve periyodik örgüler yanında öteleme ve dönme simetrisine sahip olmayan çizgelere örnek olarak kullandığımız Cayley ağacı ve elmas hiyerarşik örgüsünden bahsedip, spektral dağılım grafiklerini vereceğiz.

3.1 Temel Tanım

Bir çizgenin düğüm noktaları üzerinde yaşayan sürekli bir $\psi(i) \in (-\infty, \infty)$ alanı için, Gaussiyen model hamiltonyeni aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_{ij}^N \psi(i) [r_0 \delta_{ij} + L_{ij}] \psi(j) - h \sum_i \psi(i) . \quad (3.1)$$

Ginzburg-Landau açılımında, Laplace operatörünü matris elemanları $L_{ij} = d_i \delta_{ij} - A_{ij}$ olan çizge Laplasyeni [14–16] olarak görmekteyiz. Burada $\mathbf{A}$, çizgenin komşuluk matrisi, d_i ise inci düğüm noktasının derecesidir. Komşuluk matrisi $\mathbf{A}$ 'nın simetrik ve böylece özdeğerlerinin gerçel olması durumunda, tüm yönelimsiz çizgeler için denklem 3.2 genel bir ifade olur.

Çizge Laplasyeninin bir $\psi(i)$ alanı üzerine izdüşümü, inci düğüm noktasının komşularından oluşan $\mathcal{N}_i$ seti için,

$$\sum_j L_{ij} \psi(j) = d_i \psi(i) - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \psi(j), \quad (3.2)$$

olur. Düzenli örgüler (regular lattice) için d_i bir sabite eşittir.

Skalar alan $\psi(i)$, Laplace operatörünün özvektörleri $\mathbf{u}_\mu$ ' lar cinsinden açılıp,

$$\psi(i) = N^{-1/2} \sum_\mu \hat{\psi}_\mu u_\mu(i) , \quad (3.3)$$

Hamiltonyen köşegenleştirilebilir.

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^N [r_0 + \omega_\mu] \hat{\psi}_\mu^2 - h \hat{\psi}_1 . \quad (3.4)$$

Burada $\mu = 1, 2, \dots, N$ etiket indisi olmak üzere, ω_μ Laplace operatörü $\mathbf{L}$ ' nin özdeğerleridir.

$$\mathbf{L} \omega_\mu = \omega_\mu \mathbf{u}_\mu . \quad (3.5)$$

Özdeğerler $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_N$ şeklinde sıralanırsa en küçük özdeğer $\omega_1 = 0$ olur. Eğer çizge bağlı ise sonlu büyüklükteki bir N için $\omega_2 > 0$ 'dır.

Sistemin H_0 için bölüşüm fonksiyonu,

$$Z_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\mu} d\hat{\psi}_\mu e^{-H_0} , \quad (3.6)$$

olur. Her bir $d\hat{\psi}_\mu$ değişkenine göre entegralleri ayrı ayrı yazarak, N tane Gaussiyen integralin çarpımı biçiminde elde edilen bölüşüm fonksiyonu, bu Gaussiyen entegrallerin hesaplanmasıyla denklem 3.7'deki gibi bulunacaktır.

$$\begin{aligned} Z_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{\psi}_1 e^{-\frac{1}{2}[r_0 + \omega_1] \hat{\psi}_1^2 - h \hat{\psi}_1} \dots \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{\psi}_N e^{-\frac{1}{2}[r_0 + \omega_N] \hat{\psi}_1^2} \\ &= \prod_{\mu=1}^N \sqrt{\frac{2\pi}{(r_0 + \omega_\mu)}} - \frac{h^2}{2(r_0 + \omega_1)} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Burada $\omega_1 = 0$ değerini yerine yazarak ifade sadeleştirilebilir.

$$Z_0 = \prod_{\mu=1}^N \sqrt{\frac{2\pi}{(r_0 + \omega_\mu)}} - \frac{h^2}{2r_0} . \quad (3.8)$$

Böylece sabit terimi de dahil ederek sistemin serbest enerjisini, $F = -\ln Z_0$ ifadesinden,

$$F_0 = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^N \ln(r_0 + \omega_\mu) - \frac{N}{2} \ln 2\pi . \quad (3.9)$$

buluruz. Ayrık etiket değerleri üzerinden toplam içeren 3.4 ifadesini 3.10'daki gibi özdeğerler üzerinden alınan sürekli bir integrale çevirmek,

$$\frac{1}{2} \int_0^\Omega d\omega \rho(\omega) [r_0 + \omega] \hat{\psi}_\omega^2 , \quad (3.10)$$

Laplasien özvektörlerinin ve dolayısıyla $\hat{\psi}_\mu$ 'ların periyodik örgülerdeki gibi öteleme ve dönme simetrisine sahip olmadıkları durumda bazı zorlukları beraberinde getirir. Öyle ki Hamiltonyeni yeniden yazıp renormalizasyon faktörlerini yalnızca üstellere bakarak elde etmeye çalışmak farklı $\mathbf{u}_\mu$ vektörlerinin farklı simetrilerini gözardı etmeye sebep olabilir. Burada Ω en büyük özdeğerdir.

Diğer taraftan Gaussiyen entegraller alındıktan sonra serbest enerji veya özgül ısı ve iki-nokta korelasyon fonksiyonu gibi serbest enerjinin türevlerinde, bu zorluk ortadan kalkar [39] ve serbest enerji integral formda yazılabilir.

$$F_0 = \frac{1}{2} \int_0^\Omega d\omega \rho(\omega) \ln(r_0 + \omega) . \quad (3.11)$$

Renormalizasyon grubu tekrarlarba bağıntılarını elde etmek için temel olarak izlenilen yol, bölüşüm fonksiyonunda kısa dalgaboylu serbestlik dereceleri üzerinden kısmi bir toplam yapmaktır. Böylece küçük dalgaboylu serbestlik dereceleri elimine edilmiş olur [37]. Momentum uzayı RG için bu toplam, düzen parametresinin büyük dalga vektörlerine sahip Fourier bileşenleri üzerinden gerçekleşecektir.

Spektral yoğunluğu kolayca tahmin edemediğimiz, üstelik bir uzunluk kavramı tanımlayamayıp, metrik bir uzaya indirgenemeyen sistemlere, alan teorik renormalizasyon grubunu nasıl uygulayacağımızı Bölüm 3.1.1'de göstereceğiz.

3.1.1 Ölçeklenme Stratejileri

Bizim bu çalışmada kullandığımız örgülerde spektral yoğunluğa ilişkin bir öngörümüz olmadığı gibi, metrik bir uzaya gömülemeyen herhangi bir *uzunluk* kavramının olmadığı sistemlere, alan teorik renormalizasyon grubunu uygulamak için iki farklı yol izleyerek, bölüşüm fonksiyonundan büyük ω dalgalanmalarını elimine edip renormalizasyon faktörlerini hesaplayacağız. İlk olarak *kip* sayısını, N , bir ölçeklenme faktörü ile tepesinden kesip büyük özdeğerleri elimine etmeye dayanan N -ölçeklenmesi diyeceğimiz yöntemi kullanacağız. İkinci yöntemimiz ise en büyük özdeğer Ω 'yı yine bir sabit B faktörü ile ölçeklemek olacak. Böylece *Wilson*-tipi

renormalizasyon yöntemi [17–19, 37] ile de bir benzerlik kurmuş olacağız. Bu yöntemleri kullanarak elde ettiğimiz Gaussiyen model sonuçları aşağıda verilmiştir.

3.1.1.1 Kip sayısının ölçeklenmesi

Laplasien özdeğerlerini artan bir sırada dizdikten sonra etkin Hamiltonyende ilk N/B sayıda özdeğeri tutup geri kalan özdeğerler üzerinden integral alarak büyük özdeğerleri elimine ederiz. Elimine edeceğimiz özdeğer setinin N/B alt sınırı B 'nin farklı değerleri için aynı ω özdeğerine de karşı gelebilir. Bu tekrarları ortadan kaldırmak için seçeceğimiz B faktörü sistemin genel simetrilerini gözetmeli ve gereksiz noktaları ölçeklenme diyagramlarından elimine edebilmelidir. Bir $\mu_B = N/B$ kesme noktası için, eksik (truncated) Hamiltonyen,

$$H_0^< = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{\mu_B} [r_0 + \omega_\mu] \hat{\psi}_\mu^2 - h \hat{\psi}_1 \quad (3.12)$$

olur. Bu Hamiltonyeni eski formuna getirebilmek için eklenen ölçeklenme faktörleri ile beraber,

$$H'_0 = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^N [r_0 B^{-\phi_1} + B^{-\phi_1 - \phi_2} \omega_\mu] (\hat{\psi}'_\mu)^2 - h' \hat{\psi}'_1 \quad (3.13)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada z , "alan renormalizasyon faktörü" olup [19, 37], $\hat{\psi}' = z \hat{\psi}$ 'dir [19, 37]. Denklem 3.13'da gördüğümüz ölçeklenme faktörlerini σ_1^V ve σ_2^V isimlendirmesiyle, sırasıyla denklem 3.14 ve 3.15'deki gibi tanımlarız.

$$\sigma_1^V(B) \equiv \frac{\sum_{\mu=1}^N 1}{\sum_{\mu=1}^{\mu_B} 1} = B^{\phi_1} \quad (3.14)$$

ve

$$\sigma_1^V(B) \sigma_2^V(B) \equiv \frac{\sum_{\mu=1}^N \omega}{\sum_{\mu=1}^{\mu_B} \omega} = B^{\phi_1 + \phi_2}. \quad (3.15)$$

Tanım gereği $\sum_{\mu=1}^N \omega = N \bar{\omega}$ ifadesinden $\phi_1 = 1$ olduğu kolayca görülebilir.

Alan renormalizasyon faktörü z 'yi hesaplariken Laplace teriminin katsayısını sabit tutarak $(\sigma_1^V \sigma_2^V)^{-1} z^2 = 1$, eşitliğinden denklem 3.16'daki gibi buluruz.

$$z = (\sigma_1^V \sigma_2^V)^{1/2} = B^{(\phi_1 + \phi_2)/2}. \quad (3.16)$$

İndirgenmiş sıcaklığın renormalizasyonu,

$$r' = (\sigma_1^V)^{-1} z^2 r_0 = \sigma_2^V r_0 = B^{\phi_2} r_0 \quad (3.17)$$

olur. Dış alan ile etkileşim terimi $h' \hat{\psi}'_1 = h z \hat{\psi}_1$ ve dış manyetik alan için renormalizasyon denklemi 3.18'deki gibi olur.

$$h' = z h \quad (3.18)$$

Diğer kritik üstelleri renormalizasyon grubu özdeğerleri cinsinden yazabilmek için Kadanoff ölçeklenme bağıntılarını kullanırsak, serbest enerji yoğunluğu

$$f(t, h) = B^{-1} f'(B^{Y_t^V} t, B^{Y_h^V} h) \quad (3.19)$$

olur. Denklem 3.17 ve 3.18'den renormalizasyon grubu özdeğerlerini $Y_t^V = \phi_2$ ve $Y_h^V = (1 + \phi_2)/2$ olarak buluruz. Serbest enerji yoğunluğunun indirgenmiş sıcaklık t ile ilişkisinden,

$$f(t, 0) \sim t^{2-\alpha}, \quad (3.20)$$

özül ısı için $c_h \sim \partial^2 f(t, 0) / \partial t^2 \sim t^{-\alpha}$ eşitliğini kullanarak kritik üstel α 'yı ölçeklenme üsteli ϕ_2 cinsinden,

$$\alpha = 2 - \frac{1}{\phi_2} \quad (3.21)$$

buluruz. Benzer biçimde dış manyetik alanın spin başına manyetizasyon değeri m ile ilişkisini, $h \sim m^\delta$, kullanarak kritik sıcaklıkta, $t = 0$, manyetik alan kritik üsteli δ 'yı ölçeklenme üsteli ϕ_2 cinsinden denklem 3.22'deki gibi elde ederiz.

$$\delta = \frac{1 + \phi_2}{1 - \phi_2}. \quad (3.22)$$

3.1.1.2 En büyük özdeğerin ölçeklenmesi

Büyük özdeğerli serbestlik decerelerini elimine etmek için bir diğer ölçeklenme yöntemini en büyük özdeğeri B gibi herhangi bir ölçeklenme katsayısı ile bölerek, onun üstünde kalan özdeğerleri elimine etmek olarak tanımlamıştık. Bu işlem sonucunda elde edilen Hamiltonyenin tekrar tüm dalgalanma kiplerini kapsayabilmesi için, gereken faktörler σ_1^Ω ve σ_2^Ω aşağıdaki biçimde tanımlanmalıdır.

$$\sigma_1^\Omega(B) \equiv \frac{N}{\sum_{\mu=1}^{\mu_B} 1} = B^{p_1} , \quad (3.23)$$

ve

$$\mu_B = \sup\{\mu \in [1, N] : \omega_{(1)} < \Omega/B\} \quad (3.24)$$

olmak üzere, buradaki aşıkâr (trivial) ölçeklenme üstelinin p_1 olduğunu $N/N' = B^{p_1}$ 'den kolaylıkla görebiliriz. Gaussiyen hamiltonyenin yeniden ölçeklenmesinden gelen bir diğer bağıntı,

$$\sigma_1^\Omega(B) \sigma_2^\Omega(B) \equiv \frac{N\bar{\omega}}{\sum_{\mu=1}^{\mu_B} \omega} = B^{p_1+p_2} \quad (3.25)$$

olur. Buradan da alan renormalizasyon faktörü ölçeklenme üstelleri p_1 ve p_2 cinsinden

$$z = B^{(p_1+p_2)/2} \quad (3.26)$$

bulunur. İndirgenmiş sıcaklık için tekrarlama bağıntısı $r' = \sigma_2^\Omega r_0$ ve buradan da $p_2 = 1$ olur. Serbest enerji yoğunluğu için,

$$f = B^{-p_1} f'(t', h') , \quad (3.27)$$

ve manyetik alan kritik üsteli δ , ölçeklenme üstelleri cinsinden,

$$\delta = \frac{p_1 + p_2}{p_1 - p_2} = \frac{p_1 + 1}{p_1 - 1} \quad (3.28)$$

bulunur. Eğer spektral yoğunluk küçük ω bölgesinde bir kuvvet yasası davranışı, $\rho(\omega) \sim \omega^\beta$, gösteriyorsa p_1 ve ϕ_2 üstelleri spektral yoğunluk üsteli β cinsinden elde edilebilir.

$$\begin{aligned} \phi_2 &= 1/(1+\beta) , \\ p_1 &= 1+\beta . \end{aligned} \quad (3.29)$$

Denklem 3.29'dan görüleceği gibi $\beta \geq 0$ olduğu durumda, $\phi_2 \leq 1$ ve $p_1 \geq 1$ olacaktır. Son olarak özgül ısı kritik üsteli α ve manyetik alan kritik üsteli δ , kuvvet yasası gösteren bir spektral dağılım için, β kuvveti ile 3.30'daki gibi ilişkilendirebiliriz.

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - \beta , \\ \delta &= (2 + \beta)/\beta . \end{aligned} \quad (3.30)$$

3.2 Laplasyen Özdeğerleri ve Özdeğer Dağılımları

Spektral renormalizasyon grubunu Gaussiyen model için keyfi çizgelere uygulamak istediğimizde yalnızca çizge Laplasyeninin özdeğerlerini bilmemiz yeterli olacaktır. Sayısal olarak ürettiğimiz büyük çizgelerin Laplasyen özdeğerlerini yine nümerik olarak hesaplayıp elde ettik. Hesaplamalarımızda kullandığımız Cayley ağacı ve elmas örgüye ek olarak kontrol sağlamak bakımından periyodik örgüleri $d = 2$ ve $d = 3$ boyutta ürettik. Dallanma sayısı $b = 3$ ve $b = 5$ olan Cayley örgüleri arasında ürettiğimiz en büyük Cayley çizgesi, dallanma sayısı $b = 3$ için, kuşak sayının $r = 9$ olduğu $N = 29524$ düğüm noktasına sahip çizgedir. En büyük elmas hiyerarşik örgüsünün düğüm noktası sayısı ise $N = 10924$ olup, kuşak sayısı $r = 7$ 'dir.

Bunun yanında nümerik olarak ürettiğimiz kare ve kübik örgülerde periyodik sınır koşulları kullandık. Ürettiğimiz en büyük kare örgü için düğüm noktası sayısı $N = 40000$, en büyük kübik örgü ise $N = 43875$ düğüm noktasına sahip örgüdür.

Öteleme simetrisine sahip olmayan ve uzaysal olmayan Cayley ağacı ve elmas örgünün Gaussiyen model için elde ettiğimiz nümerik ve yarıanalitik sonuçlarını bu bölümde vereceğiz. Bunun yanında dallanma sayısı $b = 3$ olan 2 kuşak büyüklüğünde Cayley ağacı için Laplasyen özdeğerlerini ve özvektörlerini ise Ek.A' da verdik.

3.2.1 Periyodik çizgeler

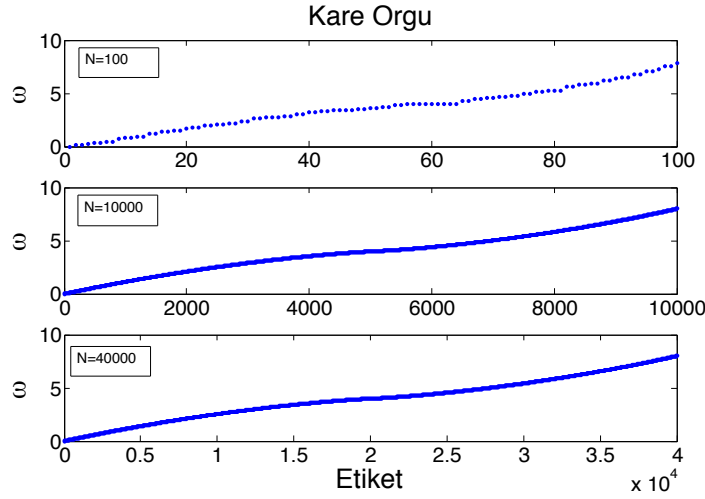
Periyodik örgülerde, eğer örgü aralığı l ise, dalga vektörlerinin maksimum boyunun $\Lambda = 2\pi/l$ olacağını daha önceki bölümde belirtmiştik. Ölçek değişikliği altında, $\Lambda/b < k < \Lambda$ aralığındaki fourier bileşenleri üzerinden bir toplam alınarak küçük dalgaboylarına sahip kipler elimine edilmiş olur. Ayırık dalga vektörleri üzerinden toplamı sürekli bir integrale dönüştürmek aşağıdaki biçimde olmaktadır.

$$\Sigma_{\mathbf{k}} \rightarrow S_d \int_0^\Lambda \frac{dk k^{d-1}}{(\frac{2\pi}{L})^d} . \quad (3.31)$$

Burada dalga vektörlerinin Laplasyen özdeğerleri ile ilişkisini daha önce tanımladığımız gibi, $\mathbf{k}^2 \equiv \omega$ olarak alıp, $d\mathbf{k} = d\omega/2\sqrt{\omega}$ değeri 3.31'de yerine yazılırsa, dalga vektörleri üzerinden alınan entegral, Laplasyen özdeğerleri cinsinden aşağıdaki gibi bir kuvvet yasası formunda olur.

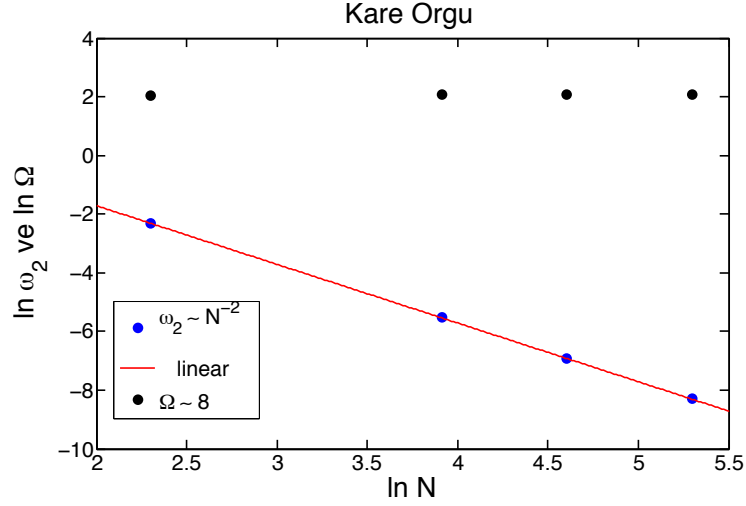
$$S_d \frac{N}{(2\pi)^d} \int_0^\Lambda d\omega \omega^{(d-2)/2} . \quad (3.32)$$

Spektral renormalizasyon grubu yaklaşımında, toplam düğüm noktası sayısını özdeğer dağılımı $\rho(\omega) \sim \omega^\beta$ cinsinden yazarsak, $N = \int \rho(\omega) d\omega$, d boyutlu bir periyodik örgü için spektral dağılım üsteli, $\beta = \frac{d-2}{2}$ olarak elde edilir. Böylece analitik olarak spektral dağılım üsteli, uzaysal boyutun $d = 2$ olduğu kare ve kübik örgü için sırasıyla $\beta = 0$ ve $\beta = 0.5$ olup nümerik olarak elde ettiğimiz değerler ile Şekil 3.3 ve Şekil 3.6'dan görüleceği gibi uyumlu olarak bulunmuştur. Sayısal hesaplamalarda kullanılan kare ve kübik örgülerde periyodik sınır koşulları uygulanmış, böylece her bir düğüm noktasının derecesi eşitlenmiştir.



Şekil 3.1: Düğüm noktaları sayısı 100, 10000 ve 40000 olan üç farklı büyüklükte kare örgü için Laplasyen özdeğerlerinin küçükten büyüğe doğru sıralanmasıyla elde edilen grafikler görülmektedir. Kare örgü için Laplasyen özdeğerlerinin, çizge büyüklüğünden bağımsız olarak, aynı değer aralığında oldukları gösterilmiştir. Kullanılan kare örgüler periyodik sınır koşullarına uymaktadır.

Sayısal olarak elde ettiğimiz Laplasyen özdeğerlerini küçükten büyüğe doğru artan sırayla $\mu = 1, \dots, N$ ile etiketledik. Sıralı özdeğerlerin etiket μ ' ya göre değişimini veren grafik Şekil 3.1'de gösterilmiştir. Buna göre Laplasyen özdeğerleri çizge büyüklüğünden bağımsız olarak, $0 \leq \omega < 8$ aralığında değerler almaktadır. Düğüm noktası sayısı $N = 100, 2500, 10000$ ve 40000 olan kare örgüler için sıfırdan farklı en küçük Laplasyen özdeğeri ω_2 ve en büyük özdeğer Ω 'nın çizge büyüklüğüne göre değişimi Şekil 3.2'de görüldüğü gibidir. Burada ω_2 özdeğeri çizge büyüklüğünün karesi ile doğru orantılı olarak sıfıra yaklaşmakta, Ω özdeğeri ise çizge büyüklüğünden bağımsız olarak sabit kalmaktadır.



Şekil 3.2: Kare örgüde, en büyük ve sıfırdan büyük en küçük Laplasyen özdeğerlerinin, Ω ve ω_2 , çizge büyüklüğü ile değişimi. Çizge büyüklüğü ile $\omega_2 \sim N^{-2}$ şeklinde sıfıra yaklaşımaktadır. En büyük özdeğer ise çizge büyüklüğü ile değişmemektedir.

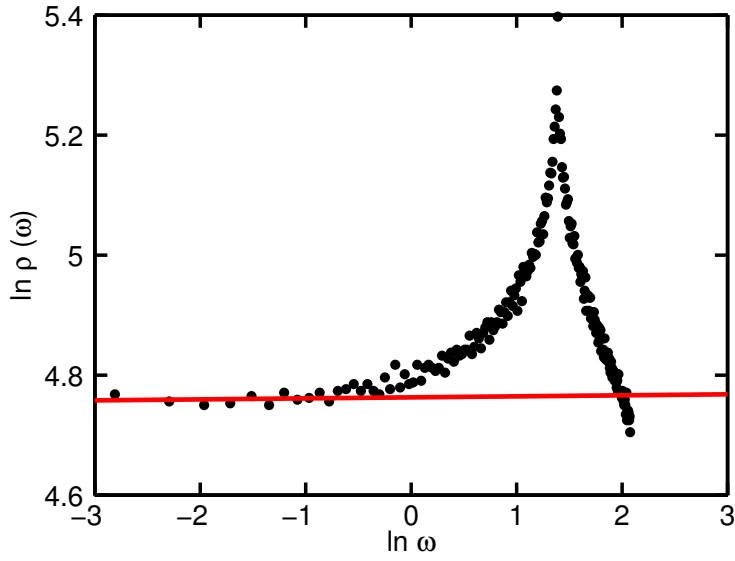
Sıfırdan farklı ilk özdeğer ω_2 çizge karakteri hakkında bazı bilgiler vermektedir [14, 15, 40, 41]. Öyle ki, N sayıda düğüm noktasına sahip bir G çizgesinde, $N \geq 2$ için, G 'nin bir *tam çizge* (complete graph) olması durumunda, sıfırdan büyük ilk özdeğer,

$$\omega_2 \leq \frac{N}{N-1} \quad (3.33)$$

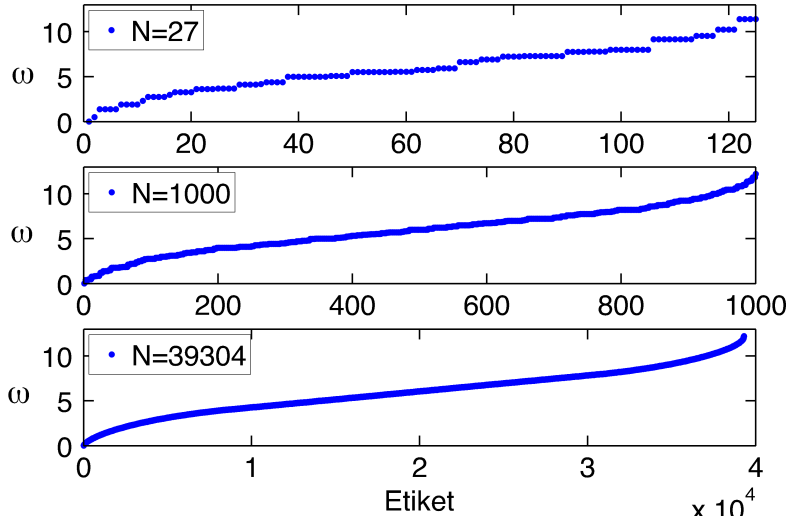
bağıntısını sağlar. Eğer çizge, *tam çizge* değilse, $\omega_2 \leq 1$ olacaktır. Çizgenin karakteri hakkında verdiği bir diğer bilgi ise, $\omega_2 > 0$ olması durumunda çizgenin *bağlı* (connected) olduğudur [14]. Çizge bağlı değilse, bağlı alt çizgelerin sayısı kadar sıfır özdeğere sahiptir.

Sayısal olarak oluşturduğumuz $N = 40000$ düğüm noktasına sahip olan bir kare örgünün özdeğer dağılımı Şekil 3.3'deki gibidir. Burada küçük özdeğer bölgesinde kuvvet yasası yaklaşımı yapılarak spektral dağılım üsteli $\beta \sim 0$ bulunmuştur. Laplasyen özdeğerlerinin sayısal olarak hesaplanması ile elde edilen bu değer, $d = 2$ boyutlu periyodik örgüler için analitik olarak elde edilen $\beta = 0$ değeri ile uyumludur.

Bununla beraber $d = 3$ boyut için, Şekil 3.4'de düğüm noktası sayısı $N = 27,1000,39304$ olan üç farklı büyüklükteki kübik örgünün Laplasyen özdeğerleri, $0 = \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_N = \Omega$ şeklinde sıralanarak çizdirilmiştir. Kare örgüye benzer biçimde, Şekil 3.4'ten de görüldüğü gibi dağılım çizge büyüklüğünden bağımsız olarak neredeyse sabit bir aralıkta kalmaktadır.



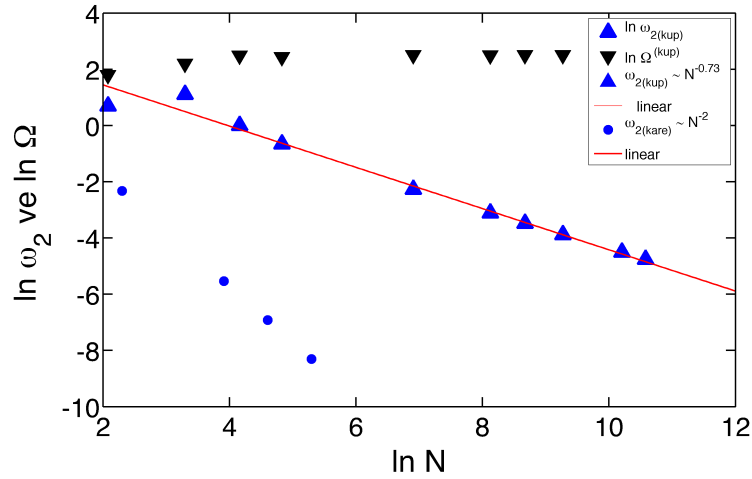
Şekil 3.3: Laplasyen özdeğerlerinin dağılımı çift logaritmik eksenle çizdirilmiştir. Küçük özdeğer bölgesinde kuvvet yasası yaklaşımından, $\rho(\omega) \simeq \omega^\beta$ ve $\beta = 0$ elde edilmiştir. Periyodik sınır koşulları kullanılmıştır.



Şekil 3.4: Düğüm noktası sayısı 27, 1000 ve 39304 olan üç farklı büyüklükte kübik örgü için, sıralı Laplasyen özdeğerleri grafiği. Periyodik sınır koşulları uygulanmıştır.

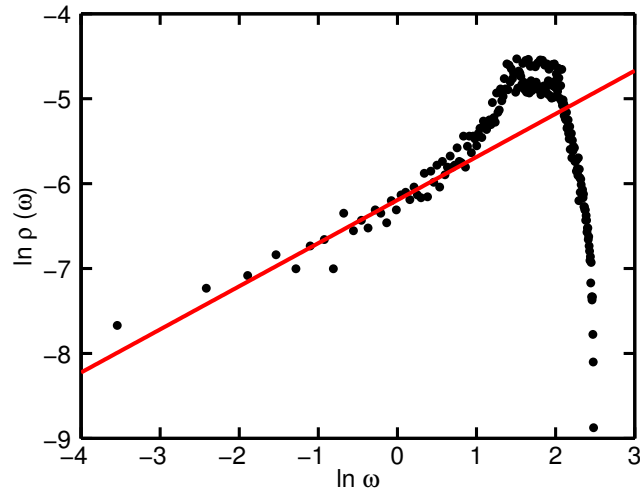
En büyük özdeğer Ω ve sıfırdan farklı en küçük özdeğer ω_2 'nin çizge büyüklüğü ile değişimi ise Şekil 3.5'de gösterilmiştir. Buna göre çizge büyüdükçe $\omega_2 \sim N^{-0.73}$ şeklinde sıfıra yaklaşmaktadır. En büyük özdeğer ise bir sabit değere yakınsamaktadır.

Düğüm noktası sayısı $N = 43875$ olan bir kübik örgünün özdeğer dağılımı grafiği ise Şekil 3.6'daki gibi elde edilmiş ve küçük özdeğer bölgesinde, kuvvet yasası yaklaşımı ile spektral dağılım üsteli $\beta = 0,50 \pm 0.03$ bulunmuştur. Burada da, spektral dağılım



Şekil 3.5: Kübik örgüde, Ω ve ω_2 özdeğerlerinin çizge büyüklüğü ile değişimi. Çizge büyüdükçe $\omega_2 \sim N^{-0.73}$ şeklinde sifıra yaklaşımakta, Ω ise bir sabite yakınsamaktadır.

üsteli β için bulduğumuz nümerik sonuç, $d = 3$ boyutlu periyodik örgülerde analitik olarak elde edilen $\beta = 0.5$ değeri ile uyumludur.

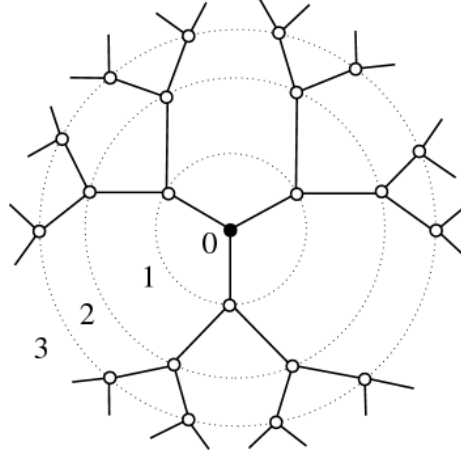


Şekil 3.6: Düğüm noktası sayısı $N = 43875$ olan kübik örgünün spektral dağılım grafiği. Küçük özdeğer bölgesinden kuvvet yasası yaklaşımı ile spektral dağılım üsteli $\beta = 0.5 \pm 0.03$ bulunmuştur. Periyodik sınır koşulları uygulanmıştır.

3.2.2 Cayley örgü yapısı

Cayley örgüsü, ağaç yapısında olup, Şekil 3.7’de görüldüğü gibi, bir çekirdek düğüm noktası ve bu çekirdek düğümüne herbiri bir kenar ile bağlı b sayıda yeni düğüm eklenmek suretiyle oluşturulur. Çekirdekteki düğüm noktasını çizgenin $n = 0$ nci kuşağı olarak alırsak, bundan bir adım sonra eklenen düğümler $n = 1$ ci kuşak düğüm

noktaları olur. Bu kurala göre oluşturulan ve kuşak sayısı r olan bir Cayley ağacında en son eklenen düğüm noktalarının kenar sayısı 1 ve diğer düğümlerin kenar sayısı $b + 1$ 'dir. (Bethe örgüsünde ise toplam düğüm noktası sayısı sonsuza gitmektedir. Çizge sonlu olmadığından tüm düğüm noktalarının kenar sayısı eşit ve $b + 1$ 'e eşittir.) Çekirdekdeki düğüm noktasından başlanarak kuşak sayısı $n = 0, 1, 2, \dots, r$ şeklinde artar.



Şekil 3.7: Dallanma sayısı $b = 2$ ve kuşak sayısı $r = 3$ olan Cayley örgüsü.

Kuşak sayısı r olan bir Cayley ağacı için toplam düğüm noktası sayısı,

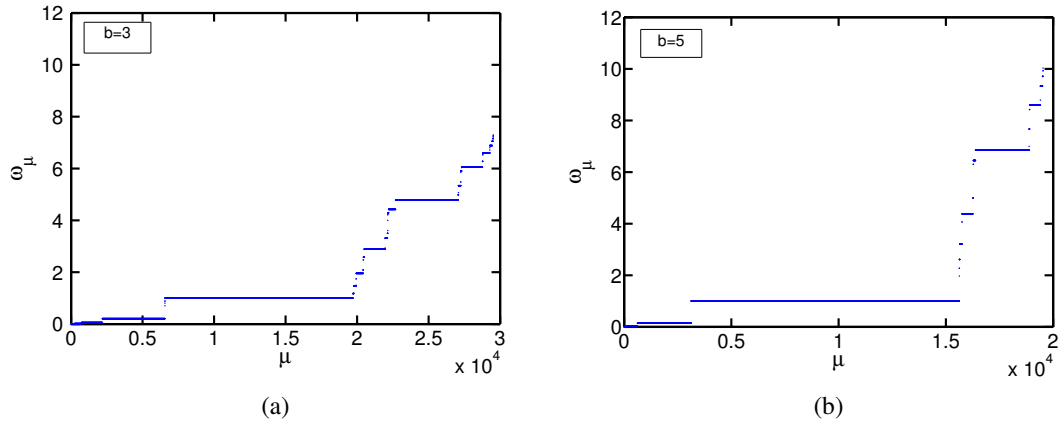
$$N = \sum_{n=0}^r b^n \quad (3.34)$$

olur. Dallanma sayısı $b = 3$, kuşak sayısı $r = 9$ ve düğüm noktası sayısı $N = 29524$ olan Cayley ağacının Laplasyen özdeğerlerini küçükten büyüğe doğru sıralayarak çizdirdiğimiz grafiği Şekil 3.8 (a)'da verdik. Her bir farklı ω özdeğerinin yozluğu, $0 < \omega < \omega^*$ küçük özdeğer bölgesinde $n = 1, 2, \dots$ nci ayrık özdeğer, $\omega^{(n)}$ için $\tau_n = \tau(\omega^{(n)}) \propto \omega^{(n)}$ 'dir. Dallanma sayısı b ve küçük özdeğer bölgesinde $n > 1$ için, n inci ayrık özdeğerin yozluk değeri $\tau_n = b^{n-2}(b - 1)$ olur.

Buradan, küçük özdeğer bölgesinde ayrık özdeğerlerin yozluklarının bir kuvvet yasası ile ifade edilebileceğini görürüz.

$$\tau_n \propto [\omega^{(n)}]^\xi \quad (3.35)$$

Sayısal olarak oluşturduğumuz $b = 3$ ve $r = 9$ değerlerine sahip Cayley örgüsü için denklem 3.35'teki üsteli $\xi = 1$ bulduk.



Şekil 3.8: (a) Dallanma sayısı $b = 3$, kuşak sayısı $r = 9$ olan Cayley ağacının Laplasyen özdeğerlerinin etiket indisi μ 'ya göre grafiği. (b) Dallanma sayısı $b = 5$ ve kuşak sayısı $r = 6$ olan Cayley örgüsünün sıralı Laplasyen özdeğerlerinin μ etiketine göre değişimi grafiği. Her iki dallanma sayısı için de Cayley ağacında $n > 1$ için n nci ayırık özdeğerin yozluğu $\tau_n = b^{n-1} - b^{n-2}$ olmaktadır.

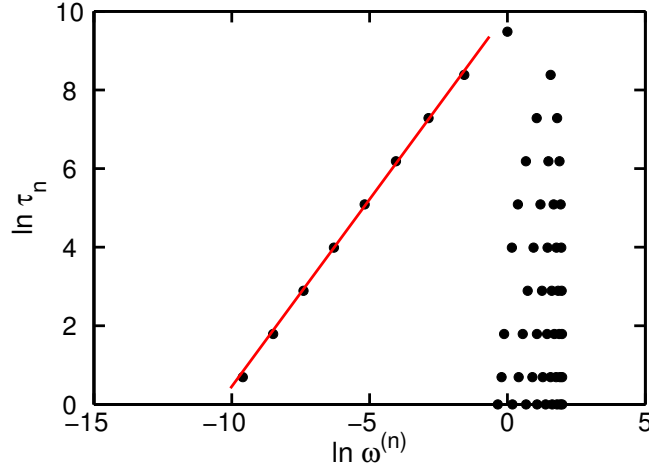
Cayley ağacının n nci kuşağındaki düğüm noktası sayısı, denklem 3.34'ten görüleceği gibi $N_n = b^n$ 'dir. Böylece $0 < \omega < \omega^*$ bölgesinde, herhangi bir $\omega^{(n)}$ için, τ_n yozluk değeri son kabukta eklenen düğüm noktası sayısı N_n 'ye aşağıdaki biçimde bağlıdır.

$$\tau_n = N_n \frac{(b-1)}{b} . \quad (3.36)$$

Dallanma sayısının $b \gg 1$ olduğu durumda 3.36'den $\tau_n \sim N_n$ olacağı kolayca görülebilir. Bununla beraber dallanma sayısı $b = 5$ olan Cayley örgüsü için Laplasyen özdeğerlerini küçükten büyüğe doğru numaralandırarak çizdirdik ve Şekil 3.8 (b)'de verdik. Burada da farklı Laplasyen özdeğerlerine karşı gelen yozluk değerlerinin, dallanma sayısına ??'deki gibi bağlı olduğunu yani her bir platonun içerdiği özdeğer sayısı τ_n 'nin Şekil 3.8 (b)'de de her platoya ait etiket sınır değerlerinin farkına, $b^{n-1} - b^{n-2}$, eşit olduğunu gördük. En yüksek yozluğa sahip özdeğer, dallanma sayısından bağımsız olarak burada da $\omega^* = 1$ 'dir.

Cayley örgüsü için özdeğer dağılımının ayırık olduğunu dikkate alırsak, spektral dağılım grafiğinde her bir farklı $\omega^{(n)}$ özdeğerine karşı gelen yozluk sayısının, τ_n , ayırık özdeğerlere göre çift logaritmik eksenle çizdirdiğimiz grafiği Şekil 3.9'da verdik. Küçük özdeğer bölgesinde, $0 < \omega < \omega^*$, kuvvet yasası davranışı gözledik. Burada

lineer bir çizgi üzerinde bulunan ve herbiri farklı bir özdeğere karşı gelen noktalar $(r-1)$ adettir.



Şekil 3.9: Ayrık $\omega^{(n)}$ özdeğerlerinin yozlukları, τ_n , kuşak sayısı $r = 9$ ve dallanma sayısı $b = 3$ olan Cayley örgüsü için çift logaritmik eksenle çizdirilmiştir. Grafikte $\omega_1 = 0$ gösterilmemiştir. Yozluk değerleri lineer bir çizgi üzerine düşmektedir (kırmızı renkle gösterilmiştir). Spektral dağılım üsteli β , $\rho(\omega) \sim \omega^\beta$ tanımından, küçük ω bölgesinde $\beta = 0$ 'dır.

