

**İNCE CİDARLI AÇIK ASİMETRİK KESİTLİ
KİRİŞLERİN TİTREŞİMLERİ**

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANİSTON MÜHÜRÜ**

**DOKTORA TEZİ
Y. Müh. S. Ergün BOZDAĞ
(5039300290)**

104273

104273

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 29 Eylül 2000
Tezin Savunulduğu Tarih : 14 Şubat 2001**

Tez Danışmanı : Prof.Dr. M. Alâeddin ARPACI

Diğer Jüri Üyeleri Prof.Dr. Metin GÜRGÖZE (İ.T.Ü.)

Prof.Dr. Vedat KARADAĞ (İ.T.Ü.)

Prof.Dr. Abdülkerim KAR (M.Ü.)

Prof.Dr. Necati TAHRALI (Y.T.Ü.)

ŞUBAT 2001

ÖNSÖZ

İnce cidarlı açık kesitli kirişler, mühendisliğin çeşitli dallarında oldukça geniş kullanım alanına sahiptir. Kesitin simetri eksenine sahip olmaması veya kayma merkezi ile geometrik merkezin çakışmaması, kirişlerin eğilme ve burulma titreşimlerinin kuple (bağlaşık) olmasına neden olur. Bu durum ise kirişlerin ve kirişlerin bağlı bulunduğu diğer sistemlerin dinamik davranışını etkilemektedir. Bu nedenle ince cidarlı asimetrik açık kesitli kirişlerin dinamik davranışının incelenmesi büyük önem taşımaktadır. Araştırmacılar, çoğunlukla ikili bağlaşık titreşimin çözümü ile ilgilenmişler ve üçlü bağlaşık titreşim etkisindeki kirişler için çalışmaların çok az yapıldığı görülmüştür. Yapılan çalışmalarda ise kesme etkisi ve dönme ataleti etkisi ihmal edilmiştir. Bu çalışmada, simetri eksenine sahip olmayan kirişlerin dinamik eğilme / eğilme / burulma tarzında üçlü bağlaşık titreşimleri, kesme etkisi ve dönme atalet momenti etkisinde incelenmiş ve bu etkiler ihmal edilmeden analitik olarak çözüm yapılmıştır.

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde, değerli görüşleri ve bilimsel yaklaşımları ile çalışmanın her aşamasında, bana her an yardımcı olan, sayın hocam Prof. Dr. Alaeddin ARPACI'ya çok teşekkür ederim.

Ayrıca, çalışmanın yine her aşamasında değerli yardımlarıyla bana katkıda bulunan sayın Araş. Gör. Emin SÜNBÜLOĞLU'na ve çalışmalarımı destekleyen tüm arkadaşlarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	ii
TABLO LİSTESİ.....	v
ŞEKİL LİSTESİ.....	vi
SEMBOL LİSTESİ.....	x
ÖZET.....	xiv
SUMMARY.....	xvi
1- GİRİŞ.....	1
1-1. Giriş ve Çalışmanın Amacı	1
2- ÜNİFORM OLMAYAN ÇARPILMA ETKİSİNDEKİ ÇUBUKLARDA BURULMA TİTREŞİMİ.....	5
2-1. Burulmanın Statiği.....	5
2-2. Burulma Titreşiminin Hareket Denklemi.....	10
2-2.1. Çarpılmalı Burulma Titreşimi	10
2-2.2. Çarpılmasız Burulma Titreşimi	16
2-2.3. Örnekler.....	17
3- İKİLİ BAĞLAŞIK EĞİLME – BURULMA TİTREŞİMİ.....	21
4- İNCE CİDARLI AÇIK ASİMETRİK KESİTLİ KİRİŞLERDE ÜÇLÜ BAĞLAŞIK EĞİLME – EĞİLME – BURULMA TİTREŞİMLERİ.....	25
4-1. Çarpılma Etkisinin Gözönüne Alınması Halinde Titreşim	25
4-1.1. Hipotezler:	25
4-1.2. Semboller.....	25
4-1.3. İki Eksenli Eğilmede Elastik Eğri.....	26
4-1.4. Yer değiştirme vektörü:.....	28
4-1.5. Statik yükler :.....	29
4-1.6. Atalet Kuvvetleri ve Atalet Kuvvet Çiftleri	29
4-1.7. Hareketin Diferansiyel Denklemleri	30
4-2. Çarpılma Etkisinin İhmal Edilmesi Halinde Titreşim	34

5- ÜÇLÜ BAĞLAŞIK TİTREŞİM ÜZERİNDE DÖNME ATALET MOMENTİ VE KESME KUVVETİNİN ETKİSİ.....	38
5-1. İnce Cidarlı Açık Kesitlerde Kayma Gerilmesi Dağılımı	38
5-2. Şekil Değiştirmede Form Faktörü	40
5-3. Form Faktörünün Hesaplanması.....	41
5-4. Hareketin Diferansiyel Denklemleri	48
5-4.1. Çarpılma Etkisinin Gözönüne Alınması Halinde Titreşim:	48
5-4.2. Çarpılma Etkisinin İhmal Edilmesi Halinde Titreşim:	56
6- NÜMERİK ÇÖZÜM METODU.....	59
7- DENEYLER	68
7-1. Deney Düzenegi	69
7-1.1. Deney Standı	69
7-1.2. Mesnetleme.....	70
7-1.3. Ölçüm Cihazları.....	70
7-2. Deneyin Yapılması ve Sonuçları	71
7-2.1. Farklı Kesitlere Sahip Konsol Çubukların Dinamik Davranışı.....	71
7-2.2. Sonuçlar.....	71
8- SONUÇLAR VE TARTIŞMA	73
KAYNAKLAR	76
EK-A. DİYAGRAMLAR.....	79
A-1. Asimetrik L Profil.....	80
A-2. Asimetrik T Profil	94
A-3. Asimetrik Z Profil.....	108
A-4. Asimetrik U Profil	122
A-5. Asimetrik Kutu Profil	136
A-6. Asimetrik Kollu T Profil	150
ÖZGEÇMİŞ	164

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 2.1 Kesitler ve Asal Sektöriyel Atalet Momentleri[23]	8
Tablo 4.1 Frekans (Hz) Karşılaştırma Tablosu	35
Tablo 6.1 Katlı Kökler İçin Katlılık Durumu Matrisinin Yapısı.....	61
Tablo 6.2 Sınır Şartları Matrisinin Yapısına Örnek (Karmaşık Haller)	66
Tablo 6.3 Değişkenlerin Kodlanma Sırası	67
Tablo 6.4 Sınır Şartları Matrisinin Yapısına Örnek (Basit Haller)	67
Tablo 7.1 Deney – Teori Karşılaştırması	72

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2-1.1	İnce Cidarlı Açık Kesitli Çubukta Burulma Şekil Değişimi 6
Şekil 2-1.2	Asal Sektöriyel Atalet Momentleri Sıfır Olan Özel Kesitler 9
Şekil 2-2.1	Saf Burulma Etkisindeki Çubuklar 10
Şekil 2-2.2	Burulma Titreşimi Analizinde Kullanılan Kesitler.....17
Şekil 2-2.3	Simetrik I Kesit, Ankastre Ankastre Halde Frekans Oranı 18
Şekil 2-2.4	Simetrik I Kesit, Ankastre Serbest Halde Frekans Oranı.....18
Şekil 2-2.5	Eşit Flanşlı Z Kesit, Ankastre Ankastre Halde Frekans Oranı 19
Şekil 2-2.6	Eşit Flanşlı Z Kesit, Ankastre Serbest Halde Frekans Oranı 19
Şekil 3.1	Kesidi Bir Simetri Eksenine Sahip Kiriş.....21
Şekil 3.2	İkili Bağlaşık Eğilme/Burulma Titreşimi 21
Şekil 3.3	Yüklerin Kayma Merkezine İndirgenmesi 22
Şekil 3.4	İkili Bağlaşık Titreşimde Yer Değiştirme Durumları 24
Şekil 4-1.1	Elastik Eğride Genel Durum 26
Şekil 4-1.2	Üçlü Bağlaşık Titreşimde Yerdeğiştirme Bileşenleri 28
Şekil 4-1.3	Atalet Kuvvetlerinin Kayma Merkezine İndirgenmesi 30
Şekil 4-2.1	Çarpılmanın Doğal Frekanslar Üzerindeki Etkisi.....36
Şekil 4-2.2	Çarpılmanın Doğal Frekanslar Üzerindeki Etkisi.....37
Şekil 5-1.1	Açık Kesitli İnce Cidarlı Bir Çubukta Kayma Gerilmeleri.....38
Şekil 5-3.1	Asimetrik U-Kesitinde Form Faktörü.....41
Şekil 5-3.2	2β Açıklığında Halka Parçası.....44
Şekil 5-4.1	Genel Elastik Eğri Durumunda Kesme Etkisi.....48
Şekil 5-4.2	Genel Elastik Eğri Durumunda Kesme Etkisi 50
Şekil 5-4.3	Kiriş Boyuna Göre İzafi Hatalar 58
Şekil 5-4.4	Kiriş Kalınlığına Göre İzafi Hatalar 58
Şekil 6.1	Frekans Matrisinin Genel Yapısı 64
Şekil 7-1.1	Deney Standı ve Ölçüm Düzenine Şematik Gösterimi 69
Resim 7-1.2	Deneylerde Kullanılan Ölçüm Sistemi 70
Resim 7-2.1	Deneyisel Çalışmada Kullanılan Kirişler 71
Şekil A-1.1	Asimetrik L Profil – Ankastre Kiriş - Mod 1 81

Şekil A-1.2	Asimetrik L Profil – Ankastre Kiriş - Mod 2	82
Şekil A-1.3	Asimetrik L Profil – Ankastre Kiriş - Mod 3	83
Şekil A-1.4	Asimetrik L Profil – Ankastre Kiriş - Mod 4	84
Şekil A-1.5	Asimetrik L Profil – Ankastre Kiriş - Mod 5	85
Şekil A-1.6	Asimetrik L Profil – Ankastre Kiriş - Mod 6	86
Şekil A-1.7	Asimetrik L Profil –Konsol Kiriş - Mod 1	87
Şekil A-1.8	Asimetrik L Profil –Konsol Kiriş - Mod 2	88
Şekil A-1.9	Asimetrik L Profil –Konsol Kiriş - Mod 3	89
Şekil A-1.10	Asimetrik L Profil –Konsol Kiriş - Mod 4	90
Şekil A-1.11	Asimetrik L Profil –Konsol Kiriş - Mod 5	91
Şekil A-1.12	Asimetrik L Profil –Konsol Kiriş - Mod 6	92
Şekil A-1.13	Asimetrik L Profil ile Yapılan Deneyde Transduser'in Düşey Tutulması Halinde Alınan Frekans Spektrumu:	93
Şekil A-1.14	Asimetrik L Profil ile Yapılan Deneyde Transduser'in Yatay Tutulması Halinde Alınan Frekans Spektrumu:	93
Şekil A-2.1	Asimetrik T Profil – Ankastre Kiriş - Mod 1	95
Şekil A-2.2	Asimetrik T Profil – Ankastre Kiriş - Mod 2	96
Şekil A-2.3	Asimetrik T Profil – Ankastre Kiriş - Mod 3	97
Şekil A-2.4	Asimetrik T Profil – Ankastre Kiriş - Mod 4	98
Şekil A-2.5	Asimetrik T Profil – Ankastre Kiriş - Mod 5	99
Şekil A-2.6	Asimetrik T Profil – Ankastre Kiriş - Mod 6	100
Şekil A-2.7	Asimetrik T Profil –Konsol Kiriş - Mod 1	101
Şekil A-2.8	Asimetrik T Profil –Konsol Kiriş - Mod 2	102
Şekil A-2.9	Asimetrik T Profil –Konsol Kiriş - Mod 3	103
Şekil A-2.10	Asimetrik T Profil –Konsol Kiriş - Mod 4	104
Şekil A-2.11	Asimetrik T Profil –Konsol Kiriş - Mod 5	105
Şekil A-2.12	Asimetrik T Profil –Konsol Kiriş - Mod 6	106
Şekil A-2.13	Asimetrik T Profil ile Yapılan Deneyde Transduser'in Düşey Tutulması Halinde Alınan Frekans Spektrumu:	107
Şekil A-2.14	Asimetrik T Profil ile Yapılan Deneyde Transduser'in Yatay Tutulması Halinde Alınan Frekans Spektrumu:	107
Şekil A-3.1	Asimetrik Z Profil – Ankastre Kiriş - Mod 1	109
Şekil A-3.2	Asimetrik Z Profil – Ankastre Kiriş - Mod 2	110
Şekil A-3.3	Asimetrik Z Profil – Ankastre Kiriş - Mod 3	111
Şekil A-3.4	Asimetrik Z Profil – Ankastre Kiriş - Mod 4	112
Şekil A-3.5	Asimetrik Z Profil – Ankastre Kiriş - Mod 5	113

Şekil A-3.6	Asimetrik Z Profil – Ankastre Kiriş - Mod 6	114
Şekil A-3.7	Asimetrik Z Profil –Konsol Kiriş - Mod 1	115
Şekil A-3.8	Asimetrik Z Profil –Konsol Kiriş - Mod 2	116
Şekil A-3.9	Asimetrik Z Profil –Konsol Kiriş - Mod 3	117
Şekil A-3.10	Asimetrik Z Profil –Konsol Kiriş - Mod 4	118
Şekil A-3.11	Asimetrik Z Profil –Konsol Kiriş - Mod 5	119
Şekil A-3.12	Asimetrik Z Profil –Konsol Kiriş - Mod 6	120
Şekil A-3.13	Asimetrik Z Profil ile Yapılan Deneyde Transduser'in Düşey Tutulması Halinde Alınan Frekans Spektrumu:	121
Şekil A-3.14	Asimetrik Z Profil ile Yapılan Deneyde Transduser'in Yatay Tutulması Halinde Alınan Frekans Spektrumu:	121
Şekil A-4.1	Asimetrik U Profil – Ankastre Kiriş - Mod 1	123
Şekil A-4.2	Asimetrik U Profil – Ankastre Kiriş - Mod 2	124
Şekil A-4.3	Asimetrik U Profil – Ankastre Kiriş - Mod 3	125
Şekil A-4.4	Asimetrik U Profil – Ankastre Kiriş - Mod 4	126
Şekil A-4.5	Asimetrik U Profil – Ankastre Kiriş - Mod 5	127
Şekil A-4.6	Asimetrik U Profil – Ankastre Kiriş - Mod 6	128
Şekil A-4.7	Asimetrik U Profil –Konsol Kiriş - Mod 1	129
Şekil A-4.8	Asimetrik U Profil –Konsol Kiriş - Mod 2	130
Şekil A-4.9	Asimetrik U Profil –Konsol Kiriş - Mod 3	131
Şekil A-4.10	Asimetrik U Profil –Konsol Kiriş - Mod 4	132
Şekil A-4.11	Asimetrik U Profil –Konsol Kiriş - Mod 5	133
Şekil A-4.12	Asimetrik U Profil –Konsol Kiriş - Mod 6	134
Şekil A-4.13	Asimetrik U Profil ile Yapılan Deneyde Transduser'in Düşey Tutulması Halinde Alınan Frekans Spektrumu:	135
Şekil A-4.14	Asimetrik U Profil ile Yapılan Deneyde Transduser'in Yatay Tutulması Halinde Alınan Frekans Spektrumu:	135
Şekil A-5.1	Asimetrik Açık Kutu Profil – Ankastre Kiriş - Mod 1	137
Şekil A-5.2	Asimetrik Açık Kutu Profil – Ankastre Kiriş - Mod 2	138
Şekil A-5.3	Asimetrik Açık Kutu Profil – Ankastre Kiriş - Mod 3	139
Şekil A-5.4	Asimetrik Açık Kutu Profil – Ankastre Kiriş - Mod 4	140
Şekil A-5.5	Asimetrik Açık Kutu Profil – Ankastre Kiriş - Mod 5	141
Şekil A-5.6	Asimetrik Açık Kutu Profil – Ankastre Kiriş - Mod 6	142
Şekil A-5.7	Asimetrik Açık Kutu Profil –Konsol Kiriş - Mod 1	143
Şekil A-5.8	Asimetrik Açık Kutu Profil –Konsol Kiriş - Mod 2	144
Şekil A-5.9	Asimetrik Açık Kutu Profil –Konsol Kiriş - Mod 3	145

Şekil A-5.10	Asimetrik Açık Kutu Profil –Konsol Kiriş - Mod 4.....	146
Şekil A-5.11	Asimetrik Açık Kutu Profil –Konsol Kiriş - Mod 5.....	147
Şekil A-5.12	Asimetrik Açık Kutu Profil –Konsol Kiriş - Mod 6.....	148
Şekil A-5.13	Asimetrik Açık Kutu Profil ile Yapılan Deneyde Transduser'in Düşey Tutulması Halinde Alınan Frekans Spektrumu:	149
Şekil A-5.14	Asimetrik Açık Kutu Profil ile Yapılan Deneyde Transduser'in Yatay Tutulması Halinde Alınan Frekans Spektrumu.....	149
Şekil A-6.1	Asimetrik Kollu T Profil – Ankastre Kiriş - Mod 1	151
Şekil A-6.2	Asimetrik Kollu T Profil – Ankastre Kiriş - Mod 2	152
Şekil A-6.3	Asimetrik Kollu T Profil – Ankastre Kiriş - Mod 3	153
Şekil A-6.4	Asimetrik Kollu T Profil – Ankastre Kiriş - Mod 4	154
Şekil A-6.5	Asimetrik Kollu T Profil – Ankastre Kiriş - Mod 5	155
Şekil A-6.6	Asimetrik Kollu T Profil – Ankastre Kiriş - Mod 6	156
Şekil A-6.7	Asimetrik Kollu T Profil –Konsol Kiriş - Mod 1	157
Şekil A-6.8	Asimetrik Kollu T Profil –Konsol Kiriş - Mod 2	158
Şekil A-6.9	Asimetrik Kollu T Profil –Konsol Kiriş - Mod 3	159
Şekil A-6.10	Asimetrik Kollu T Profil –Konsol Kiriş - Mod 4.....	160
Şekil A-6.11	Asimetrik Kollu T Profil –Konsol Kiriş - Mod 5.....	161
Şekil A-6.12	Asimetrik Kollu T Profil –Konsol Kiriş - Mod 6.....	162
Şekil A-6.13	Asimetrik Kollu T Profil ile Yapılan Deneyde Transduser'in Düşey Tutulması Halinde Alınan Frekans Spektrumu:	163
Şekil A-6.14	Asimetrik Kollu T Profil ile Yapılan Deneyde Transduser'in Yatay Tutulması Halinde Alınan Frekans Spektrumu.....	163

SEMBOL LİSTESİ

A	: Dik kesit alanı
C_i	: İntegrasyon sabitleri
C_w	: Çarpılma sabiti
D	: Timoshenko Teorisinde kesite bağlı bir sabit
E	: Elastiklik modülü
e_1, e_2	: Kayma merkezinin geometrik merkeze uzaklığı
F_k	: Kesme kuvveti
F_ξ, F_η	: Atalet kuvvetleri
f_0	: Çarpılmasız burulma frekansı
f_w	: Çarpılmalı burulma frekansı
G	: Kayma modülü
G	: Kesit ağırlık merkezi
I_x, I_y, I_ξ, I_η	: Alan atalet momentleri
I_b	: Burulma momenti (Saint – Venant)
I_0	: Kayma merkezine göre polar atalet momenti
I_p	: Ağırlık merkezine göre polar atalet momenti
I_w	: Asal sektöriyel atalet momenti
i	: $\sqrt{-1}$
K	: Kısaltma sembolü ($K = \sqrt{(GI_b)^2 + 4(EI_w)(\rho I_p \omega^2)}$)
K	: Kısaltma sembolü ($K = \beta + \lambda_\eta + \lambda_\xi$)
ℓ	: Uzunluk
M	: Kısaltma sembolü ($M = \lambda_\eta \beta - \lambda_\omega \lambda_\eta e_2^2 / \ell^2 + \lambda_\xi \beta + \lambda_\xi \lambda_\eta - \lambda_\xi \lambda_\omega e_1^2 / \ell^2$)

M_b	: Burulma momenti
M_z	: Yayılı burulma momenti
N	: Kısaltma sembolü ($N = \alpha \lambda_\xi \lambda_\eta$)
q_x, q_y	: Yayılı kuvvetler
R	: Kısaltma sembolü ($R = -\lambda_\xi \lambda_\eta \beta + \lambda_\xi \lambda_\eta \lambda_\omega (e_1^2 + e_2^2) / \ell^2$)
S	: Kesit kayma merkezi
s	: Eğrisel koordinat
t	: Zaman
U	: Ağırlık merkezinin x- doğrultusundaki maksimum yer değiştirmesi
u	: Ağırlık merkezinin x- doğrultusundaki yer değiştirmesi
V	: Ağırlık merkezinin y- doğrultusundaki maksimum yer değiştirmesi
v	: Ağırlık merkezinin y- doğrultusundaki yer değiştirmesi
X	: Ağırlık merkezinden geçen eksen
Y	: Ağırlık merkezinden geçen eksen
x	: Kayma merkezinden geçen eksen
y	: Kayma merkezinden geçen eksen
z	: Kiriş eksenini doğrultusundaki koordinat
α	: Kısaltma sembolü ($\alpha = \frac{GI_b \ell^2}{EI_w}$)
α_i	: Kayma açısı
β	: Kısaltma sembolü ($\beta = \frac{\omega^2 \rho I_0 \ell^4}{EI_w}$)
β_i	: Kayma açısı
γ	: Kayma açısı ($\gamma = k' F_k / G A$)
δ	: Uzunluk
η	: Asal eksen

- θ_i : Kayma açısının maksimum değeri
- λ : Çarpılma Hassasiyeti ($\sqrt{I_w / I_b} / \ell$)
- λ_t : Kısaltma sembolü ($\lambda_t^2 = \frac{(GI_b i^2 \pi^2 \ell^2 + EI_w i^4 \pi^4)}{\rho \ell^4 (I_p + A e_1^2)}$)
- λ : Kısaltma sembolü ($\lambda = \frac{A e_1}{I_p + A e_1^2}$)
- λ_ξ : Kısaltma sembolü ($\lambda_\xi = \frac{\omega^2 \rho A \ell^4}{EI_\xi}$)
- λ_η : Kısaltma sembolü ($\lambda_\eta = \frac{\omega^2 \rho A \ell^4}{EI_\eta}$)
- λ_ω : Kısaltma sembolü ($\lambda_\omega = \frac{\omega^2 \rho A \ell^6}{EI_w}, \lambda_\omega = \frac{\omega^2 \rho A}{EI_w}$)
- λ_o : Kısaltma sembolü ($\lambda_o = \frac{\rho I_o \omega^2}{EI_w}$)
- λ_{Ix} : Kısaltma sembolü ($\lambda_{Ix} = \frac{\rho I_\xi \omega^2}{k_y GA}$)
- λ_{Iy} : Kısaltma sembolü ($\lambda_{Iy} = \frac{\rho I_\eta \omega^2}{k_x GA}$)
- λ_x : Kısaltma sembolü ($\lambda_x = \frac{\rho A \omega^2}{k_x GA}$)
- λ_y : Kısaltma sembolü ($\lambda_y = \frac{\rho A \omega^2}{k_y GA}$)
- λ_{Ex} : Kısaltma sembolü ($\lambda_{Ex} = \frac{EI_\xi}{k_y GA}$)
- λ_{Ey} : Kısaltma sembolü ($\lambda_{Ey} = \frac{EI_\eta}{k_x GA}$)
- λ_b : Kısaltma sembolü ($\lambda_b^2 = \frac{EI_x i^4 \pi^4}{\rho A \ell^4}, \lambda_b = \frac{GI_b}{EI_w}$)

μ_b : Kısaltma sembolü ($\mu_b = \frac{GI_b}{\omega^2 \rho A}$)

μ_o : Kısaltma sembolü ($\mu_o = \frac{I_o}{A}$)

ν : Poisson oranı

ξ : Asal eksen

ρ : Özgül kütle

φ : Burulma açısı

ϕ : Burulma açısı

Φ : Burulma açısının maksimum değeri

ω : Dairesel frekans

İNCE CİDARLI AÇIK ASİMETRİK KESİTLİ KİRİŞLERİN TİTREŞİMİ

ÖZET

İnce cidarlı açık kesitli kirişler, uçak mühendisliği başta olmak üzere, mühendisliğin çeşitli dallarında yaygın olarak kullanılırlar. Bu sebepten, sözkonusu kirişlerin titreşim problemi, araştırmacıların uzun yıllardan beri dikkatini çekmiştir.

Kesitin simetri eksenine sahip olup olmadığı ve kayma merkezi ile geometrik merkezin çakışıp çakışmadığı, sorunun temelini oluşturur. Simetri eksenine sahip olmayan, kayma merkezi ile geometrik merkezi de çakışmayan kesitlerin sözkonusu olduğu durumlarda, birbirine dik iki eksen doğrultusundaki eğilme titreşimleri ile burulma titreşimi birlikte meydana gelir. Bu en genel duruma "üçlü bağlaşım" adı verilir. Bu konuda literatürdeki çalışma sayısı çok kısıtlıdır. Kayma merkezi ile geometrik merkezin üst üste düşmesi durumunda, burulma titreşimi ayrı meydana gelir. Ya da, kesitin bir simetri eksenine varsa, bu doğrultudaki eğilme titreşimi, diğer doğrultudaki eğilme titreşimi ile burulma titreşiminden bağımsız meydana gelir. Bağlaşım, birinci durumda eğilme/eğilme, ikinci durumda eğilme/burulma tarzında ortaya çıkmış olur. Buna da "ikili bağlaşım" adı verilir. İkili bağlaşım, literatürde ayrıntılı incelenmiştir.

Dairesel olmayan kesitlere sahip çubukların burulmasında kesit çarpılmasının olduğu bilinen bir husustur. Bu çarpılma, dolu kesitler ile ince cidarlı kapalı kesitlerde Saint-Venant teorisine göre nispeten basitçe hesaplanabilmektedir. Çünkü, bu kesitlerde çarpılma fazla değildir. Oysa, ince cidarlı açık kesitlerde çarpılma büyüktür. Bu yüzden, çarpılmanın kesitten keside değiştiği, başka bir deyişle, çarpılma fonksiyonunun uzayda her üç koordinata da bağlı olduğu kabul edilmelidir. Buna "üniform olmayan çarpılma" da denir. Literatürde, konuyu her iki çarpılma varsayımı ile inceleyen çalışma da mevcuttur.

Sürekli sistemlerin titreşim problemini ele alırken, gerek doğal frekans ve gerekse mod yönünden yapılan hesaplarda, kesme kuvveti ile dönme atalet momenti etkilerinin de göz önüne alınmasının sonuçlarda hassasiyeti arttırdığı bilinmektedir. İkili bağlaşımı inceleyen bir-iki çalışmada bu etkilerin gözönüne alınmış olduğu görülmekte ise de, üçlü bağlaşımında henüz böyle bir çalışmaya rastlanmamıştır.

Bu çalışma, ince cidarlı açık kesitli kirişlerin üçlü bağlaşık titreşimini analitik ve deneysel olarak incelemeyi ve teorik hesap aşamasında üniform olmayan çarpılma, kesme kuvveti ve dönme atalet momenti etkilerini göz önüne almayı hedeflemiştir.

Çalışmanın birinci bölümünde problem tanıtılmış ve literatür taramasının sonuçları verilmiştir.

İkinci bölümde, ince cidarlı açık kesitli çubukların burulması statik ve dinamik yönden incelenmiş ve çarpılma olayı ayrıntılarıyla ele alınmıştır. I ve Z profilli çubukların burulma titreşimi örnek olarak verilmiştir.

Üçüncü bölüm, ikili bağlaşımın hareket denklemlerini tanıtmakta ve simetrik U-Kesit için çeşitli teorik karşılaştırmalar sunmaktadır.

Dördüncü bölümde üçlü bağlaşım ele alınmıştır. Bu titreşimin hareket denklemleri çıkartılmış ve genel çözüm elde edilmiştir. Bilinmeyen sabitleri bulabilmek için sınır şartları yazılmış ve katsayılar determinantının sıfıra eşitlenmesi ile doğal frekansları veren karakteristik denklem bulunmuştur. Yapılan sayısal hesaplamalar sonucunda, bu denklemi sağlayan doğal frekanslar elde edilerek grafikleri çizilmiştir. Bu frekanslara karşılık gelen mod şekilleri de ayrıca bulunmuş ve çarpılmanın üniform kabul edilmesi ve edilmemesi durumları ayrı ayrı irdelenmiştir.

