

15/398

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**YEREL OLMAYAN SONLU ORTAMDA SONLU
FARKLAR YÖNTEMİ İLE BİR BOYUTLU DALGA
YAYILIMI PROBLEMİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Ahmet Özkan ÖZER
(509011168)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 22 Aralık 2003
Tezin Savunulduğu Tarih : 15 Ocak 2004**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Esin İNAN (İ.Ü.)
Ortak Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Kamil ORUÇOĞLU (İ.T.Ü.)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof.Dr. Hasan ENGİN (İ.T.Ü.)
Doç. Dr. Faruk GÜNGÖR (İ.T.Ü.)
Yrd. Doç. Dr. Ünal ALDEMİR (İ.T.Ü.)**

Handwritten signatures of the supervisors and jury members.

OCAK 2004

151 398

ÖNSÖZ

Çalışmalarım sırasında ilgi ve değerli yardımlarını esirgemeyen Sayın hocam Prof. Dr. Esin İNAN' a teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışmalarına katkılarından dolayı Yrd. Doç. Dr. Kamil ORUÇOĞLU' na teşekkürü bir borç bilirim.

Ocak 2004

Ahmet Özkan ÖZER

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ	v
ŞEKİL LİSTESİ	vii
ÖZET	viii
SUMMARY	ix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL DENKLEMLER İLE İLGİLİ ÖZET BİLGİ	5
2.1. Giriş	5
2.2. Denklik denklemleri	5
2.3. Yerel Olmayan elastik modüllerin belirlenmesi	11
3. YEREL OLMAYAN TEORİ İLE SONLU ORTAMDA BİR BOYUTLU DALGA YAYILIMI	14
3.1. Giriş	14
3.2. Problemin tanımı ve genel denklemler	14
4. SONLU FARKLAR YÖNTEMİ İLE YAKLAŞIK ÇÖZÜM	26
4.1. Giriş	26
4.2. Sonlu farklar yöntemi için bazı temel bilgiler	26
4.2.1. Sonlu farklar yöntemi	27
4.2.2. Değişkenlerin ayrıştırılması (Izgaralama)	30
4.3. Fark diferansiyel denklem sisteminin çözümünde kullanılacak şema	33
5. YARDIMCI PROBLEMLER VE İLGİLİ SONLU FARK ŞEMALARI	36
5.1. Giriş	36
5.2. Yerel teori ile bir boyutlu sonlu ortamda dalga yayılımı problemi	36
5.3. Yerel olmayan teori ile bir boyutlu sonsuz ortamda dalga yayılımı	37
5.4. Yerel teori ile elde edilen problemin sonlu fark şeması	39
5.5. Yerel olmayan teori ile sonsuz ortam için elde edilen problemi sonlu fark şeması	41
5.6. İlgili şemaların kararlılık ve tutarlılık analizi	43
5.6.1. CFL Koşulu	43
5.6.2. Kararlılık(stability) için Fourier analizi	44
5.6.3. Tutarlılık analizi	46
6. ÖRNEK PROBLEMLER	49

6.1. Giriş	49
6.2. Örnek problem-1	49
6.3. Yerel olmayan ortamda sonlu problem ile yerel olmayan ortamda sonsuz problem	50
6.4. Yerel olmayan ortamda sonlu problem ile yerel sonlu problem	56
6.5. Örnek problem-2	63
6.6. Yerel olmayan sonlu ortam problemi ile yerel olmayan sonsuz problem	64
6.7. Yerel olmayan sonlu problem ile yerel sonlu problem	67
6.8. Sonuçlar	70
KAYNAKLAR	72
EKLER	76
ÖZGEÇMİŞ	88

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 6.1. 55 adımdaki mavi ve turuncu çözümlerin aldığı değerler	55
Tablo 6.2. Genliklerdeki yüzde değişim.....	56
Tablo 6.3. 10. adıma karşı gelen değerler.....	66
Tablo 6.4. Genliklerdeki yüzde değişim.....	67
Tablo A.1. 60. adım değerleri.....	75
Tablo A.2. 65. adım değerleri.....	76
Tablo A.3. 70. adım değerleri.....	77
Tablo A.4. 75. adım değerleri.....	78
Tablo A.5. 80. adım değerleri.....	79
Tablo A.6. 85. adım değerleri.....	80
Tablo A.7. 90. adım değerleri.....	81
Tablo B.1. 15. adım değerleri.....	82
Tablo B.2. 20. adım değerleri.....	83
Tablo B.3. 25. adım değerleri.....	84
Tablo B.4. 30. adım değerleri.....	85
Tablo B.5. 35. adım değerleri.....	86
Tablo B.6. 40. adım değerleri.....	87

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1 : Hareketli süreksizlik yüzeyi.....	7
Şekil 2.2 : Üçgen modül.....	12
Şekil 2.3 : Birinci tip eksponensiyel modül.....	12
Şekil 2.4 : İkinci tip eksponensiyel modül.....	13
Şekil 2.5 : Üçgen modül yapısı.....	13
Şekil 3.1 : Sonsuz ortamda üçgen modül.....	21
Şekil 3.2 : Uç noktalarda üçgen modülün bozulan yapısı.....	21
Şekil 3.3 : Bir boyutlu ortamın alt aralıklara ayrılması.....	22
Şekil 3.4 : Alt latis aralıklarında ayrıştırılan çözümler.....	23
Şekil 4.1 : Herhangi bir noktada tek değişkenli fonksiyonun türevi.....	27
Şekil 4.2 : Bağımsız değişkenlerin aralıklara bölünmesi.....	28
Şekil 4.3 : İki değişkenli fonksiyon için değişkenlerin ayrıştırılması.....	29
Şekil 4.4 : Grid noktalarının oluşumu.....	31
Şekil 5.1 : Sanal noktaların oluşumu.....	40
Şekil 5.2 : Anti simetrik sınır koşulları.....	41
Şekil 5.3 : ν' nün farklı değerleri için faz hataları.....	46
Şekil 6.1 : İlk 45 adım.....	51
Şekil 6.2 : Sola giden dalgaların sol uca çarpması.....	53
Şekil 6.3 : Yansıyan dalga.....	54
Şekil 6.4 : Ortalamalar alındıktan sonra 55. adım.....	55
Şekil 6.5 : İlk 35 adım.....	57
Şekil 6.6 : Sola giden dalgaların sol uca çarpması.....	59
Şekil 6.7 : Yansıyan dalgalar.....	60
Şekil 6.8 : Dalgaların yansdıktan sonraki ilerlemeleri.....	61
Şekil 6.9 : 70.-90. Adımlar.....	62
Şekil 6.10 : Başlangıç durumu.....	64
Şekil 6.11 : 10. adımda oluşan osilasyonlar.....	65
Şekil 6.12 : Ortalamalar alındıktan sonra 10. adım.....	66
Şekil 6.13 : İlk 20 adım.....	68
Şekil 6.14 : Yansıyan dalgalar.....	69
Şekil A.1 : 60. adım.....	75
Şekil A.2 : 65. adım.....	76
Şekil A.3 : 70. adım.....	77
Şekil A.4 : 75. adım.....	78
Şekil A.5 : 80. adım.....	79
Şekil A.6 : 85. adım.....	80
Şekil A.7 : 90. adım.....	81
Şekil B.1 : 15. adım.....	82
Şekil B.2 : 20. adım.....	83
Şekil B.3 : 25. adım.....	84

Şekil B.4	: 30. adım.....	85
Şekil B.5	: 35. adım.....	86
Şekil B.6	: 40. adım.....	87



YEREL OLMAYAN SONLU ORTAMDA SONLU FARKLAR YÖNTEMİ İLE BİR BOYUTLU DALGA YAYILIMI PROBLEMİ

ÖZET

Bu çalışmada yerel olmayan sürekli ortamlar mekaniği çerçevesinde sonlu bir ortamda dalga yayılımı incelenerek uç etkilerinin problem içerine girmesi sağlanmış ve sonlu farklar yöntemi ile sayısal çözümler aranmıştır.

Bu amaçla yerel olmayan, l uzunluklu, düzgün yoğunluklu, lineer, izotrop, elastik bir ortam ele alınmıştır. İntegro diferansiyel denklem formunda elde edilen hareket denkleminde yerel olmayan etkileri gösteren çekirdek fonksiyonu üçgen formda kabul edilerek işlem yapılmış ve fark diferansiyel denklemleri elde edilmiştir. Bu denklemlerin çözümü için sonlu farklar yöntemi kullanılmıştır. Bu amaçla bölge alt aralıklara ayrılmış ve belirli başlangıç koşulları altında sayısal çözümler elde edilmiştir. Bu sonuçlar yerel teori ile karşı gelen sonlu problem ve yerel olmayan teori ile karşı gelen sonsuz problemin sayısal çözümleri ile karşılaştırılmıştır.

Uç etkileri nedeni ile yerel olmayan sonlu problemde ilerleyen dalgaların hızında ve genliğinde kayda değer azalmalar gözlenmiştir.

ONE-DIMENSIONAL WAVE PROPAGATION PROBLEM IN A NONLOCAL FINITE MEDIUM WITH FINITE DIFFERENCE METHOD

SUMMARY

In the present work, the wave propagation problem in a finite elastic medium is investigated in the context of the nonlocal continuum mechanics. Main purpose here is to show the end effects. Numerical solutions are found by finite difference method.

A linear-isotropic elastic medium of length l is considered. Governing equations are obtained as a system of difference - differential equations by considering the attenuation function that depends on the distance between the material particles, has triangular form. To apply the method of finite difference, system is divided to some subintervals. The numerical solutions of the system with specific initial values are found and given in the chapter 6. Obtained solutions are compared with the corresponding finite problem in the local theory and the infinite problem in nonlocal theory.

In the nonlocal finite problems, it is observed that the velocity of the propagating waves is slowing down and the amplitude is decreasing by the end effects.

1. GİRİŞ

Bu çalışmada, yerel olmayan sürekli ortamlar teorisi çerçevesinde sonlu bir ortamda dalga yayılımı problemi incelenmiştir. Bu amaçla önce belirli bir çekirdek kabulü ile genel denklemler çıkarıldıktan sonra yaklaşık çözümler aranmıştır. Yerel olmayan teorelin sonlu ortamlarda probleme getirdiği farklılıkları görebilmek için elde edilen sonuçlar, yerel teori ile karşı gelen sonlu problemin çözümü ve yerel olmayan teori ile karşı gelen sonsuz problemin çözümü karşılaştırılmıştır.

Bilindiği gibi yerel sürekli ortamlar mekaniğinin dayandığı temel aksiyonlardan biri yakın komşuluk aksiyomudur. Bu varsayım sonucu uzak noktadaki etkiler hesaba katılmaz ve bir noktada meydana gelen değişimlerin sadece ele alınan bu noktanın termoeenerjetik faktörlerine bağlı olduğu düşünülür. Başka bir deyişle o noktada tanımlanan herhangi bir büyüklük sadece o noktanın fonksiyonu olarak ele alınır. Oysa ki doğada madde taneciklerden oluşmaktadır ve her tanecik cismi oluşturan diğer taneciklerle etkileşim halindedir. Günümüzdeki ölçme tekniklerinin gelişmesinin de yardımıyla herhangi bir taneciğin komşu taneciklerle etkileşim içerisinde girdiğini gözlemlemek mümkündür.

Yerel olmayan etkilerin işleme katılması pek çok araştırmacının ilgisini çekmiş olmakla beraber bu konu daha çok 1970 – 1990 yılları arasında araştırmacıların çalışmalarını yoğunlaştırdığı konu olmuş ve klasik sürekli ortamlar mekaniğinin yanıtlayamadığı bir çok soruya uygulamada karşılaşılan örneklerle uyuyan sonuçlar elde edilmiştir. Bu konuda yapmış olduğu çalışmalarının çokluğu, elde ettiği sonuçların gerçekte uyuşumu konusundaki üstünlüğü nedeni ile öncelikle Eringen [1-6] 'den söz etmek yerinde olur. Burada yalnızca birkaç çalışmaya yer verilmiştir. Eringen' in çalışmalarından kolayca gözlemlendiği gibi ortamda dislokasyon, boşluk, çatlak gibi sürekliliği bozan unsurların olması halinde klasik sürekli ortamlar mekaniği ile gerçekte hiç uyuşmayan sonuçlar elde edilen birçok problemde yerel olmayan teori ile gerçeğe çok yakın sonuçlar bulunmuştur. Örneğin küçük şiddette yüklemeler altında bile ufak bir çatlağın uçlarında gerilmenin sonsuz çıkması klasik yerel sürekli ortamlar mekaniğinin bu tür bozukluklar içeren problemlerde yetersiz

kaldığı bilinmektedir. Yerel olmayan etkilerin işleme katılmasıyla yukarıda sözü edilen tekillikler ortadan kalkmıştır. Bu durum yerel olmayan sürekli ortamlar mekaniğinin yalnızca akademik merak sonucu ortaya çıkmış bir teori değil, klasik teorisinin yetersiz kaldığı noktalarda sorulara yanıt veren, gerçekçi bir teori olduğunu ortaya koymaktadır. Bu nedenle değişimleri yerel etkilere bağlayan yerel teori yerine yerel olmayan sürekli ortamlar mekaniğine olan ilgi gün geçtikçe artmıştır.

Yukarıda genel tanımı verilirken değinildiği gibi yerel teorisinin aksine, yerel olmayan teoride herhangi bir x noktasında, örneğin, gerilme tansörü bileşenleri cismin tüm x' noktalarının şekil değiştirme alanının fonksiyonel formu olduğu düşünülür. Bir atomun üzerine etkileyen atomlar arası kuvvetlerin bu atom ve bağlı bulunduğu komşu atomlar arasındaki atomik uzaklığın değişimine bağlı olduğu kristallerin yapılarından bilinmektedir. Bunun sürekli ortamlar mekaniğindeki karşılığı, herhangi bir x noktasındaki gerilme, cismin tüm noktaları olarak tanımladığımız x' noktalarının şekil değiştirme alanının bir fonksiyonel formu ifade edilerek verilebilir.

Sonuç olarak yerel olmayan teorisinin klasik teorideki kimi boşlukları dolduran, deneylere oldukça iyi uyum gösteren bir teori olarak bilimsel çerçeve içindeki yerini aldığı söylenebilir. Çatlak ve dislokasyon problemlerinin yanı sıra klasik elastisite teorisinde görüldüğünün aksine yerel olmayan teori ile sonsuz ortamlardaki elastik dalgaların dispersif karakter gösterdiği de kolayca gözlenmiştir. Bu dispersiyon tamamen bünyesel karakterlidir [7,8]. Bu örneklerle yerel olmayan teoriyle latis dinamiğinin atomik teorisi ile klasik yerel elastisite teorisi arasında eksik olan bağlantı zinciri görevini yerine getiriyor gözüyle bakılabilir.

Yerel olmayan teori ile yapılan bazı başka çalışmalar çok kısa olarak aşağıdaki gibi verilebilir. Eringen [9,10]'da genel yapıyı verdikten sonra sırasıyla yerel olmayan lineer elastik ve mikroelastik cisim için bünye denklemlerini çıkarmış ve tek boyutlu elastik dalga yayılım problemini ele alarak fiziksel gerçeklere uygun ve klasik yollarla elde edilemeyen sonuçlar elde etmiştir. Yerel olmayan teorisinin akışkan problemlerine uygulaması [11]'de verilmiş ve [12]'de termoelastik katıların yerel olmayan teorisi formüle edilmiştir. Bu paralelde yerel olmayan elastisitede dalga yayılım problemleri [13]'te çözülmüş ve [14]'de dislokasyon ve çatlak problemlerinin çözümleri yerel olmayan elastisite teorisi kullanarak aranmıştır. Eringen – İnan [15]'te termoelastik plaklarda boyuna dalgaların yayılımını incelemişlerdir. [16]'da yerel olmayan termoelastik dalgaların yayılımı incelenmiştir.

Mikroelastisite konusunda birçok çalışmaya imza atan Kunin [17]' de genel yapıyı vermiş, Kröner [18]' de çeşitli sürekli ortam varsayımları arasında yerel olmayan teorinin yeri üzerinde durarak temel sorunlara değinmiştir. Matematiksel temelleri [19]' da verilen varyasyonel metotla, [20], [21] ve [22]' de elastik katılar ele alınmışlardır. Daha sonra [23]' te polar elastik ortamlar, [24]' te mekanik ve varyasyonel yollarla elastik katılarda yerel olmayan etkilerle çeşitli problemler üzerinde durulmuştur. Yine [25]' te sonlu yerel olmayan elastisitenin bünye denklemlerini elde etmiş, anizotropik ve izotropik katılar için lineer teoriyi vererek yerel olmayan elastisite modülünün matematiksel ve fiziksel özelliklerini açıklamıştır. Tek boyutlu ve iki boyutlu problemlerde de yerel olmayan teori uygulaması görmek mümkündür. Örneğin, [26]' da konvolüsyon integrali biçiminde bünye denklemleri oluşturulmuş bir boyutlu problemlerin çözümüyle ilgilenilmiştir. Burada alınan çekirdek türü çok özel olmakla beraber bu yaklaşım ile ilginç sonuçlar elde edildiği söylenebilir.

Yerel olmayan teorinin çok etkili olduğu ve çarpıcı sonuçların elde edildiği bir başka konuda, basit temelleri 1950' lerde Kachanov [27] tarafından atılan ve gelişimini 1990 ve 2000' li yıllarda yapan sürekli hasar mekaniğidir. Artık temelde yerel olmayan bir teori olduğu kabul edilen sürekli hasar mekaniğinde [28, 29, 30] da pek çok problemin formülasyonu doğrudan doğruya yerel olmayan teori ile yapılmaktadır. Mikro yapıda mikro boşluk ve çatlakların var olduğunu kabul eden bir hasar mekaniği yapı olarak yerel olmayan bir problemidir. Ortalama alma yoluyla pek çok malzeme modeli ortaya atılmış olmakla beraber sonuçlarda ortaya çıkan pek çok boşluk yerel olmayan etkilerin işleme katılmasıyla [31] çözümlenmiştir. Benzer örneklerle plastisite teorisi [32] ve mikromorfik teorilerde de rastlanmaktadır.

Bu genel çerçeve dışında kalan bazı konularda ise matematiksel güçlükler aşılamadığı için fazla bir çalışma yapılmamış olmakla beraber genelde yerel olmayan sürekli ortamlar mekaniğinin yer aldığı çalışma sayısı azalmamış aksine bu konu klasik olmayan sürekli ortamlar mekaniği çerçevesinden çıkarılarak temel konular arasına girmiştir. Çünkü yerel olmayan sürekli ortamlar mekaniği kullanılarak elde edilen sonuçların gerçekte olan uyumu, araştırmacılara pek çok klasik ve klasik olmayan modellerde yerel olmayan etkilerin işleme katılmasının son derece doğal olduğunu düşündürmeye başlamıştır. Bu nedenle yerel olmayan sürekli ortamlar mekaniği modellerinde matematiksel güçlükler nedeniyle aydınlatılmayan

noktaların açığa çıkarılmasında büyük yarar vardır. Bu çalışma bu duruma bir örnek olarak alınabilir

Bu çalışmada genel probleme geçilmeden evvel ikinci bölümünde elastik katılar için yerel olmayan sürekli ortamlar mekaniğinin bünye denklemleri verilmiştir. Daha sonra problemin sunuluşuna temel oluşturan alan denklemleri elde edilmiş ve problemin yapısını etkileyen çekirdek yapıları ile ilgili genel bilgi sunulmuştur.

Çalışmanın izleyen bölümünde, yerel olmayan teoriyle sonlu bir ortamda dalga yayılımı problemine ait genel yapıdaki denklem sistemi elde edilmiştir. Bulunan denklem sistemi seçilen çekirdek ile beşinci ayıttı ele alınacak olan sayısal yöntemin uygulanabileceği uygun bir forma indirgenmiştir.

Dördüncü bölümde, problemin çözümünde kullanılacak sayısal yöntem ayrıntıları ile oluşturulmuştur. Bu yöntem ile oluşturulan şemanın dayandığı matematiksel yapı irdelenmiştir.

Beşinci bölümde ise, yerel teoride karşı gelen sonsuz ortam problemi ile yerel olmayan teoride karşı gelen sonsuz ortam problemi ele alınmış ve bu problemlere karşı gelen şemalar oluşturulmuştur Şemaların kararlılığı ve tutarlılığının sağlanması için gereken koşullar ele alınmıştır.

Altıncı bölümde dördüncü ve beşinci bölümde oluşturulan problemlerin sayısal çözümleri seçilen iki farklı başlangıç verisi için hesaplanmış ve karşı gelen çözümlerin grafikleri çizdirilmiştir. Ayrıca bu çalışmada ele alınan problemlerin sayısal çözümleri uzay adımı Δx için latis mesafesinin dörtte biri boyutunda, zaman adımı Δt için ise $10^{(-14)}$ boyutunda sayılarla incelendiğinden işlemci ve bellek kapasitesinin yüksek olduğu bilgisayarlarla hesapların yapılması zorunluluğu unutulmamalıdır. Daha sonra elde edilen sonuçlar üzerinde yorumlar yapılmıştır

2. TEMEL DENKLEMLER İLE İLGİLİ ÖZET BİLGİ

2.1. GİRİŞ

Bu bölümde öncelikle yerel olmayan sürekli ortamlar mekaniğinin temel denklik denklemleri üzerinde durularak kütle, momentum, enerjinin denklik denklemleri ile birlikte termodinamiğin ikinci yasası verilecektir. Bu denklik denklemleri daha evvel birçok yerlerde yayınlanmış olup çalışmamızın bütünlüğü açısından çok kısaca yinelenmiştir. Bu nedenle termodinamik kısıtlamalar ile yerel olmayan ortamlarda lineer, izotrop, elastik katılar için bünye denklemi oluşturulacaktır ve temel denklemler elde edilecektir. Bunlara ek olarak, yerel olmayan modüllerin yapısı ile ilgili bilgi verilecektir.

2.2. DENKLİK DENKLEMLERİ

Doğal olarak yerel olmayan teorideki denklik denklemleri ile klasik sürekli ortamlar mekaniğindeki denklik denklemleri arasında birtakım farklılıklar bulunmaktadır. Bu farklılıkları aşağıdaki şekilde özetleyip genel denklik denklemlerine geçilecektir.

$V(t)$ herhangi bir t zamanında E^3 Euclid uzayında cismin tüm noktalarını içine alan bir bölgeyi ve $\sigma(t)$ bu bölge içerisinde bir süreksizlik yüzeyini göstermek üzere, $V(t)$ üzerinde tanımlanan global korunum yasalarının, her $P(t) \subseteq V(t)$ alt bölgesinde tanımlanan yerel korunum yasaları ile eşdeğer olmadığı açıktır. Global bir korunum yasası ψ gibi bir büyüklük için

$$\frac{d}{dt} \int_{V-\sigma} \psi dV - \int_{\partial V-\sigma} \tau_k dA - \int_{V-\sigma} g dV = 0 \quad (2.1)$$

şeklinde yazılabilir. Burada ψ kütle, enerji, momentum gibi cismin herhangi bir özelliğinin birim yoğunluğunu gösterebilir. Dolayısı ile

$$\int_{V(t)} \psi dV$$

ψ büyüklüğünün tüm hacim üzerindeki değerini,

$$\int_{V(t)} g dV$$

V üzerindeki bu büyüklüğün üretim oranı ve

$$\int_{\partial V(t)} (\tau_k) dA$$

yine bu özelliğin ∂V yüzeyi boyunca akısını göstermektedir. (2.1) denklemindeki ifadeler

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \psi dV = \int_{V(t)} D dV, \quad \int_{\partial V(t)} (\tau_k) dA = \int_{V(t)} F dV, \quad \int_{V(t)} g dV = \int_{V(t)} S dV \quad (2.2)$$

tanımları ile kısaca

$$\int_V (D - S - F) dV = 0 \quad (2.3)$$

şeklinde yazılabilir. Bunun anlamı integrandın V üzerindeki ortalamasının sıfır olması şeklinde ifade edilebilir. $T(V)$, V üzerinde integrallenebilir ve V üzerinde ortalaması sıfır olan fonksiyonlar sınıfını göstermek üzere

$$\int_V R dV = 0, \quad R \in T(V) \quad (2.4)$$

yazılırsa her $R \in T(V)$ için

$$D = S + F + R \quad (2.5)$$

olacaktır. Ayrıca her $R \in T(V)$ için, $P(t) \subseteq V(t)$ alt bölgesi düşünülecek olursa (2.1) ifadesi aşağıdaki yerel ifade şeklinde yazılabilir.

$$\int_P D dV = \int_P S dV + \int_P F dV + \int_P R dV \quad (2.6)$$

Sonuç olarak (2.6) ifadesi

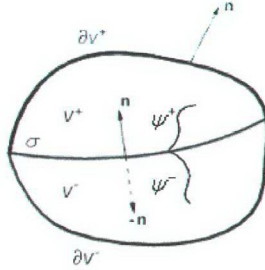
$$\frac{d}{dt} \int_P \psi dV = \int_P S dV + \int_{\partial P} (\tau_k) dA + \int_P R dV \quad (2.8)$$

veya

$$\frac{d}{dt} \int_P \psi dV = \int_P S dV + \int_{\partial P} (\tau_k) dA + \int_{V-P} R dV \quad (2.9)$$

formuna indirgenir. (2.9) ifadesindeki R ek terimlerine genellikle yerelleştirme artıkları denilir. Böylelikle, (2.9) ifadesi ile bir noktadaki büyüklüğün cismin diğer tüm noktalarından etkilenir söylemi doğrulanmış olur.

