

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**LİNEER OLMAYAN BAZI NOKTASAL İZLEMELİ KONTROL
PROBLEMLERİ VE ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ**

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

101326

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mat. Müh. Bayram Barış KIZILSAÇ

(509981084)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 11 Haziran 2001

Tezin Savunulduğu Tarih : 28 Haziran 2001

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Seyidali S. AKHİEV

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Ulviye BAŞER

Doç. Dr. Fikret BALTA

(Handwritten signatures of Prof. Dr. Seyidali S. AKHİEV, Prof. Dr. Ulviye BAŞER, and Doç. Dr. Fikret BALTA)

HAZİRAN 2001

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında, lineer olmayan adi diferansiyel denklemler ile ifade edilebilen bazı noktasal izlemeli kontrol problemleri incelenmiştir. Konuya ilgi duymamı sağlayan, tez çalışmam süresince yardımlarını benden esirgemeyen tez danışmanım Sayın Hocam Prof. Dr. Seyidali S. Akhiev' e teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca karşılaştığım tüm güçlüklerde bana her türlü desteği veren aileme, Mat. Yük. Müh. Ahmet Kırış'a ve Dr. Kamil Oruçoğlu' na sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Haziran, 2001

Mat. Müh. Bayram Barış Kızılsaç



İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	ii
ÖZET	iv
SUMMARY	v
1. GİRİŞ	1
2. NOKTASAL İZLEMELİ KONTROL PROBLEMİ VE KESİN ÇÖZÜMÜNÜN VARLIĞI	5
2.1. Noktasal İzlemeli Kontrol Problemi	5
2.2. Kesin Çözüme Sahip Bazı Noktasal İzlemeli Kontrol Problemleri	8
3. ARDIŞIK İZLEMELİ KONTROL YÖNTEMİ	21
3.1. Sistemin Tanımlanması ve Problemin Sunuluşu	21
3.2. Bazı İntegral Eşitsizliklerin Çözümü	25
3.3. Açık Ardışık İzlemeli Kontrol Yöntemi	30
3.4. Kapalı Ardışık İzlemeli Kontrol Yöntemi	37
3.5. Uygulamalı Örnek	44
4. NOKTASAL İZLEMELİ KONTROL PROBLEMLERİNİN PENALTI METODU VE MAKSİMUM PRENSİBİ YARDIMIYLA İNCELENMESİ	46
4.1. Problemin Sunuluşu	46
4.2. Genelleşmiş Çözümün Varlığının Gerekli Koşulları	48
4.3. Uygulamalı Örnek	49
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	55
KAYNAKLAR	56
EKLER	57
ÖZGEÇMİŞ	66

LİNEER OLMAYAN BAZI İZLEMELİ NOKTASAL KONTROL PROBLEMLERİ VE ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

ÖZET

Bu çalışmada lineer olmayan adi diferansiyel denklemler ile ifade edilebilen bazı noktasal izlemeli kontrol problemleri incelenmiştir. Çalışma, dört ana bölüm, sonuçlar ve öneriler kısmı ve dört ekten oluşmaktadır.

Birinci bölümde yapılan çalışma kısaca tanıtılarak, kontrol problemlerinin ortaya çıkış nedenleri sunulmuştur. Kontrol problemlerinin genel bir sunuluşu verilerek, bu konudaki temel çalışmalardan söz edilmiştir. Noktasal izlemeli kontrol probleminin tanımı verilerek, diğer kontrol problemlerinden farkları belirtilmiştir. Bu problemin uygulamalarından söz edilerek, bu konuda yapılan çalışmalar hakkında genel bilgiler verilmiştir. Problemin bazı durumlarda kesin çözümünün bulunabildiği, çoğu uygulamada çözümünün yaklaşık olarak bulunmasının önem kazanacağı belirtilmiştir. Yaklaşık çözümü bulmak için kullanılan ardışık izlemeli kontrol yöntemleri hakkında genel bilgiler verilmiştir. Bu yöntemlerin uygulama alanlarının öneminden söz edilerek, endüstriyel robotik sistemlere uygulanma açısından son derece elverişli oldukları vurgulanmıştır.

Çalışmanın ikinci bölümünde noktasal izlemeli kontrol problemleri hakkında daha genel bir bilgi verilerek, kontrol problemlerinin diğer bir sınıfı olan optimal kontrol problemleri ile ilişkisinden söz edilmiştir. Çözümü kesin olarak bulunabilen bazı noktasal izlemeli kontrol problemleri ele alınarak, farklı yöntemlerle bulunan kesin çözümleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise noktasal izlemeli kontrol probleminin çözümünü yaklaşık olarak elde etmek için, kaynaklarda günümüze kadar mevcut olanlardan farklı bir ardışık izlemeli kontrol algoritması tanıtılmıştır. Tasarlanan algoritma açık ve kapalı kontrol düzenleyicileri olmak üzere iki şekilde incelenmiştir. Bu algoritmaların çalışma biçimleri detaylı bir şekilde açıklanıp, önerilen bu algoritmalar ile yaklaşık çözümlerin çok küçük hatalarla elde edileceği teorik olarak kanıtlanmıştır. Daha sonra bu yeni yöntemin bilinen yöntemlerden farkı belirtilip, diğerlerine göre üstünlüklerinden söz edilmiştir. Bu bölümün sonunda ise, oluşturulan açık ve kapalı kontrol düzenleyicileri kullanılarak varılan teorik sonuçlar bir eklemli robot koluna uygulanmıştır. Elde edilen sonuçlar karşılaştırıldığında, önerilen algoritmanın kapalı şeklinin açık şeklinden daha iyi sonuçlar verdiği görülmüştür.

Dördüncü bölümde ise, noktasal kontrol problemi penaltı yöntemi kullanılarak incelenmiştir. Bu yöntem ile noktasal kontrol problemi belirli bir optimal kontrol problemine indirgenmiştir. Daha sonra Pontryagin'in maksimum ilkesi uygulanarak noktasal kontrol probleminin genelleşmiş çözümü olarak adlandırılmış olan kontrolün gerekli koşulları bulunmuştur. Bu bölümün sonunda varılan teorik sonuçlar bir örneğe uygulanarak, genelleşmiş kontrolün noktasal izlemeli kontrol problemleri için doğal bir kavram olduğu gösterilmiştir.

SOME NONLINEAR POINTWISE LEARNING CONTROL PROBLEMS AND THE METHODS OF SOLUTION

SUMMARY

This work investigates some of the pointwise learning control problems governed by nonlinear ordinary differential equations. It consists of four main chapters, a conclusions and remarks section and four appendices.

In the first chapter, the work is briefly presented and the sources of the pointwise learning control problems are discussed. A general presentation of the control problems is given and the basic works on the field are briefly discussed. The definition of the pointwise learning control problem is given and its differences with the other control problems are discussed. Some of the practical applications of this class of problems are presented and a brief information on the works on this field is given. It is stressed that, only for some of the problems, the exact analytical solutions can be found, but for the most others, methods to obtain a reliable approximate solution is important. Methods of the iterative learning control that are utilized for obtaining the approximate solutions are briefly presented. Mentioning the importance of the field of applications of these methods, it is emphasized that they are especially suitable for the application to the industrial robotic systems.

In the second chapter the pointwise learning control problems are discussed in depth and their solution with another class of the control problems, namely the optimal control problems is presented. Reviewing some of the exactly solvable problems, various methods for finding the exact solutions are discussed.

In the third chapter, an iterative learning control algorithm different than the alternatives in the literature, for obtaining approximate solutions to the pointwise learning control problems, is presented. The designed algorithm is developed in two forms, for both the off line and the on line types of the control regulators. The basic principles of these algorithms are explained in detail. It is theoretically verified that by use of the proposed algorithms the approximate solutions can be obtainable with very small errors. Later, the differences of the proposed method with the known others are discussed and its advantages are mentioned. At the end of this chapter, as an application, the theoretical results obtained by use of the designed on line and off line control regulators, is applied to the problem of a robot arm with one joint. When the obtained results are compared, it is seen that the on line form of the algorithm is much successful than its off line form.

In the fourth chapter the pointwise learning control problem is investigated by utilizing the penalty method. By this, the pointwise learning control problem is reduced to a definite optimal control problem. Then applying the maximum principle of Pontryagin, the necessary conditions of the control, named as the generalized solution of the pointwise learning control problem, is obtained. At the end of this chapter, applying the theoretical results obtained to an example, it is shown that the generalized control is a natural notion for the pointwise control problems.

1. GİRİŞ

Fiziksel sistemlerin büyük çoğunluğu kontrol edilebilirlik özelliğine sahiptir. Bu sistemlerin akışı arzu edilen şekilde yönlendirilebilir. Verilmiş sistemin akışını ifade eden diferansiyel denklem veya diferansiyel denklem sistemleri, kontrol parametreleri olarak adlandırılan bazı parametrelere bağlı fonksiyonlar yardımıyla verilir. Dolayısıyla, sistemin yörüngeleri de aynı kontrol parametreleri ile belirlenir. Burada problem, sistemin akışını istenildiği gibi yönlendirecek kontrol parametrelerinin değer değişimlerinin bulunmasıdır. 1940-1950 yılları arasında incelenmeye başlanılan bu tip problemlere kontrol problemleri adı verilir. Kontrol problemlerinin özel bir sınıfını optimal kontrol problemleri oluşturur. Optimal kontrol problemlerinde ise amaç, kontrol parametrelerini hem sistemin akışını istenildiği gibi yapacak hem de bu sırada örneğin, harcanacak enerjiyi de mümkün olduğunca küçük olacak şekilde seçmektir. 1940-1960 yılları arasında hızla gelişen kontrol ve optimal kontrol problemlerinin teorilerinin oluşmasında, L. S. Pontryagin, R. Belman, M. R. Hestenes, R. Kalman gibi matematikçilerin önemli katkıları olmuştur [1-4].

Bir kontrol problemi, örneğin; Verilmiş

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (1.1)$$

sistemini verilmiş

$$x(t_0) = x_0 \quad (1.2)$$

başlangıç durumundan belirli bir $t_1 > t_0$ anında gereken durum

$$x(t_1) = 0 \quad (1.3)$$

durumuna getiren $u(t)$ kontrol vektörünün bulunması şeklinde verilebilir.

Burada $x(t)$ ve $u(t)$ sonlu boyutlu vektörler, $A(t)$ ve $B(t)$ ise uygun boyutlu matrislerdir. Burada (1.3) koşulunun tüm $t \in [t_0, t_1]$ aralığı için değil, sadece t_1 anında sağlanmasının istenildiğine dikkat edilmelidir. Bu anlamda (1.1-3) ile verilen problem global kontrol problemi olarak adlandırılabilir. Yani (1.3) koşulunun sağlanması $u(t)$ kontrolünün tüm $t \in [t_0, t_1]$ değerlerine bağlıdır. Diğer bir deyişle (1.3) koşulu $u(t)$ kontrolüne göre yerel olmayan koşul gibi düşünülebilir. Ayrıca (1.1) sisteminde $A(t)$ matrisi $n \times n$ boyutlu sabit matris, $B(t)$ n boyutlu sabit vektör, $u(t)$ ise skaler kontrol fonksiyonu olduğunda, (1.1-3) kontrol probleminin çözümünün varlığı için gerek ve yeter koşul, Kalman koşulu olarak adlandırılan

$$\text{Rank}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n \quad (1.4)$$

eşitliğin, sağlanmasıdır.

Şimdi aşağıdaki problem ele alınsın: Öyle bir $u(t)$ kontrol girişi bulunsun ki

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t) \quad (1.5)$$

sisteminin çözümü, verilmiş olan $y_0(t)$ için

$$y_0(t) = h(x(t), t), \quad t \in (t_0, t_1) \quad (1.6)$$

koşulunu sağlasın. Burada (1.6) koşulunun sağlanması tüm aralık için istenmektedir. Bu nedenle bu tip problemlere noktasal izlemeli kontrol problemi denir. Ayrıca noktasal izlemeli kontrol probleminde (1.5) sisteminin başlangıç durumu verilmiş bir vektör gibi düşünülebileceği gibi, bazı hallerde bir kontrol vektörü gibi de düşünülebilir.

Noktasal izlemeli kontrol problemleri büyük oranda geri beslemeli sistemlerin kontrol edilme problemi olarak ortaya çıkar. Bu gibi durumlarda, problemin çözümü için bir yaklaşık çözüm yöntemi kullanmak önem kazanır. Noktasal izlemeli kontrol problemlerini yaklaşık olarak çözmek için, ardışık izlemeli kontrol yöntemleri kullanılır. Bu yöntemlerin gelişimi özellikle 1970 yılından sonra olmuştur. Bu alanda yapılmış olan incelemelerden önemli olanlar [5-10] olarak gösterilebilir.

Ardışık izlemeli kontrol yöntemlerinin amacı, verilen bir sistemin yörüngesinin tekrarlı bir algoritma tasarlanarak, kendileri için önceden belirlenmiş olan ve beklenen yörünge diye isimlendirilen yörüngeye hızlı ve tam olarak yakınsamasını sağlamaktır.

Son yıllarda bu konuda her adımda daha iyi bir yakınsama performansı gösteren ardışık izlemeli kontrol algoritmaları tasarlanmıştır [5-10]. Bu tip algoritmalarda $k = 1, 2, \dots$ olmak üzere k . adımda kullanılan kontrol ve yörünge hatasını içeren $(k+1)$. kontrol uygulanır. Sisteme ilk uygulanacak olan kontrol keyfi bir kontrol olarak seçilir. Başlangıç koşulu ise her adımda keyfi bir vektör olarak seçilebileceği gibi [5,6,8,9], bir algoritma oluşturularak her adımda değişmesi de sağlanabilir [7,10]. k . adımdaki yörünge hatası ise sistemin beklenen yörüngesi ile k . adımdaki kontrole uygun olan yörünge farkıdır. Böylece ardışık izlemeli kontrol algoritmalarıyla sistemin yörüngesinin her adımda beklenen yörüngeye daha çok yakınsaması sağlanır.

Ayrıca bu kontrollerde kontrol edilen sistemin içinde bulunabilecek olan belirsiz parametrelerin değerlerinin bilinmesine de gerek yoktur. Bu kontrol algoritmaları karmaşık endüstriyel sistemlere (özellikle robotik sistemler) uygulanma açısından son derece elverişlidir. Uygulamalar karmaşık robotik sistemlerde durum/kuvvet kontrolü için ardışık izlemeli kontrol algoritmaları kullanılmasının çok iyi sonuçlar verdiğini göstermiştir.

Bu çalışmada adi diferansiyel denklemler ile ifade edilebilen lineer olmayan sistemler için bazı noktasal izlemeli kontrol problemleri incelenmiştir.

2. Bölümde kesin çözümleri bulunabilen bazı noktasal izlemeli kontrol problemleri ele alınmıştır. Bu problemlerin kesin çözümlerini elde etmek için çeşitli yöntemler verilmiştir.

3. Bölümde ise noktasal izlemeli kontrol problemlerinin çözümünü yaklaşık olarak elde etmek için ardışık izlemeli bir kontrol algoritması oluşturulmuştur. [5-10] ile verilen çalışmalardan farklı olarak, $(k+1)$. kontrol oluşturulurken k . adımda kullanılan kontrol ve yörünge hatasını kullanmanın yanısıra, k . adımda kullanılan kontrol ve $(k+1)$. adımdaki yörünge hatası kullanılarak sistemin yörüngesinin beklenen yörüngeye yakınsak olacağı teorik olarak ispat edilmiştir. Kaynaklarda

bilinen çalışmalardan farklı olarak $(k+1)$. adımda kullanılacak kontrol k . adımdaki yörüngeye de bağlı olarak tanımlanmıştır. İspat sırasında Growall-Bellman tipli Lemmalar kullanılmıştır [11,12]. Burada kullanılan ispat yöntemi [5-10] daki çalışmalarda kullanılmış ispat yöntemlerinden önemli bir şekilde farklıdır.

Daha sonra, elde edilen teorik sonuçlar bölümün sonunda, bir eklemli robot koluna uygulanarak sonuçlar kıyaslanmıştır. Bu kıyaslama sonucunda sisteme, $(k+1)$. adımdaki beklenen hata kullanılarak oluşturulan kontrol uygulandığında, sistemin yörüngesinin beklenen yörüngeye, k . adımdaki hata kullanılarak oluşturulan kontrolden daha hızlı yakınsadığı gözlenmiştir. k . adımdaki yörünge hatası kullanılarak $(k+1)$. kontrolün oluşturulma algoritmasına “açık ardışık izlemeli kontrol algoritması”, $(k+1)$. adımdaki yörünge hatası kullanılarak $(k+1)$. kontrolün oluşturulma algoritmasında “kapalı ardışık izlemeli kontrol algoritması”, denilmiştir.

Ayrıca ardışık izlemeli kontrol algoritmaları oluşturulurken kontrol girişinin boyutu ile yörünge hatasının boyutu farklı olabileceği için düzenleyici bir matrise gerek duyulur. [5-10] daki çalışmalarda bu düzenleyici matris sadece zamana bağlı bir matris fonksiyonu olarak seçilebilmektedir. Burada verilmiş olan yöntemde ise bu matris hem sistemin durumuna hem de zamana bağlı bir matris fonksiyonu olarak seçilebilmektedir. Bu seçim ise bazı durumlarda yakınsamanın daha hızlı olmasını ve işlemlerin de daha kolaylaşmasını sağlar. Bu şekilde bir düzenleyici matris kullanılarak oluşturulan bir kontrol algoritması bölümün sonunda bir eklemli robot koluna uygulanarak sonuçlar değerlendirilmiştir.

4. Bölümde ise noktasal izlemeli kontrol problemini incelemek için penaltı yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntem yardımıyla noktasal izlemeli kontrol problemi belirli bir optimal kontrol problemine indirgenmiştir. Daha sonra L. S. Pontryagin’in maksimum ilkesi uygulanarak noktasal izlemeli kontrol probleminin genelleşmiş çözümü olarak adlandırılan kontrolün gerekli koşulları bulunmuştur. Genelleşmiş kontrolün noktasal izlemeli kontrol problemleri için doğal bir kavram olduğu bölümün sonunda bir örnek üzerinde açıklanmıştır.