Spektral dağılımın tepe noktasına kadar olan küçük özdeğer bölgesindeki toplam özdeğer sayısına N^* dersek,

$$N^* = \sum_{n=1}^{r-1} \tau_n \quad (3.37)$$

dir. Burada ??'de elde edilen τ_n değeri 3.37'de yerine konursa, toplam kuşak sayısı r 'nin bir fonksiyonu olarak,

$$N^*(r) = (b-1) \sum_{n=0}^r b^n = (b-1) \frac{b^r - 1}{b-1} = b^r - 1 \sim b^r \quad (3.38)$$

elde edilir. Bununla beraber çizgedeki toplam düğüm noktası sayısı N , yine kuşak sayısı r ve dallanma sayısı b cinsinden,

$$N = 1 + b + b^2 + \dots + b^r = \frac{b^{r+1} - 1}{b-1} \quad (3.39)$$

olur. Büyük r değerlerinde, $b > 1$ ve $b^{r+1} \gg 1$ olacağından,

$$N \sim \frac{1}{b-1} b^{r+1} = \left(\frac{b}{b-1}\right) b^r \sim b^r \quad (3.40)$$

yaklaşıklığı elde edilir.

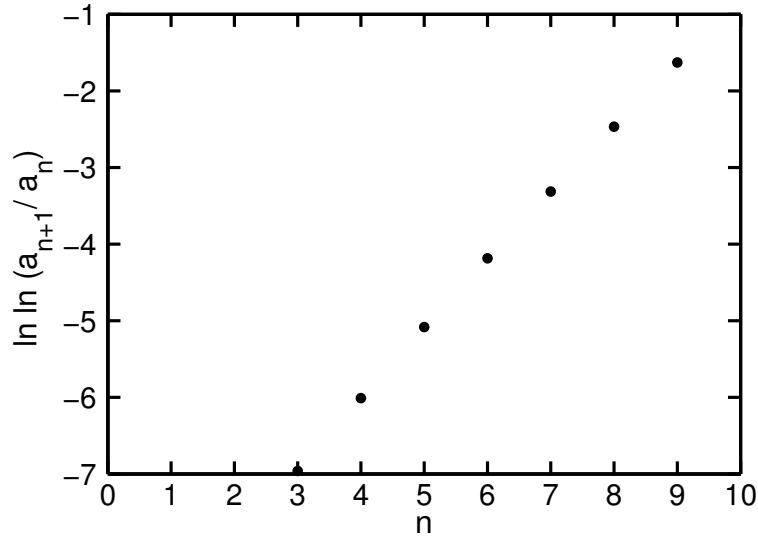
Yine küçük özdeğer bölgesi için çizge Laplasyenin spektral yoğunluğu, yozluk sayıları cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\rho(\omega) = \sum_{n=1}^r \tau_n \delta(\omega - \omega^{(n)}) \quad (3.41)$$

Dallanma sayısı $b = 3$ olan Cayley çizgesi için, sıfırdan farklı ilk özdeğer, $\omega^{(2)}$ 'nin kuşak sayısı r 'ye göre değişimini Şekil 3.9'deki gibi elde ettik. Yarı-logaritmik eksenle çizdirdiğimiz grafikte, eğimin yaklaşık olarak $\ln b$ 'ye eşit olduğunu ve bir a_n katsayısı ile beraber $\omega^{(2)}$ değerinin,

$$\omega^{(2)} = a_n b^{-(r-1)} \sim b^{-r} \quad (3.42)$$

bağıntısını sağladığını bulduk.



Şekil 3.10: Dallanma sayısı $b = 3$ ve $r = 9$ olan Cayley ağacında, denklem 3.43'da görülen a_n katsayısı büyük kuşak sayılarında küçük n değerleri için bir sabite gitmektedir.

Kuşak sayısı $r = 9$ olan Cayley çizgesinde, Şekil 3.9'da görülen n nci farklı özdeğerin, $\omega^{(n,r)}$, çok zayıf bir şekilde n 'ye bağlı olan bir a_n katsayısı ile beraber,

$$\omega^{(n,r)} = a_n b^{-(r-n+2)} \quad (3.43)$$

biçiminde yazılabilir. Burada a_n katsayısının $r - n \gg 1$ için $a_{n+1}/a_n \sim 1 + c_1 \exp(c_2 n)$ bağıntısıyla bir sabite gittiğini gördük. Burada $e^{-(r-2)} \ll 1$ olmak üzere $c_1 \sim O(e^{-(r-2)})$ ve $c_2 \sim O(1)$ mertebesinde. Ayrık özdeğerler arasındaki fark ise,

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= \omega^{(n,r)} - \omega^{(n,r+1)} \\ &= a_n [b^{-(r-(n-1)+1)} - b^{-(r-n+1)}] \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$= a_n (b^{-1} - 1) b^{-(r-n+2)} \quad (3.45)$$

$$= \omega^{(n,r)} (b - 1) / b$$

yaklaşık olarak $\Delta\omega \propto \omega$ olduğu görülür. Böylece ayrık özdeğer dağılımından sürekli dağılıma geçmek için aşağıdaki dönüşüm kullanılır.

$$\sum_n \rightarrow \int \frac{d\omega}{\omega} \quad (3.46)$$

Yukarıdaki sürekli dağılım koşulu dikkate alınarak 3.41'de yeniden yazılırsa,

$$\begin{aligned} \rho(\omega) &= \sum_{n=1}^r \tau_n \delta(\omega - \omega^{(n)}) \\ &= \int \frac{d\omega}{\omega} b^r \omega^{(n)} \delta(\omega - \omega^{(n)}) \\ &= b^r = b^r \omega^0 \end{aligned} \quad (3.47)$$

ω 'dan bağımsız bir sabite eşit bulunur. Böylece $\rho(\omega) \sim \omega^0$ yazılabileceği gibi buradan $\beta = 0$ bulunur.

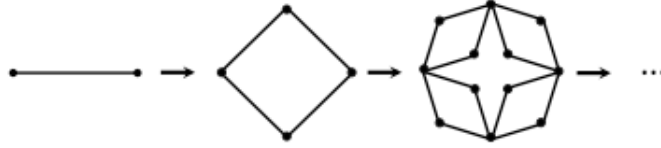
Literatürde Cayley örgüsü için çizge Laplasyenin kapalı formdaki özdeğerleri bilinmektedir [42, 43]. Ancak herhangi bir r kuşaklı Cayley çizgesinde tüm özdeğerlerin açık çözümleri mevcut değildir.

Dallanma sayısı $b = 3$ ve kuşak sayısı $r = 2$ olan Cayley ağacı için Laplasyen özdeğer ve özvektörlerini analitik olarak elde ettik. Ayrık özdeğerler $\omega^{(n)}$ leri, $\omega^{(1)} = 0$, $\omega^{(2)} = \frac{(\alpha_+ - 1)}{\alpha_+}$, $\omega^{(3)} = 1$, $\omega^{(4)} = b + 1 - \sqrt{b}$, $\omega^{(5)} = \frac{(\alpha_- - 1)}{\alpha_-} = \frac{1}{\omega_2}$, $\omega^{(6)} = b + 1 + \sqrt{b}$ olarak bulduk. Burada $\alpha_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4/b}}{2}$ dir.

Düğüm noktası sayısı $N = 13$ ve dallanma sayısı $b = 3$ olan Cayley örgüsü için özdeğer, özvektörler ve ayrıca bunların analitik hesapları Ek.A'da verdik. Sayısal hesaptan elde ettiğimiz sonuçları ise Ek.G'de (CD ekinde) verdik.

3.2.3 Elmas hiyerarşik örgüsü

Elmas hiyerarşik örgüsü, Şekil 3.11'de görüldüğü gibi $r = 0$ ncı kuşakta iki düğüm noktasını bağlayan bir kenar ile başlayıp, çizge ok yönünde büyütülürken sonraki kuşakta bu kenar yerine bir baklava deseni getirilmesiyle oluşturulur.



Şekil 3.11: Elmas Hiyerarşik Örgüsü. Çizge, ok yönünde, her bir kenar yerine bir baklava deseni gelmesi kuralı ile büyümektedir. Başlangıçta 2 düğüm noktası ve bir kenarı olan ve $r = 0$ ncı kuşakta bulunan çizgenin, toplam kenar sayısı 4^r şeklinde artmaktadır. Çizgedeki toplam düğüm noktası sayısı r kuşak büyütülmesi durumunda $N = 2(1 + \sum_{n=1}^r 4^{n-1})$ ile belirlenir.

Kuşak sayısı arttıkça bu işlem her kenar için tekrarlanır ve toplam kenar sayısı r nci kuşakta 4^r olur. İlk kuşaklarda eklenen düğümlerin kenar sayıları (dereceleri) sürekli artarken son kuşakta eklenen düğümlerin kenar sayısı 2'dir. Toplam düğüm noktası sayısı ise

$$N = 2(1 + \sum_{n=1}^r 4^{n-1}) \quad (3.48)$$

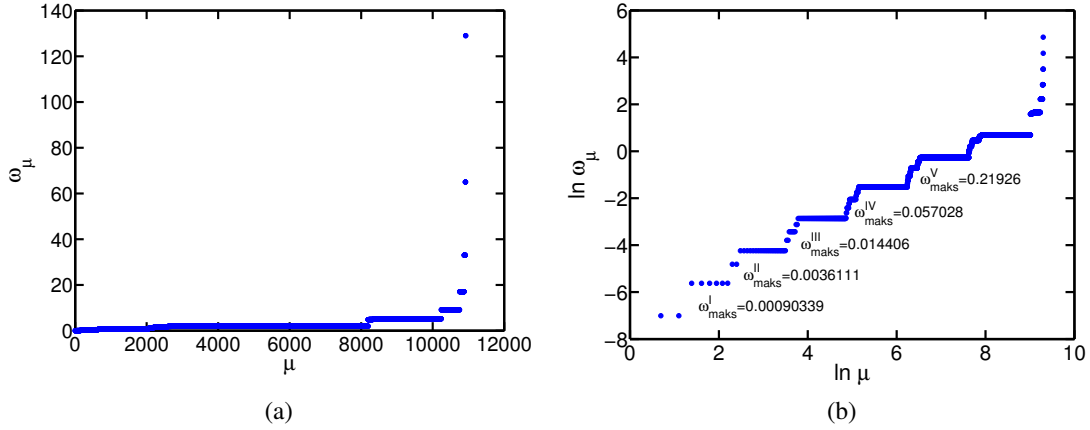
ile belirlenir. Elmas örgü için komşuluk matrisi simetrik ve çizge *bağlı*dır.

Her kuşakta eklenen yeni düğüm noktası sayısı, $n \geq 1$ için $N_n - N_{n-1} = 2^{2n-1}$ 'dir. Çizge r kuşak büyütüldüğünde, $1 < n \leq r$ için n nci kuşağa ait düğümlerin derecesi $k_n = 2^{r-n+1}$, 0ncı ve 1nci kuşaktaki düğümlerin derecesi ise $k_0 = k_1 = 2^r$ olur. Derece dağılımı ise tüm sistem için ölçekten bağımsız ve $P(k) = k^{-2}$ 'dir.

Düğüm noktası sayısı $N = 10924$ olan elmas hiyerarşik örgüsü için sıralı Laplasyen özdeğerlerinin grafiğini, doğrusal ve çift logaritmik eksenlerde çizdirerek sırasıyla Şekil 3.12(a) ve (b)'de verdik. Cayley örgüsüne benzer biçimde burada da küçük özdeğer bölgesinde her bir plato bir ayrık özdeğere karşılık gelmekte ve özdeğerlerin

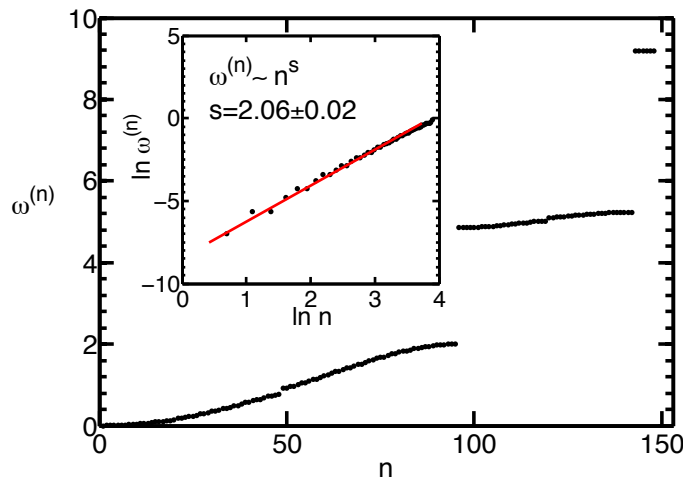
dejenerasyonu platoların büyüklükleri şeklinde görülmektedir. Şekil 3.12b üzerinde yerek maksimum yozluk değerine sahip platolarda özdeğerlerin değerleri verilmiştir.

Toplam düğüm noktası sayısı $N = 10924$ olan elmas hiyerarşik örgüsü için spektral dağılım grafiğini çift logaritmik eksenle çizdirerek Şekil 3.15'te verdik.



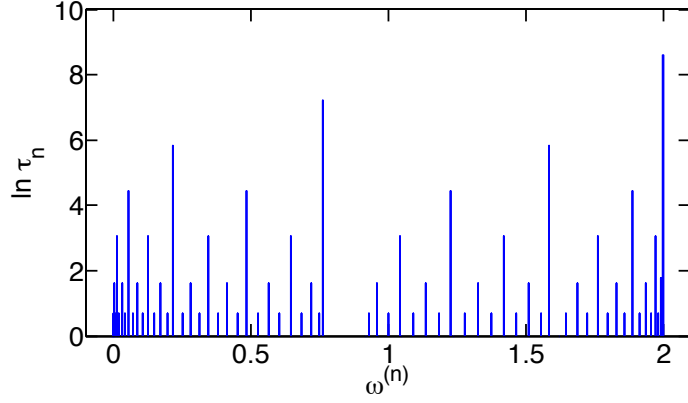
Şekil 3.12: Düğüm noktası sayısı $N = 10924$ olan elmas hiyerarşik örgüsü için, (a) Laplasyen özdeğerlerinin etiket indisi μ 'ya göre doğrusal grafiği, (b) Laplasyen özdeğerlerinin etiket indisi μ 'ya göre çift logaritmik eksenle çizdirilen grafiği. Grafik üzerinde gösterilen $\omega_{maks}^{(i)}$ ve $i = I, II, \dots$ değerleri yerel maksimum yozluk değerine sahip özdeğerlere karşı gelir.

Ayrık özdeğerlerin $\omega^{(n)} \sim n^s$ biçiminde ölçeklendiğini ve ölçeklenme üstelinin $s = 2.06 \pm 0.02$ olduğunu Şekil 3.13'den görmekteyiz. Şekil içinde verilen küçük resimde küçük özdeğer bölgesine ait olan aralık çift logaritmik eksenle çizdirilerek verilmiştir.

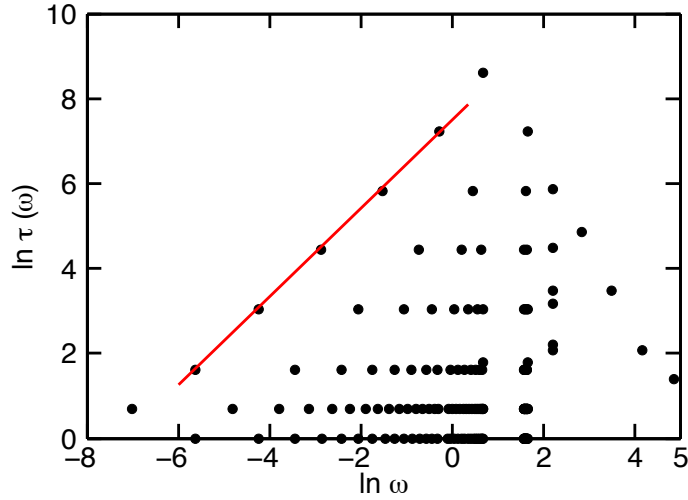


Şekil 3.13: Düğüm noktası sayısı $N = 10924$ olan bir elmas örgüde Laplasyenin ayrık özdeğerleri n 'ye göre çizdirilmiştir. Grafik içindeki resimde küçük özdeğerlerin, $\omega^{(n)}$, ölçeklenme davranışları verilmiştir.

Küçük özdeğer bölgesinde çoklu-fraktal spektral dağılım grafiğini, ayrıık özdeğerlerin yozluklarını bar grafiği şeklinde yarı logaritmik eksenle çizdirerek Şekil 3.14’de verdik.



Şekil 3.14: Kuşak sayısı $r = 7$ olan elmas örgüde çizge Laplasyeninin özdeğerlerinin çoklu-fraktal spektral dağılımı grafiği. Yalnızca küçük özdeğer bölgesi, $0 \leq \omega \leq 2$, gösterilmiştir.



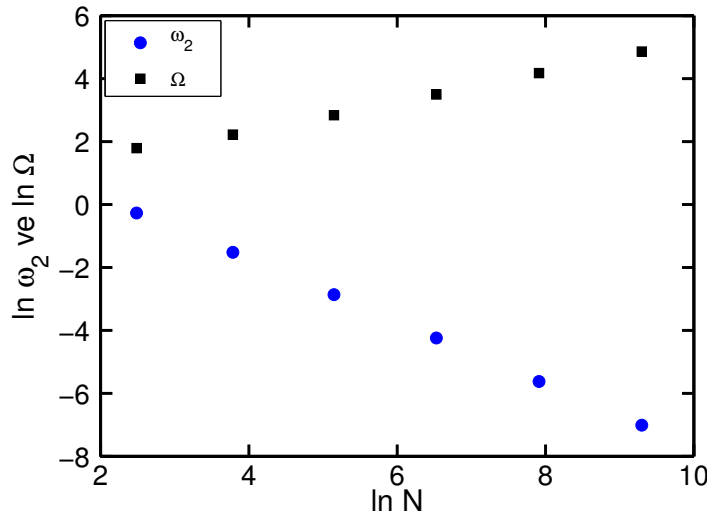
Şekil 3.15: Düğüm noktası sayısı $N = 10924$ olan bir elmas örgü için elde edilen Laplasyen özdeğerlerinin yozluk sayıları, özdeğer büyüklüğüne göre çift logaritmik eksenle çizdirilmiştir. Grafikte $\omega_1 = 0$ gösterilmemiştir. Aynı yozluk değerine sahip özdeğer aileleri, r adet, ve bu ailelere mensup özdeğerler, her bir set için $r - 1$ adet, görülmektedir.

Şekil 3.15’te, $r = 7$ kuşak büyütölmüş örgünün, $0 < \omega < \omega^*$ küçük özdeğer bölgesinde, grafiğin zarfını dikkate alırsak, τ_n , n nci kuşaktaki en büyük yozluk ve $n = 1, 2, \dots, r - 1$ olmak üzere,

$$\tau_{n+1} = 4\tau_n + 1 \quad (3.49)$$

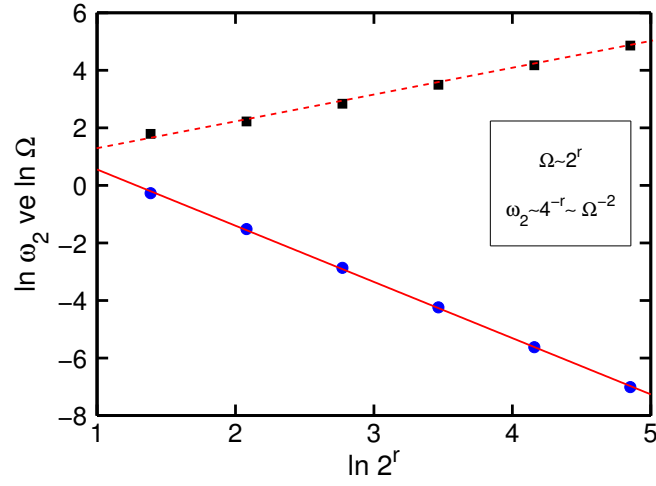
yozluk değerleri için tekrarlama bağıntısını elde ederiz. Her kuşakta örgüye eklenen yeni düğüm noktaları ile beraber yeni Laplasyen özdeğerlerini elde ederiz. Yozluk değeri 1 olan özdeğerlerin bir sonraki kuşakta gözükmediğini, ancak bunun dışındaki tüm özdeğerlerin yozluklarının 3.49’da verilen kurala uygun olarak arttığını gördük. Yozluk değerleri arasındaki bu ilişki, bize aynı zamanda spektral dağılım grafiğinde en küçük ω ’lar için eğimi verdiği gibi, daha sonra bu eğimin ω ’ların logaritmik ölçekte aralıklarının $\ln 4$ olduğu durumda, nasıl 1’e gittiğini de gösteriyor.

Sıfırdan farklı en küçük özdeğerin (ω_2) ve en büyük Laplasyen özdeğeri Ω ’nın çizge büyüklüğüne göre değişimini gösteren grafiği çift logaritmik eksenle çizdirip sırasıyla Şekil 3.16(a) ve (b)’de verdik. Burada en küçük özdeğer, $\omega_2 \sim N^{-1}$ şeklinde çizge büyüklüğü ile sıfıra yaklaşmaktadır. En büyük özdeğer Ω , örgü büyüdükçe $\sqrt{N}$ ’ye yaklaşmaktadır.



Şekil 3.16: Sıfırdan farklı en küçük Laplasyen özdeğeri ω_2 ve en büyük özdeğer Ω ’nın örgü büyüklüğüne göre değişimi çift logaritmik eksenle çizdirilmiştir. Burada sıfırdan farklı en küçük özdeğerin $\omega_2 \sim N^{-1}$ ile sıfıra yaklaştığı ve en büyük özdeğerin $\Omega \sim N^{0.5}$ ile büyüdüğü görülmüştür.

Kuşak sayısı r ile en büyük özdeğer Ω ’nın ve (sıfırdan farklı) en küçük özdeğer ω_2 ’nin nasıl değiştiğini Şekil 3.17’de gösterdik. Burada da Ω değerinin, kuşak sayısını arttırdığımızda 2^r değerine yakınsadığını, ω_2 ’nin ise 2^r ’nin karesi ile sıfıra yaklaştığını gördük. Böylece daha önce düğüm noktası sayısı için tanımladığımız denklem 3.48’deki ifadeyle uyumlu olarak, büyük N ler için $N \sim 4^r$ ilişkisini elde ediyoruz. Başka bir deyişle, çizge büyüklüğü sonsuza giderken kenar sayısı ile düğüm noktası sayısı r ile aynı biçimde artmaktadır.



Şekil 3.17: Kuşak sayısı $r = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ için elmas örgüde en büyük Laplasyen özdeğeri Ω ve sıfırdan farklı en küçük özdeğer ω_2 'nin örgü büyüklüğüne göre çift logaritmik eksenle çizdirilmiştir. Burada Şekil 3.16'de olduğu gibi, Ω değeri örgü büyüklüğünün karekökü olan 2^r değerine yaklaşmakta, ω_2 ise örgü büyüklüğü ile sıfıra yaklaşmaktadır. Grafikte Ω , siyah kareler ile, ω_2 ise mavi daireler ile temsil edilmiştir.

Elmas örgü için nümerik olarak elde ettiğimiz özdeğer ve özvektörler Ek.G'de (CD ekinde) verilmiştir.

4. GAUSSIEN MODELİN KRİTİK DAVRANIŞI

Yalnızca kritik sıcaklığın üzerindeki sıcaklıklarda tanımlı olan Gaussiyen model [44] için Landau-Ginzburg açılımında düzen parametresinin 2. mertebeden terimlerini tutmak yeterlidir [36]. Ancak Gaussiyen model hamiltonyeninde düzen parametresinin 4. mertebeden terimi olmadığından, etkin sıcaklık t için $t \geq 0$ koşulu sistemin $t < 0$ için de kararlı olmasını garanti eder. Yine de bölüşüm fonksiyonu $t = 0$ 'da tekillik içerir ve bu bir faz geçişine işaret eder [36]. Böylece bu model yalnızca kritik sıcaklığın üstündeki sıcaklıklarda, bir başka deyişle $r_0 > 0$ için tanımlıdır. Ancak $t = 0$ 'da, manyetik alan kritik üsteli δ ise kolayca hesaplanabilmektedir.

Bu bölümde, Cayley ve elmas hiyerarşik örgüsü için nümerik ve yarı analitik hesaplar ile elde edilen spektral renormalizasyon grubu sonuçları ile beraber $d = 2$ ve $d = 3$ boyutta periyodik örgüler için elde ettiğimiz sonuçları da karşılaştırma yapabilmek için verdik. Ayrıca her örgü için çizge Laplasyenini, Laplasyenin özdeğer dağılımını ve spektral aralık için elde ettiğimiz sonuçları ayrı ayrı verdik.

4.1 Periyodik Çizgeler İçin Gaussiyen Model Sabit Noktası

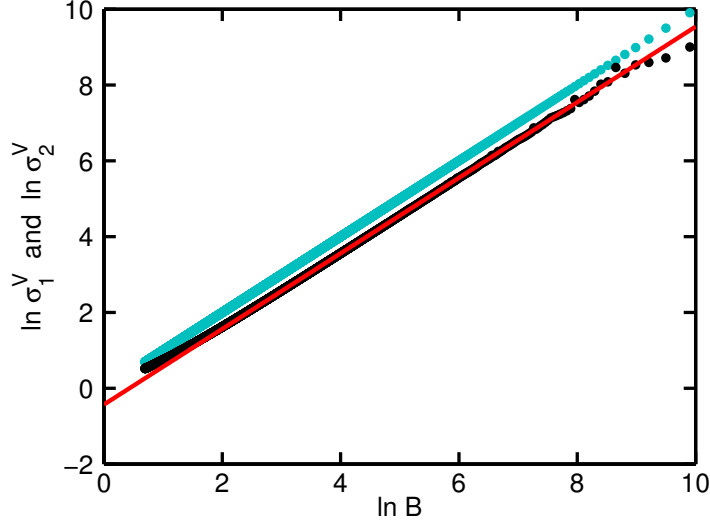
Kare ve kübik örgüler için Laplace özdeğerleri analitik olarak aşağıdaki gibidir.

$$\omega_{\mathbf{q}} = 4 \sum_{j=1}^d \sin^2\left(\frac{q_j}{2}\right) \quad (4.1)$$

Burada Laplasyen özdeğerleri dalga vektörleri ile indislenmiştir. Periyodik örgülerde örgü aralığı sabit ve öklidyen boyut d olmak üzere $q_j = (\pi n_j N^{-1/d})$, $\mathbf{q}$ vektörünün kartezyen bileşenleridir. Dalga vektörünün boyunun küçük olduğu limitte $q = \|\mathbf{q}\|$, Denklem 4.1 dikkate alınırsa $\omega_{\mathbf{q}} \simeq q^2$ olur. Böylece spektral yoğunluk $\beta = d/2 - 1$ olmak üzere $\rho(\omega) \propto \omega^\beta$ olacaktır. Böylece spektral boyut, $\tilde{d} = 2\beta + 2$, spektral yoğunluk üsteli β cinsinden ifade edilir.

Kare ve kübik örgü için spektral dağılım üstelini, sırasıyla Şekil 3.3 ve 3.6'dan görüldüğü gibi $\beta = 0.000 \pm 0.02$ ve $\beta = 0.5 \pm 0.1$ bulduk.

Sayısal hesaplamalar sonucu elde ettiğimiz ölçeklenme faktörlerinin değerleri, kare örgü için $p_1 = 1.00 \pm 0.01$ ve $\phi_2 = 0.996 \pm 0.003$; kübik örgü için $p_1 = 1.49 \pm 0.02$ ve $\phi_2 = 0.66 \pm 0.005$ 'dir.



Şekil 4.1: Kare örgü için ölçeklenme faktörleri σ_1^V ve σ_2^V sırasıyla mavi ve siyah renkte gösterilmiştir. Ölçeklenme üstelleri küçük ω bölgesinde $\phi_1 = 1$ ve $\phi_2 = 0.996 \pm 0.003$ olarak elde edilmiştir. Ölçeklenme katsayısı $B \equiv B(k)$ ve $k = 1, \dots, N/2$ dir.

Düğüm noktası sayısı $N = 40000$ olan kare örgü için, ölçeklenme faktörleri σ_1 ve σ_2 'nin her iki ölçeklenme yöntemi kullanılarak bulunan sonuçlarını Şekil 4.1 ve 4.2'de verdik.

Sayısal olarak ürettiğimiz kare örgüden elde ettiğimiz kritik üsteller α ve δ , düğüm noktası sayısının ölçeklenmesi altında,

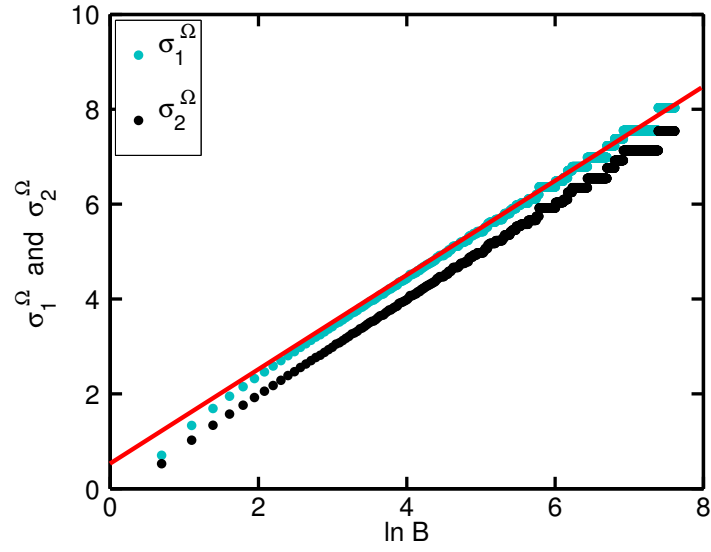
$$\alpha = 2 - \frac{1}{\phi_2} = 0.996 \pm 0.003 \quad (4.2)$$

ve

$$\delta = \frac{1 + \phi_2}{1 - \phi_2} = \infty \quad (4.3)$$

olur. Kare örgüler için bulunan kritik üstel değerlerinin, Gaussiyen $\alpha = (4 - d) / 2$ ve $\delta = (d + 2) / (d - 2)$ değerleri ile uyumlu olduğunu gördük. Aynı biçimde en büyük özdeğerin ölçeklenmesi (Bkz. Bölüm 3.1.1.2) yöntemi için nümerik olarak elde ettiğimiz $p_1 = 1.00 \pm 0.01$ ve $p_2 = 0.99 \pm 0.03$ değerlerini kullanarak kritik üstelleri hesapladığımızda,

$$\alpha = 2 - \frac{p_1}{p_2} \sim 1 \quad (4.4)$$



Şekil 4.2: Kare örgü için ölçeklenme faktörleri ölçeklenme katsayısı B' ye göre çift logaritmik eksenle çizdirilmiştir. Küçük ω bölgesi için grafiklerin eğiminden, ölçeklenme üstelleri, $p_1 = 1.00 \pm 0.01$ ve $p_2 = 0.99 \pm 0.03$ olarak bulunur. Ölçeklenme bölgesini $B(k) = N/k$ için $k = 4$ ile $k = 1000$ arasında aldık.

ve

$$\delta = \frac{p_1 + p_2}{p_1 - p_2} = \infty \quad (4.5)$$

Gaussiyen modelin değerlerini elde ederiz.

Düğüm noktası sayısı $N = 43875$ olan kübik örgü için ise ölçeklenme faktörleri σ_1 ve σ_2 ' nin her iki ölçeklenme yöntemi kullanılarak bulunan sonuçlarını ise Şekil 4.3 ve 4.4' de verdik.

Kritik üsteller α ve δ , düğüm noktası sayısının ölçeklenmesi (kip sayısının ölçeklenmesi) altında,

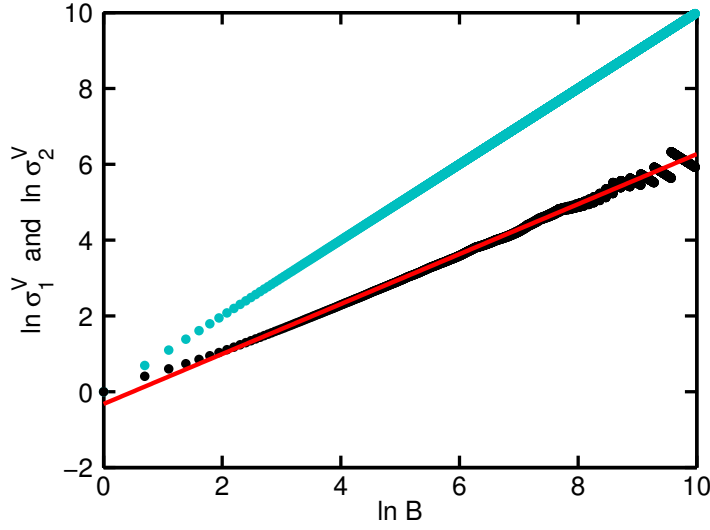
$$\alpha = 2 - \frac{1}{\phi_2} = 0.5 \pm 0.01 \quad (4.6)$$

ve

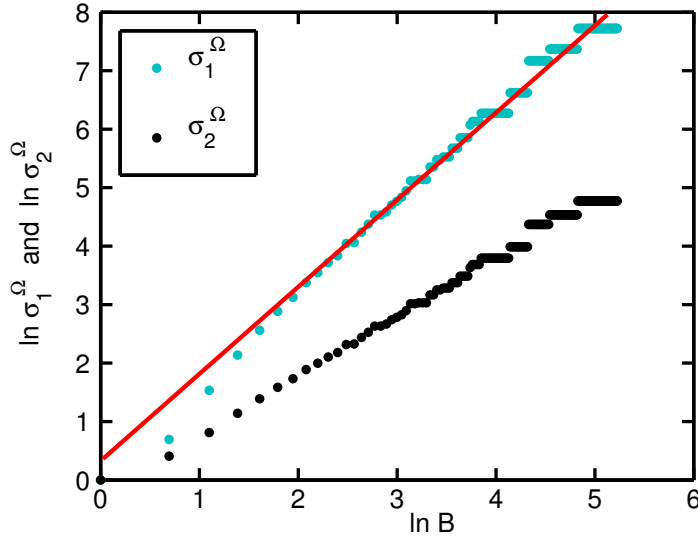
$$\delta = \frac{1 + \phi_2}{1 - \phi_2} = 4.9 \pm 0.9 \quad (4.7)$$

olur. Yine en büyük özdeğerin ölçeklenmesi yöntemi ile kübik örgü için elde ettiğimiz $p_1 = 1.49 \pm 0.02$ ve $p_2 = 0.98 \pm 0.05$ değerlerini kullanarak kritik üsteller α ve δ ,

$$\alpha = 2 - \frac{p_1}{p_2} \sim 0.52 \pm 0.08 \quad (4.8)$$



Şekil 4.3: Kübik örgü için, sayısal olarak hesaplanan ölçeklenme faktörleri σ_1^V (mavi) ve σ_2^V 'nin (siyah) ölçeklenme katsayısı B 'ye göre çift logaritmik eksenle çizdirilen grafiği. Burada uygulanan doğrusal fit ile $\phi_1 = 1$ ve $\phi_2 = 0.66 \pm 0.05$ bulunur.



Şekil 4.4: Kübik örgü için en büyük özdeğerin ölçeklenmesi yöntemi ile elde edilen RG faktörleri σ_1^Ω ve σ_2^Ω 'nin ölçekleme üstelleri sırasıyla $p_1 = 1.49 \pm 0.02$ ve $p_2 = 0.98 \pm 0.05$ 'tir.

ve

$$\delta = \frac{p_1 + p_2}{p_1 - p_2} = 4.92 \pm 0.07 \quad (4.9)$$

şeklinde bulunur. Her iki ölçeklenme yönteminden, kübik örgüler için bulunan özgül ısı kritik üsteli α ve mıknatıslanma kritik üsteli δ 'nın kare örgülerde olduğu gibi Gaussiyen model değerleri $\alpha = (4 - d) / 2$ ve $\delta = (d + 2) / (d - 2)$ ile uyumlu olduğu görülür.

4.2 Cayley Ağacı İçin Gaussiyen Model Sabit Noktası

Cayley ağacı için spektral dağılımın kesikli olması bilgisini kullanarak, ölçeklenme faktörleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir. *Kesikli özdeğer spektrumunda* ölçeklenme katsayısı B de kesikli bir tayfa sahip olacaktır. Ölçeklenme katsayısı, k bir tamsayı olmak üzere,

$$B \equiv b^k \equiv B_k \quad (4.10)$$

dallanma sayısı b 'nin bir kuvveti ile büyümelidir. Böylece ölçeklenme faktörleri σ_1 ve σ_2 sistemin serbestlik derecelerinin ölçeklenmesi altında,

$$\sigma_1(B_k) = \frac{N}{\sum_{n=0}^{r-1-k} \tau_n} = B^{\phi_1} \quad (4.11)$$

$$\sigma_1(B_k)\sigma_2(B_k) = \frac{N}{\sum_{n=0}^{r-1-k} \tau_n \omega^{(n)}} = B^{\phi_1+\phi_2} \quad (4.12)$$

olur. Burada σ_1 , ilk vanHove tekilliğinden [45] ufak $\omega < \omega^*$ bölgesi için özdeğer sayısı; $\sigma_1\sigma_2$ ise aynı bölge için özdeğerler toplamının ölçeklenme faktörleridir. Küçük özdeğer bölgesinde, özdeğer sayısının ölçeklenme davranışını, tüm farklı özdeğerler için yozluk sayılarını toplayarak denklem 4.11'deki gibi elde ederiz.

Denklem 4.12'de ise ω 'nın toplamdaki maksimum değeri ω^*/B_k olacaktır. Burada τ_n ve $\omega^{(n)}$ değerlerini denklem ?? ve denklem 3.43'den çekip, logaritmik düzeltmeleri ihmal ederek, $\omega^{(n,r)} \approx ab^{-(r-n+1)}$ ifadesini denklem 4.12'de yerine yazarsak, a bir sabit olmak üzere,

$$\sigma_1^{-1}(B_k) = a \sum_{n=1}^{r-k-1} b^{(n-1)}(b-1) = \frac{(b-1)}{b} \left[\frac{b^{(r-k)} - 1}{b-1} - 1 \right], \quad (4.13)$$

ve kuşak sayısı $r \gg 1$ için

$$\sigma_1^{-1}(B_k) \sim b^{r-k-1} \quad (4.14)$$

olur. Böylece denklem 4.10'dan b^{-k} 'yı ölçeklenme katsayısı B_k cinsinden 4.14'de yerine koyduğumuzda ölçeklenme faktörü σ_1 aşağıdaki gibi bulunur.

$$\sigma_1^{-1}(B_k) = b^{r-1}(B_k)^{-1} \quad (4.15)$$

Buradan daha önce tanımladığımız gibi bir ϕ_1 üstelini,

$$\sigma_1^{-1}(B_k) \propto B_k^{-1} \equiv B_k^{-\phi_1} \quad (4.16)$$

ifadesinden

$$\phi_1 = 1 \quad (4.17)$$

olarak elde ederiz. Benzer şekilde denklem 4.12’de yozluk sayıları ve özdeğerler için bulunan yarı-analitik sonuçlar yerine konarak, B_k cinsinden aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\sigma_1^{-1}(B_k)\sigma_2^{-1}(B_k) = a \sum_{n=1}^{r-k-1} b^{(n-1)}(b-1)b^{-(r-n+1)}b^{-1} \quad (4.18)$$

$$= a \sum_{n=1}^{r-k-1} b^{(2n-r-3)}(b-1) \quad (4.19)$$

$$= a(b-1)b^{-r-3} \left[\frac{b^{2(r-k-1)+1}}{b-1} - 1 \right] \quad (4.20)$$

$$\sim b^{-2k} \propto B_k^{-2} \quad (4.21)$$

Eşitliğin her iki tarafını $\sigma_1^{-1}(B_k) \sim B_k^{-1}$ ifadesine bölersek, ölçeklenme faktörü σ_2 ’nin ölçeklenme katsayısı B_k ’nin bir kuvveti şeklinde denklem 4.22’deki gibi ifade edilebileceği görülür.

$$\sigma_2^{-1}(B_k) \propto B_k^{-1} \equiv B_k^{-\phi_2} \quad (4.22)$$

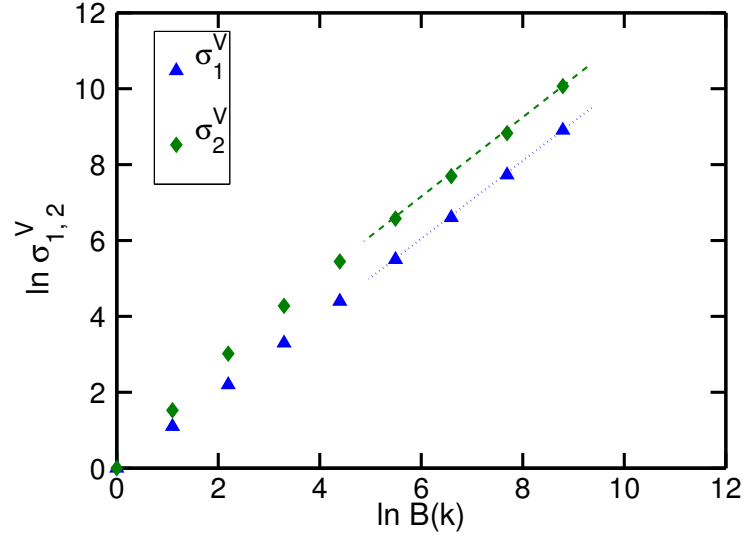
Buradan ϕ_2 üsteli yaklaşık olarak 1 elde edilir. Böylece küçük özdeğer bölgesinde, kesikli özdeğerler için, $\omega^{(n)} \simeq sbt.b^{-(r-n+1)}$ yaklaşıklığını kullanarak kuşak sayısı $r \gg 1$ ve $1 \ll k < r$ için toplam yapıldığında yarı-analitik sonuçlardan $\phi_1 = \phi_2 = 1$ buluruz. Ayrıca Laplace özdeğerlerini kullanarak ölçeklenme faktörleri σ_1^V ve σ_2^V ’yi dallanma sayısı $b = 3$ ve kuşak sayısı $r = 9$ olan Cayley örgüsü için sayısal olarak hesaplayarak yarı-analitik sonuçlarımızla uyumlu olduklarını Şekil 4.5 ’de gösterdik. Sayısal hesaplamada ölçeklenme katsayısını $B = b^k$ ve kuşak sayısını $k = 1, 2, \dots, r-2$ seçerek ϕ_1 , ϕ_2 üstellerini sırasıyla 1 ve 1.03 ± 0.04 olarak elde ettik.