Yerel olmayan teoremin temel taşı olan yerelleştirme artıklarının hangi formda ve nasıl oluştukları belirlendikten sonra denklik denklemleri oluşturulabilir. Bunun için genel formda sürekli ortamlar mekaniğinin integral formdaki denklik denklemleri yazılarak korunum yasaları oluşturulabilir.



Şekil 2.1 Hareketli Süreksizlik Yüzeyi

Şekil 2.1' de görüldüğü gibi $\sigma(t)$, hareketli ve hızı $\mathbf{u}$ olan bir süreksizlik yüzeyi olmak üzere global korunum yasası

$$\frac{d}{dt} \int_{V-\sigma} \psi dV - \int_{\partial V-\sigma} \tau_k dA - \int_{V-\sigma} g dV = 0 \quad (2.10)$$

şeklinde yazılabilir. Burada ψ ve τ^k ifadeleri, σ üzerinde sıçrama süreksizliğine maruz kalabilirler. İntegrallerin tanım bölgesi belirli bir $\mathbf{u}$ hızıyla hareket eden süreksizlik yüzeyini içine almaz. Genelleştirilmiş Green – Gauss teoremiyle yukarıdaki integral denklem

$$\int_{V-\sigma} \left[\frac{d\psi}{dt} + \text{div}(\psi \mathbf{v}) - \tau_{k,k} - g \right] dV + \int_{\sigma} \left[\psi (v_k - u_k) - \tau_k \right] n_k dA = 0 \quad (2.11)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\mathbf{v}$ ortamdaki herhangi bir noktanın hız vektörüdür. Bu integraller yukarıda da özetlenen şekilde yerelleştirilirlerse genel olarak

$$\frac{d\psi}{dt} + \text{div}(\psi \mathbf{v}) - \tau_{k,k} - g = \hat{g}, \quad V-\sigma \text{ içinde} \quad (2.12)$$

$$\left[\psi (v_k - u_k) - \tau_k - \hat{\tau}_k \right] n_k = 0, \quad \sigma \text{ üzerinde} \quad (2.13)$$

sonuçları yazılabilir. Burada $\hat{g}$ ve $\hat{\tau}_k$ yerelleştirme artıklarıdır ve bilindiği üzere

$$\int_{V-\sigma} \hat{g} dV = 0, \quad \int_{\sigma} \left[\tau_k \right] n_k dA = 0 \quad (2.14)$$

olmalıdır.

1. Kütlenin Korunumu İlkesi

Bilindiği gibi bu ilke “bir maddesel hacmin toplam kütlesi hareketi sırasında değişmez.” şekline özetlenebilir. Bu durumda hacim içinde $\psi \Rightarrow \rho$, $\tau_k \Rightarrow 0$, $g \Rightarrow 0$, $\hat{g} \Rightarrow \hat{\rho}$ ve sınır üzerinde $\hat{\tau}_k \Rightarrow \hat{R}_k$ tanımları yapılarak (2.12) ifadesinden

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_k)_k = \hat{\rho}, \quad V - \sigma \text{ içinde} \quad (2.15)$$

ve (2.13) ifadesinden

$$\| \rho(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \| \mathbf{n} = \hat{\mathbf{R}}, \quad \sigma \text{ üzerinde} \quad (2.16)$$

$$\int_{V-\sigma} \hat{\rho} dV = 0, \quad \int_{\sigma} \hat{\mathbf{R}} dA = 0 \quad (2.17)$$

yazılabilir. Burada ρ kütle yoğunluğu, v_k hız vektörü, $\hat{\rho}$ $V - \sigma$ hacmi içinde tanımlanmış kütle yoğunluğu yerelleştirme artıkları, $\hat{\mathbf{R}}$ σ süreksizlik yüzeyi üzerinde tanımlanmış kütle yoğunluğu yerelleştirme artıklarıdır.

2. Momentumun Korunumu Denkliği

“Maddesel cismin toplam lineer momentumunun zamana göre değişim hızı bu cisme etkiyen toplam kuvvete eşittir” ilkesi anımsanarak ilgili denklemler yazılabilir. Burada kütlenin korunumu ilkesi de kullanılarak $\psi \Rightarrow \rho \mathbf{v}$, $\tau_k \Rightarrow t_k$, $\hat{g} \Rightarrow \rho \hat{\mathbf{f}}$, $\hat{\tau}_k \Rightarrow \hat{F}_k$ yazılırsa

$$\rho \dot{\mathbf{v}} + \hat{\rho} \mathbf{v} = \rho(\mathbf{f} + \hat{\mathbf{f}}) + t_{k,k}, \quad V - \sigma \text{ içinde} \quad (2.18)$$

$$\| \rho v_k(\mathbf{v} - \mathbf{u}) - t_k \| \mathbf{n} = \hat{F}_k, \quad \sigma \text{ üzerinde} \quad (2.19)$$

$$\int_{V-\sigma} \rho \mathbf{f} dV = 0, \quad \int_{\sigma} \hat{\mathbf{F}} dA = 0 \quad (2.20)$$

elde edilir. Burada $\mathbf{f}$ kütle kuvveti yoğunluğu, $\hat{\mathbf{f}}$ $V - \sigma$ içinde tanımlanmış kütle kuvveti artıkları, t_k normal i_k olan yüzdeki gerilme vektörü, $\hat{\mathbf{F}}$ σ üzerinde tanımlanmış kütle kuvveti artıklarıdır.

3. Enerjinin Korunumu İlkesi

“Herhangi bir maddesel cismin toplam kinetik enerjisi ile toplam iç enerjisinin toplamının zamana göre değişim hızının, cisme etkiyen dış kuvvetlerin gücü ile birim

zamanda cisme giren yada cisimden çıkan tüm enerjilerin toplamına eşittir” ilkesinden hareket ederek enerjinin denkliği,

$$\psi = \rho \left(\frac{1}{2} v^k v_k + \varepsilon \right), \quad \tau_k = \rho f_k v_k + \rho h, \quad g = v_k t^{kl} - q_l$$

olmak üzere

$$\rho \dot{\varepsilon} + \dot{\rho} \left(\varepsilon - \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) + \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{f}} - t_k v_k - q_{k,k} - \rho h = \rho \hat{h}, \quad V - \sigma \text{ içinde} \quad (2.21)$$

$$\left\| \rho \left(\varepsilon + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) (v^k - u^k) - t_{kl} v_l - q_k \right\| n_k = \hat{H}, \quad \sigma \text{ üzerinde} \quad (2.22)$$

$$\int_{V-\sigma} \rho \hat{h} dV = 0, \quad \int_{\sigma} \hat{H} dA = 0 \quad (2.23)$$

şeklinde yazılabilir. Burada ε iç enerji yoğunluğu, $\mathbf{q}$ ısı akısı vektörü, h ısı kaynağı yoğunluğu, $\hat{h}$ $V - \sigma$ içinde tanımlanmış ısı kaynağı yoğunluğu artıkları, $\hat{H}$ σ üzerinde tanımlanmış ısı kaynağı yoğunluğu artıklarıdır.

4. Entropi Eşitsizliği

Termodinamiğin ikinci yasası kapalı bir sistemde entropi üretiminin negatif olmayacağını söyler. Buna göre yerel olmayan teori için

$$\rho \dot{\eta} - \left(\frac{q_k}{\theta} \right)_{,k} - \rho \frac{\dot{h}}{\theta} \geq \rho \hat{b} - \dot{\rho} \eta, \quad V - \sigma \text{ içinde} \quad (2.24)$$

$$\left\| \rho \eta (\mathbf{v} - \mathbf{u}) - \frac{\mathbf{q}}{\theta} \right\| n \geq \hat{B}, \quad \sigma \text{ üzerinde} \quad (2.25)$$

$$\int_{V-\sigma} \rho \hat{b} dV = 0, \quad \int_{\sigma} \hat{B} dA = 0 \quad (2.26)$$

ifadeleri gerçekleşir. Burada η entropi yoğunluğu, θ mutlak sıcaklık, $\hat{b}$ $V - \sigma$ içinde tanımlanmış entropi üretim artıkları, $\hat{B}$ σ üzerinde tanımlanmış entropi üretimi artıklarıdır.

Buraya kadar denklik denklemlerinin yerel olmayan teorideki formlarıyla ilgili bilgileri verildi. Bundan sonra (2.21) ve (2.24) kullanılarak Clasius-Duhem eşitsizliğinin genel formu oluşturulacaktır. Bunun için (2.21)'de h değerini, (2.24) ifadesinde verilen eşitsizliğinde yerine yerleştirerek ve Helmholtz serbest enerji fonksiyonu kullanılarak aşağıda Clasius-Duhem eşitsizliği elde edilir.

$$-\rho(\dot{\psi} + \dot{\theta}\eta) + t_{kl} v_{l,k} + \left(\frac{1}{\theta} \right) q_k \theta_{,k} - \dot{\rho} \left(\psi - \frac{1}{2} v^2 \right) - \rho \hat{f}_k v_k + \rho \hat{h} - \rho \theta \hat{b} \geq 0 \quad (2.27)$$

Bu aşamadan sonra bünye değişkenlerinin yapılarını belirleyen bünye aksiyomları ile elastik, izotrop katılar için serbest enerji fonksiyonunun fonksiyonel formu belirlenerek gerilme tansörünün yapısı hakkında bilgi elde edilecek, termodinamik kısıtlamalar altında ana hareket denklemleri elde edilebilir.

Bilindiği gibi nedensellik aksiyomu doğrultusunda, bağımlı değişkenler, ψ , η , t_{kl} , $\mathbf{q}$, ve bunlara ek olarak yerleştirme artıkları da $\hat{\rho}$, $\hat{f}$, $\hat{h}$, $\hat{b}$, bağımsız değişkenler olan $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ ile sıcaklık $\theta = \theta(\mathbf{X}, t)$ alanlarının birer fonksiyoneldir. Objektivite aksiyomu ise serbest enerji fonksiyonunun yapısının

$$\psi = \psi[\mathbf{C}_K^x(\mathbf{X}'), \mathbf{C}_{KL}^x(\mathbf{X}'), \theta^x(\mathbf{X}'), X'; \mathbf{C}_{KL}, \theta] \quad (2.28)$$

şeklinde olabileceğini ve

$$\hat{\rho} = 0, \hat{f} = 0 \quad (2.29)$$

olduğunu söyler. Buna göre (2.28), (2.29) sonuçları (2.27)' de yerine yerleştirilerek eşitsizliğin $\hat{\theta}$, $v_{i,k}$, q_k ' ya göre lineer olduğu düşünülürse

$$t_{kl} = 2\rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial C_{KL}} - \int_{V-\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial C'_{KL}} dV' \right) x_{k,K} x_{l,L} \quad (2.30)$$

sonucu elde edilir. Objektivite aksiyomu anımsandığında $\hat{h}$ ve $\hat{b}$ 'nın cismin rijit hareketi altında değişmez kaldığı ve böylelikle de ψ fonksiyonelinin C'_K 'ye bağlı olmadığı görülebilir. Buradan ψ fonksiyonelinin genel yapısının

$$\psi = \psi(\mathbf{C}'_{KL}, \theta^{rx}; \mathbf{C}_{KL}, \theta)$$

şeklinde olduğu kolayca görülebilir. Sonuç olarak homojen, elastik, ön gerilmemiş ve izotrop katılar için gerilme fonksiyonun genel yapısı bünye denklemlerinin lineerleştirilmesi sonrasında

$$t_{kl} = \int_V \sigma'_{kl}(x') dv(x') \quad (2.31)$$

$$\sigma'_{kl}(x') = \lambda'(|x' - x|) e'_{rr}(x') \delta_{kl} + 2\mu'(|x' - x|) e'_{kl}(x') \quad (2.32)$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$(\lambda', \mu') = (\lambda, \mu) \alpha(|x' - x|) \quad (2.33)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada α yerel olmayan modülleri göstermektedir.

Bundan sonra yerel olmayan etkileri belirten yerel olmayan elastik modüllerin yapısı belirlenip, bu çalışmada kullanılan çekirdek fonksiyonu hakkında kısa bilgi verilecektir.

2.3. YEREL OLMAYAN ELASTİK MODÜLLERİN BELİRLENMESİ

İzotrop, elastik katılar için $\lambda(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)$ ve $\mu(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)$ yerel olmayan elastik modüllerinin en genel ortak özelliği $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|$ ' nün fonksiyonları olmalarıdır. Yerel olmayan modüllerin diğer özellikleri şöyle özetlenebilir.

- (i) $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ noktasında maksimum değerlerini alırlar.
- (ii) Herhangi bir x referans noktasının a latis mesafesi olmak üzere birkaç veya daha fazla latis mesafesi komşuluğunda etkileri hızla azalır.
- (iii) a latis mesafesi olmak üzere, $a \rightarrow 0$ için δ -Delta fonksiyonuna dönüşürler. Yani

$$\lim_{a \rightarrow 0} \lambda(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) = \delta(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|)$$

$$(iv) \quad \int_{V-a} \{ \lambda'(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) / \lambda, \mu'(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) / \mu \} dV(\mathbf{x}') = 1$$

normalizasyon koşulunu gerçeklerler.

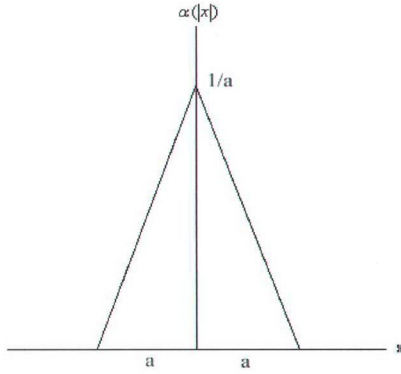
Yerel olmayan etkilerin yapısını belirlemek için yapılan işlemlerin başında düzlem dalgaların incelenmesi gelmektedir. Yerel olmayan etkilerle elde edilen dispersiyon bağıntılarının latis dinamiğinde karşı gelen problemin dispersiyon bağıntısı ile karşılaştırılması sonunda modüllerin yapısı hakkında istenen bilgiler elde edilebilir. Buna paralel olarak. Born-Karman modeli olarak bilinen tek boyutlu bir latis dinamiği modelinde dispersiyon bağıntısı Brillouin bölgesinde

$$\frac{w^2}{k^2} = c^2 \frac{\sin^2(\frac{ka}{2})}{(\frac{ka}{2})^2}$$

formundadır. Bu denklem klasik sürekli ortamlar mekaniğinde $a = 0$ için benzer sonuç verir. Yerel olmayan modüllerin yapısı ile ilgili çeşitli formlar kullanılabilir. Örneğin parçacıklar arası etkileşimin bir latis uzaklığında lineer olduğu düşünülürse Şekil2.2' de görüldüğü gibi bu yazılım düşünülebilir. Burada

$$\alpha(|x|) = \begin{cases} \frac{1}{a}(1 - \frac{|x|}{a}), & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases} \quad (2.34)$$

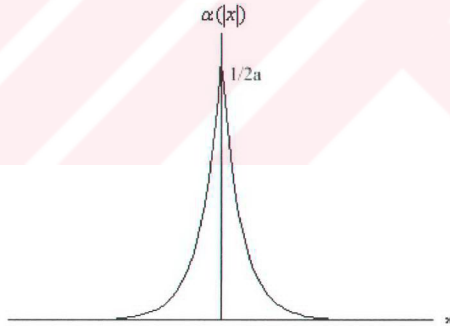
şeklinde yazılabilir.



Şekil 2.2 Üçgen Modül

Benzer şekilde uzak erimli etkileşimleri uzaklıkla eksponansiyel olarak alındığı düşünülecek olursa eksponansiyel fonksiyon bazı farklı yapılar düşünülebilir.

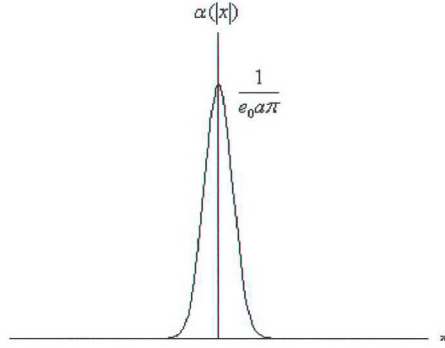
Örneğin, Şekil 2.3 de görünen $\alpha(|x|) = \frac{1}{2a} e^{-\frac{|x|}{a}}$



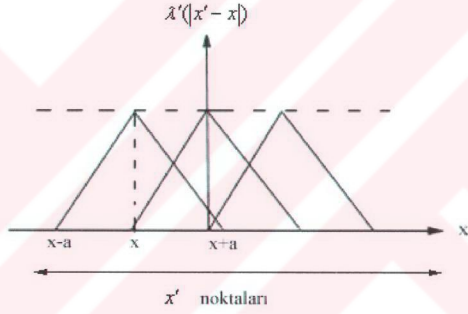
Şekil 2.3 Birinci tip eksponansiyel modül

ve $\tau = \frac{e_0 a}{l}$ ve e_0 ise malzeme sabiti olmak üzere Şekil 2.4' de verilen

$\alpha(|x|) = \frac{1}{l\pi\tau} e^{-\frac{x^2}{l^2\tau}}$ eksponansiyel çekirdekleri örnek olarak alınabilir.



Şekil 2.4 İkinci tip eksponensiyel modül



Şekil 2. 5 Üçgen Modül Yapısı

Bu çalışmada temel hareket denklemleri Şekil 2.5' te gösterilen üçgen tip modüllerle belirlenecektir.

3. YEREL OLMAYAN TEORİ İLE SONLU ORTAMDA BİR BOYUTLU DALGA YAYILIMI

3.1. GİRİŞ

Bu bölümde, önce $2h$ kalınlığında bir plak probleminin formülasyonu verilerek sonlu olan plak kalınlığının probleme katılış şekli gösterilecektir. Uygulamada ele alınan bazı yaklaşımlar verildikten sonra ana problem verilerek yerel olmayan teori ile sonlu ve elastik bir ortamda hareket denklemi elde edilecektir.

3.2. PROBLEMİN TANIMI VE GENEL DENKLEMLER

Lineer izotrop yerel olmayan elastik bir cisim için temel denklemler sırasıyla

$$t_{kl,k} + \rho(f_l - a_l) = 0 \quad (3.1)$$

$$t_{kl} = \int_V \sigma'_{kl}(x') dv(x') \quad (3.2)$$

$$\sigma'_{kl} = \lambda'(|x' - x|)e'_{rr}(x')\delta_{kl} + 2\mu'(|x' - x|)e'_{kl}(x') \quad (3.3)$$

$$e'_{kl} = \frac{1}{2}(u'_{k,l} + u'_{l,k}), \quad u'_k \equiv u'_k(x') \quad (3.4)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$u'_{k,l} = \frac{\partial u'_k}{\partial x'_l} \quad (3.5)$$

olarak ifade edilir. Homojen izotrop malzemeler için λ' ve μ'

$$(\lambda', \mu') = (\lambda, \mu)\alpha(|x' - x|) \quad (3.6)$$

şeklinde yazılabilir. Homojen olmayan malzeme durumunda yerel olmayan çekirdeğin

$$\alpha = K(|x' - x|, x) \quad (3.7)$$

şeklinde alınması gerekecektir. Buna göre homojen malzeme için

$$t_{kl} = \int_V \lambda'(|x' - x|) \sigma_{kl}(x') dv(x') \quad (3.8)$$

homojen olmayan malzeme için

$$t_{kl} = \int_V K(|x' - x|, x) \sigma_{kl}(x') dv(x') \quad (3.9)$$

alınmalıdır. Buna göre genel hareket denklemi kütle kuvvetinin ihmal edildiği homojen malzeme için

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \int_V \lambda'(|x' - x|) \sigma_{kl}(x') dv(x') = \rho \ddot{u}_l(x) \quad (3.10)$$

şeklini alacaktır. Burada

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda'(|x' - x|)}{\partial x_k} \sigma_{kl}(x') &= - \frac{\partial \lambda'(|x' - x|)}{\partial x'_k} \sigma_{kl}(x') = \\ &= - \frac{\partial}{\partial x'_k} [\lambda'(|x' - x|) \sigma_{kl}(x')] + \lambda'(|x' - x|) \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x'_k} \end{aligned} \quad (3.11)$$

yazılacak olursa (3.1) denklemi

$$\int_V \left[- \left[\lambda'(|x' - x|) \sigma'_{kl} \right]_{,k'} + \lambda'(|x' - x|) \sigma'_{kl,k'} \right] dv(x') = \rho \ddot{u}_l(x) \quad (3.12)$$

halini alır. Green – Gauss teoremi kullanılacak olursa bu denklem

$$- \int_S \left[\lambda'(|x' - x|) \sigma_{kl} \right] da(x') + \int_V \lambda'(|x' - x|) \sigma_{kl,k'}(x') dv(x') = \rho \ddot{u}_l(x) \quad (3.13)$$

şeklini alır. Burada S , V hacmini kapatan yüzeyi göstermektedir.

Ele alınan problemdeki V hacminin her doğrultuda sonsuza gitmesi halinde yukarıda görülen yüzey etkileri ihmal edilebilir ve yüzey integrali düşürülerek genel denklem

$$\int_V \lambda'(|x' - x|) \sigma_{kl,k}(x') dv(x') = \rho \ddot{u}_l(x)$$

şeklinde yazılabilir. Bu formülasyona örnek olmak üzere aşağıda önce bir levha problemi ele alınmış, daha sonra da yüzey (tek boyutta uç) etkilerini görmek için bir boyutlu problem ele alınmıştır.

Şimdi $2h$ kalınlıklı bir levhada örneğin düzlem dalga yayılım probleminin incelendiği düşünülecek olursa (x_1, x_2, x_3) kartezyen koordinat sisteminde $\underline{u}$ yer değiştirme vektörünün u_1, u_2, u_3 bileşenleri

$$u_1 = u_1(x_1, x_2, t)$$

$$u_2 = u_2(x_1, x_2, t)$$

$$u_3 = 0 \quad (3.14)$$

şeklinde alınabilir. Bunun sonucu olarak da sıfırdan farklı birim şekil değiştirme tansörü bileşenleri

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{\hat{c}u_1}{\hat{c}x_1} \\ e_{22} &= \frac{\hat{c}u_2}{\hat{c}x_2} \\ e_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{c}u_1}{\hat{c}x_1} + \frac{\hat{c}u_2}{\hat{c}x_2} \right) \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Burada ıssal etkilerinde işleme katıldığı homojen izotrop elastik bir cisimde bünye denklemleri

$$t_{kl} = \int_V \left\{ \lambda'(|x-x'|)e'_{rr}(x')\delta_{kl} + 2\mu'(|x-x'|)e'_{kl}(x') + \sigma'_1(|x-x'|)T'(x')\delta_{kl} \right\} dv' \quad (3.15)$$

olarak yazılabilir. Burada λ' , μ' yerel olmayan malzeme modülleri olup genel olarak bulunan nokta ile cismin herhangi bir noktası arasındaki uzaklığın fonksiyonudur. Benzer şekilde σ'_1 sistemdeki ıssal etkileri probleme katan malzeme modülü olup yine $|x-x'|$ uzaklığın fonksiyonudur. Sıcaklık etkilerinin ihmal edildiği problemlerde bu terim yer almayacaktır. T' sıcaklık fonksiyonudur.