2. NOKTASAL İZLEMELİ KONTROL PROBLEMİ VE KESİN ÇÖZÜMÜNÜN VARLIĞI

2.1. Noktasal İzlemeli Kontrol Problemi

R^n ile n -boyutlu gerçel değerli $x = [x_1, \dots, x_n]^T$ vektörlerinin Euclid uzayı, $R^{n \times m}$ ile de $n \times m$ -boyutlu gerçel değerli matrisler uzayı gösterilsin. Burada T ile transpoze işlemi gösterilmiştir. Özel halde ise $R = R^1$ ile gerçel sayılar uzayı gösterilsin. Varsayalım ki sistemin durumu n -boyutlu $x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$ vektör fonksiyonu, girişi r -boyutlu $u(t) = [u_1(t), \dots, u_r(t)]^T$ vektör fonksiyonu, çıkışı ise m -boyutlu $y(t) = [y_1(t), \dots, y_m(t)]^T$ vektör fonksiyonu ile karakterize edilmektedir.

Bu durumda sistem,

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) + B(t)u(t), \quad t \in (0, T) \quad (2.1)$$

diferansiyel denklem sistemi olarak alınsın.

Burada $f = [f_1(x, t), \dots, f_n(x, t)]^T$ n - boyutlu ve $f_k = f_k(x, t)$, $k = 1, \dots, n$ elemanları $R^n \times [0, T]$ bölgesinde (x, t) argümanlarına göre sürekli, verilmiş bir vektör fonksiyonu, $B(t)$ ise $n \times r$ - boyutlu elemanları $t \in [0, T]$ 'de sürekli, verilmiş bir matris fonksiyonu olsun.

Bu sistemin çıkışı ise

$$y(t) = h(x(t), t), \quad t \in (0, T)$$

eşitliğiyle verilsin.

Burada $h(x, t) = [h_1(x, t), \dots, h_m(x, t)]^T$ m -boyutlu ve $h_i(x, t)$, $i = 1, \dots, m$ elemanları $R^n \times [0, T]$ bölgesinde (x, t) argümanlarına göre sürekli kısmi türevlere sahip, verilmiş bir vektör fonksiyonu, sistemin beklenen $y_d(t)$ yörüngesi (çıkışı) ise m -

boyutlu ve elemanları $t \in [0, T]$ 'de sürekli türeve sahip, verilmiş bir vektör fonksiyonu olsun.

Burada $u(t) = [u_1(t), \dots, u_r(t)]^T$ kontrol vektörleri $(0, T)$ aralığında ölçülebilir ve hemen hemen sınırlı vektör fonksiyonu olarak ele alınacaktır. Bu koşul altında (2.1) denkleminin çözümünden, bu eşitliği hemen hemen tüm $t \in (0, T)$ aralığında sağlayan ve $t \in [0, T]$ 'de düzgün sürekli olan bir $x(t)$ vektör fonksiyonu anlaşılır.

Kontrol teorisinin önemli problemlerinden biri aşağıdaki şekilde sunulabilir:

(2.1) ile verilen sistem için öyle bir $u(t)$ girişi bulunsun ki, bu sistemin bu girişe karşı gelen belirli bir $x(t)$ çözümü için $y(t)$ çıkışı, $t \in [0, T]$ 'de verilmiş $y_d(t)$ fonksiyonuna eşit, yani

$$y_d(t) = h(x(t), t), \quad t \in (0, T) \quad (2.2)$$

koşulu geçerli olsun. Bu problem bazı hallerde (2.1-2) problemi olarak adlandırılır.

Bu problem ile birlikte aşağıdaki optimal kontrol problemi ele alınsın:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) + B(t)u(t), \quad t \in (0, T) \quad (2.3)$$

$$S(x, u) = \int_0^T ((y_d(t) - h(x(t), t)), (y_d(t) - h(x(t), t))) dt \rightarrow \min \quad (2.4)$$

burada (y, z) ile $y \in R^m$ ve $z \in R^m$ vektörlerinin iç çarpımı gösterilmiştir, yani

$$(y, z) = \sum_{i=1}^m y_i z_i$$

dir. (2.3-4) ile verilen optimal kontrol problemi şu şekilde sunulur:

(2.3) koşulunu sağlayan (x, u) çiftleri kümesinde (2.4) fonksiyoneli minimum yapan (x^0, u^0) çifti bulunmalıdır. Eğer (2.3-4) optimal kontrol probleminde (x^0, u^0) optimal çifti varsa, $S(x^0, u^0) \geq 0$ olacağı açıktır. Eğer $S(x^0, u^0) = 0$ olursa, $u^0(t)$ kontrolü (2.1-2) kontrol probleminin çözümü olacaktır. Tersine $u^0(t)$ kontrolü (2.1)

sisteminin belirli bir $x^0(t)$ yörüngesi ile birlikte (2.2) koşulunu gerçekleştirirse, (x^0, u^0) çifti (2.3-4) optimal kontrol probleminde minimum koşulunu gerçekleştiren optimal çift olur ve bu çift için $S(x^0, u^0) = 0$ olur. Dolayısı ile (2.1-2) kontrol probleminin incelenmesi kendisine uygun olan (2.3-4) optimal kontrol probleminin incelenmesiyle ilişkilidir. Yani (2.1-2) probleminin incelenmesi optimal kontrol teorisi için de belirli bir önem taşımaktadır.

Ayrıca (2.1-2) problemde (2.2) koşulunun tüm $t \in [0, T]$ noktaları için sağlanması istenmektedir. Bu nedenle (2.1-2) kontrol problemi noktasal izlemeli kontrol problemi olarak adlandırılmıştır. Kontrol problemleri genelde farklı sunuluşlara sahip olabilir. Bu sunuluşlardan en klasığı, örneğin aşağıdaki şekilde verilebilir:

Varsayalım ki

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t), \quad t \in (t_0, t_1) \quad (2.5)$$

lineer denklem sistemi verilmiştir. Burada $x \in R^n, u \in R^r$ dir. A ve B uygun boyutlu kare ve dörtgen matrislerdir. Bu sistem için

$$x(t_0) = x_0 \quad (2.6)$$

başlangıç koşulu ile şu problem ele alınsın:

(2.5) ile verilen sistem için öyle bir $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))^T$ kontrolü bulunsun ki, bu sistemin (2.6) başlangıç koşulunu sağlayan $x(t)$ çözümü belirli bir $t_1 > t_0$ anında

$$x(t_1) = 0 \quad (2.7)$$

koşulunu sağlasın.

Bu problemde $t_1 > t_0$ önceden verilmiş bir sayı gibi düşünülebilir. (2.5-7) ile verilen problem de belirli bir kontrol problemidir, ancak bu problemde (2.7) koşulunun sadece t_1 noktasında sağlanması istenmektedir. Dolayısı ile (2.7) nin sağlanması global bir olay gibi düşünülebilir. Yani (2.7) nin sağlanması $(x(t), u(t))$ çiftinin $t \in [t_0, t_1]$ aralığındaki değerlerin hepsine bağlıdır.

(2.7) koşulunun sol tarafı integral şeklinde de yazılabilir. Dolayısı ile (2.5-7) ile verilen kontrol problemi (2.1-2) ile verilen problemden karakterce tamamen farklı bir problemidir.

Ayrıca (2.1-2) ile verilen noktasal izlemeli kontrol problemi aşağıdaki şekilde de yazılabilir;

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^0 + \int_0^t [\mathbf{f}(\mathbf{x}(s), s) + \mathbf{B}(s)\mathbf{u}(s)] ds, \quad (2.8a)$$

$$\mathbf{y}_d(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), t), \quad t \in (0, T) \quad (2.8b)$$

burada $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}(0) \in \mathbf{R}^n$ dir. (2.8b) eşitliği m -boyutlu vektör eşitliğidir. (2.8b) denkeminde n -boyutlu $\mathbf{x}(t)$ vektör bilinmeyen olarak düşünüldüğünde, (2.8a) eşitliği n - boyutlu $\mathbf{u}(t)$ ye göre birinci tür Volterra tipli denklem olarak düşünülebilir. Dolayısı ile (2.8) sistemi n sayıda Volterra tipli birinci tür ve m sayıda cebirsel denklemden oluşan bir sistem olarak düşünülür. Bu anlamda (2.8) sistemi integro cebirsel veya hibrid sistem olarak adlandırılır. Bu tip sistemlerin incelenmesi sırasında ortaya çıkan zorlukların bir kısmı bunların hibrid tipli olması ile, diğer kısmı ise $\mathbf{y}_d(t)$ ve $\mathbf{u}(t)$ boyutlarının farklı olmasıyla ilişkilidir.

2.2. Kesin Çözüme Sahip Bazı Noktasal İzlemeli Kontrol Problemleri

Bu bölümde çözümü kesin olarak bulunabilen bazı noktasal izlemeli kontrol problemleri ele alınmıştır. (2.2) eşitliğinin her iki tarafı t 'ye göre türetilirse

$$\dot{\mathbf{y}}_{di}(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial h_i(\mathbf{x}(t), t)}{\partial x_k(t)} \dot{x}_k(t) + \frac{\partial h_i(\mathbf{x}(t), t)}{\partial t}, \quad i = 1, \dots, m$$

şeklinde olur. Bu eşitlik vektör (sütun) eşitliği şeklinde yazılırsa

$$\dot{\mathbf{y}}_d(t) = \mathbf{h}_x(\mathbf{x}(t), t) \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{h}_t(\mathbf{x}(t), t)$$

elde edilir. Burada

$$h_x(x, t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(x, t)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_1(x, t)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m(x, t)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_m(x, t)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

ve

$$h_t(x, t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(x, t)}{\partial t} \\ \vdots \\ \frac{\partial h_m(x, t)}{\partial t} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanmış $m \times n$ ve m -boyutlu matris ve vektör fonksiyonlarıdır.

Burada $x(t)$ vektör fonksiyonu (2.1) sisteminin çözümü olduğundan

$$\dot{y}_d(t) = h_x(x(t), t) [f(x(t), t) + B(t)u(t)] + h_t(x(t), t)$$

veya

$$\dot{y}_d(t) = h_x(x(t), t) f(x(t), t) + h_x(x(t), t) B(t) u(t) + h_t(x(t), t)$$

olarak elde edilir. Burada özel halde $m = r$ ve $h_x(x(t), t) B(t)$, $t \in [0, T]$ 'de tersi alınabilir bir kare matris fonksiyonu olarak ele alınacaktır.

Teorem 2.2.1: Varsayalım ki $y_d(t) \in C^{(1)}[0, T]$ verilmiş gereken bir durumdur ve öyle bir $a \in R^n$ vektörü vardır ki,

$$y_d(0) = h(a, 0)$$

koşulunu sağlamaktadır. Bu durumda noktasal izlemeli kontrol probleminin çözümü

$$u(t) = [h_x(x(t), t) B(t)]^{-1} [\dot{y}_d(t) - h_x(x(t), t) f(x(t), t) - h_t(x(t), t)] \quad (2.9)$$

$$x(0) = a \quad (2.10)$$

şeklinde olur. Yani (2.1) sisteminin (2.9-10) ile tanımlanan $u(t)$ 'ye ve $x(0) = a$ başlangıç koşuluna karşı gelen $x(t)$ çözümü beklenen (2.2) çıkışını gerçekleştirir.

İspat: İspat için aşağıdaki iki koşulun gerçekleşmesi gerekmektedir.

i. $y_d(0) = h(x(0), 0)$

ii. $\dot{y}_d(t) = h_x(x(t), t)\dot{x}(t) + h_t(x(t), t)$

i. koşul a 'nın seçiminden dolayı gerçekleşir, ii. koşulun gerçekleştiğini göstermek için, (2.9) de bulunmuş olan $u(t)$ değeri (2.1) sisteminde yerine yazılırsa

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) + B(t) \left[(h_x(x(t), t) B(t))^{-1} (\dot{y}_d(t) - h_x(x(t), t)f(x(t), t) - h_t(x(t), t)) \right] \quad (2.11)$$

şeklinde olur. Bu değer ii. koşulda yerine yazılırsa

$$\dot{y}_d = h_x \left(f + B(h_x B)^{-1} (\dot{y}_d - h_x f) - h_t \right) + h_t$$

olur. Buradan

$$\dot{y}_d = h_x f + \dot{y}_d - h_x f - h_t + h_t$$

elde edilir ve ii. koşulda gerçekleşmiş olur.

Bu halde $x(t)$ çözümü yaklaşık olarak aşağıdaki iteratif yöntem ile bulunabilir.

$$x_0(t) = x_0$$

olmak üzere

$$x_{N+1}(t) = x^0 + \int_0^t [f(x_N(s), s) + B(s)(h_x(x_N(s), s)B(s))^{-1} (\dot{y}_d(s) - h_x(x_N(s), s)f(x_N(s), s) - h_t(x_N(s), s))] ds \quad N = 0, 1, \dots$$

dir.

Teorem 2.2.1' de kesin $u(t)$ çözümünün (2.9) ifadesi bir ters düzenleyici gibi de düşünülebilir.

Bu çözümü bulmak için önce (2.11) denkleminin (2.10) başlangıç koşulunu sağlayan $x(t)$ çözümü bulunmalıdır. Sonra $x(t)$, (2.9)' un sağ tarafına yerleştirilerek $u(t)$ çözümü bulunabilir. Ancak bazı özel hallerde $u(t)$ çözümünü bulmak için $x(t)$ nin bulunmasına gerek olmayabilir. Böyle hallerden biri lineer problem olarak adlandırılan aşağıdaki problemdir.

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B(t) u(t), \quad t \in (0, T) \quad (2.12)$$

sistemi ele alınsın. Burada $x \in R^n, u \in R^r$ ' dir. $A \in R^{n \times n}$ şeklinde verilmiş sabit bir matris, $B(t)$ ise elemanları $t \in [0, T]$ ' de sürekli olan $n \times r$ -boyutlu verilmiş bir matris fonksiyonu olsun.

Bu sistemin çıkışı ise

$$y(t) = C(t) x(t) + q(t), \quad t \in (0, T)$$

ile verilsin. Burada $y \in R^m$ dir. $C(t) \in R^{m \times n}$ ve $q(t) \in R^m$ ise elemanları $t \in [0, T]$ ' de sürekli türe ve sahip sırasıyla verilmiş matris ve vektör fonksiyonları olsun. Burada öyle bir $u(t)$ girişi bulunsun ki, (2.12) sisteminin bu girişe karşı gelen $x(t)$ çözümü için $y(t)$ çıkışı, $t \in [0, T]$ ' de verilmiş olan $y_d(t)$ fonksiyonuna eşit olsun, yani

$$y_d(t) = C(t) x(t) + q(t) \quad (2.13)$$

koşulu geçerli olsun.

(2.12) sisteminin $x(0) = a \in R^n$ koşulunu sağlayan çözümü

$$x(t) = e^{At} a + \int_0^t e^{A(t-s)} B(s) u(s) ds \quad (2.14)$$

şeklindedir. Burada

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$$

dır.

(2.9) 'da bulunmuş olan $u(t)$ değeri lineer hal için hesaplanıp, $t \in [0, T]$ 'de $C(t)B(t)$ tersi alınabilir bir kare matris ve beklenen çıkış olan $y_d(t)$ ise $t \in [0, T]$ 'de türetilabilir bir vektör fonksiyonu olarak ele alınırsa,

$$u(t) = (C(t)B(t))^{-1} (\dot{y}_d(t) - (\dot{C}(t) + C(t)A)x(t) - \dot{q}(t)) \quad (2.15)$$

olarak bulunur.

Ayrıca açıktır ki, noktasal izlemeli kontrol problemleri kontrol girişinin boyutunun sistemin çıkışının boyutuna eşit ve sistemin durumunun boyutundan küçük ya da eşit olduğu durumlarda “iyi” problemler olurlar ve bu durumlarda çoğu zaman CB matrisinin tersi alınabilen kare bir matris olduğunu varsaymak doğal olur. Şimdi $x(t)$ 'nin (2.14) 'te bulunmuş olan çözümü (2.15) 'te yerine yazılırsa,

$$u(t) = (C(t)B(t))^{-1} \left(\dot{y}_d(t) - (\dot{C}(t) + C(t)A) \left(e^{At}a + \int_0^t e^{A(t-s)}B(s)u(s)ds \right) - \dot{q}(t) \right),$$

$$u(t) = (C(t)B(t))^{-1} \left(\dot{y}_d(t) - (\dot{C}(t) + C(t)A)e^{At}a - (\dot{C}(t) + C(t)A) \int_0^t e^{A(t-s)}B(s)u(s)ds - \dot{q}(t) \right)$$

elde edilir. Bu denklemde

$$F(t) = (C(t)B(t))^{-1} (\dot{y}_d(t) - (\dot{C}(t) + C(t)A)e^{At}a - \dot{q}(t))$$

$$K(s, t) = (C(t)B(t))^{-1} (\dot{C}(t) + C(t)A)e^{A(t-s)}B(s)$$

yazılırsa,

$$u(t) = F(t) + \int_0^t K(s, t)u(s)ds$$

şeklinde ikinci tür Volterra tipli bir integral denklem olduğu açıkça görülür. Burada $F(t)$, $t \in [0, T]$ 'de r -boyutlu vektör fonksiyonu $K(s, t)$ ise $[0, T] \times [0, T]$ 'de $r \times r$ -boyutlu matris fonksiyonudur.

Şimdi bu denklem sisteminin yani noktasal izlemeli kontrol probleminin hangi durumlarda çözümünün olduğu incelensin. Belirtildiği gibi CB tersi alınabilir kare bir matris fonksiyonudur, yani $\det|CB| \neq 0$ dır. Ayrıca bu kontrole karşı gelen yörünge (2.12) sisteminin $x(0) = a$ koşulunu sağlayan çözümü olarak bulunacaktır. Burada a vektörü

$$y_d(0) = C(0)a + q(0) \quad (2.16)$$

koşulu yardımıyla tanımlanır.

(2.16) sisteminden a vektörünün çözülebilmesi için

$$\text{rank}[C(0), (y_d(0) - q(0))] = \text{rank}[C(0)] \quad (2.17)$$

koşulunun geçerli olması gerekir. Bu koşul geçerli olmazsa (2.16) sisteminin a çözümü yoktur ve bu nedenle noktasal izlemeli kontrol probleminin kesin çözümü olmaz. Eğer (2.17) koşulu geçerli olursa, a vektörü tek yada sonsuz sayıda olur. (2.16) in a 'ya göre sonsuz çözümü (genelde $m < n$ durumunda yani denklem sayısı bilinmeyen sayısından az) olduğunda, bu çözümlerden seçilen herhangi bir a vektörüne uygun olan $x(t)$ durumunu gerçekleştiren $u(t)$ girişi tek olarak bulunur ve (2.13) koşulu geçerli olur. Eğer tek çözüm varsa (genelde $m = n$ durumunda, yani denklem sayısının bilinmeyen sayısına eşit olduğu durumda) bu çözüme uygun olan tek bir $x(t)$ durumu ve bu durumu gerçekleştiren tek bir $u(t)$ kontrol girişi bulunur ve (2.13) koşulu geçerli olur. Aşağıda a 'nın tek ve sonsuz olduğu hale ait iki örnek verilmiştir.