Sayısal hesap ile analitik hesaptan ϕ_1 ve ϕ_2 üstelleri için uyumlu sonuçlar elde ettik. Böylece daha önce ϕ_1 ve ϕ_2 cinsinden tanımladığımız özgül ısı kritik üstelini kare örgüdeki gibi

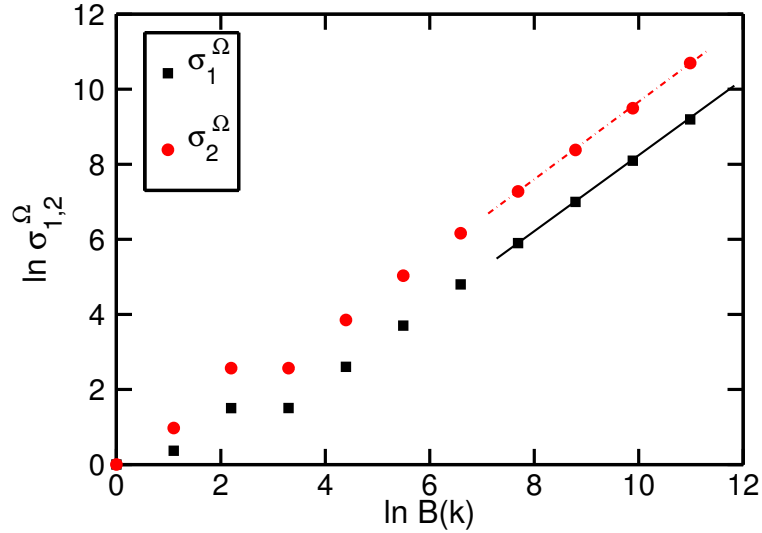
$$\alpha = 2 - \frac{1}{\phi_2} = 1 \quad (4.23)$$

ve manyetik alan kritik üstelini,

$$\delta = \frac{1 + \phi_2}{1 - \phi_2} = \infty \quad (4.24)$$



Şekil 4.5: Dallanma sayısı $b = 3$ olan Cayley örgüsü için ölçeklenme faktörleri σ_1^V and σ_2^V Denklem 4.11 ve 4.12 kullanılarak sayısal olarak hesaplanmıştır. Cayley örgüsünün ayırık ölçeklenme davranışına göre, ölçeklenme faktörü, r toplam kuşak sayısı olmak üzere, $B(k) = b^k$, $k = 1, \dots, r$ olarak seçilmiştir. Üsteller ϕ_1, ϕ_2 sırasıyla 1 ve 1.03 ± 0.04 olarak bulunmuştur. Buradan özgül ısı kritik üsteli $\alpha = 2 - \phi_2^{-1} = 1.03 \pm 0.04$ 'tür.



Şekil 4.6: Dallanma sayısı $b = 3$ olan Cayley örgüsü için ölçeklenme faktörleri σ_1^{Ω} and σ_2^{Ω} Denklem 4.25 ve 4.26 kullanılarak sayısal olarak hesaplanmıştır. Cayley örgüsünün ayırık ölçeklenme davranışına göre, ölçeklenme faktörü, r toplam kuşak sayısı olmak üzere, $B(k) = b^k$, $k = 1, \dots, r$ olarak seçilmiştir. Üsteller p_1, p_2 sırasıyla 1 ve 1.01 ± 0.01 olarak bulunmuştur. Buradan özgül ısı kritik üsteli $\alpha = 2 - p_2^{-1} = 1.00 \pm 0.02$ 'dir.

bulduk. Spektral dağılım üsteli β cinsinden $\phi_2 = 1 / (1 + \beta) = 1$ ve böylece $\alpha = 1 - \beta = 1$ ve $\delta = (2 + \beta) / \beta = \infty$ olur.

Ölçeklenme faktörlerini elde etmek için bir diğer yöntem ise büyük ω özdeğerli serbestlik derecelerini elimine etmektir. Ölçeklenme katsayısı B olmak üzere $\omega \geq \Omega / B$ olan tüm serbestlik derecelerini elimine ederiz. Bu durumda ölçeklenme faktörlerini σ_1^Ω ve σ_2^Ω olarak tanımlarsak,

$$\sigma_1^\Omega(B) \equiv \frac{N}{\sum_{\mu=1}^{\mu_B} 1} = B^{p_1} , \quad (4.25)$$

olur. Burada toplamın üst sınırı $\mu_B = \sup\{\mu \in [1, N] : \omega_\mu < \Omega / B\}$ ve $B^{p_1} = N / N'$ olup bu defa değeri açıkça gözükmemektedir. Laplasyen özdeğerleri toplamının ölçeklenme davranışını ise,

$$\sigma_1^\Omega(B) \sigma_2^\Omega(B) \equiv \frac{N \bar{\omega}}{\sum_{\mu=1}^{\mu_B} \omega_\mu} = B^{p_1 + p_2} \quad (4.26)$$

şeklinde tanımladık. Yine kuşak sayısı $r = 9$ ve dallanma sayısı $b = 3$ olan Cayley örgüsü için Denklem 4.25 ve 4.26'deki toplamaları sayısal olarak yaptığımızda, ölçekleme faktörlerinin B ölçeklenme katsayısına göre değişimini Şekil 4.6'de verdik. Ölçeklenme faktörleri σ_1^Ω ve σ_2^Ω 'nin çift logaritmik eksenle çizdirilen grafiğinde, iki ölçeklenme faktörünün de B 'nin bir kuvveti gibi gittiğini gördük. Buradan küçük ω bölgesi için yani B ölçeklenme faktörünün büyük değerlerinde, $p_1 = 1$ ve $p_2 = 1.001 \pm 0.004$ bulduk. Dallanma sayısının farklı değerleri için de Cayley ağacı aynı ölçeklenme davranışını vermiştir.

Cayley ağacı için $p_1 = p_2 = 1$ olduğunu kesin olarak gösterebiliriz. Kolaylık olması için σ_i^Ω ifadesindeki Ω etiketini almazsak ve eğer $n_B = \max_n \{\omega^{(n)} < \omega_{\mu_B}\}$ olarak tanımlanırsa, 4.25 ve 4.26 denklemlerinden,

$$\sigma_1^{-1} \propto \sum_n^{n_B} \tau_n \quad (4.27)$$

ve

$$\sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \propto \sum_n^{n_B} \tau_n \omega^{(n)} \quad (4.28)$$

olur. Tanım gereği, $\omega^{(n_B)} = \Omega / B$ 'dir.

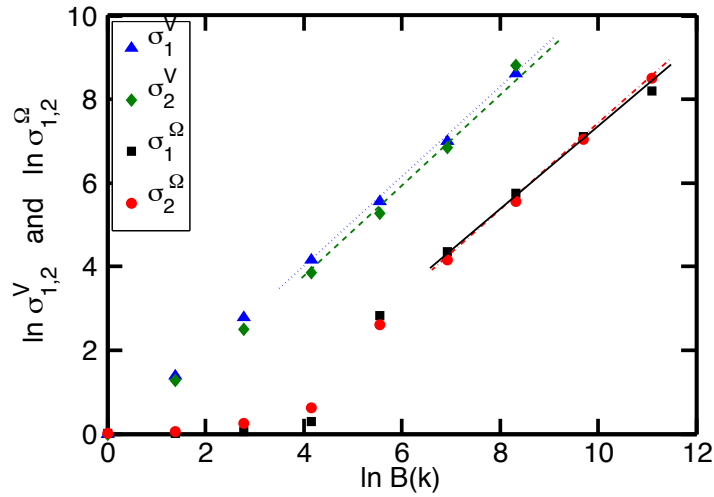
Her iki ölçeklenme faktörünü de entegral biçiminde ifade edip, $\tau_n \sim [\omega^{(n)}]^\xi$ olduğunu kullanırsak,

$$\sigma_1^{-1} \propto \int_0^{\omega^{(n_B)}} \frac{d\omega}{\omega} [\omega^{(n)}]^\xi \quad (4.29)$$

olur. Öte yandan $\sigma_1^{-1} \sigma_1^{-2}$, yalnızca entegrandda $[\omega^{(n)}]^{\xi+1}$ farkı ile aynı ifadeyi verecektir. Böylece ξ 'den bağımsız olarak $p_1 + p_2 = p_1 + 1$ bulunur. Bu sadece bir "üstel sayma" problemidir.

Eğer yukarıda verilen entegrallerde değişken değişikliğine gidilerek üst limitler Ω 'ya tamamlanırsa, kolayca $\sigma_1^{-1} \propto B^{-\xi}$ ve $\sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \propto B^{-\xi-1}$ olarak bulunacaktır ve $\xi = 1$ için $p_1 = p_2 = 1$ olur.

4.3 Elmas Örgü İçin Gaussiyen Model Sabit Noktası



Şekil 4.7: Düğüm noktası sayısı $N = 10924$ ve $r = 7$ kuşak büyüttüğümüz elmas örgü için σ_1^Ω (siyah kare), σ_2^Ω (kırmızı daire) ve σ_1^V (mavi üçgen) ve σ_2^V 'nin (yeşil daire) ölçeklenme davranışlarının çift logaritmik eksende çizdirilen grafiği. Ölçeklenme katsayısı $B(k) = 4^k$ ve $k = 1, \dots, r+1$ olup $\Omega/B_{maks} > \omega_2$ dir. Ölçeklenme üstelleri $p_1 = 0.97 \pm 0.04$, $p_2 = 1.06 \pm 0.07$ ve $\phi_1 = 1$ ve $\phi_2 = 1.01 \pm 0.03$ 'tür.

Düğüm sayısı $N = 10924$ ve kuşak sayısı $r = 7$ olan elmas örgü için en büyük özdeğerin ölçeklenmesi yöntemi ile nümerik hesap sonucu elde ettiğimiz ölçeklenme faktörleri σ_1^Ω (siyah kare) ve σ_2^Ω (kırmızı daire) ve kip sayısının ölçeklenmesi ile elde ettiğimiz ölçeklenme faktörleri σ_1^V (mavi üçgen) ve σ_2^V 'nin (yeşil eşkenar dörtgen) ölçeklenme davranışlarını Şekil 4.7'de verdik. Kuvvet yasası yaklaşımını uyguladığımız ölçeklenme bölgesi büyük B yani küçük ω bölgesidir.

Çizelge 4.1: Uzaysal ve uzaysal olmayan çizgelerde Gaussiyen model için elde edilen spektral yoğunluk üsteli β , ölçeklenme üstelleri ve kritik üsteller α ve δ . İlk üstel seti en büyük özdeğerin ölçeklenmesi (Bkz. Bölüm 3.1.1.2) yöntemi kullanılarak, ikinci üstel seti ise mod sayısının ölçeklenmesi (Bkz. Bölüm 3.1.1.1) yöntemi ile elde edilmiştir. İlk set için kritik üstelleri $\alpha = 2 - p_1/p_2$ ve $\delta = (p_1 + p_2)/(p_1 - p_2)$; ikinci set için $\alpha = 2 - 1/\phi_2$ ve $\delta = (1 + \phi_2)/(1 - \phi_2)$ bağıntılarından hesapladık. Manyetik alan kritik üsteli δ için, sıfıra çok yakın bir hata aralığının tersi mertbesinde değerler bulduğumuzdan, bu değerleri sonsuz olarak aldık. Kare örgü, Cayley ağacı ve elmas hiyerarşik örgüsü için spektral boyut $\tilde{d} = 2$ olup, Gaussiyen modelin bu örgüler üzerinde uygulanması ile elde edilen sonuç hepsi için aynıdır. Gaussiyen modelin kesin sonuçlarını G alt indisi kullanarak kritik üsteller α_G ve δ_G ile tablonun sonunda verdik.

Model	Kare	Kübik	Cayley3	Cayley5	Elmas
β	0.00 ± 0.02	0.5 ± 0.1	0	0	0
p_1	1.00 ± 0.01	1.49 ± 0.02	1	1	0.97 ± 0.04
p_2	0.99 ± 0.03	0.98 ± 0.05	1.01 ± 0.01	1.05 ± 0.05	1.06 ± 0.07
α	1.00 ± 0.02	0.52 ± 0.08	1.01 ± 0.01	1.05 ± 0.05	0.97 ± 0.03
δ	∞	4.92 ± 0.07	∞	∞	∞
ϕ_1	1	1	1	1	1
ϕ_2	0.996 ± 0.003	0.66 ± 0.05	1.03 ± 0.04	1.06 ± 0.09	1.01 ± 0.03
α	1.00 ± 0.03	0.48 ± 0.12	1.03 ± 0.04	1.06 ± 0.09	1.01 ± 0.03
δ	∞	4.88 ± 0.25	∞	∞	∞
α_G	1	0.5	1	1	1
δ_G	∞	5	∞	∞	∞

Buraya kadar kare örgü ve Cayley ağacında da elmas örgüde olduğu gibi Gaussiyen modelinin sonuçlarının aynı olduğunu gördük. Spektral boyutun $\tilde{d} = 2$ olduğu bu örgülerde iki ölçeklenme yöntemi ile de Gaussiyen modeli sonuçları ile tutarlı sonuçlar bulduk. Spektral dağılım üsteli β 'nın spektral boyut $\tilde{d}$ 'ye $\beta \equiv \tilde{d}/2 - 1$ biçiminde bağlı olduğunu biliyoruz. Böylece yine α ve δ kritik üstellerini β 'ya bağlı olarak yani dolayısıyla $\tilde{d}$ 'ye bağlı olarak Gaussiyen modelin sonuçları ile tutarlı biçimde buluyoruz.

Burada hatırlamak gerekir ki, ayrık özdeğer dağılımına sahip Cayley ağacı ve elmas hiyerarşik örgüsünde spektral dağılım üsteli $\beta = 0$ 'dır. Kare örgü, Cayley ağacı ve elmas hiyerarşik örgüsü için, spektral dağılım üsteli β ve Gaussiyen modeli için gerekli tüm ölçeklenme üstellerini ve kritik üstelleri Çizelge 4.1'de verdik. Her iki ölçeklenme yöntemi ile elde edilen Gaussiyen modeli için α ve δ sonuçları yanında literatürden bilinen Gaussiyen modelin kesin sonuçlarını özgül ısı kritik üsteli için α_G ve manyetik alan kritik üsteli δ_G olarak çizelgede verdik.

5. SONLU ÖRGÜ ÖLÇEKLİNMESİ (Finite Size Scaling)

Bu bölümde Spektral Renormalizasyon Grubu ile elde ettiğimiz Gaussiyen model sonuçlarını geleneksel yöntemler ile karşılaştırarak kontrol edeceğiz. Serbest enerjinin denklem 3.11'deki ifadesinden sıcaklığa göre ikinci türevi alınarak elde edilen özgül ısıнын baskın olan terimi üzerinden tam toplam alınması ile bu geleneksel yöntemi uzaysal olmayan çizgelere uygulayabileceğiz. Sonlu boyut ölçeklenmesini sistemin boyutu yerine çizgenin toplam düğüm noktası sayısını kullanarak yapacağız [46].

5.1 Tam Toplam (Exact enumeration): Gaussiyen Model

Gaussiyen model için özgül ısıyı denklem 3.9'un sıcaklığa göre 2nci türevini alarak Laplas operatörünün özdeğerleri üzerinden alınan bir toplam olarak yazmak mümkündür. Baskın terim dikkate alındığında özgül ısı ifadesi denklem 5.1'da verildiği gibidir.

$$c_h \propto \frac{1}{2N} \sum_{\mu=1}^N \frac{1}{(r_0 + \omega_{\mu})^2} . \quad (5.1)$$

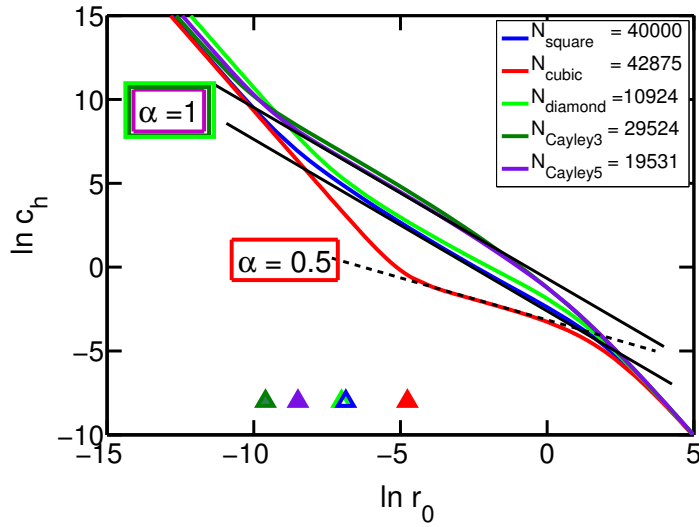
Laplas özdeğerleri üzerinden sayısal olarak hesaplanan özgül ısı için, kare, kübik, elmas örgü ve Cayley ağacı sonuçlarını Şekil 5.1'de verdik.

Özgül ısıнын kritik ölçeklenme davranışı, sıfırdan farklı ilk özdeğer ile Laplasyen spektral yoğunluğu içindeki vanHove tekilliğinin [45] görüldüğü aralıktadır. Kritik davranışı gözlediğimiz bu aralıktan özgül ısı kritik üsteli α 'yı Çizelge.4.1'de verdiğimiz SRG sonuçları ile uyumlu olarak elde ettik.

5.2 Çizgeler Üzerinde Sonlu Örgü Ölçeklenmesi

Sonlu örgü ölçeklenmesi, sistemin yeterince büyük olmaması durumunda kritik bölgenin dışına düşüp yanlış ölçeklenme davranışı gözleme ihtimaline karşı uygulanır.

Metrik uzay dışında çalıştığımızda herhangi bir *uzunluk* veya *korelasyon uzunluğu* tanımlı değildir. Sistemde tanımlı bir nicelik olan düğüm noktası sayısı sonlu olduğunda, $N^{-1} \neq 0$, sistem kritiklikten uzaktır. Bu nedenle N^{-1} , yeniden



Şekil 5.1: Dallanma sayısı $b = 3,5$ olan Cayley ağacı, elmas örgü, kare ve kübic örgüler için denklem 5.1'den elde edilen özgül ısı kritik üsteli α . Kullanılan örgülerin büyüklükleri grafiğin sağ üst köşesindeki kutu içinde verilmiştir. Çizge Laplasyeninin sıfırdan farklı ilk özdeğerinin yeri grafik üzerinde, ait oldukları modelin rengi ile aynı olarak verilen üçgenlerle işaretlenmiştir. Ölçeklenme bölgesi her model için aynı renkteki üçgen ile başlar. Kübic örgü haricinde tüm modellerde eğimden $\alpha = 1$ değeri elde edilmiştir. Kübic örgü için grafiğin eğiminden $\alpha = 0.5$ bulunur.

ölçeklenme altında sistemi kritik noktadan uzaklaştıran bir alan (relevant field) olarak uzaysal örgülerdeki doğrusal boyut yerine ele alınacaktır [37].

Sonlu örgü ölçeklenmesi için, dış manyetik alan yokluğunda, çizgedeki düğüm noktası sayısının bir skalar B ölçeklenme faktörü ile değişimi altında serbest enerji, t indirgenmiş sıcaklık olmak üzere,

$$f(t, N^{-1}) = B^{-1} f'(t', N'^{-1}) \quad (5.2)$$

ve $N' = NB$ ve $t' = tB^Y$ ölçeklenmeleri altında,

$$f(t, N^{-1}) = B^{-1} f'(tB^Y, N^{-1}B) \quad (5.3)$$

olur. Serbest enerjinin sıcaklığa göre ikinci türevinden özgül ısı,

$$c_h(t, N^{-1}) = B^{-1+2Y} c'_h(tB^Y, N^{-1}B) \quad (5.4)$$

olarak bulunur. Ölçeklenme faktörünü $tB^Y = 1$ seçersek, özgül ısı B 'den bağımsız olarak $t^{-1/Y} N^{-1}$ 'in bir fonksiyonu kere indirgenmiş sıcaklığın bir kuvveti olarak yazılabilir.

$$c_h(t, N^{-1}) = t^{\frac{1-2Y}{Y}} c'_h(1, N^{-1} t^{-1/Y}) \quad (5.5)$$

Bir $\mathcal{F}$ ölçeklenme fonksiyonu tanımlanarak, denklem 5.5 yeniden yazılırsa,

$$c_h = t^{\frac{1-2Y}{Y}} \mathcal{F}(N^{-1}t^{-1/Y}) \quad (5.6)$$

ifadesini elde ederiz. Kritik nokta limitinde, yani düğüm noktası sayısı N 'nin sonsuza gittiği limitte ve indirgenmiş sıcaklık t 'nin bir sabit değerinde veya indirgenmiş sıcaklık bir sabit iken düğüm noktası sayısının sonsuza gittiği limitte,

$$c_h(t, N^{-1}) \sim \begin{cases} \text{sabit}, & x \rightarrow \infty \quad (N:\text{sabit}, t \rightarrow 0) \\ t^{-\alpha}, & x \rightarrow 0 \quad (t:\text{sabit}, N \rightarrow \infty). \end{cases} \quad (5.7)$$

olsun istiyoruz. Burada $x \equiv N^{-1}t^{-1/Y}$ olarak tanımlıdır. Ölçeklenme fonksiyonu $\mathcal{F}$ 'nin homojen bir fonksiyon olduğunu varsayarak bir $F(x)$ geçiş (crossover) fonksiyonu ile $\mathcal{F}(x) = x^A F(x)$ bağıntısını elde ederiz. Kritik nokta limitinde bu geçiş fonksiyonu 5.8'deki gibi davranacaktır.

$$F(x) = \begin{cases} \text{sabit}, & x \rightarrow \infty \quad (N:\text{sabit}, t \rightarrow 0) \\ x^{-A}, & x \rightarrow 0 \quad (t:\text{sabit}, N \rightarrow \infty). \end{cases} \quad (5.8)$$

olur. Özgül ısıнын sabit olduğu limitte, $F(x)$ sabit ve $\mathcal{F} \sim x^A$ olur. Böylece

$$c_h(t, N^{-1}) = t^{1/Y-2} (N^{-1}t^{-1/Y})^A = \text{sabit} \quad (5.9)$$

ve A kuvveti için 5.10'daki değer elde edilir.

$$A = 1 - 2Y. \quad (5.10)$$

Diğer taraftan sabit sıcaklık limitinde, $F(x) = x^{-A}$ ve $\mathcal{F} = 1$ ve buradan özgül ısı $c_h(t, N^{-1}) = t^{1/Y-2}$ olur. Özgül ısıнын indirgenmiş sıcaklığa göre kritik noktadaki davranışını veren $c_h \sim t^{-\alpha}$ bağıntısından hareketle, özgül ısı kritik üsteli α 'yı,

$$\alpha = 2 - \frac{1}{Y} \quad (5.11)$$

buluruz. Özgül ısıнын ölçeklenme davranışı özetle 5.12'deki gibidir.

$$\frac{c_h(t, N^{-1})}{N^{2Y-1}} = \begin{cases} \text{sabit}, & x > 1 \\ x^{2Y-1}, & x < 1. \end{cases} \quad (5.12)$$

Buradan farklı sonlu örgü büyüklükleri için $N^{-(2Y-1)}c_h$ 'nin x 'e göre grafiğini çift-logaritmik eksenle çizdirerek, küçük t bölgesinde grafiklerin üstüste geldikleri yerde Y değerini ve dolayısıyla 5.11'dan α kritik üstelini hesaplayabiliriz.

5.2.1 Uzaysal örgülerde sonlu boyut ölçeklenmesi: $d = 2$ ve $d = 3$ boyutta

Öklid uzayında $\mathbf{k}$ dalga sayısı olmak üzere, ısı sığası baskın terimi dikkate alındığında 5.13'deki gibidir [37].

$$C_h \simeq \frac{k_B T^2}{2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{r_0 + k^2} . \quad (5.13)$$

Dalga sayısı, $\mathbf{k}$, d -boyutlu bir sistemin kenar uzunluğu L ve bir kenarındaki düğüm noktası sayısı N_l olmak üzere,

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} \sum_{\mu=1}^d n_{\mu} \hat{\mu} \quad (5.14)$$

ve $n = 0, 1, \dots, (N_l - 1)$ olmak üzere 5.14 ifadesi 5.13'de yerine konularak ısı sığası için düğüm noktaları üzerinden bir toplam elde edilebilir.

$$C_h = \frac{k_B T^2}{2} \prod_{\mu=1}^d \sum_{n_{\mu}=0}^{N_{\mu}-1} \frac{1}{\left[r_0 + \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \sum_{\mu=1}^d n_{\mu}^2 \right]^2} . \quad (5.15)$$

Kare örgü için $d = 2$ değeri denklem 5.15'e uygulanırsa, $L = N^{1/2}$ olmak üzere,

$$C_h = \frac{k_B T^2}{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \frac{1}{\left[r_0 + \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 (n_1^2 + n_2^2) \right]^2} . \quad (5.16)$$

olur. İndirgenmiş sıcaklık r_0 'ın toplam düğüm noktası sayısı N ile ölçeklenmesinden,

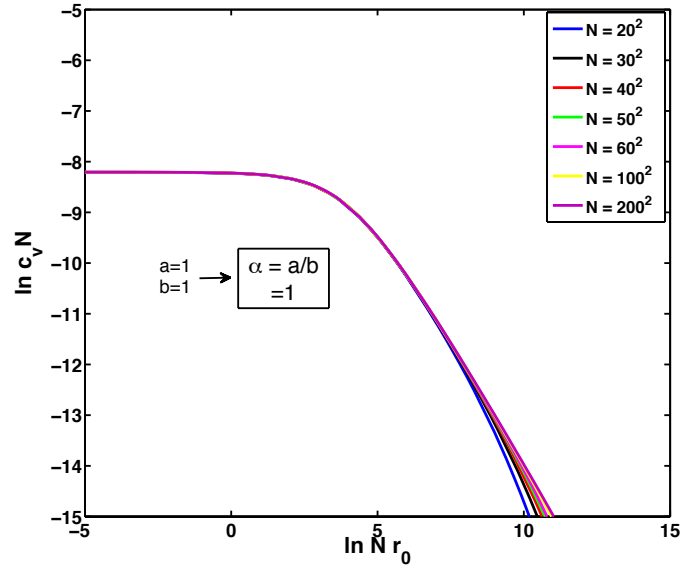
$$C_h = \frac{k_B T^2 N^{4/d}}{2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \frac{1}{\left[r_0 N^{2/d} + (2\pi)^2 (n_1^2 + n_2^2) \right]^2} . \quad (5.17)$$

ifadesi N 'nin bir kuvveti ve $N^{2/d} r_0$ 'ın bir fonksiyonu olarak yazılabilir.

$$C_h \simeq N^{4/d} \simeq \mathcal{Q}(N^{2/d} r_0) . \quad (5.18)$$

Özgül ısı ise düğüm noktası başına ısı sığası olduğundan,

$$c_h N^{4/d-1} \simeq \mathcal{Q}(N^{2/d} r_0) . \quad (5.19)$$



Şekil 5.2: Kare örgü için sonlu boyut ölçeklenmesi. Düğüm noktası sayısı $20^2, 30^2, 40^2, 50^2, 60^2, 100^2$ ve 200^2 için periyodik sınır koşulları uygulanan kare örgüde düşük sıcaklık bölgesinde eğrilerin üstüste geldiği a ve b değerleri için özgül ısı kritik üsteli $\alpha = a/b = 1$ 'dir.

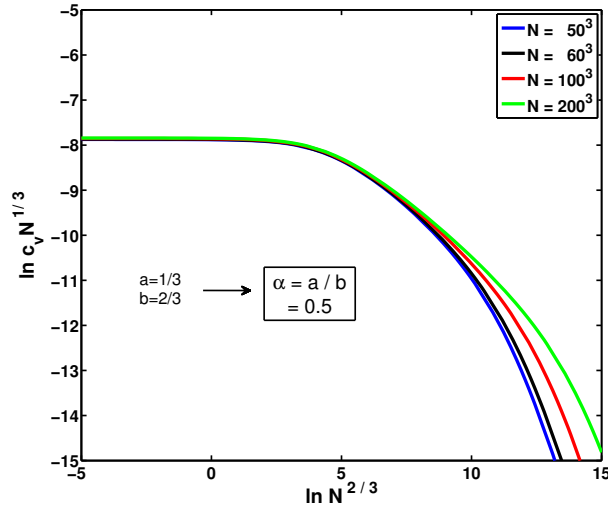
olur. Buradan $d = 2$ için denklem 5.19'ten özgül ısı için $c_h N \simeq \mathcal{Q}(N r_0)$ ifadesi elde edilir.

Farklı örgü büyüklükleri için, $c_h N$ 'nin $N r_0$ 'a göre değişimini Şekil 5.2'deki görüldüğü gibi çift logaritmik eksenle çizdirerek, kritik sıcaklık bölgesinde grafiklerin üstüste geldiğini gördük. Grafikleri elde ederken eksenleri, denklem 5.19'daki forma benzer olarak, $c_h N^a$ ve $N^b r_0$ alıp sayısal olarak a ve b değerlerini elde ettik. Öyle ki, sayısal hesap sonucu düşük sıcaklık bölgesinde grafiklerin üstüste düştüğü uygun a ve b değerlerini her iki d boyutu için $a = 4/d - 1$ ve $b = 2/d$ 'den hesapladığımız değer ile aynı bulduk.

5.2.2 Uzaysal Olmayan Çizgelerde Sonlu Örgü Ölçeklenmesi: Cayley ağacı ve elmas örgü

Ayrık Laplasyen özdeğer spektrumuna sahip olan Cayley ağacı için denklem 5.1 aşağıdaki biçimde yeniden yazılabilir.

$$c_h = \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{r-1} \frac{\tau_n}{(t + \omega^{(n)})} . \quad (5.20)$$



Şekil 5.3: Kübik örgü için sonlu boyut ölçeklenmesi. Dört farklı büyüklükte ($N = 50^3, 60^3, 100^3, 200^3$) kübik örgü için düşük sıcaklık bölgesinde eğrilerin üstüste geldiği a ve b değerlerinde özgül ısı kritik üsteli $\alpha = a / b = 0.5$ olarak hesaplanır.

Cayley için daha önce denklem ??’de ayrık Laplasyen özdeğerlerinin yozluk sayılarını ve denklem 3.43’de ayrık özdeğerlerin dallanma ve kuşak sayısına göre nasıl değiştiğini vermiştik. Yozluk sayısı ve özdeğerler için bu ifadeler, $\omega < \omega^*$, küçük özdeğer bölgesi için geçerli olduğundan, özgül ısı için bu ifadeleri denklem 5.20’de yerine koyup yaklaşık bir analitik sonuç elde edeceğiz.

$$c_h \simeq \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{r-1} \frac{b^{(n-2)}}{(t + b^{-(r-n+2)})^2} . \quad (5.21)$$

Küçük özdeğer bölgesindeki özdeğer sayısı toplamı N_r b^r ’yi denklem 5.21’de yerine koyarak,

$$c_h = \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{r-1} \frac{b^{(n-2)}(b-1)N_r^2}{(N_r t + b^{n-2})^2} \simeq N_r \frac{b-1}{b^2} \sum_{n=0}^{r-1} \frac{b^{(n)}}{(N_r t + b^{n-2})^2} \quad (5.22)$$

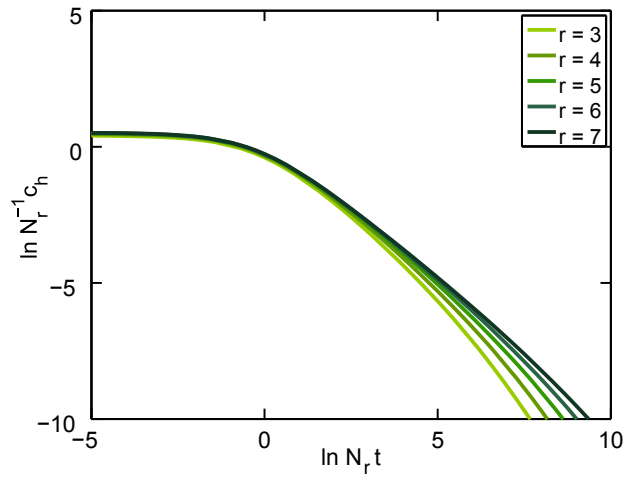
yaklaşık ifadesini elde ederiz. Bu yaklaşık ifadesinin her iki tarafını N_r ile böldüğümüzde,

$$\frac{c_h}{N_r} \simeq \frac{b-1}{b^2} \sum_{n=0}^{r-1} \frac{b^{(n)}}{(N_r t + b^{n-2})^2} \quad (5.23)$$

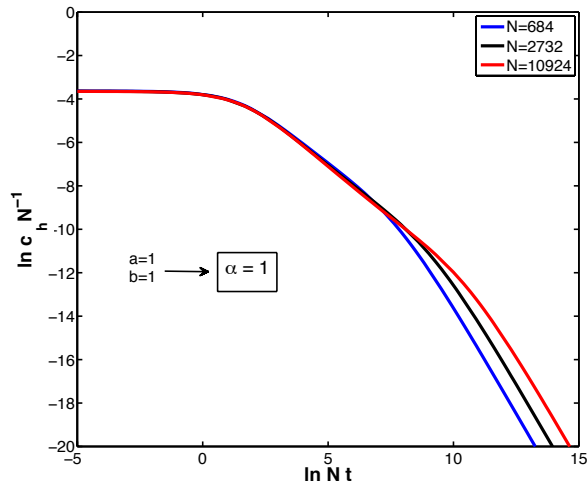
ifadesi için sağ tarafın yalnız $N_r t$ 'nin bir fonksiyonu olduğunu ve $N_r t < 1$ için bir sabite yakınsadığını görürüz. Diğer taraftan $N_r t > 1$ için özgül ısı $c_h \sim (N_r t)^{-1}$ olmaktadır. Özet olarak özgül ısı, Cayley örgüsü için,

$$\frac{c_h}{N_r} \simeq \mathcal{F}(N_r t) . \quad (5.24)$$

şeklinde yazılabilir. Farklı örgü büyüklükleri için sayısal olarak elde ettiğimiz sonuçları Şekil 5.4'de verdik. Elmas örgü için de sonlu boyut ölçeklenmesi altında özgül ısı kritik üstelini $\alpha = 1$ bulduk.



Şekil 5.4: Farklı büyüklükte Cayley ağaçları için özgül ısı ölçeklenme diyagramı. Düşük sıcaklık bölgesinde üstüste gelen grafiklerden özgül ısı kritik üsteli $\alpha = 1$ olarak elde edilir.



Şekil 5.5: Farklı büyüklükte elmas örgüler için özgül ısı ölçeklenme diyagramı. Düşük sıcaklık bölgesinde üstüste gelen grafiklerden özgül ısı kritik üsteli $\alpha = 1$ olarak elde edilir.

6. GAUSSIEN MODELE ψ^4 TEDİRİGEMESİ VE ISING EVRENSİLLİK SINIFI

Bu bölümde Gaussiyen hamiltonyene daha önce denklem 2.2’de verdiğimiz Ginzburg-Landau hamiltonyeninde görülen ψ^4 etkileşim terimini ekleyeceğiz. Böylece etkileşim modelini Cayley ve elmas örgülere uygulayarak Gaussiyen model ötesinde sonuçları araştıracağız. Bu etkileşim terimi, farklı dalgalanma modlarını birbirine bağlayarak özvektörlerin rolünü önemli hale getirmektedir.

Ising modelinin, Bethe örgüsü (sonsuz limitte Cayley ağacı) üzerinde ortalama alan davranışı gösterdiğini [24, 47] bildiğimiz için bu etkileşim teriminin dahil edilmesi ile Gaussiyen sabit noktasının kararlılığının bozulmamasını bekliyoruz. Oysa ki, düzenli ve düzensiz fazlar arasında kararlı olmayan kritik üstellere sahip bir faz geçişi göstermektedir [48, 49]. Burada Gaussiyen olmayan bir sabit nokta bulmayı umuyoruz.

Ginzburg-Landau hamiltonyenini, denklem 2.2, etkileşimlerin olmadığı Gaussiyen model hamiltonyeni ve etkileşim hamiltonyeni, $H_{etk} = v_0 \sum_i \psi^4(i)$, toplamaları şeklinde yazabiliriz.

$$H = H_0 + H_{etk} . \quad (6.1)$$

Keyfi çizgeler üzerinde etkileşim hamiltonyenini, çizge Laplasyenin özvektörleri cinsinden aşağıdaki gibi açabiliriz.

$$H_{etk} = v_0 \sum_{1,2,3,4} \hat{\psi}_1 \hat{\psi}_2 \hat{\psi}_3 \hat{\psi}_4 \Phi(1,2,3,4) . \quad (6.2)$$

Burada $[\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4]$ yerine kısaca $[1, 2, 3, 4]$ notasyonunu kullandık ve bir dörtlü verteks için Φ fonksiyonunu, çizge Laplasyenin özvektörlerinin inci elemanlarının, $u_\mu(i)$, çarpımının toplamı olarak tanımladık.

$$\Phi(1,2,3,4) = \sum_i^N u_1(i)u_2(i)u_3(i)u_4(i) . \quad (6.3)$$

Periyodik örgülerde, Laplasyen özvektörleri harmonik fonksiyonlardır.

$$u_\mu(j) = N^{-1/2} \exp(i\mathbf{k}_\mu \cdot \mathbf{x}_j) . \quad (6.4)$$

Özdeğer $\omega_\mu = \|\mathbf{k}_\mu\|^2$ için Φ fonksiyonu

$$\Phi(1,2,3,4) = \delta^{(d)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) , \quad (6.5)$$

olup termodinamik limitte $\delta^{(d)}$, d -boyutlu Dirac- δ fonksiyonudur. Keyfi çizgeler için ise genelde durum farklıdır. Örneğin Cayley örgüsünde, özdeğerleri analitik olarak elde edebilssek dahi [9, 42, 43, 50], periyodik çizgelerdekine benzer bir koşulu tanımlamak kolay değildir. Böyle bir koşulun yokluğunda, bu çalışmada Φ fonksiyonunu sayısal olarak ürettiğimiz özvektörleri kullanarak hesapladık.

Şimdi etkileşim terimini dahil ettiğimiz etkin hamiltonyen için bölüşüm fonksiyonu $\mu < \mu_B$ ve $\mu > \mu_B$ bölgesine ait $\hat{\psi}_\mu$ alanları için faktörize edeceğiz.

$$Z(r_0, v_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{0 < \mu < \mu_B} d\hat{\psi}_\mu^< \prod_{\mu_B < \mu < N} d\hat{\psi}_\mu^> e^{-H} . \quad (6.6)$$

Bir Gaussiyen ağırlık terimi $e^{-H_0^>}$ ile beraber bölüşüm fonksiyonu,

$$Z(r_0, v_0) = Z_0^> \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\mu < \mu_B} d\hat{\psi}_\mu e^{-H_0^<} \langle e^{-H_{\text{etk}}} \rangle_0^> . \quad (6.7)$$

olur. Burada daha önce denklem 3.24'te tanımladığımız biçimde seçtiğimiz μ_B değeri ile en büyük özdeğeri bölerek spektrumu tıraşlıyoruz. Mod sayısını keserek yaptığımız diğer ölçeklenme yöntemini de kullansak spektral boyut $\tilde{d} = 2$ için paralel sonuçlar elde ettiğimizi gördük. Üst indisler $\{<, >\}$, spektrumu kestiğimiz sınırın sırasıyla altını ve üstünü ifade eder. Burada,

$$H_0^> = \frac{1}{2} \sum_{\mu > \mu_B}^N [r_0 + \omega_\mu] \hat{\psi}_\mu^2 \quad (6.8)$$

ve

$$H_0^< = \frac{1}{2} \sum_{\mu < \mu_B}^N [r_0 + \omega_\mu] \hat{\psi}_\mu^2 \quad (6.9)$$

olur. Bununla beraber denklem 6.7'de görülen $e^{-H_{\text{etk}}}$ fonksiyoneli küçük ve büyük tüm $\hat{\psi}_\mu$ alanlarını içerir.

$$H_{\text{etk}} = H_{\text{etk}}[\hat{\psi}_\mu^<, \hat{\psi}_\mu^>]. \quad (6.10)$$

Etkileşim hamiltonyeninin içerdiği küçük ve büyük $\hat{\psi}_\mu$ alanlarının bilgisini H_{etk} ifadesinin üst indisi biçiminde vereceğiz. Örneğin iki adet küçük iki adet büyük $\hat{\psi}_\mu$ alanı içeren kombinasyon için $H_{etk}^{<<>>}$ gösterimini kullanacağız.

Normalizasyon faktörü $Z_0^>$ ise

$$Z_0^> = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\mu > \mu_B} d\hat{\psi}_\mu e^{-H_0^>} \quad (6.11)$$

ve bir $\mathcal{Q}$ fonksiyonunun $\mu > \mu_B$ bölgesindeki beklenen değeri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{Q} \rangle_0^> &= (Z_0^>)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\mu_B < \mu < N} d\hat{\psi}_\mu \mathcal{Q} e^{-H_0^>} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\mu_B < \mu < N} d\hat{\psi}_\mu \mathcal{Q} e^{-H_0^>}}{\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\mu > \mu_B} d\hat{\psi}_\mu e^{-H_0^>}} . \end{aligned} \quad (6.12)$$

Kuplaj sabitinin ikinci mertebeden pertürbasyonu, bir kümülant açılımı üzerinden elde edilir. Ayrıntılı hesap Ek.B’de verilmiştir.

$$\langle e^{-x} \rangle \simeq e^{-\langle x \rangle} e^{\frac{1}{2}[\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2]} . \quad (6.13)$$

Denklem 6.7’de görülen $\langle e^{-H_{etk}} \rangle_0^>$ terimi 6.13’teki ikinci mertebeye kadar kümülant açılımı ile,

$$\langle e^{-H_{etk}} \rangle_0^> \simeq e^{-\langle H_{etk} \rangle_0^>} e^{\frac{1}{2}[\langle H_{etk}^2 \rangle_0^> - \langle H_{etk} \rangle_0^>^2]} . \quad (6.14)$$

ifadesi elde edilir. Etkileşim modelinde birinci mertebeden katkılar için $\langle H_{etk} \rangle_0^>$ ve ikinci mertebeden katkılar için $\langle H_{etk}^2 \rangle_0^>$ beklenen değerlerini hesaplayacağız.