Problemi bütünleyen son grup denklemler ise hareket denklemleri ve sıcaklık etkilerinin düşünüldüğü hallerde ısı iletim denklemi olacaktır. Buna göre genel olarak hareket denklemleri

$$t_{kl,i} + \rho(f_k - a_k) = 0 \quad (3.16)$$

ve ısı iletim denklemi

$$\int_V \left[\rho\gamma'T' + \beta'u'_{k,k} - \kappa'T'_{,kk} \right] dv' = 0 \quad (3.17)$$

şeklinde yazılabilir. Burada t_{kl} gerilme tansörü, ρ kütle yoğunluğu, f_k kütle kuvveti vektörünün k . bileşeni, a_k ivme vektörünün k . bileşeni olup (3.17) denkleminde γ' , β' , κ' ıssal etkiler göz önüne alındığında yerel olmayan ilgili katsayıları göstermektedir. Burada ısı etkileri ihmal edildiği için ayrıntıya girilmemiştir. Yalnızca formülasyonda genelliği sağlamak amacı ile bu etkiler (3.15) ve (3.17) denklemlerinde gösterilmiştir.

Levha problemi için (3.16) denklemi bileşenleri cinsinden yazıldığında kütle kuvvetinin ihmal edilmesi halinde

$$\begin{aligned} t_{11,1} + t_{12,2} &= \rho \ddot{u}_1 \\ t_{21,1} + t_{22,2} &= \rho \ddot{u}_2 \end{aligned} \quad (3.18)$$

elde edilir. (3.15) ifadesinde de gerilme bileşenleri

$$\begin{aligned} t_{11} &= \int_{V'} \left\{ (\lambda' + 2\mu') \frac{\partial u'_1}{\partial x'_1} + \lambda' \frac{\partial u'_2}{\partial x'_2} + \sigma'_1 T' \right\} dv' \\ t_{22} &= \int_{V'} \left\{ (\lambda' + 2\mu') \frac{\partial u'_2}{\partial x'_2} + \lambda' \frac{\partial u'_1}{\partial x'_1} + \sigma'_2 T' \right\} dv' \\ t_{12} &= \int_{V'} \left\{ \mu' \left(\frac{\partial u'_1}{\partial x'_2} + \frac{\partial u'_2}{\partial x'_1} \right) \right\} dv' \end{aligned} \quad (3.19)$$

şeklinde yazılabilir. Isı etkilerinin ihmal edildiği probleme geçilecek olursa toplu halde denklemler

$$\begin{aligned} t_{11,1} + t_{12,2} &= \rho \ddot{u}_1 \\ t_{21,1} + t_{22,2} &= \rho \ddot{u}_2 \end{aligned} \quad (3.20)$$

ve

$$\begin{aligned} t_{11} &= \int_{V'} \left\{ (\lambda' + 2\mu') \frac{\partial u'_1}{\partial x'_1} + \lambda' \frac{\partial u'_2}{\partial x'_2} \right\} dv' \\ t_{22} &= \int_{V'} \left\{ (\lambda' + 2\mu') \frac{\partial u'_2}{\partial x'_2} + \lambda' \frac{\partial u'_1}{\partial x'_1} \right\} dv' \\ t_{12} &= \int_{V'} \left\{ \mu' \left(\frac{\partial u'_1}{\partial x'_2} + \frac{\partial u'_2}{\partial x'_1} \right) \right\} dv' \end{aligned} \quad (3.21)$$

olacaktır. Dalga yayılımı probleminin iki bilinmeyenli olan u_1 ve u_2 yer değiştirme bileşenlerini yöneten denklemleri bulmak için (3.21) denklemlerini (3.20)' de yerine koymak gerekir. Böylece elde edilen iki integro-diferansiyel denklem u_1 ve u_2 bilinmeyenleri için gerekli olan denklemleri verir. Ancak bu integro-diferansiyel denklemlerin çözümünün kolay olmayacağı açık olduğu için dalga yayılım problemlerinde farklı bir yol izlenerek sonsuz boyutlu x_1 doğrultusunda Fourier dönüşümü ve Faltung teoremi kullanılarak problem farklı bir yöne çekilebilir. Bu amaçla

$$\bar{u}_i(k, x_2, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_i(x_1, x_2, t) \exp(ix_1 k) dx_1, \quad i = 1, 2 \quad (3.22)$$

ve düzlem harmonik dalgalar için

$$\bar{u}_i(k, x_2, t) = \bar{U}_i(k, x_2) e^{i\omega t} \quad (3.23)$$

tanımları yapılacak olursa (3.20) hareket denklemleri

$$\begin{aligned} -ik\tilde{\tau}_{11} + \tilde{\tau}_{12,2} + \rho w^2 \tilde{U}_1 &= 0 \\ -ik\tilde{\tau}_{12} + \tilde{\tau}_{22,2} + \rho w^2 \tilde{U}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

şeklini alır. (–) sembolü ilgili büyüklüğün Fourier dönüşümünü göstermektedir.

Burada

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{11} &= \int_{-h}^h \left\{ -ik(\bar{\lambda}' + 2\bar{\mu}')\tilde{U}'_1 + \bar{\lambda}'\tilde{U}'_{2,2} \right\} dx'_2 \\ \tilde{\tau}_{12} &= \int_{-h}^h \left\{ \bar{\mu}'(\tilde{U}'_{1,2} - ik\tilde{U}'_{2,1}) \right\} dx'_2 \\ \tilde{\tau}_{22} &= \int_{-h}^h \left\{ (\lambda' + 2\mu')\tilde{U}'_{2,2} - ik\bar{\lambda}'\tilde{U}'_1 \right\} dx'_2 \end{aligned} \quad (3.25)$$

tanımları kullanılmıştır.

Şimdi (3.25) denklemleri (3.24)' de yerine konarak $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2$ dalga büyüklükleri için gerekli olan iki denklem elde edilir. Çok açık olarak görüldüğü gibi bu yerine koyma sonunda elde edilecek denklemler integro-diferansiyel denklemler olup $(-h, h)$ aralığında integralleri içermektedir. Bu integrallerin levhanın kalınlığı boyunca yerel olmayan etkileri probleme kattığı açıktır.

Sonuç denklemlerinde ortaya çıkan matematik güçlükleri yenmek için çeşitli yaklaşımlar yapılabilir. İlk ve basit yaklaşım uzun erimli etkilerin aradaki uzaklıkla hızla azaldığı ve bunun yanı sıra u_1 doğrultusunda etkileşimin daha fazla olduğu düşüncesiyle x_2 doğrultusundaki parçacık etkileşiminin Dirac Delta fonksiyonu serileriyle yapılabileceği düşünülürse

$$\int_{-h}^h f(x'_2) \delta_m(x'_2 - x_2) dx'_2 \approx \int_{-\infty}^{\infty} f(x'_2) \delta(x'_2 - x_2) dx'_2 = f(x_2) \quad (3.26)$$

yaklaşımı kullanılabilir. Bu durumda

$$\bar{\lambda}' = \bar{\lambda}'(k, |x'_2 - x_2|) = \bar{\lambda}'(k) \delta_n(x'_2 - x_2)$$

$$\bar{\mu}' = \bar{\mu}'(k, [x'_2 - x_2]) = \bar{\mu}'(k) \delta_m(x'_2 - x_2) \quad (3.27)$$

yazılabilir. Bu aşamadan sonra

$$\begin{aligned} \bar{U}_i &= U_i(k, w) \exp(-\alpha x_2) \\ \bar{\tau}_{ij} &= \tau_{ij}(k, w) \exp(-\alpha x_2) \end{aligned} \quad (3.28)$$

yazılacak olursa gerilme bileşenleri

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= -ik(\bar{\lambda}' + 2\bar{\mu}')U_1 - \alpha\bar{\lambda}'U_2 \\ \tau_{12} &= -\bar{\mu}'(\alpha U_1 + ikU_2) \\ \tau_{22} &= -ik\bar{\lambda}'U_1 - \alpha(\bar{\lambda}' + 2\bar{\mu}')U_2 \end{aligned} \quad (3.29)$$

formunda ifade edilebilir. Sonuç olarak bu ifadelerin hareket denklemlerinde yerine konması ile

$$\begin{aligned} (\alpha^2 - k^2 \frac{\Gamma_1}{\Gamma_3} + \rho \frac{w^2}{\Gamma_3})U_1 + i\alpha k(\frac{\Gamma_2}{\Gamma_3} + 1)U_2 &= 0 \\ i\alpha k(\frac{\Gamma_2}{\Gamma_3} + 1)U_1 + (\alpha^2 \frac{\Gamma_1}{\Gamma_3} - k^2 + \rho \frac{w^2}{\Gamma_3})U_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

denklemleri elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \bar{\lambda}' + 2\bar{\mu}' \\ \Gamma_2 &= \bar{\lambda}' \\ \Gamma_3 &= \bar{\mu}' \end{aligned} \quad (3.31)$$

olur. (3.30) denkleminde kolayca görüldüğü gibi bu denklemlerin çözümü olabilmesi için katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalıdır. Bu koşuldan dispersiyon bağıntısı elde edilerek seçilen yerel olmayan çekirdek fonksiyonları ile problem hakkında yorum yapılabilir.

Bu çalışmada amaç bir levha problemi çözmekten çok sonlu bölgede uç etkilerini incelemek olduğu için problem daha ileriye götürülmeyecektir. Buna karşılık (3.26)'da verilen yaklaşımın yerine başka bir yaklaşım kullanılsaydı ne gibi farklılıklar doğabilirdi sorusuna yanıt aramak amacıyla bu çalışmaya konu olan bir boyutta sonlu bir problem ele alınır

$$x_1 = x, \quad x_2 = x_3 = 0 \quad (3.32)$$

tanımlarıyla yer değiştirme ifadesi

$$u = u(x) \quad (3.33)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x} \neq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0 \quad (3.34)$$

olduğu açıktır. Bilindiği gibi birim şekil değiştirme tansörü tek boyutlu problemlerde (3.34) gereği

$$e_{11} = \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{12} = e_{13} = 0$$

yazılabilir. Bu durumda sıfırdan farklı gerilme bileşeni

$$t_{11} = \int_0^{2h} (\lambda + 2\mu)\alpha(|x' - x|) \frac{\partial u}{\partial x'} dx' \quad (3.35)$$

şeklinde elde edilir. Öte yandan genel hareket denklemi

$$t_{kl,k} + \rho(f_l - \ddot{u}) = 0$$

olduğuna göre kütle kuvvetlerinin ($f = 0$) alınması halinde ortamda geçerli tek hareket denklemi

$$t_{11,1} = \rho \ddot{u} \quad (3.36)$$

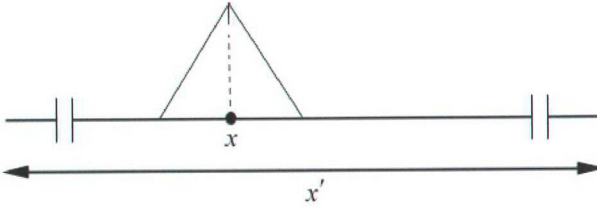
olarak yazılabilir. (3.35) ifadesi (3.36) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{2h} \lambda'(|x' - x|) \frac{\partial u}{\partial x'} dx' - \rho \ddot{u} = 0 \quad (3.37)$$

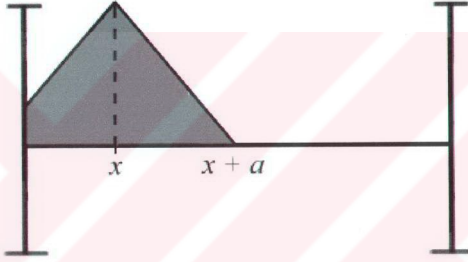
sonucuna ulaşılır. Burada yerel olmayan etkileri probleme katan $\lambda'(|x' - x|)$ ifadesi integral denklemin çekirdeğidir ve

$$\lambda'(|x' - x|) = (\lambda + 2\mu)\alpha(|x' - x|)$$

şeklinindedir. Burada α çekirdeği (2.34) ifadesindeki gibi alınacaktır. $|x' - x| \geq a$ için sıfır değeri alacağından integral hesaplarının alt aralıklarda incelenmesi uygun olur. Yani α çekirdeğinin etkinlik alanı dışında kalan bölgelerdeki noktaların ele alınan nokta üzerinde etkileri doğal olarak sıfırdır. Sonsuz boyutlu bir ortamda bu durum Şekil 3.1' deki gibi herhangi bir sorun çıkarmaz. Oysa ki sonlu bir ortamda uç noktalara yaklaşıldıkça çekirdeğin yapısı değişmektedir. Örneğin sol uca a latis mesafesinden daha yakın bir noktada etki çekirdeği Şekil 3.2' deki gibi olur. Uçlarda oluşan bu farklılıkları işleme katabilmek için burada sonlu bölge alt bölgelere ayrılacak ve her bölgede denklemler ayrı ayrı ele alınacaktır

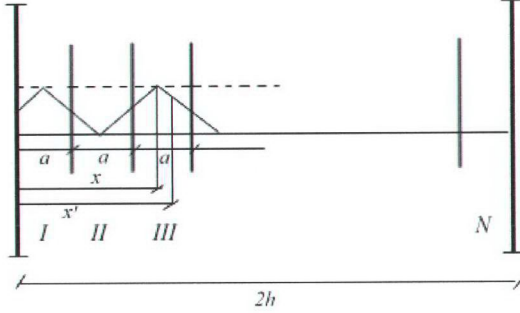


Şekil 3.1. Sonsuz ortamda üçgen modül



Şekil 3.2. Uç noktalarda üçgen modülün bozulan yapısı

Yani yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi I . ve N . bölgelerde çekirdeğin üçgen yapısı her x değerine karşılık bozulurken , bu bölgelerin dışında çekirdek üçgen yapısını korumaktadır. Uç etkileri olarak denklemlerin içine yansıtacak bu bozulma nedeniyle çekirdeğin bu aralıklardaki yapılarına karşı elde edilecek denklem formunun diğer aralıklarda elde edilecek denklemlerin formlarından farklı olacağı açıktır. Bunun için $0 < x < l = 2h$ aralığı latis mesafesi $a = 4 \times 10^{-8}$ cm olan N adet alt aralığa ayrıldığında Şekil 3.3 ‘deki gibi bir yapı elde edilir.



Şekil 3.3 Bir boyutlu ortamın alt aralıklarına bölünmesi

Birinci bölgede x' ' lerin sıfırdan büyük olması gerekir. Çünkü x' ' lerin negatif olduğu herhangi bir nokta fiziksel olarak yoktur. Bu nedenle I. bölgede çekirdek

$$\lambda'_1(|x' - x|) = (\lambda + 2\mu) \frac{1}{a} \left(1 - \frac{|x' - x|}{a}\right) H(x') \quad (3.38)$$

şeklini alınır ve benzer şekilde N. bölgedeki çekirdek

$$\lambda'_N(|x' - x|) = (\lambda + 2\mu) \frac{1}{a} \left(1 - \frac{|x' - x|}{a}\right) H(Na - x') \quad (3.39)$$

olarak yazılabilir. Bu halde $0 < x < a$ için (3.37) denklemi

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^x \lambda'_1(|x' - x|) \frac{\partial u(x')}{\partial x'} dx' + \int_x^{x+a} \lambda'_1(|x' - x|) \frac{\partial u(x')}{\partial x'} dx' \right) = \rho \ddot{u} \quad (3.40)$$

şeklini alır. Burada $\lambda'_1(|x' - x|)$ ifadesi açık formda

$$\lambda'_1(|x' - x|) = \begin{cases} (\lambda + 2\mu) \frac{1}{a} \left(1 - \frac{(x - x')}{a}\right) H(x'), & x' < x \\ (\lambda + 2\mu) \frac{1}{a} \left(1 - \frac{(x' - x')}{a}\right), & x' > x \end{cases} \quad (3.41)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade (3.40) denkleminde yerine yazılırsa

$$c_1^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^x \frac{1}{a} \left(1 - \frac{(x - x')}{a}\right) \frac{\partial u(x')}{\partial x'} H(x') dx' + \int_x^{x+a} \frac{1}{a} \left(1 - \frac{(x' - x)}{a}\right) \frac{\partial u(x')}{\partial x'} dx' \right) = \ddot{u} \quad (3.42)$$

elde edilir. Burada

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad (3.43)$$

dır. (3.42) ifadesinde birinci integral için

$$x - x' = \xi$$

dönüşümü ve benzer şekilde ikinci integralde

$$x' - x = \xi$$

dönüşümü yapılırsa

$$c_1^{-2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^x \frac{1}{a} \left(1 - \frac{\xi}{a}\right) \frac{\partial u(x - \xi)}{\partial \xi} d\xi + \int_0^a \frac{1}{a} \left(1 - \frac{\xi}{a}\right) \frac{\partial u(x + \xi)}{\partial \xi} d\xi \right) = \ddot{u} \quad (3.44)$$

yazılabilir. Burada her iki integral için kısmi entegrasyon yapılır ve sınırlar yerine konduktan sonra türetme işlemine geçilirse

$$\ddot{u} = \frac{c_1^2}{a^2} \{u(x + a, t) - 2u(x, t) + u(0, t)\}, \quad x \in I \quad (3.45)$$

elde edilir. (3.45) ifadesinde de görüldüğü üzere her ne kadar denklem I . bölgede çözülüyor olsa da $u(x + a)$ ifadesi II . bölgedeki noktaların yer değiştirme fonksiyonlarıdır. Bu nedenle (3.37) denkleminin tek ve sürekli $u(x, t)$ çözümü olmasına karşın, bu denklem alt latıs aralıklarında ayrı ayrı yapılandırılacağından, her bölgedeki çözüm ilgili bölüm sayısının bir eksiği alt indis alınarak gösterilecektir. Buna göre Şekil 3.4' te görüldüğü gibi I . bölgeye karşılık gelen çözüm $u_0(x)$, ikinci bölgeye karşılık gelen çözüm $u_1(x)$ ve N . bölgeye karşılık gelen çözüm benzer şekilde $u_{N-1}(x)$ ile gösterilecektir.

$x \in I$	$\Rightarrow$	$u_0(x)$
$x \in II$	$\Rightarrow$	$u_1(x)$
$x \in III$	$\Rightarrow$	$u_2(x)$
	$\vdots$	
$x \in N$	$\Rightarrow$	$u_{N-1}(x)$

Şekil 3.4 Alt latıs aralıklarında ayrıklaştırılan çözümler

Bu tanımlara göre (3.45) ifadesi

$$\ddot{u}_0 = \frac{c_1^2}{a^2} \{u_1(x + a, t) - 2u_0(x, t) + u_0(0, t)\}, \quad x \in I \quad (3.46)$$

şeklinde yazılabilir.

Benzer şekilde II . bölge için hareket denklemi tekrar yazılırsa

$$c_1^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{x-a}^x \frac{1}{a} \left(1 - \frac{(x-x')}{a} \right) \frac{\partial u(x')}{\partial x'} dx' + \int_x^{x+a} \frac{1}{a} \left(1 - \frac{(x'-x)}{a} \right) \frac{\partial u(x')}{\partial x'} dx' \right) = \ddot{u} \quad (3.47)$$

elde edilir. Yukarıdaki yapıldığı gibi benzer dönüşümler yapılırsa

$$\ddot{u}_1 = \frac{c_1^2}{a^2} \{u_2(x+a) - 2u_1(x) + u_0(x-a)\}, \quad x \in II \quad (3.48)$$

denklemi yazılabilir. Daha evvel belirtildiği gibi I . ve N . bölgelerin dışında çekirdeğin yapısı aynen korunmaktadır. Bu nedenle bu bölgelerdeki denklemlerin formlarının aynı yapıda olmaları doğaldır. Bu nedenle

$$\ddot{u}_2 = \frac{c_1^2}{a^2} \{u_3(x+a, t) - 2u_2(x, t) + u_1(x-a, t)\}, \quad x \in III$$

⋮

$$\ddot{u}_i = \frac{c_1^2}{a^2} \{u_{i+1}(x+a, t) - 2u_i(x, t) + u_{i-1}(x-a, t)\}, \quad x \in (i+1)$$

⋮

$$\ddot{u}_{N-2} = \frac{c_1^2}{a^2} \{u_{N-1}(x+a, t) - 2u_{N-2}(x, t) + u_{N-3}(x-a, t)\}, \quad x \in (N-1) \quad (3.49)$$

ifadeleri yazılabilir. Son bölgede ise hareket denklemi

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{x-a}^x \lambda_1'(|x'-x|) \frac{\partial u(x')}{\partial x'} dx' + \int_x^{N+a} \lambda_1'(|x'-x|) \frac{\partial u(x')}{\partial x'} H(N+a-x') dx' \right) = \rho \ddot{u}$$

şeklinde yazılabilir. Benzer dönüşümler bu denklem için de yapılırsa

$$\ddot{u}_{N-1} = \frac{c_1^2}{a^2} \{u_{N-1}((N+1)a) - 2u_{N-1}(x) + u_{N-2}(x-a)\}, \quad x \in (N) \quad (3.50)$$

sonucu elde edilir. Toplu halde denklemler

$$\ddot{u}_0 - \frac{c_1^2}{a^2} [u_1(x+a, t) - 2u_0(x, t) + u_0(0, t)] = 0; \quad x \in I$$

$$\ddot{u}_1 - \frac{c_1^2}{a^2} [u_2(x+a, t) - 2u_1(x, t) + u_0(x-a, t)] = 0; \quad x \in II$$

$$\ddot{u}_2 - \frac{c_1^2}{a^2} [u_3(x+a, t) - 2u_2(x, t) + u_1(x-a, t)] = 0; \quad x \in III$$

⋮

$$\ddot{u}_{N-1} - \frac{c_1^2}{a^2} [u_{N-1}(N+a, t) - 2u_{N-1}(x, t) + u_{N-2}(x-a, t)] = 0; \quad x \in N \quad (3.51)$$

fark diferansiyel denklemler sistemi şeklinde yazılabilir. I . ve N . denklemlerin yapı itibariyle diğer bölgelerdeki denklemlerden farklı olduğu açıktır. Uç etkileri I . denklemde $u_0(0, t)$ ve ikinci denklemde $u_{N-1}(N, a, t)$ terimleriyle gözükmemektedir.

Bu sistem yapı itibariyle zamana göre türev içeren terimleri ile fark denklemlerinden oluşmaktadır. Sistemin analitik çözümü elde edilemediği için yaklaşık çözümler üzerinde durulacaktır. Kısaca kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan sayısal yöntemler aşağıdaki şekilde özetlenebilir.

- Zaman Bölgesinde Sonlu Farklar Yöntemi
- Sonlu Elemanlar Yöntemi
- İntegral Denklem Yöntemi
- Moment Yöntemi
- Sınır Elemanları Yöntemi

Bu yöntemlerin her biri belirli koşullar altında uygun sonuçlar vermektedir. Denklem sistemindeki her denklem ayrı ayrı ele alındığında yalnızca x değişkeni üzerine sonlu farklar operatörü uygulanmış hiperbolik denklem yapısını taşıdıkları düşünülebilir. Beşinci bölümde, yerel teori ile karşı gelen problem ele alındığında hiperbolik denklem yapısında olduğu görülecektir. Bu nedenle birçok yöntem bu probleme uygulanabilse de, yapı itibariyle fark diferansiyel denklemleri formatında olduğu için sonlu farklar yöntemini kullanarak yaklaşık çözüm aramanın uygun olacağı düşünülmüştür. Diferansiyel denklemleri fark denklemleri olarak yazma esasına dayalı olan bu yöntem 90 yılı aşkın süredir var olmasına rağmen, 40'lı yıllardan sonra kullanılmamış, ancak bilgisayarların işlemci hızlarının ve bellek kapasitelerinin arttığı son yıllarda tekrar araştırmacıların çokça kullandığı bir yöntem haline gelmiştir.

4. SONLU FARKLAR YÖNTEMİ İLE YAKLAŞIK ÇÖZÜM

4.1. GİRİŞ

Bu bölümde yerel olmayan ortamda sonlu bir ortam için elde edilmiş olan fark diferansiyel denklem sisteminin çözümü sonlu farklar yöntemi kullanılarak aranmıştır. Bunun için önce sonlu farklar yöntemi ile ilgili özet bilgi verilmiş, daha sonra sayısal çözümün şeması oluşturulmuştur.

4.2. SONLU FARKLAR YÖNTEMİ İÇİN BAZI TEMEL BİLGİLER

Bilindiği gibi matematik modelleme sonucu temel bilimlerin içine giren pek çok problemi yöneten denklemler genel olarak parçalı veya adi diferansiyel denklemler şeklinde ortaya çıkar. Özel problemler için bu denklemlerin gerekli sınır ve başlangıç koşulları altında çözümü yapılması gerekir. Fakat bunların çoğu analitik çözümleri bilinmeyen tipten olduklarından yaklaşık ve sayısal yöntemlere başvurulur, sonuçlar da ancak sağlıklı yapılan ölçümlerle veya kendi aralarında karşılaştırılarak doğrulanabilirler.