Beşinci bölüm, kesme kuvveti ile dönme atalet momenti etkilerinin üçlü bağlaşık titreşime etkilerini ele almaktadır. Durum, doğal frekans ve mod yönlerinden incelenmiş, ayrıca çarpılma irdelemesi de yapılmıştır.

Altıncı bölüm, elde edilen diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan nümerik metodun en genel hal için temel kabulleri ve yapısı irdelenmiş ve frekansların nasıl hesaplandığı genel olarak anlatılmıştır. Yine en genel hal için, sınır şartlarının nümerik çözüme nasıl uygulandığı da bu bölüm içinde ele alınmıştır.

Yedinci bölümde, çalışmanın deneysel kısmına aittir. Bu bölümde deney düzeneği tanıtılmış, çeşitli kesitlere sahip kirişler için ölçülen doğal frekanslar verilmiştir.

Sekizinci bölüm, elde edilen sonuçları yorumlamaktadır. Çarpılmayı üniform kabul etmenin çok ciddi hatalara neden olduğu, diğer iki etkinin hesaba katılmasının da bazı geometrilerde ve yüksek modlarda önemli olduğu sonucuna ulaşılmaktadır. Deney ve teori arasındaki uyumun da, her üç etkinin göz önüne alındığı durumlarda çok daha iyi olduğu ayrıca gözlenen hususlardandır.

VIBRATION OF BEAMS WITH THIN-WALLED OPEN CROSS-SECTIONS

SUMMARY

The beams with thin-walled open cross-sections are widely used elements of structures used especially in aerospace engineering, general applicability of which makes the vibration problems of these beams in common interest to the researchers for a long time.

The basis of the vibration problems in such cross-section beams are both the presence of a symmetry axis and the coincidence of the geometric centre and the shear centre of the cross section. For a given asymmetrical cross-section, the flexural vibrations in two principal axes and the torsional vibration become connected to each other, which is the most general case and is denoted as "Triply-Coupled Vibration Problem". Topics on this subject has been seen to be very rare in the literature. If the shear centre and the geometric centre coincide, torsional vibration is de-coupled from flexural vibrations, which is referred as "Flexural Doubly Coupled Vibration". Similarly, at the presence of a symmetry axis, the flexural vibration in that specific direction is de-coupled from the others, and the problem becomes the "Flexural-Torsional Doubly-Coupled Vibration" problem.

For non-circular cross-section beams, warping is a well-known phenomenon. The effect of warping can be calculated considerably easier for solid and thin-walled closed cross-sections using the Saint-Venant Theory of Torsion, which is not a valid assumption and method for thin-walled open cross-section beams, and introduces the need of defining a function for warping in the three-dimensional space, denoted as "Non-Uniform Warping". Studies introducing both assumptions to the literature are common.

Another point of interest in examining the vibration characteristics of continuous systems is the contribution of the shear force and rotary inertia effects to the modal characteristics of the structure, both of which are known to increase the accuracy of theoretical calculations. In the literature, these effects were seen to be considered only for very special few cases of doubly-coupled vibration problems, and no study considering these has been found for triply-coupled vibration problems.

This thesis introduces the exact analytical solution to triply-coupled vibration problems, accompanied with experimental results to verify the theoretical outcomes. All three assumptions, non-uniform warping, shear effect and rotatory inertia effect have been studied for the given problem in detail, and the effects of presence of either have been carefully analysed throughout the work progress.

The First Section has been devoted to the definition of the problem, and the results of the literature research have been introduced.

In the Second Part of the work, un-coupled torsional vibration characteristics of thin-walled open cross-section beams have been detailly investigated along with study on

the phenomenon of warping. The studies have been followed by numerical analysis on symmetrical I and Z Cross-Sections.

The Third Section briefly introduces doubly-coupled vibration problems, with some theoretical critics on a symmetric U-Section, immediately followed by the Fourth Section on triply-coupled vibration problems, the equations of motion and exact boundary conditions of which have been obtained, together with the characteristic matrix of the problem within the part. The natural frequencies of the system have been calculated, compared and plotted together with the corresponding modeshapes for the given beam data. Effects of uniform and non-uniform warping have been analysed separately for greater clarification.

The Fifth Part introduces the shear force and rotary inertia effects into the equations of motion obtained in Part IV. The topics of interest were the changes in the modal frequencies and modeshapes, and the neglectibility of warping has been discussed.

The Sixth Part is on the numerical solution method proposed for the most general structure of the system of differential equations. The basic assumptions for solution and the methodology are explained, along with the numerical substitution of the boundary conditions into the system.

The Seventh Part is on the experimental studies introducing the system of measurement and displaying the data obtained for various beams.

The Eighth and Last Part of the study is the conclusion part, where the whole work is summarized and an in depth critique is carried on. It is pointed out that effect of warping is not neglectable for such cross-sections, and the other effects aforementioned are especially important for higher modal indices and a group of cross-sections. It has been observed that theory and experiment meet at the condition that three effects are taken account of.

1- GİRİŞ

1-1. Giriş ve Çalışmanın Amacı

İnce cidarlı ve açık kesitli kirişler, çeşitli mühendislik dallarında, özellikle uçak mühendisliğinde direnç arttırıcı eleman olarak kullanılırlar. Bu sebepten, söz konusu kirişlerin dinamik davranışlarının belirlenmesi, gerek emniyet ve gerekse ekonomik dizayn açısından büyük önem taşır.

Bu kirişlerin titreşim karakteristiklerinin belirlenmesinde karşılaşılan en önemli sorun, dik kesitin ağırlık merkezi ile kayma merkezinin üst üste düşüp düşmediğidir. Bu iki merkezin çakışması, eğilme ve burulma titreşimlerinin birbirinden ayrılması sonucunu doğurur; bu da analiz yönünden önemli bir kolaylık demektir. Ağırlık merkezi ile kayma merkezinin çakışmadığı durumlarda ise, eğilme ve burulma titreşimleri birlikte meydana gelecektir.

Titreşim karakteristiklerinin belirlenmesinde ortaya çıkan diğer bir sorun ise, dik kesitin simetri eksenine sahip olup olmadığıdır. Kesiti sadece bir simetri eksenine sahip kirişlerde, bu eksen doğrultusundaki eğilme titreşimi, diğer titreşimlerden bağımsız meydana gelir. Böylece, bu simetri eksenine dik doğrultudaki eğilme titreşimi ile burulma titreşimi kuple olur ki; buna "ikili bağlaşım" adı verilir. Flansları eşit uzunluktaki bir U-profilinde durum böyledir.

Simetri ekseninin hiç mevcut olmadığı durumlarda ise, birbirine dik iki doğrultudaki eğilme titreşimleri ile burulma titreşimi kuple olur ki, bu en genel duruma "üçlü bağlaşım" adı verilir. Bunun pratikte tek istisnası, flansları eşit uzunlukta Z- profilli kiriştir. Burada, simetri eksenini mevcut olmamakla birlikte, ağırlık merkezi ile kayma merkezinin çakışmasından dolayı, burulma titreşimi bağımsız meydana gelmekte ve bağlaşım sadece eğilme titreşimleri arasında gerçekleşmektedir.

Konunun endüstriyel önemi, pek çok araştırmacının ilgisini çekmiş ve birçok çalışmanın yapılmasını sağlamıştır. İki simetri eksenine sahip kesitlerin burada

sözkonusu edilmesine gerek yoktur. Çünkü bu durumda, anlatılan nedenlerle bağlaşım meydana gelmemektedir.

İkili bağlaşımı ele alan ilk çalışmanın Timoshenko' ya [1] ait olduğu söylenebilir. Bu çalışmada, simetrik U- profil bir kirişin eğilme – burulma bağlaşımı için diferansiyel denklemler çıkartılmış, uçların basit mesnetli olması durumunda Rayleigh – Ritz yöntemi ile çözüme gidilmiştir.

Hasan ve Barr [2], eşit kollu L-profil için Hamilton Prensibini kullanarak doğal frekansları hesaplamış ancak bunu yaparken kesit çarpılmasını ihmal etmişlerdir.

Bishop ve Price [3], simetrik U- profil için Timoshenko (kesme kuvveti ve dönme ataleti) etkilerini göz önüne alarak analitik bir çalışma yapmış, ancak çarpılma bu çalışmada da ihmal edilmiştir.

Bishop ve arkadaşları [4], başka bir çalışmalarında, çarpılmayı da göz önüne almışlar ve yine simetrik U- profil için Timoshenko, Vlasov ve sonlu elemanlar yöntemlerini karşılaştırmışlardır.

Friberg [5], Vlasov teorisinin kabulleri ile sonlu elemanlar yöntemini ikili bağlaşımına uygulamış, ayrıca eksenel kesme kuvvetinin doğal frekanslara etkisini de incelemiştir.

Dokumacı [6], simetrik U-profilinde ikili bağlaşımın bütün sınır şartlarında kesin analitik çözümünü yapmış ve kayma merkezi konumunun doğal frekanslar üzerindeki etkisini kesit çarpılmasını ihmal ederek incelemiştir.

Bishop ve ark. [7], analizi, basit çarpılma etkilerine aynı yöntemle genişletmişlerdir.

Banerjee [8], bir simetri eksenine sahip ince cidarlı açık kesitli kirişlerde çarpılmayı ihmal ederek doğal frekansları hem analitik yöntemle hem de sonlu elemanlar yöntemi ile hesaplamışlardır.

Banerjee ve Fisher [9], daha sonra eksenel yüklemeyi de hesaba katmışlar ancak çarpılmayı yine ihmal etmişlerdir.

Banerjee ve Williams [10], yukarıdaki çalışmayı kesme kuvveti ve dönme atalet momenti etkilerini de göz önüne alarak zenginleştirmişlerdir.

Klausbruckner ve Pryputniewicz [11], simetrik U-profilinde çarpılma ve kesme etkilerini göz önüne alarak sonlu elemanlar yöntemi ile doğal frekansları bulmuşlar ve sonuçları deneysel sonuçlarla karşılaştırmışlardır.

Adam [12], simetrik U- profilli kirişlerde çarpılmayı da göz önüne alarak zorlanmış titreşimi incelemiştir.

Bercin ve Tanaka [13] yine aynı kirişi Timoshenko teorisi ile ele almışlardır.

Üçlü bağlaşım konusundaki çalışma sayısı ise oldukça azdır.

Gere ve Lin [14] bu konudaki ilk çalışmayı yaparak, asimetrik kesitli kirişlerin titreşim denklemlerini Euler – Bernoulli teorisine göre çıkartmış ve doğal frekansları kesit çarpılmasını da göz önüne alarak Rayleigh – Ritz yöntemi ile elde etmişlerdir.

Friberg [15], çarpılmayı Saint – Venant teorisine göre üniform kabul ederek, bir sonlu eleman programı geliştirmiş ve zorlanmış titreşimi incelemiştir.

Gendy ve ark. [16], asimetrik kesitli kirişlerde kesme etkisini de göz önüne alarak bir sonlu eleman modeli geliştirmişlerdir.

Hu ve ark. [17], çarpılmayı Saint – Venant teorisine göre üniform kabul ederek, kesme etkisini de göz önüne almak suretiyle bir sonlu eleman modeli geliştirmişlerdir.

Yaman [18], dalga yayını yöntemi ile, ikili ve üçlü bağlaşım durumunda doğal frekansları ve mod şekillerini hesaplamıştır. Çarpılma etkisinin, zorlanmış titreşim ve sönümün gözönüne alındığı bu çalışma, üçlü bağlaşım konusundaki en kapsamlı çalışma kabul edilebilir.

Tanaka ve Bercin [19], asimetrik U- profilli kirişler için üçlü bağlaşımı kesin analitik yöntemle çözmeye çalışmış ancak asal olmayan eksen takımında yapılan formülasyonda çarpım atalet momenti kullanılmadığı için doğru bir çözüme ulaşamamışlardır. Bu durum, tarafımızdan tespit edilmiş ve eleştirimiz bir "Teknik Not" halinde aynı dergiye gönderilerek kabulü sağlanmıştır.

Yukarıda sunulan literatür araştırması göstermektedir ki, bir simetri eksenine sahip açık kesitli ince cidarlı kirişlerin eğime / burulma bağlaşık titreşiminin, gerek kesit çarpılması ve gerekse eksenel yük, kesme kuvveti ve dönme atalet momenti etkileri gözönüne alınarak incelenmesi, analitik yöntemlerle ve sonlu elemanlar

yöntemi ile yapılmıştır. Eğilme / eğilme / burulma tarzındaki üçlü bağlaşım ise, dalga yayını yöntemi [18] dışında incelenmemiş ve kesme kuvveti ile dönme ataletinin etkisi ise hiçbir biçimde hesaba katılmamıştır.

Ağırlık merkezi ile kayma merkezinin çakıştığı I ve Z profilli çubuklarda meydana gelen saf burulma titreşiminde ise, nümerik sonuç veren Li ve Ark [20], serbest uç şartlarını ancak yaklaşık olarak sağlamışlardır.

Bu çalışmanın amaçları aşağıda sıralanmıştır:

1. Burulma titreşiminde, dolu kesitlerle ince cidarlı kapalı kesitler için yeterli yaklaşıklıkta sonuç veren Saint – Venant teorisi yerine, çarpılmayı çubuk boyunca değişken kabul eden ve açık kesitler için uygun olan teoriyi esas alarak, sınır şartlarında herhangi bir basitleştirme yapmaksızın doğal frekansları bulmak.(çalışmanın bu kısmı “The First International Conference on Structural Stability and Dynamics, 2000, Taipei, Taiwan” da sunulmak üzere kabul edilmiştir)
2. İnce cidarlı açık asimetrik kesitli kirişlerin eğilme / eğilme / burulma şeklindeki üçlü kuple titreşimini, üniform olmayan çarpılma etkisinde kesin analitik yöntemle çözmek ve çeşitli örnekler üzerinde sayısal çalışma yaparak doğal frekansları ve mod şekillerini bulmak, (çalışmanın bu kısmının sadece dönme atalet momentiyle ilgili olan kısmı, “International Congress on Theoretical and Applied Mechanics – August 2000, Chicago” da sunulmuştur) çarpılmanın gözönüne alınıp alınmaması durumlarını karşılaştırmak.
3. Literatürde henüz rastlanmayan kesme kuvveti, dönme atalet momenti ve üniform olmayan çarpılma etkisinde eğilme / eğilme / burulma titreşimleri bağlaşımını kesin analitik yöntemle çözmek ve çeşitli kesitler için sayısal hesaplama yaparak doğal frekansları ve mod şekillerini bulmak
4. Deneysel çalışma yaparak, elde edilen sonuçları teorik sonuçlarla karşılaştırmak.

2- ÜNİFORM OLMAYAN ÇARPILMA ETKİSİNDEKİ ÇUBUKLARDA BURULMA TİTREŞİMİ

2-1. Burulmanın Statiği

Çubuklarda üniform burulmanın bulunduğu, başka bir deyişle kesitlerin ve bu arada uç kesitlerin serbestçe çarpılabildiği durumlarda, Saint-Venant teorisine göre hesap yapmak önemli bir hata getirmez. Eğer çubuğun uç şartları, kesitlerin serbestçe çarpılmasına engel olursa, artık çarpılma her kesitte aynı miktarda olmaz. Bir ucu ankastre mesnetli, boşta olan diğer ucuna burulma momenti uygulanan çubuk, bu konuda iyi bir örnektir. Ankastre mesnette çarpılmanın olmayışı, diğer uçta ise maksimum oluşu, aradaki kesitlerde bir değişim olmasını gerektirir. Böyle durumlarda, “üniform olmayan çarpılma” kavramı gündeme gelir ve üniform olmayan çarpılmanın burulma açısına ve gerilme yayılışına nasıl etki ettiği sorusu ortaya çıkar.

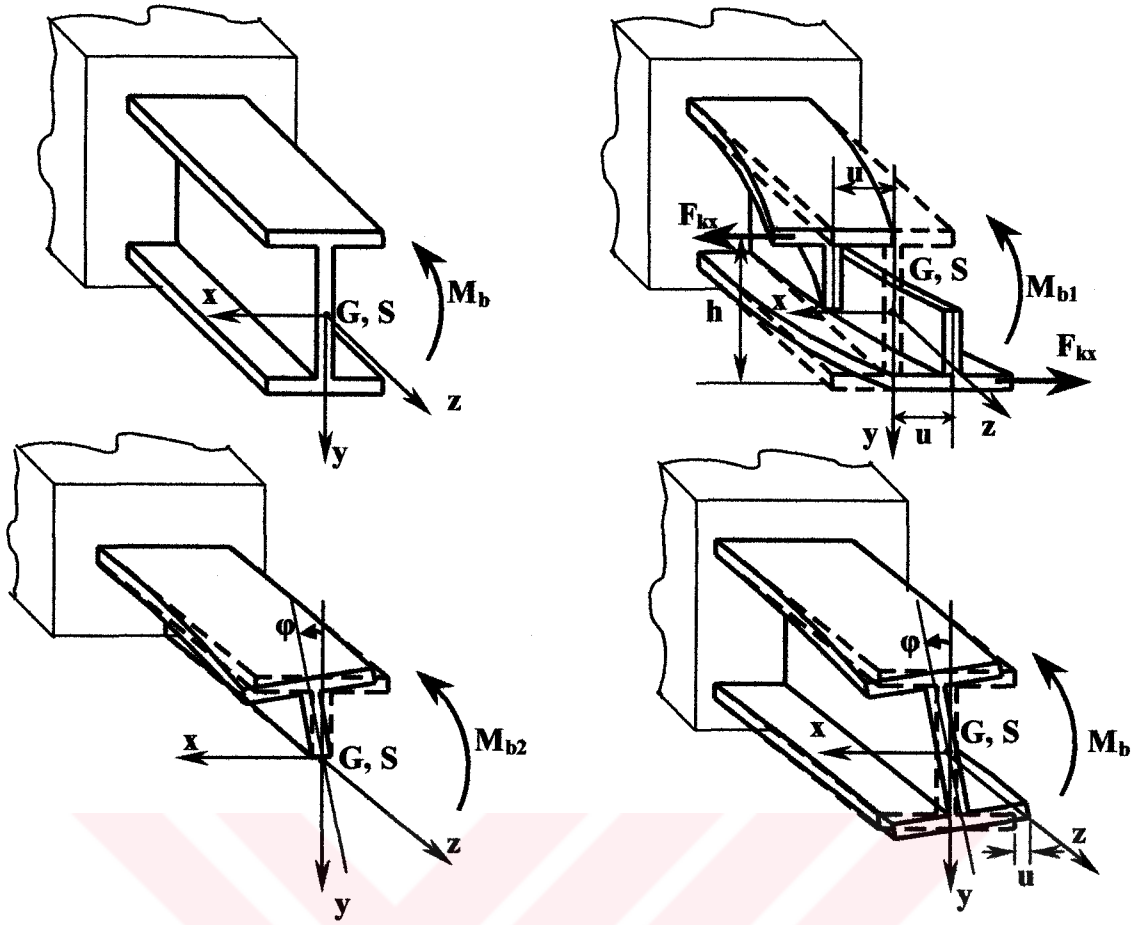
Dolu kesitli çubuklarda, kesit boyutlarının çubuk boyuna göre küçük olması halinde söz konusu etki ihmal edilebilir. İnce cidarlı kapalı kesitli çubuklarda da durum buna yakındır. Ancak açık kesitli çubuklarda ise, burulma yanında flanşların eğilmesine de rastlanır ki, bunların eğilme rijitliklerine bağlı olarak burulma açısı önemli miktarda etkilenebilir[21]. Bu durumda, herhangi bir kesitteki burulma momenti, kısmen burulmadan doğan kayma gerilmeleri ve kısmen de flanşların eğilmesinden doğan kayma gerilmeleri tarafından dengelenecektir.

Şekil 2-1.1 de, serbest ucuna M_b burulma momenti uygulanan bir I-profilli çubuğun durumu görülmektedir.

M_b momenti etkisi ile, bir taraftan kesit ϕ açısı kadar dönerken, diğer taraftan flanşlar yatay düzlemde iki yana eğilmektedir. M_b momenti böylece:

$$M_b = M_{b1} + M_{b2}$$

şeklinde iki momentin toplamı olarak yazılabilir. M_{b1} momenti, flanşların eğilmesinden hesaplanacaktır.



Şekil 2-1.1 İnce Cıdarlı Açık Kesitli Çubukta Burulma Şekil Değişimi

$$M_{b1} = F_{kx} h \quad (2.1)$$

yazılabilir. Üst flansın sehim,

$$u = \frac{h}{2} \phi \quad (2.2)$$

değerindedir. Sehim için elastik eğri denklemi kullanılırsa,

$$M_y = EI_y \frac{d^2 u}{dz^2} \quad (2.3)$$

$$F_{kx} = -\frac{dM_y}{dz} = -EI_y \frac{d^3 u}{dz^3} = -EI_y \frac{h}{2} \frac{d^3 \phi}{dz^3} \quad (EI_y = \text{sabit}) \quad (2.4)$$

bulunur. Böylece burulma momentinin flansları eğen kısmı, (2.1) den

$$M_{b1} = -\frac{EI_y h^2}{2} \frac{d^3 \phi}{dz^3} \quad (2.5)$$

olarak elde edilir. Burada I_y , flanşlardan birinin alan eylemsizlik momentidir. Saf burulmayı meydana getiren M_{b2} için teoriden,

$$M_{b2} = GI_b \frac{d\phi}{dz} \quad (2.6)$$

yazılabileceğinden ve $M_b = M_{b1} + M_{b2}$ olduğundan,

$$M_b = GI_b \frac{d\phi}{dz} - \frac{EI_y h^2}{2} \frac{d^3\phi}{dz^3} \quad (2.7)$$

elde edilir.

Vlasov teorisinde [22] tamamen kesitin geometrik özelliklerinden elde edilen ve "asal sektöriyel eylemsizlik moment" adı verilen $\frac{I_y h^2}{2}$ terimi (m^6) boyutundadır.

Simetrik I- profiline ait bu değer, diğer kesitlerde farklı formülasyonda ortaya çıkar.

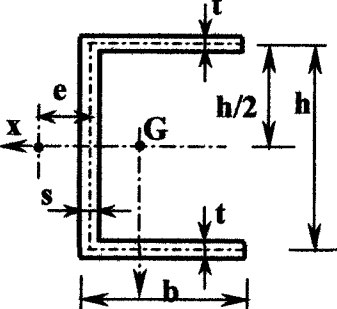
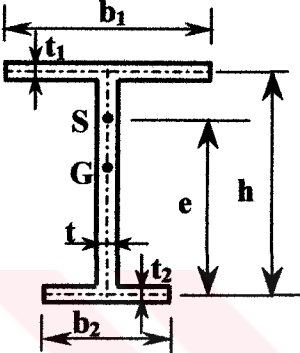
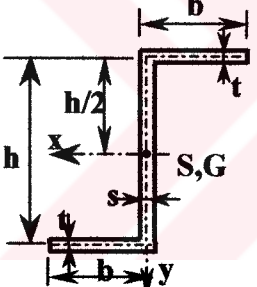
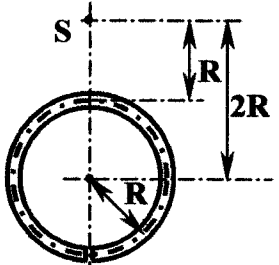
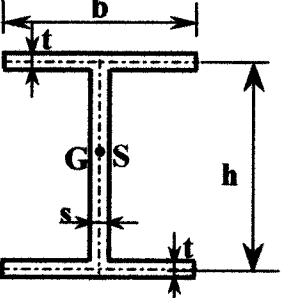
$$I_w = \frac{I_y h^2}{2} \text{ kısaltması ile,}$$

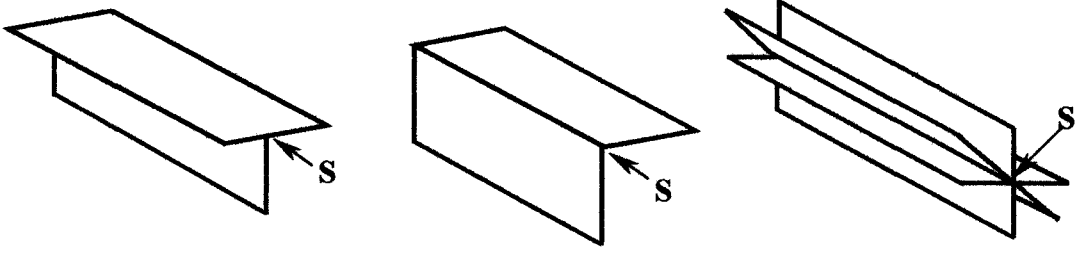
$$M_b = GI_b \frac{d\phi}{dz} - EI_w \frac{d^3\phi}{dz^3} \quad (2.8)$$

yazılabilir. Bazı kesitlere ait I_w ifadeleri, Tablo-2.1 de görülmektedir.

Tablo 2.1

Kesitler ve Asal Sektöriyel Atalet Momentleri[23]

KESİT	ASAL SEKTÖRİYEL ATALET MOMENTİ
	$I_w = \frac{tb^3}{12} \frac{h^2}{2} \left(1 + \frac{sh^3}{4I_x} \right)$
	$I_w = \frac{t_2 b_2^3}{12} e h$ $e = \frac{t_1 b_1^3}{t_1 b_1^3 + t_2 b_2^3} h$
	$I_w = \frac{b^3 t h^2}{12} \frac{2hs + bt}{hs + 2bt}$
	$I_w = \frac{2}{3} R^5 t (\pi^2 - 6)$
	$I_w = \frac{tb^3}{12} \frac{h^2}{2}$ Gövde cidar kalınlığı önemsiz!



Şekil 2-1.2

Asal Sektöriyel Atalet Momentleri Sıfır Olan Özel Kesitler

Sınır şartları:

Burulma etkisindeki bir çubuğun ucunda, mesnetleme dolayısı ile iki tür kısıtlama ile karşılaşılabilir. Bunlardan birisi dönme kısıtı, diğeri ise çarpılma kısıtıdır. Çarpılma, bilindiği gibi, başlangıçta düzlem olan bir dik kesitin çeşitli noktalarında farklı eksenel yer değiştirmelerin olmasıdır. Çarpılma yer değiştirmesi, Timoshenko [21] tarafından

$$u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} (D - \omega_s) \quad (2.9)$$

bağıntısı ile verilmektedir. Burada D kesite bağlı bir sabit, ω_s ise kesit üzerinde noktadan noktaya değişen, ancak belirli bir nokta için sabit olan bir büyüklüktür. Çarpılma kısıtının oluşturduğu gerilme ise,

$$\sigma_z = E\epsilon_z = E \frac{\partial u_z}{\partial z} = E \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} (D - \omega_s) \quad (2.10)$$

şeklinde hesaplanabilir.

Bu durumda, üç klasik mesnet türü için aşağıdaki sınır şartları yazılabilir:

1. Basit mesnet: Burulma dönmesinin engellendiği, ancak çarpılmanın serbest olduğu bir durum söz konusudur. Çarpılma engellenmediğinden, normal gerilme oluşmaz.

() $\equiv d/dz$ olmak üzere, sınır şartları

$$\phi = 0; \quad \sigma_z = 0 \Rightarrow \phi'' = 0 \quad (2.11)$$

olarak yazılabilir

2. Ankastre mesnet: Hem burulma hem de çarpılma için engelleme söz konusudur.

$$\text{Sınır şartları: } \varphi = 0 ; \quad u_z = 0 \Rightarrow \quad \varphi' = 0 \quad (2.12)$$

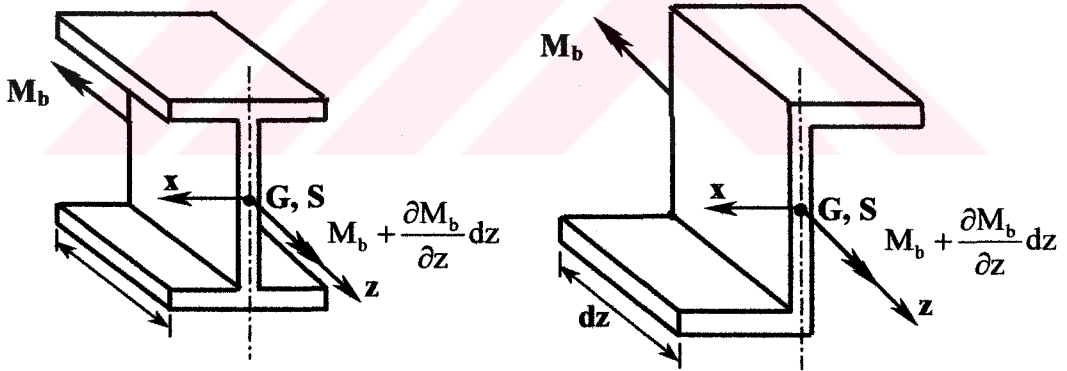
3. Serbest uç: Burulma ve çarpılma serbesttir. Böyle bir uçta, burulma momenti ve normal gerilme sıfırdır.

$$\begin{aligned} \text{Sınır şartları: } M_b = 0 &\Rightarrow GI_b \varphi' - EI_w \varphi''' = 0 \\ \sigma_z = 0 &\Rightarrow \varphi'' = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

2-2. Burulma Titreşiminin Hareket Denklemi

2-2.1. Çarpılmalı Burulma Titreşimi

I ve Z kesitlerinde ağırlık merkezi (G) ile kayma merkezi (S) üst üste düştüğünden, burulma titreşimi eğilme titreşimlerine bağlı olmayacaktır.