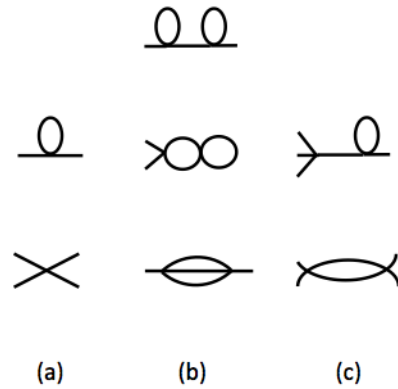
6.1 Birinci Mertebeden Terimler

Daha önce belirttiğimiz gibi H_{etk} fonksiyoneli küçük ve büyük alanların her ikisini de içermektedir. Birinci mertebeden katkılar verecek olan, $\langle H_{etk} \rangle_0^>$ beklenen değerini olası tüm kombinasyonların bir toplamı şeklinde yazabiliriz. Terimlerin başındaki çarpım faktörleri her bir durum için kaç değişik kombinasyon olduğunun sayısıdır.

$$\langle H_{etk} \rangle_0^> = \langle H_{etk}^{<<<<} \rangle_0^> + \langle H_{etk}^{>>>>} \rangle_0^> + 6\langle H_{etk}^{<<>>} \rangle_0^> . \quad (6.15)$$

Tek sayıda $\hat{\psi}_\mu^>$ alanı içeren $\langle H_{\text{etk}}^{<<<>} \rangle_0$ ve $\langle H_{\text{etk}}^{>>><} \rangle_0$ için Gaussiyen entegrallerden katkı gelmeyeceği kolayca görülebilir. Aynı şekilde bir sabite eşit olan $\langle H_{\text{etk}}^{>>>>} \rangle_0$ teriminden de ölçeklenme davranışına herhangi bir katkı gelmez.

Burada dört tane $\hat{\psi}_\mu^<$ alanı içeren $H_{\text{etk}}^{<<<<}$ terimi için kısaca $H_{4,1}^<$, iki $\hat{\psi}_\mu^<$ ve iki $\hat{\psi}_\mu^>$ alanı içeren $H_{\text{etk}}^{<<>>}$ terimi için ise kısaca $H_{2,1}^<$ isimlendirmesini kullanacağız. Alt indis çiftinin ilki diyagramın kaç serbest (dış) bacağı olduğunu, ikinci alt indis ise diyagramın içerdiği verteks sayısını gösterir. Pertürbasyon açılımında farklı terimlere karşı gelen farklı diyagramlar Şekil 6.1’de gösterilmiştir. Böylece dördüncü merteye



Şekil 6.1: Kuplaj sabitinin ikinci mertebeye kadar açılımında ikinci ve dördüncü dereceden etkileşimlere karşı gelen Feynman diyagramları. Her bir sütun için yukarıdan aşağıya doğru kullanılan etiketler (a) $D_{2,1}$, $D_{4,1}$, (b) $D_{2,2}$, $D_{2,2'}$, $D_{2,2''}$, (c) $D_{4,2'}$ ve $D_{4,2}$ ’dir.

eşlenim sabiti v_0 ’a birinci dereceden katkı veren terimler,

$$H_{2,1}^< = 6v_0 \sum_{1,2 < \mu_B} \hat{\psi}_1 \hat{\psi}_2 \sum_{3 > \mu_B} G(\omega_3, r_0) \Phi(1, 2, 3, 3) \quad (6.16)$$

ve

$$H_{4,1}^< = v_0 \sum_{1,2,3,4 < \mu_B} \hat{\psi}_1 \hat{\psi}_2 \hat{\psi}_3 \hat{\psi}_4 \Phi(1, 2, 3, 2) . \quad (6.17)$$

olacaktır. Burada, $G(\omega_\mu, r_0)$, Green fonksiyonu, Şekil 6.1’de görülen diyagramların iç bacaklarının bağlanmasına karşı gelen alan eşlenimleri sonucu Gaussiyen entegrallerden gelmektedir.

$$\langle \hat{\psi}_\mu \hat{\psi}_{\mu'} \rangle_0^> = \delta_{\mu,\mu'} \frac{1}{\omega_\mu + r_0} \equiv \delta_{\mu,\mu'} G(\omega_\mu, r_0) . \quad (6.18)$$

Denklem 6.16 ve 6.17'den görüldüğü gibi, alanların eşleniminden, periyodik örgülerde olduğu gibi, bir özvektör bağımlılığı gelir. Örneğin Cayley ağacı için, dörtlü verteks $\Phi(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ 'nin yalnızca iki durum için sıfırdan farklı olduğu gösterilebilir. Öyle ki, sıfırdan farklı olabilmesi için argümanlarının (a) ikişer ikişer birbirine eşit veya (b) içlerinden bir tanesinin sabit vektöre ve diğer üç vektörün de birbirine eşit olması gerekir. Bunu daha açık bir şekilde aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \sum_{\{1,2,3,4\}} \Phi(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) &= \binom{4}{2} \sum_{\{1,2,3,4\}} \delta_{\mu_1, \mu_2} \delta_{\mu_3, \mu_4} \Phi(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) \\ &+ 4 \sum_{\{1,2,3,4\}} \delta_{\mu_1, 1} \delta_{\mu_2, \mu_3, \mu_4} \Phi(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) \end{aligned} \quad (6.19)$$

Buna göre denklem 6.16'te $1, 2 \leq \mu_B$ ve $3, 4 > \mu_B$ olması, koşul (a)'dan hareketle $\mu_1 = \mu_2$ olmasını gerektirir ve buradan kuadratik terime katkı gelir. Bununla beraber elmas örgü için de aynı sayısal sonuçları elde ettik.

Gaussiyen model için tanımladığımız ölçeklenme faktörleri, σ_1^Ω ve σ_2^Ω , ya ek olarak, etkileşim teorisinde birinci-mertebedan kuadratik (iki serbest bacağı olan diyagramlar) ve kuartik (dördül, dört serbest bacaklı diyagramlar) terimler için $\sigma_{2,1}$ ve $\sigma_{4,1}$ ölçeklenme faktörlerini denklem 6.20 ve 6.21'deki gibi tanımladık.

$$\sigma_{2,1}(B) \equiv \frac{\sum_{\mu_1, \mu_2}^N \sum_{i=1}^N I_1(1, i) u_{\mu_1}(i) u_{\mu_2}(i)}{\sum_{\mu_1, \mu_2}^{\mu_B} \sum_{i=1}^N I_1(B, i) u_{\mu_1}(i) u_{\mu_2}(i)} \sim B^{\phi_{2,1}} \quad (6.20)$$

ve

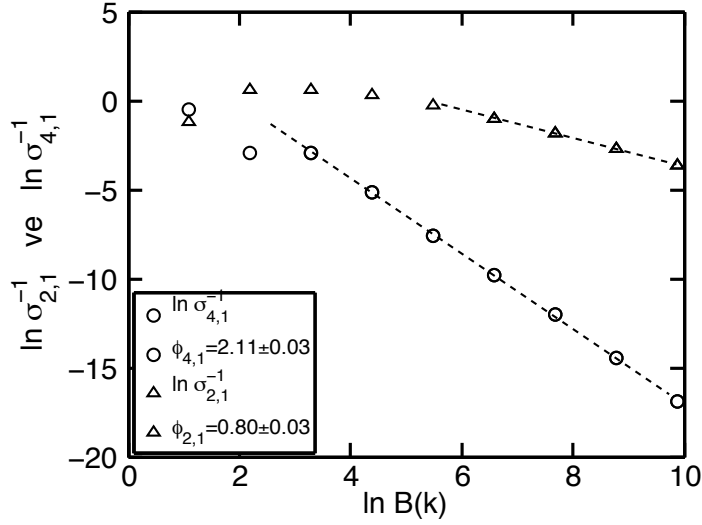
$$\sigma_{4,1}(B) \equiv \frac{\sum_{1,2,3,4}^N \Phi(1, 2, 3, 4)}{\sum_{1,2,3,4}^{\mu_B} \Phi(1, 2, 3, 4)} \sim B^{\phi_{4,1}}. \quad (6.21)$$

Burada $I_1(B, r_0, i)$ aşağıda verildiği gibidir.

$$I_1(B, r_0, i) = \sum_{\mu=\mu_B+1}^N G(\omega_\mu, r_0) u_\mu^2(i), \quad (6.22)$$

ve $I_1(B, r_0) = \sum_i^N I_1(B, r_0, i)$ olur.

Ölçeklenme faktörlerini, Laplasyen özdeğer ve özvektörlerinden, indirgenmiş sıcaklığın $r_0 = 0$ değerinde, sayısal olarak hesapladık. Cayley ağacı ve elmas örgü için elde ettiğimiz ölçeklenme üstellerini Çizelge. 6.1'de verdik.



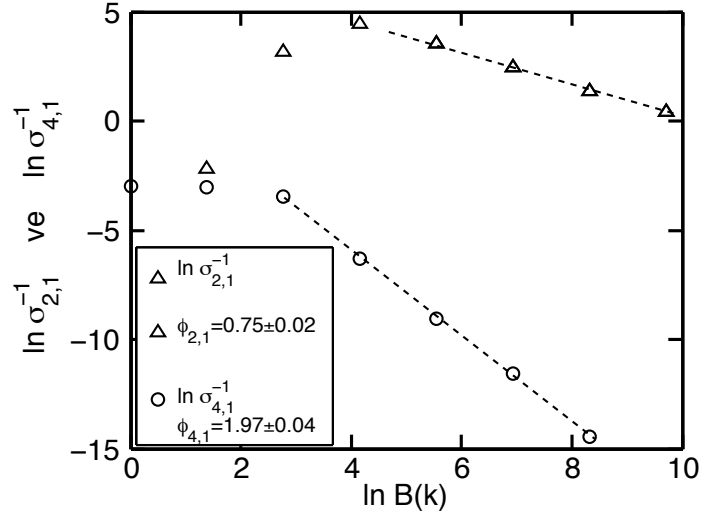
Şekil 6.2: Cayley ağacında ölçeklenme faktörleri $\sigma_{2,1}$ ve $\sigma_{4,1}$ 'in ölçeklenme davranışları çift logaritmik eksende çizdirilmiştir. Ölçeklenme faktörleri için sırasıyla daire ve küçük üçgenler kullanılmıştır. Büyük B değerlerinde doğrusal fit kesikli çizgilerle gösterilmiştir.

Yalnızca v_0 eşlenim sabitine katkı verecek terimleri tutarak, ölçeklenmiş etkin hamiltonyen için,

$$\begin{aligned}
 H'_1 = & \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^N [r_0 B^{-p_1} + B^{-p_1-p_2} \omega_\mu] z^2 \hat{\psi}^2 \\
 & + 6v_0 \sum_{\mu=1}^N z^2 \hat{\psi}_\mu^2 B^{-\phi_{2,1}} \\
 & + v_0 \sum_{1,2,3,4} z^4 \hat{\psi}_1 \hat{\psi}_2 \hat{\psi}_3 \hat{\psi}_4 \Phi(1,2,3,4) B^{-\phi_{4,1}} - h z \psi_1,
 \end{aligned} \tag{6.23}$$

ifadesini elde ederiz. Hamiltonyenin yeniden ölçeklenmesi sırasında, ölçeklenme faktörlerini ilgili terimlerle çarpıp, nümerik olarak elde ettiğimiz diğer tüm katsayıları ihmal edeceğiz.

İndirgenmiş sıcaklık tekrarlama bağıntısına, lineer bir katkı oluşturabilmek için, $I_1(B, r_0)$ terimini açıp $\sigma_{2,1}^{-1} \sim B^{-\phi_{2,1}} \sim B^{-\phi_{2,1}^\ell} [I_1^{(0)} - r_0 I_2^{(0)}]$ eşitliğini yazabiliriz. Burada ℓ dış bacaklar üzerinden bir toplamı işaret ederken, köşeli parantez içindeki ifade diyagramın iç bacaklarından gelen döngü integralinin r_0 cinsinden açılması ile elde edilir. Ölçeklenme katsayısı B 'ye bağlı olarak $I_1^{(B)}$ ve $I_2^{(B)}$ 'nin davranışlarını, sırasıyla



Şekil 6.3: Elmas örgüde ölçeklenme faktörleri $\sigma_{2,1}$ ve $\sigma_{4,1}$ 'in ölçeklenme davranışları çift logaritmik eksende çizdirilmiştir. Ölçeklenme faktörleri için sırasıyla daire ve küçük üçgenler kullanılmıştır. Büyük B değerlerinde doğrusal fit kesikli çizgilerle gösterilmiştir.

$I_1^{(0)}(B) \sim \log B$ ve $I_2^{(0)}(B) \sim B^{\phi_{r2}}$ olarak bulduk (Bkz. Çizelge 6.1). Burada elde ettiğimiz üstellerin tutarlı olduğunu söyleyebiliriz. Öyle ki, $r_0 = 0$ 'da hesapladığımız $\sigma_{2,1}^{-1}$ ile $B^{-\phi_{2,1}^\ell} I_1^{(0)}$ 'ın davranışını karşılaştırdığımızda $\phi_{2,1}$ üsteli 1'den biraz küçük olur. Bu küçük fark aslında $I_1^{(0)}$ 'ın logaritmik davranışının bir yansımasıdır. Böylece alan renormalizasyon faktörü z 'nin birinci-mertebeden katkılar için değişmemiş olduğunu ve yine denklem 3.26'daki gibi hesaplanacağını görürüz. Tekrarlama bağıntılarını denklem 3.26'yı kullanarak r ve v 'nin birinci dereceden katkıları için,

$$r' = B^{p_2} r_0 + 12v_0 z^2 B^{-\phi_{2,1}^\ell} [I_1^{(0)} - r_0 I_2^{(0)}] \quad (6.24)$$

buluruz. Denklem 6.24'de son terim, küçük olan r_0 ve v_0 'ın çarpımı olup, ihmal edilebilir. Birinci mertebeden katkılar için v 'nin tekrarlama bağıntısı ise

$$v' = v_0 z^4 B^{-\phi_{4,1}} = v_0 B^{4-\phi_{4,1}}, \quad (6.25)$$

olur. Eğer özvektör bağımlılığını gözardı edersek,

$$I_K^{(0)} = \sum_{\mu=N/B}^N \frac{1}{\omega_\mu^K}. \quad (6.26)$$

tanımını yapabiliriz. Böylece bu fonksiyonların ölçeklenme davranışı için analitik bir tahmin yürütülebilir.

Cayley ağacı ve elmas örgüler üzerinde alan ölçeklenme faktörünü $z \sim B^4$ olarak bulduğumuz için v 'nin tekrarlama bağıntısı, denklem 6.25'ten,

$$v' = v_0 B^{4-\phi_{4,1}} , \quad (6.27)$$

olur. Cayley ağacı üzerinde $I_K(0)$ fonksiyonunun ölçeklenmesini Ek.E'de, elmas örgüde $I_K(0)$ fonksiyonunun ölçeklenme davranışını ise Ek.F'de verdik.

Burada Cayley ağacı ve elmas hiyerarşik örgüsü için birinci mertebeden etkileşimleri dahil ederek yaptığımız pertürbasyon açılımında, bu mertebe için $r^* = 0$ ve $v^* = 0$ Gaussiyen sabit noktasının kararlı olduğunu gördük.

6.2 İkinci Mertebeden Terimler

İkinci mertebeden etkileşimler için birinci mertebe etkileşim diyagramlarına ek olarak yeni diyagramlar gelecek ancak birinci mertebede, r_0 ve v_0 'ı küçük kabul edip r_0 'ı seriye açarak elde ettiğimiz denklem 6.24'deki terimleri tutacağız ve v_0^2 katkıları için r_0 'a sıfırcıncı mertebeden katkılar gibi düşünüp hesaba katacağız. Oysa ki, ε açılımında [19], birinci mertebede v_0^2 katkıları ihmal edilir.

İkinci mertebeden etkileşimlere karşı gelen diyagramları Şekil 6.1(b) ve (c)'de vermiştik. En genel haliyle ikinci mertebe etkileşimler için indirgenmiş sıcaklık tekrarlama bağıntısı, $z^2 = B^{p_1+p_2}$ olmak üzere,

$$r' = z^2 B^{-p_1} r_0 + 12 v_0 z^2 [B^{-\phi_{2,1}^\ell} (I_1^{(0)} - r_0 I_2^{(0)}) - 6 v_0 (B^{-\phi_{2,2}} + B^{-\phi_{2,2'}} + \frac{2}{3} B^{-\phi_{2,2''}})] . \quad (6.28)$$

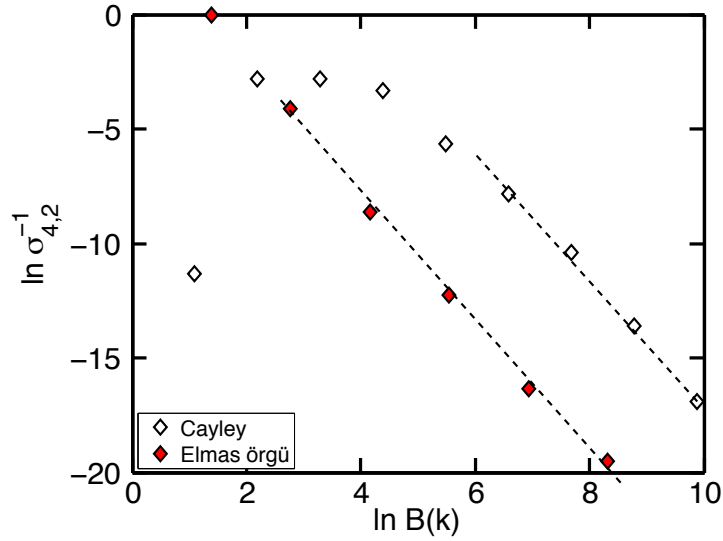
Cayley ağacı ve elmas örgüde, $D_{2,2'}$ ve $D_{2,2''}$ diyagramlarının genlikleri diğer terimlere göre, mertebe olarak yaklaşık 10 kat küçüktür ve $\log B$ gibi gider. Böylece bu diyagramlar ihmal edilebilir. Cayley ağacı için, 6.19'da belirttiğimiz gibi, $D_{2,2''}$ diyagramında, her iki verteks için de, eğer dış bacaklardan biri sabit vektöre eşit ve iç bacaklar için üç eşlenim (kuplaj) özdeş değilse sıfırdan farklı bir katkı gelmez. Böylece ikinci mertebeden etkileşimler için indirgenmiş sıcaklık-tekrarlama bağıntısına katkı, yalnızca $D_{2,2}$ diyagramından gelir. Baskın terimler dikkate alındığında denklem A.25 Cayley ağacı için,

$$r' = B^{p_2} r_0 + 12v_0 z^2 [B^{-\phi_{2,1}^\ell} (I_1^{(0)} - r_0 I_2^{(0)}) - 6v_0 B^{-\phi_{2,2}}] . \quad (6.29)$$

olur. Dördüncü mertebe eşlenim sabiti v_0 için tekrarlama bağıntısı, etkileşimleri ikinci mertebeye kadar aldığımızda en genel haliyle denklem 6.30'da verilmiştir. Ölçeklenme üstelleri $\phi_{4,2}$ ve $\phi_{4,2'}$ sırasıyla $D_{4,2}$ ve $D_{4,2'}$ diyagramlarından elde edilir.

$$v' = v_0 z^4 [B^{-\phi_{4,1}} - 36v_0 (B^{-\phi_{4,2}} + \frac{4}{3} B^{-\phi_{4,2'}})] \quad (6.30)$$

Cayley ağacı ve elmas örgü için, ikinci mertebede $D_{4,2'}$ diyagramına karşı gelen ölçeklenme faktörünün genliği ihmal edilebilir büyüklükte olduğundan bu diyagramdan bir katkı gelmez. Böylece dörtlü-vert ekse katkı yalnızca $D_{4,2}$ diyagramından gelmektedir. Cayley ağacı ve elmas örgüde, $D_{4,2}$ diyagramının ölçeklenme davranışları Şekil (6.4)'de verilmiştir.



Şekil 6.4: Cayley ağacı ve elmas örgülerde renormalizasyon grubu faktörü $\sigma_{4,2}$ 'nin ölçeklenme davranışı. Ölçeklenme üstellerinin hesaplanacağı küçük özdeğer bölgesinde alınan doğrusal fitler kesikli çizgilerle gösterilmiştir. Çift logaritmik eksenle çizdirilen grafikte ölçeklenme üsteli grafiğinin eğiminden, Cayley ağacı için $\phi_{4,2} = 1.11 \pm 0.03$, elmas örgü için $\phi_{4,2} = 1.11 \pm 0.04$ bulunur.

Şimdi dörtlü vert ekse katkı verecek $D_{4,2}$ diyagramı için

$$I_2(B, i, j; r_0) \equiv \sum_{\mu, \mu'=\mu_B+1}^N G(\mu) G(\mu') u_\mu(i) u_\mu(j) u_{\mu'}(i) u_{\mu'}(j) \quad (6.31)$$

ifadesini tanımlayalım. Diyagramdaki her iki alan eşlenimi için bir Green fonksiyonu gelmiştir. İndirgenmiş sıcaklık ise kapalı formda Green fonksiyonu içinde bulunmaktadır. Buradan ψ^4 terimine gelen baskın katkı,

$$H_{4,2}^< = 36v_0^2 \sum_{1,2,3,4}^{\mu_B} \hat{\psi}_1 \hat{\psi}_2 \hat{\psi}_3 \hat{\psi}_4 \sum_{i,j=1}^N I_2(B, i, j; 0) u_1(i) u_2(i) u_3(j) u_4(j) . \quad (6.32)$$

olur. İndirgenmiş sıcaklık için $r_0 = 0$ değeri alınmış ve $I_2(B, i, j; r_0)$ notasyonu yerine $I_2(B, i, j; 0)$ kullanılmıştır. Etkileşim hamiltonyenine ikinci mertebeden katkı verecek olan bu terimi renormalize edebilmek için ölçeklenme faktörünü,

$$\sigma_{4,2}^{-1} \propto \sum_{1,2,3,4}^{\mu_B} \sum_{i,j=1}^N I_2^{(0)}(B, i, j) u_1(i) u_2(i) u_3(j) u_4(j) \sim B^{-\phi_{4,2}} . \quad (6.33)$$

biçiminde tanımlarız. Şimdi etkileşim sabiti v için 6.30’da verdiğimiz genel tekraralama bağıntısında yalnız katkı verecek terimleri alarak yeniden yazalım.

$$v' = v_0 z^4 [B^{-\phi_{4,1}} - 36v_0 B^{-\phi_{4,2}}] , \quad (6.34)$$

Alan ölçeklenme faktörü $z = B^{p_1+p_2}$ ve $\beta = 0$, $p_1 = p_2 = 1$ değerlerini denklem (6.34)’te yerine koyup, tüm nümerik katsayıları ihmal ederek, Cayley ağacı ve elmas örgüde v için tekraralama bağıntısını,

$$v' = v_0 B^{4-\phi_{4,1}} [1 - 36v_0 B^{\phi_{4,1}-\phi_{4,2}}] \quad (6.35)$$

yazabiliriz. Elde ettiğimiz birinci ve ikinci mertebeden etkileşimlerin ölçeklenme üstelleri Çizelge.6.1’de görülmektedir.

Eğer $\sigma_{4,2}^{-1}$ ölçeklenme faktörünün özvektör bağımlılığını gözardı edersek, örgü noktaları üzerinden toplamları alıp, diyagram dış bacakların integrali ve döngü integralinin çarpımı şeklinde yazılabilir. Döngü integralinin ölçeklenme davranışının, denklem (A.35)’den $I_2^{(0)} \sim B$ olduğunu biliyoruz. Bunun yanında ölçeklenme üstellerinin verildiği Çizelge 6.1’den görüldüğü gibi her iki örgü için de $\phi_{4,2} \simeq \phi_{4,1} - 1$ olduğunu söyleyebiliriz. Bu verilerin ışığında ölçeklenme faktörü

$$\sigma_{4,2}^{-1} \sim B^{-\phi_{4,1}} I_2^{(0)} , \quad (6.36)$$

Çizelge 6.1: Cayley ağacı ve elmas örgü üzerinde renormalize edilmiş hamiltonyenin ikinci mertebeye kadar pertürbasyon hesabındaki farklı terimlerin ölçeklenme üstelleri. $D_{2,1}, \dots, D_{4,2}$ diyagramları Şekil 6.1’de gösterilmiş olup, $r_0 = 0$ ’da elde edilmiştir. Sonuçlar en büyük özdeğerin, Ω , ölçeklenmesi yöntemine göre elde edilmiştir.

Ölç. Faktörü	Cayley	Elmas
$\sigma_{2,1} \sim B^{\phi_{2,1}}$	$\phi_{2,1} = 0.80 \pm 0.03$	$\phi_{2,1} = 0.75 \pm 0.02$
$I_1^{(0)}(B)$	$\log B$	$\log B$
$I_2^{(0)}(B) \sim B^{\phi_{I2}}$	$\phi_{I2} = 1.09 \pm 0.04$	$\phi_{I2} = 0.92 \pm 0.03$
$\sigma_{4,1} \sim B^{\phi_{4,1}}$	$\phi_{4,1} = 2.11 \pm 0.03$	$\phi_{4,1} = 1.97 \pm 0.04$
$\sigma_{4,2} \sim B^{\phi_{4,2}}$	$\phi_{4,2} = 1.11 \pm 0.03$	$\phi_{4,2} = 1.11 \pm 0.04$

ve tekrarlama bağıntısı

$$v' = v_0 B^{4-\phi_{4,1}} (1 - 36v_0 I_2^{(0)}) \quad (6.37)$$

biçiminde yazılabilir. Buradan sabit nokta denklemi elde edilir.

$$v^* = \frac{1 - B^{-(4-\phi_{4,1})}}{36I_2^{(0)}}. \quad (6.38)$$

Hem Cayley ağacı hem de elmas örgü için ölçeklenme üsteli $\phi_{4,1}$ bir hata payı ile beraber verilmiş olup denklem (6.38)’de yerine konulduğunda büyük B değerlerinde Gaussiyen sabit noktasını elde ederiz. Diğer taraftan, denklem (6.35)’te verdiğimiz tekrarlama bağıntısını itere ederek bulduğumuz sabit nokta değeri yine Gaussiyen sabit noktası olmuştur.

Cayley ağacının spektral boyutu $\tilde{d} = 2$ ’dir ve Ising simetrisine sahip modeller için alt kritik boyuttur [19]. Bethe örgüsü üzerinde Ising modelinin ortalama alan davranışı gösterdiğini biliyoruz [24, 47]. Aynı zamanda Cayley ağacı, kuşak sayısının $r \rightarrow \infty$ limit değerinde Bethe örgüye eşit olur. Gerçek uzay renormalizasyon grubu (RSRG) [31, 33, 38], elmas örgüde kesin sonuç verdiği gibi [48, 49], ağaç yapısında olan çizgelerde de Bethe-Pierls yaklaşımı kesin sonuç verir [24]. Bu bağlamda, Cayley ağacı için beklediğimiz gibi, Gaussiyen sabit noktasının kararlılığı, pertürbasyon terimi, ψ^4 , eklenmesi ile bozulmamaktadır.

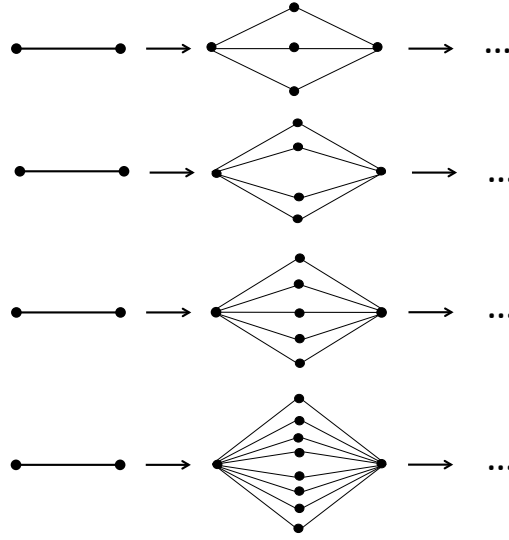
Cayley ağacı ile aynı spektral boyuta sahip olmasına rağmen, elmas örgü üzerinde, Ising modeli, düşük kritik sıcaklıklarda sıfırdan farklı mıknatıslanma ve klasik

olmayan üsteller verir [51]. Biz de, ψ^4 pertürbasyon terimini ekleyerek, elmas örgü üzerinde Ising modelinin göstermiş olduğu anomaliye, Gaussiyen olmayan bir sabit nokta bulamayarak rastladık. Öyle ki, sıfırdan farklı veya hiç değilse bir logaritmik düzeltme ile sıfırdan farklılaşan bir sabit nokta bulabilmek için, denklem (6.35)'de görülen $4 - \phi_{4,1}$ üstelinin küçük bir sabit olması, böylece de bir açılım parametresi olarak kullanılabilmesi ve $I_2^{(0)}$ teriminin B 'ye logaritmik olarak bağlı olması gerekirdi.

Pertürbasyon açılımının doğru sonuç verememesi, Ising modeli için alt kritik boyutun $\tilde{d} = 2$ olmasından kaynaklanabilir ve bu sistemler düşük boyutlarda pertürbasyon açılımına uygun olmayabilir [52,53]. Bu açıdan, bir sonraki bölümde $\tilde{d} = 2$ 'nin üstüne çıkarak, Ising modeli sonuçlarını elde edebileceğimizi göstereceğiz.

7. SPEKTRAL BOYUTU $\tilde{d} > 2$ OLAN ÖRGÜLERDE SRG

Spektral boyutu $\tilde{d} = 2$ olan elmas örgüde, dördüncü mertebeden etkileşim terimlerini dahil ederek v_0 eşlenim sabiti için Gaussiyen olmayan bir sabit nokta elde edemedik. Spektral boyutu alt kritik boyuttan büyük örgülerde Gaussiyen olmayan bir sabit nokta bulup bulamayacağımızı görmek için elmas örgünün genelleştirilmesini [1] kullanarak $\tilde{d} > 2$ için Şekil 7.1’de görülen örgüleri ürettik. İki düğüm noktasını bağlayan bir



Şekil 7.1: Itzykson ve Luck tarzı [1] genelleştirilmiş hiyerarşik örgülerin, $b_s = 2$ için $p = 3, 4, 5$ ve 7 paralel bağlantı sayısına sahip durumlarda gösterimi.

kenar yerine, b_s adımdan oluşan p tane paralel bağlantı ile oluşturulan bu örgülerde, her adımda bu işlem tekrarlanarak hiyerarşik örgü oluşturulur. Hiyerarşik örgünün fraktal boyutu ise,

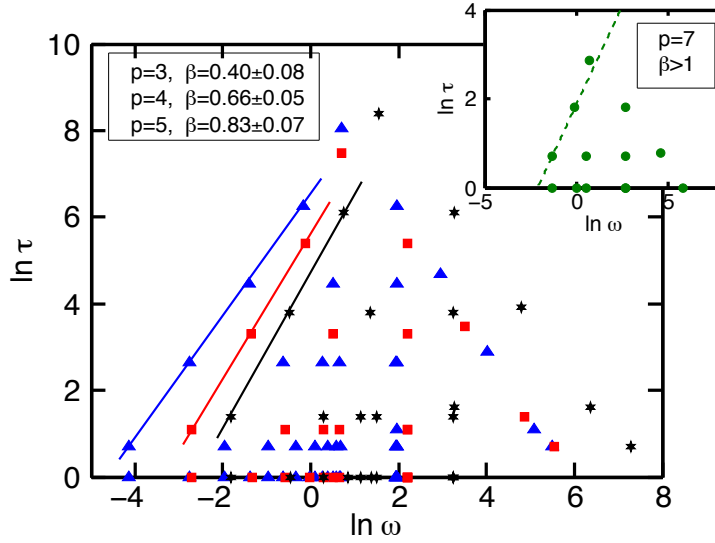
$$d_f = \frac{\ln pb_s}{\ln b_s} \quad (7.1)$$

bağıntısı ile hesaplanır. Elmas örgüde olduğu gibi, bu örgülerde de her bir paralel bağlantı içindeki adım sayısını $b_s = 2$ aldık. Böylece Şekil 7.1’de verili örgüler için, yukarıdan aşağıya doğru fraktal boyut sırasıyla, $d_f = 2.585$, $d_f = 3$, $d_f = 3.32$ ve $d_f = 4$ olur. Farklı p değerlerine sahip olarak ürettiğimiz hiyerarşik örgülerde spektral

dağılım ölçeklenme üsteli β 'yı küçük ω bölgesinden sayısal olarak elde ettik. Böylece β üstelini kullanarak, spektral boyut ve dağılım üsteli β arasındaki

$$\tilde{d} = 2(\beta + 1) . \quad (7.2)$$

bağıntısını [29] kullanarak her bir hiyerarşik örgü için $\tilde{d}$ değerlerini elde ettik. Bu örgülerin spektral dağılım grafikleri Şekil (7.2)'de verilmiş ve her bir farklı p değerine karşı gelen spektral dağılım ölçeklenme üsteli β 'nın sayısal değerleri hata payları ile beraber şekil içinde gösterilmiştir. Paralel bağ sayısı $p = 3, 4, 5, 7$ olan örgüler için sırasıyla, içi dolu mavi üçgenler, kırmızı kareler, siyah yıldızlar ve yeşil daireler kullanılmış olup bu bölümde tüm grafikler aynı biçimde gösterilecektir. Küçük resimde $p = 7$ değerine sahip hiyerarşik örgünün spektral dağılım grafiği ayrı olarak verilmiştir. Paralel bağlantı sayısı p arttıkça, küçük ω değerlerine karşı gelen ölçeklenme bölgesinin içerdiği nokta sayısının azaldığını görürüz.



Şekil 7.2: Farklı fraktal boyuta sahip hiyerarşik örgülerin spektral dağılım grafikleri. Paralel bağ sayısı $p = 3, 4, 5$ olan örgülerin grafikleri sırasıyla içi dolu mavi üçgenler, kırmızı kareler ve siyah yıldızlar ile gösterilmiş olup $p = 4$ ve $p = 5$ grafikleri daha iyi görünürlük açısından sağ tarafa doğru 2şer birim kaydırılarak çizdirilmiştir. Doğrusal fitler ölçeklenme bölgesinde dağılımın zarfından alınmış ve grafikte ait oldukları dağılımın renginde çizdirilmiştir. Küçük resimde gösterilen $p = 7$ için spektral dağılım grafiğinden, üstel $\beta = 1.21 \pm 0.07$ bulunmuştur. Büyük p değerlerine gidildikçe, ölçeklenme bölgesinin daraldığı ve bu bölgedeki doğrusal fit hesabına giren nokta sayısının azaldığı görülür.

Daha önce elmas örgüde ayırık özdeğerlerin $\omega^{(n)} \sim n^s$ kuvvet yasasına uyduğunu ve $s \sim 2$ olduğunu göstermiştik. Burada da $p > 2$ için s kuvvetinin değerini Şekil 7.3'te

ayrık özdeğerleri etiket değerlerine göre çift-logaritmik eksenle çizdirerek elde ettik. Burada da ölçeklenme bölgesinin içerdiği veri sayısı, p büyüdükçe azalmaktadır.

Sayısal olarak elde ettiğimiz ölçeklenme üsteli β , fraktal boyut d_f ve spektral boyut $\tilde{d}$ değerlerini Çizelge.7.1’de verdik.

Çizelge 7.1: İki adımdan oluşan paralel bağ sayısı p ’nin farklı değerleri için sayısal olarak elde edilen genelleştirilmiş elmas örgülerin spektral ölçeklenme üsteli β , fraktal boyut d_f ve spektral boyut $\tilde{d}$ değerleri.

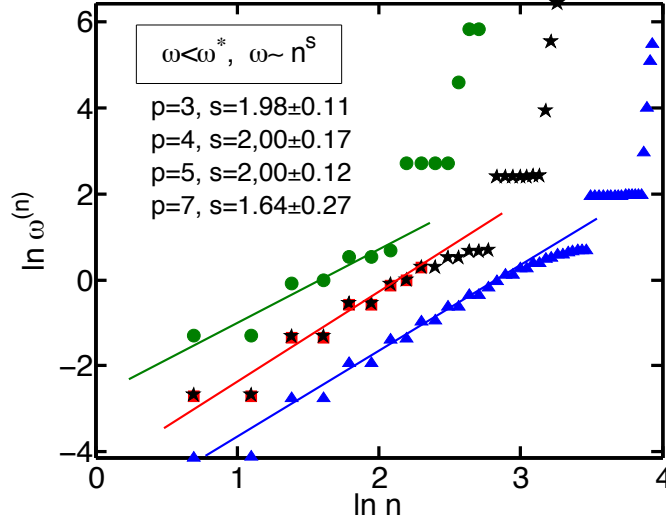
p	2	3	4	5	7
β	0	0.40	0.66	0.83	1.06
$\tilde{d}$	2	2.80	3.32	3.64	4.24
d_f	2	2.58	3	3.33	3.80

Gaussiyen model sabit noktasını hesaplayacağımız ölçeklenme üstellerinin nümerik olarak elde ettiğimiz değerlerini ise Çizelge.7.2’de vereceğiz. Spektral boyut, $p = 7$ paralel bağlantı sayısına sahip hiyerarşik örgüde üst kritik boyuttan büyük olmaktadır. Böylece $p = 7$ için, $\tilde{d} > 4$ değerlerinde Gaussiyen noktasını kaybedip ortalama alan davranışını görüp göremeyeceğimizi araştıracağız. Bunun için en büyük özdeğerin ölçeklenmesi (Bkz. Bölüm 3.1.1.2) yöntemini kullanarak, 2nci mertebeden etkileşimlerin katıldığı pertürbasyon hesabını yapacağız. Eşlenim sabitinin tekrarlama bağıntısına katkı verecek olan $\phi_{4,1}^\Omega$, $\phi_{4,2}^\Omega$, $\phi_{4,2'}^\Omega$ ve $\zeta^\Omega \equiv 4 \ln z / \ln B$ terimlerinin sayısal olarak hesapladığımız ölçeklenme üstellerini, tüm farklı p değerleri için Çizelge.7.3’de verdik. Yalnızca en büyük özdeğerin ölçeklenmesi yöntemi ile elde ettiğimiz sonuçları vereceğimiz bu bölümde, yazım kolaylığı açısından ölçeklenme faktörleri ve üstellerini Ω üst indisini kullanmadan göstereceğiz. Bunun yanında mod sayının ölçeklenmesine dayanan ilgili ölçeklenme üstellerinin sayısal sonuçlarını ise Ek.D’de verdik.

7.1 $\tilde{d} > 2$ için İkinci Mertebeden Pertürbasyon Hesabı

En büyük özdeğerin ölçeklenmesi yöntemini kullandığımızda, ölçeklenme davranışını arayacağımız küçük özdeğer bölgesinde $\omega_2 \leq \Omega/B \leq \omega^*$, $b_s = 2$ olmak üzere $k = 1, 2, \dots$ için B ölçeklenme faktörünü $B(k) = b_s^k$ olarak seçtik. Spektral boyutun $\tilde{d} > 2$ olduğu örgülerde, dörtlü-verteks için tanımladığımız Φ fonksiyonunun davranışını yeterince belirleyemediğimiz için daha önce Cayley ağacı ve elmas örgüde yaptığımız faktörizasyonu burada yapamadık. Ancak, sayısal olarak elde ettiğimiz

Laplasyen özvektörlerini ve özdeğerlerini kullanarak Φ fonksiyonunu sayısal olarak hesaplayabildik.



Şekil 7.3: Ayrık Laplasyen özdeğerlerinin n 'ye göre çift logaritmik eksen çizdirilen grafiği. Paralel bağ sayısı $p = 3, 4, 5, 7$ olan örgüler sırasıyla, içi dolu mavi üçgenler, kırmızı kareler, siyah yıldızlar ve yeşil daireler ile gösterilmiş olup doğrusal fitler ölçeklenme bölgesinde, $\omega < \omega^*$, alınmış ve değerleri grafik içinde verilmiştir.

Pertürbasyon açılımını ikinci mertebeyi de dahil ederek yaptığımızda etkileşim sabiti v için elde ettiğimiz (6.35)'teki iterasyon bağıntısını bir boyutlu bir iteratif map yapısında yazabiliriz.

$$v' = a_1 v (1 - a_2 v) . \quad (7.3)$$

Burada $\zeta = 2(p_1 + p_2)$, $a_1 = B^{\zeta - \phi_{4,1}}$ ve $a_2 = 36 B^{\phi_{4,1}} [B^{-\phi_{4,2}} + \frac{4}{3} B^{-\phi_{4,2'}}]$ olup $p > 2$ için $D_{4,2'}$ diyagramı $\sigma_{4,2'}$ ölçeklenme faktörünün genliği ihmal edilemeyecek büyüklükte olduğundan, iterasyon bağıntısına katkı verir ve ölçeklenme üstelinin, $\phi_{4,2}$ üsteline yakın büyüklükte olduğu görülmüştür.

İterasyon altında v değeri, $v^* \in (0, a_2^{-1})$ aralığında ve $1 < a_1 < 3$ koşulu altında, Gaussiyen olmayan $v^* = (a_1 - 1)(a_1 a_2)^{-1}$ sabit noktasına yakınsar. Elmas örgü ($p = 2$) için, v 'nin iterasyon yörüngesi kaotiktir. Daha ayrıntılı hesap Ek.C'de verilmiştir.