Örnek 2.2.1 Aşağıdaki tek boyutlu sistem ele alınsın.

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t), \quad t \in (0, T) \quad (2.18)$$

Bu sistemin çıkışı

$$y(t) = 2x(t)$$

eşitliği ile verilsin. Burada $n = m = r = 1$ 'dir.

Şimdi öyle bir $u(t)$ girişi bulunsun ki, sistemin bu girişe uygun olan $x(t)$ durumu için $y(t)$ çıkışı, $t \in [0, T]$ ' de verilmiş olan $y_d(t)$ fonksiyonuna eşit olsun, yani

$$y_d(t) = 2x(t)$$

koşulu geçerli olsun. Bu eşitliğin her iki tarafı t 'ye göre türetilirse

$$\begin{aligned}\dot{y}_d(t) &= 2\dot{x}(t) \\ \dot{y}_d(t) &= 2(x(t) + u(t)) \\ u(t) &= \frac{\dot{y}_d(t) - 2x(t)}{2}\end{aligned}$$

olarak bulunur. (2.18) sisteminin $x(0) = a$ koşulunu sağlayan çözümü

$$x(t) = e^t a + \int_0^t e^{(t-s)} u(s) ds$$

olduğundan,

$$u(t) = \frac{\dot{y}_d(t)}{2} - e^t a - \int_0^t e^{(t-s)} u(s) ds$$

şeklinde ikinci tür Volterra tipli bir integral denklem elde edilir. Özel halde $y_d(t) = \sin(t)$ olursa $x(0) = a = 0$ şeklinde tek olarak bulunur ve

$$u(t) = \frac{\cos(t)}{2} - \int_0^t e^{(t-s)} u(s) ds$$

bulunur. Buradan $u(t)$ girişi tek olarak belirlenir ve bu girişe uygun olan $x(t)$ durumu için $y_d(t)$ beklenen çıkışı elde edilir.

Örnek 2.2.2 Şimdi de aşağıdaki sistem ele alınsın.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + 2x_2 + x_3 + u_1 + u_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 + u_1 + u_2 \\ \dot{x}_3 &= x_2 + x_3 + 2u_1 + u_2\end{aligned}$$

Bu sistemin çıkışı ise

$$\begin{aligned}y_1 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 &= x_2 + 2x_3\end{aligned}$$

eşitlikleri ile verilsin. Burada $n = 3, r = 2, m = 2$ 'dir.

Şimdi öyle bir $u(t)$ kontrol girişi bulsun ki, bu girişe uygun olan $x(t)$ durumu için $y(t)$ çıkışı, $t \in [0, T]$ 'de verilmiş olan $y_d(t)$ fonksiyonuna eşit, yani

$$\begin{aligned}y_{d1} &= x_1 + x_2 + x_3 \\ y_{d2} &= x_2 + 2x_3\end{aligned}$$

koşulları geçerli olsun. Bir önceki örnekteki benzer işlemler uygulanarak bu sistemin kontrol girişi için

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{3}{8} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{8} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_{d1}(t) \\ \dot{y}_{d2}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{5}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{9}{2} & \frac{51}{8} & \frac{11}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} - \\ &\quad \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{5}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{9}{2} & \frac{51}{8} & \frac{11}{8} \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & \frac{9}{2} & 2 \\ 2 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} (t-s) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix} ds\end{aligned}$$

şeklinde 2. tür Volterra tipli bir integral denklem sistemi elde edilir. Burada $x(0) = a$ vektörü

$$\begin{aligned}y_{d1}(0) &= x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) \\ y_{d2}(0) &= x_2(0) + 2x_3(0)\end{aligned}$$

denklem sisteminden sonsuz şekilde bulunabilir. Bu herhangi bir $x(0) = a$ çözümüne uygun olan $x(t)$ durumunu gerçekleştiren tek bir $u(t)$ çözümünün bulunmasına ve istenen $y_d(t)$ çıkışının gerçekleşmesine ait bir örnektir.

Şimdi $m \leq r < n$ olduğu durumda da bazı noktasal izlemeli kontrol problemlerinin çözümünün bulunabileceği gösterilecektir. Bunu göstermek için yardımcı çıkışlar yöntemi kullanılacak ve bu yöntem aşağıdaki özel hal için açıklanacaktır.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in (0, T) \quad (2.19)$$

sistemi ele alınsın. Burada $x \in R^n, u \in R^r$ 'dir. $A(t) \in R^{n \times n}, B(t) \in R^{n \times r}$ şeklinde elemanları $t \in [0, T]$ 'de sürekli, verilmiş matris fonksiyonları olsun.

Bu sistemin çıkışı ise

$$y(t) = C(t)x(t) + q(t), \quad t \in (0, T)$$

eşitliği ile verilsin Burada $y \in R^m$ 'dir. $C(t) \in R^{m \times n}$ ve $q(t) \in R^m$ şeklinde elemanları $t \in [0, T]$ 'de sürekli türeve sahip, verilmiş matris ve vektör fonksiyonları olsun.

Burada öyle bir $u(t)$ girişi bulunsun ki, (2.19) sisteminin bu girişe karşı gelen $x(t)$ çözümü için $y(t)$ çıkışı, $t \in [0, T]$ 'de verilmiş $y_d(t)$ fonksiyonuna eşit olsun, yani

$$y_d(t) = C(t)x(t) + q(t)$$

koşulu geçerli olsun.

Şimdi sistemin çıkışının boyutunun yardımcı çıkışlar ekleyerek $x(t)$ 'nin boyutuna eşit olacak şekilde arttırıldığı ve $C(t)$ 'ye de yardımcı elemanlar ekleyip $D(t) \in R^{m \times n}$ şeklinde bir matris, benzer şekilde $q(t)$ 'den $a(t) \in R^m$ şeklinde bir vektör fonksiyonunun elde edildiği varsayılınsın. Bu durumda $y_d(t)$ 'ye de yardımcı beklenen çıkışlar eklenerek boyutu $x(t)$ 'nin boyutuna eşit olacak şekilde arttırılınsın ve elde edilen beklenen çıkış $z_d(t) \in R^m$ olsun. Burada $[y_{m+1}(t), \dots, y_n(t)]^T$ eklenen yardımcı çıkışları göstermek üzere

$$\mathbf{z}_d(t) = [y_1(t), \dots, y_m(t), y_{m+1}(t), \dots, y_n(t)]^T$$

şeklinde, c_{ij} ($i = m+1, \dots, n$ $j = 1, \dots, n$) ve $[q_{m+1}(t), \dots, q_n(t)]^T$ yardımcı elemanları göstermek üzere

$$D = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \\ c_{(m+1)1} & \dots & c_{(m+1)n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

ve

$$\mathbf{a}(t) = [q_1(t), \dots, q_m(t), q_{m+1}(t), \dots, q_n(t)]^T$$

şeklinde olur.

Varsayalım ki bu durumda sistemin beklenen çıkışı için

$$\mathbf{z}_d(t) = D(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{a}(t) \quad (2.20)$$

koşulu geçerli olur. Burada $D(t) \in R^{n \times n}$ şeklinde elemanları $t \in [0, T]$ ' de sürekli türe ve sahip tersi alınabilen bir kare matris fonksiyonu, $\mathbf{a}(t) \in R^n$ ve $\mathbf{z}_d(t) \in R^n$ şeklinde elemanları $t \in [0, T]$ 'de sürekli türe ve sahip birer vektör fonksiyonu olsun. (2.20) denkleminde

$$\mathbf{x} = D^{-1}(\mathbf{z}_d - \mathbf{a}) \quad (2.21)$$

olarak bulunur. (2.20)' nin her iki tarafı t 'ye göre türetilirse

$$\dot{\mathbf{z}}_d = \dot{D}\mathbf{x} + D\dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{a}}$$

elde edilir. Burada $\dot{\mathbf{x}}$ yerine (2.19) sistemindeki değeri yazılırsa

$$\dot{\mathbf{z}}_d = \dot{D}\mathbf{x} + D(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}) + \dot{\mathbf{a}}$$

olur. Burada da x yerine (2.21) denkleminden bulunan değeri yazılırsa

$$DBu = \dot{z}_d - \dot{D} \left[D^{-1}(z_d - a) \right] - DAD^{-1}(z_d - a) - \dot{a}$$

elde edilir. Bu denklemin sağ tarafı $p \in R^n$ vektör fonksiyonu ile gösterilirse

$$DBu = p \quad (2.22)$$

olarak yazılabilir. Şimdi boyut arttırmadaki serbeslikten dolayı C , q ve y_d 'ye eklenen elemanlar u 'nun çözümünü tek olarak elde edebilecek şekilde seçilebildiği, yani (2.22) sisteminde $\text{rank}[DB, p] = \text{rank}DB = r$ olduğu varsayılınsın. Bu durumda u tek olarak belirlenebilir.

Örnek 2.2.3

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \quad (2.23)$$

lineer sistemi ve bu sistemin çıkışı

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

olarak verilsin. Bu çıkışın boyutu

$$z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix} x$$

olacak şekilde arttırılsın. Böylece

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

olur. D matrisinin tersinin olması koşulundan $b = c = 0$, $a = 1$ seçilirse,

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olur.

Şimdi öyle bir u girişi bulunsun ki, sistemin bu girişe uygun olan x çözümü için çıkış, $t \in [0, T]$ ' de verilmiş olan y_d fonksiyonuna eşit olsun, yani

$$z_d = D x \quad (2.24)$$

koşulu geçerli olsun . O zaman

$$\begin{bmatrix} y_{d1}(t) \\ y_{d2}(t) \\ y_{d3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

olur, buradan

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y_{d3}(t) \\ x_2(t) &= y_{d2}(t) - y_{d3}(t) \\ x_3(t) &= y_{d1}(t) - y_{d2}(t) \end{aligned} \quad (2.25)$$

elde edilir. Şimdi (2.24) eşitliği t 'ye göre türetilirse

$$\begin{aligned} \dot{y}_{d1} &= \dot{x}_1 + \dot{x}_2 + \dot{x}_3 \\ \dot{y}_{d2} &= \dot{x}_1 + \dot{x}_2 \\ \dot{y}_{d3} &= \dot{x}_1 \end{aligned}$$

bulunur. Burada x 'in türevlerinin yerine (2.23) sistemindeki değerleri yazılırsa

$$\begin{aligned} \dot{y}_{d1} &= 2(x_1 + x_2 + x_3) + 2(u_1 + u_2) \\ \dot{y}_{d2} &= x_1 + x_2 + 2x_3 + 2u_1 + u_2 \\ \dot{y}_{d3} &= x_1 + x_2 + x_3 + u_1 + u_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu sistemde x 'in (2.25) denklemindeki değeri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\dot{y}_{d1} &= 2y_{d1} + 2(u_1 + u_2) \\ \dot{y}_{d2} &= 2y_{d1} - y_{d2} + 2u_1 + u_2 \\ \dot{y}_{d3} &= y_{d1} + u_1 + u_2\end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$y_{d3} = \frac{1}{2}y_{d1}$$

seçilirse

$$\dot{y}_{d3} = \frac{1}{2}\dot{y}_{d1}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}\dot{y}_{d1} &= 2y_{d1} + 2(u_1 + u_2) \\ \dot{y}_{d2} &= 2y_{d1} - y_{d2} + 2u_1 + u_2 \\ \frac{1}{2}\dot{y}_{d1} &= y_{d1} + u_1 + u_2\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu sistemde 1. ve 3. denklemler lineer bağımlı oldukları için u_1 ve u_2 tek olarak elde edilir.

Ayrıca (2.22) eşitliği kullanılarak ta

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y}_{d1} - 2y_{d1} \\ \dot{y}_{d2} - 2y_{d1} + 2y_{d2} \\ \dot{y}_{d3} - y_{d1} \end{bmatrix}$$

aynı sonuç elde edilebilir. Burada $\text{rank}[DB, p] = \text{rank}DB = 2$ olduğu için u 'nun çözümü tek olarak belirlenebilir.

Bu bölümde noktasal izlemeli kontrol problemlerinin kesin çözümlerini elde etmek için çeşitli yöntemler verildi. Sonraki bölümde ise yaklaşık çözüm yöntemleri üzerinde durulacaktır.

3. ARDIŞIK İZLEMELİ KONTROL YÖNTEMİ

3.1. Sistemin Tanımlanması ve Problemin Sunuluşu

Varsayalım ki $x = [x_1, \dots, x_n]^T$ verilmiş n -boyutlu bir vektördür, bu vektörün Euclid normu

$$\|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

olarak tanımlansın.

Şimdi de $t \in [0, T]$ 'de n -boyutlu verilmiş bir $\varphi(t) = [\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)]^T$ vektör fonksiyonu ele alınsın. Böyle bir vektör fonksiyonu için

$$\|\varphi\|_{\lambda, [0, T]} = \max \left\{ e^{-\lambda t} \|\varphi(t)\| \right\}, \quad \lambda > 0$$

normu tanımlansın. Bu norma $\varphi(t)$ 'nin λ -normu denir.

Ayrıca her $M = (m_{ij}) \in R^{m \times n}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ matrisinin normu, $g = Mx \in R^m$ keyfi g vektörü için

$$\|g\| \leq \|M\| \cdot \|x\|$$

eşitsizliği geçerli olacak şekilde tanımlansın. Bu koşulu sağlayan $\|M\|$ normu $\|x\|$ normu yardımıyla türetilmiş bir norm gibi düşünülebilir. Bu normu tanımlamak için

$$\begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{m1} & \cdots & m_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 = \sum_{j=1}^n m_{1j} x_j \\ \vdots \\ y_m = \sum_{j=1}^n m_{mj} x_j \end{bmatrix}$$

ve

$$\|Mx\| = \max_i |y_i| = \max_i \left| \sum_j m_{ij} x_j \right| \leq \max_i \sum_j |m_{ij}| \cdot |x_j| \leq \|x\| \max_i \sum_j |m_{ij}|$$

yazılırsa, M matrisinin normunun

$$\|M\| = \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \sum_{j=1}^n |m_{ij}| \right\}$$

şeklinde tanımlanabileceği açıkça görülür.

Ayrıca x vektörünün Euclid normu

$$\|x\| = \sum_{j=1}^n |x_j|$$

olarak tanımlanırsa

$$\|Mx\| = \sum_i \sum_j |m_{ij}| \cdot |x_j| \leq \sum_j |x_j| \left(\sum_i |m_{ij}| \right) \leq \max_j \left(\sum_i |m_{ij}| \right) \left(\sum_j |x_j| \right)$$

olacağından

$$\|M\| = \max_j \left\{ \sum_i |m_{ij}| \right\}$$

şeklinde de yazılabileceği görülür.

Şimdi $t \in [0, T]$ 'de aşağıdaki sistem ele alınsın,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), t, \theta) + B(t)u(t), \\ y(t) &= h(x(t), t). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Burada $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^r$ ve $y(t) \in R^m$ sırasıyla sistemin durumunu, girişini ve çıkışını gösteren vektör fonksiyonlarıdır. $\theta \in E \subset R^p$ şeklinde belirsiz bir parametredir.

Burada $f = (f_1(x(t), t, \theta), \dots, f_n(x(t), t, \theta))^T$ n -boyutlu ve $f_k = f_k(x, t, \theta)$, $k = 1, \dots, n$ elemanları $R^n \times [0, T] \times E$ bölgesinde (x, t, θ) argümanına göre sürekli olan verilmiş

bir vektör fonksiyonu, $B(t)$ ise $n \times r$ -boyutlu ve elemanları $t \in [0, T]$ 'de sürekli olan verilmiş bir matris fonksiyonu olsun. Ayrıca $h(x, t) = [h_1(x, t), \dots, h_m(x, t)]^T$ m -boyutlu ve $h_i(x, t)$, $i = 1, \dots, m$, elemanları $R^n \times [0, T]$ ' de (x, t) vektör argümanına göre sürekli olan kısmi türevlere sahip verilmiş bir vektör fonksiyonu olarak ele alınsın.

Burada $u(t)$, $t \in [0, T]$ 'de sürekli olan bir vektör fonksiyonu olarak ele alınacaktır ve $u(t)$ kontrol girişlerinden oluşan küme ise U ile gösterilecektir.

(3.1) sisteminin beklenen yörüngesi (çıkışı) $y_d(t)$ olsun. Bu sistem için

$$y_d(t) = h(x(t), t) \quad (3.2)$$

problemi ele alınsın. (3.1-2) ile bağlı noktasal izlemeli kontrol problemi geri beslemeli sistemlere uygulandığı zaman aşağıdaki gibi bir problem önem kazanır.

Varsayalım ki $k = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere $u_k(t)$ kontrolüne ve belirli bir $x_k(0) = a_k$ başlangıç koşuluna karşı gelen durum $x_k(t)$ 'dir, yani

$$\begin{aligned} \dot{x}_k(t) &= f(x_k(t), t, \theta) + B(t)u_k(t) \\ x_k(0) &= a_k \end{aligned}$$

dır. Beklenen yörünge için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h(x_k(t), t) = y_d(t)$$

olması istenmektedir. Bu durumda

$$e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$$

hatasını belirleyerek öyle

$$u_{k+1}(t) = \varphi(u_k(t), e_k(t), t)$$

kontroller dizisi ve

$$x_{k+1}(0) = a_{k+1}$$

başlangıç değerler dizisi oluşturulsun ki, $e_k(t)$ hata vektörünün $\|e_k\|_{\lambda,[0,T]}$ normu sıfıra yakınsak olsun. Açıktır ki, her adımda $u_{k+1}(t)$ kontrolü $u_k(t)$ ve $e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$ 'yi kullanarak oluşturulur. Bu nedenle de böyle $\{u_k(t)\}$ kontrollerinin bulunması problemi açık ardışık izlemeli kontrol problemi olarak adlandırılır. Açık ardışık izlemeli kontrol probleminde $u_k(t)$ 'nin oluşturulması Ek A Şekil.A.1'de gösterilmiştir. Şimdi açık ardışık izlemeli kontrol probleminden tamamen farklı olan aşağıdaki problem ele alınsın.