Bilgisayar teknolojisinin gelişmediği dolayısıyla sayısal yöntemlerin elle yapıldığı bu nedenle de yaklaşımların yeterli olmadığı yıllarda doğal olarak kapalı çözüm bulma yönünde çalışmalar öncelik kazanmıştır. Ancak işlemcinin ve belleğin çok güçlendiği son yıllarda karmaşık problemlerin çözümlerinin bilgisayar kullanımı ile elde edilmesi yönünde yapılmış olan çalışmalar artmıştır. Doğal olarak bu tür çözümleri aramada sayısal yöntemlerin önemi artmış, daha yalın ve doğru, kararlı çözümler elde edebilmek için sayısal yöntemler üzerindeki çalışmalar da artmış ve pek çok yeni teknikler denenmeye başlanmıştır. Bu çalışmada elde edilen denklemler fark diferansiyel denklemleri türünde olduğu için sonlu farklar yöntemi ile yaklaşık çözüm aramanın uygun olduğu düşünülmüştür. Bu nedenle aşağıda önce kısa olarak sonlu farklar ile ilgili genel bilgiler verilmiş daha sonra da bu yöntem ana fark diferansiyel denklemine uygulanmıştır.

4.2.1. SONLU FARKLAR YÖNTEMİ

Sonlu farklar yönteminin dayandığı temel, bir nokta civarındaki değişik mertebe türevleri sonlu farklar ile ifade etmektir [34]. Örneğin $f = f(x)$ gibi tek değişkenli bir fonksiyonda bir türevi ifade edebilmek için bu türevin fonksiyonun yakın civar değerleri ile ifade edilmesi öncelikli problem olur. Önce bağımsız değişkenlerin ifade edildiği x doğrultusu belirli aralıklara bölünür. Bu aralıkların eşit olması gerekli değildir. Amaca göre farklı bölünmeler yapılabilir. Örnek olmak üzere eşit bölümlene yapıldığı varsayılsa bir nokta civarındaki $f(x)$ fonksiyonunun türevi bu noktaya yakın iki noktada fonksiyonun değerleri cinsinden yazılabilir. Örneğin Şekil 4.1’ de gösterilen $f(x)$ fonksiyonun $x = x_i$ noktasında teğetinin eğimi üç halde ifade edilebilir.

İleri Fark ile

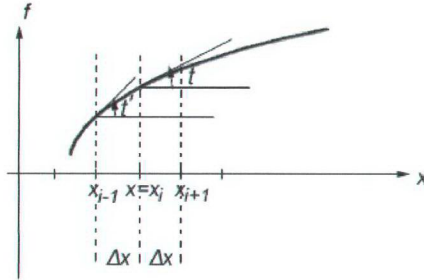
$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x}$$

geri fark ile

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x}$$

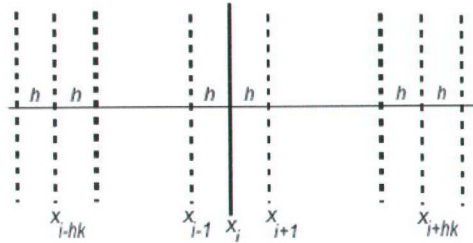
ve merkezi fark ile

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2\Delta x}$$



Şekil 4.1 Herhangi bir noktada tek değişkenli fonksiyonun türevi

Benzer düşünce 2. ve daha yüksek mertebeli türevlere de uygulanabilir. Bu amaçla x_{i+1} ve x_{i-1} noktalarının ötesine gidilmesi gerektiği açıktır. Bu nedenle yöntemin geliştirilmek için bağımsız değişkeni sabit veya değişken aralıklara bölmek gerektiği ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle Şekil 4.2' deki gibi bir bölünme yapılarak



Şekil. 4.2 Bağımsız değişkenin aralıklara bölünmesi

ikinci mertebe türev

$$f''(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{(\Delta x)^2}$$

$$f'''(x_i) \approx \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_i) - f(x_{i-1}))}{(\Delta x)^3}$$

yakın noktalardaki fonksiyon değerleri ile ifade edilmiş olur.

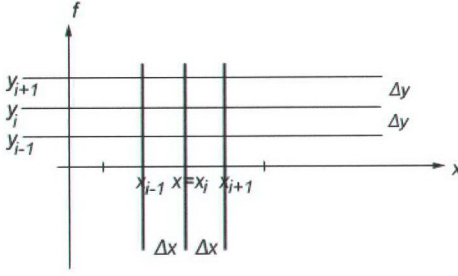
Benzer işlemler kısmi türevli diferansiyel denklemlere de uygulanarak ve onlar da fark denklemleri şeklinde yazılabilir. Parçalı türevli fonksiyonlar Şekil 4.3' teki gibi sistem y doğrultusunda da bölünerek

$$\frac{\partial^2 f(x_i, y_i)}{\partial x^2} \approx \frac{f(x_{i+1}, y_i) - 2f(x_i, y_i) + f(x_{i-1}, y_i)}{(\Delta x)^2}$$

ve benzer şekilde

$$\frac{\partial^2 f(x_i, y_i)}{\partial x \partial y} \approx \frac{f(x_{i+1}, y_{i+1}) - f(x_{i+1}, y_i) - f(x_i, y_{i+1}) + f(x_i, y_i)}{\Delta x \Delta y}$$

yazılabilir.



Şekil 4.3 İki değişkenli fonksiyon için değişkenlerin ayrıklaştırılması

Bundan böyle genelliği sağlamak açısından fonksiyona verilen artımlar aşağıda verilen tanımlarla gösterilecektir. t ve x seçilen değişkenlerine bağlı $v(x, t)$ fonksiyonu tanımlandığında ileri artım

$$\Delta_{+t} v(x, t) = v(x, t + \Delta t) - v(x, t)$$

$$\Delta_{+x} v(x, t) = v(x + \Delta x, t) - v(x, t)$$

geri artım

$$\Delta_{-t} v(x, t) = v(x, t - \Delta t) - v(x, t)$$

$$\Delta_{-x} v(x, t) = v(x - \Delta x, t) - v(x, t)$$

şeklinde gösterilecektir. Burada Δ sembolü hem ileri hem de geri artım için kullanılmıştır. Merkezi artım için aşağıda gösterildiği gibi δ sembolü kullanılacaktır. Buna göre herhangi bir çift değişkenli $v(x, t)$ fonksiyonun sırasıyla t ve x değişkenleri üzerinde birinci mertebeden merkezi artımları

$$\delta_t v(x, t) = v(x, t + \frac{1}{2} \Delta t) - v(x, t - \frac{1}{2} \Delta t)$$

$$\delta_x v(x, t) = v(x + \frac{1}{2} \Delta x, t) - v(x - \frac{1}{2} \Delta x, t)$$

olarak verilebilir. İkinci mertebeden merkezi artımlar ise birinci mertebeden merkezi artımlara δ operatörünün tekrar uygulanmasıyla

$$\delta_x^2 (\delta_x v(x, t)) = \delta_x^2 (v(x + \frac{1}{2} \Delta x, t) - v(x - \frac{1}{2} \Delta x, t))$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre

$$\delta_x^2 v(x, t) = v(x + \Delta x, t) - 2v(x, t) + v(x - \Delta x, t)$$

$$\delta_x^2 v(x, t) = (\Delta_{+x} - \Delta_{-x}) v(x, t)$$

sonuçları elde edilir. Burada δ_{x^2} ikinci mertebeden x değişkenine göre artımı göstermektedir. Benzer şekilde aynı işlemler t değişkenine göre de yapılırsa

$$\delta_t(\delta_t v(x, t)) = \delta_x(v(x, t + \frac{1}{2}\Delta t) - v(x, t - \frac{1}{2}\Delta t))$$

$$\delta_t^2 v(x, t) = v(x, t + \Delta t) - 2v(x, t) + v(x, t - \Delta t)$$

$$\delta_t^2 v(x, t) = (\Delta_{+t} - \Delta_{-t})v(x, t)$$

ifadeleri yazılabilir. Burada δ_t^2 yukarıda tanımlandığı t değişkenine göre ikinci mertebeden parçalı artımı göstermektedir.

4.2.2. DEĞİŞKENLERİN AYRIŞTIRILMASI (IZGARALAMA)

Sonlu farklar yönteminde ilgilenilen uzay, problemin duyarlılığının gerektirdiği büyüklükte birim hücrelere ayrılır. Bu çalışmada x ve t değişkenleri alt aralıklara ayrılmıştır. Yukarıda değinildiği gibi bu aralıklar farklı uzunluklarda olabilirler. Lineer problemlerde bilgisayarın, kullanılan işlemcisi ve belleği el verdiği ölçüde alt aralıkların sayısı problemin kararlılığını bozmayacak şekilde ne kadar küçük alınırsa daha doğru ve daha gerçekçi sonuçlar elde edilir.

(3.51) denklem sistemi uzaysal değişkene göre türev içermemektedir. Bu değişken üzerinde sonlu farklar operatörünün uygulanması veya bir başka deyişle var olan alt aralıkların daha küçük eş alt aralıklara ayrılması problemin fiziksel karşılığı açısından ilk bakışta anlamsız gelebilir. Fakat sistemin çözümünün bu alt aralıklarda nasıl davrandığının açık şekilde belirlenebilmesi ve özellikle I . ve N . bölgelerde uç etkilerinin daha net gözlemlenebilmesi için gösterimsel olarak latis mesafesine ayrılmış alt aralıklar da eşit alt parçalara ayrılacaktır. Bu işlemin yapılması zaten çok küçük mertebede olan latis mesafesinin de alt aralıklara ayrılması anlamına gelmektedir. Dolayısıyla, zaman bölgesinde de yapılan ayrıklaştırma neticesinde sadece zamana göre türevlerin fark denklemleri şeklinde ifade edilerek genel denklemleri biçimlendireceği anlaşılabılır. Başka bir deyişle sonlu farklar yöntemiyle fark denklem sistemini oluşturacak olan her bir fark denkleminin sadece zaman bölgesi üzerinde uygulanan ayrıklaştırma sonucunda şekillenen denklemler olduğu söylenebilir. Bu nedenle çözümde kullanılacak yöntemde sembolik olarak her alt aralık 4 eşit parçaya ayrılacaktır. a latis mesafesi olmak üzere her alt aralığın uzunluğu

$$\Delta x = \frac{a}{4}, \quad 0 \leq x \leq l \quad (4.1)$$

şeklinde alınacaktır. t_f ise sayısal hesabın biteceği zamanı göstermek üzere

$$0 \leq t \leq t_f \quad (4.2)$$

olarak yazılabilir. Sayısal işlemler için t sonsuz olamayacağına, t 'nin belirli bir yerde kesilmesi zorunluluğu unutulmamalıdır. $\Delta t > 0$ zaman adımını göstermek üzere,

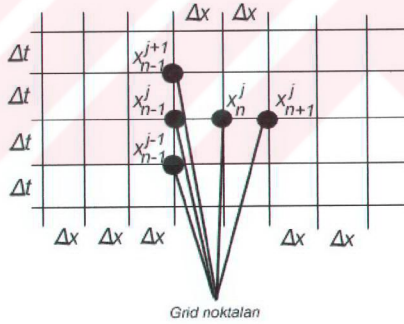
$$\Delta t = \frac{t_f}{J}, \quad J \text{ nokta sayısı} \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada J zaman adım sayısı olarak isimlendirilir. Buna göre

$$x_n = n\Delta x, \quad n = 0, 1, \dots, 4N \quad (4.4)$$

$$t_j = j\Delta t, \quad j = 0, 1, \dots, J \quad (4.5)$$

tanımları yapılabilir. Burada her (x_n, t_j) çiftine grid noktası denir. (x_n, t_j) grid noktası n . uzay adımındaki ve j . zaman adımındaki noktanın koordinatlarını Şekil 4.4 'teki gibi tanımlar.



Şekil 4.4 Grid noktalarının oluşumu

Çözümü aranan denklemin analitik çözümü $u(x, t)$, yaklaşık çözümü

$$U_n^j = U(x_n, t_j) = U(n\Delta x, j\Delta t)$$

ile gösterilmek üzere

$$u(x_n, t_j) \approx U(x_n, t_j) \quad (4.6)$$

olarak düşünülecektir. Burada n uzay adımını, j zaman adımını göstermektedir. Bunlara ek olarak yukarıda verilen sonlu farklar yönteminde kullanılacak olan ön bilgiler aşağıdaki gibi özetlenebilir.

Zamana göre birinci mertebeden türev

$$v_t(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{v(x, t + \varepsilon) - v(x, t)}{\varepsilon}$$

şeklinde tanımlandığı için bu türev sonlu zamanda

$$v_t(x_n, t_j) \approx \frac{v(x_n, t_{j+1}) - v(x_n, t_j)}{\Delta t}, \quad \varepsilon = \Delta t \quad (4.7)$$

şeklinde ifade edilebileceği gibi

$$v_t(x_n, t_j) \approx \frac{v(x_n, t_{j-1}) - v(x_n, t_j)}{-\Delta t}, \quad \varepsilon = -\Delta t \quad (4.8)$$

şeklinde de ifade edilebilir. Görüldüğü gibi (4.7) ifadesi ileri fark, (4.8) ifadesi ise geri fark şeklinde yazılmıştır. Ayrıca aşağıda gösterildiği gibi merkezi fark

$$v_t(x_n, t_j) \approx \frac{v(x_n, t_{j+1/2}) - v(x_n, t_{j-1/2})}{\Delta t}, \quad \varepsilon = 1/2 \quad (4.9)$$

şeklinde yazılabilir. Benzer işlemler ikinci mertebeden türevlere de uygulanabilir. Buna göre

$$v_{tt}(x_n, t_j) \approx \frac{v_t(x_n, t_{j+1}) - v_t(x_n, t_j)}{\Delta t}, \quad \varepsilon = \Delta t$$

ve

$$v_{tt}(x_n, t_j) \approx \frac{v(x_n, t_{j+1}) - 2v(x_n, t_j) + v(x_n, t_{j-1}))}{(\Delta t)^2} \quad (4.10)$$

ifadeleri yazılabilir. Benzer şekilde ikinci mertebeden uzay değişkenine göre türev de yazılabilir. Bu türev

$$v_{xx}(x, t) = \lim_{\bar{\varepsilon} \rightarrow 0} \frac{v_x(x + \bar{\varepsilon}, t) - v_x(x, t)}{\bar{\varepsilon}}$$

şeklinde tanımlanmıştır. $\bar{\varepsilon} = \Delta x$ olmak üzere

$$v_{xx}(x_n, t_j) \approx \frac{v_x(x_{n+1}, t_j) - v_x(x_n, t_j)}{\Delta x}$$

ve

$$v_{xx}(x_n, t_j) \approx \frac{v(x_{n+1}, t_j) - 2v(x_n, t_j) + v(x_{n-1}, t_j)}{(\Delta x)^2} \quad (4.11)$$

elde edilir.

4.3. FARK DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMÜNDE KULLANILACAK ŞEMA

Sonlu farklar yönteminde kullanılacak şemalar açık (explicit) ve kapalı (implicit) şemalardır. Açık şemalarda çözümü aranan fonksiyonun herhangi bir

$$t_j = j\Delta t$$

anındaki değeri tek bir adımda hesaplanır. Kapalı şemalarda ise bu hesap birden fazla adımda gerçekleştirilir. Yani açık şemalarda j . adımdan $(j+1)$. adıma geçerken

$$U_j^{n+1} = U(x_j, t_{n+1})$$

değerleri tek bir işlemle belirlenir. Kullanılacak şema açık bir şemadır. Burada (3.51) ile verilen denklemlerin sonlu farklar yöntemindeki karşılıklarını yazabilmek için Şekil 3.4'te de görülen tüm alt aralıklardaki çözümler için bundan sonra

$$\begin{aligned} u_0(x_n, t_j) &\approx U_0(x_n, t_j) \\ u_1(x_n, t_j) &\approx U_1(x_n, t_j) \\ u_2(x_n, t_j) &\approx U_2(x_n, t_j) \\ u_3(x_n, t_j) &\approx U_3(x_n, t_j) \\ &\vdots \\ u_i(x_n, t_j) &\approx U_i(x_n, t_j) \\ &\vdots \\ u_{N-1}(x_n, t_j) &\approx U_{N-1}(x_n, t_j) \end{aligned} \quad (4.12)$$

tanımları kullanılacaktır. Toplu halde (4.12) tanımları

$$u_i(x_n, t_j) \approx U_i(x_n, t_j) \approx U_{i,n}^j \quad (4.13)$$

şeklinde gösterilebilir. Burada, n uzay adımını, j zaman adımını ve i ise hangi alt aralıkta hangi gerçek u çözümüne karşı hangi U sayısal çözümünün karşı geldiğini göstermektedir. i, n, j 'nin alabilecekleri değerler

$$\begin{aligned} 0 &\leq i \leq N \\ 4i &\leq n \leq 4(i+1) \\ 0 &\leq j \leq J \end{aligned} \quad (4.14)$$

şeklinde olacaktır.

Buna göre denklem sisteminde yer alan $u(x+a, t)$, $u(x, t)$, $u(x-a, t)$ ifadelerinin, $a = 4\Delta x$ olmak üzere, herhangi bir t anındaki yaklaşık çözüm karşılıkları sırasıyla

$$U_i(x_n + 4\Delta x, t_j), U_i(x_n, t_j), U_i(x_n - 4\Delta x, t_j)$$

veya

$$U_{i \ n+4}^j, U_{i \ n}^j, U_{i \ n-4}^j \quad (4.15)$$

şeklinde yazılabilir. Aynı notasyon kullanılarak denklem sistemi içinde yer alan diğer mertebeden türevler de benzer biçimde yazılabilir. Örneğin ikinci mertebeden türevler (4.10) tanımlaması anımsanarak

$$\ddot{u}_i(x_n, t_j) \approx \frac{U_{i \ n}^{j+1} - U_{i \ n}^j + U_{i \ n}^{j-1}}{(\Delta t)^2}$$

şeklinde yazılabilir. Sistemde zamana göre ikinci mertebe türevin var olmasından ötürü birinci adım hesabı için ayrı bir yapıda fark denklemi ile çalışılması gerekir. İkinci ve daha sonraki adımlar için ise rutin fark denklemleri ile çalışılacaktır. Sonlu fark şemasında sadece birinci adım için

$$\ddot{u}_i \approx \frac{U_{i \ n}^{j+1} - U_{i \ n}^j + U_{i \ n}^{j-1}}{(\Delta t)^2} \approx \frac{1}{(\Delta t)^2} [U_{i \ n}^{j+1} - \Delta t \left(\frac{U_{i \ n}^j - U_{i \ n}^{j-1}}{\Delta t} \right) - U_{i \ n}^j],$$

yazılır ve yukarıda da verilen dönüşüm düşünülerek

$$U_{i \ n}^1 = \Delta t \left(\frac{U_{i \ n}^1 - U_{i \ n}^0}{\Delta t} \right) + U_{i \ n}^0 + \nu^2 \left[U_{(i+1)(n+4)}^0 - 2U_{i \ n}^0 + U_{(i-1)(n-4)}^0 \right] \quad (4.16)$$

elde edilir. Bilindiği üzere

$$\dot{u}_i(x_n, t_j) \approx \left(\frac{\partial}{\partial t} U^j \right) (x_n, t_j) \quad (4.17)$$

şeklinde gösterilmiştir. Buna göre $a \leq x_n \leq l - a$ için

$$U_{i \ n}^1 = \Delta t \left(\frac{\partial}{\partial t} U_{i \ n}^0 \right) + U_{i \ n}^0 + \nu^2 \left[U_{(i+1)(n+4)}^0 - 2U_{i \ n}^0 + U_{(i-1)(n-4)}^0 \right] \quad (4.18)$$

eşitliği yazılır.

Benzer şekilde $x_n \in I$ ve $x_n \in N$ için de benzer denklemler sırasıyla

$$U_{0 \ n}^1 = \Delta t \left(\frac{\partial}{\partial t} U_{0 \ n}^0 \right) + U_{0 \ n}^0 + \nu^2 \left[U_{1 \ (n+4)}^0 - 2U_{0 \ n}^0 + U_{0 \ 0}^0 \right], \quad (0 \leq x_n \leq a) \quad (4.19)$$

ve

$$U_{(N-1)n}^{j+1} = \Delta t \left(\frac{\partial}{\partial t} U_{(N-1)n}^0 \right) + U_{N-1n}^0 + \nu^2 \left[U_{(N-1)(n+4)}^0 - 2 U_{(N-1)n}^0 + U_{(N-2)(n-4)}^0 \right], (I-a \leq x_n \leq I) \quad (4.20)$$

yazılabilir. Burada

$$\nu^2 = \frac{c^2}{a^2} (\Delta t)^2 \quad (4.21)$$

dır. İkinci ve daha sonraki adımlar için, (yani $j=2,3,\dots$ durumları için) I . ve $(N-1)$. bölgede sırasıyla

$$\begin{aligned} U_{0n}^{j+1} &= 2U_{0n}^j - U_{0n}^{j-1} + \nu^2 [U_{1(n+4)}^j - 2U_{0n}^j + U_{00}^j] \\ U_{(N-1)n}^{j+1} &= 2U_{(N-1)n}^j - U_{(N-1)n}^{j-1} + \nu^2 [U_{(N-1)(n+4)}^j - 2U_{(N-1)n}^j + U_{(N-2)(n-4)}^j] \end{aligned} \quad (4.22)$$

yazılır. Benzer şekilde bunların dışında kalan bölgelerde de

$$U_{in}^{j+1} = 2U_{in}^j - U_{in}^{j-1} + \nu^2 [U_{(i+1)(n+4)}^j - 2U_{in}^j + U_{(i-1)(n-4)}^j] \quad (4.23)$$

denklemleri elde edilir.

Çözülecek olan denklemin değişkenleri tüm bölgede ayrıklaştırıldığından başlangıç ve sınır koşullarının da ayrıklaştırılması gerekir. Başlangıç koşulu

$$u_i(x_n, 0) = U_{in}^0, \quad \dot{u}_i(x_n, 0) = \dot{U}_{in}^0 \quad (4.24)$$

şeklinde sonlu farklar formuna dönüştürülebilir. Sayısal problemin sınır koşulları

$$u(0, t_j) = U_{00}^j = 0, \quad u(I, t_j) = U_{N-1(n+4)}^j = 0 \quad (4.25)$$

şeklinde alınacaktır.

5. YARDIMCI PROBLEMLER VE İLGİLİ SONLU FARK ŞEMALARI

5.1. GİRİŞ

Bu bölümde yerel teori ile sonlu bir ortamda dalga yayılımı problemi ile yerel olmayan teori ile sonsuz bir ortamda dalga yayılımı problemleri için hareket denklemleri elde edilmiştir. Bulunan denklemlerin sonlu farklar yöntemi ile karşı gelen şemaları oluşturulmuştur. Daha sonra elde edilen şemaların kararlılık ve tutarlılık analizleri yapılmıştır.

5.2. YEREL TEORİ İLE BİR BOYUTLU SONLU ORTAMDA DALGA YAYILIMI PROBLEMİ

Yerel olmayan teori ile ilerleyen bölümlerde elde edilecek sayısal çözümlerde uç etkilerini tam anlamıyla görebilmek için yerel teori ile karşı gelen problemin sayısal çözümleri gerekmektedir. Bu nedenle ilk önce aynı problem yerel teori ile oluşturulup sayısal olarak çözülmeye çalışılacaktır. Yerel teori ile çözülen problemin sayısal çözümü aranmak istendiğinde hangi sonlu fark şeması oluşturulursa oluşturulsun ek sınır koşullarına gerek duyulacağı unutulmamalıdır. e_{kl} burada da

$$e_{kl} = \frac{u_{k,l} + u_{l,k}}{2} \quad (5.1)$$

olmak üzere bir boyutlu problemde

$$u(x_1, x_2, x_3) = u(x_1) = u(x) \quad (5.2)$$

olduğu düşünülürse

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \neq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0 \quad (5.3)$$

yazılabilir. Buradan

$$e_{11} = \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{12} = e_{13} = 0 \quad (5.4)$$

elde edilir.