İkinci mertebeden pertürbasyon açılımı altında indirgenmiş sıcaklık r için iterasyon bağıntısı ise Ω -ölçeklenmesi için denklem 6.24'ten hareketle

$$r' = a_r r - c_r \quad (7.4)$$

formunda yeniden yazılabilir. Burada a_r ve c_r katsayıları v^* sabit noktasına bağlı olarak

$$a_r = B^{p_2} - 12v^* B^{\frac{1}{2}} \zeta^{-\phi_{2,1;1}} , \quad (7.5)$$

ve

$$c_r = 12v^* B^{\frac{1}{2}} \zeta [B^{-\phi_{2,1;0}} - 6v^* (B^{-\phi_{2,2}} + B^{-\phi_{2,2'}} + \frac{2}{3} B^{-\phi_{2,2''}})] . \quad (7.6)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada $\phi_{2,1;0}$ ve $\phi_{2,1;1}$ 'i, indirgenmiş sıcaklığa birinci mertebeden katkı veren ölçeklenme terimi $\sigma_{2,1}^{-1}$ 'in r_0 için açılımında, sıfırıncı ve birinci mertebe terimlerinin ölçeklenme üstelleri olarak tanımladık. Farklı p 'ler için sayısal olarak hesapladığımız üstellerin değerlerini Çizelge 7.4'da ve ölçeklenme grafiklerini Şekil ??'te verdik. Bunun yanında, indirgenmiş sıcaklık sabit noktası, r^* , $|a_r| > 1$ için kararlı değildir ve sistemdeki etkileşimlerle beraber kritik sıcaklık artacağından değeri negatiftir.

Lineerleştirilmiş dönüşüm matrisi, indirgenmiş sıcaklık r ve etkileşim sabiti v için,

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial r'}{\partial r} & \frac{\partial r'}{\partial v} \\ \frac{\partial v'}{\partial r} & \frac{\partial v'}{\partial v} \end{pmatrix}_{r^*, v^*} \quad (7.7)$$

bir üst üçgen matristir. Dönüşüm matrisinin $M_{1,1}$ elemanı, $r' = a_r r - c_r$ bağıntısından $\partial r' / \partial r|_{v^*} = a_r$ olur ve eğer a_r ifadesinde baskın olan terimi çekecek olursak, $a_r \sim B^{Y_t}$ biçiminde ölçeklenme sabitinin bir kuvveti olarak yazabiliriz. Bununla beraber serbest enerjinin sıcaklığa göre ikinci türevi özgül ısıyı vereceğinden, $c_h \sim t^{-\alpha}$ kritik üstel bağıntısını kullanarak serbest enerji yoğunluğunu $f \sim t^{2-\alpha}$ yazabiliriz. Ölçeklenmiş serbest enerji yoğunluğu $f' \sim (t')^{2-\alpha}$ ve denklem 3.27'den

$$\begin{aligned} t^{2-\alpha} &= B^{-p_1} t'^{2-\alpha} \\ &= B^{-p_1} (a_r t)^{2-\alpha} \\ &= B^{(2-\alpha)Y_t - p_1} t^{2-\alpha} \end{aligned} \quad (7.8)$$

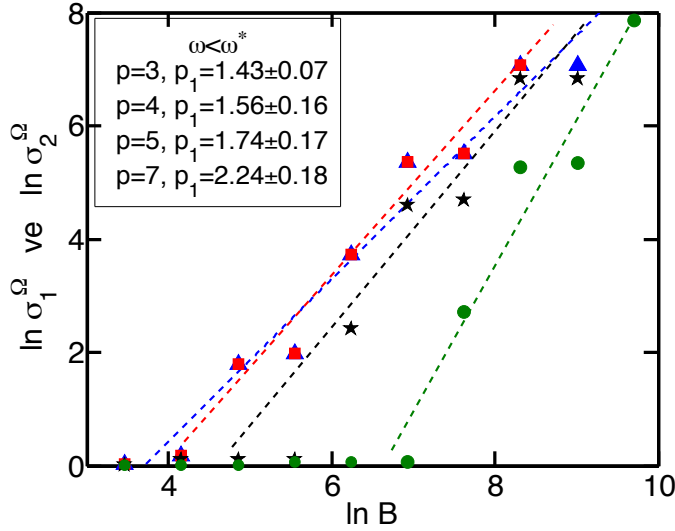
bulunur. Böylece B 'nin üstelini sıfıra eşitleyerek $(2 - \alpha)Y_t - p_1 = 0$ ifadesinden α 'yı çekip özgül ısı kritik üstelini, Y_t kuvvetine ve ölçeklenme üsteli p_1 'e bağlı olarak denklem 7.9'daki gibi elde ederiz.

Daha önce en büyük özdeğerin ölçeklenmesi yöntemi ile elde ettiğimiz ölçeklenme üsteli p_2 , tanım gereği $p_2 = 1$ 'dir.

$$\alpha = 2 - \frac{p_1}{Y_t}, \quad (7.9)$$

Sayısal olarak yaptığımız hesapta, $v^* \neq 0$ sabit noktasını veren tüm p durumlarında, a_r 'nin ikinci teriminin üstelini $(\frac{1}{2}\zeta - \phi_{2,1;1}) > p_2$ bulduk. Böylece $v^* \neq 0$ için baskın olan terimin üstelini $Y_t = \frac{1}{2}\zeta - \phi_{2,1;1}$ olarak elde ettik.

Farklı p değerleri için sayısal olarak hesapladığımız ölçeklenme üstelleri ve σ_1 ölçeklenme faktörünün davranışı Şekil 7.4'te verildiği gibidir. Her iki ölçeklenme yöntemi ile elde edilen σ_1 ve σ_2 'nin ölçeklenme üstelleri Çizelge 7.2'de verilmiştir.



Şekil 7.4: Paralel bağ sayısı $p = 3, 4, 5, 7$ ve spektral boyutu $\tilde{d} > 2$ olan hiyerarşik örgülerde σ_1 ve σ_2 'nin ölçeklenme davranışı. Mavi üçgenler $p = 3$, kırmızı kareler $p = 4$, siyah yıldızlar $p = 5$ ve yeşil daireler $p = 7$ paralel bağ sayısına sahip örgüleri temsil etmektedir.

Çizelge 7.2: Farklı p değerleri için elde edilen hiyerarşik örgülerin spektral ölçeklenme üsteli β , σ_1 ve σ_2 için her iki ölçeklenme yönteminden elde edilen üsteller p_i ve ϕ_i , $i = 1, 2$.

p	2	3	4	5	7
β	0	0.40 ± 0.03	0.66 ± 0.03	0.83 ± 0.07	1.21 ± 0.07
p_1	0.97 ± 0.04	1.43 ± 0.07	1.56 ± 0.16	1.74 ± 0.17	2.24 ± 0.18
p_2	1.06 ± 0.02	1.06 ± 0.06	1.16 ± 0.13	1.02 ± 0.08	1.04 ± 0.09
ϕ_1	1.00 ± 0.00	1.01 ± 0.01	1.01 ± 0.01	1.03 ± 0.09	0.98 ± 0.02
ϕ_2	1.01 ± 0.03	0.75 ± 0.05	0.67 ± 0.05	0.56 ± 0.08	0.48 ± 0.03

Ising modeli davranışı için üst kritik boyutun üstünde, spektral boyutu $\tilde{d} > 4$ ve paralel bağ sayısı $p = 7$ olan hiyerarşik örgüde, beklediğimiz gibi $v^* = 0$ sabit noktasını elde ettik. Yalnızca Gaussiyen terimin hayatta kaldığı bu durum için $a_r = B^{p_2}$, $c_r = 0$ ve $Y_t = 1$ olup özgül ısı kritik üsteli β 'ya bağlı olarak $\alpha = 2 - p_1 = 2 - (1 + \beta)$ bağıntısından elde edilir. Spektral dağılım üsteli, $p = 7$ olan hiyerarşik örgü için, $\beta > 1$ olduğundan özgül ısının

$$c_h \sim \int_0^\Omega \frac{d\omega \omega^\beta}{(r_0 + \omega)^2} \quad (7.10)$$

ifadesi için $(1/r_0)^2$ terimi integralin dışına alınırsa,

$$c_h \sim \frac{1}{r_0^2} \int_0^\Omega \frac{d\omega \omega^\beta}{(1 + \frac{\omega}{r_0})^2} \quad (7.11)$$

şimdi değişken değişikliği yapar ve $\omega = r_0 \omega'$ dersek,

$$c_h \sim r_0^{\beta-1} \int_0^{\Omega/r_0} \frac{d\omega' (\omega')^\beta}{(1 + \omega')^2} \quad (7.12)$$

olur. Entegralin, alt ve üst limitlerde, yaklaşık olarak ölçeklenme davranışını hesaplırsak, üst limitte paydadaki "1" ve alt limitte paydadaki ω' ihmal edileceğine göre,

$$c_h \sim r_0^{\beta-1} [(\omega')^{\beta-1}|_{\Omega/r_0} - (\omega')^{\beta+1}|_0] \quad (7.13)$$

olur. Şimdi $\beta > 1$ olduğu vakit,

$$c_h \sim r_0^{\beta-1} [(\Omega/r_0)^{\beta-1} - 0] \quad (7.14)$$

buluruz. Sadeleştirdiğimizde $c_h \sim \Omega^{\beta-1} \sim \text{sabit}$ bulunacağından, ısı sığasının üsteli de $\alpha = 0$ olur. (Burada ikinci terim daha kesinlikle hesaplanabilir, ancak her halükarda, r_0 sıfıra giderken pozitif bir kuvvetle gidiyor olup, ıraksak olmayan bu terimi sıfırlayacaktır.)

Öte yandan, $\beta < 1$ ise daha dikkatli olmak zorundayız. Kritik davranışın ancak TD limitte ortaya çıkacağını düşünürsek, ilk önce Ω sonsuza götürülmeli, daha sonra $r_0 \rightarrow 0$ için davranışa bakılmalıdır. Eğer $\beta < 1$ ise, limitleri bu sıra ile aldığımızda, 7.14 denkleminde kare parantez içindeki birinci terim sıfıra gider. O halde ikinci terime bakmak gerekir ve entegral daha dikkatli yapıldığında, o terimin r_0 'dan bağımsız bir sabit olduğunu görürüz. Böylece $c_h \sim r_0^{-\alpha}$ bağıntısından, $\alpha = 1 - \beta$ elde ederiz.

Alan renormalizasyon faktörü z ise ikinci mertebeden pertürbasyon açılımı için farklı p değerlerinde değişmediğinden, dış manyetik alan h 'nın ölçeklenmesi için de bir değişiklik söz konusu değildir. Manyetik alan kritik üsteli yine denklem 3.22'deki gibi β cinsinden $\delta = (2 + \beta)/\beta$ olur. Farklı p değerleri için hesapladığımız α ve δ kritik üstellerini Çizelge 7.4'te verdik.

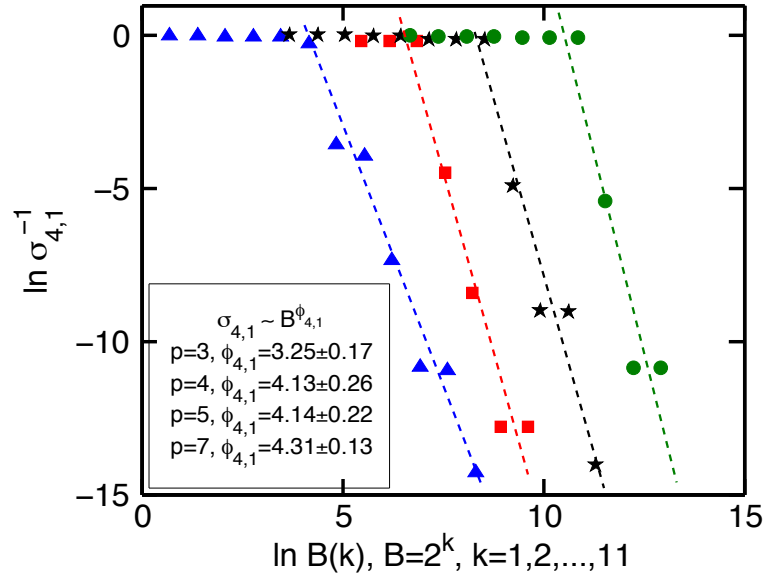
7.1.1 $\tilde{d} > 2$ için birinci ve ikinci mertebeden etkileşim terimlerinin ölçeklenme diyagramları

İkinci mertebeden terimleri dahil ederek yaptığımız pertürbasyon açılımından, Feynman diyagramları ile ifade ettiğimiz etkileşim terimlerinin ölçeklenme davranışlarını sayısal olarak elde ettik. Her bir diyagram için en büyük özdeğerin ölçeklenmesi yöntemi ile elde ettiğimiz ölçeklenme davranışlarını, dört farklı spektral boyut için grafikler üzerinde gösterdik. Daha önce belirttiğimiz gibi ölçeklenme grafiklerinin tümünde, mavi üçgenler $p = 3$, kırmızı kareler $p = 4$, siyah yıldızlar $p = 5$ ve yeşil daireler $p = 7$ durumunu göstermektedir. Grafiklerin üst üste gelmemesi için bazılarını eksenlerde kaydırarak çizdirdik ve öteleme bilgisini şekil altlarında belirttik. Ölçeklenme katsayılarının, B ölçeklenme faktörüne göre çift logaritmik eksenle çizdirilmesiyle, küçük özdeğer bölgesinde gözlediğimiz kuvvet yasası davranışlarından, ölçeklenme üstellerini elde ettik. Grafiklerin eğimini hesapladığımız bölgede, ölçeklenme eğrileri ile aynı renkte kesikli çizgiler kullandık. Ölçeklenme bölgesi $B(k) = 2^k$ için, k 'nın küçük özdeğer bölgesine karşı gelecek değerleri alınarak belirlenmiştir.

Etkileşim sabiti v 'nin tekrarlama bağıntısına katkı verecek birinci ve ikinci mertebeden terimlerin ölçeklenme üstellerini Çizelge 7.3'te, indirgenmiş sıcaklık tekrarlama bağıntısına katkı verecek birinci ve ikinci mertebeden terimlerin ölçeklenme üstellerini ise Çizelge 7.4'te verdik.

İlk olarak v 'nin ölçeklenmesine birinci merteben katkı veren $D_{4,1}$ diyagramının etkileşim terimi için elde edilen ölçeklenme davranışını Şekil 7.5'te verdik. İkinci mertebeden pertürbasyon terimlerinin, $D_{4,2}$ ve $D'_{4,2}$, ölçeklenme davranışları ise Şekil 7.6'da beraber verdik.

Daha önce denklem 7.3'te bir boyutlu map olarak tanımladığımız etkileşim sabitinin tekrarlama bağıntısında, $\phi_{4,1}, \phi_{4,2}$ ve $\phi_{4,2'}$ üstellerini yerine koyarak, v için sabit

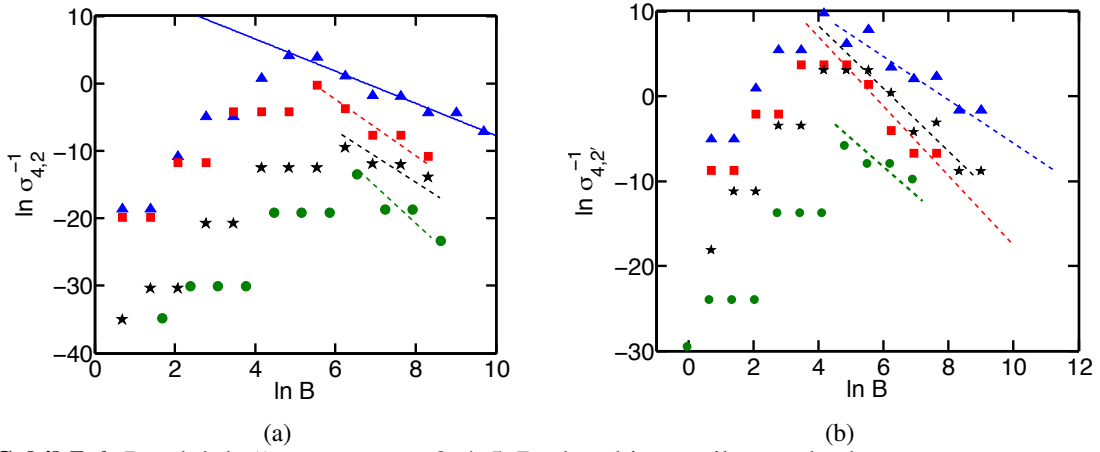


Şekil 7.5: Ölçeklenme sabiti $\sigma_{4,1}^{-1}$ 'in ölçeklenme davranışı. Kırmızı karelerle gösterilen $p = 4$ dağılımı 1-birim, siyah yıldızlarla gösterilen $p = 5$ dağılımı 3-birim ve yeşil daireler ile gösterilen $p = 7$ dağılımı 6-birim (+y) doğrultusunda ötelenerek çizdirilmiştir.

nokta değerlerini hesapladık. Burada $p = 2$ için (spektral boyutun $\tilde{d} = 2$ olduğu durumda) v 'nin maksimum değerinin $1/a_2$ 'den büyük olduğu durumda v 'nin iterasyon yörüngesinin kaotik olduğunu ve sonsuza gittiğini gördük. Spektral boyutun $2 < \tilde{d} < 4$ olduğu durumlarda Gaussiyen olmayan $v^* \neq 0$ kararlı sabit nokta değerlerini elde ettik. Aynı zamanda denklem 7.3'teki a_1 ve ζ değerlerini her p için hesaplayarak paralel bağ sayısı $p = 7$ ve spektral boyutu $\tilde{d} = 4.12 > 4$ olan örgüde $a_1 = 3.5 > 3$ olduğunu bulduk ve sıfırdan farklı sabit noktanın bu durum için kararlılığını kaybettiğini gördük.

Diğer taraftan indirgenmiş sıcaklık için verdiğimiz tekraralama bağıntısında, $\sigma_{2,1}$ 'in r_0 üzerinden açılımı altında, sıfıncı ve birinci mertebeden terimleri, $\sigma_{2,1;0}$ ve $\sigma_{2,1;1}$ için ölçeklenme davranışları sırasıyla Şekil ??(a) ve (b)'de gösterildiği gibidir.

İndirgenmiş sıcaklığa ikinci mertebeden katkı veren $\sigma_{2,2}^{-1}$, $\sigma_{2,2'}^{-1}$ ve $\sigma_{2,2''}^{-1}$ terimlerinin sayısal olarak hesapladığımız değerlerini ölçeklenme faktörü B 'ye göre çift logaritmik eksenle çizdirip, küçük özdeğer bölgesinde kuvvet yasası yaklaşımı ile ölçeklenme üstellerini elde ederek birinci mertebeden terimlerin üstelleri ile beraber Çizelge.7.4'te verdik. Ölçeklenme grafikleri sırasıyla Şekil 7.9, 7.10 ve Şekil 7.11'de görülmektedir. Böylece elde ettiğimiz tüm ölçeklenme üstellerini ve v^* değerlerini denklem 6.24'te yerine koyarak r^* sabit noktasını her bir p için hesapladık.

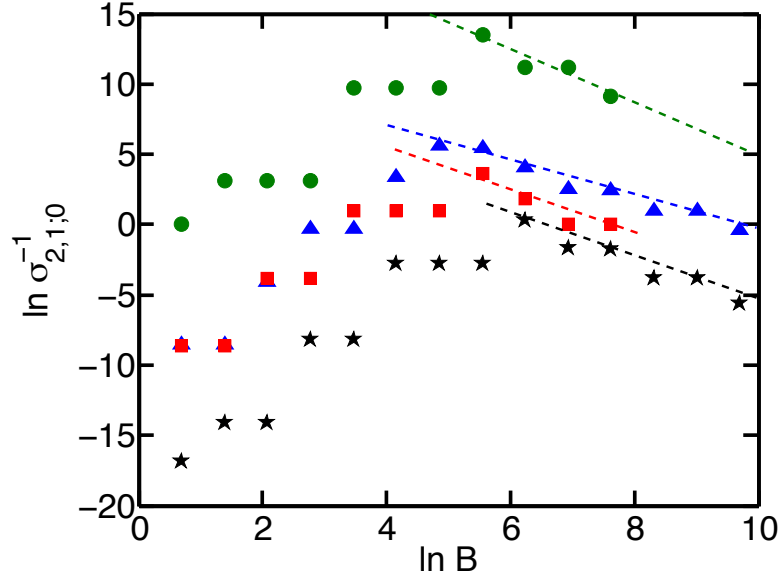


Şekil 7.6: Paralel bağ sayısı $p = 3, 4, 5, 7$ olan hiyerarşik örgülerde $\sigma_{4,2}$ ve $\sigma_{4,2'}$ için ölçeklenme davranışları. (a) $\sigma_{4,2}^{-1}$, kırmızı karelerle gösterilen $p = 4$ dağılımı 3-birim, siyah yıldızlarla gösterilen $p = 5$ dağılımı 9-birim ($-y$)-doğrultusunda ve yeşil daireler ile gösterilen $p = 7$ dağılımı ise 1-birim ($+x$) doğrultusunda, 15-birim ($-y$) doğrultusunda ötelenerek, (b) $\sigma_{4,2'}^{-1}$, kırmızı karelerle gösterilen $p = 4$ dağılımı 2-birim, siyah yıldızlarla gösterilen $p = 5$ dağılımı 9-birim ($-y$) doğrultusunda, yeşil daireler ile gösterilen $p = 7$ dağılımı ise 0.75-birim ($-x$) doğrultusunda ve 25-birim ($-y$) doğrultusunda ötelenerek çizdirilmiştir.

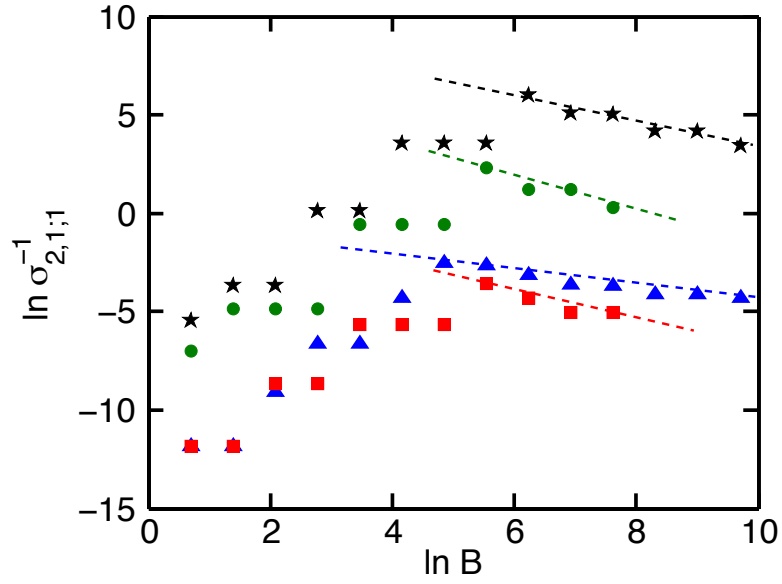
Çizelge 7.3: Daha yüksek spektral boyut değerlerinde; genelleştirilmiş elmas örgü (Şekil 7.1). Spektral yoğunluk üsteli β , spektral boyut $\tilde{d}$, alan renormalizasyon faktörünün üstelleri z^4 ve 4ncü mertebeden etkileşim terimlerine karşı gelen Feynman diyagramları için, a_1^Ω ve kararlı sabit nokta v^* farklı $p \leq 7$ değerleri için elde edilmiştir. Spektral boyut, $p \geq 7$ için $\tilde{d} > 4$ tür.

p	β	$\tilde{d}$	ζ^Ω	$\phi_{4,1}^\Omega$	$\phi_{4,2}^\Omega$	$\phi_{4,2'}^\Omega$	a_1^Ω	v^*
2	0	2	4	1.99	1.11	1.425	4	0
3	0.40	2.80	4.80	3.25	2.34	2.24	2.93	0.0040
4	0.66	3.32	5.32	4.13	3.75	3.89	2.28	0.0054
5	0.83	3.46	5.66	4.14	3.31	3.54	2.87	0.0048
7	1.06	4.12	6.12	4.31	4.25	5.75	3.5	0

Elde ettiğimiz sayısal sonuçlar doğrultusunda Gaussiyen model için kritik üstellerin yalnızca kızıl ötesi bölgede hesapladığımız spektral yoğunluk ölçeklenme üsteli β 'ya bağlı olduğunu gördük. Gaussiyen model sabit noktası, Ising evrensellik sınıfı için alt kritik değer olan $\tilde{d} = 2$ için karardır ve değeri sıfırdır. Elmas örgüde ikinci mertebeden pertürbasyon terimlerini dahil ederek yaptığımız hesap sonucunda Gaussiyen haricinde kararlı bir sabit nokta bulunamamasının, örgünün öteleme simetrisi veya birtakım başka özelliklerine bağlı değil, sistemin boyutunun alt kritik boyuta eşit olmasına bağlı olduğunu gördük. Wilson ve Kogut [19] da iki boyutta (öklidyen) aşkar

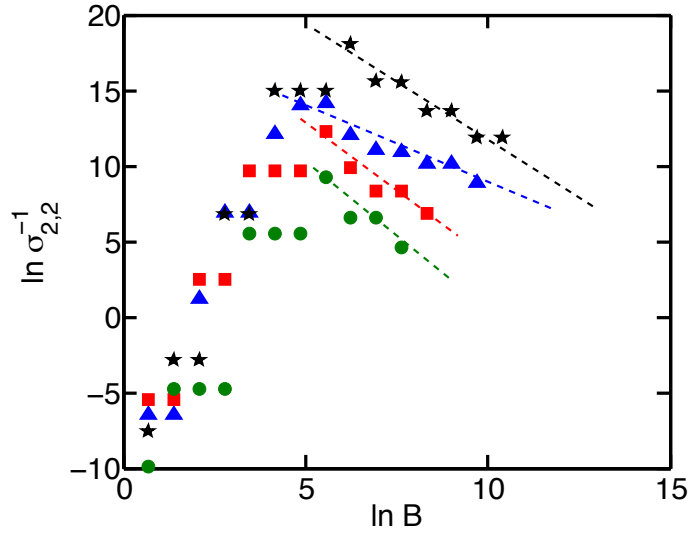


Şekil 7.7: Paralel bağ sayısı $p = 3, 4, 5, 7$ olan hiyerarşik örgülerde $\sigma_{2,1;0}$ ve $\sigma_{2,1;1}$ için ölçeklenme davranışları. Grafik $\sigma_{2,1;0}$, $(-y)$ -doğrultusunda $p = 4$ için 1 birim, $p = 5$ için 5 birim ötelenerek çizdirilmiştir.

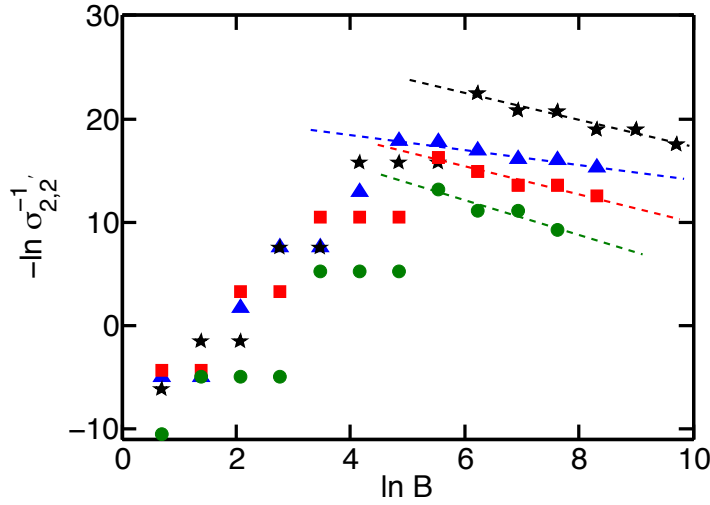


Şekil 7.8: Paralel bağ sayısı $p = 3, 4, 5, 7$ olan hiyerarşik örgülerde $\sigma_{2,1;0}$ ve $\sigma_{2,1;1}$ için ölçeklenme davranışları. Grafik $\sigma_{2,1;0}$, $(-y)$ -doğrultusunda $p = 4$ için 1 birim, $p = 5$ için 1 birim, $p = 7$ için 4 birim ötelenerek çizdirilmiştir.

olmayan (Gaussiyen model sabit noktası haricinde) bir sabit nokta bulmanın zorluğuna dikkati çekip, sabit noktanın tekrarlama bağıntısının başlangıç değerine kuvvetle bağlı olduğunu söylemektedir. Literatürde pek çok yazar [52,53] benzer biçimde pertürbatif



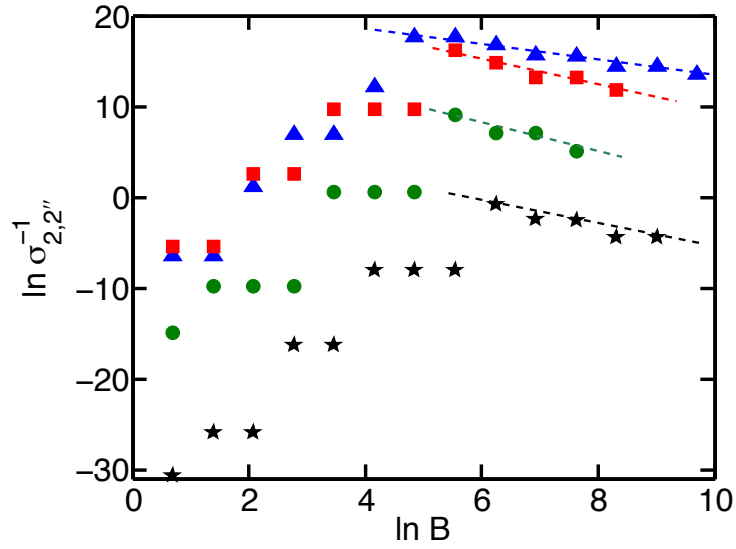
Şekil 7.9: Ölçeklenme sabiti $\sigma_{2,2}^{-1}$ 'nin ölçeklenme davranışı. Ölçeklenme üstelleri, $p = 3$ için $\phi_{2,2} = 1.06 \pm 0.08$, $p = 4$ için $\phi_{2,2} = 1.91 \pm 0.26$, $p = 5$ için $\phi_{2,2} = 1.69 \pm 0.13$ ve $p = 7$ için $\phi_{2,2} = 2.03 \pm 0.25$. Yeşil renkle gösterilen $p = 4$ dağılımı $(-y)$ -doğrultusunda 5-birim ötelenerek çizdirilmiştir.



Şekil 7.10: Ölçeklenme sabiti $\sigma_{2,2'}^{-1}$ 'nin ölçeklenme davranışı. Ölçeklenme üstelleri, $p = 3$ için $\phi_{2,2'} = 0.73 \pm 0.13$, $p = 4$ için $\phi_{2,2'} = 1.37 \pm 0.21$, $p = 5$ için $\phi_{2,2'} = 1.31 \pm 0.11$ ve $p = 7$ için $\phi_{2,2'} = 1.71 \pm 0.23$. Yeşil renkle gösterilen $p = 4$ dağılımı $(-y)$ -doğrultusunda 6-birim ötelenerek çizdirilmiştir.

yaklaşımın iki boyutta yeterli olmayabileceğini ve pertürbatif olmayan bir yaklaşımın gerekliliğini tartışmıştır.

Öyle ki daha büyük fraktal boyutlara ve dolayısıyla daha büyük spektral boyutlara ulaşmak için p parametresini değiştirerek genelleştirilmiş elmas örgü [1] yapılarını



Şekil 7.11: Ölçeklenme sabiti $\sigma_{2,2''}^{-1}$ 'nin ölçeklenme davranışı. Ölçeklenme üstelleri, $p = 3$ için $\phi_{2,2''} = 0.90 \pm 0.06$, $p = 4$ için $\phi_{2,2''} = 1.49 \pm 0.09$, $p = 5$ için $\phi_{2,2''} = 1.34 \pm 0.16$ ve $p = 7$ için $\phi_{2,2''} = 1.76 \pm 0.23$. Yeşil renkle gösterilen $p = 4$ dağılımı $(-y)$ -doğrultusunda 10-birim ötelenerek çizdirilmiştir.

kullanarak spektral boyutu $2 < \tilde{d} < 4$ aralığında olan örgülerde Gaussiyen olmayan bir sabit nokta elde edebildik. İkinci mertebeye kadar pertürbasyon açılımındaki tüm farklı diyagramlar için özdeğerleri ve özgül ısı kritik üsteli α' 'yı hesaplayabildik. Spektral boyut $\tilde{d} > 4$ için ise Gaussiyen sabit noktasına geri döndük.

7.1.2 $\tilde{d} > 2$ için mod sayısı ölçeklenmesi

Itzykson-Luck hiyerarşik genelleştirilmiş elmas örgüleri üzerinde Bölüm 3.1.1.1'deki açıkladığımız kip sayısı (V) ölçeklenmesi yapıldığında, 7.1.1 bölümünde Ω ölçeklenmesi ile elde edilenden farklı üsteller elde edilmektedir (Bkz. Ek.D, Çizelge A.2). Bu fark, ancak fraktal boyutla spektral boyutun, birbirinden farklı olduğu, $d_f \neq \tilde{d}$, durumda ortaya çıkmaktadır. Dikkat edilecek olursa bu çizgelerin fraktal boyutunun tanımında dikkate alınan ölçeklenme faktörü b_s (Bkz. Denklem 7.1) iterasyon biriminin iki uçtaki düğüm noktası arasında minimum kaç bağ olduğuna eşittir ve uzaysal olmayan çizgeler için oldukça keyfi bir uzamsal ölçüdür. Halbuki, spektral boyut herhangi metrik özellikten bağımsız olarak tanımlanmakta ve doğru üstelleri vermektedir.

Çizelge 7.4: Daha yüksek spektral boyutlar: kuadratik terimler için üsteller veözümler ısı kritik üsteli α .

p	$\phi_{2,1;0}^{\Omega}$	$\phi_{2,1;1}^{\Omega}$	$\phi_{2,2}^{\Omega}$	$\phi_{2,2'}^{\Omega}$	$\phi_{2,2''}^{\Omega}$	r^*	Y_l	α	δ
2	0.83 ± 0.06	0.14 ± 0.04	0.02 ± 0.08	-0.04 ± 0.03	0.10 ± 0.03	0	1	1	∞
3	1.27 ± 0.08	0.77 ± 0.07	1.06 ± 0.08	0.73 ± 0.13	0.90 ± 0.06	-0.113096	1.63	1.12	6
4	1.82 ± 0.24	1.49 ± 0.22	1.91 ± 0.26	1.37 ± 0.21	1.49 ± 0.09	-0.06192	1.17	0.67	4.03
5	1.58 ± 0.12	1.36 ± 0.12	1.69 ± 0.13	1.31 ± 0.11	1.34 ± 0.16	-0.1490197	1.47	0.82	3.41
7	1.91 ± 0.24	1.78 ± 0.23	2.03 ± 0.25	1.71 ± 0.23	1.76 ± 0.23	0	1	0	3

8. RASTGELE ÇİZGELER

Gilbert model olarak da bilinen ilk rastgele çizge modeli, 1950'lerin başlarında yayımlandı [11, 12]. N tane yalıtılmış düğüm noktasının aralarına rastgele biçimde bağlantılar atılmasıyla elde edilen bu rastgele çizge, sabit bir bağlanma olasılığına tabi olup, herhangi iki i ve j düğüm noktasının aralarında bağ (kenar) olma olasılığı p , bağ olmama olasılığı $(1 - p)$ olacak şekilde seçilerek oluşturulur. Komşuluk matrisi A simetrik olup matris elemanları,

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & p \text{ olasılığı ile} \\ 0, & 1 - p \text{ olasılığı ile} \end{cases} \quad (8.1)$$

şeklinde tanımlanır. Bağlanma olasılığı küçük bir değerden başlatılıp giderek büyütülürse, $p \rightarrow 1$ için çizge *rastgelelikten tam bağlı* duruma doğru evrilir. N tane düğüm noktası olan ve p bağlanma olasılığına sahip bir rastgele çizge için toplam kenar sayısı n , bir rastgele değişken olup beklenen değeri aşağıdaki gibidir.

$$\langle n \rangle = p \frac{N(N-1)}{2} . \quad (8.2)$$

Aynı zamanda ortalama derece, Gilbert klasik rastgele çizgesinde $N \gg 1$ için,

$$\langle k \rangle = 2\langle n \rangle / N = p(N-1) \simeq pN \quad (8.3)$$

olur [54]. Bunun yanında 1950'lerin sonlarında rastgele çizgeler, Paul Erdős ve Alfréd Rényi tarafından başka bir şekilde tanımlanmıştır [2, 10]. Buna göre, verili N sayıda düğüm noktası ve m sayıda kenar için, rastgele çizgenin olası tüm durumları eşit olasılıklıdır. Ortalama derece, Erdős-Rényi (ER) çizgesinde,

$$\langle k \rangle = 2m/N \quad (8.4)$$

olur. Burada istatistiksel fizik açısından, Gilbert ve ER Rastgele çizgeleri için sırasıyla büyük kanonik ve kanonik topluluk oldukları söylenebilir [55]. İlk durumda, kimyasal potansiyele karşı gelen bağlanma olasılığı p sabittir ve büyük kanonik topluluğun farklı üyeleri için kenar sayısı değişir. İkinci durumda ise kenar sayısı m sabit ve bütün kanonik topluluk üyeleri için eşittir. Burada m kenar sayısı düğüm noktası sayısından

bağımsız bir sabit ise, $\lim_{N \rightarrow \infty} \langle k \rangle = 2m/N = 0$ olacak ve N 'nin büyümesi ile çizge *seyrek* (sparse) olacaktır. Gilbert modelinde verili bir ortalama derece $\langle k \rangle = pN$ olduğuna göre, N 'nin büyümesi ile ortalama derece büyür, $\lim_{N \rightarrow \infty} \langle k \rangle = \infty$, [55].

Her iki model için de, verili bir çizge büyüklüğü N için tek bir serbest parametre söz konusudur. Gilbert çizgeleri için bu parametre bağlanma olasılığı, p , ER çizgeleri için ise toplam kenar sayısı, m 'dir. Düğüm noktası sayısı N olan bir Gilbert çizgesinde, p bağlanma olasılığı ve k herhangi bir düğüm noktasının derecesi olmak üzere, derece dağılımı,

$$P(k) = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-k} . \quad (8.5)$$

binom dağılımı ile ifade edilir. Binom dağılımı, $N \gg 1$ ve $p \ll 1$ limitinde Poisson dağılımına yaklaşır ve $pN \ll 1$ parametresine bağlı bir Poisson dağılımı kullanılabilir.

$$P(k) = \frac{e^{-pN} (pN)^k}{k!} . \quad (8.6)$$

Gilbert çizgesinde, $\langle k \rangle = pN$ olduğundan, derece dağılımı bu parametre tarafından belirlenen

$$P(k) = \frac{e^{-\langle k \rangle} \langle k \rangle^k}{k!} \quad (8.7)$$

Poisson dağılımına tabii olur. ER çizgesinde ise, ancak $2m/N$ (ya da m/N) sabit tutulduğunda N 'nin sonsuza gittiği limitte, olası $N(N-1)/2$ düğüm noktası çiftinden herhangi birine bir kenar rastlama olasılığı,

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ (m/N \text{ sabit})}} \frac{m}{N(N-1)/2} = p \quad (8.8)$$

olur. Buradan bağlanma olasılığı $p = \frac{2m}{N^2} \ll 1$ ve $\langle k \rangle = pN = \frac{2m}{N}$ olur. Şimdi bu olasılık ile $N \rightarrow \infty$ limitinde, denklem 8.5'deki binom dağılımı ifadesi ve oradan da 8.6'deki gibi aynı Poisson dağılımı elde edilir.

Gilbert rastgele çizgesinde, bağlanma olasılığını N ile bölmek ya da sabit bir $\langle k \rangle$ için $p \equiv \langle k \rangle / N$ olarak seçmek, ortalama derecenin ve böylece bu çizge üzerinde tanımlanacak bir istatistiksel fizik modelinde gözlenecek hal değişimindeki kritik sıcaklığın ıraksamamasını sağlamaktadır.

Literatürden bilindiği üzere, genelde sonlu birinci ve ikinci momente sahip derece dağılımları için, Ising modeli kritik sıcaklığı, tavllanmış (annealed) yaklaşımda,

$$k_B T_c = \frac{2J}{\ln \left[\frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle^2 - 2\langle k \rangle} \right]} \quad (8.9)$$

olarak verilir [54–56]. Bir Poisson dağılımı için $\langle k^2 \rangle = \langle k \rangle + \langle k \rangle^2$ olacağından, denklem 8.9 yeniden yazılırsa iyi bir yaklaşıklıkla,

$$k_B T_c = \frac{J \langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} = J[1 + \langle k \rangle] \quad (8.10)$$

yani, $k_B T_c = J(1 + pN)$ olur. Buradan görüldüğü üzere, termodinamik limitte $T_c < \infty$ olması, ya $J' = J/N$ şeklinde düğüm sayısı ile azalan bir etkileşim tanımlamak ile, ya da, $p \propto 1/N$ almak, böylece ortalama derece $\langle k \rangle$ TD limitte sonlu kalırsa sağlanabilir.

Dikkat edilirse, ER çizgesi için m sabit tutularak, $N \rightarrow \infty$ limiti alındığında, (yani m/N sabit alınmadığında) $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{m}{N(N-1)^2} \rightarrow p$, böylece $\langle k \rangle = pN = \frac{2m}{N-1} \rightarrow 0$ olacağından, ER çizgesi üzerinde kritik sıcaklık $T_c < \infty$ olacaktır.