Şekil 2-2.1 Saf Burulma Etkisindeki Çubuklar

Şekilde görülen dz uzunluklu parçalar için dinamik denge denklemi yazılırsa, önce

$$\left(M_b + \frac{\partial M_b}{\partial z} dz \right) - M_b = \rho I_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dz \quad (2.14)$$

ifadesi, buradan da

$$\frac{\partial M_b}{\partial z} = \rho I_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (2.15)$$

bulunur. Burada M_b burulma momentini, ρ özgül kütleyi, I_p z-eksenine göre polar atalet momentini, φ burulma açısını, t ise zamanı göstermektedir. M_b burulma momenti, üniform olmayan çarpılda

$$M_b = GI_b \frac{\partial \varphi}{\partial z} - EI_w \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^3} \quad (2.16)$$

olarak ifade edilebilmektedir. Burada E elastisite modülünü, GI_b Saint Venant teorisindeki burulma rijitliğini göstermektedir. I_w ise, Euler – Bernoulli teorisinde burulmanın flanşlarda meydana getirdiği eğilmeden ve buna bağlı ek kayma gerilmelerinden hesaplanabileceği gibi, Vlasov teorisinde "asal sektöriyel atalet momenti" olarak da hesaplanabilen kesite bağlı bir büyüklüktür. (2.16) ifadesi (2.15) 'de yerleştirilerek, burulma titreşimlerinin diferansiyel denklemi böylece,

$$GI_b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - EI_w \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} = \rho I_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (2.17)$$

olarak bulunur. ω açısal frekanslı harmonik titreşim durumunda, (2.17) ifadesinde

$\varphi = \phi(z) \sin \omega t$ yerleştirilirse,

$$EI_w \frac{d^4 \phi}{dz^4} - GI_b \frac{d^2 \phi}{dz^2} - \rho I_p \omega^2 \phi = 0 \quad (2.18)$$

Çözüm için $\phi = Ce^{rz}$ konulursa, karakteristik denklem,

$$EI_w r^4 - GI_b r^2 - \rho I_p \omega^2 = 0 \quad (2.19)$$

olur. $r^2 = s$ denilerek bu denklem de

$$EI_w s^2 - GI_b s - \rho I_p \omega^2 = 0 \quad (2.20)$$

şekline girer. İkinci dereceden bu denklem çözülürse,

$$s_{1,2} = (GI_b \pm K) / 2EI_w \quad (2.21)$$

bulunur. Burada

$$K = \sqrt{(GI_b)^2 + 4(EI_w)(\rho I_p \omega^2)} \quad (2.22)$$

alınmıştır.

Böylece,

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{(GI_b + K) / 2EI_w} = \pm \alpha \quad (2.23)$$

$$r_{3,4} = \pm i \sqrt{(K - GI_b) / 2EI_w} = \pm i\beta \quad (2.24)$$

elde edilir.

Genel çözüm ise bu durumda

$$\phi(z) = C_1 \cosh \alpha z + C_2 \sinh \alpha z + C_3 \cos \beta z + C_4 \sin \beta z \quad (2.25)$$

olacaktır.

Sınır Şartları:

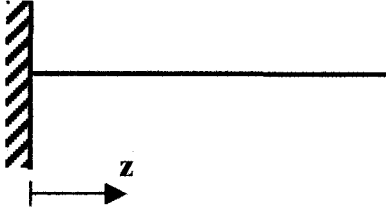
$$\text{Ankastre uç: } \phi = 0 \quad ; \quad \phi' = 0 \quad (2.26)$$

$$\text{Serbest uç : } \phi'' = 0 \quad ; \quad GI_b \frac{d\phi}{dz} - EI_w \frac{d^3\phi}{dz^3} = 0 \quad (2.27)$$

$$\text{Basit mesnetli uç: } \phi = 0 \quad ; \quad \phi'' = 0 \quad (2.28)$$

Bir çubuk için dört sınır şartı ve çözümde dört belirsiz sabit bulunduğundan, bu sınır şartlarının (2.25)' e uygulanmasıyla, bir lineer denklem sistemi elde olunur. Sistem homojen olduğundan, katsayılar determinantı sıfıra eşitlenerek ω doğal frekansları bulunur.

Konsol Kiriş:



Sınır Şartları:

$$\phi(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_3 = 0 \Rightarrow C_3 = -C_1 \quad (2.29)$$

$$\phi'(0) = 0 \Rightarrow \alpha C_2 + \beta C_4 = 0 \Rightarrow C_4 = -\frac{\alpha}{\beta} C_2 \quad (2.30)$$

$$\phi''(\ell) = 0 \Rightarrow \alpha^2 (C_1 \cosh \alpha \ell + C_2 \sinh \alpha \ell) + \beta^2 (-C_3 \cos \beta \ell - C_4 \sin \beta \ell) = 0 \quad (2.31)$$

Bu ifadede C_3 ve C_4 yerine yukarıdaki değerleri konulursa

$$C_1 [(\alpha \ell)^2 \cosh \alpha \ell + (\beta \ell)^2 \cos \beta \ell] + C_2 [(\alpha \ell)^2 \sinh \alpha \ell + (\alpha \ell)(\beta \ell) \sin \beta \ell] = 0 \quad (2.32)$$

bulunur. Ayrıca,

$$GI_b \phi'(\ell) - EI_w \phi''(\ell) = 0 \quad (2.33)$$

sınır şartı gözönüne alınarak

$$\begin{aligned} & GI_b [\alpha (C_1 \sinh \alpha \ell + C_2 \cosh \alpha \ell) + \beta (-C_3 \sin \beta \ell + C_4 \cos \beta \ell)] - \\ & EI_w [\alpha^3 (C_1 \sinh \alpha \ell + C_2 \cosh \alpha \ell) - EI_w [\alpha^3 (C_1 \sinh \alpha \ell + C_2 \cosh \alpha \ell) + \\ & \beta^3 (C_3 \sin \beta \ell - C_4 \cos \beta \ell)] = 0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

yazılabilir. Yine C_3 ve C_4 'ün değerleri yerlerine konularak

$$\begin{aligned} & C_1 [\alpha GI_w \sinh \alpha \ell + \beta GI_w \sin \beta \ell - \alpha^3 EI_w \sinh \alpha \ell + \beta^3 EI_w \sin \beta \ell] + \\ & C_2 [\alpha GI_w \cosh \alpha \ell - \alpha GI_w \cos \beta \ell - \alpha^3 EI_w \cosh \alpha \ell - \alpha \beta^2 EI_w \cos \beta \ell] = 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

elde edilir.

$(\alpha\ell)^2 - (\beta\ell)^2 = \ell^2 \frac{GI_b}{EI_w}$ olduğundan (α ve β tanımlarına bakınız)

yukarıdaki ifadenin her iki yanını ℓ^2 / EI_w ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} C_1[\alpha\ell^2 \frac{GI_b}{EI_w} \sinh \alpha\ell + \beta\ell^2 \frac{GI_b}{EI_w} \sin \beta\ell - \alpha^3 \ell^2 \sinh \alpha\ell + \beta^3 \ell^2 \sin \beta\ell] + \\ C_2[\alpha\ell^2 \frac{GI_w}{EI_w} \cosh \alpha\ell - \alpha\ell^2 \frac{GI_w}{EI_w} \cos \beta\ell - \alpha^3 \ell^2 \cosh \alpha\ell - \alpha\beta^2 \ell^2 \cos \beta\ell] = 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} C_1\{\alpha[(\alpha\ell)^2 - (\beta\ell)^2] \sinh \alpha\ell + \beta[(\alpha\ell)^2 - (\beta\ell)^2] \sin \beta\ell \\ - \alpha^3 \ell^2 \sinh \alpha\ell + \beta^3 \ell^2 \sin \beta\ell\} + \\ C_2\{\alpha[(\alpha\ell)^2 - (\beta\ell)^2] \cosh \alpha\ell - \alpha[(\alpha\ell)^2 - (\beta\ell)^2] \cos \beta\ell \\ - \alpha^3 \ell^2 \cosh \alpha\ell - \alpha\beta^2 \ell^2 \cos \beta\ell\} = 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

ve ifadenin düzenlenmesiyle,

$$C_1[(\beta\ell)^2 \sinh \alpha\ell - (\alpha\ell)(\beta\ell) \sin \beta\ell] + C_2[(\beta\ell)^2 \cosh \alpha\ell + (\alpha\ell)^2 \cos \beta\ell] = 0 \quad (2.38)$$

bulunur.

(2.33) ve (2.39) ifadelerinde C_1 ve C_2 'nin sıfırdan farklı olabilmesi için

$$\begin{vmatrix} (\alpha\ell)^2 \cosh \alpha\ell + (\beta\ell)^2 \cos \beta\ell & (\alpha\ell)^2 \sinh \alpha\ell + (\alpha\ell)(\beta\ell) \sin \beta\ell \\ (\beta\ell)^2 \sinh \alpha\ell - (\alpha\ell)(\beta\ell) \sin \beta\ell & (\beta\ell)^2 \cosh \alpha\ell + (\alpha\ell)^2 \cos \beta\ell \end{vmatrix} = 0 \quad (2.39)$$

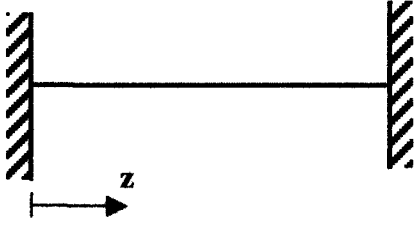
olmalıdır.

Bu determinant açılırsa,

$$\frac{(\alpha\ell)^4 + (\beta\ell)^4}{(\alpha\ell)^2 (\beta\ell)^2} \cosh \alpha\ell \cos \beta\ell + \frac{(\alpha\ell)^2 - (\beta\ell)^2}{(\alpha\ell)(\beta\ell)} \sinh \alpha\ell \sin \beta\ell + 2 = 0 \quad (2.40)$$

elde edilir.

Ankastre Kiriş:



Sınır Şartları:

$$\phi(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_3 = 0 \Rightarrow C_3 = -C_1 \quad (2.41)$$

$$\phi'(0) = 0 \Rightarrow \alpha C_2 + \beta C_4 = 0 \Rightarrow C_4 = -\frac{\alpha}{\beta} C_2 \quad (2.42)$$

$$\phi(l) = 0 \Rightarrow C_1 \cosh \alpha l + C_2 \sinh \alpha l + C_3 \cos \beta l + C_4 \sin \beta l = 0 \quad (2.43)$$

$$\phi'(l) = 0 \Rightarrow \alpha(C_1 \sinh \alpha l + C_2 \cosh \alpha l) + \beta(-C_3 \sin \beta l + C_4 \cos \beta l) = 0 \quad (2.44)$$

C_3 ve C_4 yukarıdaki iki bağıntıda yerleştirilirse:

$$C_1 \beta (\cosh \alpha l - \cos \beta l) + C_2 (\beta \sinh \alpha l - \alpha \sin \beta l) = 0 \quad (2.45)$$

$$C_1 (\alpha \sinh \alpha l + \beta \sin \beta l) + C_2 \alpha (\cosh \alpha l - \cos \beta l) = 0 \quad (2.46)$$

C_1 ve C_2 'nin sıfırdan farklı olabilmeleri için

$$\begin{vmatrix} \beta (\cosh \alpha l - \cos \beta l) & \beta \sinh \alpha l - \alpha \sin \beta l \\ \alpha \sinh \alpha l + \beta \sin \beta l & \alpha (\cosh \alpha l - \cos \beta l) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.47)$$

olmalıdır.

Bu determinant açılırsa:

$$2(\alpha l)(\beta l)[1 - \cosh \alpha l \cdot \cos \beta l] + [(\alpha l)^2 - (\beta l)^2] \sinh \alpha l \cdot \sin \beta l = 0 \quad (2.48)$$

2-2.2. Çarpılmasız Burulma Titreşimi

Çarpılma ihmal edilirse, burulma titreşimlerini ifade eden denklem,

(2.18)' de $EI_w=0$ yapılarak,

$$GI_b \frac{d^2\phi}{dz^2} + \rho I_p \omega^2 \phi = 0 \quad (2.49)$$

şeklinde bulunur. Çözüm için $\phi = Ce^{\alpha z}$ konulursa,

$$GI_b r^2 + \rho I_p \omega^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm \omega i \sqrt{\rho I_p / GI_b} \quad (2.50)$$

elde edilir.

Böylece,

$$\phi(z) = C_1 e^{\eta z} + C_2 e^{\eta^* z} \quad (2.51)$$

veya

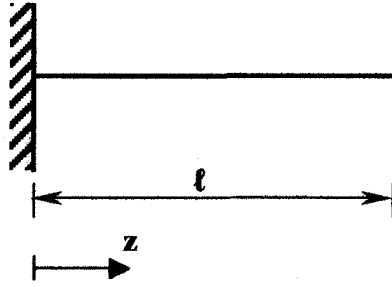
$$\phi(z) = A \cos(\omega \sqrt{\rho I_p / GI_b} .z) + B \sin(\omega \sqrt{\rho I_p / GI_b} .z) \quad (2.52)$$

bulunur. Bu denklem (2.25) denklemi ile karşılaştırıldığında, çarpılmayı ifade eden α ve β terimlerini içermediğinden, sınır şartlarının uygulanması yönünden daha basittir. Ancak bu durumda, ankastre mesnet ile basit mesneti ayırmak mümkün olmaz, çünkü yazılabilecek tek sınır şartı dönme açısının sıfır oluşudur. Oysa, çarpılma gözönüne alındığında ankastre mesnette çarpılma yerdeğiştirmesi sıfır iken basit mesnette sıfır olmayacaktır.

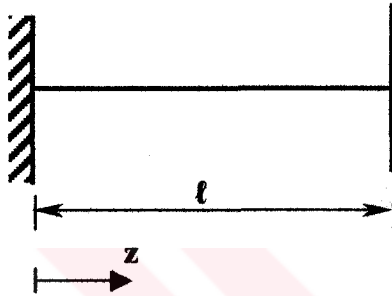
Sınır Şartları:

- | | | |
|-------------------------|---|-------------|
| 1) Basit mesnetli uç | : | $\phi = 0$ |
| 2) Ankastre mesnetli uç | : | $\phi = 0$ |
| 3) Serbest uç | : | $\phi' = 0$ |

Ankastre – Serbest (Konsol) Kiriş:


$$\phi(0) = \phi'(l) = 0 \Rightarrow \omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l} \sqrt{\frac{GI_b}{\rho I_p}} \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (2.53)$$

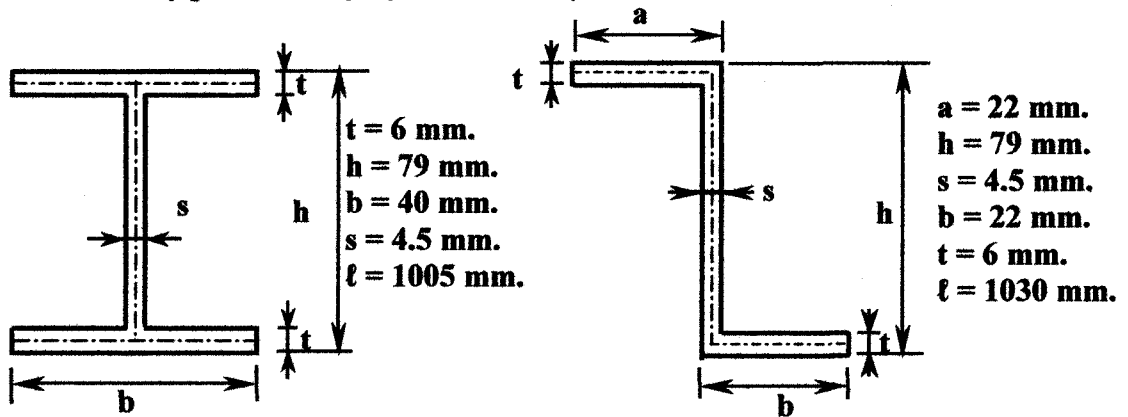
Ankastre - Ankastre Kiriş:


$$\phi(0) = \phi(l) = 0 \Rightarrow \omega_n = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{GI_b}{\rho I_p}}; \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (2.54)$$

2-2.3. Örnekler

İnce cidarlı açık kesitli çubukların saf burulma titreşimi yapabilmeleri için kayma merkezleri ile geometrik merkezlerinin çakışması gerekir. Pratikte, bu şartı sağlayan iki kesit simetrik I ve Z kesitleridir.

Bu kesitlerin burulma titreşimi incelenirken üniform olmayan çarpılmanın önemini vurgulayabilmek amacı ile $\lambda = \frac{\sqrt{I_w / I_b}}{l}$ boyutsuz büyüklüğü parametre seçilmiştir. Çarpılmaya karşı bir çeşit “narinliği” ifade eden bu değer, literatürde mevcut olmayıp ilk olarak çalışmamızda ortaya atılmaktadır.



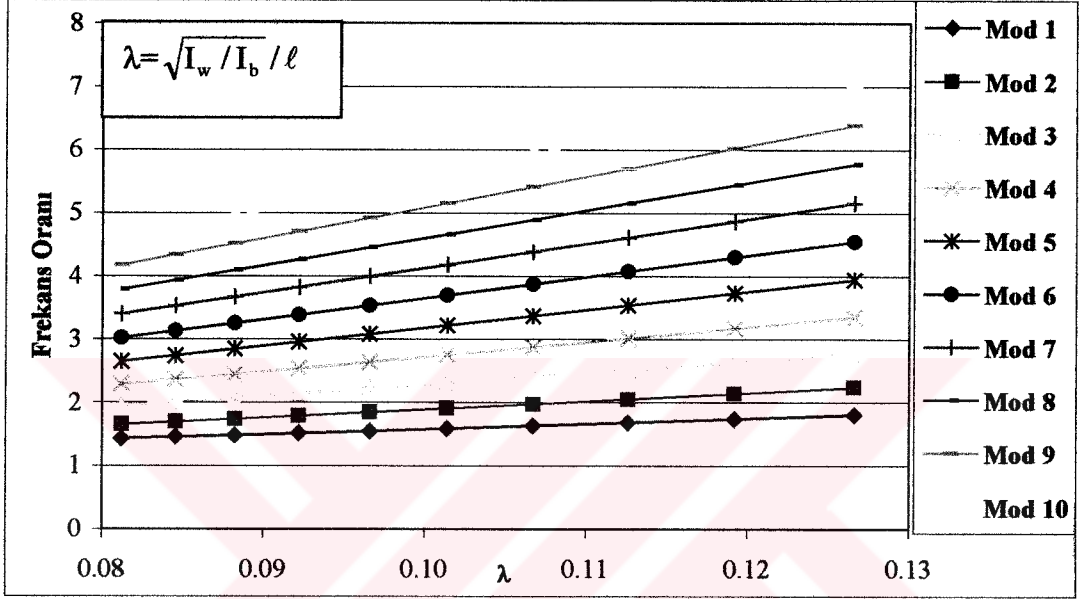
Şekil 2-2.2 Burulma Titreşimi Analizinde Kullanılan Kesitler

Örnek 1: Simetrik I Profilli Çubuklarda Burulma Titreşimi

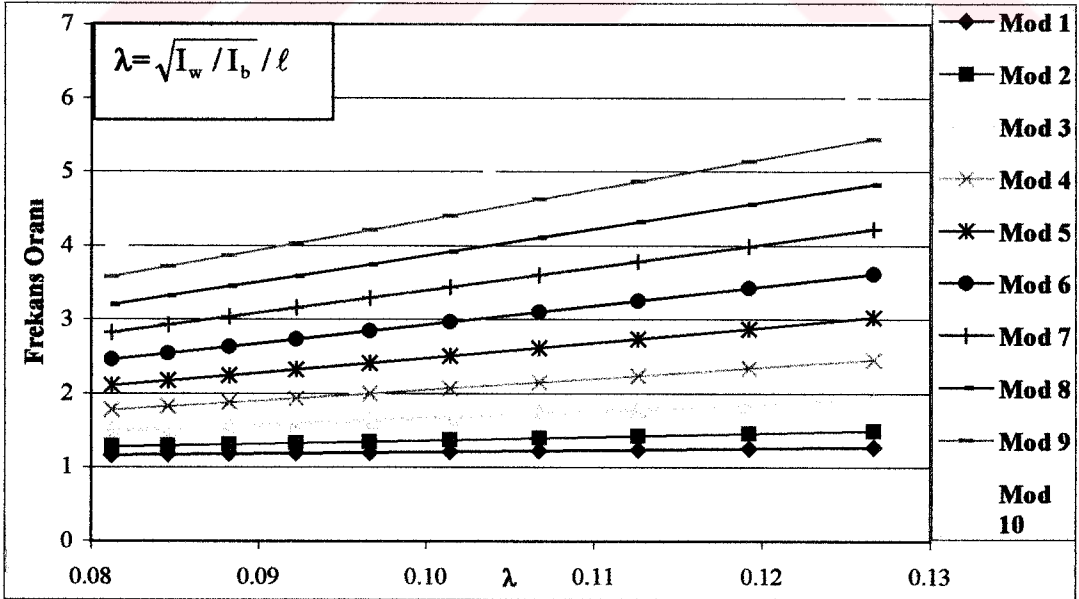
Bu örnekte saf burulma titreşimi yapan simetrik I kesitli çubuğun doğal frekansları ankastre-serbest ve ankastre-ankastre sınır şartlarında elde edilmiştir. Çarpılmanın hesaba katılmasının önemi, λ boyutsuz katsayısına göre çeşitli modlar

için irdelenmiştir. (Frekans Oranı = $\frac{f_w}{f_0}$)

f_w : Çarpılmalı burulma tabii frekansı
 f_0 : Çarpılmasız burulma tabii frekansı



Şekil 2-2.3 Simetrik I Kesit, Ankastre Ankastre Halde Frekans Oranı



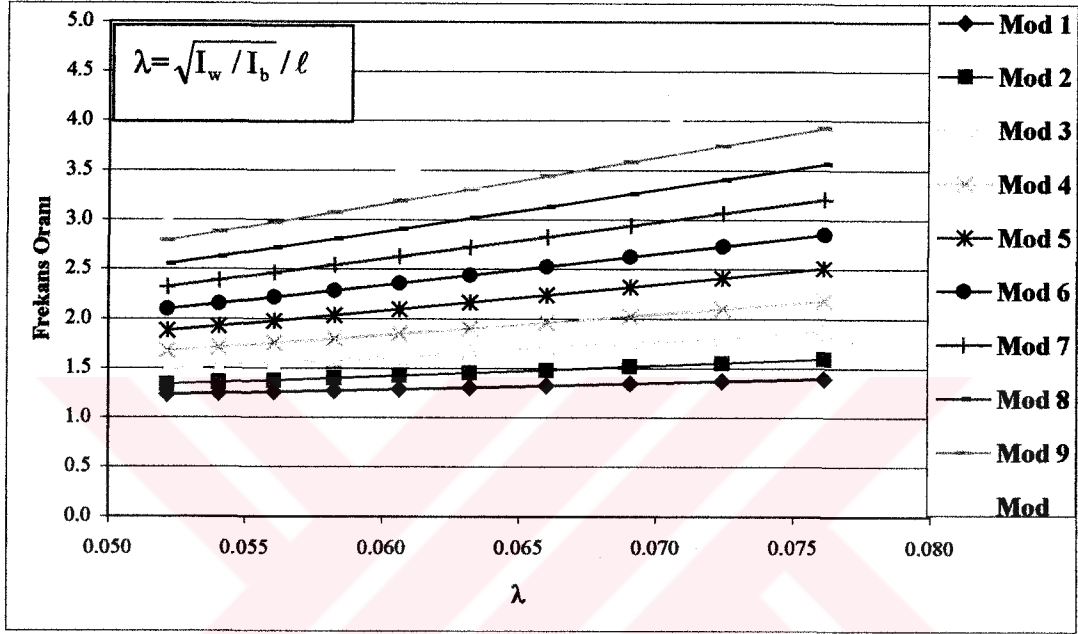
Şekil 2-2.4 Simetrik I Kesit, Ankastre Serbest Halde Frekans Oranı

Örnek 2: Z Profilli Çubuklarda Burulma Titreşimi

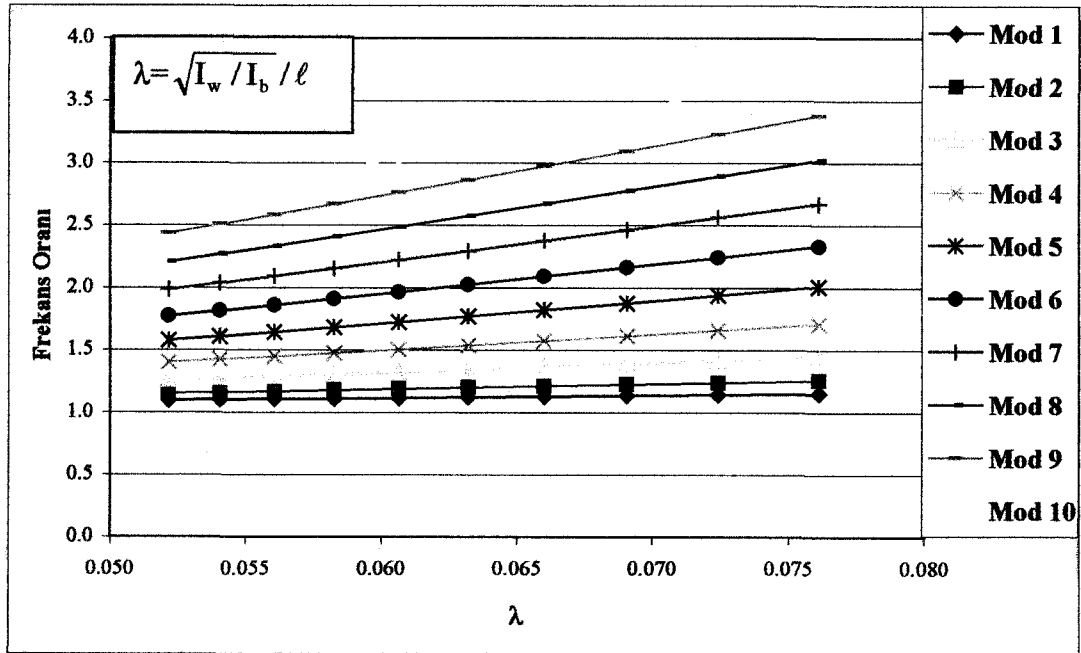
Bu örnekte saf burulma titreşimi yapan eşit flanş uzunluklu Z kesitli çubuğun doğal frekansları ankastre-serbest ve ankastre-ankastre sınır şartlarında elde edilmiştir. Çarpılmanın önemi λ boyutsuz katsayısına bağlı olarak çeşitli modlar için

irdelenmiştir. (Frekans Oranı = $\frac{f_w}{f_o}$)

f_w : Çarpılmalı burulma tabii frekansı
 f_o : Çarpılmasız burulma tabii frekansı



Şekil 2-2.5 Eşit Flanşlı Z Kesit, Ankastre Ankastre Halde Frekans Oranı



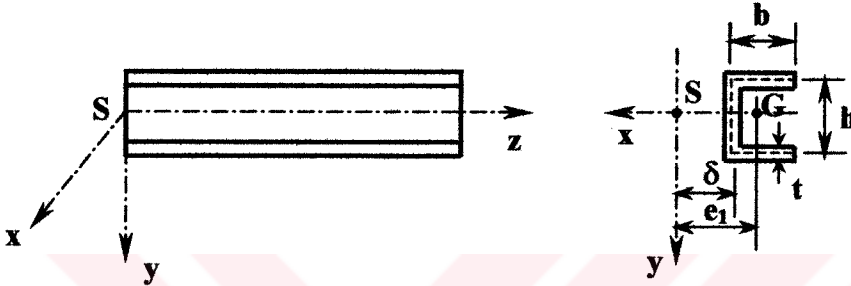
Şekil 2-2.6 Eşit Flanşlı Z Kesit, Ankastre Serbest Halde Frekans Oranı

Her iki örnekte de, çarpılmayı Saint-Venant teorisine göre hesaba katmakla, I_w asal sektöriyel atalet momentini kullanarak ele almak arasında çok ciddi farklar görülmektedir. Bu durum, λ ve modal indeksin büyümesi ile daha da kötüleşmektedir.