Burada yine $k = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere kontroller dizisi

$$u_{k+1}(t) = \psi(u_k(t), e_{k+1}(t), t)$$

şeklinde, başlangıç değerler dizisi ise

$$x_{k+1}(0) = b_{k+1}$$

olarak verilsin ve yine $e_k(t)$ hata vektörünün $\|e_k\|_{\lambda,[0,T]}$ normu sıfıra yakınsak olsun. Açıktır ki, burada $u_{k+1}(t)$ kontrolü $u_k(t)$ ve $e_{k+1}(t) = y_d(t) - y_{k+1}(t)$ 'yi kullanarak oluşturulur. Böyle $\{u_k(t)\}$ kontrollerinin bulunması problemi kapalı ardışık izlemeli kontrol problemi olarak alandırılır. Burada $u_{k+1}(t)$ kontrolünün $e_{k+1}(t)$ ile oluşturulması işlemlere $x_{k+1}(t)$ 'in de girmesini ve yakınsaklığın daha hızlı elde edilmesini sağlar. Kapalı ardışık izlemeli kontrol probleminde $u_k(t)$ 'nin oluşturulması Ek A Şekil.A.2'de gösterilmiştir.

Açık ve kapalı ardışık izlemeli kontrol problemlerinde amaç sistemin çıkışı $y_k(t)$ 'nin beklenen yörünge $y_d(t)$ 'ye, tanımlanmış kontroller ve başlangıç değerler dizileri kullanılarak adım adım yakınsamasını sağlamaktır. Bunu gerçekleştirmek için $u_1(t)$ ve $x_1(0)$ keyfî seçilerek sisteme $k = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere her adımda sisteme bir $u_k(t)$ girişi verilerek, bu girişe uygun $x_k(t)$ durumu ve $y_k(t)$ çıkışı hesaplanır ve her adımda $y_k(t)$ ile $y_d(t)$ arasındaki hata vektörünün normu olan

$$\|e_k(t)\| = \|y_k(t) - y_d(t)\| < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$

hesaplanarak, bu sayı istenildiği kadar küçük oluncaya kadar işlemlere devam edilir. Her iki (hem açık hem kapalı) ardışık izlemeli kontrol probleminde

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t) = y_d(t), \quad t \in (0, T)$$

olmalıdır.

Burada açık ve kapalı ardışık izlemeli kontrol problemleri aşağıdaki iki varsayım altında incelenecektir.

Varsayım 1: Varsayalım ki $f(x, t, \theta)$ fonksiyonu $(x, t, \theta) \in R^n \times [0, T] \times E$ bölgesinde Lipshitz koşulunu sağlıyor. Yani her $(x_1, t, \theta), (x_2, t, \theta) \in R^n \times [0, T] \times E$ için öyle α sabit sayısı vardır ki

$$\|f(x_1, t, \theta) - f(x_2, t, \theta)\| \leq \alpha \|x_1 - x_2\|$$

koşulu sağlanır.

Varsayım 2: Varsayalım ki beklenen yörünge olan $y_d(t)$, $t \in [0, T]$ 'de sürekli türevelidir, yani $y_d(t) \in C^{(1)}$ 'dir.

Hatırlatma: Varsayım 1 burada ele alınmış (3.1) sistemi için basit bir gerekliliktir ve $f(x, t, \theta)$ fonksiyonu yapısal olarak bilinmeyen ya da belirsiz bir fonksiyon da olabilir. Varsayım 2 ise beklenen yörünge için temel bir gerekliliktir ve çoğu çalışmada [7] bu yörünge için daha ileri derece türevlerinin sürekli olması istenir.

3.2. Bazı integral eşitsizliklerin çözümü

Hataların değerlendirilmesi sırasında bazı integral eşitsizlikleri çözmek gerekmektedir. Bunun için aşağıdaki iki Lemma kullanılacaktır [11,12].

Lemma 1: Varsayalım ki $\psi(t)$ ve $N(t)$, $t \in (0, T)$ 'de $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere sırasıyla $L_p(0, T)$ ve $L_q(0, T)$ uzaylarından olan ve negatif olmayan verilmiş fonksiyonlardır. $\varphi(t)$ ise $t \in (0, T)$ 'de integre edilebilir, $L_p(0, T)$ uzayından olan, negatif olmayan ve

$$\varphi(t) \leq \int_0^t N(s) \varphi(s) ds + \psi(t) \quad (3.3)$$

eşitsizliğini sağlayan herhangi bir fonksiyondur. Bu durumda

$$\varphi(t) \leq \left[\int_0^t N(s) \psi(s) ds \right] e^{\int_0^t N(s) ds} + \psi(t) \quad (3.4)$$

eşitsizliği geçerli olur.

İspat: (3.3) eşitsizliğinde

$$R(t) = \int_0^t N(s) \varphi(s) ds$$

yazılırsa

$$\varphi(t) \leq R(t) + \psi(t)$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $N(t)$ ile çarpılarak, $(0, t)$ 'de integre edilirse

$$\int_0^t N(s) \varphi(s) ds \leq \int_0^t N(s) R(s) ds + \int_0^t N(s) \psi(s) ds$$

bulunur. Burada

$$R_1(t) = \int_0^t N(s) R(s) ds, \quad \psi_1(t) = \int_0^t N(s) \psi(s) ds$$

yazılırsa

$$R(t) \leq R_1(t) + \psi_1(t) \quad (3.5)$$

elde edilir. Keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı için bu eşitsizlik

$$R(t) \leq R_1(t) + \psi_1(t) + \varepsilon$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $N(t)$ ile çarpılırsa

$$\frac{N(t)R(t)}{R_1(t) + \psi_1(t) + \varepsilon} \leq N(t)$$

olur. Burada $\psi_1(t)$ monoton artan bir fonksiyon olduğundan

$$\frac{N(s)R(s)}{R_1(s) + \psi_1(t) + \varepsilon} \leq \frac{N(s)R(s)}{R_1(s) + \psi_1(s) + \varepsilon} \leq N(s), \quad s \in (0, t)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $(0, t)$ 'de integre edilirse

$$\int_0^t \frac{N(s)R(s)}{R_1(s) + \psi_1(t) + \varepsilon} ds \leq \int_0^t N(s) ds$$

elde edilir. Burada $\dot{R}_1 = NR$ olduğundan

$$\int_0^t \frac{dR_1(s)}{R_1(s) + \psi_1(t) + \varepsilon} \leq \int_0^t N(s) ds$$

olur. Buradan da

$$\ln \left(\frac{R_1(t) + \psi_1(t) + \varepsilon}{R_1(0) + \psi_1(t) + \varepsilon} \right) \leq \int_0^t N(s) ds,$$

$$R_1(t) + \psi_1(t) + \varepsilon \leq (R_1(0) + \psi_1(t) + \varepsilon) e^{\int_0^t N(s) ds}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $\varepsilon \rightarrow 0$ için limite geçilirse

$$R_1(t) + \psi_1(t) \leq \psi_1(t) e^{\int_0^t N(s) ds}$$

olur. Bu eşitsizlik (3.5) dikkate alınırsa

$$R(t) \leq R_1(t) + \psi_1(t) \leq \psi_1(t) e^{\int_0^t N(s) ds} + \psi(t)$$

olarak yazılır. Burada $\psi_1(t) = \int_0^t N(s)\psi(s)ds$ olduğundan, amacımız (3.4)

$$\varphi(t) \leq \left[\int_0^t N(s)\psi(s)ds \right] e^{\int_0^t N(s)ds} + \psi(t)$$

eşitsizliğine varılır ve ispat tamamlanmış olur.

Lemma 1' de $\psi(t) \in L_p$ üzerine monotonluk koşulu konulmamıştır. $\psi(t)$ monoton artan bir fonksiyon olduğunda bu Lemma daha kolay ispatlanabilir, yani aşağıdaki Lemma geçerli olur.

Lemma 2: Şimdi varsayalım ki Lemma 1' de verilmiş olan $\psi(t)$ fonksiyonu monoton artandır ve $\varphi(t) \in L_p(0, T)$, $N(t) \in L_q(0, T)$, $\psi(t) \in L_p(0, T)$ ve $\varphi(t)$, $N(t)$, $\psi(t) \geq 0$ olarak verilmiştir. Bu durumda (3.4) yerine

$$\varphi(t) \leq \psi(t) e^{\int_0^t N(s)ds} \quad (3.6)$$

eşitsizliği geçerli olur.

İspat: Keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\varphi(t) \leq \int_0^t N(s)\varphi(s)ds + \psi(t) + \varepsilon$$

olduğu açıktır. Bu eşitsizlikte

$$R(t) = \int_0^t N(s)\varphi(s)ds$$

yazılırsa

$$\varphi(t) \leq R(t) + \psi(t) + \varepsilon \quad (3.7)$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $N(t)$ ile çarpıldığında

$$\frac{\varphi(t)N(t)}{R(t)+\psi(t)+\varepsilon} \leq N(t)$$

olarak yazılabilir. Burada $\psi(t)$ monoton artan olduğu için

$$\frac{\varphi(s)N(s)}{R(s)+\psi(t)+\varepsilon} \leq \frac{\varphi(s)N(s)}{R(s)+\psi(s)+\varepsilon} \leq N(s), \quad s \in (0, t)$$

şeklinde olur. Bu eşitsizliğin her iki yanını $(0, t)$ 'de integre edilirse

$$\int_0^t \frac{\varphi(s)N(s)}{R(s)+\psi(t)+\varepsilon} ds \leq \int_0^t N(s) ds$$

elde edilir. Burada $\dot{R} = \varphi N$ olduğundan

$$\int_0^t \frac{dR(s)}{R(s)+\psi(t)+\varepsilon} \leq \int_0^t N(s) ds$$

olur. Buradan da

$$R(t)+\psi(t)+\varepsilon \leq (R(0)+\psi(t)+\varepsilon)e^{\int_0^t N(s) ds} = (\psi(t)+\varepsilon)e^{\int_0^t N(s) ds}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $\varepsilon \rightarrow 0$ için limite geçilip, (3.7) eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\varphi(t) \leq \psi(t)e^{\int_0^t N(s) ds} \quad (3.8)$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Lemma 2'den elde edilen (3.6) değerlendirmesinin, Lemma 1'den elde edilen (3.4) değerlendirmesinden farklı olduğu açıktır. $\psi(t)$ monoton artan olduğunda (3.4) 'ten

$$\varphi(t) \leq \psi(t) \left(1 + \left(\int_0^t N(s) ds \right) e^{\int_0^t N(s) ds} \right)$$

veya

$$\varphi(t) \leq \psi(t) \left(1 + \int_0^t N(s) ds \right) e^{\int_0^t N(s) ds}$$

elde edilir. Dolayısıyla Lemma 1 ve Lemma 2 birbirinden bağımsız lemmalar gibi düşünülebilir. Bu lemmalar hataların yakınsaklığıyla ilgili teoremlerde kullanılacaktır.

3.3. Açık Ardışık İzlemeli Kontrol Yöntemi

(3.1) ile verilmiş sistem $k = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere $t \in [0, T]$ 'de

$$\begin{aligned} \dot{x}_{k+1}(t) &= f(x_{k+1}(t), t, \theta) + B(t)u_{k+1}(t) \\ y_{k+1}(t) &= h(x_{k+1}(t), t) \end{aligned} \quad (3.9)$$

şeklinde yazılsın. Bu sistemin $t \in [0, T]$ 'de beklenen yörüngesi $y_d(t)$ olsun ve

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h(x_{k+1}(t), t) = y_d(t)$$

olması için kontroller dizisi

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \frac{d}{dt} [K(x_k(t), t) e_k(t)] \quad (3.10)$$

olarak, başlangıç değerleri dizisi ise

$$x_{k+1}(0) = x_k(0) + B(0)K[x_k(0), 0]e_k(0) \quad (3.11)$$

şeklinde oluşturulsun. Burada $K(x, t)$ $r \times m$ - boyutlu ve elemanları $\mathbf{R}^n \times [0, T]$ bölgesinde (x, t) argümanlarına göre sürekli kısmi türevlere sahip, verilmiş bir düzenleyici matris fonksiyonu olsun. Bu problemin çözümünün varlığını göstermek için aşağıdaki teorem verilmiştir.

Teorem 3.3.1 : (3.9) sisteminin Varsayım 1' i, beklenen yörünge $y_d(t)$ ' nin ise Varsayım 2' yi sağladığı varsayılın. Herhangi bir $x_1(0)$ başlangıç değeri ve herhangi bir $u_1(t) \in U$ kontrol girişi için (3.10-11) ile verilen kontrol ve başlangıç değerleri dizileri kullanıldığında (3.9) sisteminin $e_k(t) = y_k(t) - y_d(t)$ hata vektörünün $\|e_k(t)\|$ normu, $h_x(x, t)$, $R^n \times [0, T]$ bölgesinde sınırlı, I_m m -boyutlu birim matrisi göstermek üzere

$$\max_{(\xi, x, t) \in R^{2n} \times [0, T]} \|I_m - h_x(\xi(t), t) B(t) K(x, t)\| < 1$$

koşulları altında $k \rightarrow \infty$ için düzgün olarak sıfıra yakınsar yani

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t) = y_d(t), \quad t \in (0, T)$$

olur.

İspat: (3.10) ile verilmiş olan $u_{k+1}(t)$ kontrolü (3.9) sistemine uygulanırsa

$$\dot{x}_{k+1}(t) = f(x_{k+1}(t), t, \theta) + B(t) \left(u_k(t) + \frac{d}{dt} (K(x_k(t), t) e_k(t)) \right)$$

elde edilir. Bu denklemin her iki tarafı $(0, t)$ 'de integre edilirse

$$x_{k+1}(t) = x_{k+1}(0) + \int_0^t f(x_{k+1}(s), s, \theta) ds + \int_0^t B(s) u_k(s) ds + \int_0^t B(s) \frac{d}{dt} [K(x_k(s), s) e_k(s)] ds$$

olur. Burada $x_{k+1}(0)$ yerine (3.11)' deki değeri yazılırsa

$$\begin{aligned} x_{k+1}(t) &= x_k(0) + B(0) K(x_k(0), 0) e_k(0) + \int_0^t f(x_{k+1}(s), s, \theta) ds + \int_0^t B(s) u_k(s) ds \\ &\quad + \int_0^t B(s) \frac{d}{dt} [K(x_k(s), s) e_k(s)] ds \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Bu denklemdeki son terime kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1}(t) = & \mathbf{x}_k(0) + B(0)K(\mathbf{x}_k(0), 0)\mathbf{e}_k(0) - B(0)K(\mathbf{x}_k(0), 0)\mathbf{e}_k(0) + B(t)K(\mathbf{x}_k(t), t)\mathbf{e}_k(t) \\ & + \int_0^t f(\mathbf{x}_{k+1}(s), s, \theta) ds + \int_0^t B(s)\mathbf{u}_k(s) ds - \int_0^t \dot{B}(s)K(\mathbf{x}_k(s), s)\mathbf{e}_k(s) ds \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemin sağ tarafına $\int_0^t f(\mathbf{x}_k(s), s, \theta) ds$ ekleyip çıkartılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1}(t) = & \mathbf{x}_k(0) + \int_0^t f(\mathbf{x}_k(s), s, \theta) ds + \int_0^t B(s)\mathbf{u}_k(s) ds + B(t)K(\mathbf{x}_k(t), t)\mathbf{e}_k(t) \\ & - \int_0^t \dot{B}(s)K(\mathbf{x}_k(s), s)\mathbf{e}_k(s) ds + \int_0^t [f(\mathbf{x}_{k+1}(s), s, \theta) - f(\mathbf{x}_k(s), s, \theta)] ds \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\mathbf{x}_k(t) = \mathbf{x}_k(0) + \int_0^t f(\mathbf{x}_k(s), s, \theta) ds + \int_0^t B(s)\mathbf{u}_k(s) ds$$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1}(t) - \mathbf{x}_k(t) = & B(t)K(\mathbf{x}_k(t), t)\mathbf{e}_k(t) - \int_0^t \dot{B}(s)K(\mathbf{x}_k(s), s)\mathbf{e}_k(s) ds \\ & + \int_0^t [f(\mathbf{x}_{k+1}(s), s, \theta) - f(\mathbf{x}_k(s), s, \theta)] ds \end{aligned} \quad (3.12)$$

elde edilir. Bu denklemin her iki tarafının Euclid normu alınıp Varsayım 1 göz önüne alındığında ise

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_{k+1}(t) - \mathbf{x}_k(t)\| \leq & \alpha \int_0^t \|\mathbf{x}_{k+1}(s) - \mathbf{x}_k(s)\| ds + \|B(t)K(\mathbf{x}_k(t), t)\| \cdot \|\mathbf{e}_k(t)\| \\ & + \int_0^t \|\dot{B}(s)K(\mathbf{x}_k(s), s)\| \cdot \|\mathbf{e}_k(s)\| ds \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\alpha = \max_{t \in [0, T], \mathbf{x} \in R^n} \|B(t)K(\mathbf{x}, t)\|, \quad b = \max_{t \in [0, T], \mathbf{x} \in R^n} \|\dot{B}(t)K(\mathbf{x}, t)\|, \quad q_k(t) = \|\mathbf{x}_{k+1}(t) - \mathbf{x}_k(t)\|$$

tanımları yapılırsa

$$q_k(t) \leq \alpha \int_0^t q_k(s) ds + a \|e_k(t)\| + b \int_0^t \|e_k(s)\| ds \quad (3.13)$$

olur. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $(0, t)$ 'de integre edilirse

$$\int_0^t q_k(s) ds \leq \alpha \int_0^t \left(\int_0^s q_k(\tau) d\tau \right) ds + a \int_0^t \|e_k(s)\| ds + b \int_0^t \left(\int_0^s \|e_k(\tau)\| d\tau \right) ds$$

elde edilir. Burada

$$\varphi(t) = \int_0^t q_k(s) ds \quad (3.14)$$

tanımı yapılırsa eşitsizlik,

$$\varphi(t) \leq \alpha \int_0^t \varphi(s) ds + a \int_0^t \|e_k(s)\| ds + b \int_0^t \left(\int_0^s \|e_k(\tau)\| d\tau \right) ds$$

şeklini alır. Bunu,

$$\varphi(t) \leq \alpha \int_0^t \varphi(s) ds + (a + bt) \int_0^t \|e_k(s)\| ds$$

şeklinde yazar ve

$$\psi(t) = (a + bt) \int_0^t \|e_k(s)\| ds \quad (3.15)$$

tanımlanırsa, kısaca

$$\varphi(t) \leq \alpha \int_0^t \varphi(s) ds + \psi(t)$$

elde edilir. Burada Lemma 2' den elde edilen (3.8) göz önüne alınırsa

$$\varphi(t) \leq \psi(t) e^{\alpha t}$$

yazılabilir. Dolayısı ile (3.15) kullanılarak

$$\varphi(t) \leq (a + bt) \left(\int_0^t \|e_k(s)\| ds \right) e^{\alpha t} \quad (3.16)$$

şeklini alır.