8.1 Gilbert Çizgeleri

Sabit bağlanma olasılığına sahip Gilbert çizgeleri bir anlamda patolojiktirler - zira çizgedeki düğüm noktası sayısı, N , büyüdükçe, ortalama derece N ile ıraksamaktadır. Bunun sonucu olarak da, kritik sıcaklık sonsuza gitmektedir. Bağlanma olasılığı $p = 1$ olan bir *tam çizge* (complete graph) üzerinde Ising modeli (sonsuz erişimli Ising modeli) için Hamitonyen, $s_i = \pm 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -J \left[\sum_{(i,j)} s_i s_j \right] = \frac{J}{2} \left[\sum_{i,j(i \neq j)} s_i s_j - \sum_{i,(i=j)} s_i^2 \right] = -\frac{J}{2} \left[\sum_{i,j} s_i s_j - N \right] \\ &= -\frac{J}{2} \left(\sum_i s_i \right)^2 + \frac{JN}{2} . \end{aligned} \quad (8.11)$$

ile verilir. Bölüşüm fonksiyonu,

$$Z = \sum_{\{s_i\}} e^{\frac{\beta' J}{2} [(\sum_i s_i)^2 - N]} \quad (8.12)$$

olur. Buradan $s^2 \equiv (\sum_i^N s_i)^2$, $a \equiv \beta' J$, $J \equiv \tilde{J}/N$ ve $\beta' \equiv (k_B T)^{-1}$ olmak üzere Hubbard-Stratonovitch dönüşümü (Gauss dönüşümü)

$$e^{\frac{1}{2} a s^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{e^{ys - y^2/2a}}{\sqrt{2\pi a}} \quad (8.13)$$

ile Boltzmann faktöründe spinler lineer hale getirilerek bölüşüm fonksiyonunun hesabı bir eğer noktası hesabına indirgenir ve bölüşüm fonksiyonu,

$$Z = e^{-\beta' JN/2} \sum_{\{s_i\}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{e^{-\frac{y^2}{2\beta' J} + y(\sum_i s_i)}}{\sqrt{2\pi\beta' J}} = \frac{e^{-\beta' JN/2}}{\sqrt{2\pi\beta' J}} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2/(2\beta' J) + N \ln \cosh y}$$

olur. Burada $\frac{e^{-\beta' JN/2}}{\sqrt{2\pi\beta' J}}$ bir sabit olmak üzere kısaca bölüşüm fonksiyonu

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2/(2\beta' J) + N \ln \cosh y} \quad (8.14)$$

ve serbest enerji $f = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln Z$,

$$f = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left[\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2/(2\beta' J) + N \ln \cosh y} \right] \quad (8.15)$$

olup eğer noktası yaklaştırımının

$$f \sim \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln [e^{-Nf(y^*)}] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln [e^{-N \min[f(y)]}] \quad (8.16)$$

Boltzmann sabiti k_B ve sıcaklık T olmak üzere mıknatıslanma $M = \langle s \rangle$ için verdiği denklem,

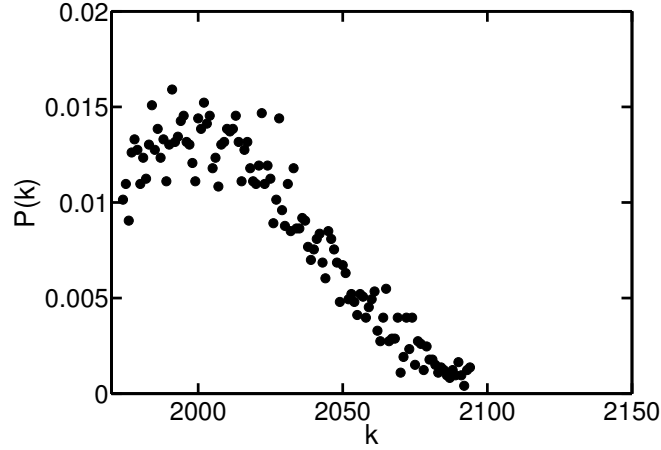
$$M = \tanh(NJ(k_B T)^{-1} M) \quad (8.17)$$

olur ve bu denklemin gerçel bir çözümü olabilmesi için sıcak $T > T_c$ olmalıdır. Etkileşim katsayısı J , çizge büyüklüğü N ile azalmadığı takdirde $T_c = NJ/k_B$ sonsuza gider. Termodinamik limitte - yani bir hal değişiminin mümkün olduğu limitte, belli ki bu kritik sıcaklık ıraksayacaktır. Kritik sıcaklığın sonlu kalabilmesi için etkileşim sabitini $1/N$ 'ye orantılı seçmek yeterli olacak ve böylece T_c sonlu kalacağı gibi, spin başına serbest enerji de ıraksamaktan kurtulacaktır. Böylece modelin çözümü standart Ortalama Alan Teorisi ile örtüşecek, düzen parametresi kritik üsteli $\tilde{\beta} = 1/2$, kritik izoterm üzerinde mıknatıslanma kritik üsteli $\delta = 3$ ve duygunluk kritik üsteli $\tilde{\gamma} = 1$ olacaktır.

Bu en basit tam çizge üzerindeki Ising modelinde, denklem 8.17'da görüldüğü gibi, mıknatıslanmayı $T - T_c$ cinsinden elde edebilmek için 8.17'un sağ tarafını seriye açmak, N 'yi sonsuza götürmemiz gerektiğinden dolayı mümkün değildir. Başka bir deyişle, tüm sonlu sıcaklıklar için, J sıfırdan farklı olduğu anda tanjant hiperbolik fonksiyonunun argümanı sonsuz olacak ve dolayısıyla $M = 1$ sabit değeri bulunacaktır. Şimdi kritik sıcaklığın sonsuzda olduğunu kabul ederek, düzen parametresi üsteli $\tilde{\beta}$ 'yi $M \sim (T)^{-\tilde{\beta}}$ mıknatıslanma ifadesindeki gibi tanımlarsak, T sonsuza giderken M 'nin nasıl sıfıra gideceğini betimleriz. Yukarıda ifade ettiğimiz gibi, tüm sonlu sıcaklıklar için M bir sabite eşit ve bu patolojik model için özgül ısı kritik üstelini $\tilde{\beta} = 0$ olarak buluruz.

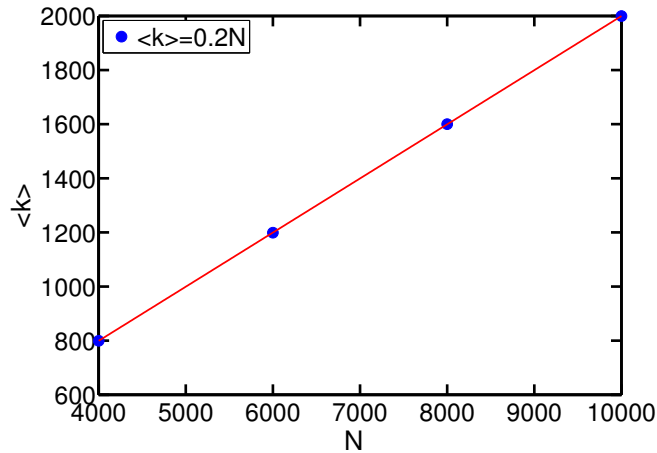
8.1.1 Gilbert çizgeleri sayısal sonuçları

Bizim hesaplamalarımızda kullandığımız çizgeler, bağlanma olasılığı $p = 0.2$ olan ve her i düğümünün p sabit olasılığı ile bir j düğüme bağlı olduğu çizgelerdir. Sayısal olarak ürettiğimiz bu çizgeler için derece dağılımı garfiğini Şekil 8.1’de verdik. Daha önce derece dağılımının Gilbert çizgelerinde Poisson dağılımına yakınsadığı, bizim sayısal olarak ürettiğimiz çizgeden de görülmektedir.



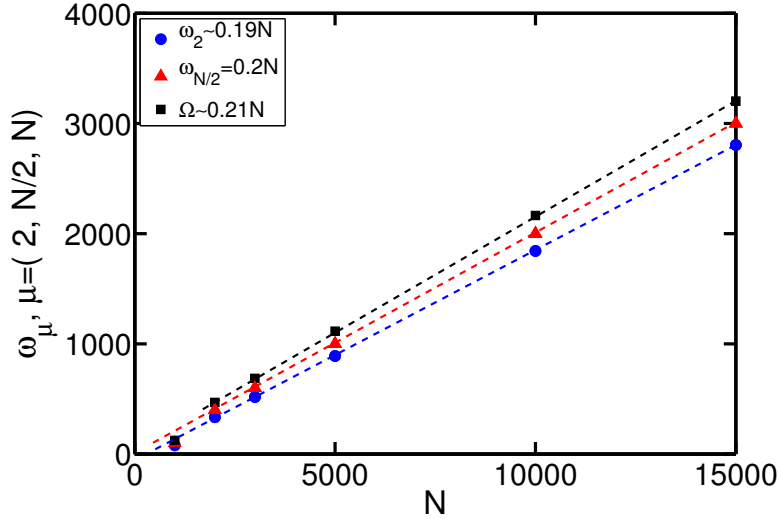
Şekil 8.1: Sabit bağlanma olasılığı $p = 0.2$ ve düğüm noktası sayısı $N = 10000$ olan Gilbert rastgele çizgesinde derece dağılımı grafiği.

Bunun yanında, bağlanma olasılığı sabit $p = 0.2$ değerine sahip Gilbert çizgesinin, ortalama derece, $\langle k \rangle$, değerinin çizge büyüklüğüne göre değişimini Şekil 8.2’da verdik. Çizge büyüdükçe, $p = 0.2$ sabit bağlanma olasılığında, ortalama derecenin, $\langle k \rangle = 0.2N$ biçiminde ıraksadığı görülmektedir.



Şekil 8.2: Sabit bağlanma olasılığı $p = 0.2$ olan Gilbert rastgele çizgesinde 20 gerçekleştirim üzerinden alınan ortalama derece, $\langle k \rangle$,’nın N ile değişimi grafiği.

Sabit $p = 0.2$ bağlanma olasılığına sahip, farklı büyüklükteki Gilbert çizgelerinin 20'şer gerçekleştirmeleri üzerinden alınan ortalama özdeğerlerinin, ω_μ , $\mu = 2, N/2, N$ için N ile değişimlerine baktık. Sıfırdan farklı en küçük özdeğer, ω_2 , dağılımın orta noktasına denk gelen özdeğer, $\omega_{\mu=N/2}$, ve en büyük özdeğer, Ω 'nın çizge büyüklüğüne göre değişimini veren grafiği Şekil 8.3'de verdik ve grafikten de açıkça görüldüğü gibi, özdeğerlerin çizge büyüklüğüne doğru orantılı olduğunu gördük.

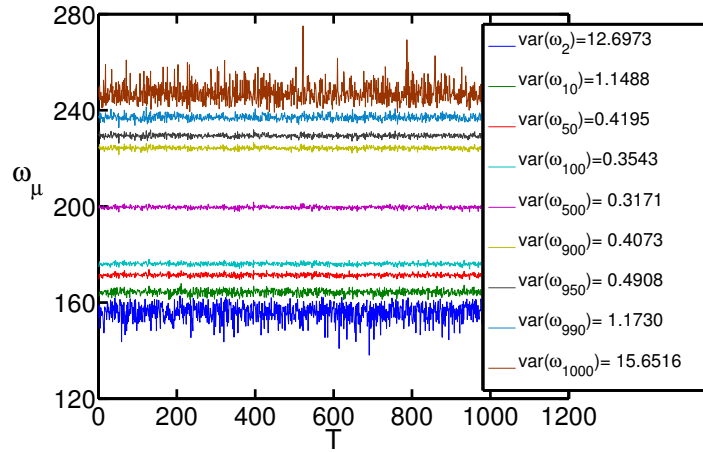


Şekil 8.3: Sıfırdan farklı en küçük değer ω_2 , $N/2$ nci en küçük özdeğer $\omega_{N/2}$ ve en büyük özdeğer $\Omega \equiv \omega_N$ 'nin çizge büyüklüğü N ile değişimi grafiği.

Burada tüm özdeğerlerin N ile aynı biçimde büyümesi, spektral dağılımın da N ile sağa kayması anlamına gelmektedir. En büyük özdeğer ile sıfırdan farklı en küçük özdeğerin oranının çizge büyüklüğü ile sabit kalması bize ölçeklenme faktörleri σ_1 ve σ_2 'yi en büyük özdeğerin ölçeklenmesi (Bkz. Bölüm 3.1.1.2) yöntemine göre hesaplarken B ölçeklenme faktörünü belirlemede ip uçları vermektedir. Öyle ki, $\Omega/\omega_2 \sim 2$ oranı B 'nin tamsayı olarak seçilmesi durumunda, σ_1 ve σ_2 için ölçeklenme bölgesinde en fazla iki nokta elde edebileceğimizi söyler. Bunu, daha sonra ölçeklenme faktörlerinin elde edilmesinde tartışacağız.

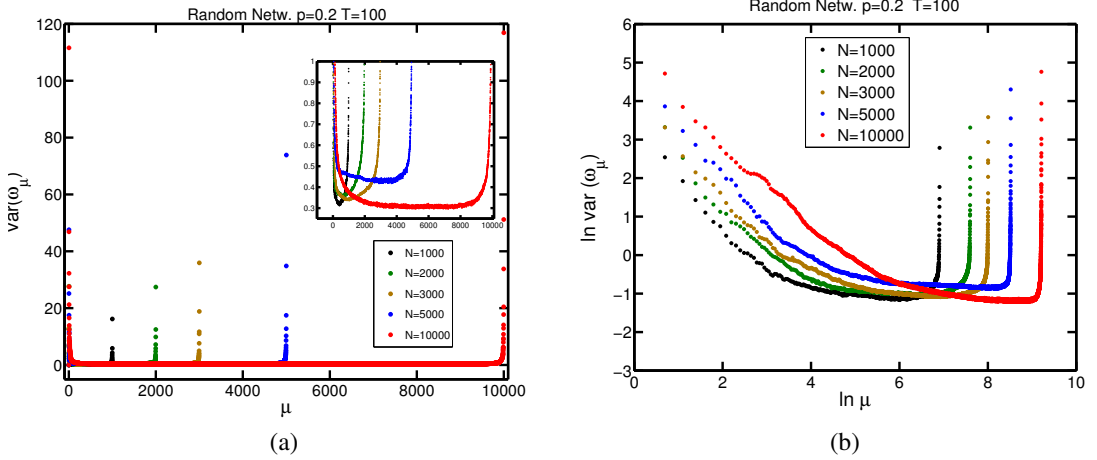
Özdeğerlerin farklı gerçekleştirmelerdeki dalgalanmalarını gösteren Şekil 8.4'deki grafikte, dağılımın uçlarına doğru gidildikçe varyansın arttığı görüyoruz.

Laplasyen özdeğerlerinin varyanslarını, 100 farklı gerçekleştirim için, özdeğerleri etiket değerine göre doğrusal ve çift logaritmik eksenlerde çizdirerek, sırasıyla Şekil 8.5(a)'da ve (b)'de verdik. Küçük resimde, varyans değerinin 0 ile 1 arasında olduğu bölge yakın gösterilmiştir. Buna göre küçük özdeğer bölgesine karşı gelen



Şekil 8.4: Bağlanma olasılığı $p = 0.2$ olan ve $N = 1000$ düğüm noktasına sahip Gilbert rastgele çizgesinde, farklı gerçekleştirmelerde özdeğerlerin dalgalanması. Gerçekleşim sayısı $T = 1000$ olup özdeğerlerin bu gerçekleştirmeler üzerinden hesaplanan varyans değerleri şekil içinde verilmiştir.

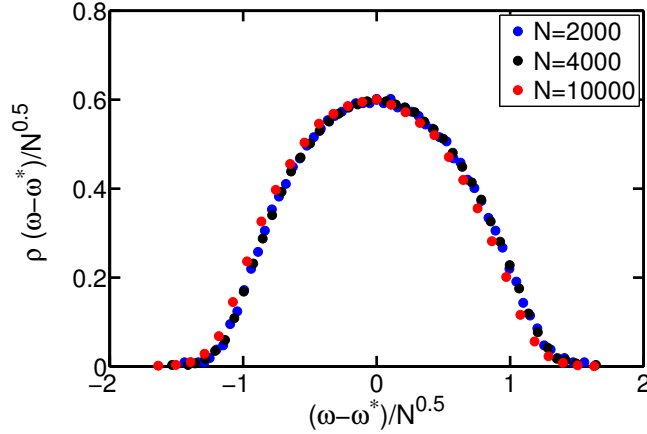
μ değerlerinin küçük olduğu bölgede bir kuvvet yasası davranışı, $var(\omega) \sim \mu^{-u}$, ve buradaki kuvvetin çizge büyüklüğünden bağımsız olarak $u \sim 1$ olduğunu gördük.



Şekil 8.5: Bağlanma olasılığı $p = 0.2$ olan, farklı büyüklüklerdeki Gilbert rastgele çizgelerinde (a) sıralı Laplasyen özdeğerlerinin herbiri için 100 gerçekleştirmedeki varyans değerlerinin etiket μ 'ya göre lineer grafiği. Küçük resimde, lineer grafik $0 \leq var(\omega_\mu) \leq 1$ değer aralığında gösterilmiştir. (b) Laplace özdeğerlerinin varyanslarının 100 farklı gerçekleştirm için, çift-logaritmik eksenle çizdirilen grafiği. Küçük özdeğerler için bir kuvvet yasası, $var(\omega_\mu) \sim \mu^{-1}$, görülmektedir.

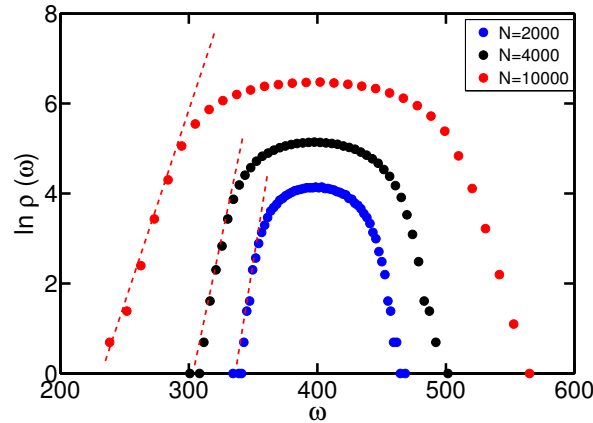
Düğüm noktası sayısı $N = 2000, 4000, 10000$ ve sabit bağlanma olasılığı $p = 0.2$ olan Gilbert rastgele çizgelerinin her birini 100 gerçekleştirmede sayısal olarak üretip, gerçekleştirmeler üzerinden aldığımız ortalama özdeğerler ile spektral yoğunluğu hesapladık. Laplace özdeğerlerinin lineer eksenlerde çizdirdiğimiz spektral dağılımını

Şekil 8.6’de verdik. Farklı çizge büyüklüklerine ait spektral dağılımları üst üste getirebilmek için $\rho(\omega)$ ’yı çizge büyüklüğünün karekökü ile ölçekledik. Tepe noktası da N ile aynı biçimde büyüdüğü için, her iki eksenin de $N^{0.5}$ ile ölçeklenmesi sonucu spektral dağılımlar üst üste çizdirilebilmiştir. Spektral dağılım üsteli β ’yı



Şekil 8.6: Gilbert rastgele çizgelerinde, spektral dağılım için $\rho(\omega)$ ’nın $(\omega - \omega^*)$ ile değişimi, x-ekseni $N^{0.5}$ ile ölçeklenerek dağılımların tepe noktaları hizalanmıştır. Küçük resimde her iki eksen de $N^{0.5}$ ile ölçeklenerek dağılımların üstüste geldiği gösterilmiştir.

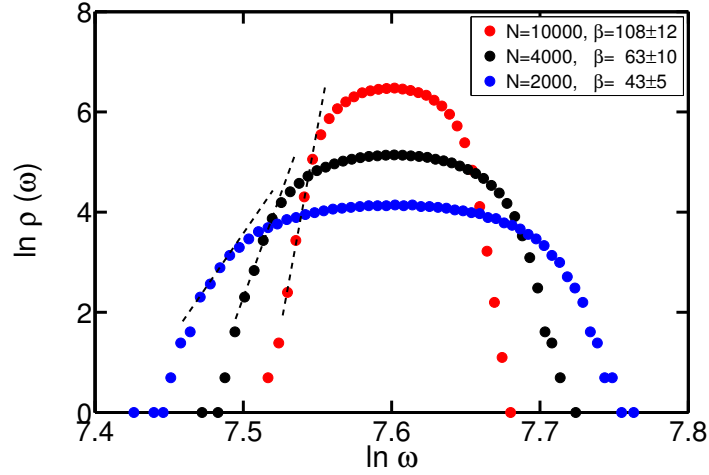
belirleyebilmek için, spektral dağılımları farklı büyüklükteki Gilbert çizgeleri için yarı logaritmik ve çift logaritmik eksenlerde ölçeksiz çizdirerek sırasıyla Şekil 8.7 ve Şekil 8.8’de gösterdik. Çift logaritmik ekseninde çizdirdiğimiz Şekil 8.8’deki grafikte,



Şekil 8.7: Farklı büyüklükteki Gilbert rastgele çizgelerinde yarı logaritmik eksen ve ölçekli çizdirilen spektral dağılım grafiği. Spektral dağılım eksponansiyel davranış gösterir ve üsteli $\beta \rightarrow \infty$ ’dur. Dağılımları üstüste düşürebilmek için, $N = 4000$ ’de; 400 birim, $N = 10000$ ’de, 1600 birim dağılımlar sola kaydırılmıştır.

küçük özdeğer bölgesinin, kuvvet yasası yaklaşımı yaptığımızda, β değerlerinin çizge

büyüklüğü ile artması, $N \rightarrow \infty$ limiti için $\beta \rightarrow \infty$ olacağını düşündürür. Bunu daha iyi anlamak için, dağılım grafiğini yarı logaritmik eksenle çizdirdik. Böylece spektral yoğunluğun, küçük özdeğer bölgesinde $\rho(\omega) \exp(\omega)$ biçiminde arttığını ve buradan, N sonsuza giderken, $\beta \rightarrow \infty$ olduğunu gördük.



Şekil 8.8: Bağlanma olasılığı $p = 0.2$ olan farklı büyüklüklerdeki Gilbert çizgeleri için çift logaritmik eksenle ve ölçeşiz çizdirilen spektral dağılım grafiği. Grafikte $N = 2000$ ve $N = 4000$ dağılımları tepe noktaları $N = 10000$ ile aynı noktaya gelecek biçimde sağa kaydırılmıştır. Her bir çizge büyüklüğü için, 20 gerçekleştirim üzerinden ortalama olarak elde ettiğimiz özdeğer seti kullanılmıştır. Küçük özdeğer bölgesinde, kuvvet yasası yaklaşımı uygulandığında N ile artan β değerleri resim içinde verilmiştir.

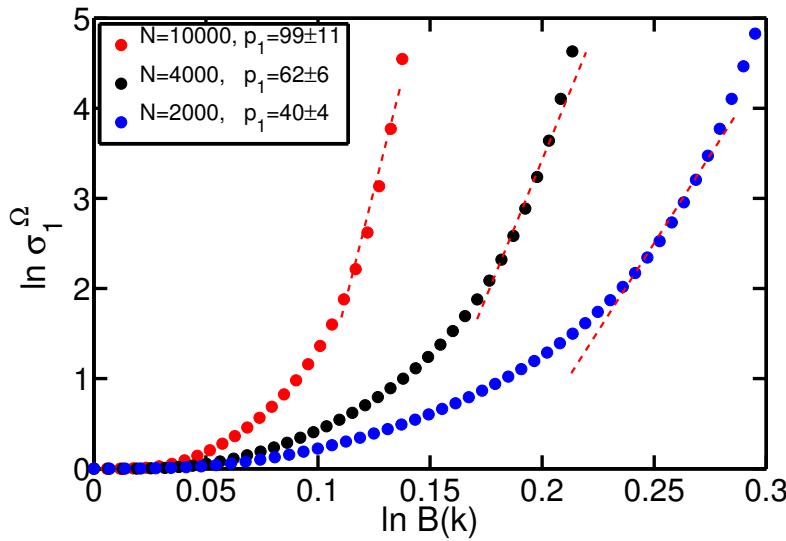
8.1.1.1 Gilbert çizgelerinde kritik davranış

Spektral dağılım üstelinin $\beta \gg 1$ olmasından dolayı, Gilbert çizgeleri için kritik davranışı ortalama alan türü bekleriz. Bunun yanında çizge büyüklüğü arttıkça $N \rightarrow \infty$ limitinde, sabit bağlanma olasılığı için, çizgenin ortalama derecesi $\langle k \rangle \rightarrow \infty$ olacak ancak çizge hala bir “tam çizge” olmayacaktır. Ayrıca termodinamik limitte spektral dağılım eksponansiyel davrandığından $\tilde{d} \rightarrow \infty$ ve kritik davranış ortalama alan türüdür.

En büyük özdeğerin ölçeklenmesi yöntemi ile elde ettiğimiz ölçeklenme katsayıları, σ_1 ve σ_2 ’nin davranışlarına bakacak olursak, buradan da ortalama alan türü kritik davranışı elde ettiğimizi görürüz. Öyle ki, Şekil 8.9’de σ_1 ’in ölçeklenme davranışını çift logaritmik eksenle çizdirerek verdik ve buradan elde ettiğimiz p_1 ’in değerlerinden de göreceğimiz gibi, $N \rightarrow \infty$ limitinde $p_1 \rightarrow \infty$ olmaktadır. Ölçeklenme sabitinin, $\sigma_1 \sim \exp(B)$ olması, daha önce bulduğumuz $\beta \sim \infty$ sonucu ile de uyumludur.

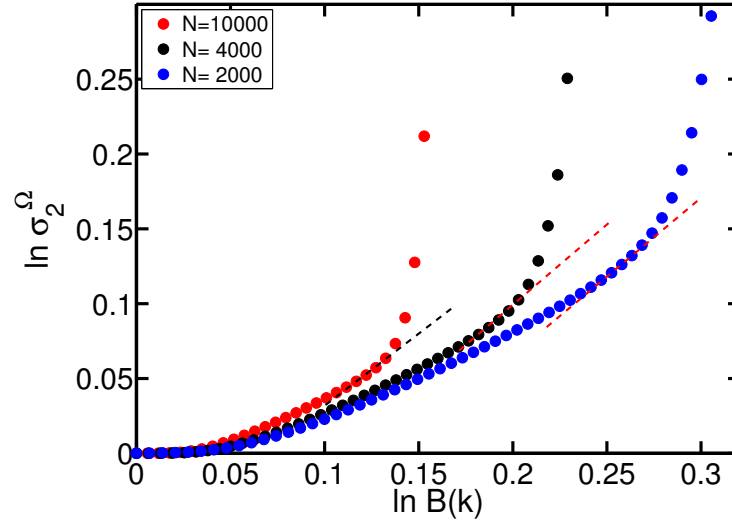
B'nin belirlenmesi

Her iki ölçeklenme katsayısının hesaplanmasında, B ölçekleme faktörünü belirlemek için, her örgü büyüklüğünde 20 gerçekleştirim üzerinden ortalama olarak elde ettiğimiz özdeğer setini kullandık. Gilbert çizgesinde, en büyük özdeğer ile sıfırdan farklı en küçük özdeğerin oranı yaklaşık $\Omega/\omega_2 \sim 2$ olup bu oran N ile neredeyse değişmediğinden dolayı, ölçeklenme faktörü B 'yi tam sayı alamayız. Bunun için ölçekleme katsayılarını hesaplarken, spektrumu 200 eşit parçaya ayırıp binledik. Böylece, binleme aralığı, her örgü büyüklüğü için $d_{bin} = (\Omega - \omega_2)/200$ olup, $N = 2000$ 'de $d_{bin} = 0.67$, $N = 4000$ 'de $d_{bin} = 1$ ve $N = 10000$ 'de $d_{bin} = 1.65$ 'dir. Böylece ölçeklenme faktörünü, farklı N ve d_{bin} değerleri için, $B = 1, 1 + d_{bin}, 1 + 2d_{bin}, \dots, \Omega/\omega_2$ seçtik. Düğüm noktası arttıkça, d_{bin} binleme aralığının artması, binleme sonucu elde ettiğimiz nokta sayısını bir miktar azaltmaktadır. Ancak ölçeklenme üsteli p_1 'in değerini (hata aralığı içinde) değiştirmez.



Şekil 8.9: Düğüm noktası sayısı $N = 2000, 4000, 10000$ ve sabit bağlanma olasılığı $p = 0.2$ olan Gilbert rastgele çizgesinde en büyük özdeğerin ölçeklenmesi yöntemi ile sayısal olarak hesaplanan ölçeklenme katsayısı, σ_1 'in davranışı. Ölçeklenme bölgesinde, $\sigma_1 \sim B^{p_1}$ kuvvet yasası yaklaşımı ile elde edilen p_1 değerleri resim içinde verilmiştir. Ancak, davranış eksponansiyeldir, $\sigma_1 \sim \exp(B)$. Bu da daha önce belirttiğimiz $\beta \sim \infty$ sonucu ile uyumludur. Ölçeklenme bölgesine, en küçük özdeğerleri, varyansları çok büyük olduğu için dahil etmedik.

Her iki ölçeklenme katsayısı için de ölçeklenme bölgesine, en küçük özdeğerler dahil edilmemiştir. Bunun nedeni, Şekil 8.5 ve 8.4'de gösterdiğimiz gibi, özdeğerlerin varyansları, spektrumun iki ucunda oldukça yüksek olmasıdır.



Şekil 8.10: Düğüm noktası sayısı $N = 2000, 4000, 10000$ için farklı büyüklüklerde ve sabit bağlanma olasılığı $p = 0.2$ olan Gilbert rastgele çizgesinde en büyük özdeğerin ölçeklenmesi yöntemi ile hesaplanan ölçeklenme katsayısı σ_2 'nin davranışı. Ölçeklenme bölgelerinde kesikli çizgilerle gösterilen eğimlerden σ_2 'nin ölçeklenme üsteli $p_2 \sim 1$ 'dir.

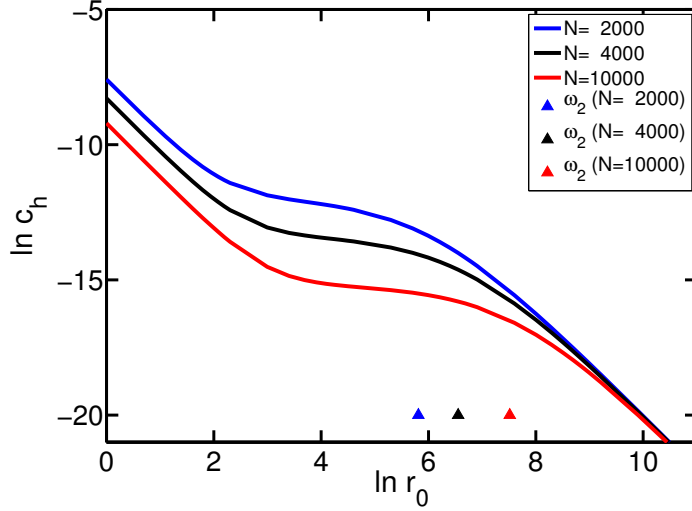
8.1.1.2 Isı sıçması üstelinin kesin hesabı

Daha önce yaptığımız biçimde, burada da özgül ısıyı Laplasyen özdeğerleri üzerinden alacağımız bir tam toplam ile hesapladık. Bağlanma olasılığını $p = 0.2$ alıp sayısal olarak ürettiğimiz farklı örgü büyüklüklerindeki Gilbert rastgele çizgeleri için, özgül ısıyı, indirgenmiş sıcaklık r_0 'a göre çift logaritmik eksenle çizdirerek Şekil 8.11'de verdik. Yine, grafik içinde her çizge büyüklüğü için sıfırdan farklı en küçük özdeğer değerlerini küçük üçgenler şeklinde gösterdik.

Spektral dağılım üsteli β 'nin kritik değerden çok daha büyük olması, $\beta \gg \beta_c = 1$, özgül ısının ultraviyole limitinde tekillik gösterir ve özgül ısı kritik üsteli α doğrudan 0 olur. Bir başka açıdan, daha önce belirttiğimiz gibi, Gilbert çizgesinin $N \rightarrow \infty$ limitinde, $\langle k \rangle \rightarrow \infty$ olması sebebiyle de kritik davranış ortalama alan türü ve özgül ısı kritik üsteli $\alpha = 0$ olacaktır. Özgül ısı için verdiğimiz tam toplam grafiğinde, Şekil 8.11, çizge büyüklüğü arttıkça, $r_0 < \omega_2$ olan en yakın bölgenin eğiminin sıfıra yaklaştığı görülür.

Gilbert çizgelerinde spektral dağılımın kuvvet yasası davranışı göstermemesinden dolayı daha önce elde ettiğimiz indirgenmiş sıcaklık ve etkileşim katsayısının tekraralama

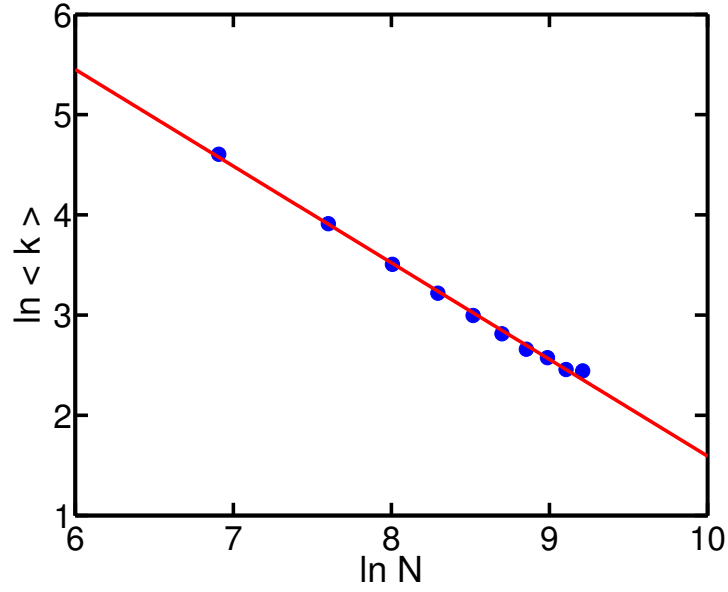
bağıntılarını nasıl kullanacağımız burada net değildir. Bu bağlamda etkileşim terimi (v) ve indirgenmiş sıcaklık (r_0) tekrarlama bağıntılarında kullanacağımız ölçeklenme faktörlerini sayısal olarak hesaplamadık.



Şekil 8.11: Farklı büyüklükteki Gilbert rastgele çizgelerinde özgül ısı tam toplam grafiği. Her çizge büyüklüğü için özdeğerler, 20 ayrı gerçeğin ortalamasından elde edilmiştir. Farklı çizge büyüklükleri farklı renklerde gösterilmiş olup, aynı renkteki küçük üçgenler o çizge büyüklüğü için sıfırdan farklı en küçük Laplace özdeğerinin ortalama değerini gösterir.

8.2 ER Rastgele Çizgesi

Sayısal olarak ürettiğimiz ER çizgelerinde ortalama derecenin çizge büyüklüğüne göre değişimini Şekil 8.12’de verdik. Her bir farklı çizge büyüklüğü için 20 ayrı gerçeğin sayısal olarak ürettiğimiz ER çizgelerinde toplam kenar sayısını $m = 50000$ aldık. Böylece denklem 8.4’ten $N = 1000$ için ortalama derece $\langle k \rangle = 100$; $N = 10000$ için $\langle k \rangle = 10$ olur. Gilbert çizgelerinden farklı olarak ortalama derecenin çizge büyüdükçe iraksamadığını görürüz. Köşegen elemanları sıfır olan, elemanları bağımsız ve aynı bağlanma olasılığına tabii (i.i.d.) rastgele matrislerin (komşuluk matrisleri $\mathbf{A}$ ’nın) özdeğerlerinin, çizge büyüklüğünün $N \rightarrow \infty$ limitinde, *yarım daire dağılımı* (semi-circle law) olarak da bilinen bir $\rho(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ dağılımına tabi olduğu bilinir [57–61]. Çizge Laplasyeninin özdeğer dağılımı ise, Bryc ve eşyazarları [62] ve Olver ve eşyazarları [63] tarafından genelleştirilmiş olasılık teorisi sayesinde kapalı bir ifade ile verilmektedir. Bu konu, tezimde incelenmeyecektir. Farklı çizge büyüklükleri için, Laplace özdeğerlerinin spektral dağılımının maksimum noktası ω^* ,

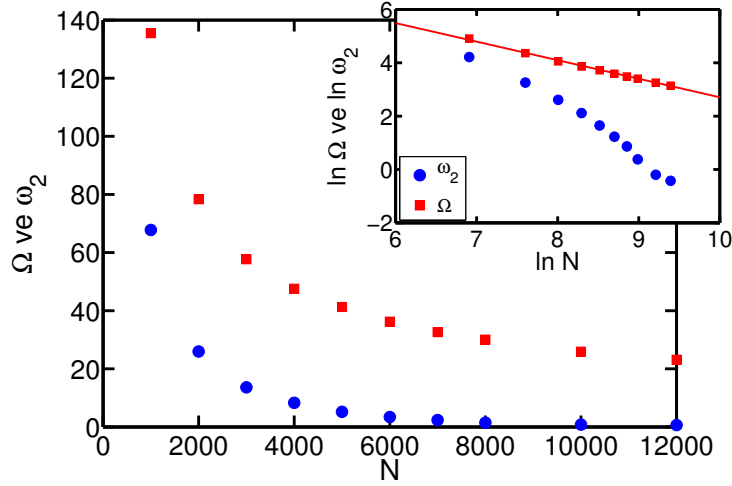


Şekil 8.12: Farklı büyüklüklerdeki ER çizgeleri için $T = 20$ gerçekleştirim üzerinden alınan ortalama derecenin çizge büyüklüğü ile değişimi çift logaritmik eksenlerde gösterilmiştir.

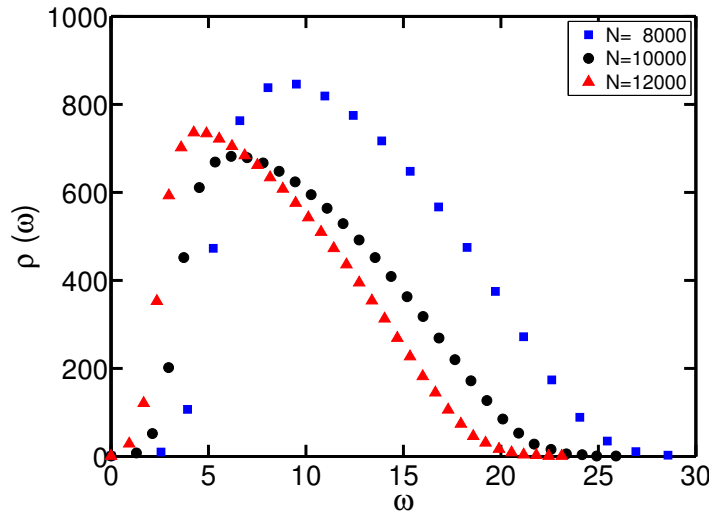
sıfırdan farklı en küçük özdeğer, ω_2 ve en büyük özdeğer Ω 'nın 20 gerçekleştirim üzerinden alınan ortalama değerlerinin N ile değişimini gösteren grafik Şekil 8.13'de verildiği gibidir. Özdeğerler, ω_2 ve Ω , toplam kenar sayısı $m = 50000$ ve düğüm noktası sayısı $N = 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000, 10000$ olan çizgelerde hesaplanmış ve her bir çizge büyüklüğü için $T = 20$ gerçekleştirim üzerinden alınan ortalama Ω ve ω_2 değerleri esas alınmıştır. Çizge büyüdükçe ω_2 değeri Ω 'dan daha hızlı biçimde azalmakta, Ω değeri ise $\Omega \sim N^{-(0.69 \pm 0.05)}$ biçiminde değişmektedir.

Spektral dağılım grafiklerini, sayısal olarak ürettiğimiz ER çizgesinin her bir örgü büyüklüğünde, tüm ω_μ 'ların 20 gerçekleştirim üzerinden ortalamasını alarak, bir ortalama özdeğer seti elde ettik. Her farklı çizge büyüklüğü için, bu ortalama özdeğer setini düğüm noktası sayısı kadar aralığa bölüp, bu aralıklarda kalan özdeğerlerin ortalamasını almak suretiyle (binning) sayısal olarak hesaplayarak doğrusal eksenlerde çizdirdiğimiz grafiği Şekil 8.14'de, çift logaritmik eksenlerde çizdirdiğimiz spektral dağılım grafiğini ise Şekil 8.15'de verdik.

Sabit kenar sayısına sahip perkolasyon eşiğinin üzerinde kalan ER çizgelerinde ise spektral boyut mutlaka kritik değerinin üstünde kalmakta ve beklenen kritik davranış yine ortalama alan türü olmaktadır. Çizge büyüklüğü ile spektral dağılım üsteli β 'nın küçüldüğünü ve dağılımın genişliğinin arttığını görüyoruz. Burada dağılımların



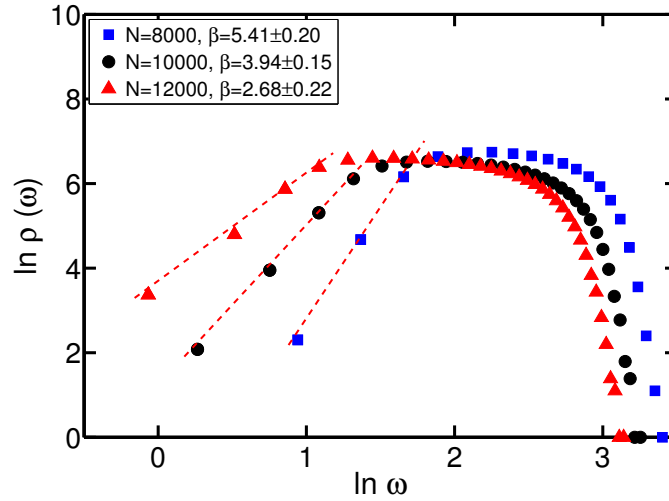
Şekil 8.13: Sıfırdan farklı ilk özdeğer ω_2 ve en büyük özdeğer Ω 'nın 20 gerçekleştirim üzerinden alınan ortalama değerlerinin, çizge büyüklüğü N ile değişimi. Küçük resimde çift logaritmik eksenle çizdirilen grafik gösterilmiştir. Kırmızı kareler, Ω değerlerini, mavi daireler ise ω_2 değerlerini vermektedir. En büyük özdeğer için küçük resimde alınan doğrusal yaklaşımlar sonucunda $\Omega \sim N^{-(0.69 \pm 0.05)}$ bağıntısı elde edilmiştir.