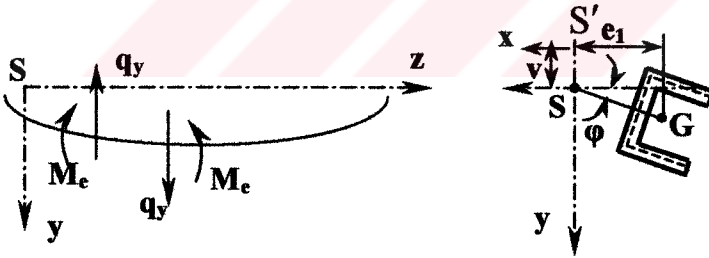
3- İKİLİ BAĞLAŞIK EĞİLME – BURULMA TİTREŞİMİ

Bir çubuk için, eğer simetri düzleminde kalmayan eğilme titreşimleri söz konusu ise, eğilme titreşimleri ile burulma titreşimleri birbirinden ayıramaz hale gelir. Böyle titreşimlere bağlaşıklık titreşim adı verilebilir.



Şekil 3.1 Kesidi Bir Simetri Eksenine Sahip Kiriş

Tek simetri eksenini bulanan örnekteki U profilinde, simetri düzlemine dik Syz düzlemindeki statik yayılı yük altında çubuğun eğilmesi, sadece yayılı yükün kayma merkezinden geçmesi halinde burulma olmadan gerçekleşebilir.



Şekil 3.2 İkili Bağlaşıklık Eğilme/Burulma Titreşimi

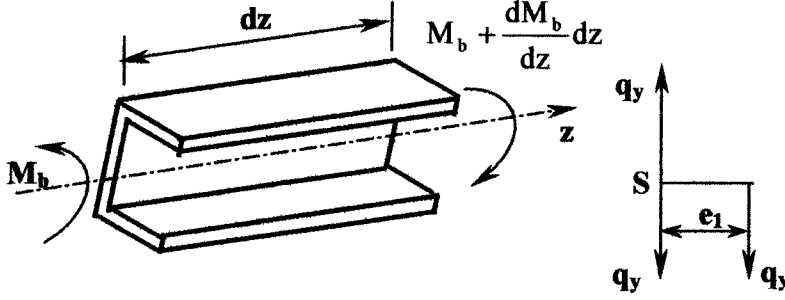
Kayma merkezinden geçen ve çubuk eksenine paralel uzanan eksenin (Sz eksenini) çubuk eksenine olan dik uzaklığı

$$\delta = \frac{b^2 h^2 t}{4 I_x} \quad (3.1)$$

olarak verilmektedir. Burada b flansların uzunluğunu, h flaş orta eksenleri arası mesafeyi, t de flaş kalınlıklarını göstermektedir. Yayılı yük altında elastik eğrinin diferansiyel denklemi, q_y yayılı yükü göstermek üzere

$$EI_x \frac{d^4 v}{dz^4} = q_y \quad (3.2)$$

şeklinde; EI_x kirişin eğilme rijitliğidir. Yayılı yükün kayma merkezinden geçen eksen yerine ağırlık merkezinden geçen eksen boyunca etkimesi halinde, q_y yüküne ek olarak $q_y \cdot e_1$ değerinde bir yayılı burulma momenti oluşturacağı açıktır. (Bkz. Şekil 3-3) Burulma momenti ifadesi



Şekil 3.3 Yüklerin Kayma Merkezine İndirgenmesi

$$M_b = GI_b \frac{d\phi}{dz} - EI_w \frac{d^3 \phi}{dz^3} \quad (3.3)$$

olarak bilinmektedir. Burada GI_b burulma rijitliği, EI_w çarpılma rijitliğidir. Türev alınırsa, m_b yayılı burulma momenti bulunabilir:

$$-m_b = \frac{dM_b}{dz}$$

$$-q_y e_1 = GI_b \frac{d^2 \phi}{dz^2} - EI_w \frac{d^4 \phi}{dz^4} \quad (3.4)$$

Titreşim halinde, D'Alembert prensibi gereğince, statik yükler yerine, atalet kuvvetlerini düşünmemiz gerekir. Bu kuvvetler:

$$\text{Ötelenme için: } -A\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (v + e_1 \phi) \quad (3.5)$$

$$\text{Dönme için: } -I_p \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (3.6)$$

şeklindedir.

Burada $A\rho$ birim uzunluğun kütlesi, I_p ise dik kesitin ağırlık merkezine göre kutupsal atalet momentidir.

Denklemlerde statik yükler yerine bu atalet kuvvetleri konursa:

$$\begin{aligned} EI_x \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} &= -A\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (v + e_1 \varphi) \\ GI_b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - EI_w \frac{\partial^4 \varphi}{\partial z^4} &= A\rho e_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (v + e_1 \varphi) + I_p \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3.7)$$

elde edilir. Doğal frekans ile titreşim yaptığı düşünülen bir çubukta

$v = V \sin \omega t$; $\varphi = \Phi \sin \omega t$ olarak önerilirse

$$\begin{aligned} EI_x V^{iv} &= \rho A \omega^2 (V + e_1 \Phi) \\ EI_w \Phi^{iv} - GI_b \Phi'' &= \rho A \omega^2 e_1 (V + e_1 \Phi) + \rho I_p \omega^2 \Phi \end{aligned} \quad (3.8)$$

Her iki denklemi kullanarak V ve Φ nin çözülmesi gerekir. Bir örnek olarak basit mesnetli bir çubuk için, her iki uçta ($z=0$ ve $z=\ell$):

$$v = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.9)$$

şartları sağlanmalıdır.

Bu sınır şartlarını $V = V_0 \sin \frac{i\pi z}{\ell}$; $\Phi = \Phi_0 \sin \frac{i\pi z}{\ell}$ fonksiyonları sağlar ($i=1,2,3,\dots$).

Bu ifadeler (3.8) de yerleştirilirse aşağıdaki kısaltmalar ile:

$$\begin{aligned} \lambda_b^2 &= \frac{EI_x i^4 \pi^4}{\rho A \ell^4} ; \lambda_t^2 = \frac{(GI_b i^2 \pi^2 \ell^2 + EI_w i^4 \pi^4)}{\rho \ell^4 (I_p + A e_1^2)} ; \lambda = \frac{A e_1}{I_p + A e_1^2} \\ (\lambda_b^2 - \omega^2) V_0 - \omega^2 e_1 \Phi_0 &= 0 \\ -\lambda \omega^2 V_0 + (\lambda_t^2 - \omega^2) \Phi_0 &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

elde edilir. Bu ifadeler bize V_0 ve Φ_0 için sıfırdan farklı (triviyal olmayan) çözümler için gerekli karakteristik denklemi ve doğal frekansları verir.

$$(\lambda_b^2 - \omega^2)(\lambda_t^2 - \omega^2) - \lambda \omega^4 e_1 = 0$$

$$\omega^2 = \frac{(\lambda_t^2 + \lambda_b^2) \pm \sqrt{(\lambda_t^2 - \lambda_b^2)^2 + 4\lambda e_1 \lambda_b^2 \lambda_t^2}}{2(1 - \lambda e_1)} \quad (3.11)$$

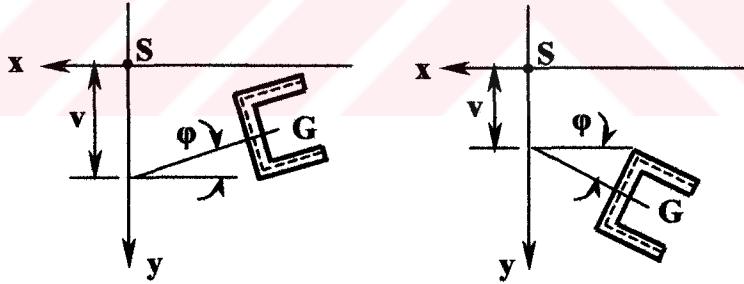
Bu ifadeden, özel olarak $e_1=0$ olması (kayma merkezi ve kesit geometrik merkezinin çakışması) halinde elde edilen frekans ifadesi:

$$\omega^2 = \frac{(\lambda_t^2 + \lambda_b^2)}{2} \pm \frac{(\lambda_t^2 - \lambda_b^2)}{2} \quad (3.12)$$

veya basitleştirilerek

$$\omega_1^2 = \lambda_t^2 ; \omega_2^2 = \lambda_b^2 \quad (3.13)$$

olarak elde edilir. Dikkat edilirse, bu ifadeler, bağışık olmayan titreşim halindeki eğilme ve burulma frekanslarını veren ifadelerden denktir.



Şekil 3.4 İkili Bağlaşık Titreşimde Yer Değiştirme Durumları

Bağışık titreşimde ise ($e_1 \neq 0$) (3.11) den görüleceği gibi birisi (3.13) deki değerlerden küçük, diğeri büyük olmak üzere iki doğal frekans elde edilmektedir. Küçük frekansta V_0 ve Φ_0 değerleri aynı işarette, büyük frekansta ise ters işaretlidir.(Şekil 3.4).

Diğer sınır şartlarında (3.8) denklemlerinin çözümü zor olsa da, Rayleigh – Ritz yöntemi ile yaklaşık sonuçlar bulunabilir.

4- İNCE CİDARLI AÇIK ASİMETRİK KESİTLİ KİRİŞLERDE ÜÇLÜ BAĞLAŞIK EĞİLME – EĞİLME – BURULMA TİTREŞİMLERİ

4-1. Çarpılma Etkisinin Gözönüne Alınması Halinde Titreşim

4-1.1. Hipotezler:

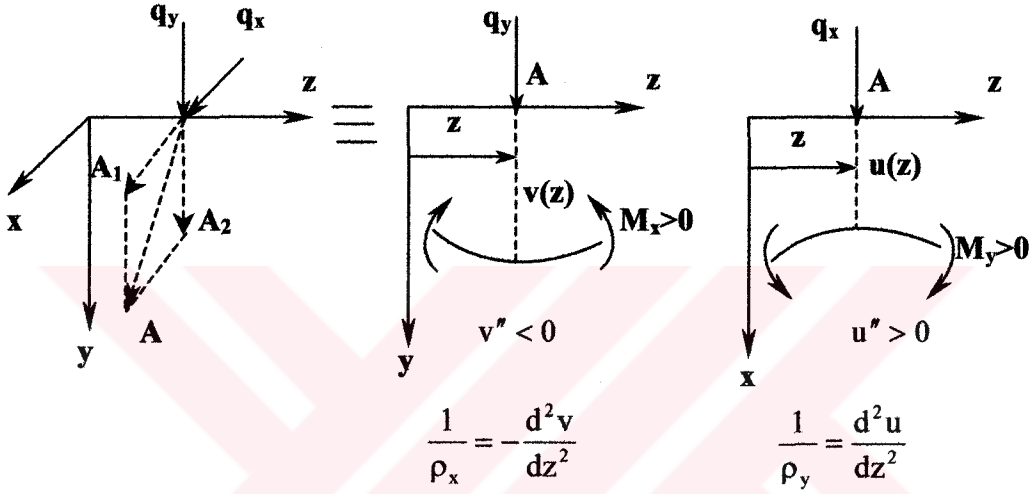
1. Kiriş, ince cidarlı açık bir tüp olarak ele alınabilir.
2. Kesit, kiriş eksenini boyunca üniformdur.
3. Kesit, şekil değişimine uğramaz.
4. Yer değiştirme bileşenleri, kesit boyutlarının yanında küçüktür.
5. Kayma merkezi, kesitin geometrik özelliklerine bağlıdır; kiriş boyunca değişmez.
6. Dönme atalet momenti ile kesme etkileri ihmal edilebilir.
7. Malzeme homojen ve izotropdur; Hooke kanununa uyar.

4-1.2. Semboller

- A : Dik kesit alanı
- t : Zaman
- I_p : Ağırlık merkezine göre polar atalet momenti.
- q_x, q_y : Yayılı kuvvetler (Kayma merkezinden geçen eksenler boyunca)
- m_z : Yayılı burulma momenti (Kayma merkezinden geçen z eksenini etrafında)
- I_0 : Kayma merkezine göre polar atalet momenti
- G : Ağırlık merkezi
- S : Kayma merkezi
- ξ, η : Asal eksenler ($I_{\xi\eta}=0$)

- z : Kayma merkezinden geçen kiriş eksenini doğrultusundaki koordinat
 e_1, e_2 : Ağırlık merkezinin koordinatları (x- y takımında)
 u, v : Ağırlık merkezinin x ve y doğrultularındaki yer değiştirme miktarları
 φ : Kesitin S etrafındaki dönme açısı
 ρ : Kiriş malzemesinin özgül kütlesi

4-1.3. İki Eksenli Eğilmede Elastik Eğri



Şekil 4-1.1 Elastik Eğride Genel Durum

Asimetrik kesitli kirişlerin elastik eğrisinin genelde “uzaysal” bir eğri olduğu bilinmektedir. Bu durumda, herhangi bir noktadaki yerdeğiştirme miktarını, $u(z)$ ve $v(z)$ bileşenleri ile bulmak uygun olur.

Kirişe etkiyen yayılı yük bileşenleri, q_x ve q_y olsun. Elastik eğrinin yz ve xz düzlemleri üzerindeki izdüşüm eğrileri Şekil 4-1.1 de şematik olarak gösterilmiştir. Şimdi problem, $u(z)$ ve $v(z)$ fonksiyonlarını belirleyebilmek için, bunlarla q_x ve q_y yükleri arasındaki bağıntıları bulabilmektir.

ρ_x ve ρ_y , izdüşüm eğrilerinin eğrilik yarıçapları olsun.

q_y ' nin etkimesi durumunda :

$$\frac{1}{\rho_x} = \frac{\epsilon_z}{y} = \frac{\sigma_z}{E \cdot y} = \frac{M_x I_y + M_y I_{xy}}{E(I_x I_y - I_{xy}^2)} \quad (x = 0) \quad (4.1)$$

$$-\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{M_x I_y + M_y I_{xy}}{E(I_x I_y - I_{xy}^2)} \quad (4.2)$$

q_x 'in etkimesi durumunda :

$$\frac{1}{\rho_y} = -\frac{\epsilon_z}{x} = -\frac{\sigma_z}{E.x} = \frac{M_y I_x + M_x I_{xy}}{E(I_x I_y - I_{xy}^2)} \quad (y = 0) \quad (4.3)$$

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{M_y I_x + M_x I_{xy}}{E(I_x I_y - I_{xy}^2)} \quad (4.4)$$

(4.2) ve (4.4) de z' ye göre ikişer kere türev alınırsa,

$$\frac{d^2 M_x}{dz^2} = -q_y \quad \text{ve} \quad \frac{d^2 M_y}{dz^2} = q_x \quad \text{olduğuna dikkat edilerek,}$$

$$\frac{d^4 u}{dz^4} = \frac{q_x I_x - q_y I_{xy}}{E(I_x I_y - I_{xy}^2)}; \quad \frac{d^4 v}{dz^4} = \frac{q_y I_y - q_x I_{xy}}{E(I_x I_y - I_{xy}^2)} \quad (4.5)$$

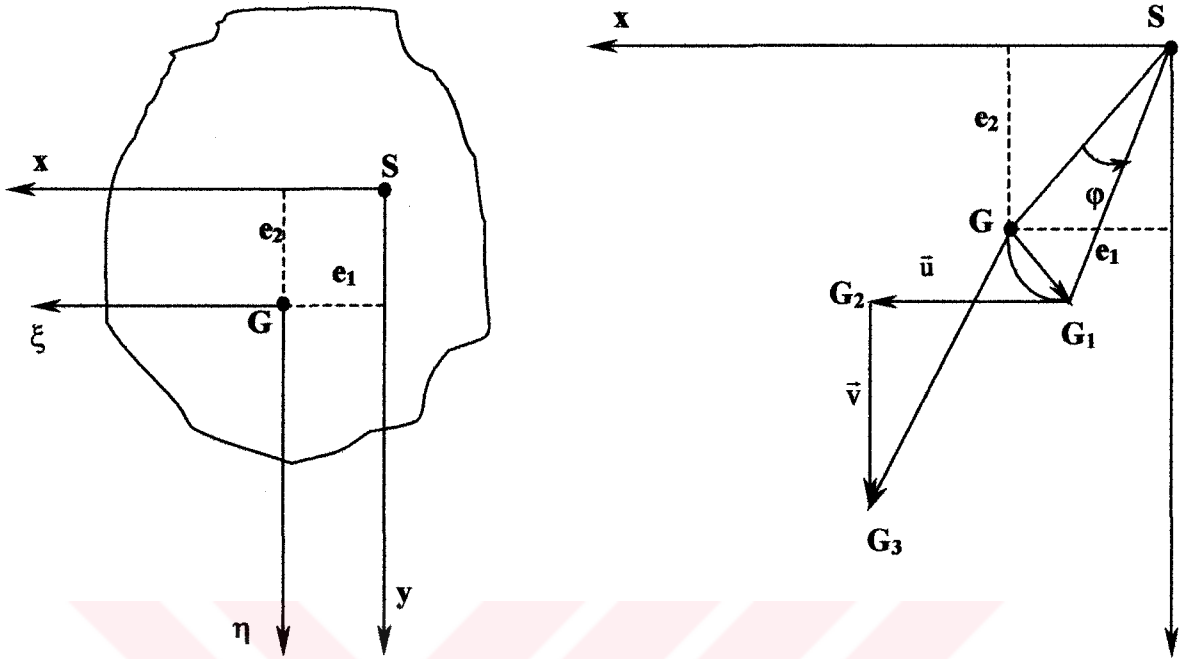
bulunur.

Eğer x, y takımı kesit için asal ise, $I_{xy}=0$ olacağından, yukarıdaki denklemler, birbirinden “bağımsız” iki denkleme ayrılır:

$$\frac{d^4 u}{dz^4} = \frac{q_x}{EI_y}; \quad \text{ve} \quad \frac{d^4 v}{dz^4} = \frac{q_y}{EI_x} \quad (4.6)$$

Bu durumda, iki ayrı düz eğilme söz konusu demektir. Yani, q_x kuvvetleri yalnız xz ve q_y kuvvetleri de yalnız yz düzleminde eğilme yapar [26].

4-1.4. Yer değiştirme vektörü:



şekil 4-1.2 Üçlü Bağlaşık Titreşimde Yerdeğiştirme Bileşenleri

Dik kesitin ağırlık merkezinin (G) x ve y eksenleri doğrultusunda sırası ile u ve v kadar ötelendiği ve kesidin kayma merkezi (S) etrafında ϕ açısı kadar döndüğü düşünölsün. (şekil 4-1.2) Bu durumda yerdeğiştirme vektörü:

$$\overrightarrow{GG_3} = \overrightarrow{GG_1} + \vec{u} + \vec{v}$$

$$\overrightarrow{GG_3} = (\phi \vec{k}) \wedge (e_1 \vec{i} + e_2 \vec{j}) + \vec{u} + \vec{v}$$

$$\overrightarrow{GG_3} = (u - \phi e_2) \vec{i} + (v + \phi e_1) \vec{j}$$

olacaktır.

4-1.5. Statik yükler :

Kirişe q_x , q_y yayılı yükleri ile m_z yayılı burulma momentinin etkidiği düşünölsün. (4.6) ve (2.16) denklemlerinden yola çıkılarak

$$EI_{\xi} \frac{d^4 v}{dz^4} = q_y \quad (4.7)$$

$$EI_{\eta} \frac{d^4 u}{dz^4} = q_x \quad (4.8)$$

$$\frac{dM_b}{dz} = -m_z \Rightarrow GI_b \frac{d^2 \phi}{dz^2} - EI_w \frac{d^4 \phi}{dz^4} = -m_z \quad (4.9)$$

yazılabilir.

4-1.6. Atalet Kuvvetleri ve Atalet Kuvvet Çiftleri

Asal doğrultulardaki öteleme hareketleri için birim boya gelen atalet kuvvetleri F_{ξ} ve F_{η} olsun. Bu durumda, yerdeğiştirme vektörünün bileşenleri göz önüne alınarak

$$F_{\xi} = -\rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u - \phi e_2) \quad (4.10)$$

$$F_{\eta} = -\rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} (v + \phi e_1) \quad (4.11)$$

yazılabilir. Dönme hareketinde sözkonusu olan atalet kuvveti çifti ise birim boy için

$$-\rho I_p \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (4.12)$$

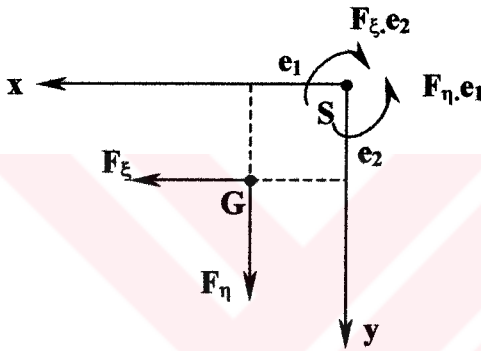
şeklindedir.

4-1.7. Hareketin Diferansiyel Denklemleri

D'Alembert prensibi gereğince, (4.7), (4.8) ve (4.9) denklemlerinde statik yükler yerine atalet yükleri konulabilir. Ancak (4.9) da m_z yerine (4.12) ifadesi konurken, bunun yanında F_ξ ve F_η 'nin kayma merkezine (S) göre momentleri de eklenmelidir. Bu momentler,

$$-\rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} (v + e_1 \phi) e_1 + \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u - e_2 \phi) e_2 \quad (4.13)$$

şeklinde ifade edilebilir. (Şekil 4-1.3).



Şekil 4-1.3 Atalet Kuvvetlerinin Kayma Merkezine İndirgenmesi

Hareket Denklemleri:

$$EI_\xi \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} = -\rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} (v + \phi e_1) \quad (4.14)$$

$$EI_\eta \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = -\rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u - \phi e_2) \quad (4.15)$$

$$GI_b \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - EI_w \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^4} = \rho I_p \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} (v + \phi e_1) e_1 - \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u - \phi e_2) e_2 \quad (4.16)$$

Yukarıda, $I_0 = I_p + A(e_1^2 + e_2^2)$ konularak düzenlenirse;

$$EI_{\xi} \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} (v + \phi e_1) = 0$$

$$EI_{\eta} \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u - \phi e_2) = 0 \quad (4.17)$$

$$EI_{\omega} \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^4} - GI_b \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \rho A e_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \rho A e_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho I_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

bulunur. Sonuncu denklem, $r^2 = I_p / A$ konularak,

$$EI_{\omega} \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^4} - GI_b \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \rho A \frac{\partial^2 [(e_1^2 + e_2^2 + r^2)\phi + e_1 v - e_2 u]}{\partial t^2} = 0 \quad (4.18)$$

şeklinde de yazılabilir.

Harmonik titreşim:

Kirişin ω açısal frekanslı harmonik titreşimi ele alınırsa,

$$u = U(z) \sin \omega t; \quad v = V(z) \sin \omega t; \quad \phi = \Phi(z) \sin \omega t \quad (4.19)$$

yazılabilir. Bu ifadeler (4.17) de yerleştirilirse

$$EI_{\xi} \frac{d^4 V}{dz^4} - \omega^2 \rho A V - \omega^2 \rho A e_1 \Phi = 0$$

$$EI_{\eta} \frac{d^4 U}{dz^4} - \omega^2 \rho A U + \omega^2 \rho A e_2 \Phi = 0 \quad (4.20)$$

$$EI_{\omega} \frac{d^4 \Phi}{dz^4} - GI_b \frac{d^2 \Phi}{dz^2} - \rho A \omega^2 e_1 V + \rho A \omega^2 e_2 U - \rho I_0 \omega^2 \Phi = 0$$

bulunur.

Burada,

$$\lambda_{\xi} = \frac{\omega^2 \rho A \ell^4}{EI_{\xi}}; \quad \lambda_{\eta} = \frac{\omega^2 \rho A \ell^4}{EI_{\eta}}; \quad \lambda_{\omega} = \frac{\omega^2 \rho A \ell^6}{EI_{\omega}}; \quad \alpha = \frac{GI_b \ell^2}{EI_{\omega}}; \quad \beta = \frac{\omega^2 \rho I_0 \ell^4}{EI_{\omega}}$$

kısaltmaları kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{d^4 V}{dz^4} - \lambda_{\xi} V - \lambda_{\xi} e_1 \Phi &= 0 \\ \frac{d^4 U}{dz^4} - \lambda_{\eta} U + \lambda_{\eta} e_2 \Phi &= 0 \\ \ell^2 \left(\frac{d^4 \Phi}{dz^4} - \alpha \frac{d^2 \Phi}{dz^2} - \beta \Phi \right) - \lambda_{\omega} e_1 V + \lambda_{\omega} e_2 U &= 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

elde edilir. Bu diferansiyel denklem takımında genel çözüm için

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_U \\ C_V \\ C_{\Phi} \end{bmatrix} e^{rz} \text{ çözümü aranır. Şu halde,}$$

$$\begin{aligned} (r^4 - \lambda_{\xi}) C_V - \lambda_{\xi} e_1 C_{\Phi} &= 0 \\ (r^4 - \lambda_{\eta}) C_U + \lambda_{\eta} e_2 C_{\Phi} &= 0 \\ \ell^2 (r^4 - \alpha r^2 - \beta) C_{\Phi} - \lambda_{\omega} e_1 C_V + \lambda_{\omega} e_2 C_U &= 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

bulunur. Matris formda yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} 0 & r^4 - \lambda_{\xi} & -\lambda_{\xi} e_1 \\ r^4 - \lambda_{\eta} & 0 & \lambda_{\eta} e_2 \\ \lambda_{\omega} e_2 & -\lambda_{\omega} e_1 & \ell^2 (r^4 - \alpha r^2 - \beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_U \\ C_V \\ C_{\Phi} \end{bmatrix} = [0]$$

elde edilir. Burada C_U , C_V , ve C_{Φ} nin sıfırdan farklı olabilmeleri için,

$$\begin{vmatrix} 0 & r^4 - \lambda_{\xi} & -\lambda_{\xi} e_1 \\ r^4 - \lambda_{\eta} & 0 & \lambda_{\eta} e_2 \\ \lambda_{\omega} e_2 & -\lambda_{\omega} e_1 & \ell^2 (r^4 - \alpha r^2 - \beta) \end{vmatrix} = 0 \quad (4.23)$$

olmalıdır.

Determinant açılırsa:

$$-(r^4 - \lambda_\xi) \left[(r^4 - \lambda_\eta) \ell^2 (r^4 - \alpha r^2 - \beta) - \lambda_\omega e_2 \lambda_\eta e_2^2 \right] - \lambda_\xi e_1 (r^4 - \lambda_\eta) (-\lambda_\omega e_1) = 0 \quad (4.24)$$

ve buradan da

$$\begin{aligned} r^{12} - \alpha r^{10} - (\beta + \lambda_\eta + \lambda_\xi) r^8 + \alpha(\lambda_\xi + \lambda_\eta) r^6 + (\lambda_\eta \beta - \lambda_\omega \lambda_\eta e_2 / \ell^2 + \lambda_\xi \beta + \lambda_\xi \lambda_\eta \\ - \lambda_\xi \lambda_\omega e_1^2 / \ell^2) r^4 - \alpha \lambda_\xi \lambda_\eta r^2 - \lambda_\xi \lambda_\eta \beta + \lambda_\xi \lambda_\eta \lambda_\omega e_1^2 / \ell^2 + \lambda_\xi \lambda_\eta \lambda_\omega e_2^2 / \ell^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

bulunur.

$$\begin{aligned} K &= \beta + \lambda_\eta + \lambda_\xi \\ L &= \alpha(\lambda_\xi + \lambda_\eta) \\ M &= \lambda_\eta \beta - \lambda_\omega \lambda_\eta e_2^2 / \ell^2 + \lambda_\xi \beta + \lambda_\xi \lambda_\eta - \lambda_\xi \lambda_\omega e_1^2 / \ell^2 \\ N &= \alpha \lambda_\xi \lambda_\eta \\ R &= -\lambda_\xi \lambda_\eta \beta + \lambda_\xi \lambda_\eta \lambda_\omega (e_1^2 + e_2^2) / \ell^2 \end{aligned} \quad (4.26)$$

kısaltmaları kullanılır ve $s = r^2$ olarak öngörülürse,

$$s^6 - \alpha s^5 - K s^4 + L s^3 + M s^2 - N s + R = 0 \quad (4.27)$$

elde edilir.

bulunur. Bu polinomun köklerinin bulunması ve çözümün oluşturulması ile ilgili ayrıntılar 6. bölümde verilmiştir.