Problemde sıfırdan farklı tek gerilme bileşeni t_{11} olup

$$t_{11} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (5.5)$$

dir. Bu ifade (3.36) hareket denkleminde yerine konursa

$$\frac{\partial}{\partial x} \left((\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \rho \ddot{u} \quad (5.6)$$

elde edilir. (5.6) ifadesi daha sade bir halde yazılacak olursa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (5.7)$$

bilinen hiperbolik denklem bulunur. Burada

$$c^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad (5.8)$$

dir. Bu (5.7) denkleminin sayısal çözümü için birbirinden oldukça farklı birçok şema geliştirilmiş, bu şemaların kararlılık, tutarlılık ve yakınsaklık analizleri üzerinde durulmuştur. Bir evvelki bölümde (3.51) denklem sisteminin hiperbolik denklem yapısında alt denklemlerden meydana geldiği üzerinde durulmuştu. Bu nedenle ilerleyen bölümlerde sonlu fark şemaları hiperbolik denkleme göre yapılacak, buradan elde edilecek veriler karşı gelen diğer şemaların analizleri için baz alınacaktır. Yalnız, hiperbolik denklem için bir nokta çok önem taşımaktadır. Bu tür denklemlerin sonlu farklar yöntemi ile çözümünde gerçek problemde var olmayan sınır koşulları problemin içine girmektedir. Bu tür koşulların sayısal çözümde üzerinde durulacak olan uç etkilerinin içine karışmasını engellemek veya bunu en aza indirmek için sonlu fark şemaları kısmında da değinilecek olan anti simetrik sınır koşulları kullanılacaktır.

5.3. YEREL OLMAYAN TEORİ İLE BİR BOYUTLU SONSUZ ORTAMDA DALGA YAYILIMI

Bu bölümde genel denklemler verildikten sonra bir boyutlu problem ele alınarak genel formülasyon yapılmıştır.

Basit bir uygulama olarak burada boş uç koşulları ile boyuna dalgaların yayılım problemi ele alınabilir. Bu durumda yine sıfırdan farklı tek gerilme bileşeninin t_{11} olduğu düşünülecek olursa

$$t_{11}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda + 2\mu) \alpha(|x' - x|) \frac{\partial u(x')}{\partial x'} dx' \quad (5.9)$$

yazılabilir. $\alpha(|x|)$ fonksiyonu daha evvel tanımlandığı gibi üçgen formda alınır ve (5.9) denkleminde yerine yazılıp (3.2)' deki gibi kısmi entegrasyon yapılırsa

$$t_{11}(x) = \int_{x-a}^{x+a} \frac{(\lambda + 2\mu)}{a} \left(1 - \frac{|x - x'|}{a}\right) \frac{\partial u(x')}{\partial x'} dx' \quad (5.10)$$

$$t_{11} = \frac{1}{a^2} (\lambda + 2\mu) \left[\int_x^{x+a} u(x') dx' - \int_{x-a}^x u(x') dx' \right] \quad (5.11)$$

bulunur. Öte yandan x doğrultusundaki hareket denklemi

$$t_{11,1} + \rho a_1 = 0 \quad (5.12)$$

veya

$$\frac{\partial t_{11}}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (5.13)$$

olduğuna göre

$$u(x+a) - 2u(x) + u(x-a) = \frac{a^2}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (5.14)$$

bulunur. Burada

$$c^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad (5.15)$$

olarak tanımlanmıştır. (5.7) denkleminin genel çözümü

$$u(x, t) = (Ae^{ikx} + Be^{-ikx})e^{-i\omega t} \quad (5.16)$$

yazılarak aranabilir. Boş uçta sonlu problem ele alınıp, sınır koşulları

$$t_{11} = 0, \quad x = 0, l \quad (5.18)$$

olarak yazılırsa gerilme alanı

$$t_{11} = -\frac{\rho a^2 \omega^2}{ik} (Ae^{ikx} + Be^{-ikx})e^{-i\omega t} \quad (5.19)$$

olarak yazılır ve sınır koşulları ile

$$t_{11} = -\frac{2\rho a^2 \omega^2}{k} (A \sin kx) e^{-i\omega t} \quad (5.20)$$

elde edilir. Burada dalga sayısı k

$$k = \frac{m\pi}{l} \quad (5.21)$$

olarak verilir. Frekansta

$$\frac{\omega^2}{(n\pi/l)^2} = \frac{\sin^2(n\pi a/2l)}{(n\pi a/2l)^2} \quad (5.22)$$

şeklindedir. İlerleyen bölümde (3.51), (5.7), (5.14) denklemleri için sonlu fark şemaları oluşturulmaya çalışılacaktır.

5.4. YEREL TEORİ İLE ELDE EDİLEN DENKLEMİN SONLU FARK ŞEMASI

(5.7) hiperbolik denkleminin sonlu farklar yöntemi ile sayısal çözümü için Leap-Frog, Box gibi bir çok farklı şema kullanılabilir. (3.51) denklem sistemini oluşturan denklemler hiperbolik denklem yapısında olduklarından, hiperbolik denklemin sonlu fark şeması x ve t değişkenleri üzerine merkezi fark operatörünün uygulanması ile elde edilecektir. Daha evvel belirtildiği gibi uç etkilerinin daha net gözlemlenebilmesi için uzay adımı

$$\Delta x = \frac{a}{4}, \quad 0 \leq x \leq l$$

ve zaman adımı

$$\Delta t = \frac{t_f}{J}, \quad J \text{ nokta sayısı}$$

şeklinde alınması uygun olur. Böylelikle herhangi bir (x_n, t_j) grid noktası için

$$x_n = n\Delta x, \quad n = 0, 1, \dots, 4N$$

$$t_j = j\Delta t, \quad j = 0, 1, \dots, J$$

tanımları yapılabilir. Problemin gerçek çözümü $u(x, t)$, sayısal çözümü $V(x, t)$ olduğu kabul edilerek

$$v(x_n, t_j) \approx V(x_n, t_j) \quad (5.17)$$

olduğu düşünülebilir ve şemada

$$u(x_n, t_j) \approx V(x_n, t_j) \approx V_n^j \quad (5.18)$$

$$\dot{u}(x_n, t_j) \approx \left(\frac{\partial}{\partial t} V_n^j \right) \quad (5.19)$$

notasyonu kullanılabilir. Oluşturulacak şema açık(explicit) bir şemadır. O yüzden ilk adım için farklı bir şema kullanılacaktır. Hiperbolik denklemde x ve t değişkenleri üzerinde merkezi fark operatörü uygulanırsa

$$\ddot{u}(x_n, t_j) \approx \frac{V_n^{j+1} - V_n^j + V_n^{j-1}}{(\Delta t)^2} \quad u_{xx}(x_n, t_j) \approx \frac{V_{n+1}^j - V_n^j + V_{n-1}^j}{(\Delta x)^2} \quad (5.20)$$

elde edilir. İlk adım için

$$\ddot{u}_i \approx \frac{V_n^{j+1} - V_n^j + V_n^{j-1}}{(\Delta t)^2} \approx \frac{1}{(\Delta t)^2} [V_n^{j+1} - \Delta t \left(\frac{V_n^j - V_n^{j-1}}{\Delta t} \right) - V_n^j] \quad (5.21)$$

yazılır ve

$$V_n^1 = \Delta t. \left(\frac{\partial}{\partial t} V_n^0 \right) + V_n^0 + v_h^2 [V_{(n+1)}^0 - 2V_n^0 + V_{(n-1)}^0], \quad j=1 \quad (5.22)$$

elde edilir. Daha sonraki adımlar için ise

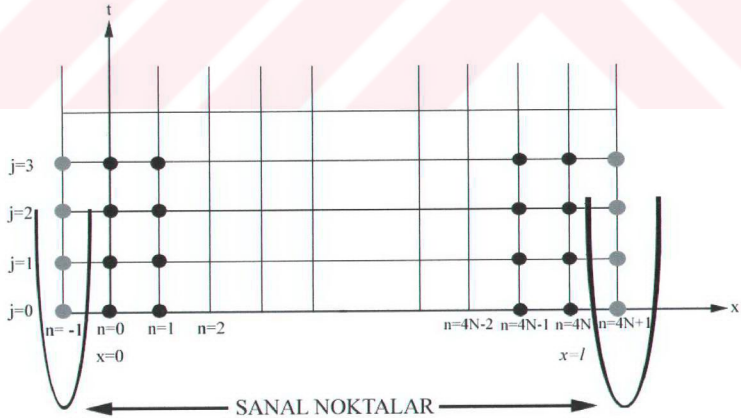
$$V_n^{j+1} = 2V_n^j - V_n^{j-1} + v_h^2 [V_{n+1}^j - 2V_n^j + V_{n-1}^j], \quad j = 2, 3, \dots \quad (5.23)$$

yazılabilir. Burada

$$v_h^2 = \frac{c_1^2}{(\Delta x)^2} (\Delta t)^2 \quad (5.24)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Dikkat edilecek olursa (4.21) ve (5.23) eşitlikleri arasındaki fark hemen göze çarpmaktadır.

Hiperbolik denklemin sonlu fark şeması oluşturulmak istendiğinde sınırlarda ortaya çıkan sorun Şekil5.1' de net bir şekilde gözükmektedir. Problemin kendisinde var olmayan birtakım sanal noktalar şemanın içerisinde gözükmektedir.



Şekil5.1 Sanal Noktaların Oluşumu

(5.23) şemasında $n = 0$ veya $n = N$ alındığı takdirde sırasıyla

$$V_0^{j+1} = 2V_0^j - V_0^{j-1} + \nu_h^2 [V_1^j - 2V_0^j + V_{-1}^j]$$

$$V_{4N}^{j+1} = 2V_{4N}^j - V_{4N}^{j-1} + \nu_h^2 [V_{4N+1}^j - 2V_{4N}^j + V_{4N-1}^j] \quad (5.25)$$

yazılabilir. Bunun için anti simetrik sınır koşulları problemin kararlılığını bozmayacak ve sınır koşulları ile uyumlu olacak şekilde şemanın içerisine katılabilecektir. Bu nedenle burada sanal noktalar

$$\begin{aligned} V_{-1}^j &= -V_1^j \\ V_{4N+1}^j &= -V_{4N-1}^j \end{aligned} \quad (5.26)$$

şeklinde seçilecektir.

Başlangıç koşulu

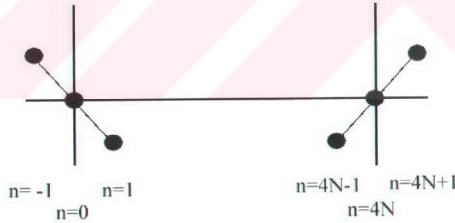
$$u(x_n, 0) = V_n^0, \quad \dot{u}(x_n, 0) = \dot{V}_n^0 \quad (5.27)$$

şeklinde yazılarak sonlu farklar formuna dönüştürülür.

Sayısal problemin sınır koşulları

$$u(0, t_j) = V_0^j = 0, \quad u(l, t_j) = V_{4N}^j = 0 \quad (5.28)$$

şeklinde alınacaktır. (5.26) sanal nokta koşulu ile (5.28) sınır koşulu arasındaki uyum Şekil5.6 'da daha iyi gözlemlenebilmektedir.



Şekil5.2 Anti simetrik sınır koşulu

5.5. YEREL OLMAYAN TEORİ İLE SONSUZ ORTAM İÇİN ELDE EDİLEN DENKLEMİN SONLU FARK ŞEMASI

(5.9) denkleminin yapısı (3.51) denklem sistemindeki ara denklemlerin yapısındadır.

Burada ortam sonsuz olarak hesaba katılıp, uzay adımı daha önce bahsedilen nedenlerden ötürü

$$\Delta x = \frac{a}{4}, \quad -\infty < x < \infty$$

ve zaman adımı

$$\Delta t = \frac{t_f}{J}$$

şeklinde alınmaktadır. Burada J nokta sayısıdır. Grid noktaları da

$$\begin{aligned} x_n &= n\Delta x, \quad -\infty < n < \infty \\ t_j &= j\Delta t, \quad j = 0, 1, \dots, J \end{aligned} \quad (5.29)$$

şeklinde konumlanacaktır. Sonlu fark şemasında x ' ler için alınan bölge sınırsızdır. Problemin sayısal çözümünün elde edilmesi, hem zaman hem de çok yüksek kapasiteli bilgisayarlar ve hafıza birimleri gerektirmektedir. Bu nedenle problemin sayısal çözümünde x değişkeni için alınan sonsuz bölge problemin kararlılığını bozmayacak ve sonlu problemdeki uç etkilerinin gözlemini aksatmayacak şekilde sonlu bölgeye indirgenecektir. Bunun için n uzay adımı parametresi k sonlu bir tamsayıyı göstermek üzere

$$-k < n < k$$

olacak şekilde seçilecektir.

Problemin gerçek çözümü $u(x, t)$, sayısal çözümü $\bar{U}(x, t)$ olduğu kabul edilerek

$$u(x_n, t_j) \approx \bar{U}(x_n, t_j) \quad (5.30)$$

olduğu düşünülebilir ve şemada

$$u(x_n, t_j) \approx \bar{U}(x_n, t_j) \approx \bar{U}_n^j \quad (5.31)$$

$$u(x_n, t_j) \approx \left(\frac{\partial}{\partial t} \bar{U}_n^j \right) \quad (5.32)$$

notasyonu kullanılabilir. Şemada ikinci mertebeden türeve merkezi fark operatörü uygulanacak olursa ilk adım

$$\bar{U}_n^1 = \Delta t \left(\frac{\partial}{\partial t} \bar{U}_n^0 \right) + \bar{U}_n^0 + \nu^2 [\bar{U}_{(n+4)}^0 - 2\bar{U}_n^0 + \bar{U}_{(n-4)}^0], \quad j = 1 \quad (5.33)$$

ve diğer adımlar için

$$\bar{U}_n^{j+1} = 2\bar{U}_n^j - \bar{U}_n^{j-1} + \nu^2 [\bar{U}_{(n+4)}^j - 2\bar{U}_n^j + \bar{U}_{(n-4)}^j], \quad j = 2, 3, \dots \quad (5.34)$$

şemaları kullanılacaktır.

5.6. İLGİLİ ŞEMALARIN KARARLILIK VE TUTARLILIK ANALİZİ

Şemaların kararlılık analizi hiperbolik denkleme karşı gelen (5.25) şemasına göre yapılacaktır. Buradan elde edilecek sonuç diğer şemalar için referans olacaktır. Şemaların tutarlılık analizleri ise ayrı ayrı yapılacaktır.

5.6.1. CFL (COURANT-FRIEDRICHS-LEWY) KOŞULU

Bu koşulun özü, başlangıç verisinin değişiminin şemaya yansımamasıdır. Herhangi (x, t) noktasındaki $u(x, t)$ çözümünü etkileyen tüm noktalar kümesine bağımlılık bölgesi denir ve $D(x, t)$ ile gösterilir. Δt 'nin sabit bir değeri için yaklaşık çözümün bağımlılık bölgesine nümerik bağımlılık bölgesi denir ve $D_{\Delta t}(x, t)$ ile gösterilir.

Ayrıca

$$D_0(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} D_{\Delta t}(x, t)$$

değerine limit sayısal bağımlılık bölgesi denir. Bir parçalı diferansiyel denklemin ve ona karşı gelen fark şemasının CFL koşulunu sağlaması, $D(x, t)$ 'nin $D_0(x, t)$ içinde kalmasıyla mümkündür. Yani

$$D(x, t) \subset D_0(x, t)$$

koşulu sağlanmalıdır. Bu koşul (5.34) şeması için oluşturulacak ve elde edilen sonuç (5.22)-(5.23) ile (4.22)-(4.23) şemaları için kullanılacaktır.

(x_j, t_n) noktaları değiştiğinde bağımlılık bölgesi de değişecektir.

(x_j, t_{n+1}) noktası ele alınırsa

$$\xi_1 = x_j - ct_{n+1} = j \frac{a}{5} - c(n+1)\Delta t \quad (5.35)$$

ve

$$\xi_2 = x_j + ct_{n+1} = j \frac{a}{5} + c(n+1)\Delta t \quad (5.36)$$

yazılabilir. Buradan

$$\xi_1 = [j - 5(n+1)v]\Delta x \quad (5.37)$$

ve benzer şekilde

$$\xi_2 = [j + 5(n+1)v]\Delta x \quad (5.38)$$

elde edilir. ξ_1 ve ξ_2 ifadeleri sırasıyla

$$\begin{aligned} x_{j-5(n+1)} &< \xi_1 < x_j \\ x_j &< \xi_2 < x_{j+5(n+1)} \end{aligned} \quad (5.39)$$

kısıtlarına tabi tutulursa

$$|\nu| \leq 1 \quad (5.40)$$

sonucu elde edilir.

5.6.2. KARARLILIK (STABILITY) İÇİN FOURIER ANALİZİ

Kararlılık analizinde k dalga sayısını ve λ genişliği göstermek üzere

$$U_n^j = (\lambda)^j e^{ikn\Delta x}$$

şeklinde bir Fourier modu alınıp denklemlerde yerine yazılır ve $\lambda = \lambda(k)$ şeklinde bir denklem elde edilir. Dalganın genişliğindeki değişim λ 'nın modülü, $|\lambda|$, ile ilgilidir. Fazındaki değişim ise λ 'nın argümanı, $\arg \lambda$, ile alakalıdır. Hiperebolik denkleme karşı gelen şema ile, yerel olmayan sonsuz probleme karşı gelen şemanın benzer formda olması nedeniyle kararlılık analizi ile elde edilecek sonuçlar aynı olacaktır. Bu nedenle sadece (5.34) şemasının Fourier moduna bakılacaktır. Yerel olmayan sonlu problem için $a \leq x \leq 2h - a$ için yazılmış şemanın incelenecek şema ile aynı formda olmasına karşın uç bölgelerde farklı bir şema göze çarpmaktadır. Bu bölgelerde Fourier modlarının incelenmesi sorun yaratmaktadır. Bu nedenle bu kısımda elde edilen sonuçlar yerel olmayan sonlu problem için referans olacaktır.

$$\bar{U}_n^j = (\lambda)^j e^{ikn\Delta x} \quad (5.41)$$

ifadesi (5.34) şemasında yerine konursa

$$\begin{aligned} \lambda^{j+1} e^{ikn\Delta x} &= 2\lambda^j e^{ikn\Delta x} - \lambda^{j-1} e^{ikn\Delta x} \\ &+ \nu^2 (\lambda^j e^{ik(a+n\Delta x)} - 2\lambda^j e^{ikn\Delta x} + \lambda^j e^{ik(-a+n\Delta x)}) \end{aligned} \quad (5.42)$$

elde edilir. Burada denklem $\lambda^{j-1} e^{ikn\Delta x}$ ile sadeleşirse

$$\lambda^2 = 2\lambda - 1 + \nu^2 \lambda (e^{ika} - 2 + e^{-ika})$$

sonucu bulunur. Burada gerekli dönüşümler yapılırsa

$$\lambda^2 + 2\lambda(2\nu^2 \sin^2 \frac{ka}{2} - 1) - 1 = 0$$

denklemini elde edilir. Bu denklemin kökleri

$$\lambda_{1,2} = -\nu^2 \sin^2 \frac{ka}{2} + 1 \pm \sqrt{4\nu^2 \sin^2 \frac{ka}{2} (\nu^2 \sin^2 \frac{ka}{2} - 1)} \quad (5.43)$$

dir. Bilindiği üzere CFL koşulu $|\nu| \leq 1$ koşulu altında geçerlidir. Buradan

$$(\nu^2 \sin^2 \frac{ka}{2} - 1) \leq 0$$

koşulu elde edilir. Bunun anlamı λ ' nın kompleks olmasıdır. Yani kökler

$$\lambda_{1,2} = -\nu^2 \sin^2 \frac{ka}{2} + 1 \pm 2i\nu \sin \frac{ka}{2} \sqrt{(1 - \nu^2 \sin^2 \frac{ka}{2})}$$

şeklinde olup buradan

$$|\lambda_{\pm}| = 1 \quad (5.44)$$

elde edilir. Bu sonucun anlamı sayısal çözümde herhangi bir genlik hatası bulunmayacağıdır. λ ' nın argümanı

$$\arg \lambda = \pm \tan^{-1} \left[\frac{2\nu \sin \frac{ka}{2} \sqrt{1 - \nu^2 \sin^2 \frac{ka}{2}}}{1 - 2\nu^2 \sin^2 \frac{ka}{2}} \right] \quad (5.45)$$

şeklindedir.

$$ka = \xi \rightarrow 0$$

için sinüs içeren terimleri Taylor serisine açıldığında

$$\sin \frac{\xi}{2} = \frac{\xi}{2} - \frac{\xi^3}{48} + \dots$$

elde edilir. Bu ifade yukarıda yerine konursa

$$\arg \lambda = \pm \tan^{-1} \left[\frac{2\nu \left(\frac{\xi}{2} - \frac{\xi^3}{48} + \dots \right) (1 - \nu^2 \frac{\xi^2}{4} + \dots)^{1/2}}{(1 - 2\nu^2 \frac{\xi^2}{4} + \dots)} \right] \quad (5.46)$$

sonucuna ulaşılır. Burada kuvvet serileri ilgili özellikleri de kullandıktan sonra

$$\arg \lambda = \pm \tan^{-1} \left[\frac{2\nu \left(\frac{\xi}{2} - \frac{\xi^3}{48} + \dots \right) (1 - \nu^2 \frac{\xi^2}{8} + \dots)}{(1 - \nu^2 \frac{\xi^2}{2} + \dots)} \right]$$

$$\arg \lambda = \pm \tan^{-1} \left[2\nu \left(\frac{\xi}{2} - \frac{\xi^3}{48} + \dots \right) (1 - \nu^2 \frac{\xi^2}{8} + \dots) (1 - \nu^2 \frac{\xi^2}{2} + \dots) \right] \quad (5.47)$$

bulunur. Burada ξ ' nin çok küçük olduğunu düşünerek 4 ve 4. mertebeden sonraki terimler alınmayabilir. Parantezlerde gerekli çarpma işlemleri yapıldığında

$$\arg \lambda = \pm \tan^{-1} \left[\nu \xi - \frac{\nu}{24} (1 - 9\nu^2) \xi^3 + \dots \right] \quad (5.48)$$

ifadesi elde edilir.

Lemma: Eğer q ifadesi aşağıdaki formda açık bir şekilde $p \rightarrow 0$ için

$$q \approx c_1 p + c_2 p^2 + c_3 p^3 + c_4 p^4 + \dots, \quad p \rightarrow 0$$

şeklinde yazılabiliyorsa

$$\tan^{-1} q \approx c_1 p + c_2 p^2 + (c_3 - \frac{1}{3} c_1^3) p^3 + (c_4 - c_1^2 c_2) p^4 + \dots$$

ifadesi gerçekleşir.