Şekil 8.14: Sabit kenar sayısına sahip farklı büyüklüklerdeki ER çizgelerinde spektral dağılım grafiği. Her çizge büyüklüğünde, 20 farklı gerçekleştirimden elde edilen Laplasyen özdeğerlerinin ortalamaları alınmıştır. Ortalama özdeğer seti için elde edilen spektral aralık her farklı çizge büyüklüğü için, N 'ye bölünerek binleme yapılmıştır.

genişliğinin N ile artması, Şekil 8.13'den de görüldüğü gibi, ω_2 'nin Ω 'dan daha hızlı sıfıra yaklaşmasından kaynaklanmaktadır.

ER çizgelerinde sabit kenar sayısı m için, çizge büyüklüğünün artması ile ortalama derece azalacak ve çizge seyrek hale gelecektir. Düğüm noktası sayısının $N \rightarrow \infty$ limitinde $\langle k \rangle \rightarrow 0$ olacaktır. Böylece çizgede her bir düğüm noktası birbirinden ayrık



Şekil 8.15: Farklı büyüklüklerdeki ER çizgelerinde çift-logaritmik eksenle çizdirilen spektral dağılım grafiği. Her çizge büyüklüğünde, spektral dağılım üsteli β 'nın küçük özdeğer bölgesinde kuvvet yasası yaklaşımı ile elde edilen değerleri grafik içinde verilmiştir. Kullanılan özdeğer seti, her büyüklükte, 20 gerçekleştirim üzerinden alınan ortalama özdeğerlerden oluşmaktadır.

hale gelir ve N tane bağımsız düğüm noktası kalır. Bu durumda, ortamda etkileşimler (kenarlar) de kalmayacak ve çizge $N \rightarrow \infty$ için termodinamik limite ulaşmak yerine daha da uzaklaşacaktır. Çizgede N tane ayrık düğüm noktasının olması, N tane $\omega = 0$ özdeğeri anlamına gelir. Böylece spektral dağılım bir delta fonksiyonuna eşit olacaktır. Ancak çizgenin tek parça kalabilmesinin koşulu, bağlanma olasılığının $1/N$ 'den büyük olmasıdır. Yani, bağlanma olasılığı,

$$\frac{m}{N(N-1)/2} > \frac{1}{N},$$

ve buradan,

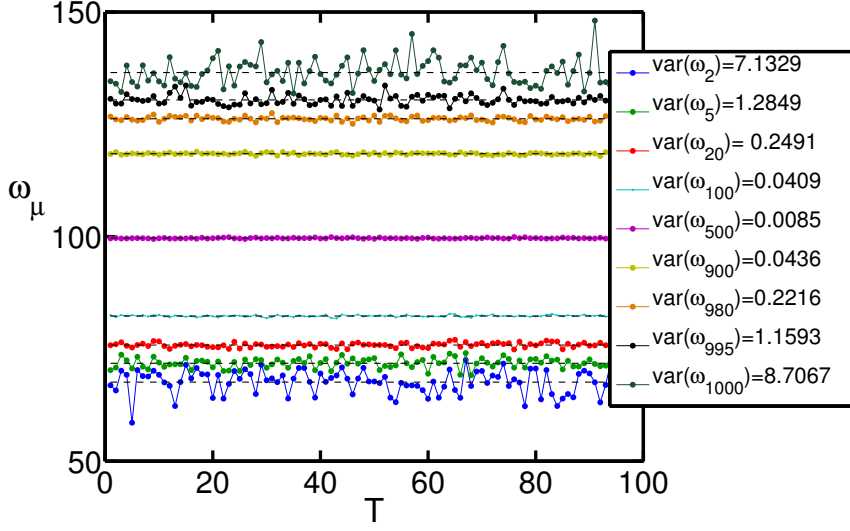
$$\frac{2m}{(N-1)} > 1$$

olmalıdır.

Daha önce deterministik çizgelerde olduğu gibi, spektral dağılım üsteli β , küçük Laplas özdeğerleri bölgesinde, kuvvet yasası yaklaşımı ile elde edilmiştir. Her çizge büyüklüğü için sayısal olarak elde ettiğimiz β değerleri Çizelge 8.1'de görülmektedir.

Gerçekleşimler üzerinden ortalama almak suretiyle elde ettiğimiz özdeğer setinden yapacağımız hesabın doğruluğunu kontrol etmek amacıyla, gerçekleştirmeden gerçekleştirmeye özdeğerlerin nasıl değiştiğini anlamamız gerekir. Bunun için, Laplace özdeğerlerinin farklı gerçekleştirmelerdeki dalgalanmalarını incelediğimiz grafiği Şekil 8.16'te verdik.

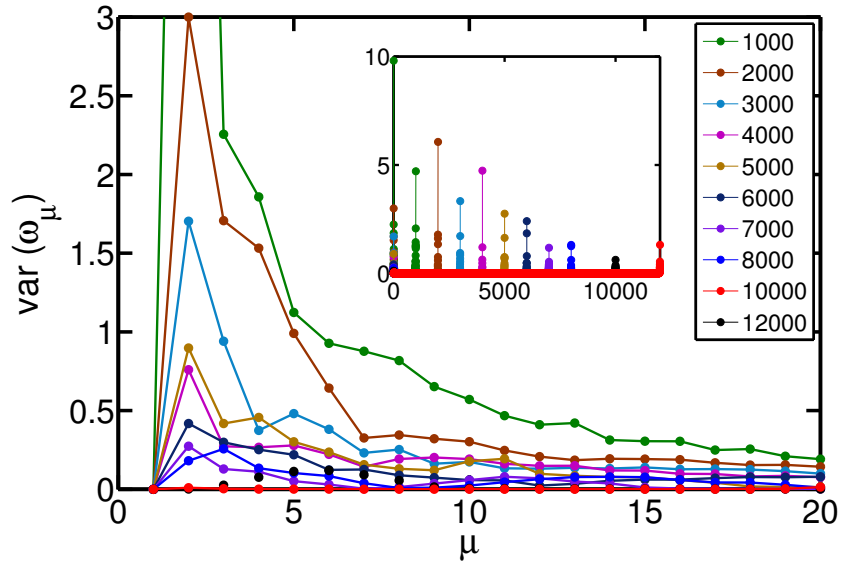
Bu grafikte, düğüm noktası sayısı $N = 1000$ olan çizgenin 100 farklı gerçekleştirmesini sayısal olarak üretip, farklı Laplas özdeğerleri için varyans değerlerini hesapladık. Grafik yanında varyans değerleri verilmiştir. Buna göre, özdeğer dağılımının uçlarına gidildikçe gerçekleştirmeden gerçekleştirmeye dalgalanmaların arttığı ve yaklaşık ω^* civarındaki özdeğerlerin ise farklı gerçekleştirmelerde neredeyse değişiklik göstermediği söylenebilir.



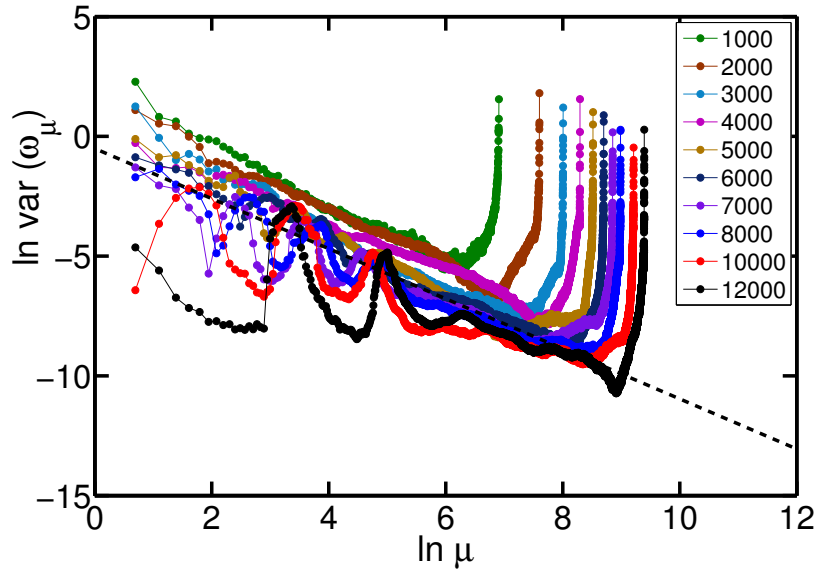
Şekil 8.16: Düğüm noktası sayısı $N = 1000$ olan ER çizgesinin $T = 100$ farklı gerçekleştirmesi için elde edilen sıralı özdeğer dağılımında, farklı μ etiket değerine sahip özdeğerlerin gerçekleştirmeden gerçekleştirmeye dalgalanmaları. Etiket değeri aşağıdan yukarı doğru sırasıyla $\mu = 2, 5, 20, 100, 500, 900, 980, 995, 1000$ alınmıştır.

İlaveten, dalgalanmaların yapısını daha iyi anlayabilmek için, ω_μ özdeğerlerinin varyanslarını farklı büyüklükteki ER çizgilerinde sayısal olarak hesaplayıp Şekil 8.17’te verdik. Burada iç resim olarak verilen grafik tüm μ değerlerini gösterip, Şekil 8.16’te de açıkça görüldüğü üzere, dağılımın varyansı her iki uçta da ıraksamaktadır. Büyük N değerlerine gidildikçe varyans nispeten azalmaktadır. Özdeğerlerin, $(\omega < \omega^*)$ ve $(\omega > \omega^*)$ olduğu bölgelerde Şekil 8.16’ten de görüldüğü gibi dalgalanmaların büyüklükleri yaklaşık olarak simetriktr.

Çift logaritmik eksenle çizdirdiğimiz Şekil 8.18’teki grafikte ise, Laplace özdeğerlerinin varyansları, küçük μ bölgesinde μ değerlerine kuvvet yasası ile bağlı olup, $var(\omega_\mu) \sim \mu^{-g}$, burada g kuvvetinin yaklaşık 1 olduğu görülmektedir. Ancak küçük özdeğer bölgesinde, varyans değerlerindeki dalgalanmaların genliği de çizge büyüklüğü ile artmaktadır. Bu dalgalanmaların kaynağını araştırmak ilginç olabilir.



Şekil 8.17: Toplam kenar sayısı $m = 50000$ için, sayısal olarak ürettiğimiz farklı büyüklükteki ER çizgelerinin $T = 20$ gerçekleştirim üzerinden hesaplanan varyans değerleri. Dağılımın varyansı her iki ekstra uçta da ıraksamaktadır. Farklı çizge büyüklükleri farklı renklerde gösterilmiş olup grafik içinde renk kodları belirtilmiştir. Küçük resimde eksenler tüm değerleri içerecek şekilde gösterilmiştir.



Şekil 8.18: Toplam kenar sayısı $m = 50000$ değeri için sayısal olarak elde ettiğimiz ER çizgelerinin $T = 20$ gerçekleştirim üzerinden hesaplanan varyans değerleri çift logaritmik eksenle gösterilmiştir. Küçük özdeğer bölgesine uygulanan kuvvet yasası yaklaşımından $var(\omega_\mu) \sim \mu^{-g}$, $g \approx 1$ bulunmuştur. Düğüm noktası sayısı arttırıldıkça küçük μ yani küçük özdeğer bölgesinde varyansın daha fazla dalgalanmalar içerdiğini görürüz.

Bizim sayısal olarak ürettiğimiz ER çizgelerinde, toplam kenar sayısı $m = 50000$ sabit olduğundan, çizge büyüklüğü arttıkça olası durumların sayısı da artacaktır. Bu nedenle

dağılımın yeterli biçimde örneklenebilmesi için, N ile artan sayıda gerçekleştirime ihtiyaç vardır.

8.2.1 ER çizgeleri üzerinde kritik davranış

En küçük özdeğerlerin varyanslarının oldukça büyük olması, bize bu bölgede, ortalama aldığımız özdeğer setini kullanırken dikkat etmemiz gerektiğini söyler. Öyle ki, Gaussiyen model ölçeklenme katsayıları σ_1 ve σ_2 'den p_1 ve p_2 üstellerini, varyansı büyük olan en küçük özdeğerlerin bölgesinde değil varyansı nispeten daha küçük olan yine küçük özdeğer bölgesinde hesaplamak gerekmektedir. Aynı zamanda, spektral dağılım üsteli β ve ölçeklenme üstelleri, p_1 ve p_2 , yine aynı bölgede hesaplanmalıdır.

Deterministik çizgelerde olduğu gibi, spektral dağılım üstelinin, $\beta_c = 1$ kritik değerinin üstünde olduğu durumlarda, ortalama alan teorisinin sonuçlarını bekleriz [19, 46, 52, 53].

Ortalama alan teorisinden başka birşey beklemeyiz ama tutarlılık açısından bu sonucu spektral renormalizasyon grubu (SRG) ile bulabilir miyiz?

8.2.2 ER çizgeleri üzerinde Spektral RG yapabilir miyiz?

Düğüm noktası sayısı büyüdükçe küçük özdeğer bölgesinde varyans değerlerindeki dalgalanmaların artması, en büyük özdeğerin ölçeklenmesi yöntemi ile hesaplayacağımız ölçeklenme üstelleri p_1 ve p_2 için, bir hata aralığına işaret etmektedir. Üstelik bu hata N ile büyümektedir. Çizgelerin Laplas spektrumunu anlamak ve ölçeklenme faktörü B 'yi ne tür aralıklarla alacağımızı belirlemek için en büyük özdeğer Ω ve sıfırdan büyük en küçük özdeğer ω_2 'nin çizge büyüklüğü N ile nasıl değiştiğini Şekil 8.13'de verdik. Çizge büyüdükçe, ω_2 ve Ω değerleri, ER çizgesi için, kenar sayısı m sabit tutulduğu durumda, çizgedeki düğüm noktası sayısı, N , büyüdükçe ortalama derece, $\langle k \rangle$, ve ω_2 düşüyor. Sıfırdan farklı en küçük özdeğer, ω_2 , burada çizgenin bağlanabilirliğinin (*connectivity*) bir ölçüsüdür [64–67].

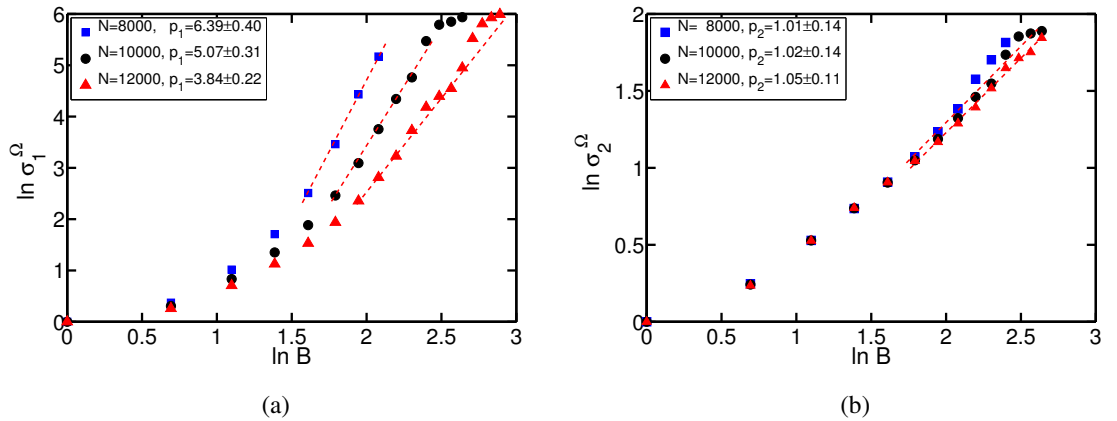
8.2.2.1 B 'nin belirlenmesi

Ölçeklenme davranışlarını elde ederken B ölçeklenme faktörünün doğru seçilmesi önemlidir. En büyük özdeğer Ω 'nın, sıfırdan farklı en küçük özdeğer ω_2 'nin yaklaşık 2 katına eşit olduğu $N = 1000$ büyüklüğündeki çizgede, ölçeklenme faktörünün

$B = 1, 2, \dots$ tamsayı değerleri için ölçeklenme bölgesinde yalnızca iki nokta elde edilebilir. Ancak, Şekil 8.13’den, çizge büyüklüğü arttıkça Ω/ω_2 değerinin arttığını ve ölçeklenme katsayılarının hesaplandığı bölgede daha fazla nokta elde edebileceğimizi görüyoruz.

Spektral ölçeklenme katsayılarının ölçeklenme bölgesinde doğrusal fit yapabilecek gerekli sayıda nokta elde edebilmek için çizge büyüklüğünü arttırıp, $N = 5000, 10000$ ve 12000 düğüm noktasına sahip çizgeler kullandık. Böylece ölçeklenme faktörü B ’nin tamsayı değerlerinde ölçeklenme katsayılarının davranışlarını elde edebildik.

ER çizgelerinde, Gaussiyen model hesabında gerekli ölçeklenme katsayılarını, σ_1 ve σ_2 , kenar sayısı sabit olan farklı çizge büyüklüklerinde, en büyük özdeğerin (Ω) ölçeklenmesi yöntemi ile sayısal olarak hesapladık ve bu katsayıların, farklı N ’ler için ölçeklenme faktörü B ile büyük B bölgesinde nasıl değiştiğini Şekil 8.19’de ayrı ayrı verdik.



Şekil 8.19: Spektral RG ölçeklenme faktörleri. Farklı çizge büyüklüklerinde, sabit kenar sayısı $m = 50000$ için 20 gerçekleştirim üzerinden ortalama alınarak elde edilen özdeğer seti ile hesapladığımız ve çift logaritmik eksenle çizdirdiğimiz ölçeklenme faktörlerinin ortalama değerlerinden elde edilen ölçeklenme üstelleri (a) $p_1 = \frac{\ln \sigma_1^\Omega}{\ln B}$, (b) $p_2 = \frac{\ln \sigma_2^\Omega}{\ln B}$.

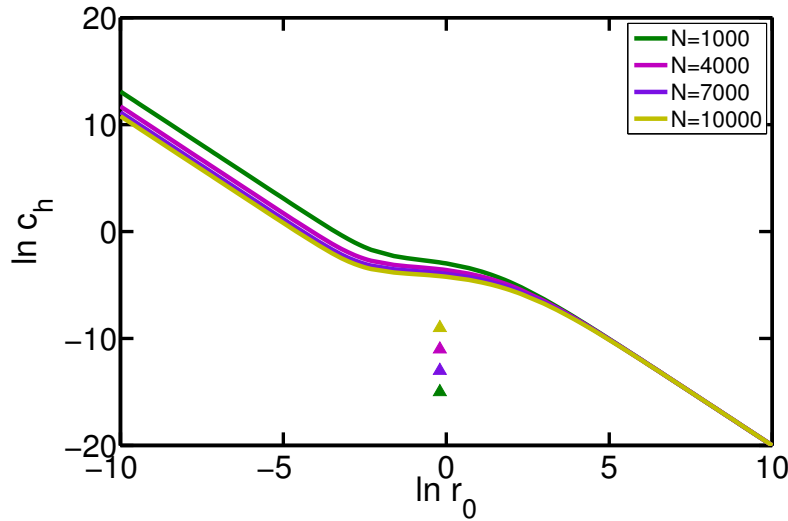
8.2.3 Isı sığası üstelinin kesin hesaplanması

Özgül ısıyı, daha önce Bölüm 5’te deterministik çizgeler için yaptığımız biçimde, Laplace özdeğerleri üzerinden alınan bir tam toplam ile elde edebiliriz. Böylece özgül ısı kritik üsteli α ’yı belirleyebilmek için özgül ısıнын $c_h \simeq k_B \frac{T^2}{2N} \sum_{\mu=1}^N \frac{1}{(r_0 + \omega_\mu)^2}$ ifadesinde, çizge büyüklüğü $N = 1000, 4000, 7000, 10000$ olan kenar sayısı $m = 50000$ ’e eşit ER rastgele çizgesinden sayısal olarak hesapladığımız Laplace

Çizelge 8.1: Farklı çizge büyüklüklerinde, 20 gerçekleştirim üzerinden ortalama alınarak elde edilen ω_μ seti ile hesaplanan spektral ölçeklenme üsteli β ve ölçeklenme üstelleri p_1 ve p_2 . Ölçeklenme faktörleri, B 'nin tamsayı değerleri için sayısal olarak hesaplanmıştır. Ölçeklenme üsteli p_2 , tanım gereği 1 olup, sayısal olarak elde edilen değer tutarlıdır. Ayrıca, $p_1 = 1 + \beta$ bağıntısının geçerli olduğu görülüyor.

N	β	p_1	p_2
8000	5.4 ± 0.2	6.4 ± 0.4	1.0 ± 0.1
10000	3.9 ± 0.2	5.1 ± 0.3	1.0 ± 0.1
12000	2.7 ± 0.2	3.8 ± 0.2	1.0 ± 0.1

özdeğerlerini kullanarak, Şekil 8.20'yi elde ettik. Burada ω_2 değerleri her bir farklı N için grafiklerle aynı renkte küçük üçgenler ile gösterilmiş olup daha önce $r_0 > \omega_2$ olan bölgenin başlangıç kısmı olarak belirlediğimiz ölçeklenme bölgesi dikkate alındığında, eğimin çizge büyüklüğü ile sıfıra gittiğini ve böylece $c_h \sim r_0^0$ için özgül ısı kritik üstelinin $\alpha \rightarrow 0$ olduğunu söyleyebiliriz. Böylece özgül ısı tam toplam ifadesinden elde edilen kritik üstel $\alpha = 0$ değeri ortalama alan sonucuna eşit olmaktadır.



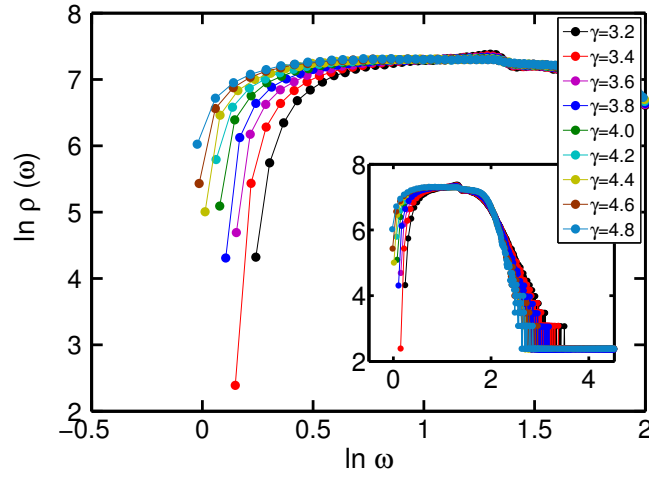
Şekil 8.20: Özgül ısı yoğunluğu için, farklı çizge büyüklüklerinde ve sabit kenar sayısında üretilen ER çizgeleri için Laplas özdeğerleri üzerinden alınan tam toplam ifadesi. Çizgenin düğüm noktası sayısı büyütüldüğünde, $N \rightarrow \infty$ yani termodinamik limitte özgül ısı kritik üsteli $\alpha \rightarrow 0$ olur.

Daha önce ayrıntılı biçimde göstermiş olduğumuz gibi, $\beta \geq 1$ olduğu zaman, ısı sıçasının tekilliğini, infrared değil (küçük ω), artık ultraviyole (büyük ω) limiti belirliyor olması sayesinde özgül ısı kritik üstelini, $\alpha = 0$ olarak elde ederiz. Bu nedenle, $\beta \geq 1$ bölgesinde $\alpha = 2 - \frac{p_1}{p_2}$ bağıntısı geçerli değildir.

8.3 İlintisiz Ölçekten Bağımsız Çizgeler

İlintisiz, ölçekten bağımsız çizgeler için, çizgedeki düğüm noktalarının alabileceği en büyük derece değeri k_{cut} ve herhangi bir inci düğüm noktasının derecesi, k ve derece dağılımı üsteli, γ olmak üzere, bağlanma olasılığı $p(k) \sim (\frac{k_{cut}}{k})^\gamma$ biçiminde seçilmiştir. Çizgedeki düğüm noktaları, $p(k)$ olasılığı ile k bacağa (kenarları oluşturacak) sahip olup, bu bacakların rastgele biçimde birbirine bağlanması ile çizge oluşturulmuştur.

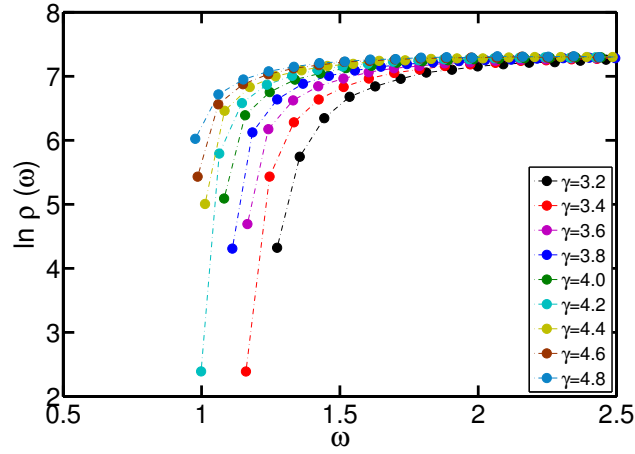
Düğüm noktası sayısı $N = 40000$ olan, derece dağılımı üstelinin farklı γ değerleri için sayısal olarak ürettiğimiz ilintisiz, ölçekten bağımsız çizgelerin spektral dağılım grafiklerini, Şekil 8.21’de çift logaritmik; Şekil 8.22’de ise yarı logaritmik eksenle çizdirerek verdik.



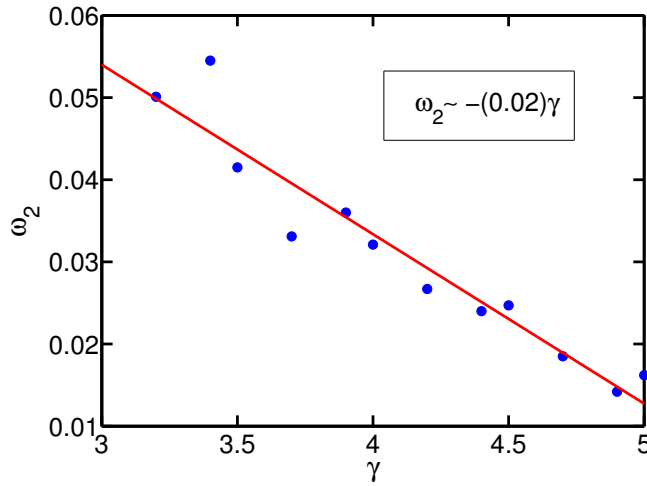
Şekil 8.21: Düğüm noktası sayısı 40000 olan ilintisiz, ölçekten bağımsız çizgelerin en küçük derece $k_{min} = 4$ için farklı γ değerlerinde üretilerek çift logaritmik eksenle çizdirilen spektral dağılım grafiği. Küçük resimde dağılımın tamamı görülmektedir. Her bir γ değeri için 10 farklı gerçekleştirim üzerinden alınan ortalama özdeğerler kullanılmıştır.

Her iki grafikten de görüldüğü gibi küçük özdeğer bölgesinde spektral dağılım için kuvvet yasası davranışı görülmemektedir. Burada $\rho(\omega)$ ’nın eksponansiyel biçimde büyüdüğü söylenebilir. Bunun yanında, $3 < \gamma < 5$ aralığında derece dağılımı üstelinin arttırılmasıyla sıfırdan farklı en küçük özdeğerin sıfıra yaklaştığını görmekteyiz. Aynı zamanda, bu davranışı Şekil 8.23’den görebiliriz.

Onsager’in iki boyutlu Ising modeli için verdiği kesin çözüm ve daha yüksek boyutlu öklidyen uzaylarda ya da daha uzun erişimli etkileşimler için Ising modeli’ne farklı pertürbatif yaklaşımlar (küme açılımları, yüksek ve alçak sıcaklık açılımları,



Şekil 8.22: Yarı logaritmik eksenle çizdirilen spektral dağılım grafiği. Düğüm noktası sayısı 40000, $k_{min} = 4$, ve $3 < \gamma < 5$ için sayısal olarak üretilen 10 farklı gerçekleştirim üzerinden ortalaması alınan Laplasyen özdeğerleri kullanılmıştır.



Şekil 8.23: Düğüm noktası sayısı 40000, k_{min} olan ve 10 farklı gerçekleştirimde ürettiğimiz ilintisiz, ölçekten bağımsız çizgeler için sıfırdan farklı en küçük özdeğerin, ω_2 , derece dağılımı üsteli γ ile $\omega_2 \sim -0.02\gamma$ biçiminde sıfıra yaklaşmaktadır.

bunlara Padé yaklaşıtımları [26] vb.), bize Ising modelinin kritik davranışının, uzayın boyutu ve etkileşimin kısa ya da uzun erişimli olmasına göre evrensellik sınıflarına ayrıldığını göstermiştir [27, 28]. Çizgeler üzerinde, evrensel bir teoriye sahip bulunmasak da, Dorogovtsev, Goltsev ve Mendes [8] ölçekten bağımsız ve ilintisiz çizgelerde kritik davranışın, derece dağılımının ölçeklenme üsteli γ 'ya nasıl bağlı olduğunu göstermişlerdir. Ferromanyetik Ising modelinin ölçekten bağımsız çizgelere uygulanması sonucu, evrensel kritik davranış γ 'ya bağlı olarak üç sınıfta toplanabilir: (i) Derece dağılımı üsteli, $\gamma > 5$ için ölçekten bağımsız çizgelerde,

standart ortalama-alan kritik davranışı, (ii) Ölçekten bağımsız çizgelerde $3 < \gamma \leq 5$ için, derece dağılımına bağlı olarak bulunan ve evrensel olmayan kritik üsteller, (iii) Ölçekten bağımsız çizgelerde $2 < \gamma \leq 3$ için, sonsuz mertebeden faz geçişi. Klasik rastgele çizgelerde Ising modeli $N \rightarrow \infty$ için standart ortalama-alan kritik davranışı gösterir [8].

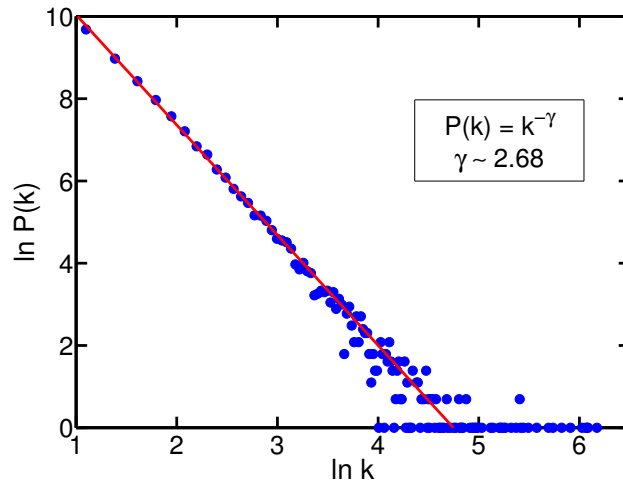
Bizim sayısal hesaplarımızda kullandığımız çizgeler $3 < \gamma < 5$ sınıfına girdiğinden, evrensel olmayan, yani γ 'ya bağlı kritik üsteller söz konusu olmaktadır. Burada spektral dağılım grafiğinden β 'nın nasıl hesaplanacağı net değildir. Bu uzun kuyruklu davranışta pertübatif metodumuz çalışmamaktadır.

8.4 Barabasi Albert Modeli

Derece dağılımlarının önemli bir kısmı kuvvet yasasına uyan çizgelere ölçekten bağımsız çizgeler denir. Eğer bir düğüm noktasının derecesi k ise, derece dağılımı,

$$P(k) = ck^{-\gamma} \quad (8.18)$$

ile ifade edilir. Burada c bir sabittir. Sonlu çizgeler için bu dağılım, eksponansiyel bir sönümleme ile sonlanır. Ölçekten bağımsız çizgeleri oluşturmak için bizim kullandığımız model, Barabasi-Albert modelidir [13].

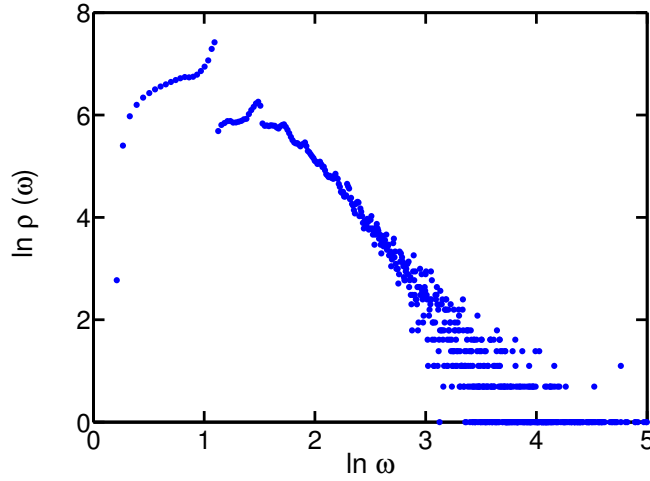


Şekil 8.24: Sayısal olarak ürettiğimiz ölçekten bağımsız BA çizgesi için derece dağılı grafiği. Çizge büyüklüğü arttıkça γ değeri 3'e yaklaşacaktır.

Buradan elde ettiğimiz spektral dağılım grafiğinden de gördüğümüz gibi, β 'nın çok büyük olması, bu spektral dağılımın esas olarak bir kuvvet yasasına değil

transandantal bir fonksiyona tabi olması gerektiğini gösteriyor. Bu durumda, spektral renormalizasyon grubunu nasıl uygulayacağımızı bilmiyoruz. Eğer spektral dağılım bir kuvvet yasasına tabi olsa idi, $\beta > 1$ ortalama alan davranışına işaret edecekti. Ancak mevcut durumda bu sonucu çıkartmamız doğru değil.

Bradde, Caccioli, Dall'Asta ve Bianconi 2010 yılında yayınladıkları çalışmalarında [29] ancak metrik bir uzata gömülü, uzaysal ölçekten bağımsız çizgeler için etkin spektral boyut cinsinden bir Ginzburg kriterini nasıl türettiklerini gösterdiler. Keyfi çizgeler için önerilmiş [30] gerçek uzay renormalizasyon grubu [31–33] yaklaşımı ile de, BA çizgeleri için herhangi sonuç elde edilmiş değildir.



Şekil 8.25: Çift logaritmik eksenlerde çizdirilen spektral dağılım grafiği. Başlangıç düğüm sayısı $m_0 = 3$ ve her adımda eklenecek düğümün bacak sayısı $m = 3$ alınarak, düğüm noktası sayısı 40000 olacak şekilde oluşturulan çizge kullanılmıştır.

Ancak BA çizgeleri için iteratif yöntemlerle ve nümerik simülasyonlarla elde edilen sonuçlardan, İsing modeli için çizge büyüklüğü arttıkça kritik sıcaklığın sonsuza gittiği ve tüm sonlu sıcaklıklarda mıknatıslanmanın sıfırdan farklı olduğu, yüksek sıcaklıklarda sıcaklıkla eksponansiyel olarak azaldığı bilinmektedir [8].

9. SONUÇ VE ÖNERİLER

Biz bu tezde, Wilson-Kogut alan teorik renormalizasyon grubunu, keyfi çizgelere uygulanabilir biçimde genelleştirmeye çalıştık. Öyle ki, çizge Laplasyeninin özvektörlerini kullanarak genelleştirilmiş Fourier dönüşümü ile, Wilson'ın periyodik örgülerde yaptığından farklı olarak, bir uzunluk kavramı içermeyen spektral renormalizasyon grubu yöntemini geliştirdik. Bizim çalıştığımız uzaysal olmayan ve öteleme simetrisi bulunmayan çizgeler için, çizge momentum vektörü, $\mathbf{k}$, gibi bir kavram tanımlayamıyoruz. Metrik bir uzaya gömülü olmayan çizgelerde, çizgenin düğüm noktaları arasındaki mesafe, uzunluk ile değil, bir düğüm noktasından diğerine giderken arada kaç kenar olduğu ile ilişkilidir. Bu çizgelerde uzunluk kavramı olmadığından korelasyon uzunluğu diye birşey de tanımlayamıyoruz. Bu çizgeleri metrik bir uzaya gömersek uzunluk tanımı yapabiliriz ancak bu defa öteleme ve dönme simetrisinin olmaması tek bir korelasyon uzunluğu tanımlamaya engel olmaktadır.

Bu çizgelerde, üstün-ölçeklenme bağıntısında (hyperscaling relation) bulunan "boyut"un nasıl tanımlanacağı açık olmadığından bu bağıntı kullanılamamaktadır [48]. Öyle ki, çizge üzerinde tanımlayabileceğimiz fraktal boyut, gömülme boyutu veya spektral boyuttan hangisinin bu bağıntıdaki "boyut" yerine geçeceği net değildir. Burada işaret etmek gerekir ki, elmas örgü üzerinde Ising modeli için *kesin* gerçek uzay renormalizasyon grubu ile (uzunluk ölçeklenmesi uyguladığımızda) indirgenmiş sıcaklık için elde edilen özdeğer, $y_t = 0.7479$ olmaktadır. Bu özdeğeri kullanarak, $\nu = y_t^{-1}$ bağıntısından korelasyon uzunluğunun kritik üstelini hesapladığımızda, $\nu = 1.3370$ değerini ve üstün-ölçeklenme bağıntısından ($d = d_f = \tilde{d} = 2$ ile) kabul edilemez biçimde $\alpha = -0.6738$ değerini elde ederiz.

Gaussiyen model için kritik üstelleri, küçük özdeğer bölgesinden hesapladığımız spektral yoğunluk ölçeklenme üsteli β 'ya bağlı olarak bulduk. Burada $\beta = \frac{\tilde{d}}{2} - 1$ olup spectral boyut $\tilde{d} = 2(\beta + 1)$ 'dir. Gaussiyen model sabit noktası, spektral boyutun $\tilde{d} = 2$ değeri için karardır. Bu da çizgenin öteleme simetrisinden yoksun olmasından [68] veya başka bir takım özelliklerinden dolayı değil, aslında Ising evrensellik sınıfı için

alt kritik boyutun $\tilde{d} = 2$ olmasından kaynaklanmaktadır. Wilson ve Kogut'un da işaret ettiği gibi [19](p. 124), tekrarlama bağıntıları başlangıç koşullarına güçlü biçimde bağlıdır ve $d = 2$ -boyutta, Gaussiyen modelden, yani klasik ortalama alan sonuçlarından farklı bir kritik davranış vermeyecektir. Pek çok yazarın [52,53] da fark etmiş olduğu gibi, bu durumda, pertürbatif (tedirgemeci) bir renormalizasyon grubu yaklaşımı doğru kritik davranışı yakalamaya yeterli değildir.

Gaussiyen modelin ötesinde bir sabit nokta elde edebilmek için elmas örgüyü genelleştirerek [1] daha büyük boyutlarda örgüler ürettik. Burada da spektral boyutun $2 < \tilde{d} < 4$ aralığındaki değerlerinde Gaussiyen olmayan bir sabit nokta elde edebildiğimizi, ancak $\tilde{d} > 4$ için Gaussiyen sabit noktasının kararlı olduğunu gördük. Dikkat edilecek olursa, etkileşim terimlerini dahil ettiğimizde, ölçeklenme katsayıları, 4-verteks için denklem (6.3)'de verdiğimiz Φ fonksiyonuna ve dolayısıyla da çizge Laplasyeninin özvektörlerine sıkı biçimde bağlıdır. İkinci mertebeye kadar pertürbasyon terimleri için ölçeklenme katsayılarının davranışlarını elde edebildik.

Spektral boyutun kritik davranışa etkisini tartışmamızın yanında rastgele çizgeler için sabit bağlanma olasılığına sahip Gilbert çizgesini ve sabit kenar sayısına sahip ER çizgesini sayısal olarak ürettik. Bu çizgelerde kenar yoğunluğu sabit tutularak termodinamik limite gidildiğinde, spektral boyut, kızılötesi bölgede bir kuvvet yasası değil, ekspanansiyel hatta hiper-ekspanansiyel davranış göstermektedir. Bu durumda renormalizasyon dönüşümünün nasıl yapılacağı açık değildir. Bu da daha sonra ele alacağımız bir diğer problem olarak durmaktadır.

Sabit bağlanma olasılığına sahip Gilbert çizgesinin spektral dağılımının küçük özdeğer bölgesinde kuvvet yasası davranışına uymadığını gördük. Ayrıca termodinamik limitte spektral dağılım ekspanansiyel davranmaktadır. Böylece $\tilde{d} \rightarrow \infty$ ve kritik davranış ortalama alan türüdür. Sabit kenar sayısına sahip perkolasyon eşiğinin üzerinde kalan ER çizgelerinde ise spektral boyut mutlaka kritik değerinin üstünde kalmakta ve beklenen kritik davranış yine ortalama alan türü olmaktadır.