Şimdi (3.13) ve (3.14) yardımıyla

$$q_k(t) \leq \alpha \varphi(t) + a \|e_k(t)\| + b \int_0^t \|e_k(s)\| ds$$

şeklinde bir eşitsizlik elde edilebilir. Bu eşitsizlik (3.16) kullanılarak

$$q_k(t) \leq \alpha e^{\alpha t} (a + bt) \int_0^t \|e_k(s)\| ds + a \|e_k(t)\| + b \int_0^t \|e_k(s)\| ds$$

şeklinde yazılabilir. Buradan da

$$q_k(t) \leq [\alpha e^{\alpha t} (a + bt) + b] \int_0^t \|e_k(s)\| ds + a \|e_k(t)\|$$

elde edilir. Burada

$$c_1 = \alpha e^{\alpha T} (a + bT) + b$$

tanımlanırsa

$$q_k(t) = \|x_{k+1}(t) - x_k(t)\| \leq c_1 \int_0^t \|e_k(s)\| ds + a \|e_k(t)\| \quad (3.17)$$

olarak elde edilir.

Şimdi de hata vektörü $e_k(t)$ göz önüne alınırsa

$$e_k(t) = y_d(t) - y_k(t) = y_d(t) - h(x_k(t), t)$$

olduğundan

$$e_{k+1}(t) - e_k(t) = h(x_k(t), t) - h(x_{k+1}(t), t) \quad (3.18)$$

şeklinde yazılabilir. Diferansiyel ortalama değer teoremine göre $t \in [0, T]$ 'de $x_k(t)$ ve $x_{k+1}(t)$ arasında öyle bir $\xi_k(t)$ vardır ki

$$h(x_k(t), t) - h(x_{k+1}(t), t) = h_x(\xi_k(t), t)(x_k(t) - x_{k+1}(t))$$

eşitliği geçerli olur. Böylece (3.18) eşitliği

$$e_{k+1}(t) - e_k(t) = h_x(\xi_k(t), t)(x_k(t) - x_{k+1}(t))$$

şeklinde yazılabilir. Burada (3.12) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} e_{k+1}(t) = & [I_m - h_x(\xi_k(t), t)B(t)K(x_k(t), t)]e_k(t) - h_x(\xi_k(t), t) \int_0^t (f(x_{k+1}(s), s, \theta) \\ & - f(x_k(s), s, \theta)) ds - h_x(\xi_k(t), t) \int_0^t \dot{B}(s)K(x_k(s), s)e_k(s) ds \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafının normu alınıp Varsayım 1 göz önüne alınırsa

$$\|e_{k+1}(t)\| \leq d \|e_k(t)\| + \beta \alpha \int_0^t \|x_{k+1}(s) - x_k(s)\| ds + \beta b \int_0^t \|e_k(s)\| ds$$

olur. Burada

$$\beta = \max_{t \in [0, T], \xi \in R^n} \|h_x(\xi, t)\|, \quad d = \max_{t \in [0, T], x \in R^n, \xi \in R^n} \|I_m - h_x(\xi, t)B(t)K(x, t)\| < 1$$

olarak tanımlanmıştır. Şimdi (3.17) eşitsizliği kullanılırsa

$$\|e_{k+1}(t)\| \leq d \|e_k(t)\| + \beta \alpha \int_0^t \left(c_1 \int_0^s \|e_k(\tau)\| d\tau + a \|e_k(s)\| \right) ds + \beta b \int_0^t \|e_k(s)\| ds$$

olur ve kısaca

$$\|e_{k+1}(t)\| \leq d \|e_k(t)\| + (\beta \alpha c_1 t + \beta \alpha a + \beta b) \int_0^t \|e_k(s)\| ds$$

yazılır. Bu eşitsizlikte

$$c_2 = \beta \alpha c_1 T + \beta \alpha a + \beta b$$

tanımlanırsa

$$\|e_{k+1}(t)\| \leq d \|e_k(t)\| + c_2 \int_0^t \|e_k(s)\| ds$$

elde edilir ve her iki tarafı $e^{-\lambda t}$ ile çarpılarak

$$\|e_{k+1}(t)\| e^{-\lambda t} \leq d \|e_k(t)\| e^{-\lambda t} + c_2 \left(\int_0^t \|e_k(s)\| e^{-\lambda s} e^{\lambda s} ds \right) e^{-\lambda t}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafının λ -normu alınır

$$\|e_{k+1}\|_{\lambda,[0,T]} \leq d \|e_k\|_{\lambda,[0,T]} + c_2 \|e_k\|_{\lambda,[0,T]} \left(\int_0^t e^{\lambda s} ds \right) e^{-\lambda t}$$

olur. Buradan da

$$\begin{aligned} \|e_{k+1}\|_{\lambda,[0,T]} &\leq d \|e_k\|_{\lambda,[0,T]} + c_2 \|e_k\|_{\lambda,[0,T]} \frac{1}{\lambda} (e^{\lambda T} - 1) e^{-\lambda T} \\ &\leq d \|e_k\|_{\lambda,[0,T]} + c_2 \|e_k\|_{\lambda,[0,T]} \frac{1}{\lambda} = \left(d + \frac{c_2}{\lambda} \right) \|e_k\|_{\lambda,[0,T]} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$c_3 = d + \frac{c_2}{\lambda}$$

tanımlanırsa

$$\|e_{k+1}\|_{\lambda,[0,T]} \leq c_3 \|e_k\|_{\lambda,[0,T]} \leq c_3^2 \|e_{k-1}\|_{\lambda,[0,T]} \leq \dots \leq c_3^k \|e_1\|_{\lambda,[0,T]}$$

elde edilir. Burada λ sayısı yeterince büyük seçilirse $d < 1$ olduğundan $c_3 < 1$ olur, böylece

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k\|_{\lambda,[0,T]} = 0$$

olur. Burada

$$0 \leq \|e_k(t)\| \leq \left(\|e_k\|_{\lambda, [0, T]} \right) e^{\lambda t} \leq \left(\|e_k\|_{\lambda, [0, T]} \right) e^{\lambda T}$$

olduğu için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k(t)\| = 0$$

olur ve amaçlanan sonuca varılarak

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t) = y_d(t)$$

teorem ispatlanmış olur.

3.4. Kapalı Ardışık İzlemeli Kontrol Yöntemi

Şimdi (3.1) ile verilen sistem $t \in [0, T]$, de $k = 1, 2, 3, \dots$ üzere lineer çıkışlı bir sistem olarak aşağıdaki şekilde yazılsın.

$$\begin{aligned} \dot{x}_{k+1}(t) &= f(x_{k+1}(t), t, \theta) + B(t)u_{k+1}(t) \\ y_{k+1}(t) &= C(t)x_{k+1}(t) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Burada $C(t)$ elemanları $t \in [0, T]$, de sürekli $m \times n$ boyutlu verilmiş bir matris fonksiyonu olsun. Bu sistemin $t \in [0, T]$, de beklenen yörüngesi $y_d(t)$ olsun ve

$$\lim_{k \rightarrow \infty} C(t)x_{k+1}(t) = y_d(t)$$

koşulunun gerçekleşmesi için kontroller dizisi

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \frac{d}{dt} [K(x_k(t), t)e_{k+1}(t)] \quad (3.20)$$

şeklinde, başlangıç değerler dizisi ise I_n n -boyutlu birim matrisi göstermek üzere $I_n + B(0)K(x(0), 0)C(0)$ 'ın tersi alınabilir bir kare matris olması koşulu ile

$$x_{k+1}(0) = [I_n + B(0)K(x_k(0), 0)C(0)]^{-1} [x_k(0) + B(0)K(x_k(0), 0)y_d(0)] \quad (3.21)$$

şeklinde oluşturulsun. Burada $K(x, t)$ bir önceki problemde olduğu gibi $r \times m$ -boyutlu ve elemanları $R^n \times [0, T]$ bölgesinde (x, t) argümanlarına göre sürekli kısmi

türevlere sahip, verilmiş bir düzenleyici matris fonksiyonu olsun. Bu problemin çözümünün varlığını için aşağıdaki Teorem verilmiştir.

Teorem 3.4.1 : (3.19) sisteminin Varsayım 1' i, beklenen yörünge $y_d(t)$ 'nin ise Varsayım 2' yi sağladığı varsayılın. Herhangi bir $x_1(0)$ başlangıç değeri ve herhangi bir $u_1(t) \in U$ kontrol girişi için (3.20-21) ile verilen kontrol ve başlangıç değerleri dizileri kullanıldığında (3.4.1) sisteminin $e_k(t) = y_k(t) - y_d(t)$ hata vektörünün $\|e_k(t)\|$ normu,

$$\max_{(x,t) \in R^n \times [0,T]} \left\| (I_m + C(t)B(t)K(x,t))^{-1} \right\| < 1$$

koşulu altında $k \rightarrow \infty$ için düzgün olarak sifıra yakınsar yani,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t) = y_d(t), \quad t \in (0, T)$$

olur.

İspat: (3.20) ile verilmiş olan $u_{k+1}(t)$ kontrolü (3.19) sistemine uygulanırsa

$$\dot{x}_{k+1}(t) = f(x_{k+1}(t), t, \theta) + B(t) \left(u_k(t) + \frac{d}{dt} (K(x_k(t), t) e_{k+1}(t)) \right)$$

olur. Bu denklemin her iki tarafı $(0, t)$ ' de integre edilirse

$$\begin{aligned} x_{k+1}(t) &= x_{k+1}(0) + \int_0^t f(x_{k+1}(s), s, \theta) ds + \int_0^t B(s) u_k(s) ds \\ &\quad + \int_0^t B(s) \frac{d}{ds} [K(x_k(s), s) e_{k+1}(s)] ds \end{aligned} \quad (3.22)$$

elde edilir. Burada (3.21) ile verilen başlangıç değerleri dizisi

$$[I_n + B(0)K(x_k(0), 0)C(0)]x_{k+1}(0) = x_k(0) + B(0)K(x_k(0), 0)y_d(0)$$

$$x_{k+1}(0) = x_k(0) + B(0)K(x_k(0), 0)[y_d(0) - y_{k+1}(0)] = x_k(0) + B(0)K(x_k(0), 0)e_{k+1}(0)$$

olarak yazılabilir. Şimdi (3.22) denkleminin son terimine kısmi integrasyon uygulanır ve sağ tarafına $\int_0^t f(x_k(s), s, \theta) ds$ ekleyip çıkarılırsa

$$\begin{aligned} x_{k+1}(t) - x_k(t) &= B(t)K(x_k(t), t)e_{k+1}(t) - \int_0^t \dot{B}(s)K(x_k(s), s)e_{k+1}(s) ds \\ &+ \int_0^t [f(x_{k+1}(s), s, \theta) - f(x_k(s), s, \theta)] ds \end{aligned} \quad (3.23)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemin her iki tarafının Euclid normu alınıp Varsayım 1 gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} \|x_{k+1}(t) - x_k(t)\| &\leq \alpha \int_0^t \|x_{k+1}(s) - x_k(s)\| ds + \|B(t)K(x_k(t), t)\| \cdot \|e_{k+1}(t)\| \\ &+ \int_0^t \|\dot{B}(s)K(x_k(s), s)\| \cdot \|e_{k+1}(s)\| ds \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada Teorem 3.3.1 'in ispatındaki tanımlamalar

$$a = \max_{t \in [0, T], x \in R^n} \|B(t)K(x, t)\|, \quad b = \max_{t \in [0, T], x \in R^n} \|\dot{B}(t)K(x, t)\|, \quad q_k(t) = \|x_{k+1}(t) - x_k(t)\|$$

yine kullanılırsa

$$q_k(t) \leq \alpha \int_0^t q_k(s) ds + a \|e_{k+1}(t)\| + b \int_0^t \|e_{k+1}(s)\| ds \quad (3.24)$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $(0, t)$ 'de integre edilirse

$$\int_0^t q_k(s) ds \leq \alpha \int_0^t \left(\int_0^s q_k(\tau) d\tau \right) ds + a \int_0^t \|e_{k+1}(s)\| ds + b \int_0^t \left(\int_0^s \|e_{k+1}(\tau)\| d\tau \right) ds$$

olur. Burada

$$\varphi(t) = \int_0^t q_k(s) ds \quad (3.25)$$

tanımı yapılırsa

$$\varphi(t) \leq \alpha \int_0^t \varphi(s) ds + a \int_0^t \|e_{k+1}(s)\| ds + b \int_0^t \left(\int_0^s \|e_{k+1}(\tau)\| d\tau \right) ds$$

şeklını alır. Bunu

$$\varphi(t) \leq \alpha \int_0^t \varphi(s) ds + (a + bt) \int_0^t \|e_{k+1}(s)\| ds$$

şeklinde yazar ve Lemma 2'den elde edilen (3.8) sonucu kullanılırsa, kısaca

$$\varphi(t) \leq (a + bt) \left(\int_0^t \|e_{k+1}(s)\| ds \right) e^{at} \quad (3.26)$$

yazılabilir.

Şimdi (3.24-26) denklemlerinden ise

$$q_k(t) \leq \alpha e^{at} (a + bt) \int_0^t \|e_{k+1}(s)\| ds + a \|e_{k+1}(t)\| + b \int_0^t \|e_{k+1}(s)\| ds$$

şeklinde bir eşitsizlik elde edilir. Buradan da

$$q_k(t) \leq [\alpha e^{at} (a + bt) + b] \int_0^t \|e_{k+1}(s)\| ds + a \|e_{k+1}(t)\|$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikte

$$c_1 = \alpha e^{aT} (a + bT) + b$$

yazılırsa

$$q_k(t) \leq c_1 \int_0^t \|e_{k+1}(s)\| ds + a \|e_{k+1}(t)\|$$

yani

$$\|x_{k+1}(t) - x_k(t)\| \leq c_1 \int_0^t \|e_{k+1}(s)\| ds + a \|e_{k+1}(t)\| \quad (3.27)$$

olarak elde edilir.

Şimdide hata vektörü $e_k(t)$ gözönüne alınırsa

$$e_k(t) = y_d(t) - y_k(t) = y_d(t) - C(t)x_k(t)$$

olduğundan

$$e_{k+1}(t) - e_k(t) = C(t)(x_k(t) - x_{k+1}(t))$$

yazılabilir. Burada (3.23) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} [I_m + C(t)B(t)K(x(t), t)]e_{k+1}(t) &= e_k(t) - C(t) \int_0^t [f(x_{k+1}(s), s, \theta) - f(x_k(s), s, \theta)] ds \\ &\quad + C(t) \int_0^t \dot{B}(s)K(x(s), s)e_{k+1}(s) ds \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemde

$$D(x(t), t) = [I_m + C(t)B(t)K(x(t), t)]$$

tanımlanırsa

$$\begin{aligned} e_{k+1}(t) &= (D(x(t), t))^{-1} [e_k(t) - C(t) \int_0^t (f(x_{k+1}(s), s, \theta) - f(x_k(s), s, \theta)) ds \\ &\quad + C(t) \int_0^t \dot{B}(s)K(x(s), s)e_{k+1}(s) ds] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemin her iki tarafının Euclid normu alınıp Varsayım 1 gözönüne alınırsa

$$\|e_{k+1}(t)\| \leq d \left(\|e_k(t)\| + p\alpha \int_0^t \|x_{k+1}(s) - x_k(s)\| ds + pb \int_0^t \|e_{k+1}(s)\| ds \right)$$

şeklinde olur. Burada

$$d = \max_{(x,t) \in R^n \times [0,T]} \|(D(x(t), t))^{-1}\|, \quad p = \max_{t \in [0,T]} \|C(t)\|$$

olarak tanımlanmıştır. Buradan (3.27) eşitsizliği kullanılarak

$$\|e_{k+1}(t)\| \leq d \|e_k(t)\| + (d p \alpha a + d p \alpha c_1 T + d p b) \int_0^t \|e_{k+1}(s)\| ds$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte

$$c_2 = (d p \alpha a + d p \alpha c_1 T + d p b)$$

tanımlanırsa

$$\|e_{k+1}(t)\| \leq d \|e_k(t)\| + c_2 \int_0^t \|e_{k+1}(s)\| ds$$

şeklinde olur. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $e^{-\lambda t}$ ile çarpılırsa

$$\|e_{k+1}(t)\| e^{-\lambda t} \leq d \|e_k(t)\| e^{-\lambda t} + c_2 \left(\int_0^t \|e_{k+1}(s)\| e^{-\lambda s} e^{\lambda s} ds \right) e^{-\lambda t}$$

şeklinde yazılabilir. Elde edilen bu eşitsizliğin her iki tarafının λ -normu alınır

$$\|e_{k+1}\|_{\lambda, [0, T]} \leq d \|e_k\|_{\lambda, [0, T]} + c_2 \|e_{k+1}\|_{\lambda, [0, T]} \left(\int_0^t e^{\lambda s} ds \right) e^{-\lambda t}$$

elde edilir. Buradan da

$$\|e_{k+1}\|_{\lambda, [0, T]} \leq d \|e_k\|_{\lambda, [0, T]} + c_2 \|e_{k+1}\|_{\lambda, [0, T]} \frac{1}{\lambda}$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikte

$$c_3 = \frac{d}{1 - \frac{c_2}{\lambda}}, \quad \lambda > c_2$$

tanımlanırsa

$$\|e_{k+1}\|_{\lambda, [0, T]} \leq c_3 \|e_k\|_{\lambda, [0, T]}$$

olur. Buradan da

$$\|e_{k+1}\|_{\lambda,[0,T]} \leq c_3 \|e_k\|_{\lambda,[0,T]} \leq c_3^2 \|e_{k-1}\|_{\lambda,[0,T]} \leq \dots \leq c_3^k \|e_1\|_{\lambda,[0,T]}$$

elde edilir. λ sayısı yeterince büyük seçilirse $d < 1$ olduğundan dolayı $c_3 < 1$ olur, böylece

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k\|_{\lambda,[0,T]} = 0$$

olur ve Teorem 3.3.1'in ispatına benzer şekilde

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t) = y_d(t)$$

olduğu ispatlanmış olur.