Sınır şartları:

$$\begin{aligned} 1) \text{ Ankastre uç: } & \begin{aligned} U &= 0 \quad ; \quad V = 0 \quad ; \quad \Phi = 0 \\ U' &= 0 \quad ; \quad V' = 0 \quad ; \quad \Phi' = 0 \end{aligned} \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ Mafsallı uç: } & \begin{aligned} U &= 0 \quad ; \quad V = 0 \quad ; \quad \Phi = 0 \\ U'' &= 0 \quad ; \quad V'' = 0 \quad ; \quad \Phi'' = 0 \end{aligned} \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} 3) \text{ Serbest uç: } & \begin{aligned} U'' &= 0 \quad ; \quad V'' = 0 \quad ; \quad \Phi'' = 0 \\ U''' &= 0 \quad ; \quad V''' = 0 \quad ; \quad \underbrace{GI_b \Phi' - EI_w \Phi'''}_{M_b} = 0 \end{aligned} \end{aligned} \quad (4.30)$$

4-2. Çarpılma Etkisinin İhmal Edilmesi Halinde Titreşim

$$\lambda_{\xi} = \frac{\omega^2 \rho A \ell^4}{EI_{\xi}}; \quad \lambda_{\eta} = \frac{\omega^2 \rho A \ell^4}{EI_{\eta}}; \quad \lambda_a = \frac{\omega^2 \rho A \ell^4}{GI_b}; \quad \lambda_b = \frac{\omega^2 \rho I_0 \ell^4}{GI_b}$$

olmak üzere, yukarıdaki burulma denkleminde I_w içeren terim düşürülerek yapı yeniden düzenlenirse, karakteristik determinant:

$$\begin{vmatrix} 0 & r^4 - \lambda_{\xi} & -\lambda_{\xi} e_1 \\ r^4 - \lambda_{\eta} & 0 & \lambda_{\eta} e_2 \\ -\lambda_a e_2 & \lambda_a e_1 & \ell^2 r^2 + \lambda_b \end{vmatrix} = 0 \quad (4.31)$$

olarak elde edilir. Bu determinant sıfıra eşitlenerek.

$$\begin{aligned} & -r^{10} \ell^2 - r^8 \lambda_b + r^6 \ell^2 (\lambda_{\eta} + \lambda_{\xi}) + r^4 ((-e_2^2 \lambda_a + \lambda_b) \lambda_{\eta} + (-e_1^2 \lambda_a + \lambda_b) \lambda_{\xi}) \\ & + r^2 \ell^2 \lambda_{\eta} \lambda_{\xi} + ((e_1^2 + e_2^2) \lambda_a - \lambda_b) \lambda_{\eta} \lambda_{\xi} \end{aligned} \quad (4.32)$$

ifadesi bulunur.

Sınır şartları:

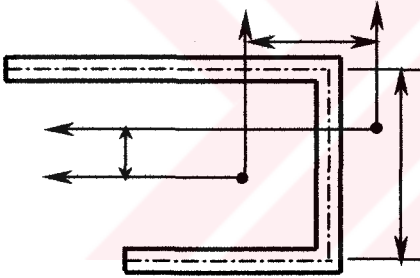
1) Ankastre uç: $U = 0; \quad V = 0; \quad \Phi = 0$
 $U' = 0; \quad V' = 0$

2) Mafsallı uç: $U = 0; \quad V = 0; \quad \Phi = 0$
 $U'' = 0; \quad V'' = 0$ (4.33)

3) Serbest uç: $U'' = 0; \quad V'' = 0; \quad \Phi' = 0$
 $U''' = 0; \quad V''' = 0$

Örnek 1:

Yaman [18] tarafından yapılan ve üçlü bağlaşık titreşim için tek olan ve dalga yayılımı metodu ile yapılmış bulunan çalışmada, basit mesnetli kiriş için doğal frekanslar, yine bu çalışmada verilen kesit özellikleri kullanılarak tekrar hesaplanmış ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.



$$\rho = 2700 \text{ kg/m}^3 \quad I_v = 5.08 \text{E-}9 \text{ m}^4$$

$$E = 7 \text{ E } 10 \text{ N/m}^2 \quad I_\zeta = 2.24 \text{E-}8 \text{ m}^4$$

$$I_w = 7.11 \text{ E -}12 \text{ m}^6 \quad I_{v\zeta} = 4.25 \text{E-}9 \text{ m}^4$$

$$\ell = 1 \text{ m.} \quad c_y = 10.43 \text{E-}3 \text{ m}$$

$$A = 9.68 \text{ E -}5 \text{ m}^2 \quad c_z = 9.09 \text{E-}3 \text{ m}$$

$$h = 38.10 \text{E-}3 \text{ m} \quad I_b = 5.20 \text{E-}11 \text{ m}^4$$

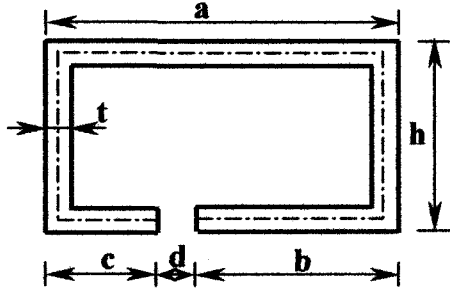
$$I_0 = 4.60 \text{ E-}8 \text{ m}^4 \quad G = 2.6 \text{E}10 \text{ N/m}^2$$

Tablo 4.1 Frekans (Hz) Karşılaştırma Tablosu

Mod	1	2	3	4	5	6	7
[18]	45.49	69.91	101.73	149.82	154.79	207.43	259.89
Bu Çalışma	49.00	83.39	102.36	142.34	154.53	206.70	258.76

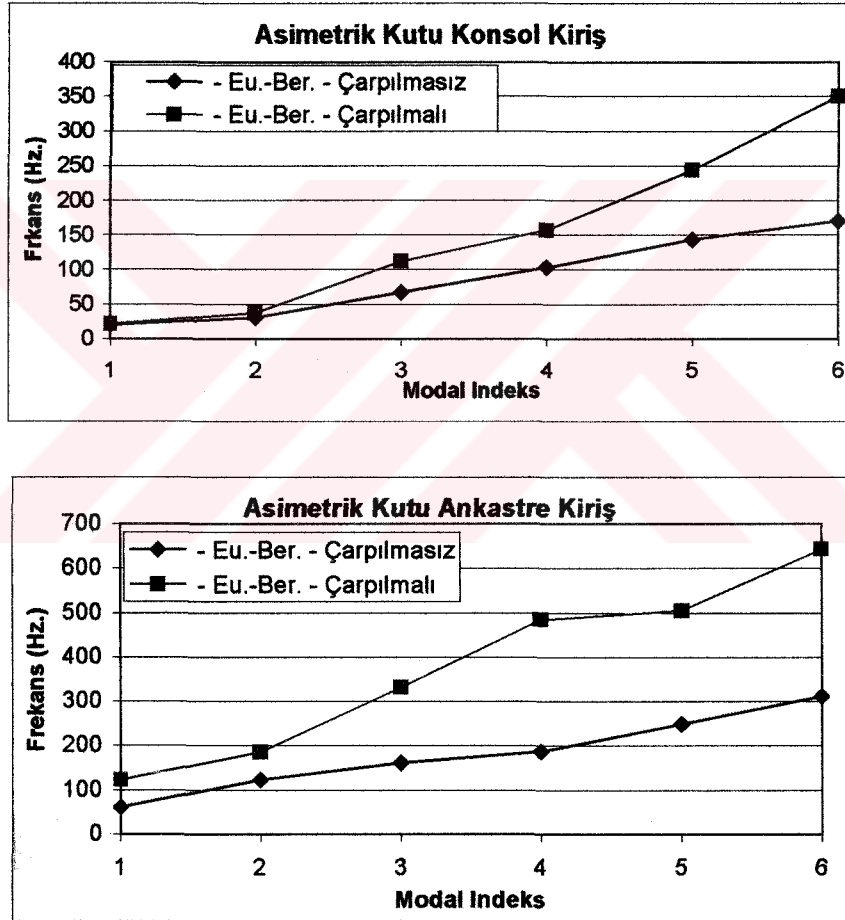
Örnek 2:

$a = 40 \text{ mm.}$
 $h = 20 \text{ mm.}$
 $b = 27.5 \text{ mm.}$
 $c = 9 \text{ mm.}$
 $d = 3.5 \text{ mm.}$
 $t = 2 \text{ mm.}$
 $\ell = 1000 \text{ mm.}$



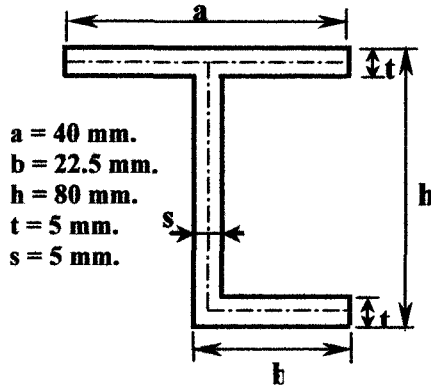
$e_1 \text{ (m)}$	-0.01592
$e_2 \text{ (m)}$	0.017164
k_x	6.1168
k_y	3.9829
$\rho \text{ (kg/m}^3\text{)}$	7860
ν	0.3
$E \text{ (N/m}^2\text{)}$	$2 \text{ E} +11$

Asimetrik Açık Kutu Profilli kirişin üçlü bağlaşık titreşim durumunda doğal frekanslarının durumu aşağıda verilmiştir.



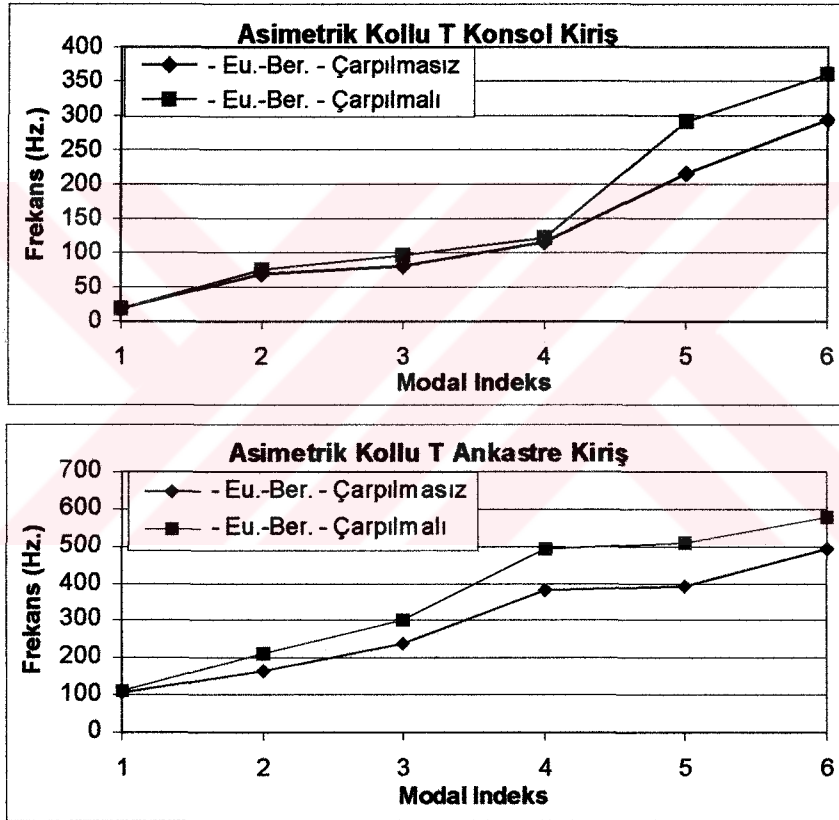
Şekil 4-2.1 Çarpılmanın Doğal Frekanslar Üzerindeki Etkisi

Örnek 3:



$e_1 \text{ (m)}$	-0.004617
$e_2 \text{ (m)}$	0.013999
k_x	3.2072
k_y	1.9373
$\rho \text{ (kg/m}^3\text{)}$	7860
ν	0.3
$E \text{ (N/m}^2\text{)}$	$2 \text{ E} +11$

Asimetrik Kollu T Profilli kirişin üçlü bağlaışık titreşim durumunda doğal frekansların durumu aşağıda verilmiştir..



Şekil 4-2.2 Çarpılmanın Doğal Frekanslar Üzerindeki Etkisi

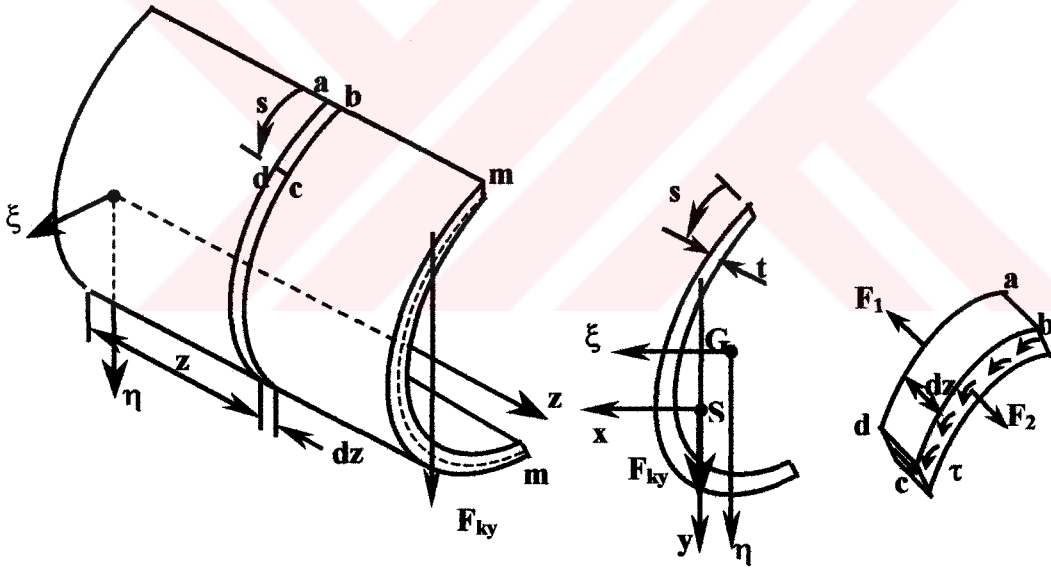
5- ÜÇLÜ BAĞLAŞIK TİTREŞİM ÜZERİNDE DÖNME ATALET MOMENTİ VE KESME KUVVETİNİN ETKİSİ

5-1. İnce Cidarlı Açık Kesitlerde Kayma Gerilmesi Dağılımı

Şekil 6.1 de profil eksenini keyfi, ince cidarlı açık kesitli bir kiriş görülmektedir. Bu kirişe kayma merkezinden geçen bir F_{ky} kuvvetinin uygulandığı düşünülün. ξ - η , ağırlık merkezinden geçen asal eksen takımı olsun ($I_{\xi\eta}=0$). F_{ky} kuvveti S kayma merkezinden geçtiği için, kirişte burulma ortaya çıkmayacaktır. Bu durumda kirişin herhangi bir noktasında eğilmeden meydana gelen normal gerilme

$$\sigma_z = \frac{M_\xi}{I_\xi} \eta \quad (5.1)$$

olacaktır. Şimdi, iki kesit arasından dz genişliğinde bir abcd elemanı çıkarılsın.



Şekil 5-1.1 Açık Kesitli İnce Cidarlı Bir Çubukta Kayma Gerilmeleri

Kesit orta eksen uzunluğu da s ile ölçülsün. Eğilme gerilmelerinin kiriş boyunca değişimi nedeniyle, bu elemanın ad ve bc yüzlerine farklı şiddette F_1 ve F_2 kuvvetleri etkiyecektir. Bu durumda parçanın dengede olabilmesi için cd yüzüne, aradaki farkı kapatacak τ kayma gerilmelerinin etkimesi gerekir. Eleman için, z -ekseni doğrultusunda kuvvet dengesi yazılırsa,

$$\tau t dz = F_1 - F_2 \quad (5.2)$$

buluruz.

Burada t kalınlıktır. Kuvvetler için,

$$F_1 = \int_0^s \sigma_z dA = \frac{M_{\xi 1}}{I_{\xi}} \int_0^s \eta dA$$
$$F_2 = \int_0^s \sigma_z dA = \frac{M_{\xi 2}}{I_{\xi}} \int_0^s \eta dA \quad (5.3)$$

yazılıp (5.3) de yerleştirilirse,

$$\tau = \frac{M_{\xi 2} - M_{\xi 1}}{dz} \frac{1}{I_{\xi} t} \int_0^s \eta dA \quad (5.4)$$

bulunur. Burada $(M_{\xi 2} - M_{\xi 1}) / dz$ değeri eğilme momentinin değişim miktarıdır ve mutlak değerce F_{ky} 'ye eşittir. $\int_0^s \eta dA$ ise, $s=0$ dan $s=s'$ e kadar kesit alanının ξ -eksenine göre statik momentidir. $S_{\xi} = \int_0^s \eta dA$ kısaltması ile, orta eksene teğet olan kayma gerilmesi için

$$\tau = \frac{F_{ky} S_{\xi}}{I_{\xi} t} \quad (5.5)$$

formülü elde edilir. Benzer şekilde, kayma merkezinden geçen F_{kx} kesme kuvvetinin etkimesi durumunda da

$$\tau = \frac{F_{kx} S_{\eta}}{I_{\eta} t} \quad (5.6)$$

yazılabilir. Her iki kuvvetin birlikte etkimesi söz konusu olduğunda, sonuçların süperpoze edilebileceği açıktır.

5-2. Şekil Değiştirmede Form Faktörü

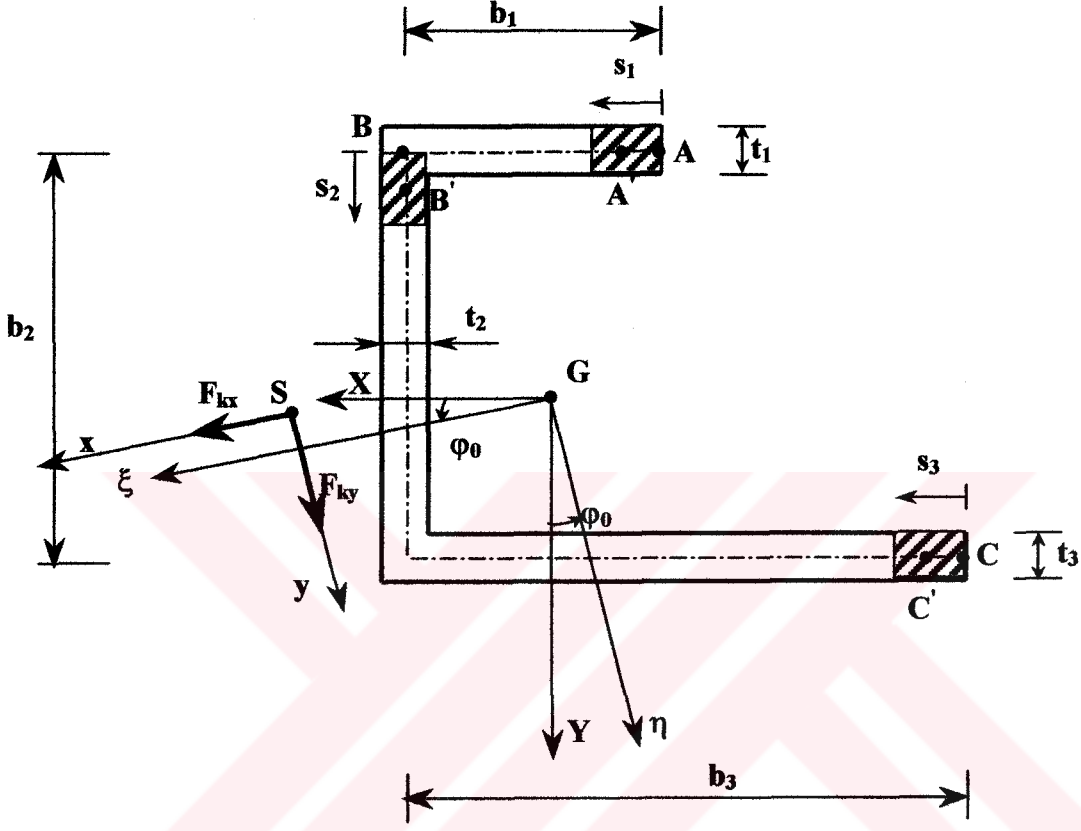
Bilindiği gibi, yukarıda ifadeleri verilen kayma gerilmeleri kesit üzerinde üniform dağılmaz. F_k kuvvetinden ileri gelen kayma açısı $\gamma = k' F_k / G A$ formülü ile hesaplanır. Burada k' , kayma gerilmelerinin kesit üzerinde üniform dağılmadıklarını karakterize eden bir nümerik çarpandır. Bu çarpana "form faktörü" adı verilir ve enerji esasına dayanan bir yol izlenerek

$$k' = \frac{A}{F_k^2} \iint_A \tau^2 dA > 1$$

formülü ile bulunur.[25]

5-3. Form Faktörünün Hesaplanması

Örnek:1



Şekil 5-3.1 Asimetrik U-Kesitinde Form Faktörü

G : Ağırlık merkezi

ξ, η : Asal eksenler ($I_{\xi\eta}=0$)

Koordinat dönüşümü:

$$\xi = X \cos \varphi_0 + Y \sin \varphi_0$$

$$\eta = -X \sin \varphi_0 + Y \cos \varphi_0$$

Atalet momentleri:

$$I_{\xi} = I_X \cos^2 \varphi_0 + I_Y \sin^2 \varphi_0 - 2I_{XY} \sin \varphi_0 \cos \varphi_0$$

$$I_{\eta} = I_X \sin^2 \varphi_0 + I_Y \cos^2 \varphi_0 + 2I_{XY} \sin \varphi_0 \cos \varphi_0$$

F_{ky}' nin etkisi:

$$\tau_{y1} = \frac{F_{ky} S_{\xi 1}}{I_{\xi} t_1} \quad (5.7)$$

$$S_{\xi 1} = t_1 s_1 \eta_{A'} = t_1 s_1 \left[\eta_A + \frac{s_1}{2} \sin \varphi_0 \right] \quad (5.8)$$

$$\tau_{y2} = \frac{F_{ky} S_{\xi 2}}{I_{\xi} t_2} \quad (5.9)$$

$$S_{\xi 2} = t_2 s_2 \eta_{B'} + S_{\xi 1} (b_1) = t_2 s_2 \left[\eta_B - \frac{s_2}{2} \cos \varphi_0 \right] + t_1 b_1 \left[\eta_A + \frac{b_1}{2} \sin \varphi_0 \right] \quad (5.10)$$

$$\tau_{y3} = \frac{F_{ky} S_{\xi 3}}{I_{\xi} t_3} \quad (5.11)$$

$$S_{\xi 3} = t_3 s_3 \eta_{C'} = t_3 s_3 \left[\eta_C - \frac{s_3}{2} \sin \varphi_0 \right]$$

Form Faktörü:

$$k'_y = \frac{A}{F_{ky}^2} \iint_A \tau^2 dA = \frac{A}{F_{ky}^2} \left[\int_0^{b_1} \tau_{y1}^2 t_1 ds_1 + \int_0^{b_2} \tau_{y2}^2 t_2 ds_2 + \int_0^{b_3} \tau_{y3}^2 t_3 ds_3 \right] \quad (5.12)$$

$$k'_y = \frac{A}{I_{\xi}^2} \left[\frac{1}{t_1} \int_0^{b_1} \left[t_1 s_1 \left(\eta_A + \frac{s_1}{2} \sin \varphi_0 \right) \right]^2 ds_1 + \right. \\ \left. \frac{1}{t_2} \int_0^{b_2} \left[t_2 s_2 \left(\eta_B - \frac{s_2}{2} \cos \varphi_0 \right) + t_1 b_1 \left(\eta_A + \frac{b_1}{2} \sin \varphi_0 \right) \right]^2 ds_2 + \right. \\ \left. \frac{1}{t_3} \int_0^{b_3} \left[t_3 s_3 \left(\eta_C - \frac{s_3}{2} \sin \varphi_0 \right) \right]^2 ds_3 \right] \quad (5.13)$$

F_{kx}' in etkisi

$$\tau_{x1} = \frac{F_{kx} S_{\eta 1}}{I_{\eta} t_1} \quad (5.14)$$

$$S_{\eta 1} = t_1 s_1 \xi_{A'} = t_1 s_1 \left[\xi_A - \frac{s_1}{2} \cos \varphi_0 \right] \quad (5.15)$$

$$\tau_{x2} = \frac{F_{kx} S_{\eta 2}}{I_{\eta} t_2} \quad (5.16)$$

$$S_{\eta 2} = t_2 s_2 \xi_{B'} + S_{\eta 1}(b_1) = t_2 s_2 \left[\xi_B + \frac{s_2}{2} \sin \varphi_0 \right] + t_1 b_1 \left[\xi_A - \frac{b_1}{2} \cos \varphi_0 \right] \quad (5.17)$$

$$\tau_{x3} = \frac{F_{kx} S_{\eta 3}}{I_{\eta} t_3} \quad (5.18)$$

$$S_{\eta 3} = t_3 s_3 \xi_{C'} = t_3 s_3 \left[\xi_C - \frac{s_3}{2} \cos \varphi_0 \right] \quad (5.19)$$

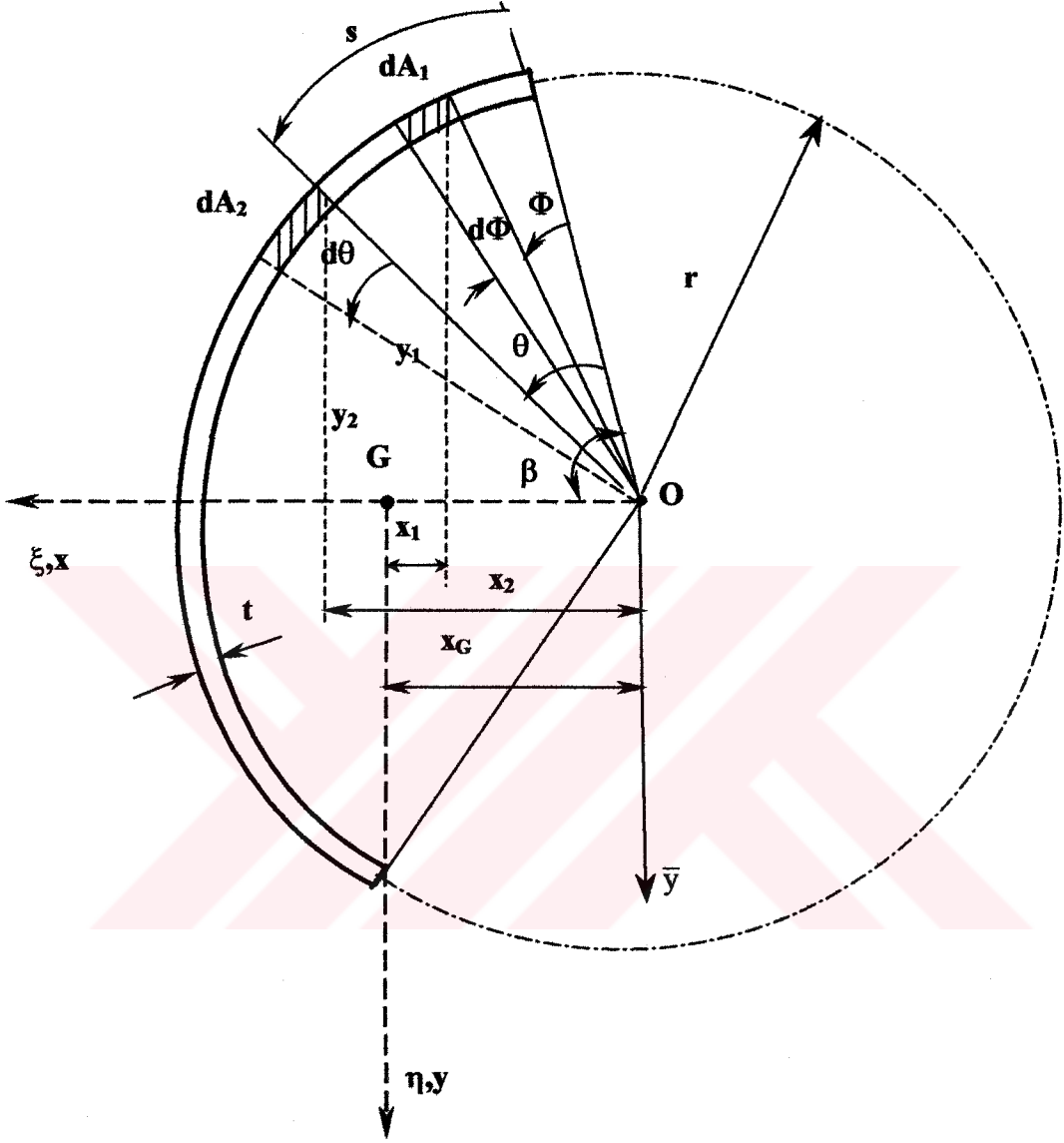
Form Faktörü:

$$k'_x = \frac{A}{F_{kx}^2} \iint_A \tau^2 dA = \frac{A}{F_{kx}^2} \left[\int_0^{b_1} \tau_{x1}^2 t_1 ds_1 + \int_0^{b_2} \tau_{x2}^2 t_2 ds_2 + \int_0^{b_3} \tau_{x3}^2 t_3 ds_3 \right] \quad (5.20)$$

$$k'_x = \frac{A}{I_{\eta}^2} \left[\frac{1}{t_1} \int_0^{b_1} \left[t_1 s_1 \left(\xi_A - \frac{s_1}{2} \cos \varphi_0 \right) \right]^2 ds_1 + \frac{1}{t_2} \int_0^{b_2} \left[t_2 s_2 \left(\xi_B + \frac{s_2}{2} \sin \varphi_0 \right) + t_1 b_1 \left(\xi_A - \frac{b_1}{2} \cos \varphi_0 \right) \right]^2 ds_2 + \frac{1}{t_3} \int_0^{b_3} \left[t_3 s_3 \left(\xi_C - \frac{s_3}{2} \cos \varphi_0 \right) \right]^2 ds_3 \right] \quad (5.21)$$