Derece dağılımı kuvvet yasasına uyan ölçekten bağımsız çizgeleri ise ilintisiz ölçekten bağımsız çizgeler ve özel olarak BA çizgesi için ele aldık. BA çizgelerinde kenarlar arasında uzun erimli korelasyonlar olup, çizge büyüklüğü sonsuza giderken, kritik sıcaklık ıraksar ve manyetizasyon $M \sim \exp(-sbt.T)$ biçiminde azalır. Ancak spektral

dağılımları tıpkı Gilbert çizgelerinde olduğu gibi kuvvet yasasına tabi olmayan bu çizgeler için ortalama alan türü davranışın ötesinde bir sonuç elde edemedik.

KAYNAKLAR

- [1] **Itzykson, C. ve Luck, J.**, 1985. Zeroes of the partition function for statistical models on regular and hierarchical lattices, *Critical Phenomena*, Springer, s.45–82.
- [2] **Erdős, P. ve Rényi, A.**, 1960. On the Evolution of Random Graphs, PUBLICATION OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES, s.17–61.
- [3] **Watts, D.J. ve Strogatz, S.H.**, 1998. Collective dynamics of /‘small-world/’ networks, *Nature*, **393(6684)**, 440–442.
- [4] **Albert, R. ve Barabási, A.L.**, 2002. Statistical mechanics of complex networks, *Reviews of modern physics*, **74(1)**, 47.
- [5] **Caldarelli, G. ve Vespignani, A.**, 2007. Large scale structure and dynamics of complex networks, World Scientific.
- [6] **Newman, M., Barabasi, A.L. ve Watts, D.J.**, 2006. The structure and dynamics of networks, Princeton University Press.
- [7] **Ben-Avraham, D.**, 2009. A. Barrát, M. Barthélemy, A. Vespignani: Dynamical Processes on Complex Networks, *Journal of Statistical Physics*, **135(4)**, 773–774.
- [8] **Dorogovtsev, S.N., Goltsev, A.V. ve Mendes, J.F.**, 2008. Critical phenomena in complex networks, *Reviews of Modern Physics*, **80(4)**, 1275.
- [9] **Aygün, E. ve Erzan, A.**, 2011. Spectral renormalization group theory on networks, *Journal of Physics: Conference Series*, **319(1)**, 012007.
- [10] **Rényi, A. ve Erdős, P.**, 1959. On random graphs, *Publicationes Mathematicae*, **6(290-297)**, 5.
- [11] **Gilbert, E.N.**, 1959. Random graphs, *The Annals of Mathematical Statistics*, 1141–1144.
- [12] **Gilbert, E.N.**, 1961. Random plane networks, *Journal of the Society for Industrial & Applied Mathematics*, **9(4)**, 533–543.
- [13] **Barabási, A.L. ve Albert, R.**, 1999. Emergence of scaling in random networks, *science*, **286(5439)**, 509–512.
- [14] **Chung, F.R.**, 1997. Spectral graph theory, cilt 92, American Mathematical Soc.

- [15] **Von Luxburg, U.**, 2007. A tutorial on spectral clustering, *Statistics and computing*, **17(4)**, 395–416.
- [16] **Banerjee, A. ve Jost, J.**, 2008. On the spectrum of the normalized graph Laplacian, *Linear algebra and its applications*, **428(11)**, 3015–3022.
- [17] **Wilson, K.G.**, 1971. Renormalisation group and Kadanoff Scaling picture, *Physics Rev. B*, **4**, 3174.
- [18] **Wilson, K.G.**, 1971. Phase space cell analysis of critical behavior, *Phys. rev. B*, **4**, 3184.
- [19] **Wilson, K.G. ve Kogut, J.**, 1974. The renormalization group and the expansion, *Physics Reports*, **12(2)**, 75–199.
- [20] **Wilson, K.G.**, 1972. Feynman-graph expansion for critical exponents, *Physical Review Letters*, **28(9)**, 548.
- [21] **Bethe, H.**, 1935. Statistical theory of superlattices, *Proc. Roy. Soc. London A*, cilt150, s.552–575.
- [22] **Peierls, R.**, 1936. On Ising’s model of ferromagnetism, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, cilt 32, Cambridge Univ Press, s.477–481.
- [23] **Runnels, L.**, 1967. Phase transition of a Bethe lattice gas of hard molecules, *Journal of Mathematical Physics*, **8(10)**, 2081–2087.
- [24] **Eggarter, T.**, 1974. Cayley trees, the Ising problem, and the thermodynamic limit, *Physical Review B*, **9(7)**, 2989.
- [25] **Baxter, R.**, 1982, Exactly solvable models in statistical mechanics.
- [26] **Baker Jr, G.A.**, 1961. Application of the Padé approximant method to the investigation of some magnetic properties of the Ising model, *Physical Review*, **124(3)**, 768.
- [27] **Kadanoff, L.P. ve Baym, G.A.**, 1962. Quantum statistical mechanics, Benjamin.
- [28] **Stanley, H.E.**, 1987. Introduction to phase transitions and critical phenomena, *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*, by H Eugene Stanley, pp. 336. Foreword by H Eugene Stanley. Oxford University Press, Jul 1987. ISBN-10: 0195053168. ISBN-13: 9780195053166, **1**.
- [29] **Bradde, S., Caccioli, F., Dall’Asta, L. ve Bianconi, G.**, 2010. Critical fluctuations in spatial complex networks, *Physical review letters*, **104(21)**, 218701.
- [30] **Song, C., Havlin, S. ve Makse, H.A.**, 2005. Self-similarity of complex networks, *Nature*, **433(7024)**, 392–395.
- [31] **Niemeijer, T. ve Van Leeuwen, J.**, 1976. Renormalization theory for Ising-like spin systems, *Phase transitions and critical phenomena*, **6**, 425–505.
- [32] **Burkhardt, T. ve Van Leeuwen, J.**, 1982. Progress and problems in real-space renormalization, *Real-space Renormalization*, Springer, s.1–31.

- [33] **Efrati, E., Wang, Z., Kolan, A. ve Kadanoff, L.P.**, 2014. Real-space renormalization in statistical mechanics, *Reviews of Modern Physics*, **86(2)**, 647.
- [34] **Berker, A.N. ve Ostlund, S.**, 1979. Renormalisation-group calculations of finite systems: order parameter and specific heat for epitaxial ordering, *Journal of Physics C: Solid State Physics*, **12(22)**, 4961.
- [35] **Amit, D.J.**, 1978. Field theory, the renormalization group, and critical phenomena, McGraw-Hill International Book Co.
- [36] **Kardar, M.**, 2007. Statistical physics of fields, Cambridge University Press.
- [37] **Goldenfeld, N.**, 1992. Lectures on phase transitions and the renormalization group, Addison-Wesley, Advanced Book Program, Reading.
- [38] **Kadanoff, L.P. ve Houghton, A.**, 1975. Numerical evaluations of the critical properties of the two-dimensional Ising model, *Physical Review B*, **11(1)**, 377.
- [39] **Hattori, K., Hattori, T. ve Watanabe, H.**, 1987. Gaussian field theories on general networks and the spectral dimensions, *Progress of Theoretical Physics Supplement*, **92**, 108–143.
- [40] **Mohar, B., Alavi, Y., Chartrand, G. ve Oellermann, O.**, 1991. The Laplacian spectrum of graphs, *Graph theory, combinatorics, and applications*, **2**, 871–898.
- [41] **Maas, C.**, 1987. Transportation in graphs and the admittance spectrum, *Discrete Applied Mathematics*, **16(1)**, 31–49.
- [42] **Rojo, O. ve Soto, R.**, 2005. The spectra of the adjacency matrix and Laplacian matrix for some balanced trees, *Linear Algebra and its Applications*, **403(0)**, 97 – 117.
- [43] **Rojo, O. ve Robbiano, M.**, 2007. An explicit formula for eigenvalues of Bethe trees and upper bounds on the largest eigenvalue of any tree, *Linear Algebra and its Applications*, **427(1)**, 138 – 150.
- [44] **Berlin, T. ve Kac, M.**, 1952. The spherical model of a ferromagnet, *Physical Review*, **86(6)**, 821.
- [45] **Van Hove, L.**, 1953. The occurrence of singularities in the elastic frequency distribution of a crystal, *Physical Review*, **89(6)**, 1189.
- [46] **Tuncer, A. ve Erzan, A.**, 2015. Spectral renormalization group for the Gaussian model and ψ^4 theory on nonspatial networks, *Physical Review E*, **92(2)**, 022106.
- [47] **Thompson, C.J.**, 1982. Local properties of an Ising model on a Cayley tree, *Journal of Statistical Physics*, **27(3)**, 441–456.
- [48] **Griffiths, R.B. ve Kaufman, M.**, 1982. Spin systems on hierarchical lattices. Introduction and thermodynamic limit, *Physical Review B*, **26(9)**, 5022.

- [49] **Kaufman, M. ve Griffiths, R.B.**, 1981. Exactly soluble Ising models on hierarchical lattices, *Physical Review B*, **24(1)**, 496.
- [50] **Ochab, J.K. ve Burda, Z.**, 2012. Exact solution for statics and dynamics of maximal-entropy random walks on Cayley trees, *Phys. Rev. E*, **85**, 021145.
- [51] **Bleher, P. ve Żalys, E.**, 1989. Asymptotics of the susceptibility for the Ising model on the hierarchical lattices, *Communications in mathematical physics*, **120(3)**, 409–436.
- [52] **Bagnuls, C. ve Bervillier, C.**, 2001. Exact renormalization group equations: An introductory review, *Physics Reports*, **348(1)**, 91–157.
- [53] **Morris, T.R.**, 1995. The renormalization group and two dimensional multicritical effective scalar field theory, *Physics Letters B*, **345(2)**, 139–148.
- [54] **Dorogovtsev, S.N., Goltsev, A.V. ve Mendes, J.F.F.**, 2002. Ising model on networks with an arbitrary distribution of connections, *Physical Review E*, **66(1)**, 016104.
- [55] **Dorogovtsev, S.N.**, 2010. Lectures on complex networks, cilt 24, Oxford University Press Oxford.
- [56] **Bianconi, G.**, 2002. Mean field solution of the Ising model on a Barabási–Albert network, *Physics Letters A*, **303(2)**, 166–168.
- [57] **Wigner, E.P.**, 1957. Characteristics vectors of bordered matrices with infinite dimensions II, *Annals of Mathematics*, 203–207.
- [58] **Wigner, E.P.**, 1958. On the Distribution of the Roots of Certain Symmetric Matrices, *Annals of Mathematics*, **67(2)**, pp. 325–327.
- [59] **Mehta, M.**, 1967. Random matrices and the statistical theory of energy level, Academic Press.
- [60] **Bollobás, B.**, 2001, Random Graphs, volume 73 of Cambridge studies in advanced mathematics.
- [61] **Bauer, M. ve Golinelli, O.**, 2001. Random incidence matrices: moments of the spectral density, *Journal of Statistical Physics*, **103(1-2)**, 301–337.
- [62] **Bryc, W., Dembo, A. ve Jiang, T.**, 2006. Spectral measure of large random Hankel, Markov and Toeplitz matrices, *The Annals of Probability*, 1–38.
- [63] **Olver, S. ve Nadakuditi, R.R.**, 2012. Numerical computation of convolutions in free probability theory, *arXiv preprint arXiv:1203.1958*.
- [64] **Chung, F.**, 2004. Discrete isoperimetric inequalities.
- [65] **Chung, F.R. ve Yau, S.T.**, 1995. Eigenvalues of graphs and Sobolev inequalities, *Combinatorics, Probability and Computing*, **4(01)**, 11–25.
- [66] **Dorogovtsev, S., Goltsev, A., Mendes, J. ve Samukhin, A.**, 2004. Random networks: eigenvalue spectra, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **338(1)**, 76–83.

- [67] **Chung, F., Lu, L. ve Vu, V.**, 2003. Spectra of random graphs with given expected degrees, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **100(11)**, 6313–6318.
- [68] **Melrose, J.**, 1983. The Migdal-Kadanoff approximation: optimisation, generalisation, Ising model in external fields and the Migdal-Kadanoff hierarchies, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **16(5)**, 1041.

EKLER

EK A: Cayley Ağacında Laplasyen Özvektörlerinin Parametrizasyonu.

EK B: Kümülant Açılımı.

EK C: İkinci Mertebeden Pertürbasyon Açılımında Tekrarlama Bağıntısının Analizi.

EK D: Genelleştirilmiş Elmas Örgünün (Şekil 7.1) $\tilde{d} > 2$ Boyutlarında Mod Sayısının Ölçeklenmesi Yöntemi İle Elde Edilen Üsteller.

EK E: Cayley Ağacı Üzerinde $I_K(0)$ Fonksiyonunun Ölçeklenmesi.

EK F: Elmas Hiyerarşik Örgüsü Üzerinde $I_1(0)$ ve $I_2(0)$ Fonksiyonunun Ölçeklenmesi.

EK G: Cayley Ağacı ve Elmas Örgü’de Çizge Laplasyenin Özdeğer ve Özvektörleri İçin Nümerik Sonuçlar. (CD olarak.)

EK A : Cayley Ağacında Laplasyen Özvektörlerinin Parametrizasyonu

Laplasyen özvektörlerinin, $k = 0, \dots, r$ olmak üzere kuşak genliklerinin, ζ_k , kuşaklar ve alt-kuşaklar için harmonik fonksiyonlar cinsinden parametrize olduklarını gösterdik.

$$u_\mu(i) = \zeta_k \exp^{\pm i\theta_{k,j}} \quad (\text{A.1})$$

Burada $i = \sum_{k'=0}^{k-1} b^{k'} + j$ dir. $\theta = 2\pi/b$ ve l bir tamsayı olmak üzere, $\theta_{k,j}$, $\pm l\theta$ değerlerini alabilir. İndis j ise alt kuşaklar içindeki düğüm noktalarını temsil etmektedir.

Özdeğerler ve özvektörlerin karakterizasyonunu ait oldukları aileleri tanımlayarak yapabiliriz.

İlk aile I için, yalnızca bir tek özdeğer ve özvektör mevcuttur. Bu aile $\omega^I = 0$ özdeğeri ve ona karşı gelen bir sabit özvektörden oluşmaktadır. Özvektörün kuşak genlikleri tüm kuşaklar için aynı olup $\zeta_k = 1$ dir. Aynı şekilde $\theta_{k,j} = 0$ tüm kuşak ve alt-kuşaklar için sabittir.

İkinci aile, II , $n = 2$ ve 5 e karşı gelmektedir ve dört özdeğer-özvektör çiftine sahiptir. Özdeğerler, $\omega_\pm^{II} = (\alpha_\pm - 1) / \alpha_\pm$ olup, kabuk genlikleri $\zeta_0 = 0$, $\zeta_1 = 1$ ve $\zeta_2 = \alpha_\pm$ dir. Kabuklar içinde özvektör elemanları, $(k = 1)$ inci kabukta $e^{\pm il\theta}$ ve kabuk elemanları için $l = 1, 2, \dots, b$ olmaktadır. Diğer bir deyişle, $\theta_{1,l} = l\theta$ olur. İkinci kabukta ise $(k = 2)$, b^2 tane düğüm noktası vardır. İkinci kabuk içinde alt-kabuklarda özvektör elemanları $g = 1, \dots, b$ için $e^{\pm ig\theta}$ olur.

Üçüncü aile, III , karşı geldiği $(n = 3)$ üncü ayrık özdeğerler kümesi için $\omega^{III} = 1$ olan $b(b - 1)$ tane özdeğere sahiptir. Bu özdeğerlere karşı gelen özvektörler için kabuk genlikleri ise $\zeta_0 = 0$, $\zeta_1 = 0$ ve $\zeta_2 = 1$ olur. İkinci kabuk $(k = 2)$ için, $l = 1, \dots, b^2$ ve $\theta_{2,l} = l\theta$ olmak üzere, sıfırdan farklı elemanlar $e^{\pm i\theta_{2,l}}$ olmaktadır. Ancak bu şekilde $b(b - 1)$ elemandan yalnızca 2 tanesi elde edilebilir. Bu durumda alt-kabuk içinde simetri kırılımı yapmamız gerekmektedir.

Şimdi özel olarak $b = 3$ için düşünüp, genellemeyi de kaybetmeyecek şekilde, aşağıdaki tanımlamayı yapabiliriz.

$$\mathbf{e}_0^\pm \equiv (e^{\pm i\theta}, e^{\pm 2i\theta}, 1), \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{e}_1^\pm \equiv (e^{\pm 2i\theta}, 1, e^{\pm i\theta}) = e^{i\theta} \mathbf{e}_0^\pm, \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{e}_2^\pm \equiv (1, e^{\pm i\theta}, e^{\pm 2i\theta}) = e^{2i\theta} \mathbf{e}_0^\pm, \quad (\text{A.4})$$

Burada ardışık vektörler $\mathbf{e}_g^\pm$, $\mathbf{e}_0^\pm$ 'nin elemanlarının çevrimsel permütasyonlarından başka birşey değildir. İki tane özvektör, alt-kabukları $(k = 2)$ nci kabukta seçerek aşağıdaki biçimde elde edilir.

$$\mathbf{v}_1^\pm = (\mathbf{e}_0^\pm, \mathbf{e}_1^\pm, \mathbf{e}_2^\pm). \quad (\text{A.5})$$

Bu ailenin kalan dört vektörüne ise alt-kabukların çevrimsiz permütasyonları alınarak ulaşılır. Bu vektörler,

$$\mathbf{v}_2^\pm = (\mathbf{e}_0^\pm, \mathbf{e}_2^\pm, \mathbf{e}_1^\pm), \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{v}_3^\pm = (\mathbf{e}_1^\pm, \mathbf{e}_0^\pm, \mathbf{e}_2^\pm) \quad (\text{A.7})$$

olur. Burada kabuktaki yansıma simetrisi elimine edilerek [50], çevrimsiz permütasyon sayısı $\binom{3}{2}$ bulunur.

Dördüncü ailenin, IV , yalnızca iki elemanı vardır ve özdeğerleri $\omega_\pm^{IV} = b + 1 \pm \sqrt{b}$ 'dir. Kabuk genlikleri ise $\zeta_0 = \pm\sqrt{b^3}$, $\zeta_1 = -b \pm \sqrt{b}$ ve $\zeta_2 = 1$ olmaktadır.

Çizelge A.1: Dallanma sayısı $b = 3$ olan iki kuşak büyütülmüş Cayley ağacının özdeğer ve özvektörleri. Çizelgenin ilk satırındaki tamsayılar μ etiket değerlerini, ikinci satırındaki tamsayılar ise $nnci$ ayırık özdeğeri belirtmektedir. Küçükten büyüğe doğru sıralanmış özdeğerler, $\alpha_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1+4/b}}{2}$ olmak üzere, $\omega^{(1)} = 0$, $\omega^{(2)} = (\alpha_+ - 1)/\alpha_+$, $\omega^{(3)} = 1$, $\omega^{(4)} = b + 1 - \sqrt{b}$, $\omega^{(5)} = (\alpha_- - 1)/\alpha_- = 1/\omega^{(2)}$, $\omega^{(6)} = b + 1 + \sqrt{b}$ 'dir. Burada $\theta = 2\pi/b$ olarak tanımlanmış olup, $\mu = 2, 3, 11, 12$ and $4, \dots, 9$ etiketine sahip özvektörler içinde gözüken nümerik faktörler $\exp(i\ell\theta)$, $\ell = 1, 2, \dots, b$ ifadesinin gerçel ve imajiner kısımlarına karşı gelir. Çizgenin ikinci satırında 4 ve 6 ile işaretlenmiş sütunlarda görünen sabitlerin değerleri $p = -b - \sqrt{b}$, ve $q = -b + \sqrt{b}$ 'dir. Normalizasyon sabitleri dahil edilmemiştir. Benzer simetriye sahip özvektörlere ait olmalarına rağmen 2nci ve 5nci ayırık özdeğerler ile 4ncü ve 6ncı ayırık özdeğerler oldukça farklıdır.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	2	2	3	3	3	3	3	3	4	5	5	6
1	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\sqrt{b^3}$	0	0	$+\sqrt{b^3}$
1	-1/2	$\sqrt{3}/2$	0	0	0	0	0	0	p	-1/2	$\sqrt{3}/2$	q
1	-1/2	$-\sqrt{3}/2$	0	0	0	0	0	0	p	-1/2	$-\sqrt{3}/2$	q
1	1	0	0	0	0	0	0	0	p	1	0	q
1	$-(1/2)\alpha_+$	$(\sqrt{3}/2)\alpha_+$	-1/2	0	0	$\sqrt{3}/2$	0	0	1	$-(1/2)\alpha_-$	$(\sqrt{3}/2)\alpha_-$	1
1	$-(1/2)\alpha_+$	$(\sqrt{3}/2)\alpha_+$	-1/2	0	0	$-\sqrt{3}/2$	0	0	1	$-(1/2)\alpha_-$	$(\sqrt{3}/2)\alpha_-$	1
1	$-(1/2)\alpha_+$	$(\sqrt{3}/2)\alpha_+$	1	0	0	0	0	0	1	$-(1/2)\alpha_-$	$(\sqrt{3}/2)\alpha_-$	1
1	$-(1/2)\alpha_+$	$-(\sqrt{3}/2)\alpha_+$	0	-1/2	0	0	$\sqrt{3}/2$	0	1	$-(1/2)\alpha_-$	$-(\sqrt{3}/2)\alpha_-$	1
1	$-(1/2)\alpha_+$	$-(\sqrt{3}/2)\alpha_+$	0	-1/2	0	0	$-\sqrt{3}/2$	0	1	$-(1/2)\alpha_-$	$-(\sqrt{3}/2)\alpha_-$	1
1	$-(1/2)\alpha_+$	$-(\sqrt{3}/2)\alpha_+$	0	1	0	0	0	0	1	$-(1/2)\alpha_-$	$-(\sqrt{3}/2)\alpha_-$	1
1	α_+	0	0	0	-1/2	0	0	$\sqrt{3}/2$	1	α_-	0	1
1	α_+	0	0	0	-1/2	0	0	$-\sqrt{3}/2$	1	α_-	0	1
1	α_+	0	0	0	1	0	0	0	1	α_-	0	1

EK B : Kümülant Açılımı.

Beklenen değer $\langle e^x \rangle$ ifadesi için eksponansiyel e^x 'in 2nci mertebeye kadar Taylor açılımından,

$$\begin{aligned}\langle e^x \rangle &= \langle 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 \rangle \\ &= 1 + \langle x \rangle + \frac{1}{2!}\langle x^2 \rangle\end{aligned}\quad (\text{A.8})$$

olur ve $X \equiv \langle x \rangle + \frac{1}{2!}\langle x^2 \rangle$ tanımı ile, denklem (A.8) yeniden yazılırsa

$$\langle e^x \rangle = 1 + X \quad (\text{A.9})$$

olur. Şimdi her iki tarafın doğal logaritmasını alarak elde ettiğimiz $\ln \langle e^x \rangle = \ln(1 + X)$ eşitliğinin sağ tarafına 2nci mertebeye kadar $x = 0$ civarında Taylor açılımı uygularsak,

$$\ln \langle e^x \rangle = \ln(1 + X) = \ln 1 + X - \frac{1}{2!}X^2 \quad (\text{A.10})$$

olur. Böylece X değerini denklem (A.10)'da yerine yazıp, yalnız 2nci mertebeye kadar olan terimleri alarak,

$$\ln \langle e^x \rangle = \langle x \rangle + \frac{1}{2!}\langle x^2 \rangle - \frac{1}{2!}\langle x \rangle^2 \quad (\text{A.11})$$

açılımını elde ederiz. Denklem (A.11)'den $\langle e^x \rangle$ ifadesini çekersek,

$$\langle e^x \rangle = e^{\langle x \rangle} e^{\frac{1}{2!}[\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2]} \quad (\text{A.12})$$

kümülant açılımını elde etmiş oluruz.

olması gerekir. Bununla beraber, Gaussian sabit noktası haricinde elde edilen sabit nokta x^* için, $f(x)$ fonksiyonunun, $x - x^* \ll 1/a_2$ değerinde birinci mertebeye kadar Taylor açılımından

$$f(x) = f(x^*) + f'(x)|_{x^*}(x - x^*) + \dots \quad (\text{A.19})$$

olur. Sabit noktada $f(x^*) = x^*$ ve $\lambda \equiv f'(x)|_{x^*}$ için,

$$f(x) - x^* = \lambda(x - x^*) \quad (\text{A.20})$$

olur. Sabit noktanın itici veya çekici olması, λ 'nın mutlak değerinin 1'den büyük veya küçük olmasına bağlıdır.

$$x^* := \begin{cases} \text{itici sabit nokta} & , |\lambda| > 1 \\ \text{çekici sabit nokta} & , |\lambda| < 1 \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

Böylece çekici bir sabit noktanın varlığında, $\lambda < 1$ için denklem (A.16)'den $|2 - a_1| < 1$ olur ve a_1 sabiti $3 > a_1 > 1$ aralığında değerler alır.

Böylece sabit noktanın varlığını, a_1 katsayısına kuvvetle bağlı biçimde buluruz. Örneğin, $p = 3$ için a_1 katsayısında ölçeklenme sabitini $B = 2$ alarak, $\zeta - \phi_{4,1} < \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1.585$ koşulunu elde ederiz. Bu farkın 1.585'den daha büyük olması durumunda sıfırdan farklı stabil bir sabit nokta değil, periyot-2 davranışı; fark büyüdükçe sırasıyla, periyot-4 ve kaotik davranış gözledik.

EK D: Genelleştirilmiş Elmas Örgünün (Şekil 7.1) $\tilde{d} > 2$ Boyutlarında Mod Sayısının Ölçeklenmesi Yöntemi İle Elde Edilen Üsteller.

Kip sayısının ölçeklenmesi yönteminde eşlenim sabitinin birinci mertebeye kadar pertürbasyon açılımında indirgenmiş sıcaklık için tekrarlarba bağıntısı aşağıdaki gibidir.

$$r' = B^{\phi_2} r_0 + 12v_0 B^{\phi_1+\phi_2} B^{-\phi_{2,1}^\ell} [I_1^{(0)} - r_0 I_2^{(0)}] . \quad (\text{A.22})$$

Burada alan renormalizasyon faktörü,

$$z^2 = B^{\phi_1+\phi_2} \quad (\text{A.23})$$

olup eşlenim sabiti için tekrarlarba bağıntısı birinci mertebeden pertürbasyon açılımında değişmemektedir.

$$v' = v_0 B^{2(\phi_1+\phi_2)} B^{-\phi_{4,1}} . \quad (\text{A.24})$$

Cayley ağacı ve elmas örgüde bu mertebede Gaussien sabit noktası kararlıdır.

İkinci mertebeden terimleri dahil ettiğimizde ise, en büyük özdeğerin ölçeklenmesi (Bkz. Bölüm 3.1.1.2) yönteminin elde ettiğimiz üstellere bağılı olarak bulduğumuz denklem (A.25)'deki tekrarlarba bağıntısına benzer olarak,

$$r' = B^{-\phi_2} r_0 + 12v_0 B^{\phi_1+\phi_2} [B^{-\phi_{2,1}^\ell} (I_1^{(0)} - r_0 I_2^{(0)}) - 6v_0 (B^{-\phi_{2,2}} + B^{-\phi_{2,2'}} + \frac{2}{3} B^{-\phi_{2,2''}})] \quad (\text{A.25})$$

indirgenmiş sıcaklık için tekrarlarba bağıntısında da alan renormalizasyon faktörü dahil, tüm üsteller mod sayısının ölçeklenmesi yöntemi (Bkz. Bölüm 3.1.1.1) ile hesaplanmaktadır. Eşlenim sabiti için tekrarlarba bağıntısı, yine en büyük özdeğerin ölçeklenmesi yönteminde elde ettiğimiz denklem (6.30)'a benzerdir. Ancak yine tüm ölçeklenme üstelleri mod sayısının ölçeklenmesi yönteminden elde edilir. Elde edilen tüm ölçeklenme üstelleri Çizelge A.2'de verilmiştir.

Çizelge A.2: Daha yüksek spektral boyut değerlerinde; genelleştirilmiş elmas örgü (Şekil 7.1). Spektral yoğunluk üsteli β , spektral boyut $\tilde{d}$, alan renormalizasyon faktörünün üstelleri z^4 ve 4ncü mertebeden etkileşim terimlerine karşı gelen Feynman diyagramları için, a_1^V ve stabil sabit nokta v^* farklı $p \leq 7$ değerleri için elde edilmiştir. Spektral boyut, $p \geq 7$ için $\tilde{d} > 4$ tür.

p	β	$\tilde{d}$	ζ^V	$\phi_{4,1}^V$	$\phi_{4,2}^V$	$\phi_{4,2'}^V$	a_1^V	v^*
2	0	2	4	1.99 ± 0.03	1.11 ± 0.09	$\sigma_{4,2'} \sim 0$	4	0
3	0.40	2.80	3.43	1.95 ± 0.03	1.50 ± 0.09	$\sigma_{4,2'} \sim 0$	2.69	0.0130
4	0.66	3.32	3.20	2.01 ± 0.04	1.74 ± 0.04	$\sigma_{4,2'} \sim 0$	2.29	0.0129
5	0.83	3.46	3.10	2.04 ± 0.03	1.80 ± 0.09	$\sigma_{4,2'} \sim 0$	2.14	0.0122
7	1.06	4.12	2.97	2.10 ± 0.04	1.82 ± 0.05	$\sigma_{4,2'} \sim 0$	1.82	0.0104
8	$\beta > 1$	$\tilde{d} > 4$	2.84	1.980 ± 0.06	1.80 ± 0.07	$\sigma_{4,2'} \sim 0$	1.815	0.0110

EK E : Cayley Ağacı Üzerinde $I_K(0)$ Fonksiyonunun Ölçeklenmesi

Cayley ağacı üzerinde $K = 1, 2$ için $I_K(B)$ fonksiyonunu genel olarak,

$$I_K(B) \equiv \sum_{\mu=\mu_B}^N \omega_{\mu}^{-K} , \quad (\text{A.26})$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Çizge Laplasyeninin ayrık özdeğerleri ve onların yozluk sayılarını veren yaklaşık formülleri (Denklem (??) ve (3.43)) kullanarak, bu fonksiyonu açıkça hesaplamak istiyoruz. Şimdi ölçeklenme faktörünü dallanma sayısının, b , bir kuvveti olarak alalım.

$$B_k = b^k . \quad (\text{A.27})$$

Böylece toplama katılacak özdeğerlerin, en yüksek yozluğa sahip $\omega^* = 1$ özdeğerinden küçük olacağını k 'nın en küçük değeri $k = 1$ bile garanti edebilir. En küçük ayrık özdeğerin etiketini μ_{B_k} notasyonu ile uyumlu olması için n_k olarak tanımlayalım. Böylece

$$I_K^{(0)}(B_k) = A_K + \sum_{n=n_k}^r \tau_n [\omega^{(n)}]^{-K} . \quad (\text{A.28})$$

olur ve kuşak sayısına eşit k değeri için $N/B_k = N/B_r \simeq 1$ yani $b^r \propto N$ 'dir. Burada A_K sabiti büyük özdeğer bölgesinde, $\omega^{(n)} > 1$, tüm ayrık özdeğerler üzerinden alınan toplamı ifade eder.

$$A_K = \sum_n [\omega^{(n)}]^{-K} . \quad (\text{A.29})$$

Denklem (A.28)'de τ_n ve $\omega^{(n)}$ değeri yerine konursa,

$$I_K^{(0)}(B_k) = A_K + \sum_{n=n_k}^r \frac{b^{(n-2)}(b-1)}{a_n b^{-(r-n+2)K}} . \quad (\text{A.30})$$

olur. Cayley ağacında a_n 'nin bir sabite yakınsadığını biliyoruz ve $K = 1$ için toplam ifadesinde pay ve paydayı b^{n-2} ile bölüp ifadeyi sadeleştirebiliriz.

$$I_1^{(0)}(B_k) = A_1 + \frac{b^r(b-1)}{a} \sum_{n=n_k}^r 1 = A_1 + \frac{b^r(b-1)}{a} (r - n_k + 1) . \quad (\text{A.31})$$

Burada $n_k = r - k + 1$ olduğunu kullanarak,

$$I_1^{(0)}(B_k) = A_1 + \frac{b^r(b-1)}{a} k , \quad (\text{A.32})$$

veya $k = \ln B / \ln b$ için, ölçeklenme parametresi B_k 'ye logaritmik olarak bağlı olan

$$I_1^{(0)}(B_k) = A_1 + \frac{b^r(b-1)}{a \ln b} \ln B_k \quad (\text{A.33})$$

ifadesini buluruz. Benzer biçimde $K = 2$ için, denklem (A.30)'den

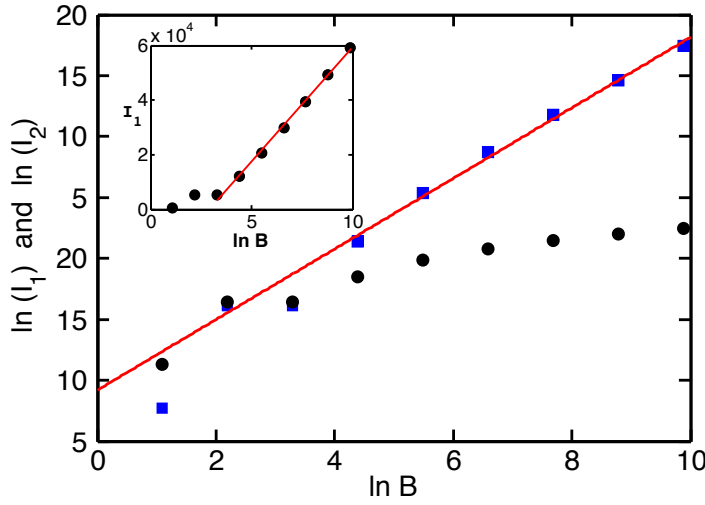
$$I_2^{(0)}(B_k) = A_2 + \frac{b^{r+2}(b^k - 1)}{a^2} \quad (\text{A.34})$$

veya $b^k = B_k$ eşitliğini yerine koyarak,

$$I_2^{(0)}(B_k) = \text{const.} + \frac{b^{r+2}}{a^2} B_k \sim B(k) , \quad (\text{A.35})$$

buluruz. Burada $I_2^{(0)}$ 'ın ölçeklenme parametresi B_k 'ya lineer olarak bağlı olduğu görülür.

Birinci mertebeden etkileşimler için Cayley ağacı üzerinde sayısal olarak hesapladığımız $I_1^{(0)}$ ve $I_2^{(0)}$ terimlerinin ölçeklenme davranışları sırasıyla $I_1^{(0)} \sim \ln B$ ve $I_2^{(0)} = B^{1.09 \pm 0.04}$, Şekil A.2'de gösterilmiştir.

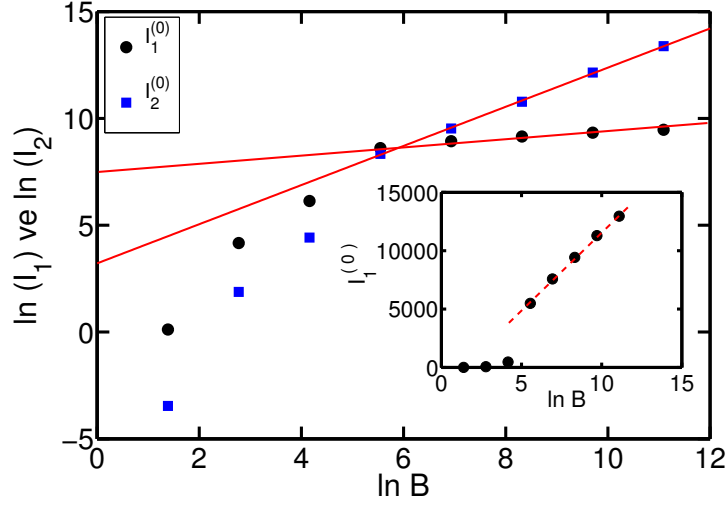


Şekil A.2: Cayley ağacı için $I_1^{(0)}$ ve $I_2^{(0)}$ 'ın ölçeklenme davranışları sırasıyla daire ve küçük karelerle gösterilmiştir. Lineer fit çizgisinin eğimi 1.09 ± 0.04 'tür. Küçük resimde $I_1^{(0)}$ 'ın $\ln B$ 'ye göre yarı logaritmik eksenle çizdirilen grafiği görülmektedir.

Cayley ağacı üzerinde, birinci mertebeden etkileşim teorisi için, hesapladığımız ölçeklenme üstelerini denklem (6.24) ve (6.27)'de yerine koyduğumuzda $r^* = 0$, $v^* = 0$ sabit noktasını bulduk. Böylece birinci mertebeden etkileşimlerin dahil edildiği Gaussien modeli için sabit noktanın kararlı olduğunu gördük.

EK F : Elmas Hiyerarşik Örgüsü Üzerinde $I_1^{(0)}$ ve $I_2^{(0)}$ Fonksiyonunun Ölçeklenmesi

Benzer durum elmas örgü için de geçerlidir. Birinci mertebeden etkileşimler için elmas örgü üzerinde nümerik olarak hesapladığımız $I_1^{(0)}$ ve $I_2^{(0)}$ terimlerinin ölçeklenme davranışları sırasıyla $I_1^{(0)} \sim \ln B$ ve $I_2^{(0)} = B^{0.92 \pm 0.07}$ olup, Şekil A.3’de gösterilmiştir.



Şekil A.3: Cayley ağacı için $I_1^{(0)}$ ve $I_2^{(0)}$ 'ın ölçeklenme davranışları sırasıyla daire ve küçük karelerle gösterilmiştir. Büyük B değerlerinde (küçük özdeğer bölgesinde) uygulanan kuvvet yasası yaklaşımından $I_2^{(0)}$ 'nin davranışı $I_2^{(0)} \sim B^{0.92 \pm 0.07}$ olur. Küçük resimde $I_1^{(0)}$ 'ın $\ln B$ 'ye göre yarı logaritmik ekseninde çizdirilen grafiğinde, ölçeklenme bölgesinde $I_1^{(0)} \sim \ln B$ doğrusal ilişkisi gösterilmiştir.

Burada da birinci mertebeden etkileşim teorisi için $I_1^{(0)}$ ve $I_2^{(0)}$ 'ın ölçeklenme üstelleri, indirgenmiş sıcaklık ve eşlenim sabitinin tekrarlama bağıntılarında (denklem (6.24) ve (6.27)) yerine konduğunda, Gaussien sabit noktasını ($r^* = 0$, $v^* = 0$) elde ederiz.

EK G : Cayley Ağacı ve Elmas Örgü’de Çizge Laplasyeninin Özdeğer ve Özvektörleri İçin Nümerik Sonuçlar.

CD olarak sunulmuştur.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Aslı TUNCER ÖZDEMİR

Doğum Tarihi ve Yeri : 1980 / İSTANBUL

E-Posta : ozdemiras@itu.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU:

Lisans : 2004, İstanbul Teknik Üniv., Fen Ed. Fakültesi, Fizik Müh. Bölümü

Yükseklisans : 2007, İstanbul Teknik Üniv., Fen Ed. Fakültesi, Fizik Müh. Bölümü

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

- **En iyi poster ödülü:** 3rd European PhD Summer School and Workshop on “Mathematical Modeling of Complex Systems” (15-26 July, 2013), Heraklion, Greece.
- **Asistan:** Işık Üniversitesi, Fizik Bölümü, (2013-devam)
- **Uygulama Asistanı:** Condensed Matter Physics Systems Biology Summer School (2010), Feza Gürsey Enstitüsü, Türkiye.
- **Yardımcı Asistan:** İTÜ, Fizik Mühendisliği Bölümü, (2001-2003).

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR/SUNUMLAR:

- **Tuncer, A.,** Erzan, A., "Spectral renormalization group for the Gaussian model and ψ^4 theory on nonspatial networks." *Phys. Rev. E.*, **92**, 022106 (2015)
- **Tuncer, A.,** Erzan A., Spectral Renormalization Group for a scalar ψ^4 theory on the Cayley tree", (Sözlü Sunum), International Conference on Statistical Physics "Sigma-Phi 2014", 07-11 July 2014, Rhodes, Greece.
- **Tuncer, A.,** Erzan A., Spectral Renormalization for Gaussian Model on a Cayley Tree", (Poster Sunum), European Conference on Complex Networks, 16-20 Sep. 2013, Barcelona, Spain.
- **Tuncer, A.,** Erzan A., Spectral Renormalization for Gaussian Model on a Cayley Tree, (Poster Presentation), 3rd European PhD Sch. On “Mathematical Modelling of Complex Systems” , 14-28 July 2013, Heraklion, Greece.
- **Tuncer, A.,** Erzan A., Critical Exponents on Scale Free Networks From Spectral Renormalization Group,(Oral Presentation), 3rd International Workshop on Statistical

Mechanics and Dynamical Systems, ITAP, Turunç, Marmaris, Turkey, 27Aug-2Sep. 2012

▪ **Tuncer, A.**, Erzan A., Ölçeksiz çizgeler üzerinde spektral Renormalizasyon Grubu ve Kritik Üsteller, (Sözlü sunum), 19. Statistical Physics Days, Sabanci University, 28-30 June 2012, Istanbul.

▪ **Tuncer, A.**, Erzan A., Ölçeksiz çizgeler üzerinde spektral Renormalizasyon Grubu ve Kritik Üsteller, (Sözlü sunum), TFD 29. Int. Physics Congres, Bodrum, 5-8 Sep. 2012, Bodrum.

DIĞER YAYINLAR SUNUMLAR VE PATENTLER:

Yayın Listesi:

▪ Erbaş, A., Yucesoy, B., **Tuncer A.**, Berker, N., "Phase diagrams and crossover in spatially anisotropic $d=3$ Ising, X Y magnetic, and percolation systems: Exact renormalization-group solutions of hierarchical models." *Phys. Rev. E.* **72.2**, 026129 (2005):.

▪ Demirtas, M., **Tuncer, A.**, and Berker, N., "Lower-Critical Spin-Glass Dimension from 23 Sequenced Hierarchical Models." *Phys. Rev. E.* **92**, 022136 (2015).