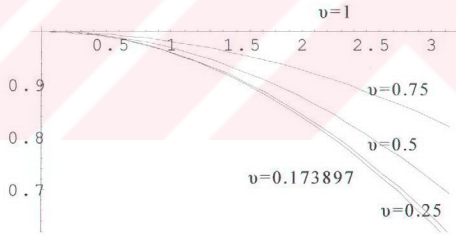
O zaman (4.2.6.7) ifadesi

$$\arg \lambda_{\pm} = \pm v \xi \{1 - \frac{1}{24} (1 - v^2) \xi^2 + \dots\}$$

şeklinde elde edilir. Faz hataları ise

$$\frac{\arg \lambda_{\pm}}{\pm v \xi} = \{1 - \frac{1}{24} (1 - v^2) \xi^2 + \dots\} = 1 + O(\xi^2)$$

şeklinde yazılır. Bunun anlamı sayısal çözümde ξ^2 mertebesinde bir faz hatası meydana gelecek demektir. Farklı v değerleri için elde edilen faz hataları Şekil 5.3'te gösterilmiştir



Şekil 5.3. v ' nün farklı değerleri için faz hataları

5.6.3. TUTARLILIK ANALİZİ

Tutarlılık analizi ılgaralamadan kaynaklanabilecek hatalar için bir üst sınır bulma esasına dayanır. Bir başka deyişle $T(x,t)$ kesme hatalarını gösteren bir fonksiyon olmak üzere

$$T(x,t) \rightarrow 0, \quad \Delta t \rightarrow 0, \quad \Delta x \rightarrow 0 \quad (5.49)$$

olmalıdır veya bir başka deyişle C herhangi bir sayıyı göstermek üzere

$$T(x, t) = O((\Delta t)^p), \quad \Delta t \rightarrow 0$$

$$|T(x, t)| \leq C[(\Delta t)^p], \quad \Delta t \rightarrow 0 \quad (5.50a-b)$$

koşulları sağlanmalıdır. Bunun için (4.22) şeması için kesme hataları oluşturulmak istenirse

$$T_1(x, t) = \frac{\delta_x u_0(x, t)}{(\Delta t)^2} - \frac{c_1^2}{a^2} [u_1(x+a, t) - 2u_0(x, t) + u_0(0, t)]$$

$$T_2(x, t) = \frac{\delta_x u_1(x, t)}{(\Delta t)^2} - \frac{c_1^2}{a^2} [u_2(x+a, t) - 2u_1(x, t) + u_0(x-a, t)]$$

$$T_3(x, t) = \frac{\delta_x u_2(x, t)}{(\Delta t)^2} - \frac{c_1^2}{a^2} [u_3(x+a, t) - 2u_2(x, t) + u_1(x-a, t)]$$

⋮

$$T_N(x, t) = \frac{\delta_x u_{N-1}(x, t)}{(\Delta t)^2} - \frac{c_1^2}{a^2} [u_{N-1}(4N, t) - 2u_{N-1}(x, t) + u_{N-2}(x-a, t)] \quad (5.51)$$

yazılabilir. (5.51)'de t ye göre ikinci mertebe türev içeren terimler için

$$\frac{\delta_x^2 u_i(x, t)}{(\Delta t)^2} = (u_i)_{xx} + \frac{1}{12} (u_i)_{xxx}(\xi, t)(\Delta t)^2, \quad t - \Delta t < \xi < t + \Delta t$$

şeklinde Taylor formülü kullanılacak ve büyük mertebeli terimler atılacak olursa

$$T_1(x, t) = (u_0)_{xx} + \frac{1}{12} (u_0)_{xxx}(x, \xi)(\Delta t)^2 - \frac{c_1^2}{a^2} [u_1(x+a, t) - 2u_0(x, t) + u_0(0, t)]$$

$$T_2(x, t) = (u_1)_{xx} + \frac{1}{12} (u_1)_{xxx}(x, \xi)(\Delta t)^2 - \frac{c_1^2}{a^2} [u_2(x+a, t) - 2u_1(x, t) + u_0(x-a, t)]$$

$$T_3(x, t) = (u_2)_{xx} + \frac{1}{12} (u_2)_{xxx}(x, \xi)(\Delta t)^2 - \frac{c_1^2}{a^2} [u_3(x+a, t) - 2u_2(x, t) + u_1(x-a, t)]$$

⋮

$$T_N(x, t) = (u_{N-1})_{xx} + \frac{1}{12} (u_{N-1})_{xxx}(x, \xi)(\Delta t)^2 - \frac{c_1^2}{a^2} [u_{N-1}(4N, t) - 2u_{N-1}(x, t) + u_{N-2}(x-a, t)]$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapıldıktan sonra her iki tarafın mutlak değeri alınıp

$$|T_1(x, t)| = \frac{1}{12} |(u_0)_{xxx}(x, \xi)| (\Delta t)^2$$

$$|T_2(x, t)| = \frac{1}{12} |(u_1)_{xxx}(x, \xi)| (\Delta t)^2$$

$$|T_3(x, t)| = \frac{1}{12} |(u_2)_{xxx}(x, \xi)| (\Delta t)^2$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ |T_N(x, t)| &= \frac{1}{12} |(u_{N-1})_{III}(x, \xi)| (\Delta t)^2 \end{aligned} \quad (5.52)$$

tüm dördüncü mertebe türeve sahip ayrık çözümlerin bir üst sınıra sahip olduğu düşünülürse

$$\begin{aligned} \max |(u_0)_{III}(x, t)| &\leq M_0 \\ \max |(u_1)_{III}(x, t)| &\leq M_1 \\ \max |(u_2)_{III}(x, t)| &\leq M_2 \\ &\vdots \\ \max |(u_{N-1})_{III}(x, t)| &\leq M_{N-1} \end{aligned} \quad (5.53)$$

elde edilir. Buradan

$$T_1(x, t) = T_2(x, t) = T_3(x, t) = \dots = T_N(x, t) = O((\Delta t)^2) \quad (5.54)$$

sonucuna ulaşılır. Böylece üzerinde durulan esas problem için $(\Delta t)^2$ mertebesinde kesme hataları meydana gelecektir. Yerel olmayan sonsuz problem için de benzer işlemler uygulanarak aynı sonuç elde edilebilir. Hiperbolik denklem x değişkenine göre ikinci mertebe türev içermektedir. Kesme hatasının

$$T_h(x, t) = O((\Delta t)^2, (\Delta x)^2) \quad (5.55)$$

yapısında olduğu gözükmemektedir. Dolayısıyla tüm şemaların tutarlı olduğu sonucu elde edilir.

6. ÖRNEK PROBLEMLER, GRAFİKLER VE SONUÇLAR

6.1. GİRİŞ

Bu bölümde sonlu ortamda yerel olmayan teori ile oluşturulan problemin sayısal çözümleri elde edilerek bunlar, karşı gelen sonlu ortamda yerel problem ve sonsuz ortamda yerel olmayan problemlerin çözümleri ile karşılaştırılacaktır. Bunun için seçilen iki farklı başlangıç verisi ile ilgili problemlerin sayısal çözümleri incelenecektir. Verilen başlangıç verileri ile bulunacak çözümde sadece sola giden dalgalar ile uğraşılacaktır.

6.2. ÖRNEK PROBLEM-1

Alüminyum için malzeme özellikleri [33]

$$\rho = 0.002699 \text{ kg/cm}^3, \lambda + 2\mu = 1.12 \times 10^6 \text{ N/(cm)}^2$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada ρ birim hacim başına düşen kütle yoğunluğunu, λ ve μ ise Lamé sabitlerini göstermektedir.

Bilindiği üzere, yaklaşık çözümü aranan fark diferansiyel denklem sistemindeki her denklem latis mesafesi

$$a = 4 \times 10^{-8} \text{ cm}$$

olmak üzere, aynı latis aralıklarında yazılmıştı. Eğer bir boyutlu ortam levha kalınlığı olarak düşünülür ve $l = 10^{-2} \text{ cm}$ şeklinde alınırsa, oluşabilecek bir sayısal şema 1.250.000 adet birbirleriyle ilişkili denklemlerden oluşur ve adım sayısı da 250.000 civarında olur. Bu nedenle oluşturulabilecek programın çalışması çok büyük miktarlarda zaman gerektirir ve ayrıca kaplayacağı belleğin de çok yüksek kapasitede olması gerekir. Ayrıca, uç bölgelerin dışında üçgen modülün yapısında herhangi bir bozulma olmaması nedeniyle, bu bölgelerin sayısını arttırmanın bir anlamı yoktur. Bu nedenle gösterimsel olarak bir boyutlu ortamın uzunluğu

$$l = 100 \times a = 4 \cdot 10^{-6} \text{ cm}$$

olarak alınacaktır.

Başlangıç verisinin seçimi sonlu farklar yönteminde önem taşımaktadır. Başlangıç verisinin gerekli mertebelere göre türevleri mevcut ve sürekli olmaları gerekmektedir. Bu şekilde alınmayan başlangıç verileri ile oluşturulan şemalar için farklı analizler gerekmektedir. Örneğin, süreksiz başlangıç verisi altında çözümde birtakım kararsızlıklar meydana gelebilir. Bu nedenle tüm şemalar için başlangıç verisi

$$u(x, 0) = \begin{cases} 10^{(-7)} \times \sec h(x - \frac{l}{2}), & x \neq 0 \text{ ve } x \neq l \\ 0 & , \quad x = 0 \text{ ve } x = l \end{cases}$$

$$\dot{u}(x, 0) = 0$$

şeklinde, iki uca da eş uzaklıkta alınmaktadır. Sınır koşulları ise daha evvel belirtildiği gibi

$$u(0, t) = u(l, t) = 0$$

olarak düşünülmektedir. Başlangıç ve sınır koşulları da x ve t değişkenlerine göre ızgaralanırsa

$$u(x_n, 0) \approx U(x_n, 0) \approx V(x_n, 0) \approx \bar{U}(x_n, 0) = \begin{cases} 10^{(-7)} \times \text{Sech}[n - 2.N.a], & n \neq 0 \\ 0 & , \quad n=4.N \\ 0 & , \quad n=0 \end{cases}$$

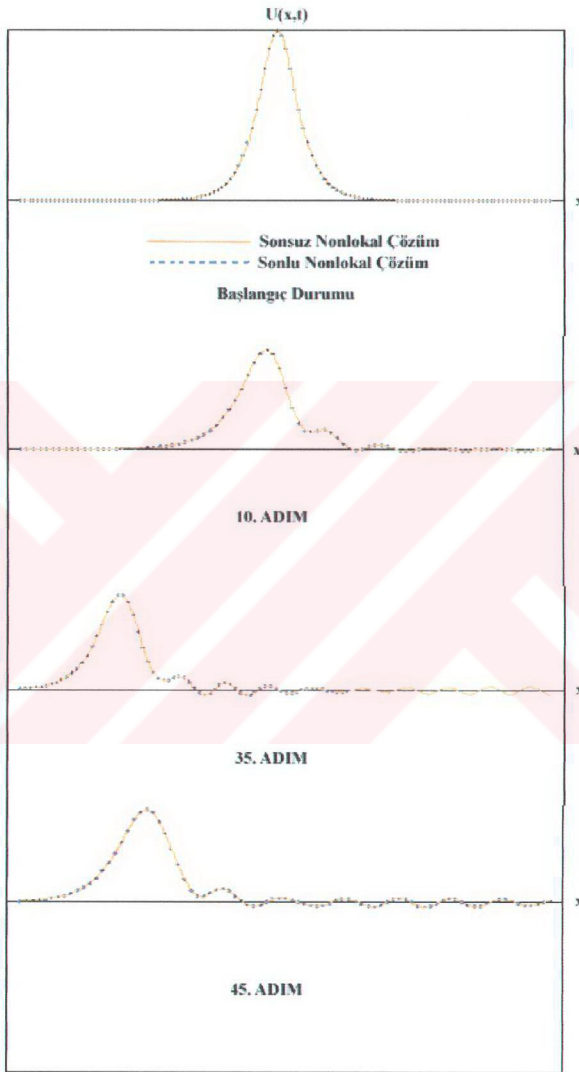
$$\dot{u}(x_n, 0) \approx \dot{U}(x_n, 0) \approx \dot{V}(x_n, 0) \approx \dot{\bar{U}}(x_n, 0) = 0$$

elde edilir.

6.3. YEREL OLMAYAN ORTAMDA SONLU PROBLEM İLE YEREL OLMAYAN ORTAMDA SONSUZ PROBLEM

Bu bölümde yerel olmayan sonlu ve sonsuz probleme karşı gelen sayısal çözümler Mathematica programı kullanılarak çizdirilmiştir. Grafiklerde belirtildiği üzere turuncu grafik yerel olmayan sonsuz, mavi noktalı ve çizgili çözümler yerel olmayan sonlu problemin çözümüne karşı gelmektedir.

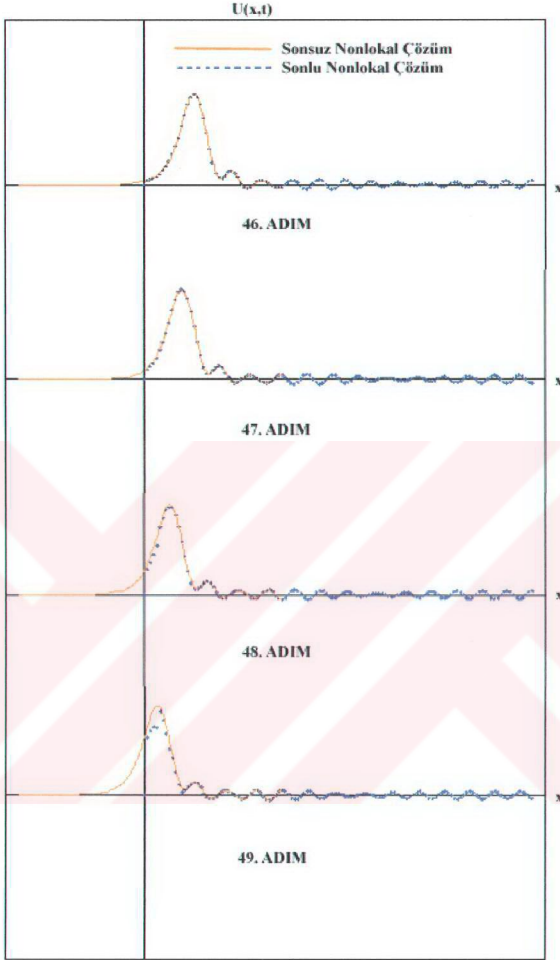
Aşağıdaki ilk 4 grafik hareketin başlangıç durumunu göstermektedir..



Şekil 6.1 İlk 45 adım

Şekil 6.1’ de görüldüğü gibi turuncu grafiğe karşı gelen sonsuz ortamdaki yerel olmayan dalga çözüm ile noktalı mavi grafiğe karşı gelen sonlu yerel olmayan çözüm başlangıç durumunda üst üste düşmektedir. Aslında zaman adımı ilerledikçe başlangıç fonksiyonu iki kısma ayrılmaktadır. Bunlardan biri sağa doğru, diğeri ise sola doğru gitmektedir. Daha evvel de belirtildiği gibi bu problemde sadece sola giden dalgalar incelenmektedir. İlerleyen adımlarda yayılan dalgalar sol uca yaklaşımadan üst üste yoluna devam etmektedirler. Bu durum yerel olmayan teori ile sonlu ve sonsuz ortamlardaki problemlere karşılık oluşacak çözümlerde zaten beklenen bir durumdur. Çünkü sonlu ortamdaki problemlerde sol ve sağ uca yakın olmayan bölgelerdeki denklem yapısı ile sonsuz problemlerdeki denklem yapıları örtüşmektedir.

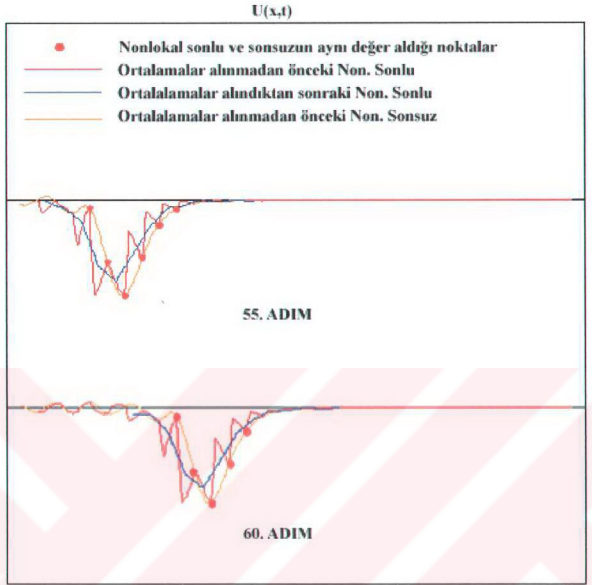
Dalganın sol uca çarpmadan evvelki adımları aşağıda verilmiştir.



Şekil6.2 Sola giden dalgaların sol uca çarpması

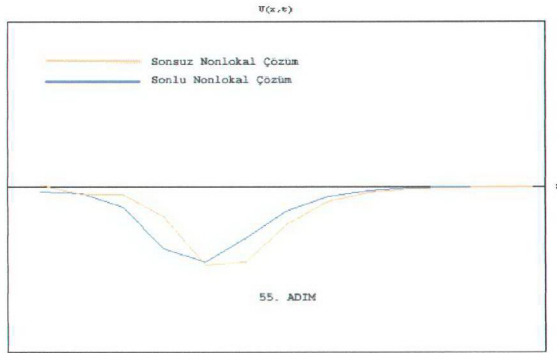
Şekil6.2' de mavi dalga'nın sol uca çarpmadan önceki formu görünmektedir. Turuncu dalga ise sonsuz problemin çözümüne karşı gelen dalga olduğundan $x = 0$ noktasından formunu koruyarak yoluna devam etmektedir.

Aşağıda grafiklerde sola giden mavi dalga sol uca çarptıktan sonraki hareketi gözlenmektedir.



Şekil6.3 Yansıyan dalga

Sola giden mavi dalga sol uca çarptıktan sonra Şekil 6.3' te görüldüğü gibi kırmızı renkte görülen dalga olarak yansımakta ve formundaki bozukluk hemen göze çarpmaktadır. Açık kırmızı renkteki noktalarda yerel olmayan sonlu ve sonsuz dalgaların aynı noktalarda aldığı aynı değerleri aldığı görülmektedir. Bu benzer noktalar latis mesafesinin katlarında oluşmaktadır. Bunların dışındaki noktalarda ise yerel olmayan dalgada salınımlar meydana gelmektedir. Bu salınımlardan kurtulmak için her latis mesafesinin iç noktalarında karşı gelen değerlerin ortalamaları alınacaktır. Ortalamalar alındıktan sonra Şekil 6.4' de görülen grafik elde edilecektir. Bu grafik aşağıda verilmiştir.



Şekil 6.4. Ortalamalar alındıktan sonra 55. adım

Tablo 6.1. 55 adımdaki mavi ve turuncu çözümlerin aldığı değerler

$x \text{ (*a)}$	Sonlu Non. (10^{-8})	Sonsuz Non. (10^{-8})
$\frac{1}{2}$	-0.13181	0.10163
$\frac{2}{2}$	-0.48577	-0.46316
$\frac{5}{2}$	-1.2111	-0.49561
$\frac{7}{2}$	-3.7002	-1.7915
$\frac{9}{2}$	-4.5954	-4.7176
$\frac{11}{2}$	-3.0194	-4.5208
$\frac{13}{2}$	-1.5305	-2.2756
$\frac{15}{2}$	-0.48964	-0.88734
$\frac{17}{2}$	-0.27970	-0.32918
$\frac{19}{2}$	-0.015305	-0.12124

Tablo 6.1' de, Şekil 6.4' de grafikleri çizilmiş çözümlerin karşı gelen grid noktalarındaki değerleri gözükmemektedir. Ortalamalar alındıktan sonra mavi dalganın genliğinde azalma oluşmakta ve dikkat edileceği gibi turuncu dalganın gerisinde kalmaktadır. Bir başka deyişle mavi dalganın hızı sol uca çarptıktan azalmıştır. Yani uç etkileri ile genlikte azalma, hızda ise yavaşlama meydana gelmektedir. Yerel olmayan sonlu çözümün genliğindeki azalmanın yaklaşık olarak % 0.03 olduğu

görülmektedir. Benzer şekilde ortalamalar alındıktan sonra aşağıdaki grafikler ve onların grid noktalarında aldığı değerlere karşı gelen tablolar Ek A' de verilmiştir.

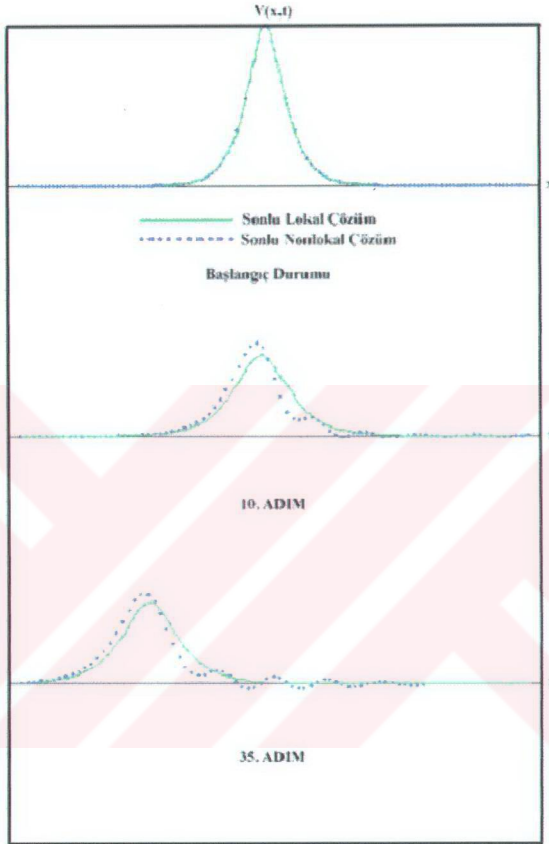
Ek A' dan görüleceği üzere 60. ve 90. adımlar arasında da genlikte azalma, hızda yavaşlama devam etmektedir. Genlikteki azalmalar Tablo 6.2' de verilmiştir. Bu azalmaların uç noktadan uzaklaştıkça azaldığı ve dolayısı ile giderek uç etkilerinin yok olduğu söylenebilir.

Tablo 6.2. Genliklerdeki yüzde değişim

ADIM	% DEĞİŞİM	ADIMLAR ARASI DEĞİŞİM
55	-0.03	
60	-0.06	0.03
65	-0.08	0.02
70	-0.09	0.01
75	-0.11	0.02
80	-0.13	0.02
85	-0.14	0.01
90	-0.15	0.01

6.4. YEREL OLMAYAN ORTAMDA SONLU PROBLEM İLE YEREL SONLU PROBLEM

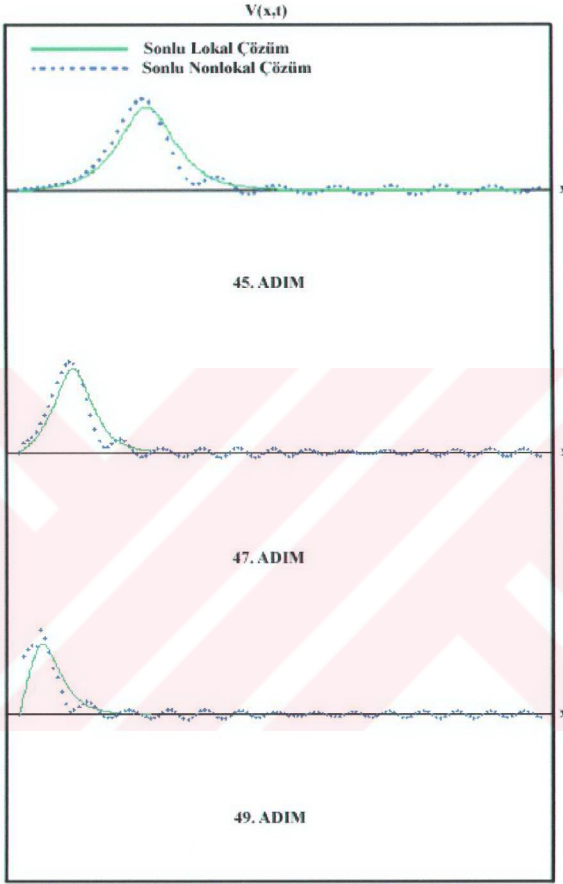
Bu bölümde yerel olmayan sonlu ortamdaki problem ile yerel sonlu probleme karşı gelen sayısal çözümler Mathematica programı kullanılarak çizdirilmiştir. Grafiklerde belirtildiği üzere yeşil grafik yerel sonlu, mavi noktalı ve çizgili çözümler yerel olmayan sonlu ortam problemin çözümüne karşı gelmektedir.



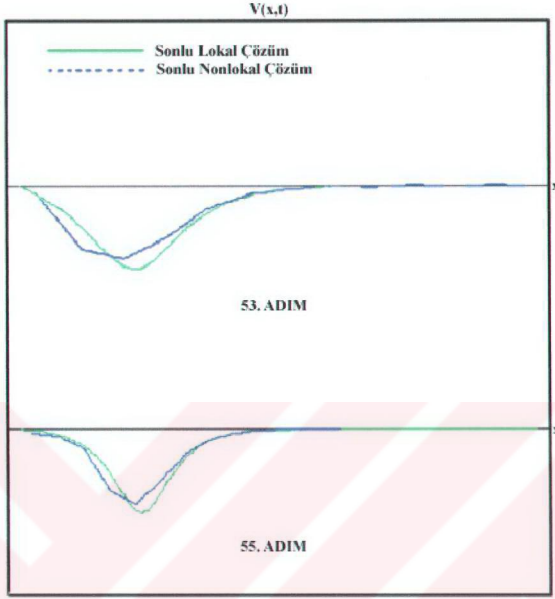
Şekil 6.5 İlk 35 adım

Şekil 6.5’ te sonlu yerel problemin çözümüne karşı gelen yeşil grafiklere bakılacak olursa, başlangıç durumunda oluşturulan dalga biri sağa diğeri sola gitmek üzere iki parçaya ayrılmıştır. Bunların her ikisi de sol ve sağ uca çarpmadan önce genliklerini koruyarak yollarına devam etmektedirler. Fakat daha evvel belirtilen nedenlerden dolayı grafiklerde sadece sola giden dalgalar ile ilgili kısımlar gözükmemektedir.