Örnek 2:

2β açığında ince cidarlı halka parçasında form faktörleri



Şekil 5-3.2 2β Açıklığında Halka Parçası

$$S_x = \int_0^\theta y_1 dA_1, \quad y_1 = r \sin(\beta - \Phi), \quad dA_1 = t r d\Phi$$

$$S_x = \int_0^\theta r \sin(\beta - \Phi) t r d\Phi, \quad S_x = r^2 t \int_0^\theta \sin(\beta - \Phi) d\Phi$$

$$S_x = r^2 t [\cos(\beta - \Phi)]_0^\theta, \quad S_x = r^2 t [\cos(\beta - \theta) - \cos\beta]$$

$$I_x = \int_0^{2\beta} y_2^2 dA_2, \quad y_2 = r \sin(\beta - \theta), \quad dA_2 = tr d\theta$$

$$I_x = \int_0^{2\beta} r^2 \sin^2(\beta - \theta) tr d\theta = r^3 t \int_0^{2\beta} \sin^2(\beta - \theta) d\theta$$

$$I_x = r^3 t \left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin(2\beta - 2\theta) \right]_0^{2\beta} = r^3 t \left(\beta - \frac{1}{2} \sin 2\beta \right)$$

$$A = \int_0^{2\beta} dA_2 = tr \int_0^{2\beta} d\theta = 2tr\beta$$

$$x_G = \frac{\int_0^{2\beta} x_2 dA_2}{A_2} = \frac{\int_0^{2\beta} r \cos(\beta - \theta) tr d\theta}{2tr\beta} = \frac{r}{2\beta} \int_0^{2\beta} \cos(\beta - \theta) d\theta$$

$$x_G = \frac{r}{2\beta} \left[-\sin(\beta - \theta) \right]_0^{2\beta} = \frac{r}{\beta} \sin \beta$$

k'_x hesabı:

$$S_y = \int_0^{\theta} x_1 dA_1$$

$$x_1 = x_G - r \cos(\beta - \Phi) = \frac{r}{\beta} \sin \beta - r \cos(\beta - \Phi)$$

$$S_y = \int_0^{\theta} \left[\frac{r}{\beta} \sin \beta - r \cos(\beta - \Phi) \right] tr d\Phi = tr^2 \left[\frac{\sin \beta}{\beta} \Phi + \sin(\beta - \Phi) \right]_0^{\theta}$$

$$S_y = tr^2 \left[\frac{\sin \beta}{\beta} \theta + \sin(\beta - \theta) - \sin \beta \right]$$

$$\tau = \frac{F_{kx} S_y}{I_y t} = \frac{F_{kx}}{t} \frac{tr^2 \left[\frac{\sin \beta}{\beta} \theta + \sin(\beta - \theta) - \sin \beta \right]}{tr^3 \left(\beta + \frac{1}{2} \sin 2\beta - \frac{2}{\beta} \sin^2 \beta \right)}$$

$$\tau = \frac{F_{kx}}{rt} \frac{\left[\frac{\sin \beta}{\beta} \theta + \sin(\beta - \theta) - \sin \beta \right]}{\left(\beta + \frac{1}{2} \sin 2\beta - \frac{2}{\beta} \sin^2 \beta \right)}$$

$$k'_x = \frac{A}{F_{kx}^2} \iint_A \tau^2 dA_2 = 2\beta \int_0^{2\beta} \frac{\left[\frac{\sin \beta}{\beta} \theta + \sin(\beta - \theta) - \sin \beta \right]^2}{\left(\beta + \frac{1}{2} \sin 2\beta - \frac{2}{\beta} \sin^2 \beta \right)^2} d\theta$$

Özel durumlar:

1) $\beta = \frac{\pi}{2}$ (Yarım çember)

$$k'_x = \pi \int_0^{\pi} \frac{\left(\frac{2\theta}{\pi} + \cos \theta - 1 \right)^2}{\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \right)^2} d\theta = \frac{2}{3} \frac{\pi^2 (5\pi^2 - 48)}{(\pi^2 - 8)^2} = 2.5375$$

2) $\beta = \pi$ (Tam, açık çember)

$$k'_x = 2\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta}{\pi^2} d\theta = 2$$

$$I_y = \int_0^{2\beta} x_2^2 dA_2 = \int_0^{2\beta} r^2 \cos^2(\beta - \theta) t r d\theta = r^3 t \int_0^{2\beta} \cos^2(\beta - \theta) d\theta$$

$$I_y = r^3 t \left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin(2\beta - 2\theta) \right]_0^{2\beta} = r^3 t \left(\beta + \frac{1}{2} \sin 2\beta \right)$$

$$I_y = I_{\bar{y}} - A x_G^2$$

$$I_y = r^3 t \left(\beta + \frac{1}{2} \sin 2\beta \right) - 2t r \beta \frac{r^2}{\beta^2} \sin^2 \beta$$

$$I_y = r^3 t \left(\beta + \frac{1}{2} \sin 2\beta \right) - \frac{2t r^3}{\beta} \sin^2 \beta$$

$$I_y = r^3 t \left(\beta + \frac{1}{2} \sin 2\beta - \frac{2}{\beta} \sin^2 \beta \right)$$

k_y' hesabı:

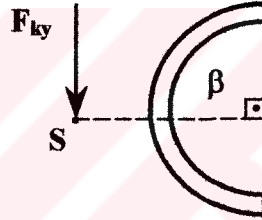
$$\tau = \frac{F_{ky} S_x}{I_x t} = \frac{F_{ky}}{t} \frac{r^2 t [\cos(\beta - \theta) - \cos \beta]}{r^3 t (\beta - \frac{1}{2} \sin 2\beta)} = \frac{F_{ky}}{rt} \frac{\cos(\beta - \theta) - \cos \beta}{\beta - \frac{1}{2} \sin 2\beta} \quad (5.22)$$

$$k_y' = \frac{A}{F_{ky}^2} \iint_A \tau^2 dA_2 = 2\beta \int_0^{2\beta} \frac{[\cos(\beta - \theta) - \cos \beta]^2}{\left(\beta - \frac{1}{2} \sin 2\beta\right)^2} d\theta \quad (5.23)$$

Özel durumlar:

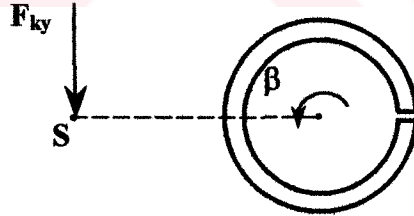
1) $\beta = \frac{\pi}{2}$ (Yarım çember)

$$k_y' = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \theta}{\pi^2 / 4} d\theta = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta = 2$$



2) $\beta = \pi$ (Tam, açık çember)

$$k_y' = 2\pi \int_0^{2\pi} \frac{(-\cos \theta + 1)^2}{\pi^2} d\theta = 6$$

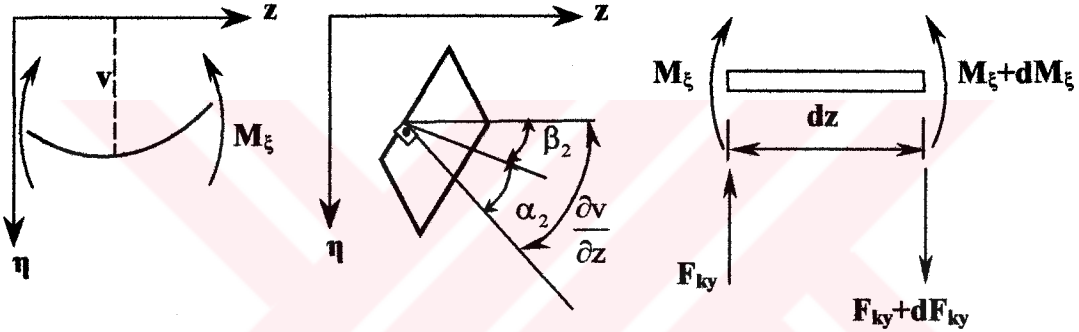


5-4. Hareketin Diferansiyel Denklemleri

5-4.1. Çarpılma Etkisinin Gözönüne Alınması Halinde Titreşim:

Bundan önceki bölümlerde, kesme kuvvetinin elastik eğriye etkisi ihmal edildi. Ayrıca, kiriş elemanının dinamik moment dengesi yazılırken, dönme ataleti göz ardı edildi.

Bu ihmaller, genel olarak sonuçlarda ciddi hatalara yol açmasa da, bazı durumlarda hata büyür. Bu sebeple problemi, sözü edilen etkileri ihmal etmeden çözmek yararlı olacaktır.



Şekil 5-4.1 Genel Elastik Eğri Durumunda Kesme Etkisi

Eğilme titreşimleri, önce η - z düzleminde ele alınsın (Şekil 5-4.1). Kesme kuvvetinin etkisi ile oluşan kayma açısı β_2 , eğilme momentinin etkisi ile oluşan açı α_2 olsun. Elastik eğrinin eğimi, artık

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \beta_2 + \alpha_2$$

olacaktır. dz boyundaki kiriş elemanının dengesi, dönme ataleti de göz önüne alınarak yazılırsa,

$$\sum M = 0 : M_\xi + dM_\xi - M_\xi - F_{ky} dz + \rho I_\xi \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2} dz = 0$$

$$F_{ky} = \frac{\partial M_{\xi}}{\partial z} + \rho I_{\xi} \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2} \quad (5.24)$$

$$\sum F = 0: F_{ky} + dF_{ky} - F_{ky} = \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} (v + \phi e_1) dz$$

$$\frac{\partial F_{ky}}{\partial z} = \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} (v + \phi e_1) \quad (5.25)$$

ifadeleri bulunur.

Kesme kuvveti ile kayma açısı arasında mevcut olan $F_{ky} = \frac{1}{k'_y} GA\beta_2$ bağıntısı

(5.25) de $k_y = \frac{1}{k'_y}$ kısaltması kullanılarak yerleştirilirse.

$$\frac{\partial}{\partial z} (k_y GA\beta_2) = \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} (v + \phi e_1)$$

elde edilir.

$$\beta_2 = \frac{\partial v}{\partial z} - \alpha_2 \text{ olduğundan} \quad (5.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[k_y GA \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \alpha_2 \right) \right] = \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} (v + \phi e_1)$$

bulunur.

$M_{\xi} = -EI_{\xi} \frac{\partial \alpha_2}{\partial z}$ olduğundan, (5.24) de yerleştirilirse,

$$k_y GA\beta_2 = \frac{\partial}{\partial z} \left(-EI_{\xi} \frac{\partial \alpha_2}{\partial z} \right) + \rho I_{\xi} \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2}$$

ve (5.26) kullanılarak

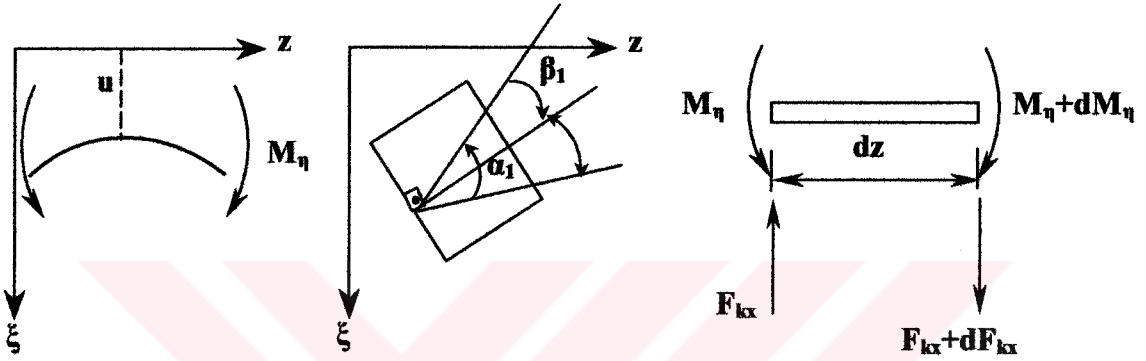
$$k_y GA \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \alpha_2 \right) = -\frac{\partial}{\partial z} \left(EI_{\xi} \frac{\partial \alpha_2}{\partial z} \right) + \rho I_{\xi} \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2} \quad (5.27)$$

bulunur.

Benzer hesaplar, $\xi - z$ düzleminde de yapılabilir. Şekil (5-4.2)'den görülebileceği gibi, elastik eğrinin eğimi bu durumda

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \alpha_1 - \beta_1$$

olarak yazılabilir. Burada β_1 kayma açısını, α_1 ise eğilme momentinin oluşturduğu açıyı göstermektedir.



Şekil 5-4.2 Genel Elastik Eğri Durumunda Kesme Etkisi

dz boyundaki kiriş elemanının dengesi, dönme ataleti de göz önüne alınarak yazılırsa

$$\sum M = 0 : M_{\eta} - (M_{\eta} + dM_{\eta}) - F_{kx} dz = \rho I_{\eta} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} dz$$

$$F_{kx} = -\frac{\partial M_{\eta}}{\partial z} - \rho I_{\eta} \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} \quad (5.28)$$

$$\sum F = 0 : F_{kx} + dF_{kx} - F_{kx} = \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u - \phi e_2) dz$$

$$\frac{dF_{kx}}{dz} = \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u - \phi e_2) \quad (5.29)$$

ifadeleri bulunur. Kesme kuvveti ile kayma açısı arasında mevcut olan

$F_{kx} = \frac{1}{k'_x} GA\beta_1$ bağıntısı, $k_x = \frac{1}{k'_x}$ kısaltması kullanılarak (5.29) de yerleştirilirse

$$\frac{d}{dz}(k_x GA\beta_1) = \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2}(u - \phi e_2)$$

elde edilir.

$$\beta_1 = \alpha_1 - \frac{\partial u}{\partial z} \text{ olduğundan,} \quad (5.30)$$

$$\frac{d}{dz} \left[k_x GA \left(\alpha_1 - \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] = \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2}(u - \phi e_2)$$

bulunur.

$M_\eta = EI_\eta \frac{\partial \alpha_1}{\partial z}$ ifadesi, (5.28)' de yerleştirilirse,

$$F_{kx} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(EI_\eta \frac{\partial \alpha_1}{\partial z} \right) - \rho I_\eta \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2}$$

ve $F_{kx} = k_x GA\beta_1$ kullanılarak

$$k_x GA\beta_1 = -\frac{\partial}{\partial z} \left(EI_\eta \frac{\partial \alpha_1}{\partial z} \right) - \rho I_\eta \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2}$$

ifadesi elde edilir. $\beta_1 = \alpha_1 - \frac{\partial u}{\partial z}$ olduğundan,

$$k_x GA \left(\alpha_1 - \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial}{\partial z} \left(EI_\eta \frac{\partial \alpha_1}{\partial z} \right) - \rho I_\eta \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} \quad (5.31)$$

bulunur.

GA ve EI sabit olsun. (5.26), (5.27), (5.30), (5.31) ve daha önce elde edilen burulma denklemlerinden:

$$\begin{aligned}
& k_x GA \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial z} \right) + \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho A e_2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \\
& EI_\eta \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial z^2} - k_x GA \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \alpha_1 \right) + \rho I_\eta \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} = 0 \\
& k_y GA \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial z} \right) - \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \rho A e_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \\
& EI_\xi \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial z^2} + k_y GA \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \alpha_2 \right) - \rho I_\xi \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2} = 0 \\
& EI_w \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^4} - GI_b \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \rho A e_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \rho A e_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho I_o \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0
\end{aligned} \tag{5.32}$$

bulunur.

Harmonik Titreşim:

$$u=U(z)\sin\omega t ; \quad v=V(z)\sin\omega t ; \quad \phi=\Phi(z)\sin\omega t ; \quad \alpha_i=\theta_i\sin\omega t$$

ifadeleri (5.32) de yerleştirilirse,

$$\begin{aligned}
& k_x GA \frac{d^2 U}{dz^2} - k_x GA \frac{d\theta_1}{dz} - \rho A \omega^2 U + \rho A \omega^2 e_2 \Phi = 0 \\
& EI_\eta \frac{d^2 \theta_1}{dz^2} - k_x GA \frac{dU}{dz} + (k_x GA - \rho I_\eta \omega^2) \theta_1 = 0 \\
& k_y GA \frac{d^2 V}{dz^2} - k_y GA \frac{d\theta_2}{dz} + \rho A \omega^2 V + \rho A e_1 \omega^2 \Phi = 0 \\
& EI_\xi \frac{d^2 \theta_2}{dz^2} + k_y GA \frac{dV}{dz} + (\rho I_\xi \omega^2 - k_y GA) \theta_2 = 0 \\
& EI_w \frac{d^4 \Phi}{dz^4} - GI_b \frac{d^2 \Phi}{dz^2} - \rho A \omega^2 e_1 V + \rho A \omega^2 e_2 U - \rho I_o \omega^2 \Phi = 0
\end{aligned} \tag{5.33}$$

elde edilir.

Kısaltmalar:

$$\lambda_x = \frac{\rho A \omega^2}{k_x GA}; \quad \lambda_y = \frac{\rho A \omega^2}{k_y GA}; \quad \lambda_\omega = \frac{\omega^2 \rho A}{EI_w}; \quad \lambda_b = \frac{GI_b}{EI_w}; \quad \lambda_0 = \frac{\rho I_0 \omega^2}{EI_w}$$

$$\lambda_{I_x} = \frac{\rho I_\xi \omega^2}{k_x GA}; \quad \lambda_{I_y} = \frac{\rho I_\eta \omega^2}{k_y GA}; \quad \lambda_{E_x} = \frac{EI_\xi}{k_y GA}; \quad \lambda_{E_y} = \frac{EI_\eta}{k_x GA}$$

Yukarıda öngörülen kısaltmalar kullanılarak denklem takımının ifadesi basitleştirilir,

ve

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ \Phi \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_U \\ C_V \\ C_\Phi \\ C_{\theta_1} \\ C_{\theta_2} \end{bmatrix} e^{rz}$$

olmak üzere genel çözüm kabulü yapılırsa,

$$\begin{bmatrix} r^2 - \lambda_x & 0 & \lambda_x e_2 & -r & 0 \\ -r & 0 & 0 & (\lambda_{E_y} r^2 + 1 - \lambda_{I_y}) & 0 \\ 0 & r^2 + \lambda_y & \lambda_y e_1 & 0 & -r \\ 0 & r & 0 & 0 & (\lambda_{E_x} r^2 - 1 + \lambda_{I_y}) \\ \lambda_w e_2 & -\lambda_w e_1 & (r^4 - \lambda_b r^2 - \lambda_0) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_U \\ C_V \\ C_\Phi \\ C_{\theta_1} \\ C_{\theta_2} \end{bmatrix} = [0] \quad (5.34)$$

matrisel ifadeleri elde edilir.

$C_U, C_V, C_\Phi, C_{\theta_1}$ ve C_{θ_2} katsayılarının sıfırdan farklı olabilmeleri için

$$\begin{vmatrix} r^2 - \lambda_x & 0 & \lambda_x e_2 & -r & 0 \\ -r & 0 & 0 & (\lambda_{E_y} r^2 + 1 - \lambda_{I_y}) & 0 \\ 0 & r^2 + \lambda_y & \lambda_y e_1 & 0 & -r \\ 0 & r & 0 & 0 & (\lambda_{E_x} r^2 - 1 + \lambda_{I_y}) \\ \lambda_w e_2 & -\lambda_w e_1 & (r^4 - \lambda_b r^2 - \lambda_0) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.35)$$

olmalıdır.

Determinant açılırsa;

$$\begin{aligned}
& -r^{12} \lambda_{Ex} \lambda_{Ey} \\
& + r^{10} (\lambda_b \lambda_{Ex} \lambda_{Ey} - \lambda_{Ey} \lambda_{Ix} + \lambda_{Ex} \lambda_{Iy} + \lambda_{Ex} \lambda_{Ey} \lambda_x - \lambda_{Ex} \lambda_{Ey} \lambda_y) \\
& + r^8 (\lambda_{Ix} \lambda_{Iy} + \lambda_b (\lambda_{Ey} \lambda_{Ix} - \lambda_{Ex} \lambda_{Iy}) + \lambda_{Ex} \lambda_{Ey} \lambda_o + (\lambda_b \lambda_{Ex} \lambda_{Ey} \\
& \quad + \lambda_{Ey} (1 - \lambda_{Ix}) + \lambda_{Ex} \lambda_{Iy}) \lambda_y + \lambda_x (-\lambda_b \lambda_{Ex} \lambda_{Ey} \\
& \quad + \lambda_{Ey} \lambda_{Ix} + \lambda_{Ex} (1 - \lambda_{Iy}) + \lambda_{Ex} \lambda_{Ey} \lambda_y)) \\
& + r^6 (-\lambda_b \lambda_{Ix} \lambda_{Iy} + (\lambda_{Ey} \lambda_{Ix} - \lambda_{Ex} \lambda_{Iy}) \lambda_o + (-\lambda_{Iy} + \lambda_{Ix} \lambda_{Iy} \\
& \quad + \lambda_b (\lambda_{Ey} (-1 + \lambda_{Ix}) - \lambda_{Ex} \lambda_{Iy}) + \lambda_{Ex} \lambda_{Ey} \lambda_o - e_1^2 \lambda_{Ex} \lambda_{Ey} \lambda_w) \lambda_y \\
& \quad + \lambda_x (\lambda_b (-\lambda_{Ey} \lambda_{Ix} + \lambda_{Ex} (-1 + \lambda_{Iy})) + \lambda_{Ix} (1 - \lambda_{Iy}) - \lambda_{Ex} \lambda_{Ey} \lambda_o \\
& \quad + e_2^2 \lambda_{Ex} \lambda_{Ey} \lambda_w + (-\lambda_b \lambda_{Ex} \lambda_{Ey} + \lambda_{Ey} (-1 + \lambda_{Ix}) + \lambda_{Ex} (1 - \lambda_{Iy})) \lambda_y)) \\
& + r^4 (-\lambda_{Ix} \lambda_{Iy} \lambda_o + (\lambda_b (\lambda_{Iy} - \lambda_{Ix} \lambda_{Iy}) + (\lambda_{Ey} (-1 + \lambda_{Ix}) - \lambda_{Ex} \lambda_{Iy}) \lambda_o \\
& \quad + (\lambda_{Ey} (e_1^2 - e_1^2 \lambda_{Ix}) + e_1^2 \lambda_{Ex} \lambda_{Iy}) \lambda_w) \lambda_y + \lambda_x (\lambda_b \lambda_{Ix} (-1 + \lambda_{Iy}) \\
& \quad + (-\lambda_{Ey} \lambda_{Ix} + \lambda_{Ex} (-1 + \lambda_{Iy})) \lambda_o + (e_2^2 \lambda_{Ey} \lambda_{Ix} + \lambda_{Ex} (e_2^2 - e_2^2 \lambda_{Iy})) \lambda_w \\
& \quad + (-1 + \lambda_b (\lambda_{Ey} (1 - \lambda_{Ix}) + \lambda_{Ex} (-1 + \lambda_{Iy})) + \lambda_{Ix} (1 - \lambda_{Iy}) + \lambda_{Iy} \\
& \quad - \lambda_{Ex} \lambda_{Ey} \lambda_o + (e_1^2 + e_2^2) \lambda_{Ex} \lambda_{Ey} \lambda_w) \lambda_y)) \\
& + r^2 (((\lambda_{Iy} - \lambda_{Ix} \lambda_{Iy}) \lambda_o + (-e_1^2 \lambda_{Iy} + e_1^2 \lambda_{Ix} \lambda_{Iy}) \lambda_w) \lambda_y + \lambda_x (\lambda_{Ix} (-1 + \lambda_{Iy}) \lambda_o \\
& \quad + \lambda_{Ix} (e_2^2 - e_2^2 \lambda_{Iy}) \lambda_w + (\lambda_b (1 + \lambda_{Ix} (-1 + \lambda_{Iy}) - \lambda_{Iy}) \\
& \quad + (\lambda_{Ey} (1 - \lambda_{Ix}) + \lambda_{Ex} (-1 + \lambda_{Iy})) \lambda_o + (\lambda_{Ey} (-e_1^2 - e_2^2 + (e_1^2 + e_2^2) \lambda_{Ix}) \\
& \quad + \lambda_{Ex} (e_1^2 + e_2^2 + (-e_1^2 - e_2^2) \lambda_{Iy})) \lambda_w) \lambda_y)) + \\
& ((1 + \lambda_{Ix} (-1 + \lambda_{Iy}) - \lambda_{Iy}) \lambda_o + (-e_1^2 - e_2^2 + (e_1^2 + e_2^2) \lambda_{Iy} \\
& \quad + \lambda_{Ix} (e_1^2 + e_2^2 + (-e_1^2 - e_2^2) \lambda_{Iy})) \lambda_w) \lambda_x \lambda_y = 0
\end{aligned}$$

(5.36)

bulunur. Bu polinomun köklerinin bulunmasına yönelik ayrıntılar 6. Bölümde verilmiştir.