Not: İncelenen sistemin $x(t)$ durumu tek değerli olarak belirlenemediği zaman açık ardışık izlemeli kontrol problemi için ters düzenleyici

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \frac{d}{dt} [K(y_k(t), t) e_k(t)]$$

$$x_{k+1}(0) = x_k(0) + B(0) K(y_k(0), 0) e_k(0)$$

şeklinde, kapalı için de

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \frac{d}{dt} [K(y_k(t), t) e_{k+1}(t)]$$

$$x_{k+1}(0) = x_k(0) + B(0) K(y_k(0), 0) e_{k+1}(0)$$

şeklinde tanımlanmalıdır. Teorem 3.3.1 ve Teorem 3.4.1 bu durum içinde geçerlidir.

Bu halde ispat sırasında sadece

$$a = \max_{t \in [0,T], y \in R^m} \|B(t) K(y, t)\|, \quad b = \max_{t \in [0,T], y \in R^m} \|\dot{B}(t) K(y, t)\|$$

şeklinde hesaplamak yeterlidir.

3.5 Uygulamalı Örnek

Bu bölümde açık ve kapalı ardışık izlemeli kontrol problemleri için elde edilen teorik sonuçlar bir eklemli robot koluna uygulanmıştır. Bir eklemli robot kolunun dinamik sistem modeli

$$I \ddot{\theta}(t) + m g \frac{l}{2} \sin \theta(t) = u(t) \quad (3.28)$$

dir [13]. Burada I kolun dönme eksenine göre eylemsizlik momentini, $\theta(t)$ açısal konumunu, m kütesini, l uzunluğunu, g yerçekimi ivmesini, $u(t)$ ise eklem uygulanan momenti göstermektedir. (3.28) sistemi

$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

dönüşümü uygulanarak

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{1}{I} m g \frac{l}{2} \sin x_1(t) + \frac{1}{I} u(t) \end{aligned}$$

sistemine indirgenebilir. Burada sistemin çıkışı $y(t) = \frac{2}{5} x_2(t)$, $g = 9,8 \text{ m/sn}^2$, $m = 3.4 \text{ kg}$, $l = 3.5 \text{ m}$, $K(x, t) = 14$ olarak seçilirse Teorem 3.3.1'in koşulları sağlanır ve açık ardışık izlemeli kontrol problemi için kontroller dizisi

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + 14 \dot{e}_k(t)$$

şeklinde, başlangıç koşulları dizisi ise

$$x_{k+1}(0) = x_k(0) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e_k(0)$$

şeklinde olur. Burada $y_d(t) = t - t^2$, $x_1(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_1(t) = 1$ şeklinde seçilerek, bu algoritma için bir bilgisayar programı Mathematica [14] kullanılarak oluşturulmuş ve $k = 5, 10, 15, 20$ değerleri için sonuçlar elde edilmiştir. Mathematica programının

kodu Ek.B' de verilmiştir. $k=5,10,15, 20$ için kontrol girişleri EK.C' de Şekil C.1' de, yörünge hataları Şekil C.2'de, $k=10, 20$ için de kontrol girişlerinin, kesin çözüm $u(t)=35-70t-58.8\sin\left(5t^2(2t-3)/12\right)$ ile karşılaştırılması Şekil C.3' te verilmiştir. Ayrıca $K(x,t)=14/e^{x_1}$ olarak seçilmiş ve bu durumda $k=20$ için yörünge hatası Şekil C.4' te gösterilmiştir.

Aynı değerler kullanılarak ve $K(x,t)=14$ seçilerek kapalı ardışık izlemeli kontrol problemi için kontroller dizisi

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + 14 \dot{e}_{k+1}(t)$$

başlangıç koşulları dizisi ise

$$x_{k+1}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{7} \end{bmatrix} x_k(0) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{7} \end{bmatrix} y_d(0)$$

olur. Burada da Teorem 3.4.1'in koşulunun sağlandığı açıktır. Bu algoritma için de bir bilgisayar programı Mathematica [14] kullanılarak oluşturulmuş ve $k=5,10,15,20$ değerleri için sonuçlar elde edilmiştir. Mathematica programının kodu Ek.B' de verilmiştir. $k=5, 10, 15, 20$ için kontrol girişleri EK.C' de Şekil C.5' de, yörünge hataları Şekil C.6' de, $k=10, 20$ için de kontrol girişlerinin kesin çözüm $u(t)=35-70t-58.8\sin\left(5t^2(2t-3)/12\right)$ ile karşılaştırılması Şekil C.7' te verilmiştir.

Son olarak $k=20$ için açık ve kapalı ardışık izlemeli kontrol yöntemleri kullanılarak elde edilen kontrol girişlerinin karşılaştırılması Şekil C.8' de, yörünge hatalarının karşılaştırılması ise Şekil C.9' de gösterilmiştir. Şekiller incelendiğinde kapalı ardışık izlemeli kontrol yönteminin yakınsamasının açık ardışık izlemeli kontrol yöntemine göre daha hızlı olduğu görülmektedir.

4. NOKTASAL İZLEMELİ KONTROL PROBLEMLERİNİN PENALTI METODU VE MAKSİMUM PRENSİBİ YARDIMIYLA İNCELENMESİ

4.1. Problemin Sunuluşu

Bu bölümde noktasal izlemeli kontrol problemlerini incelemek için penaltı yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntem yardımıyla noktasal izlemeli kontrol problemi bir optimal kontrol problemine indirgenmiştir. Sonra da Pontryagin'in maksimum ilkesi uygulanarak noktasal izlemeli kontrol probleminin genelleşmiş çözümü olarak adlandırılan kontrolün gerekli koşulları bulunmuştur. Problem şöyle sunulabilir.

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) + B(t)u(t), \quad t \in (0, T) \quad (4.1a)$$

$$y(t) = h(x(t), t) \quad (4.1b)$$

Burada $x \in R^n$, $u \in R^r$ ve $y \in R^m$ sırasıyla sistemin durumunu, girişini ve çıkışını göstermektedir. Burada $B(t)$, $f(x(t), t)$ ve $h(x(t), t)$ Bölüm 2'deki gibi verilmiş matris ve vektör fonksiyonlarıdır. Bu sistemin beklenen yörüngesi ise

$$y_0(t) = h(x(t), t), \quad t \in (0, T) \quad (4.2)$$

eşitliği ile verilsin. Burada $y_0(t)$, $t \in [0, T]$ 'de bir mertebeli türevi sürekli, m -boyutlu bir vektör fonksiyonudur. (4.2) koşulunun sağlanması

$$\dot{y}_0(t) = h_x(x(t), t)\dot{x}(t) + h_t(x(t), t) \quad (4.3)$$

ve

$$y_0(0) = h(x(0), 0) \quad (4.4)$$

koşullarının sağlanmasına denktir. Şimdi (4.1a) probleminin çözümü için

$$F_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial h_i(\mathbf{x}(t), t)}{\partial x_k(t)} \left(f_k(\mathbf{x}(t), t) + \sum_{j=1}^r B_{kj}(t) u_j(t) \right) + \frac{\partial h_i(\mathbf{x}(t), t)}{\partial t} - \dot{y}_{0i}(t)$$

veya vektör eşitliği olarak

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) = \mathbf{h}_x(\mathbf{x}(t), t) [\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t)] - \dot{\mathbf{y}}_0(t) + \mathbf{h}_t(\mathbf{x}(t), t)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} S(\mathbf{u}) = & \int_0^T \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)^T \mathbf{C}(t) \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt + b \int_0^T \mathbf{u}(t)^T \mathbf{D}(t) \mathbf{u}(t) dt \\ & + (\mathbf{h}(\mathbf{x}(0), 0) - \mathbf{y}_0(0))^T \mathbf{E}(\mathbf{h}(\mathbf{x}(0), 0) - \mathbf{y}_0(0)) \end{aligned} \quad (4.5)$$

gibi bir fonksiyonel ele alınsın. Burada $\mathbf{C}(t)$, $\mathbf{D}(t)$ ve $\mathbf{E}$ sırasıyla $m \times m$, $r \times r$ ve $m \times m$ boyutlu pozitif belirli matrislerdir. b ise negatif olmayan bir sayıdır. (4.5) ifadesinde

$$\int_0^T \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)^T \mathbf{C}(t) \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt + (\mathbf{h}(\mathbf{x}(0), 0) - \mathbf{y}_0(0))^T \mathbf{E}(\mathbf{h}(\mathbf{x}(0), 0) - \mathbf{y}_0(0))$$

yeterince küçük olduğunda (4.3-4) eşitliklerinin yaklaşık olarak geçerli olacağı açıktır. Bu yüzden (4.1a) problemi için amaç

$$\begin{aligned} S(\mathbf{u}) = & \int_0^T \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)^T \mathbf{C}(t) \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt + b \int_0^T \mathbf{u}(t)^T \mathbf{D}(t) \mathbf{u}(t) dt \\ & + (\mathbf{h}(\mathbf{x}(0), 0) - \mathbf{y}_0(0))^T \mathbf{E}(\mathbf{h}(\mathbf{x}(0), 0) - \mathbf{y}_0(0)) \rightarrow \min \end{aligned}$$

şeklinde ele alınacaktır. Burada $\mathbf{u}(t)$ belirli bir kontrol vektörü gibi düşünülecektir. Bu nedenle $\mathbf{u}(t)$ 'nin değerleri pratik olarak yeteri kadar büyük olamaz. (4.5)'de

$$b \int_0^T \mathbf{u}(t)^T \mathbf{D}(t) \mathbf{u}(t) dt$$

teriminin olması $\mathbf{u}(t)$ 'nin yeterince büyük olmayacağını gösterir. Bu nedenle de aşağıdaki optimal kontrol problemi incelenecektir.

Öyle $u(t)$ kontrol girişi bulunmalıdır ki bu kontrole uygun gelen $x(t)$ durumu ile birlikte (4.5)'e minimum değer gerçekleştirsin. Böyle $(x(t), u(t))$ çiftine optimal çift denir ve $u(t)$ kontrolüne noktasal izlemeli kontrol probleminin genelleşmiş çözümü denir.

4.2. Genelleşmiş Çözümün Varlığının Gerekli Koşulları

Tanıma göre noktasal kontrol probleminin genelleşmiş çözümü

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) + B(t)u(t) \quad (4.6)$$

$$S(u) = \int_0^T F(x(t), u(t), t)^T C(t) F(x(t), u(t), t) dt + b \int_0^T u(t)^T D(t) u(t) dt + (h(x(0), 0) - y_0(0))^T E(h(x(0), 0) - y_0(0)) \rightarrow \min \quad (4.7)$$

eşitlikleriyle verilen problemde minimum değeri gerçekleştiren $u(t)$ optimal kontrolüdür. Yani (4.6-7) problemi için optimalliğin gerekli koşulları noktasal kontrol probleminde genelleşmiş çözüm için gerekli koşullar olacaktır.

(4.6-7) problemini incelemek için Lagrange Prensipli kullanılacaktır. Bunun için Lagrange integrantı,

$$\lambda(t) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t))^T$$

şeklinde bir vektör fonksiyonu ve verilmiş bir $\lambda_0 \geq 0$ sayısı için

$$L = L(t, x(t), \dot{x}(t), \lambda(t), u(t), \lambda_0)$$

olmak üzere

$$L = \sum_{k=1}^n \left(\lambda_k(t) \left(\dot{x}_k(t) - f_k(x(t), t) - \sum_{j=1}^r B_{kj}(t) u_j(t) \right) \right) + \lambda_0 b \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m F_j(x(t), u(t), t) C_{jk}(t) F_k(x(t), u(t), t) + \lambda_0 \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^r u_j(t) D_{jk}(t) u_k(t)$$

şeklinde, Lagrange terminantı ise,

$$I = I(x(0), x(t_1), \lambda_0)$$

olmak üzere

$$I = \lambda_0 (h(x(0), 0) - y_0(0))^T E(h(x(0), 0) - y_0(0))$$

şeklinde tanımlansın.

Teorem 4.2.1: $u(t)$ 'nin genelleşmiş çözüm olması için gerekli koşul, en az biri sıfırdan farklı olan öyle $\lambda(t)$ vektör fonksiyonu ve $\lambda_0 \geq 0$ sayısının var olmasıdır ki, aşağıdaki koşullar sağlanmış olsun.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L_{\dot{x}_k} - L_{x_k} &= 0, \quad k = 1, \dots, n \\ L_{\dot{x}_k} \Big|_{t_1} + \frac{\partial I}{\partial x_k(t_1)} &= 0, \quad k = 1, \dots, n \\ -L_{\dot{x}_k} \Big|_{t_0=0} + \frac{\partial I}{\partial x_k(0)} &= 0, \quad k = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4.8)$$

ve

$$\min_{u(t) \in R^r} L(t, x(t), \dot{x}(t), \lambda(t), u(t), \lambda_0) = L(t, x(t), \dot{x}(t), \lambda(t), u_0(t), \lambda_0) \quad (4.9)$$

olmak üzere

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} \Big|_{u=u_0(t)} = 0, \quad k = 1, \dots, r \quad (4.10)$$

dir.

4.3 Uygulamalı Örnek

Burada bir önceki bölümde elde edilen teorik sonuçlar aşağıdaki örneğe uygulanmıştır. $t \in (0, T)$ 'de

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= u(t) \\ y(t) &= (t+1)x(t) \end{aligned}$$

şeklinde tek boyutlu bir sistem ele alınsın. Bu sistemin beklenen çıkışı ise $y_0(t) = 1$ olarak verilmiş olsun. Bir önceki bölümde anlatıldığı gibi bu problem

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad t \in (0, T)$$

$$S = \int_0^T [x(t) + u(t)t + u(t)]^2 dt + (x(0) - 1)^2 + b \int_0^T u^2(t) dt \rightarrow \min$$

şeklinde bir optimal kontrol problemine indirgenebilir. Burada $C(t) = D(t) = E = 1$ olarak seçilmiştir. Lagrange integrantı

$$L = \lambda(t)[\dot{x}(t) - u(t)] + \lambda_0 [x(t) + u(t)t + u(t)]^2 + \lambda_0 b u^2(t)$$

şeklinde, terminantı ise

$$I = \lambda_0 (x(0) - 1)^2$$

şeklinde olur. Burada $\lambda_0 = 1$ alınıp (4.8-9) ile verilen gerekli koşullar kullanıldığında

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(t) - 2[x(t) + u(t)t + u(t)] &= 0 \\ \lambda(T) &= 0 \\ -\lambda(0) + 2[x(0) - 1] &= 0 \end{aligned} \tag{4.11}$$

ve

$$\lambda(t) - 2[x(t) + u(t)t + u(t)](t+1) - 2b u(t) = 0 \tag{4.12}$$

elde edilir. (4.11)'den

$$\dot{\lambda}(t) - 2[x(t) + (t+1)\dot{x}(t)] = 0 \tag{4.13}$$

şeklinde yazılabileceği açıktır. Buradan da

$$\dot{\lambda}(t) - 2 \frac{d}{dt} [(t+1)x(t)] = 0$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $(0, t)$ arasında integre edilirse

$$\lambda(t) - 2[(t+1)x(t)] = \lambda(0) - 2x(0) = -2 \quad (4.14)$$

bulunur. Şimdi (4.12)' de

$$d = 2(t+1)^2 + 2b$$

yazılırsa

$$u(t) = \frac{1}{d}[\lambda(t) - 2(t+1)x(t)]$$

elde edilir. Problemde $\dot{x}(t) = u(t)$ olarak verildiği için (4.14) kullanılarak

$$\dot{x}(t) = \frac{-2}{d} = -\frac{1}{(t+1)^2 + b}$$

bulunur. Bu denklemin her iki tarafı (T, t) 'de integre edilirse

$$x_b(t) = -\frac{1}{\sqrt{b}} \arctg \frac{t+1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \arctg \frac{T+1}{\sqrt{b}} + x(T) \quad (4.15)$$

elde edilir. Burada $x(T)$ değeri (4.14) yardımıyla $\frac{1}{T+1}$ bulunur, böylece (4.15) eşitliği

$$x_b(t) = -\frac{1}{\sqrt{b}} \arctg \frac{t+1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \arctg \frac{T+1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{T+1} \quad (4.16)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\varphi_1(b) = \arctg \left(A b^{-\frac{1}{2}} \right), \quad A = T+1 > 0$$

ve

$$\varphi_2(b) = \arctg \left(a b^{-\frac{1}{2}} \right), \quad a = t+1 > 0$$

yazılısın ve

$$q(b) = \frac{\varphi_1(b) - \varphi_2(b)}{b^{\frac{1}{2}}}$$

şeklinde olsun.

$$\lim_{b \rightarrow 0^+} \varphi_1(b) = \lim_{b \rightarrow 0^+} \varphi_2(b) = +\frac{\Pi}{2}$$

dir. Bu durumda

$$\lim_{b \rightarrow 0^+} q(b) = \lim_{b \rightarrow 0^+} \frac{\varphi_1'(b) - \varphi_2'(b)}{\frac{1}{2} b^{-\frac{1}{2}}} = 2 \lim_{b \rightarrow 0^+} b^{\frac{1}{2}} [\varphi_1'(b) - \varphi_2'(b)] \quad (4.17)$$

olur. Buradan

$$\varphi_1'(b) = -\frac{1}{2} \left(\frac{A}{A^2 b^{-1} + 1} \right) b^{-\frac{3}{2}} = -\frac{A b^{-\frac{1}{2}}}{2(A^2 + b)}$$

ve

$$\varphi_2'(b) = -\frac{a b^{-\frac{1}{2}}}{2(a^2 + b)}$$

bulunur. Buradan da

$$\varphi_1'(b) - \varphi_2'(b) = \frac{a b^{-\frac{1}{2}}}{2(a^2 + b)} - \frac{A b^{-\frac{1}{2}}}{2(A^2 + b)} = \left(\frac{a(A^2 + b) - A(a^2 + b)}{2(a^2 + b)(A^2 + b)} \right) b^{-\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Bu elde edilen değer (4.17)'de yerine konursa

$$\lim_{b \rightarrow 0^+} q(b) = 2 \lim_{b \rightarrow 0^+} \frac{a(A^2 + b) - A(a^2 + b)}{2(a^2 + b)(A^2 + b)} = \frac{A - a}{aA} = \frac{1}{a} - \frac{1}{A} = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{T+1}$$

şeklinde olur. Bu durumda

$$\lim_{b \rightarrow 0^+} x_b(t) = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{T+1} + \frac{1}{T+1} = \frac{1}{t+1}$$

olarak elde edilir. Buradan da $b \rightarrow 0^+$ için sistemin çıkışının beklenen çıkışa yakınsak olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi de $b = 0$ için bu problem incelensin. Bu durumda (4.12) yardımıyla

$$u(t) = \frac{1}{2(t+1)^2} [\lambda(t) - 2x(t)(t+1)]$$

olarak bulunur. Buradan da

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{2(t+1)^2} [\lambda(t) - 2x(t)(t+1)] \quad (4.18)$$

elde edilir. Bu değer (4.13)'te yerine konursa

$$\dot{\lambda}(t) - \frac{\lambda(t)}{t+1} = 0$$

şeklinde yazılabilir. Burada (4.11) yardımıyla

$$\lambda(t) = 0$$

bulunur. Böylece (4.18) eşitliği

$$\dot{x}(t) = -\frac{x(t)}{t+1}$$

şeklinde olur. Buradan da yine (4.11) yardımıyla

$$x(t) = \frac{1}{t+1}$$

elde edilir. Böylece $b = 0$ için kesin çözümün elde edileceği gösterilmiş olur.

$$x_b(t) = -\frac{1}{\sqrt{b}} \arctg \frac{t+1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \arctg \frac{T+1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{T+1} \quad \text{fonksiyonları ile } u(t) \text{ kesin}$$

çözümüne karşı gelen $x(t) = \frac{1}{t+1}$ durumunun eğrileri $t \in (0, 2)$ ve $b = 0.1, 1, 5, 10$

için Ek D'de Şekil.D.1.' de gösterilmiştir. Ayrıca $u_b(t) = -\frac{1}{(t+1)^2 + b}$ fonksiyonları

ile sistemin beklenen çıkışını gerçekleştiren $u(t) = -\frac{1}{(1+t)^2}$ kesin çözümünün eğrileri $t \in (0, 2)$ ve $b=0.1, 1, 5, 10$ için Ek D' de Şekil.D.2. de gösterilmiştir.