Yerel olmayan sonlu problemin çözümüne karşı gelen mavi renkli dalga, başlangıçta aynen yeşil dalga da olduğu gibi sağa ve sola giden iki dalgaya ayrılmıştır. 10. ve 35. adımlar arasında görüldüğü üzere sola giden mavi dalganın genliği yeşil dalganın genliğinden büyüktür. Bu durum her ne kadar yerel olmayan teori için beklenmeyen bir durum gibi gözükse de yerel olmayan teoride bir boyutlu ortamda yayılan dalgaların dispersif karaktere sahip olduğu çalışmanın başında vurgulanmıştı. Dolayısıyla mavi dalganın yeşil dalgaya göre daha yayvan bir yapıda olması gerekirdi. Ama bilindiği gibi bir boyutlu ortamın uzunluğu $100 \times a$ olarak alınmıştı ve bir boyutlu ortamın tam ortasında alınan başlangıç verisi Şekil 6.6' da görüldüğü gibi sol uca sadece 45 adım içerisinde varmaktadır. Bu nedenle yerel olmayan dalganın dispersif özelliği bu kadar kısa mesafede gözükmemektedir. Bir boyutlu ortamın uzunluğunun $10000 \times a$ olarak alındığı problemlerde $5000 \times a$ ' da oluşturulan başlangıç dalgasının sol uca gidene kadar, hiperbolik dalgaya göre, genliğindeki büyük miktardaki düşüşü gözlemlenmiştir.

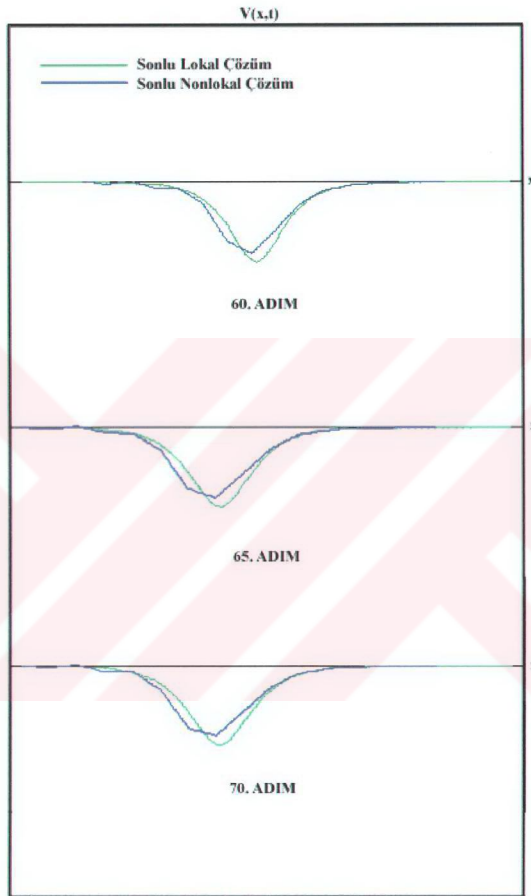


Şekil 6.6 Sola giden dalgaların sol uca çarpması

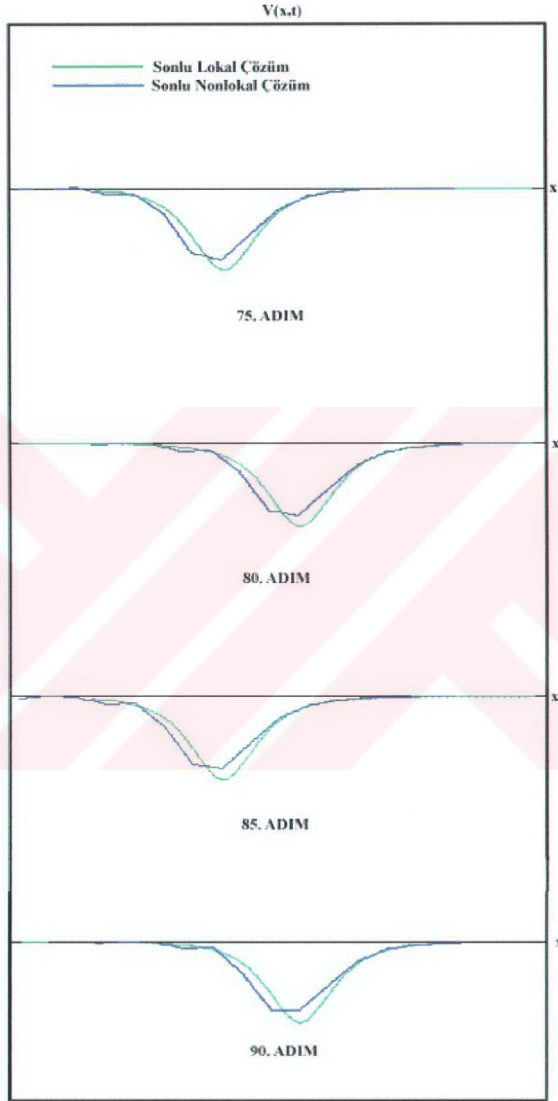


Şekil 6.7 Yansıyan dalgalar

Şekil 6.6 ve Şekil 6.7’ de görüldüğü gibi 45. ve 55 adımlar arasında dalgalar sol uca yaklaşmış, daha sonra sol uca çarpmış ve formunu koruyarak yansımışlardır. Bu durum zaten hiperbolik denklemlerin yapısal özelliğinden kaynaklanmaktadır. Bilindiği gibi hiperbolik denklem için sağa ve sola giden dalgalar sabitleştirilmiş uç koşulları altında formlarını koruyarak yansımaktadırlar.



Şekil 6.8 Dalgaların yansdıktan sonraki ilerlemeleri



Şekil 6.9 70.-90. Adımlar

Yukarıda 55. ve 90. adımlar arasındaki Şekil 6.8 ve Şekil 6.9’ daki grafiklerden de gözüktüğü gibi beklenen durum gereği, sol uca çarpan dalga formunda hiçbir değişiklik oluşmadan yoluna devam etmiştir. Burada belirtilmesi gereken husus, hiperbolik denklemin gerçek ve sayısal çözümleri arasında ele alınan 90 adım için çözümü etkileyecek kayda değer bir hatanın bulunmamış olmasıdır

Mavi dalga sol uca çarptıktan sonra uç etkileri ile beraber yansımıştır. 55. ve 90. adımlar arasında mavi dalganın genliğinde büyük miktarda azalma meydana gelmektedir. Ayrıca bir evvel ki örnekte elde edilen sonuçlara paralel olarak mavi dalga yavaşlayarak yeşil dalganın arkasında devam etmektedir. Buradan yerel olmayan teori ile oluşturulan problemlerde yayılan dalgaların hızlarında yerel problemlerde oluşturulan dalgaların hızlarına göre azalma meydana geldiği söylenebilir. Görüldüğü gibi, bu örnekteki karşılaştırma kriterleri bir evvelki örnek için ele alınanlar ile benzerlik taşımaktadır. Her iki durum içinde mavi dalga için hem genlik hem de hız azalması söz konusu idi. Fakat birinci örnekte her iki dalganın yerel olmayan teori ile elde edildiği ve bu nedenle de dispersif özelliğe sahip oldukları unutulmamalıdır. İkinci örnekte ise yeşil dalga yerel teori gereği dispersif özelliğe sahip değildir. Dolayısıyla, birinci örnekte genlikteki azalma tamamen uç etkilerinin çözüm içerisine girmesinden kaynaklanmaktadır.

6.5. ÖRNEK PROBLEM-2

Bu problem için malzeme özellikleri Örnek-1’ deki gibi alınmaktadır. Örnek 1’ den farklı olarak sadece başlangıç koşulu

$$u(x, 0) = \begin{cases} 10^{(-7)} \times \sec h(x-a), & x \neq 0 \text{ ve } x \neq l \\ 0, & x = 0 \text{ ve } x = l \end{cases}$$

$$\dot{u}(x, 0) = 0$$

şeklinde, sol uca a latis mesafesi uzaklıkta olmaktadır. Sınır koşulları ise daha evvel belirtildiği gibi

$$u(0, t) = u(l, t) = 0$$

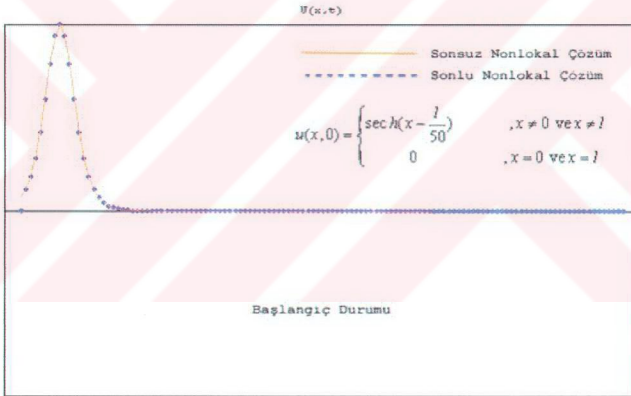
olarak düşünülmektedir. Başlangıç ve sınır koşulları da x ve t değişkenlerine göre aşağıdaki şekilde ızzaralanmaktadır.

$$u(x_n, 0) \approx U(x_n, 0) \approx V(x_n, 0) \approx \bar{U}(x_n, 0) = \begin{cases} 10^{(-7)} \times \text{Sech}[n-4], & n \neq 0 \\ 0, & n=4.N \\ 0, & n=0 \end{cases}$$

$$\dot{u}(x_n, 0) \approx \dot{U}(x_n, 0) \approx \dot{V}(x_n, 0) \approx \dot{\bar{U}}(x_n, 0) = 0$$

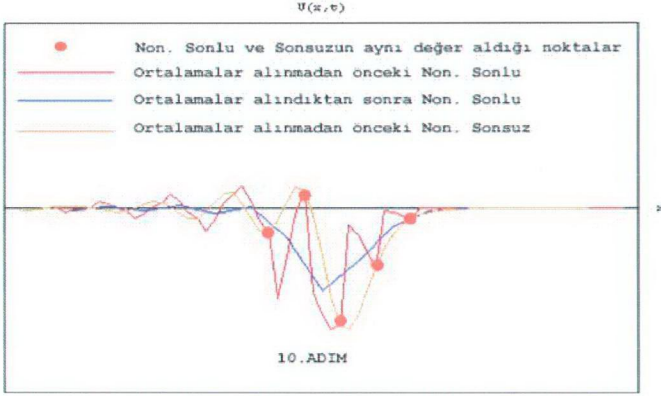
6.6. YEREL OLMAYAN SONLU ORTAM PROBLEMİ İLE YEREL OLMAYAN SONSUZ PROBLEM

Bu bölümde yerel olmayan sonlu ve sonsuz probleme karşı gelen sayısal çözümler Mathematica programı kullanılarak çizdirilmiştir. Turuncu grafik yerel olmayan sonsuz, mavi noktalı ve çizgili çözümler yerel olmayan sonlu problemin çözümüne karşı gelmektedir.



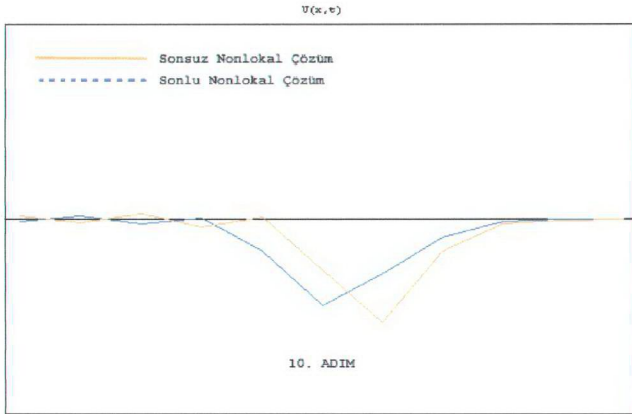
Şekil 6.10 Başlangıç Durumu

Şekil 6.10’da başlangıç verisi, her iki çözüm için gösterilmektedir. Başlangıç verisi $x=0$ noktasının hemen yanında $\text{sech}x$ formunda alınmaktadır. Bilindiği gibi $\text{sech}x$ fonksiyonunun sıfır değerini almadığı kabul edilmektedir. Fakat başlangıç verisi ile sınır koşulları arasındaki uyum gereği sayısal çözümlerde $x=0$ noktasında sözü edilen fonksiyonun değeri sıfır olarak alınacaktır.



Şekil 6.11 10.adımda oluşan osilasyonlar

Yukarıda sözü edilen nedenlerden ötürü sayısal çözümdeki salınımların miktarı, Şekil 6.11’ de görüldüğü gibi, Bölüm 6.3’ te meydana gelen salınımlardan daha fazla olacaktır. Bu nedenle Bölüm 6.3’ teki gibi bu salınımlardan kurtulmak için her latis mesafesinin iç noktalarında karşı gelen değerlerin ortalamaları alınacaktır. Böylece ortalamalar alındıktan sonra 10. adıma karşı gelen grafik Şekil 6.12’ deki gibidir. Mavi dalganın genliğinde ve hızında azalma hemen göze çarpmaktadır. Azalma miktarı Tablo 6.3’ ten % 16 olarak hesaplanmıştır.



Şekil 6.12 Ortalamalar alındıktan sonra 10. adım

$x \text{ (} \frac{a}{2} \text{)}$	Sonlu Non. (10^{-6})	Sonsuz Non. (10^{-6})
$\frac{1}{2}$	-0.069031	0.073614
$\frac{2}{2}$	0.094048	-0.10914
$\frac{3}{2}$	-0.12521	0.15096
$\frac{4}{2}$	0.15900	-0.20274
$\frac{5}{2}$	-0.23625	0.25834
$\frac{11}{2}$	0.076917	-0.38799
$\frac{12}{2}$	-1.6168	0.11168
$\frac{15}{2}$	-4.4344	-2.6112
$\frac{17}{2}$	-2.8273	-5.2926
$\frac{19}{2}$	-0.93099	-1.6608

Tablo 6.3 10. adıma karşı gelen değerler

İlerleyen adımların grafikleri ve onlara karşı gelen tablolar Ek B' de verilmiştir.

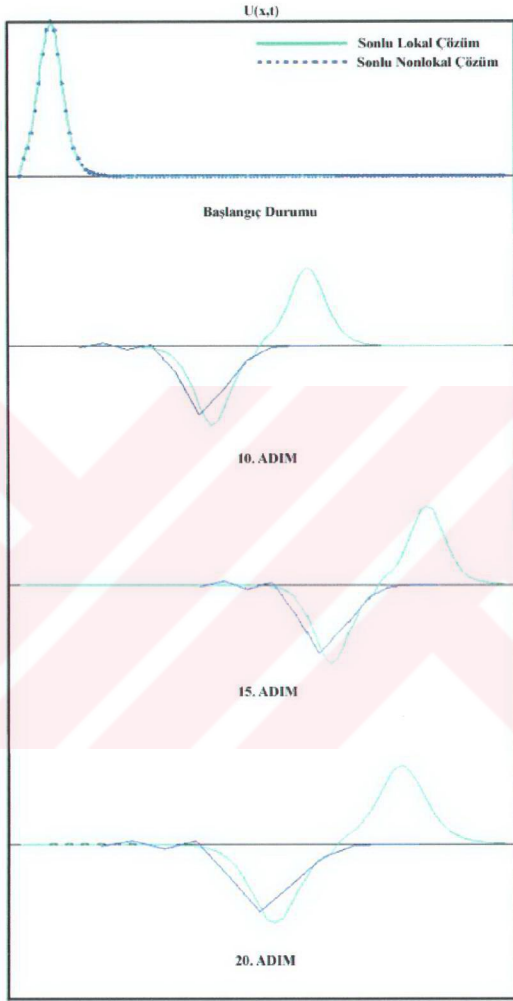
Ek B’ de görüldüğü gibi 10. ve 40. adımlar arasındaki grafiklere karşı gelen tablolardan görüldüğü gibi yerel olmayan sonlu çözümde adımlar ilerledikçe genliklerde azalma meydana gelmektedir. Bölüm 6.3’ de elde edilen sonuçlardan değişik olarak genliklerdeki azalma miktarının azaldığı Tablo 6.4’ te görülmektedir.

ADIM	% DEĞİŞİM	ADIMLAR ARASI DEĞİŞİM
10	0.16	
15	0.14	0.02
20	0.12	0.02
25	0.10	0.02
30	0.07	0.03
35	0.05	0.02
40	0.03	0.02

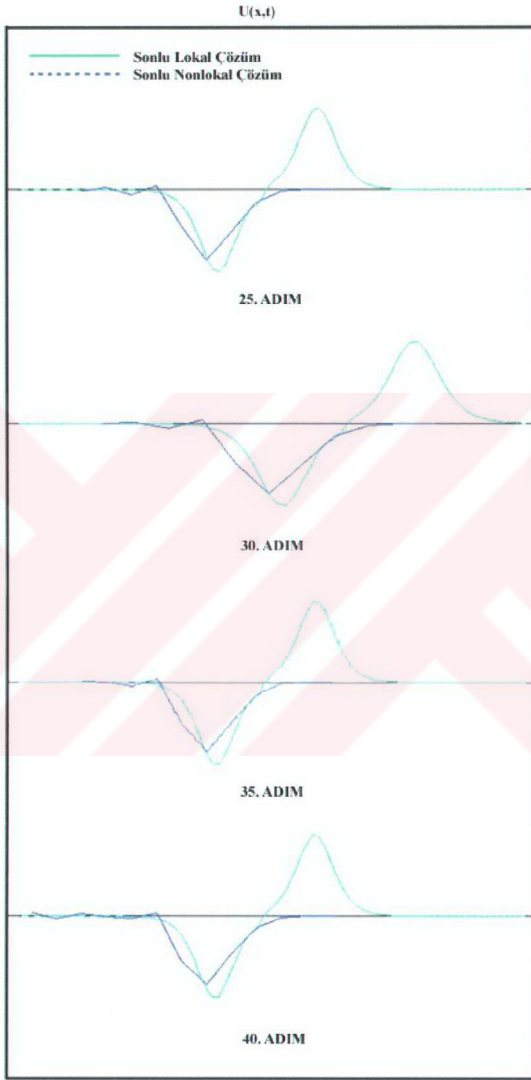
Tablo 6.4. Genliklerdeki yüzde değişim

6.7. YEREL OLMAYAN SONLU PROBLEM İLE YEREL SONLU PROBLEM

Bu bölümde yerel olmayan sonlu ortam problemi ile yerel sonlu probleme karşı gelen sayısal çözümler Mathematica programı kullanılarak çizdirilmiştir. Grafiklerde belirtildiği üzere yeşil grafik yerel sonlu, mavi noktalı ve çizgili çözümler yerel olmayan sonlu problemin çözümüne karşı gelmektedir. İlk 40 adım için elde edilen grafikler Şekil 6.13 ve Şekil 6.14’ te gibi verilmiştir. Bölüm 6.6’ da bahsedilen $x = 0$ noktasında sıfır kabul edilen başlangıç verisinin Şekil 6.13’ te görüldüğü gibi hiperbolik denklemin çözümü üzerinde kayda değer bir değişiklik yaratmamıştır. Dikkat edilecek olursa Bölüm 6.5’ de edilen sonuçlar burada da gözlemlenmiştir.



Şekil 6.13 İlk 20 Adım



Şekil 6.14 Yansıyan Dalgalar

6.8 SONUÇLAR

Bu çalışmada yerel olmayan elastisite teorisi kullanılarak sonlu bir ortamda dalga yayılımı problemi ele alınmıştır. Üçgen formda kullanılan yerel olmayan etkileri gösteren modül ile fark diferansiyel denklem sistemi elde edilmiştir. Bu denklem sisteminin çözümü sabit uç koşulları altında sonlu farklar yöntemi ile sayısal olarak bulunmuştur. Bu çözüm yerel olmayan teori ile karşı gelen sonlu problem ve yerel olmayan teori ile karşı gelen sonsuz problemin sayısal çözümleri ile karşılaştırılmıştır.

Örnek problemlerden elde edilen sonuçlardan görüldüğü gibi uç etkilerinin çözüme getirdiği farklılıklardan dolayı yerel olmayan teori ile oluşturulan bir boyutlu sonlu problemlerde yayılan dalgaların hızı, yerel olmayan sonsuz problem ve yerel sonlu problem ile oluşturulan bir boyutlu problemlerde yayılan dalgaların hızlarından daha az olduğu görülmüştür. Buna ek olarak aynı uç etkileri ile yayılan dalganın genliğinde kayda değer azalmalar gözlemlenmiştir.

Çalışmada ele alınan problemin en önemli özelliklerinden biri bir boyutlu ortamın sonlu alarak alınmasıdır. Yerel olmayan etkilerin işleme katılması ile elde edilen integro-diferansiyel denklemlerde sınır koşullarının yazılmasından doğan güçlükler nedeniyle bugüne dek yapılan uygulamalarda çokluk sonsuz bölgelerde çözüm aranmıştır. Burada ele alınan problemin sayısal olarak çözülmesi ile sonlu bölgelerde uç etkilerinin çözümün formunu nasıl değiştirdiği gözlemlenebilmiştir. Başlangıç ve sınır koşulları ile problemin içerisindeki diğer parametrelerin daha farklı olarak ele alınması önemli başka problemlerin çözümleri için yorum yapabilme olasılığını doğuracaktır.

Bu çalışmadan elde edilecek bir diğer önemli sonuç, iki boyutlu veya üç boyutlu problemlerde, biri diğerine göre sonlu olan boyutlarda ortaya çıkan yüzey ve uç etkilerinin diğer boyuttaki hareketi çok da fazla etkilemediğidir.

Bu çalışmada genel olarak bir boyutlu olarak adlandırılan ortam bir çubuk, levha veya plakta kalınlık problemi olarak özelleştirilebileceği gibi burada çözüm için sunulan yapı iki ve üç boyutlu problemlere de genelleştirilebilir.



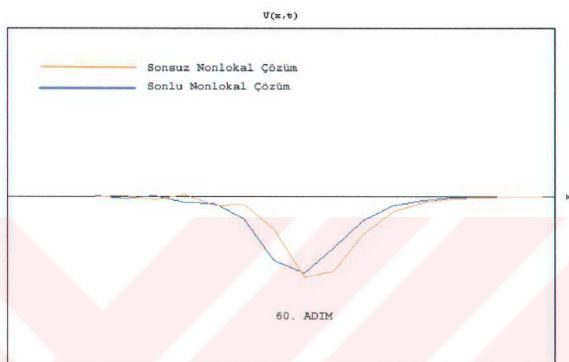
KAYNAKLAR

- [1] **Ari, N ve Eringen, A.C.**, 1973. Nonlocal stress field of griffith crack, *Crystal Lattice Defects and Amorphous Materials*, **10**, 11-17.
- [2] **Eringen, A.C.**, 1979. Line crack.subject to antiplane shear, *Engineering Fracture Mechanics*, **12**, 211-219 .
- [3] **Eringen, A.C. ve Kim, B.S.**, 1974. Stress concentration at the tip of crack, *Mech. Res. Comm.*, **1**, 233-237.
- [4] **Eringen, A.C.**, 1977. Screw dislocations in nonlocal elasticity, *J. Phys. D. Appl. Phys.*, **10**, 671-677.
- [5] **Eringen, A.C.**, 1984. On continous distributions of dislocations in nonlocal elasticity, *J. Appl. Phys.*, **56(10)**, 2675-2680.
- [6] **Eringen, A.C.**, 1985. Nonlocal continuum theory for dislocation and fracture, *American Society for Metals*, **8312-005**, 101-110.
- [7] **Eringen, A.C.**, 1973. On the Rayleigh surface waves with small wave lengths, *Letters in Applied and Engineering Sciences*, **1**, 11-17.
- [8] **Nowinski, J.L.**, 1984. On the nonlocal aspects of propagation of love waves, *Int. Journal of Engng. Sciences.*, **10**, 383-392.
- [9] **Eringen, A.C.**, 1972. Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves, *Int. J. Engng. Sci.*, **10**, 425-435.
- [10] **Eringen, A.C.**, 1973. Linear theory of nonlocal microelasticity and dispersion of plane waves, *Int. J. Engng. Sci.*, **1**, 129-146.
- [11] **Eringen, A.C.**, 1973. Nonlocal microfluid mechanics, *Int. J. Engng Sci.*, **11**, 291-306.
- [12] **Eringen, A.C.**, 1974. Theory of Nonlocal Thermoelasticity, *Int. J. Engng. Sci.*, **12**, 1063-1077.
- [13] **Eringen, A.C.**, 1974. Nonlocal elasticity and waves, *Continuum Mechanics Aspect of Geodynamics and Rock Fracture Mechanics*, 81-105.
- [14] **Eringen, A.C.**, 1977. Edge dislocations in nonlocal elasticity, *Int. J. Engng. Sci.*, **15**, 177-183.