Sınır şartları:

1) Ankastre uç:

a) Her iki doğrultuda yerdeğiştirme bileşeni sıfırdır.

$$U=0 \quad ; \quad V=0$$

b) Burulma açısı sıfırdır.

$$\Phi=0$$

c) Her iki doğrultuda kayma açısı sıfırdır.

$$\theta_1=0 \quad ; \quad \theta_2=0$$

d) Çarpılma yerdeğiştirmesi sıfırdır.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}(D - \omega_s) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi' = 0$$

2) Serbest Uç:

a) Her iki eksen de eğilme momenti sıfırdır.

$$M_\xi = -EI_\xi \frac{\partial \alpha_2}{\partial z} = 0, \quad \alpha_2 = \theta_2 \sin \omega t \text{ olduğundan; } \theta_2' = 0$$

$$M_\eta = EI_\eta \frac{\partial \alpha_1}{\partial z} = 0, \quad \alpha_1 = \theta_1 \sin \omega t \text{ olduğundan; } \theta_1' = 0$$

b) Her iki doğrultuda kesme kuvveti sıfırdır.

$$F_{kx} = -\left(\frac{\partial M_\eta}{\partial z} + \rho I_\eta \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} \right) = 0$$

$$M_\eta = EI_\eta \frac{\partial \alpha_1}{\partial z} = 0 \text{ ve } \alpha_1 = \theta_1 \sin \omega t \text{ yerleştirilirse}$$

$$\rho \omega^2 \theta_1 - E \theta_1'' = 0 \text{ elde edilir.}$$

$$F_{ky} = \frac{\partial M_\xi}{\partial z} + \rho I_\xi \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2} = 0,$$

$$M_\xi = -EI_\xi \frac{\partial \alpha_2}{\partial z} = 0 \text{ ve } \alpha_2 = \theta_2 \sin \omega t \text{ yerleştirilirse}$$

$$\rho \omega^2 \theta_2 + E \theta_2'' = 0 \text{ bulunur.}$$

c) Burulma momenti sıfırdır.

$$M_b = GI_b \Phi' - EI_w \Phi'' = 0$$

d) Çarpılma engellenmediğinden, normal gerilme sıfırdır.

$$\sigma_z = E \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} (D - \omega_s) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi'' = 0$$

5-4.2. Çarpılma Etkisinin İhmal Edilmesi Halinde Titreşim:

Çarpılma etkileri ihmal edilirse, bağlaşıklık titreşim için katsayılar değişikliğe uğramaktadır. Yeni katsayılar aşağıdaki gibidir:

$$\lambda_x = \frac{\rho A \omega^2}{k_x GA}; \quad \lambda_y = \frac{\rho A \omega^2}{k_y GA}; \quad \lambda_{I_x} = \frac{\rho I_x \omega^2}{k_y GA}; \quad \lambda_{I_y} = \frac{\rho I_y \omega^2}{k_x GA}; \quad \lambda_{E_x} = \frac{EI_x}{k_y GA};$$

$$\lambda_{E_y} = \frac{EI_y}{k_x GA}; \quad \mu_b = \frac{GI_b}{\omega^2 \rho A}; \quad \mu_0 = \frac{I_0}{A}$$

Bu kısaltmalarla sistemin karakteristik determinanı aşağıdaki şekle gelir:

$$\begin{vmatrix} r^2 - \lambda_x & 0 & \lambda_x e_2 & -r & 0 \\ -r & 0 & 0 & (\lambda_{E_y} r^2 + 1 - \lambda_{I_y}) & 0 \\ 0 & r^2 + \lambda_y & \lambda_y e_1 & 0 & -r \\ 0 & r & 0 & 0 & (\lambda_{E_x} r^2 - 1 + \lambda_{I_x}) \\ -e_2 & e_1 & (\mu_b r^2 - \mu_0) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.37)$$

Determinantın sıfıra eşitlenip açılması sonucu elde edilen ifade aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} & -r^{10} \lambda_{E_x} \lambda_{E_y} \mu_b \\ & + r^8 (-\lambda_{E_y} \lambda_{I_x} \mu_b + \lambda_{E_x} \lambda_{E_y} \lambda_x \mu_b - \lambda_{E_x} \lambda_{E_y} \lambda_y \mu_b + \lambda_{E_x} (\lambda_{I_y} \mu_b - \lambda_{E_y} \mu_0)) \\ & + r^6 (\lambda_{I_x} \lambda_{I_y} \mu_b + \lambda_y (\lambda_{E_y} (\mu_b - \lambda_{I_x} \mu_b) + \lambda_{E_x} (\lambda_{I_y} \mu_b + \lambda_{E_y} (e_1^2 - \mu_0))) \\ & \quad - \lambda_{E_y} \lambda_{I_x} \mu_0 + \lambda_{E_x} \lambda_{I_y} \mu_0 + \lambda_x (\lambda_{E_y} \lambda_{I_x} \mu_b + \lambda_{E_x} \lambda_{E_y} \lambda_y \mu_b \\ & \quad + \lambda_{E_x} (\mu_b - \lambda_{I_y} \mu_b + \lambda_{E_y} (-e_2^2 + \mu_0)))) \\ & + r^4 (\lambda_{I_x} \lambda_{I_y} \mu_0 + \lambda_y (-\lambda_{I_y} \mu_b + \lambda_{I_x} \lambda_{I_y} \mu_b + \lambda_{E_x} \lambda_{I_y} (-e_1^2 + \mu_0) \\ & \quad + \lambda_{E_y} (-e_1^2 + \lambda_{I_x} (e_1^2 - \mu_0) + \mu_0)) + \lambda_x (\lambda_{I_x} (\mu_b - \lambda_{I_y} \mu_b) \\ & \quad + \lambda_{E_y} \lambda_{I_x} (-e_2^2 + \mu_0) + \lambda_{E_x} (-e_2^2 + \lambda_{I_y} (e_2^2 - \mu_0) + \mu_0) \\ & \quad + \lambda_y (\lambda_{E_y} (-\mu_b + \lambda_{I_x} \mu_b) + \lambda_{E_x} (\mu_b - \lambda_{I_y} \mu_b + \lambda_{E_y} (-e_1^2 - e_2^2 + \mu_0)))) \\ & + r^2 (\lambda_y (\lambda_{I_y} (e_1^2 - \mu_0) + \lambda_{I_x} \lambda_{I_y} (-e_1^2 + \mu_0)) \\ & \quad + \lambda_x (\lambda_{I_x} (-e_2^2 + \lambda_{I_y} (e_2^2 - \mu_0) + \mu_0) + \lambda_y (-\mu_b + \lambda_{I_y} \mu_b + \lambda_{I_x} (\mu_b - \lambda_{I_y} \mu_b) \\ & \quad + \lambda_{E_x} (-e_1^2 - e_2^2 + \lambda_{I_y} (e_1^2 + e_2^2 - \mu_0) + \mu_0) \\ & \quad + \lambda_{E_y} (e_1^2 + e_2^2 - \mu_0 + \lambda_{I_x} (-e_1^2 - e_2^2 + \mu_0)))) \\ & + \lambda_x \lambda_y (e_1^2 + e_2^2 - \mu_0 + \lambda_{I_y} (-e_1^2 - e_2^2 + \mu_0) + \lambda_{I_x} (-e_1^2 - e_2^2 + \lambda_{I_y} (e_1^2 + e_2^2 - \mu_0) + \mu_0)) = 0 \end{aligned}$$

Çözümüne dair ayrıntılar 6. Bölümde verilmiştir.

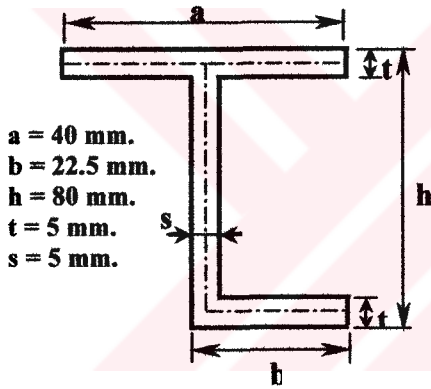
Sınır şartları:

$$\text{Ankastre mesnet: } U = 0 ; \quad V = 0 ; \quad \Phi = 0 ; \quad \theta_1 = 0 ; \quad \theta_2 = 0 \quad (5.38)$$

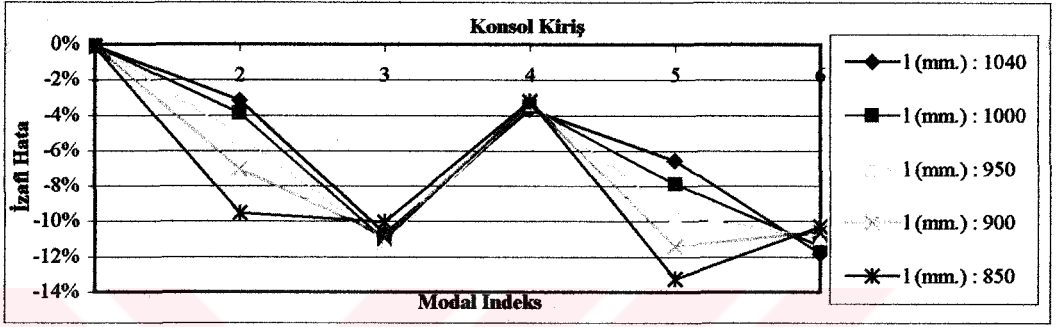
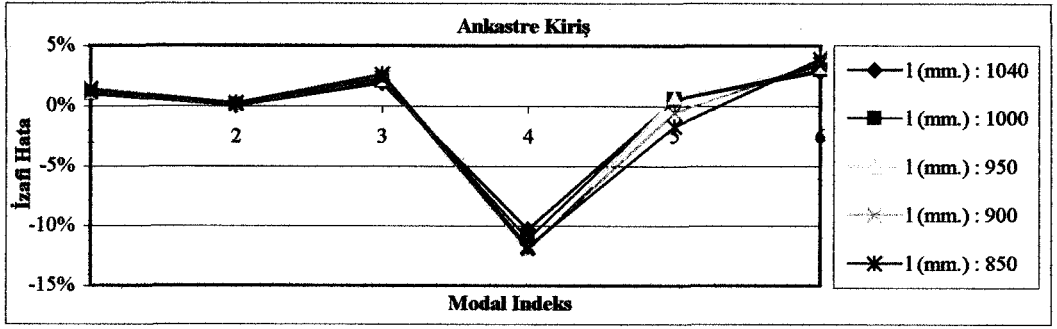
$$\text{Serbest uç : } \theta_1' = 0 ; \quad \theta_2' = 0 ; \quad \rho \omega^2 \theta_1 - E \theta_1'' = 0 ; \quad \Phi' = 0 ; \quad \rho \omega^2 \theta_2 + E \theta_2'' = 0 \quad (5.39)$$

Örnek:

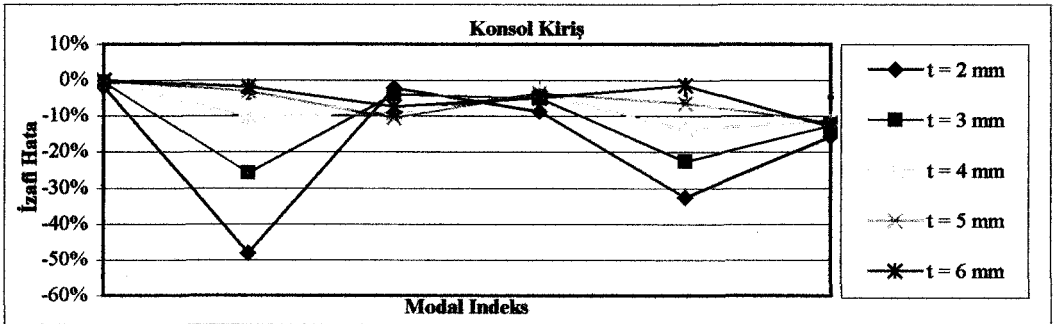
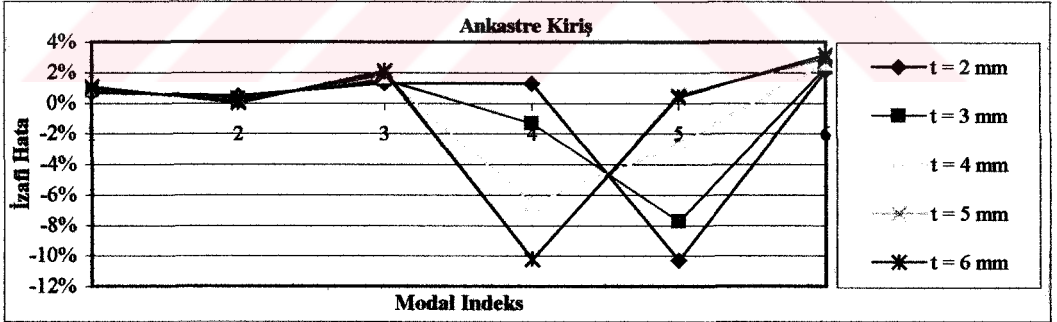
Asimetrik Kollu T Dikkesitli kiriş için, çeşitli sınır şartlarında, Timoshenko (kesme kuvveti ve dönme ataleti) etkilerinin kiriş narinliğine göre değişimi aşağıda incelenmiştir. İzafi hata kabulümüz $\frac{f_{\text{Timoshenko}} - f_{\text{Euler-Bernoulli}}}{f_{\text{Timoshenko}}}$ dur. Durum aşağıda gösterildiği gibidir:



$e_1 \text{ (m)}$	-0.004617
$e_2 \text{ (m)}$	0.013999
k_x	3.2072
k_y	1.9373
$\rho \text{ (kg/m}^3\text{)}$	7860
ν	0.3
$E \text{ (N/m}^2\text{)}$	$2 \text{ E} +11$



Şekil 5-4.3 Kiriş Boyuna Göre İzafi Hatalar



Şekil 5-4.4 Kiriş Kalınlığına Göre İzafi Hatalar

6- NÜMERİK ÇÖZÜM METODU

Asimetrik kesitli ince cidarlı açık kesitli çubuklarda, titreşim problemlerinin üçlü bağlaşıklık bir matematik model ile ifade edilmesi sonucunda, ortaya çözülmesi oldukça karmaşık bir denklem yapısı çıkmaktadır.

Statik yüklerin yerine titreşimden gelen atalet kuvvetlerinin yerleştirilmesi ile Euler-Bernoulli denklemlerinden yola çıkılarak Timoshenko tarafından önerilen denklem takımı, kesme ve dönme ataletlerinin etkisinin hesaba katıldığı, en genel hal olarak adlandırabileceğimiz kiriş modeli için değişkenler ayırması metodu ile zaman ve konuma bağlı kısımları ayırdığı takdirde, aşağıdaki gibi elde edilmektedir:

$$\begin{aligned} k_x GA \frac{d^2 U}{dz^2} - k_x GA \frac{d\theta_1}{dz} - \rho A \omega^2 U + \rho A \omega^2 e_2 \Phi &= 0 \\ EI_\eta \frac{d^2 \theta_1}{dz^2} - k_x GA \frac{dU}{dz} + (k_x GA - \rho I_\eta \omega^2) \theta_1 &= 0 \\ k_y GA \frac{d^2 V}{dz^2} - k_y GA \frac{d\theta_2}{dz} + \rho A \omega^2 V + \rho A e_1 \omega^2 \Phi &= 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$EI_\xi \frac{d^2 \theta_2}{dz^2} + k_y GA \frac{dV}{dz} + (\rho I_\xi \omega^2 - k_y GA) \theta_2 = 0$$

$$EI_w \frac{d^4 \Phi}{dz^4} - GI_b \frac{d^2 \Phi}{dz^2} - \rho A \omega^2 e_1 V + \rho A \omega^2 e_2 U - \rho I_0 \omega^2 \Phi = 0$$

Önerilen kısaltmalar :

$$\lambda_x = \frac{\rho A \omega^2}{k_x GA}; \quad \lambda_y = \frac{\rho A \omega^2}{k_y GA}; \quad \lambda_\omega = \frac{\omega^2 \rho A}{EI_w}; \quad \lambda_b = \frac{GI_b}{EI_w}; \quad \lambda_0 = \frac{\rho I_0 \omega^2}{EI_w}$$

$$\lambda_{I_x} = \frac{\rho I_\xi \omega^2}{k_y GA}; \quad \lambda_{I_y} = \frac{\rho I_\eta \omega^2}{k_x GA}; \quad \lambda_{E_x} = \frac{EI_\xi}{k_y GA}; \quad \lambda_{E_y} = \frac{EI_\eta}{k_x GA}$$

Bu önerilen kısaltmalar denklemlerde yerleştirilir ve lineer diferansiyel denklem takımının çözümü için

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ \Phi \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_U \\ C_V \\ C_\Phi \\ C_{\theta_1} \\ C_{\theta_2} \end{bmatrix} e^{iz}$$

olarak alınırsa, denklem takımının karakteristik determinantının yapısı şöyle olur:

$$\begin{vmatrix} r^2 - \lambda_x & 0 & \lambda_x e_2 & -r & 0 \\ -D & 0 & 0 & (\lambda_{By} r^2 + 1 - \lambda_{By}) & 0 \\ 0 & r^2 + \lambda_y & \lambda_y e_1 & 0 & -r \\ 0 & r & 0 & 0 & (\lambda_{Ex} r^2 + \lambda_{Ex} - 1) \\ \lambda_w e_2 & -\lambda_w e_1 & (r^4 - \lambda_b r^2 - \lambda_0) & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(6.2)

Doğal frekansa bağlı bu sistemin, sınır şartlarını sağlayabilmesi ve bu durumun her denklemde geçerli olabilmesi için, denklem takımının karakteristik determinantı sıfıra eşitlenerek sistemin doğal frekanslarının tayini yapılır.

Sistemin özdeğer hesabına, determinat açılarak başlanır. Determinantın açılmış hali, r ye bağlı 12. dereceden bir polinom verir. 12. dereceden bu polinomun 12 adet kökü vardır.

Sistemin kökleri $r_1, r_2, \dots, r_{12}$ olsun. Herhangi bir değişken için homojen çözüm ifadesi:

$$f(z) = \sum_{i=1}^{12} C_i z^{n_i} e^{r_i z} \text{ diye katlı kökleri de kabuş edecek şekilde öngörülen}$$

çözüm ifadesini genelleştirebiliriz. Burada n, i inci kökün kaç katlı olduğunu göstermektedir. Yapının daha kolay anlaşılabilmesi için, aşağıdaki gibi bir matris şeklinde olayı görselleştirebiliriz:

Tablo 6.1 Katlı Kökler İçin Katlılık Durumu Matrisinin Yapısı

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
r	1.2	2.4	3.6	4.2	4.2	1.7	1.5	1.5	1.5	3.5	7.2	1.8
n	0	0	0	0	1	0	0	1	2	0	0	0

n sıfır iken, z terimi düşmekte ve homojen çözüm katsız kökler için olan genel hale dönmektedir. Dikkat edilecek olan husus, köklerin reel veya imajiner olmasının konuya yaklaşımda bir fark doğurmayacağıdır. Reel katsayılı bir polinom elde edeceğimiz aşikâr olduğundan dolayı, tüm imajiner kökler eşlenik çiftler halinde oluşacaklardır ve $f(z)$ ifadesi, C sabitlerinin ortadan kaldıracağı imajiner terimler ile her zaman reel olacaktır.

Yukarıda anlatılanlara ilaveten, çözüm metodunda dikkat edilecek ikinci husus, elde edilen r ye bağlı karakteristik denklemden bulunacak 12 kök, her değişken için ifadelerde aynen konulacağı halde, 5 adet değişken için bulunacak integrasyon sabitleri farklı olacaktır. Bu demektir ki, ortada toplam olarak 60 adet sabiti olacaktır. Halbuki, sınır şartlarından elde edilen ifade sayısı, uç başına 6 sınır şartından toplam 12 adettir. 60 adet integrasyon sabiti, bu durumdan da anlaşılacağı üzere, kendi içlerinde birbirleri cinsinden ifade edilebilmektedirler. Fakat, çözüm esnasında, bu olayı, 60 adet sabiti sanki birbirlerinden bağımsızmış gibi ele alarak kullanmak, bilgisayar mantığı açısından büyük kolaylık, ve lineer bağımlılık ifadelerini elde ederken gerekecek matematiksel işlem bolluğundan ciddi miktarda tasarruf sağlayacaktır.

Bu hususlara dikkat ederek çözüm metodunun temel prensiplerini vermek uygun düşmektedir: Toplam 5 adet diferansiyel denklem vardır. Sınır şartlarından elde edilen 12 denkleme ilaveten, katsayıların birbirleri arasındaki lineer bağımlılıklarını ifade edebilmek için bu denklemlerden 4 tanesini daha kullanmak mecburidir. Bu esnada, çarpılma atalet momentini içermeyen 4 denklemi kullanmak, çarpılmasız hesaplara geçerken çözüm metodunun yapısının çok fazla değişmeyeceğini temin edeceğinden dolayı oldukça akıllıca bir seçim olacaktır.

Katlı kök durumunda, misal bir denklem üzerinde matematiksel ifadeleri yerine koyarak denklemleri ilerletme işlemi aşağıda yapılmıştır:

Lineer bağımlılığı ifade eden bir denklem, $\frac{d^2U}{dz^2} - \lambda_x U + \lambda_x e_2 \Phi - \frac{d\theta_1}{dz} = 0$

olsun. Burada

$$U(z) = \sum_{i=1}^{12} C_{U_i} z^{n_i} e^{r_i z} ; \Phi(z) = \sum_{i=1}^{12} C_{\Phi_i} z^{n_i} e^{r_i z} ; \theta_1(z) = \sum_{i=1}^{12} C_{\theta_1 i} z^{n_i} e^{r_i z} \text{ ise;}$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \left[\sum_{i=1}^{12} C_{U_i} z^{n_i} e^{r_i z} \right] - \lambda_x \left[\sum_{i=1}^{12} C_{U_i} z^{n_i} e^{r_i z} \right] + \lambda_x e_2 \left[\sum_{i=1}^{12} C_{\Phi_i} z^{n_i} e^{r_i z} \right] - \frac{d}{dz} \left[\sum_{i=1}^{12} C_{\theta_1 i} z^{n_i} e^{r_i z} \right] = 0 \quad (6.3)$$

Burada, işlemlerin daha kolay ilerlemesine yardımcı olacak bir diğer husus, gerekli olacağı aşikâr olan $f(z) = \sum_{i=1}^{12} C_i z^{n_i} e^{r_i z}$ ifadesinin 'k' ıncı mertebeden

türevidir. Burada 'k' genellemesinin yapılmasının sebebi:

- Bilgisayar programlama açısından bir uygun algoritma yaratabilme
- İfadeleri daha öz şekilde oluşturabilme
- İfadelerde değişik mertebelerden türevler geldiği zaman, her seferinde matematik işlemler arasında boğulmamayı sağlamak ve bilgisayar zamanından tasarruf etmektir.

Bu geliştirilmiş türev ifadesi, gerekli işlemler yapıldıktan sonra:

$$\frac{d^k}{dz^k} [C z^n e^{rz}] = \sum_{j=0}^k \left(\binom{n}{j} z^{(n-j)} r^{(k-j)} e^{rz} \right) \quad (6.4)$$

şeklinde elde edilir. Böylece $f(z) = \sum_{i=1}^{12} C_i z^{n_i} e^{r_i z}$ ifadesinin k ıncı mertebeden türevi:

$$\frac{d^k}{dz^k} [f(z)] = \sum_{i=1}^{12} C_i \sum_{j=0}^k \left(\binom{n_i}{j} z^{(n_i-j)} r_i^{(k-j)} e^{r_i z} \right) \quad (6.5)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu çalışmada gerçekleştirdiğimiz hesaplamalarda hiçbir surette katlı kök durumu ile karşılaşılmamıştır.

Denklem takımının çözümü için gerekli olan teorik altyapı, buraya kadar anlatılanlar ile ifade edilmiştir. Bu noktadan itibaren, numerik analiz için gerekli formların ve matris yapılarının oluşturulması ve çözümün gerçekleştirilmesi hakkında bilgi verilecektir.

İlk olarak, doğal frekansları hesaplamak için hangi metodun kullanılacağı tesbit edilmiştir. Sistemimiz, ω 'ya göre transandant bir denklem sistemi içinde bulunduğundan dolayı, analitik çözüm mevcut olmadığına göre, ω 'nın çeşitli değerleri için sınır şartlarının kontrolünü yapmak ve tüm şartların sağlandığı ω 'ların doğal frekans olarak kabul etme yoluna gidilmiştir. Bunun için, en genel halde aşağıdaki parametreler mevcuttur:

1. 60 adet integrasyon sabiti
2. 12 adet (6 + 6) sınır şartı
3. 48 (12 x 4) adet lineer bağımlılık durumunu ifade eden denklem
4. Karakteristik polinomdan yine numerik metodlarla elde edilen 12 adet kök.

Dikkat edilirse, lineer bağımlı 60 adet sabitin sanki bağımsız değişkenmiş gibi ele alındığı, biraz evvel bahsedildiği üzere görülebilmektedir. Karakteristik matrisin (Şekil 6.1) yapısı, karakter olarak aynı kalmakla beraber, sınır şartlarında denklemleri ifade edecek şekilde geliştirildiği takdirde, programlama açısından son derece ergonomik bir yapı ortaya çıkar. Bu yapı, yukarıda ifade edilen karakteristik matriste, her bir elemanın 12x12 lik kare matrislerden oluştuğu bir modeldir. Bu yapının temeli, her bir değişkenin $\sum_{i=1}^{12} C_i e^{t_i z}$ veya türevleri cinsinden ifade edilmiştir.

Fakat, yapıda C_i katsayıları bulunmamakta, bunun yerine, sınır şartları ve lineer bağımlılık denklemlerinden gelen ve ilgili kökler, konumlar ve diğer sayısal değerlerin yerine yerleştirilmesi ile oluşan ve C_i lerin katsayıları olarak adlandırabileceğimiz sayılar vardır. Yapının bir şeması Şekil 6.1' de verilmiştir:

					C_U
/		/			C_V
/					C_Φ
	/	/		/	$C_{\theta 1}$
				/	$C_{\theta 2}$

Şekil 6.1 Frekans Matrisinin Genel Yapısı

Üst bloktaki 12 satır, sol ve sağ uçlardan gelen sınır şartlarını ifade eden, o değişkene ait ikili grupların $\sum_{i=1}^{12} C_i e^{i z}$ formunda ifadesidir. (Mesela her iki uçtan ankastre bir kiriş için $U(0) = 0$ a ait olan C lerin önündeki sayılar, birinci satırdaki denklem katsayıları grubudur ve soldan ilk 12 haneyi işgal etmektedir.) Aşikârdır ki, sağ taraftaki C lere ilişkin matris, bir nevi değişkenler matrisidir ve her grup, yukarıdan aşağıya 1 den 12 ye kadar ilgili değişkenin sabitlerini ifade etmektedir. Matris içine sayılar konulurken denklemlerin doğru ifade edilebilmesi için bu şablon kullanılmıştır. Altta büyük karelerdeki diagonallerse, ilgili lineer bağımlılık denklemindeki sayılardan oluşmaktadır. Mesela

$$\left(D^2 - \lambda_x \right) \left[\sum_{i=1}^{12} C_{U_i} z^{n_i} e^{i z} \right] + \lambda_x e_2 \left[\sum_{i=1}^{12} C_{\Phi_i} z^{n_i} e^{i z} \right] - D \left[\sum_{i=1}^{12} C_{\theta_i} z^{n_i} e^{i z} \right] = 0, n_i = 0$$

olmak üzere, Şekil 6.1’de alttan 4 üncü satırdaki diagonaller tarafından ifade edilmektedir.) Türev alma işlemleri, genel ifade ile yukarıda verilmişti, burada türev ifadesinde $k = 0$ koymak sureti ile fonksiyonun kendi elde edilebilmektedir.

Program, öncelikle karakteristik denklemin sabitlerini, verilen bir ω için hesaplamakta ve daha sonra bu kökleri kullanarak, gerekli ara işlemleri yapıp, yukarıdaki matrisi oluşturmaktadır. Burada karşılaşılan bir diğer husus, köklerin 6 tanesinin reel olmasının yanında, 3 çift eşlenik imajiner kök olmasıdır. Çalışmalarımız esnasında, sönüm etkilerinin ele alınmamasından dolayı, ve daha literatürdeki örneklerle uyum dahilinde, tüm imajiner kökler $0+i\beta$ formatındadır. Fakat, bu kökleri karakteristik determinatın içine yerleştirmek ve kompleks determinantın sıfıra eşitlenmesi ile uğraşmak çok daha karmaşık bir işlem olduğu için, aşağıdaki gibi bir metod geliştirilmiştir.

Farzedelim ki $r_m = i\beta$; $r_{m+1} = -i\beta$ olsun. Homojen çözümün bu kısmı, kökler yerine konulunca, örnek olarak: $C_m e^{i\beta z} + C_{m+1} e^{-i\beta z}$ haline gelir. $U(z_0) = 0$ gibi bir sınır şartında, terimler tamamen C lerin katsayıları haline dönüşür. Genel kaide olan $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ hatırlanırsa, aslında $C_m e^{i\beta z} + C_{m+1} e^{-i\beta z}$ denklemi, birtakım düzenlemelerin ardından $C_m \cos \alpha + C_{m+1} \sin \alpha$ şeklinde ifade edilebilir. Bu noktanın bize sağladığı kolaylık şudur ki, $r_m = i\beta$; $r_{m+1} = -i\beta$ kök çiftinden, birincisini kullanarak, eksponansiyel terimin numerik sonucunda reel kısmı C_m in yanına, imajiner kısmı da C_{m+1} in yanına yazmak kabildir. Dikkat edilmesi gereken nokta, algoritma içinde böyle bir durumla karşılaşıldığında, $r_{m+1} = -i\beta$ kökünün hesaba katılmadan atlanacağını programın anlamasıdır.

Bu yapının getireceği bir diğer kolaylık da, bütün bu işlemlerin, türevlerin hesaplanmasından sonra yapılmasının hiçbir sakınca doğurmayacağını tesbit edilmiş olmasıdır. Bunun görülebilmesi için $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$ denkleminin her iki tarafının çeşitli defalar türevinin alınarak çıkan sonuçların, yukarıda önerilen türev formülüne uygulanması ve bunun denklemin reel hale getirilmesi için önerilen metodla bulunan sonuçlarla mukayese edilmesi yeterlidir. Bu işlemler, matematik ayrıntı olduğu için burada detaylı şekilde gösterilmeyecektir. Dikkat edilirse, reel kökler için hiçbir ek işlem yapılmamıştır, ve önerilen çözüm metodunun böyle bir talebi de yoktur.