5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

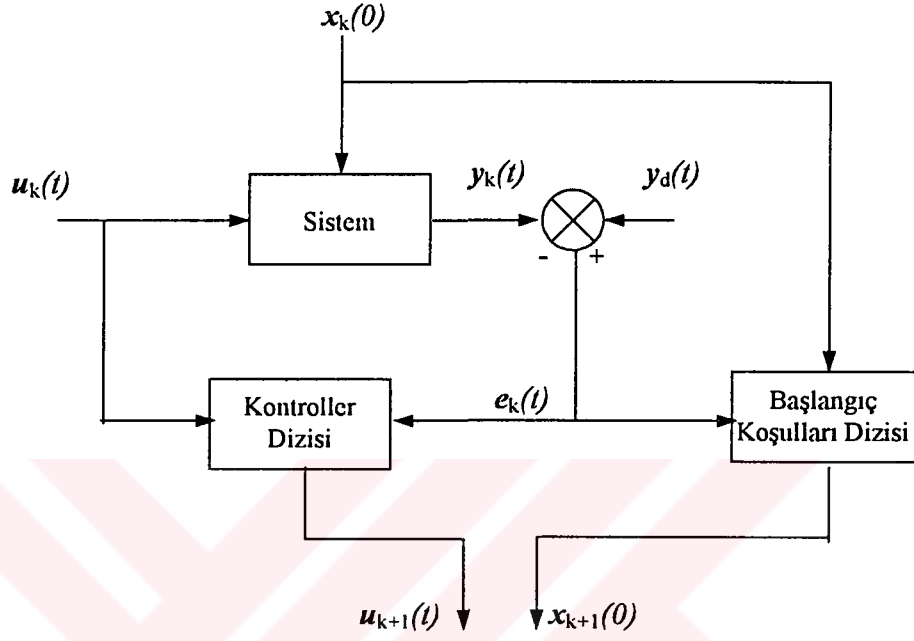
Bu tezde lineer olmayan bazı noktasal izlemeli kontrol problemleri incelenmiştir. Bu tip problemlerin bazı sanayi sistemleri için geri beslemelerin (örneğin robotik sistemler) oluşturulması sırasında ortaya çıktığı vurgulanmıştır. İlk önce bu tip problemlerin kesin çözümünün varlığı problemi farklı yöntemlerle incelenmiştir. Daha sonra yaklaşık çözümü elde etmek için ardışık izlemeli kontrol yöntemi kullanılmıştır. Bu tezde ilk defa durumdaki bağlı olan açık ve kapalı ters düzenleyiciler oluşturulmuştur. Bu tip düzenleyicilere karşı gelen hataların düzgün olarak sıfıra yakınsadığı ispatlanmıştır. Bilinen kaynaklarda ters düzenleyicilerin tümü açık olduğu halde bu tezde ilk defa kapalı ters düzenleyici oluşturulmuştur. Son olarak noktasal izlemeli kontrol problemi penaltı yöntemi yardımıyla incelenmiş ve çözümün varlık koşulu bulunmuştur. Elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

1. Açık ve kapalı ardışık izlemeli kontrolün her adımda bir önceki duruma bağlı olması hataların daha hızlı sıfıra gitmesini sağlar.
2. Kapalı ardışık izlemeli kontrol probleminin çözümü açık ardışık izlemeli kontrol probleminden daha avantajlıdır.
3. Penaltı yöntemi uygulandığında kontrol kuvvetinin ağırlık katsayısı $b > 0$ küçük oldukça elde edilmiş çözümde kesin çözüme bir o kadar yakın olur.
4. Bu alanda yapılmış incelemelerin, özellikle kontrole lineer olmayan şekilde bağlı sistemler için devam ettirilmesi gerekmektedir.

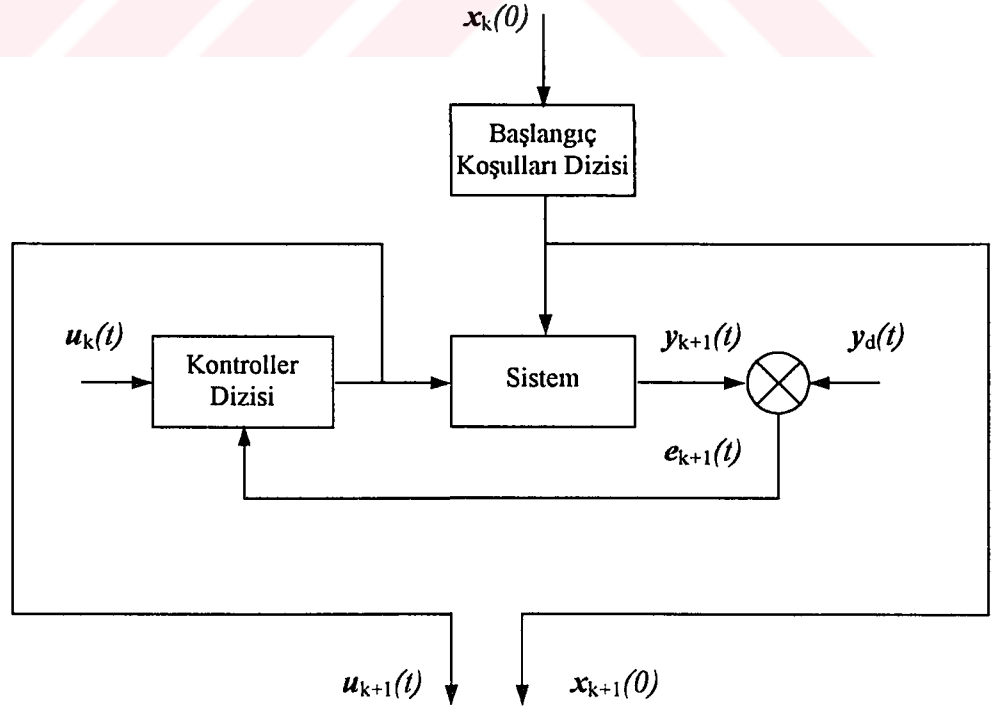
KAYNAKLAR

- [1] Kalman, R. E., 1962. Controllability of Linear Dynamic Systems, Wiley-Interscience Publishers Inc., New York.
- [2] Krotov, V. F., 1966. Global Methods in Optimal Control Theory, USA
- [3] Pontryagin, L. S., Boltyanski, V. G., Gamkrelidze, R. V., Mishchenko, E. F., 1962. The Mathematical Theory of Optimal Processes, Recipients of the 1962 Lenin Prize for Science and Technology.
- [4] Bellman, R. E., 1957. Dynamic Programming, Princeton University press, Princeton, New Jersey.
- [5] Suguru, A., Kawamura, S., and Miyazaki F., 1984. Bettering operation of robot by learning, *J. of Robotic Syst.*, **1**(2), 123-140.
- [6] Lee, H. S. and Bien, Z., 1993. Study on robustness of iterative learning control with non-zero initial error, *Int. J. Control*, **(64)**3, 345-359.
- [7] Porter, B. and Mohamed, S. S., 1991. Iterative learning control of partially irregular multivariable plants with initial state shifting, *Int. J. System Sci.*, **22**, 229-235.
- [8] Bien, Z., Hwang, D. H. and Oh, S. R., 1991. A nonlinear iterative learning method for robot path control, *Robotica*, **9**, 387-392.
- [9] Oh, S. O., Bien, Z. and Suh, I. H., 1989. A model algorithmic learning method for continuous-path control of a robot manipulator, *Robotica*, **8**, 31-36.
- [10] Chen, Y., Wen, C., Gong, Z. and Sun, M., 1999. An iterative learning controller with initial state shifting, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **(44)**22, 371-376.
- [11] Bellman, R. and Cooke, K. L., 1963. Differential-Difference Equations, Academic Press, New York and London.
- [12] Halanay, A., 1966. Differential Equations, Academic Press, New York and London.
- [13] Fu, K. S., Gonzalez, R. C. and Lee, C. S. G., 1987. Robotics, McGraw-Hill Company.
- [14] Wolfram, S., 1991. Mathematica: A system for doing mathematics by computer, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., New York.

EK A



Şekil.A.1. Açık Ardışık İzlemeli Kontrol Algoritmasının Akış Şeması



Şekil.A.2. Kapalı Ardışık İzlemeli Kontrol Algoritmasının Akış Şeması

EK B

Aşağıda açık ardışık izlemeli kontrol algoritmasının 3. Bölüm’de verilen tek eklemli robot koluna uygulanmasının Mathematica kodu verilmiştir;

```
akendibaskos[0] = 0;
aturevbaskos[0] = 1;
asag[0] = 1;
Do[acoz[i] = NDSolve[{14 D[Q[t], {t, 2}] + 6 9.8 Sin[Q[t]] == asag[i - 1],
Q[0] == akendibaskos[i - 1], Q'[0] == aturevbaskos[i - 1]}, Q[t], {t, 0, 2}];
adata = Flatten[Table[{t, Q[t]} /. acoz[i], {t, 0, 2, 0.01}], 1];
aden = Fit[adata, {1, t, t^2, t^3, t^4, Sin[t], Cos[t]}, t];
asag[i] = asag[i - 1] + 14 (1 - 2t - 2/5 D[aden, {t, 2}]);
Print[StringForm[" ``. adim sonunda u= ", i]];
asagsek[i] =
Plot[asag[i], {t, 0, 2}, PlotPoints -> 1000, AxesLabel -> {"t", "u(t)"}, Axes ->
True];
aek[i] = t - t^2 - 2/5 D[aden, t];
Print[StringForm[" ``. adim sonunda e= ", i]];
aeksek[i] =
Plot[aek[i], {t, 0, 2}, PlotPoints -> 1000,
AxesLabel -> {"t", "e(t)"}];
akendibaskos[i] = aden /. t -> 0;
aturevbaskos[i] = (D[aden, t] + aek[i]) /. t -> 0, {i, 1, 20}]
```

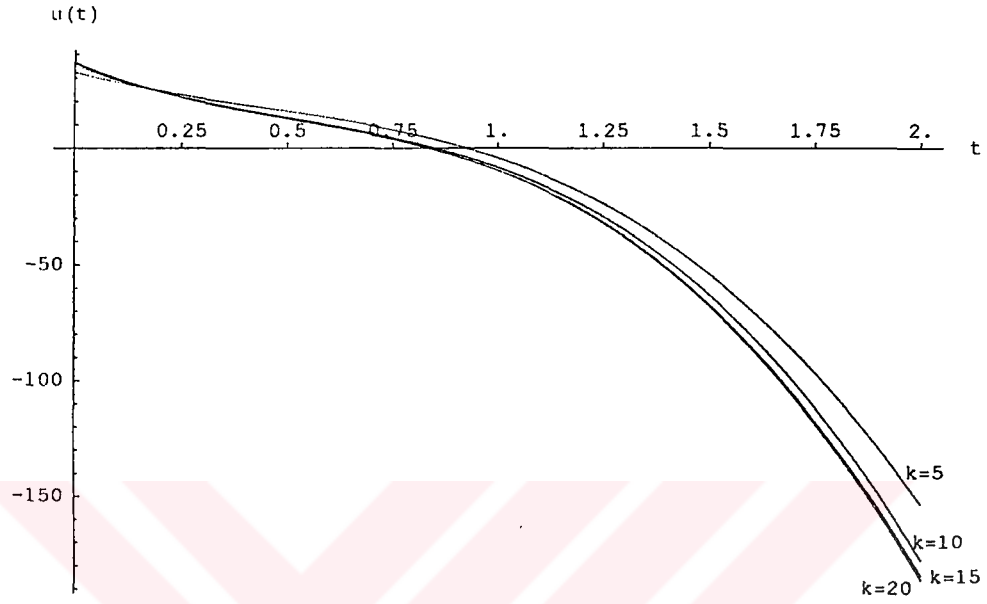
Aşağıda ise kapalı ardışık izlemeli kontrol algoritmasının 3. Bölüm’de verilen tek eklemlili robot koluna uygulanmasının Mathematica kodu verilmiştir;

```

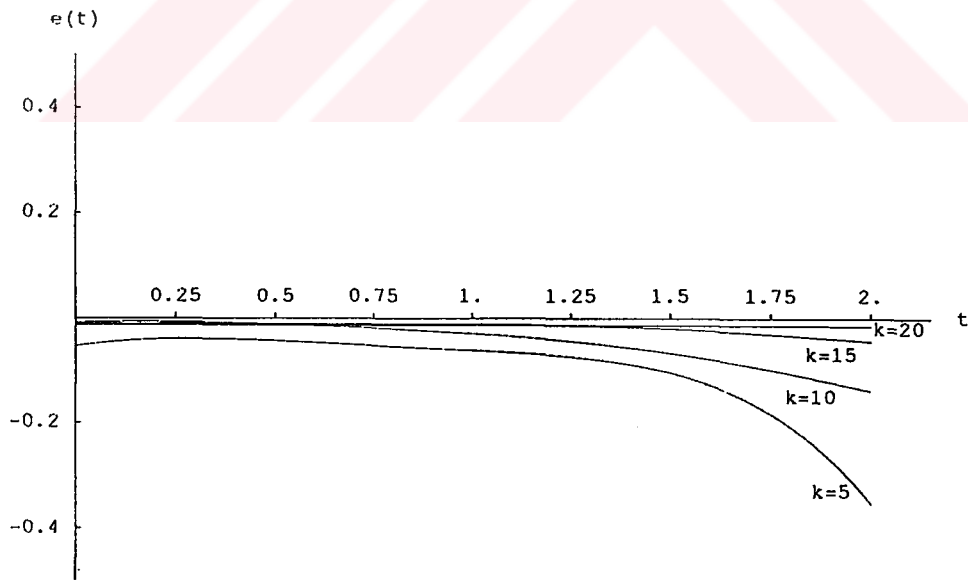
kxkb[0] = 0;
kxtb[0] = 1;
ksag[0] = 1;
i = 1;
( kcoz[i] = NDSolve[{14 D[Q[t], {t, 2}] + 6 9.8 Sin[Q[t]] == ksag[i - 1],
Q[0] == kxkb[i - 1], Q'[0] == kxtb[i - 1]}, Q[t], {t, 0, 2, 0.001}];
kdata[i] = Flatten[Table[{t, Q[t]} /. kcoz[i], {t, 0, 2, 0.001}], 1];
kden[i] = Fit[kdata[i], {1, t, t^2, Cos[ t], Cos[t^2], Cos[t^3], Sin[t], Sin[t^2],
Sin[t^3]}, t];
Label[lab1];
kek[i] = t - t^2 - 2/5 D[Q[t], t];
ksag[i] = ksag[i - 1] + 14 D[kek[i], t];
kxkb[i] = kden[i] /. t -> 0;
kxtb[i] = 5/7 D[kden[i], t] /. t -> 0;
kcoz[i + 1] = NDSolve[{14 D[Q[t], {t, 2}] + 6 9.8 Sin[Q[t]] == ksag[i],
Q[0] == kxkb[i], Q'[0] == kxtb[i]}, Q[t], {t, 0, 2}];
kdata[i + 1] = Flatten[Table[{t, Q[t]} /. kcoz[i + 1], {t, 0, 2, 0.01}], 1];
kden[i + 1] = Fit[kdata[i + 1], {1, t, t^2, Cos[ t], Cos[t^2], Cos[t^3], Sin[t],
Sin[t^2], Sin[t^3]}, t];
kek[i] = t - t^2 - 2/5 D[kden[i + 1], t] ;
ksag[i] = ksag[i - 1] + 14 D[kek[i], t] ;
Print[StringForm[" ``. adim sonunda e[``] sekli ", i, i]];
keksek[i] = Plot[kek[i], {t, 0, 2}, PlotPoints -> 1000];
Print[StringForm[" ``. adim sonunda u[``] sekli ", i, i]];
ksagsek[i] = Plot[ksag[i], {t, 0, 2}, PlotPoints -> 1000];
i = i + 1;
If[i == 21, Break[ ] ];Goto[lab1];)