- [15] **Eringen, A.C. ve İnan, E.** 1991. Nonlocal theory of wave propagation in thermo elastic plates, *Int. J. Engng. Sci.*, **29**(7), 831-843
- [16] **Nowinski, J.L.**, 1984. On the nonlocal theory of wave propagation in elastic plates, *ASME*, **51**, 608-613.
- [17] **Kunin, I.A.**, 1968. The theory of elastic media with microstructure and the theory of dislocations, *Mechanics of Generalized Continua, Mechanics of Generalized Continua*, Springer-Verlag, Berlin ve New York.
- [18] **Kröner, E.**, 1968. Interrelations between various branches of continuum mechanics, *Mechanics of Generalized Continua*, Springer-Verlag, Berlin ve New York.
- [19] **Edelen, G.D.B.**, 1969. *Nonlocal variations and local invariance of Fields*, Elsevier, New York ve Amsterdam .
- [20] **Edelen, G.D.B.**, 1969. Protoelastic bodies with large deformation, *Arc. Rational Mec. Anal.*, **34**, 283-300 .
- [21] **Edelen, G.D.B. ve Laws, N.**, 1971. *Arc. Rational Mec. Anal.*, **43**, 36.
- [22] **Edelen, G.D.B., Green, A.E. ve Laws, N.**, 1971. *Arc. Rational Mec. Anal.*, **43**, 36.
- [23] **Eringen, A.C.**, 1972. Nonpolar elastic continua. *Int. J. Engng Sci.*, **10**, 1-16.
- [24] **Eringen A.C. ve Edelen, G.D.B.**, 1972, On nonlocal elasticity, *Int J. Engng. Sci.*, **10**, 233-248.
- [25] **Eringen A.C.**, 1987, Theory of nonlocal elasticity, *Res. Mechanica*, **21**, 313-342.
- [26] **Manolis, G.D.**, 2000, Some basic solutions for wave propagation in a rod exhibiting non-local elasticity, *Engng. Analysis with boundary elements*, **24**, 503-508.
- [27] **Kachanov, L.M.**, 1986, Introduction to continuum damage mechanics, *Kluwer Academic Pres*.
- [28] **Bazant, Z.P.**, 1987, Why continuum damage is nonlocal; justification by quasi – periodic microcrack array, *Mechanics Research Communications*, **14** (5/6), 407-419.
- [29] **Bazant, Z.P., Pijaudier-Cabot, G.**, 1988, Nonlocal continuum damage, localization, instability and convergence, *ASME, J. App. Mechs*, **55**, 287-293

- [30] **Krajcinovic, D., Basista, M., Sumarac, D.**, 1991, Micromechanically inspired phenomenological damage model, *ASME, J. App. Mechs*, **58**, 305-310
- [31] **Oruçoğlu, K., İnan, E.**, 1994, Double crack problem in nonlocal elasticity, *Int. Journal of Fracture*, **67**, 81-97
- [32] **Eringen, A.C.**, 1981, On nonlocal plasticity, *Int. Journal of Engng. Sciences.*, **19 (12)**, 1461 - 1474.
- [33] **Nowinski, J.L.**, 1985, On the nonlocal effects in an elastic layer subject to gravity and compression, *Int. Journal of Engng. Sciences.*, **23 (5)**, 555-560.
- [34] **Morton, K.W., Mayers, D.F.**, 1993, Numerical solution of partial differential equations, Cambridge University Press, Cambridge

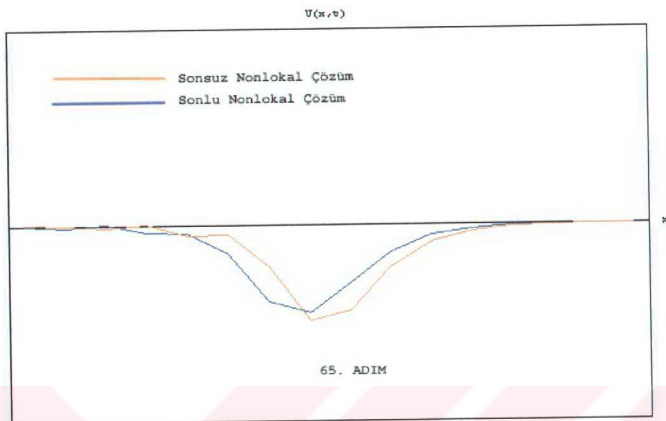
EK A



Şekil A.1 60. Adım

Tablo A.1 60. Adım değerleri

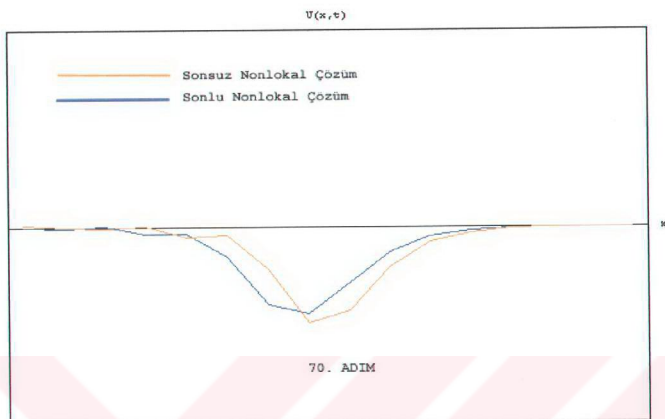
$x \text{ (} \pm a \text{)}$	Sonlu Non. (10^{-6})	Sonsuz Non. (10^{-6})
$\frac{15}{2}$	-1.3282	-0.46035
$\frac{17}{2}$	-3.8152	-1.9222
$\frac{19}{2}$	-4.4958	-4.7865
$\frac{21}{2}$	-3.0436	-4.4333
$\frac{23}{2}$	-1.3805	-2.2085
$\frac{25}{2}$	-0.58310	-0.85963
$\frac{27}{2}$	-0.16525	-0.31881
$\frac{29}{2}$	-0.11222	-0.11742
$\frac{31}{2}$	0.0089494	-0.043201
$\frac{33}{2}$	-0.044504	-0.015893



Şekil A.2 65. adım

Tablo A.2 65. Adım değerleri

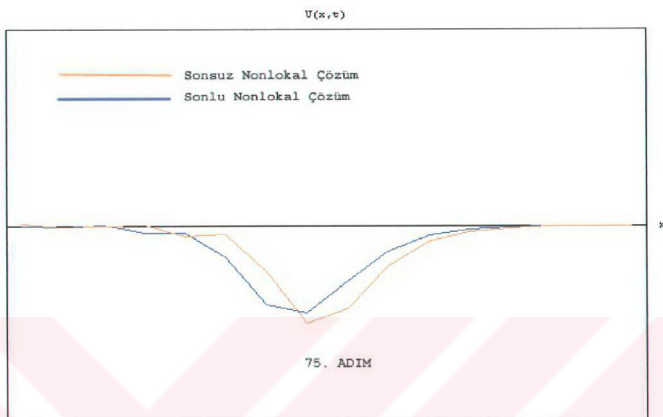
$x \text{ (} \pi a \text{)}$	Sonlu Non. (10^{-6})	Sonsuz Non. (10^{-6})
$\frac{15}{2}$	-0.034642	0.046099
$\frac{17}{2}$	-0.055563	-0.0062644
$\frac{19}{2}$	0.017581	-0.12243
$\frac{21}{2}$	-0.32432	0.082863
$\frac{23}{2}$	-0.40182	-0.52439
$\frac{25}{2}$	-1.3933	-0.43101
$\frac{27}{2}$	-3.9035	-2.0584
$\frac{29}{2}$	-4.4679	-4.8453
$\frac{31}{2}$	-2.9544	-4.3453
$\frac{33}{2}$	-1.3693	-2.1432



Şekil A.3. 70. adım

Tablo A.3. 70. adım değerleri

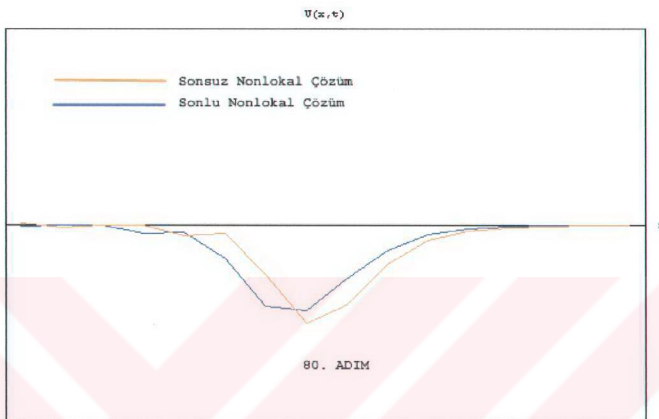
$x \text{ (+a)}$	Sonlu Non. (10^{-8})	Sonsuz Non. (10^{-8})
$\frac{15}{2}$	0.0053283	0.082059
$\frac{17}{2}$	-0.10031	-0.048364
$\frac{19}{2}$	0.068583	-0.085369
$\frac{21}{2}$	-0.39934	0.057165
$\frac{22}{2}$	-0.33246	-0.53948
$\frac{25}{2}$	-1.5327	-0.40898
$\frac{27}{2}$	-3.9404	-2.1986
$\frac{29}{2}$	-4.4617	-4.8945
$\frac{41}{2}$	-2.8599	-4.2573
$\frac{42}{2}$	-1.3497	-2.0797



Şekil A.4. 75. adım

Tablo A.4. 75. adım değerleri

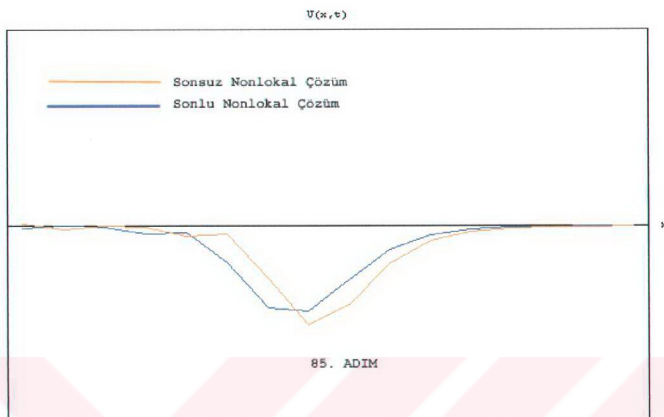
$x \text{ (*a)}$	Sonlu Non. (10^{-8})	Sonsuz Non. (10^{-8})
$\frac{39}{2}$	0.032758	-0.043973
$\frac{41}{2}$	-0.38928	0.022512
$\frac{43}{2}$	-0.34269	-0.54431
$\frac{45}{2}$	-1.6048	-0.39530
$\frac{47}{2}$	-4.0376	-2.3413
$\frac{49}{2}$	-4.3936	-4.9344
$\frac{51}{2}$	-2.8191	-4.1692
$\frac{53}{2}$	-1.2848	-2.0180
$\frac{55}{2}$	-0.50383	-0.78154
$\frac{57}{2}$	-0.17727	-0.28964



Şekil A.5. 80. adım

Tablo A.5. 80. adım değerleri

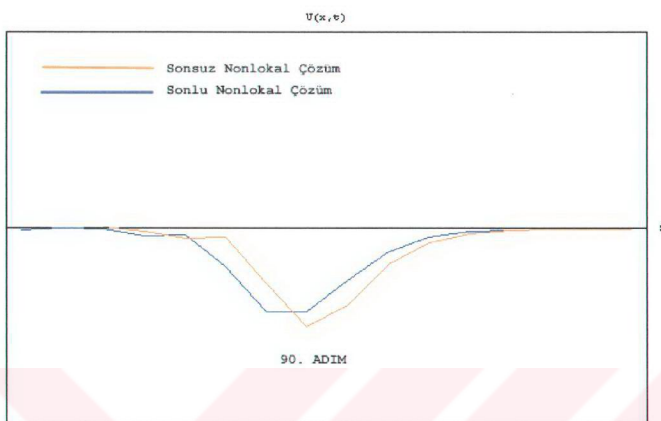
$x \text{ (} \pi a \text{)}$	Sonlu Non. (10^{-8})	Sonsuz Non. (10^{-8})
$\frac{45}{2}$	-0.080068	0.13410
$\frac{47}{2}$	-0.015173	-0.12690
$\frac{49}{2}$	-0.0066188	-0.00074677
$\frac{51}{2}$	-0.38040	-0.019363
$\frac{53}{2}$	-0.34588	-0.53937
$\frac{55}{2}$	-1.6952	-0.39077
$\frac{57}{2}$	-4.1117	-2.4854
$\frac{59}{2}$	-4.3429	-4.9656
$\frac{61}{2}$	-2.7577	-4.0812
$\frac{63}{2}$	-1.2432	-1.9580



Şekil A.6. 85. adım

Tablo A.6. 85. adım değerleri

$x \text{ (} \frac{a}{2} \text{)}$	Sonlu Non. (10^{-6})	Sonsuz Non. (10^{-6})
$\frac{55}{2}$	-0.089518	0.14697
$\frac{57}{2}$	-0.0020178	-0.15868
$\frac{59}{2}$	-0.019077	0.041989
$\frac{61}{2}$	-0.39439	-0.066633
$\frac{63}{2}$	-0.32818	-0.52542
$\frac{65}{2}$	-1.8113	-0.39591
$\frac{67}{2}$	-4.1599	-2.6296
$\frac{69}{2}$	-4.3081	-4.9885
$\frac{71}{2}$	-2.6814	-3.9936
$\frac{73}{2}$	-1.2163	-1.8997

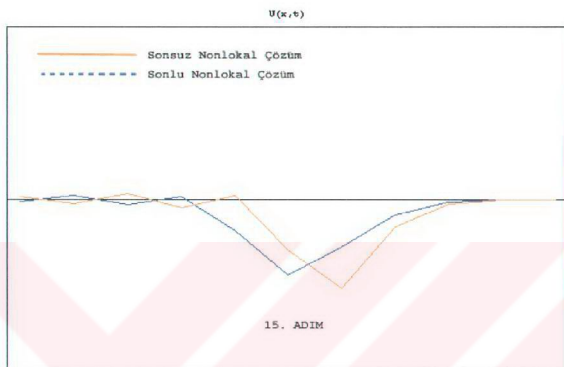


Şekil A.7 90. adım

Tablo A.7. 90. adım değerleri

$x \text{ (}^{\circ}\text{a)}$	Sonlu Non. (10^{-8})	Sonsuz Non. (10^{-8})
$\frac{71}{2}$	-0.040915	-0.11746
$\frac{73}{2}$	-0.39611	-0.50339
$\frac{75}{2}$	-0.32344	-0.41103
$\frac{77}{2}$	-1.9213	-2.7731
$\frac{79}{2}$	-4.2113	-5.0036
$\frac{81}{2}$	-4.2626	-3.9064
$\frac{83}{2}$	-2.6147	-1.8430
$\frac{85}{2}$	-1.1817	-0.71048
$\frac{87}{2}$	-0.44892	-0.26314
$\frac{89}{2}$	-0.17010	-0.096892

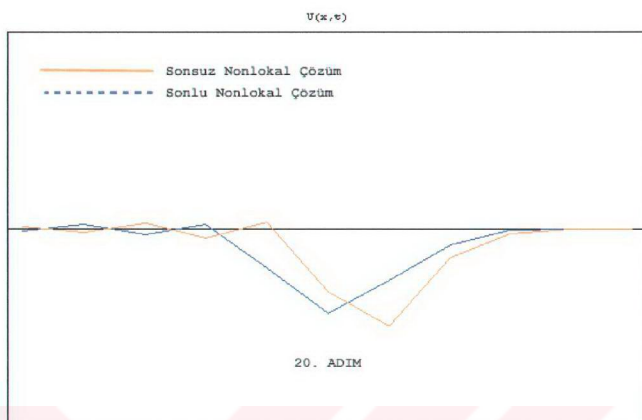
EK B



Şekil B.1 15. adım

Tablo B.1. 15. adıma karşı gelen değerler

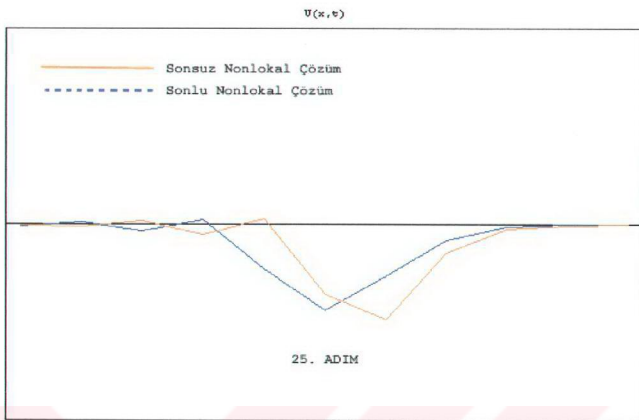
$x \text{ (} \pm a \text{)}$	Sonlu Non. (10^{-6})	Sonsuz Non. (10^{-6}) :
$\frac{11}{2}$	-0.075881	0.082545
$\frac{13}{2}$	0.10676	-0.11919
$\frac{15}{2}$	-0.14873	0.16874
$\frac{17}{2}$	0.19931	-0.23639
$\frac{19}{2}$	-0.30322	0.31762
$\frac{21}{2}$	0.16749	-0.48917
$\frac{23}{2}$	-1.8332	0.24870
$\frac{25}{2}$	-4.4049	-2.9484
$\frac{27}{2}$	-2.7437	-5.1253
$\frac{29}{2}$	-0.88455	-1.5797



Şekil B.2 20. adım

Tablo B.2 20. adıma karşı gelen değerler

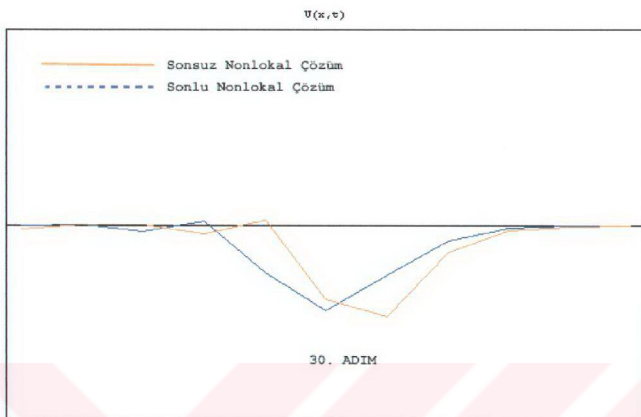
$x \text{ (} \cdot a \text{)}$	Sonlu Non. (10^{-6})	Sonsuz Non. (10^{-6})
$\frac{21}{2}$	-0.031082	-0.0036090
$\frac{23}{2}$	0.068627	-0.036213
$\frac{25}{2}$	-0.12273	0.094864
$\frac{27}{2}$	0.19283	-0.18023
$\frac{29}{2}$	-0.32882	0.29079
$\frac{31}{2}$	0.22559	-0.51189
$\frac{33}{2}$	-2.0370	0.32004
$\frac{35}{2}$	-4.3713	-3.2498
$\frac{37}{2}$	-2.6608	-4.9601
$\frac{39}{2}$	-0.84014	-1.5025



Şekil B.3. 25. adım

Tablo B.3. 25. adıma karşı gelen değerler

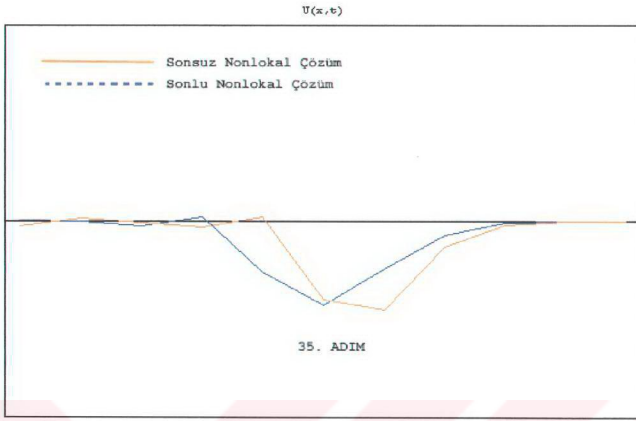
$x \text{ (+a)}$	Sonlu Non. (10^{-8})	Sonsuz Non. (10^{-8})
$\frac{51}{2}$	0.14942	-0.25786
$\frac{53}{2}$	-0.13095	0.27051
$\frac{55}{2}$	0.078894	-0.25332
$\frac{57}{2}$	0.017672	0.18529
$\frac{59}{2}$	-0.23419	-0.050292
$\frac{61}{2}$	0.23785	-0.27809
$\frac{63}{2}$	-2.5769	0.22540
$\frac{65}{2}$	-4.2474	-3.9613
$\frac{67}{2}$	-2.4169	-4.4799
$\frac{69}{2}$	-0.71853	-1.2924



Şekil B.4. 30. adım

Tablo B.4. 30. adıma karşı gelen değerler

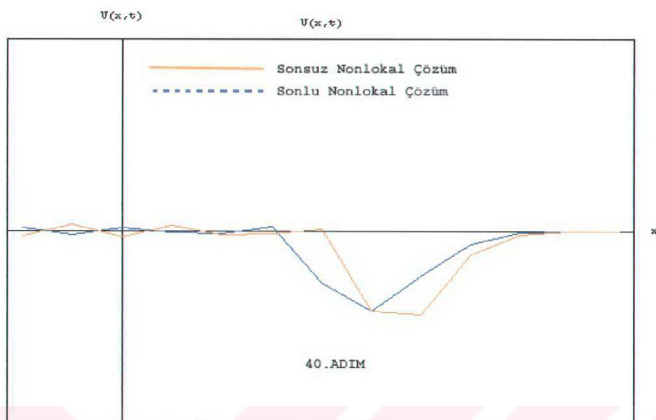
$x \text{ (} \pm a \text{)}$	Sonlu Non. (10^{-8})	Sonsuz Non. (10^{-8})
$\frac{41}{2}$	0.098109	-0.20468
$\frac{43}{2}$	-0.065443	0.18884
$\frac{45}{2}$	0.0041720	-0.14450
$\frac{47}{2}$	0.091835	0.055681
$\frac{49}{2}$	-0.20763	0.086493
$\frac{51}{2}$	0.25777	-0.39198
$\frac{53}{2}$	-2.4085	0.30067
$\frac{55}{2}$	-4.2924	-3.7542
$\frac{57}{2}$	-2.4972	-4.6371
$\frac{59}{2}$	-0.75720	-1.3590



Şekil B.5 35. adım

Tablo B.5. 35. adıma karşı gelen değerler

$x \text{ (*a)}$	Sonlu Non. (10^{-8})	Sonsuz Non. (10^{-8})
$\frac{21}{2}$	0.033795	-0.11317
$\frac{23}{2}$	0.0051815	0.079259
$\frac{25}{2}$	-0.066769	-0.020985
$\frac{27}{2}$	0.15326	-0.073173
$\frac{29}{2}$	-0.32125	0.20617
$\frac{41}{2}$	0.25464	-0.47431
$\frac{43}{2}$	-2.2287	0.33466
$\frac{45}{2}$	-4.3338	-3.5177
$\frac{47}{2}$	-2.5786	-4.7973
$\frac{49}{2}$	-0.79772	-1.4290



Şekil B.6. 40. adım

Tablo B.6. 40. adıma karşı gelen değerler

$x \text{ (} \mu\text{a)}$	Sonlu Non. (10^{-8})	Sonsuz Non. (10^{-8})
$\frac{61}{2}$	0.18132	-0.26667
$\frac{63}{2}$	-0.18357	0.31399
$\frac{65}{2}$	0.14929	-0.33419
$\frac{67}{2}$	-0.061930	0.30107
$\frac{69}{2}$	-0.16629	-0.19028
$\frac{71}{2}$	0.19751	-0.14382
$\frac{73}{2}$	-2.7342	0.11546
$\frac{75}{2}$	-4.1990	-4.1412
$\frac{77}{2}$	-2.3377	-4.3257
$\frac{79}{2}$	-0.68164	-1.2291

ÖZGEÇMİŞ

Ahmet Özkan Özer, 1980 yılında İstanbul’ da doğmuş 1996 yılında İ.T.Ü Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Mühendisliğine girmiş ve 2001 Haziran döneminde mezun olmuştur. 2001 Ağustos ayında aynı fakültenin Mekanik programında yüksek lisansa başlamış ve 2001 Eylül ayında Matematik bölümüne araştırma görevlisi olarak atanmıştır Halen aynı bölümde araştırma görevlisi olarak görevine devam etmektedir.