```

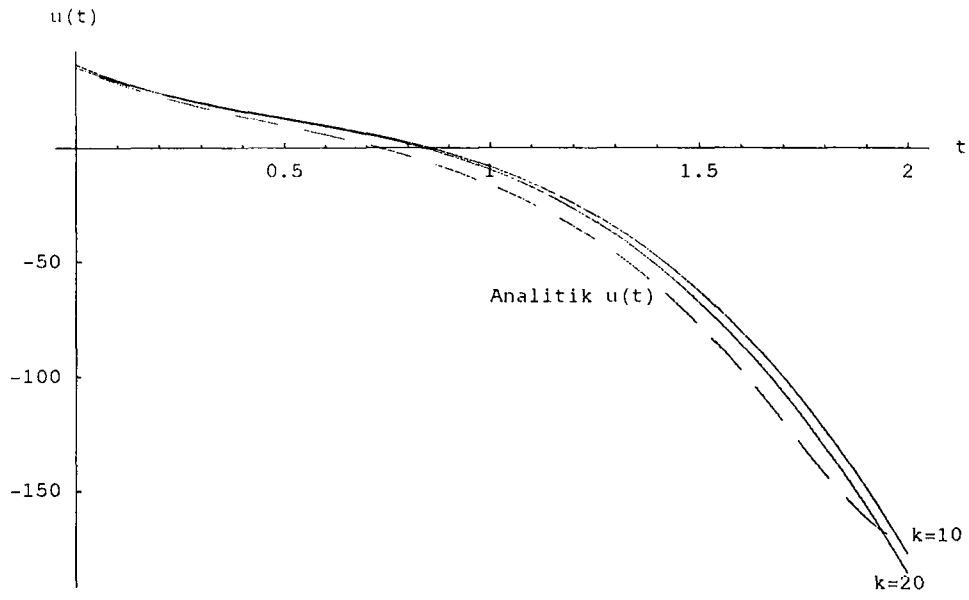
EK C



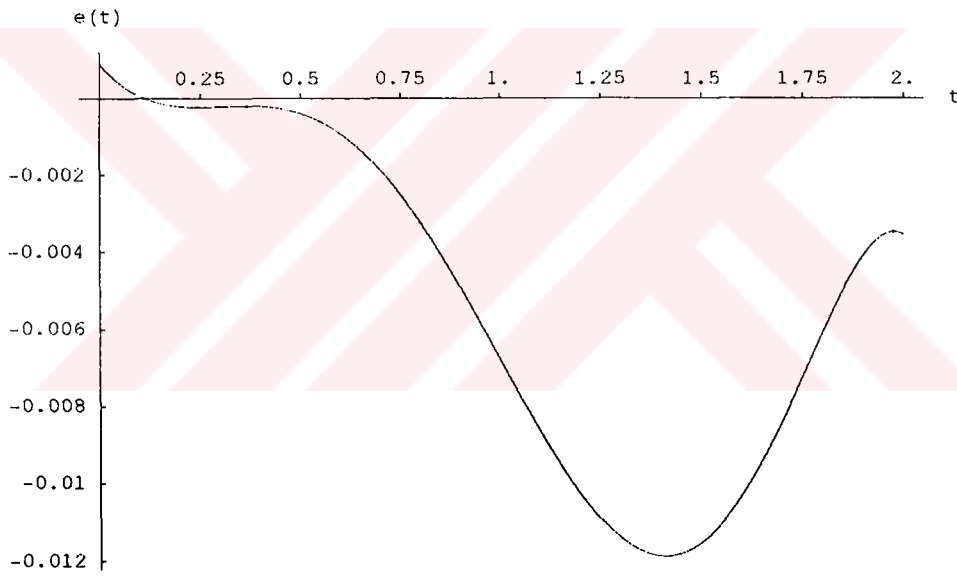
Şekil.C.1 Açık ardışık izlemeli kontrol algoritmasının $k=5, 10, 15, 20$ için kontrol girişleri



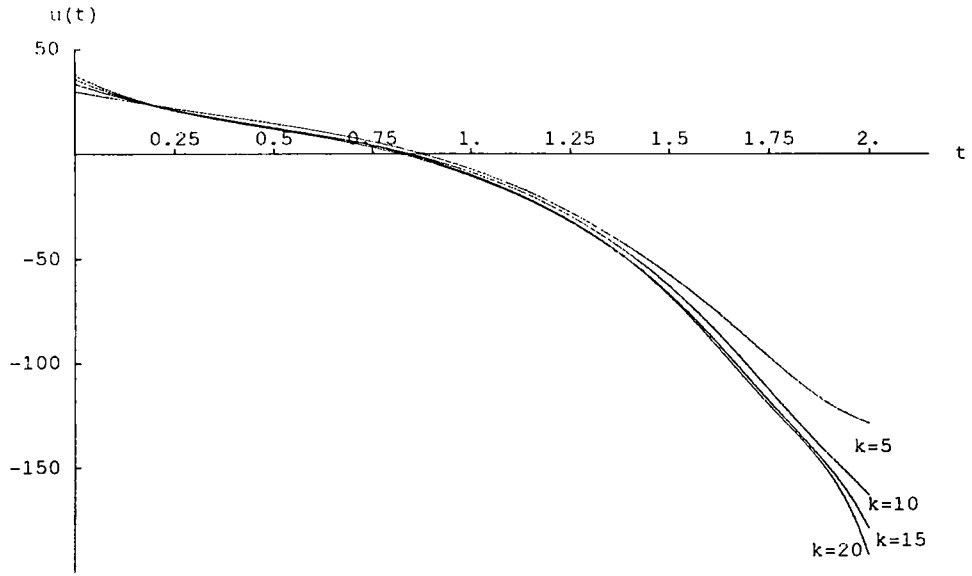
Şekil.C.2 Açık ardışık izlemeli kontrol algoritmasının $k=5, 10, 15, 20$ için yörünge hataları



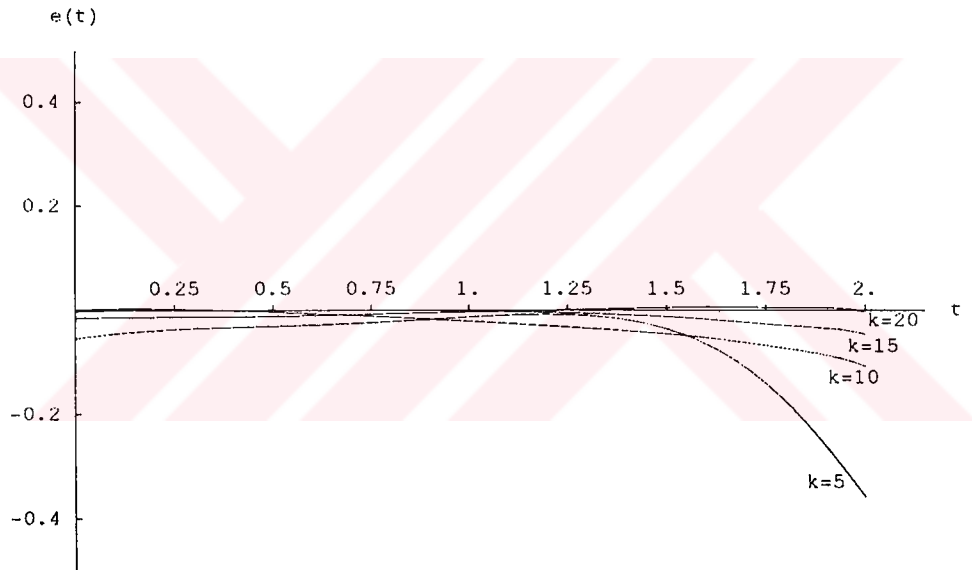
Şekil.C.3 Açık ardışık izlemeli kontrol algoritmasının $k=10, 20$ için kontrol girişlerinin kesin çözüm ile karşılaştırılması



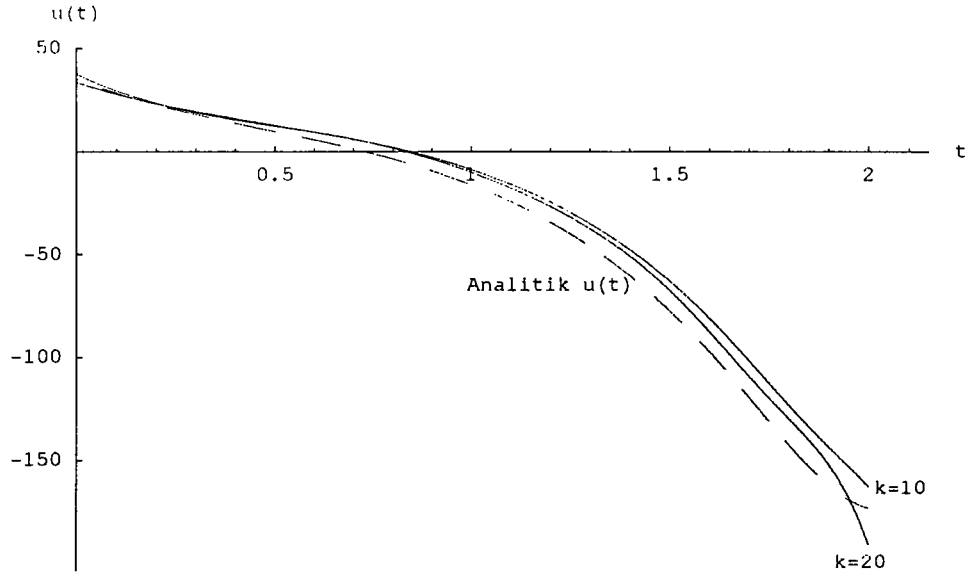
Şekil.C.4 Açık ardışık izlemeli kontrol algoritmasının $K = 14/e^{x_1}$ ve $k=20$ için yörünge hatası



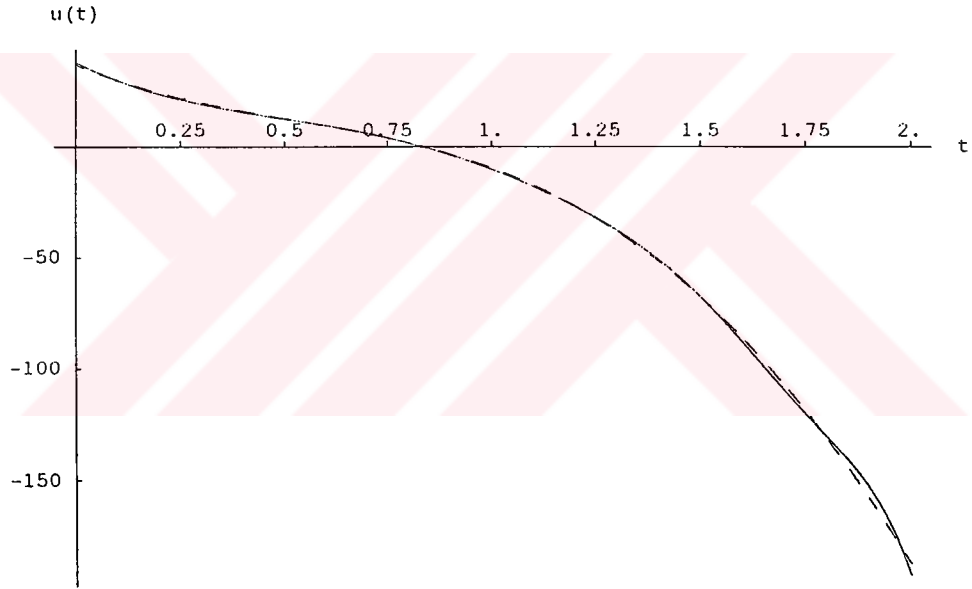
Şekil.C.5 Kapalı ardışık izlemeli kontrol algoritmasının $k=5, 10, 15, 20$ için kontrol girişleri



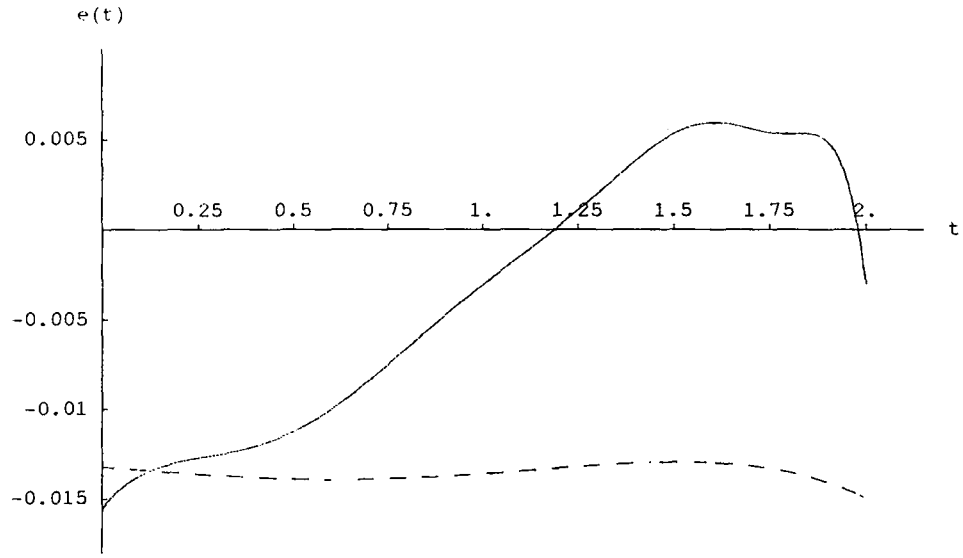
Şekil.C.6 Kapalı ardışık izlemeli kontrol algoritmasının $k=5, 10, 15, 20$ için yörünge hataları



Şekil.C.7 Kapalı ardışık izlemeli kontrol algoritmasının $k=10, 20$ için kontrol girişlerinin kesin çözüm ile karşılaştırılması

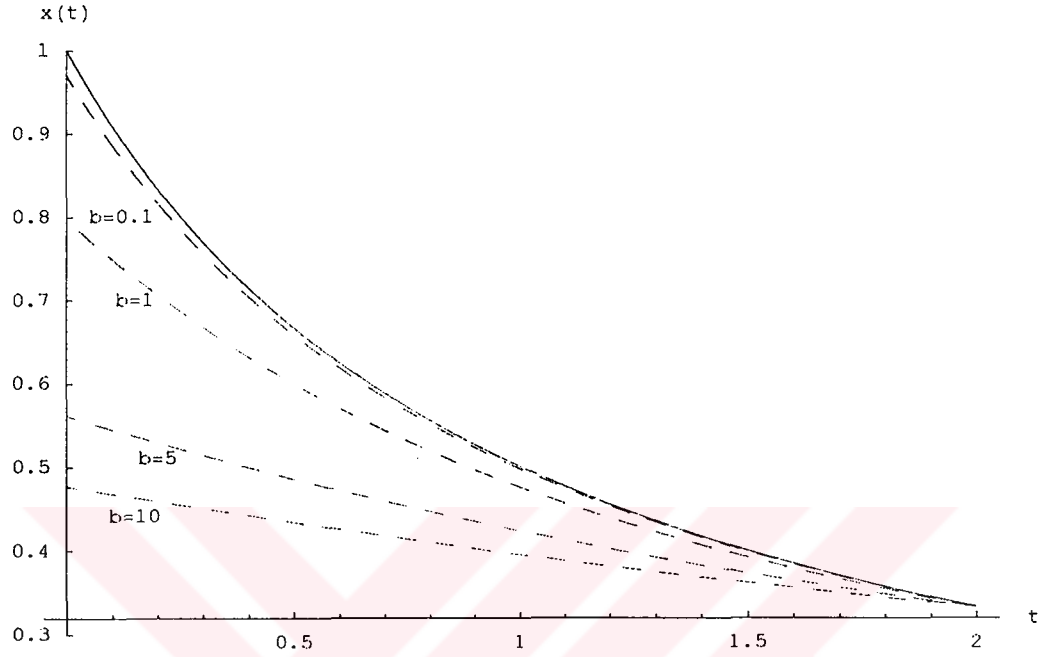


Şekil.C.8 Açık (kesikli çizgi) ve kapalı ardışık izlemeli kontrol algoritmasının $k=20$ için kontrol girişlerinin karşılaştırılması

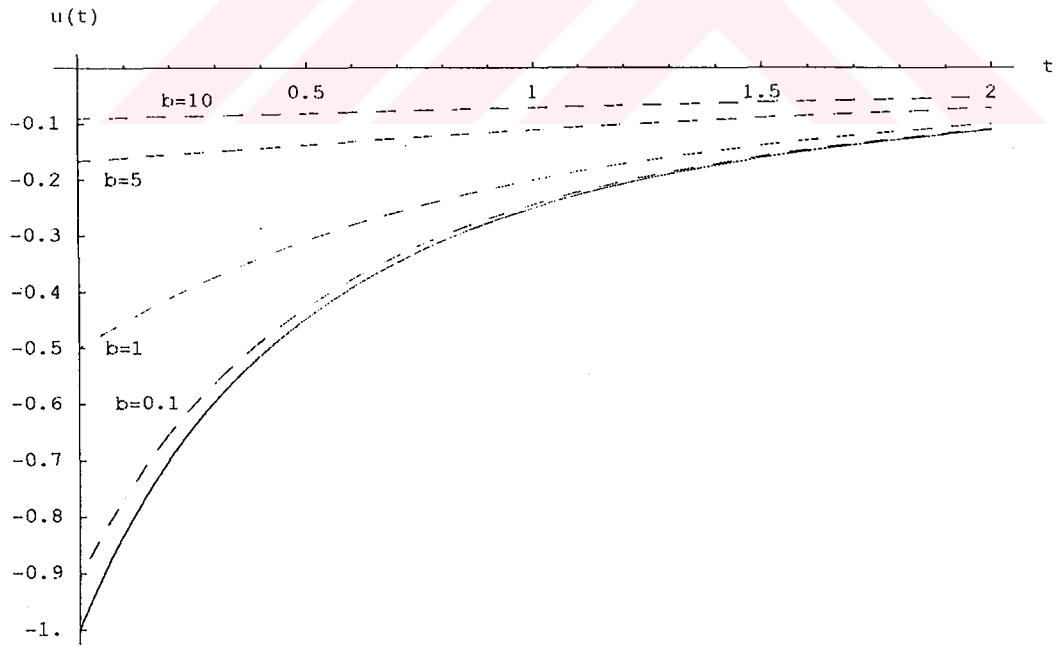


Şekil.C.9 Açık (kesikli çizgi) ve kapalı ardışık izlemeli kontrol algoritmasının $k=20$ için yörünge hatalarının karşılaştırılması

EK D



Şekil D. 1. $b=0.1, 1, 5, 10$ için $x_b(t)$ (kesikli çizgi) ve $x(t)$ 'nin eğrileri



Şekil D. 2. $b=0.1, 1, 5, 10$ için $u_b(t)$ (kesikli çizgi) ve $u(t)$ 'nin eğrileri

ÖZGEÇMİŞ

Bayram Barış KIZILSAÇ, 1974 yılında İstanbul'da doğmuş lise öğrenimini Özel Doğan Kolejinde yapmıştır. 1993 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Mühendisliği bölümüne girmiş ve 1998 yaz döneminde mezun olmuştur. 1998 yılında başladığı yüksek lisans öğrenimini İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Mühendislik Bilimleri Anabilim Dalı Sistem Analizi programında sürdürmektedir. 1999 yılında İTÜ Fen-Edebiyat Fakültesi Mühendislik Bilimleri Bölümünde Araştırma görevlisi olarak işe başlamış ve halen aynı görevdedir.