Sınır şartlarının göz önüne alınarak ilk 12 satırın elde edilmesinde ise, aşağıdaki gibi bir yapıdan faydalanılmıştır:

En genel halde, sınır şartlarının $Ax + By = 0$ formatında olduğu göz önüne alınmalıdır. Misal olarak $GI_b \Phi' - EI_w \Phi''' = 0$ serbest uç sınır şartını gösterebiliriz. İfadeyi bir adım daha ilerletirsek

$$GI_b \frac{d}{dz} \left[\sum_{i=1}^{12} C_{\Phi_i} e^{\epsilon_i z} \right] - EI_w \frac{d^3}{dz^3} \left[\sum_{i=1}^{12} C_{\Phi_i} e^{\epsilon_i z} \right] = 0 \quad (6.6)$$

olur. Matrise C_{Φ_i} lerin önündeki katsayıları yazacağımızdan dolayı, gerekli düzenlemeleri yaparak:

$$\sum_{i=1}^{12} \left[\left\{ GI_b \frac{d}{dz} [e^{\epsilon_i z}] \right\} + \left\{ (-EI_w) \frac{d^3}{dz^3} [e^{\epsilon_i z}] \right\} \right] C_{\Phi_i} = 0 \quad (6.7)$$

denklemine varabiliriz. Dikkat edilmesi gerekir ki, imajiner kök durumunda, türevler, yukarıda anlatıldığı üzere alınıp gerekli işlemlere tabi tutulduktan sonra yerlerine konulmalıdırlar. Şimdi, bu yapıyı algoritmaya uydurabilmek için, $H_{o,p,q}$ üç boyutlu matrisini tanımlayalım. Görsel olarak matrisin yapısını şöyle modelleyebiliriz:

Tablo 6.2 Sınır Şartları Matrisinin Yapısına Örnek (Karmaşık Haller)

z	A	X	K _X	B	Y	K _Y
0	GI_b	3	1	$-EI_w$	3	3

Tablonun açıklaması şöyledir:

z: Sınır şartının uygulandığı konum. (Mesela sol uç $z=0$, sağ uç $z=l$ gibi.)

X,Y : Hangi değişkene ait sınır şartı ile meşgul olduğumuzu belirtmektedir. Bu tamamen, matematiksel fonksiyonların, numerik olarak kodlanması ile alakalı, programlama tekniğinden gelen bir gerektir. Yapılan çözümler esnasındaki kodlama aşağıdaki gibidir. Verilen örnekte, 3 sayısı, $Ax + By = 0$ modelinde X ve Y için Φ fonksiyonu kullanılacağını, sınır şartının böyle tanımlandığını belirtir.

Tablo 6.3 Değişkenlerin Kodlanma Sırası

U	V	Φ	θ_1	θ_2
1	2	3	4	5

K_X, K_Y : Türev mertebesidir. X ve Y de kullanılacak fonksiyonların, sırası ile kaçınıcı türevlerinin kullanılacağını belirtir. Modelimize göre, $GI_b \Phi' - EI_w \Phi''' = 0$ sınır şartında, $K_X = 1, K_Y = 3$ tür.

A,B : Sırası ile X ve Y fonksiyonlarının önündeki çarpanlardır

Bir diğer örnek olarak, daha basit olan mesela $U = 0$ fonksiyonu için, sistem aşağıdaki gibi olacaktır. Dikkat edilirse, Y fonksiyonunun katsayısı 0 olarak tanımlanmakta ve böylelikle hesaba katılmamakla beraber ($Ax + 0y = Ax = 0$), tanımını için alakasız bir fonksiyon kodu verilmemektedir. $K_Y = 0$ verilerek de, gereksiz türev alınılmamakta ve bilgisayar zamanından tasarruf edilmektedir.

Tablo 6.4 Sınır Şartları Matrisinin Yapısına Örnek (Basit Haller)

z	A	X	K_X	B	Y	K_Y
0	1	1	0	0	1	0

H matrisin nasıl kullanıldığına dair olan bu kısa açıklamadan sonra, anlaşılacağı üzere, matris $o=6$ satır, $p=7$ sütun ve mesnet sayısını belirten $q=2$ katmandan oluşmaktadır. Sınır şartları matrisi diyebileceğimiz bu matrisin, $\rho \omega^2 \theta_1 - E \theta_1''' = 0$ gibi bir sınır şartında, değişen ω ile sürekli güncellenmesi gerektiğine algoritma içinde özellikle dikkat edilmekte ve bu işlem gerçekleştirilmektedir.

7- DENEYLER

Doğada gerçekleşen olayların bire bir matematik modellenmesinin yapılması, doğal olayların çok fazla parametre içermesi nedeniyle mümkün olamamaktadır. Bu nedenle doğal bir olayın karmaşık yapısı, oldukça fazla parametrenin en önemlilerinin alınması ile olayı karakterize eden bir matematik modele indirgenmeye çalışılır. Matematiksel bir simülasyona indirgenen bu problem, genel olarak bir diferansiyel denklem takımının belli sınır şartları altında çözümü olacaktır. Ancak teorik sınır şartlarının aynen pratikte meydana gelen olaylara uygulanması çoğu kez mümkün olmaz. Bu durumda yaklaşık nümerik hesaplama yöntemlerinin kullanılması gerekir. Bu yaklaşık metodların sonucunda ortaya çıkan çözülebilir denklem takımlarının sonuçlarının bulunabilmesi ağır bir hesaplama yükü gerektirdiğinden oldukça güçtür. Bu durumda problemin çözümü için bilgisayar yardımıyla nümerik analiz yöntemleri kullanılır. Bu arada yapılan basitleştirici kabullerden ve nümerik analiz yöntemlerinin hatalarından dolayı çözümler belli bir yaklaşıklıkla bulunabilecektir.

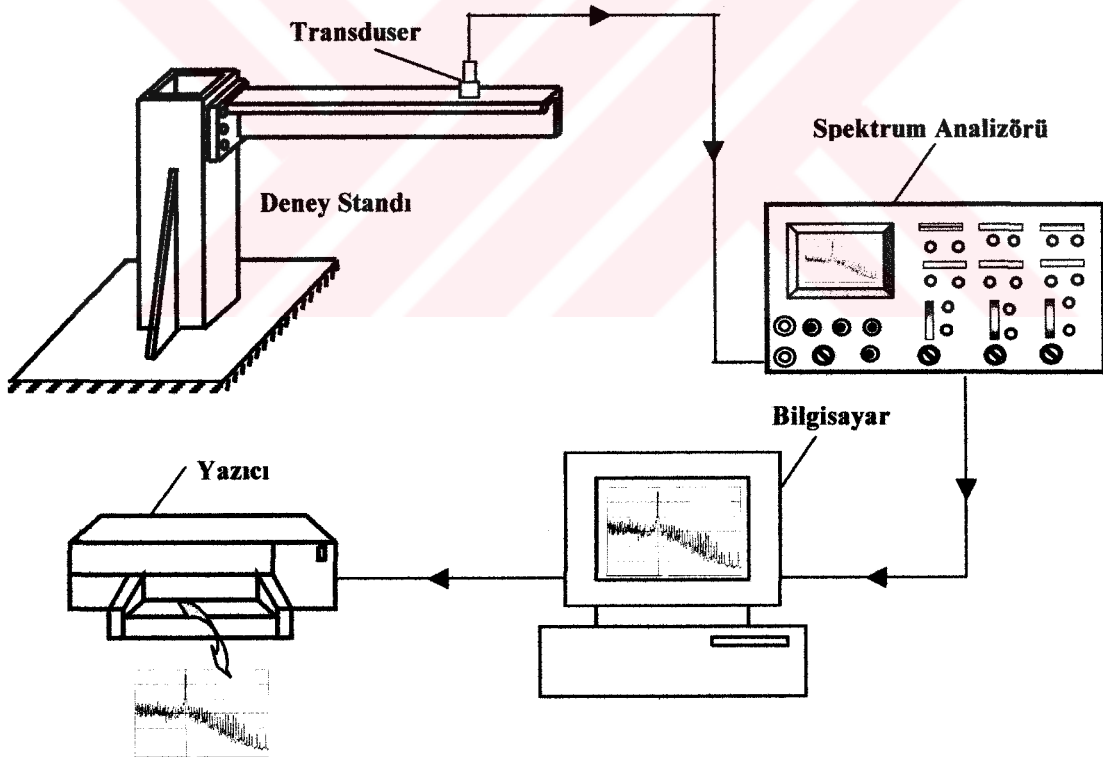
Deneysel çalışmalar olayın fiziğini olduğu gibi yansıtacağından nümerik hesaplamaların kontrolü için oldukça önemlidir. Ancak deneyin de kendi içinde bazı hataları olacaktır. Çünkü fiziksel bir büyüklüğün gerçek anlamda hatasız ölçülebilmesi mümkün değildir. Bu hataların başında deneyi yapan kişinin becerisi, lineerlik ve deney sırasında oluşan farklı çevre şartlarının etkisi gelir. Örneğin deneyi yapılacak parçanın boyutlarının ölçümü sırasında yapılan hatalar, nümerik hesaplamalar için nümerik analiz programına dışarıdan verileceğinden bu bir hata getirecektir. Ayrıca deneyde kullanılacak elemanın imalat toleransının her yerde aynı olmaması da ek bir hata getirir. Bunun yanı sıra elastisite modülü, Poisson oranı, yoğunluk gibi malzeme özelliklerinin de standartlara uygun hassaslık derecesinde olmaması, bir başka hata kaynağı olacaktır.

7-1. Deney Düzeneği

Deney düzeneği, deney esnasında çevreden gelecek etkilerin en aza indirilmesi için çevreden izole edilmiş bir deney standı, mesnetleme tertibatı, ölçme cihazı ve bilgisayardan oluşmaktadır.

7-1.1. Deney Standı

Bir sistemin dinamik davranışını incelerken, deney parçası dışında deney düzeneğini oluşturan tüm parçaların titreşimi dinamik davranış içinde yer alacağından, deney parçasının ölçülmesi istenen fiziksel büyüklüklerinin diğerlerinden ayrılarak ölçülebilmesi gerekir. Bu nedenle deney standının titreşim yutucu lastik takozlarla zeminden izole edilmiş büyük bir kütle olması tercih edilir. Bu sayede büyük bir kütlenin tabii frekansının oldukça düşük olması sağlanır. Böylece deney parçasının çalışma bölgesinin dışına çıkmış olur.



Şekil 7-1.1 Deney Standı ve Ölçüm Düzeneğinin Şematik Gösterimi

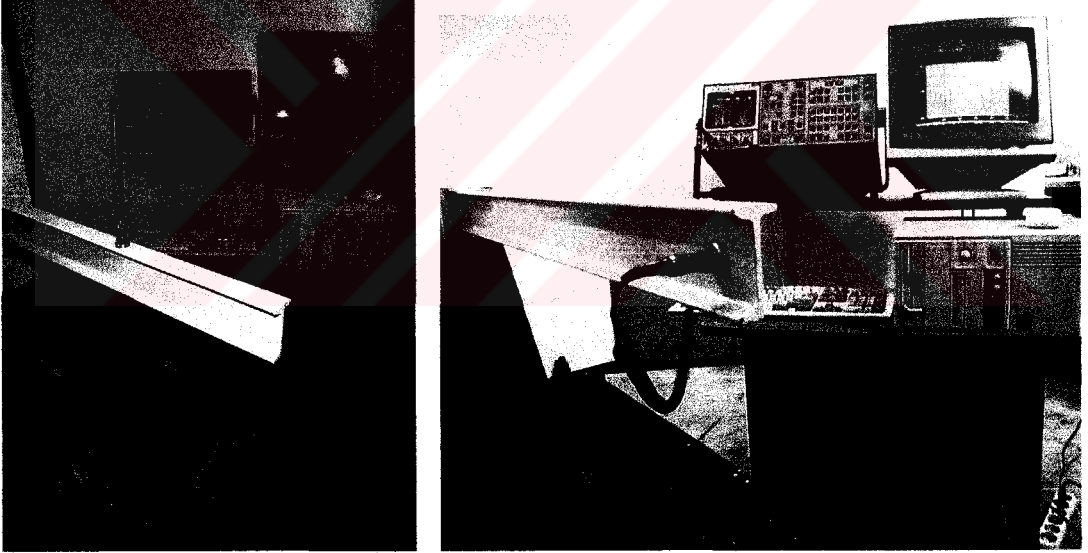
Deney parçasının ve mesnetleme tertibatının yer aldığı deney standı, belirli aralıklarla dizilmiş U kesitli çubukların büyük bir beton blok üzerine yerleştirilmesi ile oluşturulmuştur. Mesnetleme tertibatı ise U kesitli çubuklara bağlanmıştır.

7-1.2. Mesnetleme

Mesnetleme tertibatı için iki adet U kesitli çubuk karşılıklı kaynatılarak rijit bir yapı elde edilmiştir. Bu yapı bir levha üzerine kaynatılmış ve eğilmesinin engellenmesi amacıyla da iki yandan bayrak şeklinde levhalarla kaynaklı olarak desteklenmiştir. İki U kesitli çubuğun üzerine 6 adet cıvata için delik açılmış ve deneyi yapılacak çubukların arkasına bu deliklere uygun karşılıklı deliklere sahip bir levha kaynatılmıştır. Her çubuğa kaynatılan bu levhalar sayesinde çubuklar rahatlıkla civatalar yardımıyla oluşturulan rijit direğe bağlanabilmektedir.

7-1.3. Ölçüm Cihazları

Ölçüm cihazı olarak Brüel & Kjaer firmasının titreşim analizörü (Type 2515) ve buna bağlı transducer (Type 4391) kullanılmıştır. Ölçümler titreşim analizörüne kaydedilmiş, ve uygun software (B&K 9324) yardımıyla bir arabirim kartı (IEEE/IEC Interface) takılmış bilgisayara aktarılmıştır.

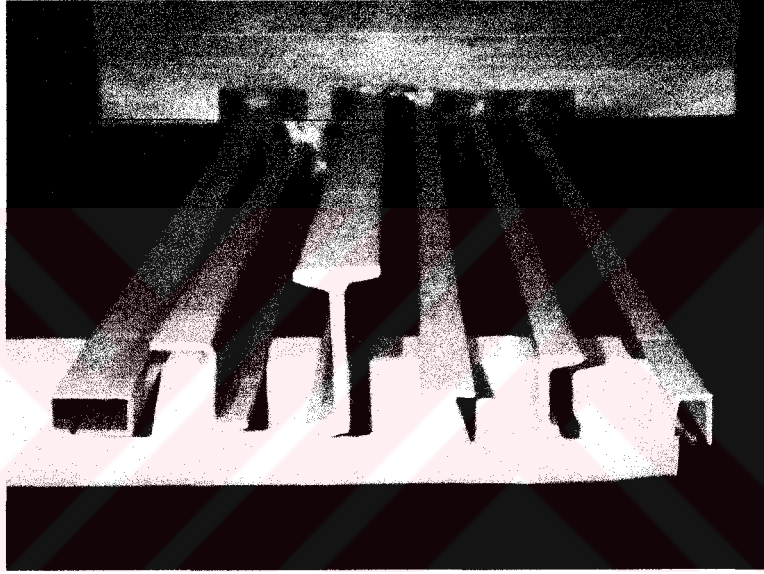


Resim 7-1.2 Deneylerde Kullanılan Ölçüm Sistemi

7-2. Deneyin Yapılması ve Sonuçları

7-2.1. Farklı Kesitlere Sahip Konsol Çubukların Dinamik Davranışı

Deneyisel çalışmalar çubukların sadece bir ucu ankastre, diğer ucunun serbest olması durumu için yapılmıştır. Çünkü kesitlerin asimetrik olması nedeniyle iki uçtan ankastre mesnetlenmesi, ancak iki ucun da kaynaklanarak rijit direklere bağlanmasını gerektirir ki, bu durumda çubuğa eksenel çekme veya basma kuvvetinin gelmesinin önlenmesi oldukça güçtür. Bu nedenle çubukların bir ucunun ankastre diğer ucunun serbest olması durumu için deneyler yapılması uygun görülmüştür.



Resim 7-2.1 Deneyisel Çalışmada Kullanılan Kirişler

Çubuklar, bir ucuna kaynatılmış levhalardan rijit direğe civatalar yardımıyla bağlanmış, transduser çubuk üzerine yatay ve dikey olarak yerleştirilmiştir. Bu durumda çubuğa hafif bir darbe vurularak titreşmesi sağlanmış ve bu esnada ölçümler alınmıştır. Ölçümler x eksenini için lineer skalada, y eksenini için logaritmik skalada transient olarak alınmıştır.

7-2.2. Sonuçlar

Deney sonuçlarının kullandığımız teori ile hesaplanan frekanslarla karşılaştırması Tablo 7.1 da verilmiştir. Analizör çıkışları ise, EK-A da ilgili kesit için verilmiştir.

Tablo 7.1 Deney – Teori Karşılaştırması

	MOD					
Asimetrik U	1	2	3	4	5	6
Teori (Hz.)	13.233	39.498	82.399	166.337	229.487	241.820
Deney (Hz.)	12.80	33.20	81.80	164.80	228.80	245.60

	MOD					
Asimetrik Kollu T	1	2	3	4	5	6
Teori (Hz.)	18.741	73.027	86.965	117.134	273.476	322.370
Deney (Hz.)	17.60	72.80	86.00	108.00	280.00	312.00

	MOD					
Asimetrik Kutu	1	2	3	4	5	6
Teori (Hz.)	21.534	34.771	98.859	126.144	193.269	328.574
Deney (Hz.)	20.80	30.40	97.20	122.40	183.70	314.00

	MOD					
Asimetrik L	1	2	3	4	5	6
Teori (Hz.)	12.011	25.422	75.258	158.068	211.343	416.087
Deney (Hz.)	11.60	23.20	75.60	147.60	207.20	409.60

	MOD					
Asimetrik T	1	2	3	4	5	6
Teori (Hz.)	15.289	22.509	94.469	136.937	148.885	260.714
Deney (Hz.)	17.80	20.40	90.80	127.20	141.60	255.60

	MOD					
Asimetrik Z	1	2	3	4	5	6
Teori (Hz.)	26.514	76.831	124.726	166.389	378.627	453.971
Deney (Hz.)	23.20	84.80	116.80	145.20	360.40	404.80

8- SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, ince cidarlı açık kesitli kirişlerin eğilme / eğilme / burulma tarzındaki üçlü bağlaşıklık titreşimi, kesme kuvveti ve dönme atalet momenti etkisinde analitik olarak incelenmiştir. Bu sırada kesit çarpılmasını kiriş boyunca üniform kabul eden Saint – Venant burulma teorisi yerine, değişken kabul eden teori kullanılmıştır. Sayısal çözüm için MATLAB bilgisayar programından yararlanılmıştır.

Elde edilen analitik sonuçlar, gerek doğal frekans ve gerekse mod yönünden,

- a. Çarpılmayı üniform kabul ederek
- b. Çarpılmayı değişken kabul ederek
- c. Timoshenko (kesme kuvveti ve dönme ataleti) etkileri göz önüne alınmadan
- d. Timoshenko (kesme kuvveti ve dönme ataleti) etkileri göz önüne alınarak

irdelenmiştir. Teoriyi desteklemek üzere, ayrıca deneysel çalışma da yapılmıştır. Elde edilen teorik ve deneysel sonuçlar, şekil ve tablolar yardımıyla ortaya konmuş ve deney- teori karşılaştırması da yapılmıştır.

Teorik çalışma, iki ayrı sınır şartı ve ikisi simetrik altısı asimetrik olmak üzere sekiz kesit formu için yapılmıştır. Böylece onaltı ayrı durum ele alınmıştır. Bunlardan herbiri için de altı mod hesaplanmış bulunmaktadır.

Deneysel çalışma , yukarıda sözü edilen bütün kesit şekilleri için yapılmıştır. Ancak, konstrüktif zorluklar nedeniyle, mesnetlenme şekillerinden sadece ankastre – serbest olanı gerçekleştirilebilmiştir.

Bu çalışmanın sonuçları aşağıda özetlenmiştir:

1. İnce cidarlı açık kesitli çubuklarda, Saint – Venant burulma teorisini kullanmaya imkan yoktur. Bu teori ile elde edilen doğal frekanslar, gerçekte olduğu gibi çarpılmayı çubuk boyunca değişken kabul eden teorinin verdiği doğal frekanslara göre oldukça düşüktür ve bu durum artan mod sayısı ile çok daha

belirginleşmektedir. Ortaya koyduğumuz $\lambda = \frac{\sqrt{I_w / I_b}}{\ell}$ boyutsuz büyüklüğü,

üniform olmayan çarpılmanın önemini belirleyen bir katsayı gibi ele alınabilir. Şekil 2-2.3, 2-2.4, 2-2.5 ve 2-2.6 dan görülebileceği gibi, λ' 'nın büyük olduğu çubuklarda, Saint – Venant teorisinin hatası büyükmektedir. Bu da, kısa çubukların çarpılmaya daha hassas olduğunu gösterir. Ayrıca asal sektöriyel atalet momentinin (I_w) burulma atalet momentine (I_b) göre büyük olmasının da hassasiyeti arttırdığı ortaya çıkmaktadır. Bu durum profillerde gövde yüksekliğine oranla flanş uzunluğunun büyük olması demektir. Aynı şekiller, sınır şartlarının da bu konuda önemli olduğunu göstermektedir. Ankastre – ankastre mesnetli kirişte Saint – Venant teorisinin verdiği hata, ankastre – serbest kirişte ortaya çıkandan daha büyüktür. Bunun sebebi, birinci kirişte çarpılma kısıtı getiren ankastre mesnedin her iki uçta da mevcut oluşudur.

2. Üçlü bağlaşıklık titreşimde, üniform olmayan çarpılmanın göz önüne alınması, saf burulma titreşimlerinde olduğu gibi, doğal frekansları büyütmemektedir (Şekil 4-2.1, 4-2.2). Ancak, çarpılma etkisinin saf burulma titreşiminde olduğu gibi, mod sayısı arttıkça orantılı olarak artmamasının sebebi, bağlaşıklık titreşimde bazı modların eğilme ağırlıklı, bazı modların ise burulma ağırlıklı oluşudur. Doğal olarak, çarpılma etkisi eğilme ağırlıklı modlarda çok önemli olmayacaktır.
3. Mod şekillerine bakıldığında, bağlaşıklık titreşimlerde çarpılma etkisinin (I_w) alınıp alınmamasının düğüm sayısını etkilediği, alındığı takdirde düğüm sayısının azaldığı görülmektedir (Şekil A-5.6). Ayrıca çarpılma etkisi alındığında, burulma açıları küçülmektedir. Başka bir deyişle Saint – Venant teorisi, mod şekillerinde düğüm sayısı ile burulma açısının gerçektekinden büyük hesaplanmasına yol açmaktadır. Bu durum, artan modal indeksle daha da belirginleşmektedir.
4. Euler – Bernoulli teorisine kesme kuvveti ile dönme atalet momenti etkileri eklendiğinde (Timoshenko teorisi), genelde doğal frekanslar biraz düşmektedir. Bu düşüş, artan mod sayısı ile daha belirgin hale gelmektedir. Ancak, burulma ağırlıklı bağlaşıklık titreşimde kayda değer bir farkın ortaya çıkmayacağı açıktır. Çünkü, Timoshenko (kesme kuvveti ve dönme ataleti) etkileri eğilme titreşimi ile bağlantılıdır. Nitekim, Şekil 5-4.3' e dikkat edildiğinde, bazı modlarda bu etkileri göz önüne almamanın getirdiği hatanın sifıra yakın olduğu görülecektir.

5. Kesme kuvveti ve dönme ataleti etkilerinin önemi, çeşitli sınır şartlarında farklı farklı ortaya çıkmaktadır. Şekil 5-4.4, ankastre – ankastre kirişte hatayı % -10 verirken, konsol kirişte bu değer % -48'e kadar çıkmaktadır. Bunun sebebi, konsol kiriş deformasyonunda eğimin fazla olması, bunun da dönme ataleti etkisini arttırmasıdır.
6. Kesiti sabit tutarak boy değiştirildiğinde, çubuk narinliğinin Timoshenko (kesme kuvveti ve dönme ataleti) etkilerini değiştirdiği görülmüştür. Şekil 5-4.3 narin çubuklarda bu etkinin önemli olmadığını, başka bir deyişle narin olmayan çubuklarda bu etkilerini mutlaka göz önüne almak gerektiğini ortaya koymaktadır. Yüksek modlarda bu daha da önemlidir.
7. Bağlaşık titreşimde kesme kuvveti ve dönme ataleti etkileri göz önüne alındığında, eğilme yerdeğiştirmeleri burulmaya göre biraz daha ağırlıklı çıkmakta, başka bir deyişle mod şekilleri etkilenmektedir. (Şekil A-5.1)
8. Deneysel sonuçlarla teorik sonuçlar birbirine oldukça yakın bulunmuştur.

KAYNAKLAR

- [1] **Timoshenko, S. and Young, D. H.**, 1955. *Vibration Problems in Engineering*, D. Van Nostrand Comp., Inc., NewYork.
- [2] **Ali Hasan, S. and Barr, A. D. S.**, 1974. Linear Vibration of Thin -Walled Beams of Equal Angle-Section, *Journal of Sound and Vibration*, **32**, 3-23.
- [3] **Bishop, R. E. D. and Price W. G.**, 1977. Coupled Bending and Twisting of a Timoshenko Beam, *Journal of Sound and Vibration*, **50(4)**, 469-477.
- [4] **Bishop, R. E. D. and Price, W. G. and Xi-Chang, Z.**, 1985. A Note the Dynamical Behaviour of uniform Beams Having Open Channel Section, *Journal of Sound and Vibration*, **99(2)**, 155-167.
- [5] **Friberg, P. O.**, 1983. Coupled Vibrations of Beams- An Exact Dynamic element Stiffness Matrix, *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, **19**, 479-493.
- [6] **Dokumacı, E.**, 1987. An Exact Solution for Coupled Bending And Torsion Vibrations of Uniform Beams Having Single Cross-Sectional Symmetry, *Journal of Sound and Vibration*, **119(3)**, 443-449.
- [7] **Bishop, R. E. D., Cannon M. and Miao S.**, 1989. On coupled Bending and Torsional Vibration of Uniform Beams, *Journal of Sound and Vibration*, **131(1)**, 457-464.
- [8] **Banerjee, J. R.**, 1989. Coupled Bending-Torsional Dynamic Stiffness Matrix For Beam Elements, *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, **28**, 1283-1298.
- [9] **Banerjee, J. R. and Fisher S. A.**, 1992. Coupled Bending- Torsional Dynamic Stiffness Matrix For Axially Loaded Beam Elements, *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, **33**, 739-751.

- [10] **Banerjee, J. R. and Williams F. W.**, 1994. Coupled Bending-Torsional Dynamic Stiffness Matrix of an Axially Loaded Timoshenko Beam Element, *Introduction to Journal of Solids Structures*, **31(6)**, 749-762.
- [11] **Klausbuckner, M. J. and Pryputniewicz, R. J.**, 1995. Theoretical and Experimental Study of Coupled Vibrations of Channel Beams, *Journal of Sound and Vibration*, **183(2)**, 239-252.
- [12] **Adam, C.**, 1999., Forced Vibrations of Elastic Bending-Torsion Coupled Beams, *Journal of Sound and Vibration*, **221 (2)**, 273-287.
- [13] **Bercin A.N and Tanaka M.**, 197. Coupled Flexural-Torsional Vibrations of Timoshenko Beams, *Journal of Sound and Vibration*, **207(1)**, 47-59.
- [14] **Gere, J. M. and Lin, K. L.**, 1958. Coupled Vibrations of Thin-Walled Beams of Open Cross section, *journal of Applied Mechanics*, **80**, 373-378.
- [15] **Friberg, P. O.**, 1985. Beam Element Matrices Derived from Vlasov' s Theory of open Thin-Walled Elastic Beams, *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, **21**, 1205-1228.
- [16] **Gendy, A. S., Saleeb, A. F. and Chang, T. Y. P.**, 1992. Generalized Thin-Walled Beam Models For Flexural- Torsional Analysis, *Computers & Structures*, **42(4)**, 531-550.
- [17] **Hu, Y., Jin, X. and Chen, B.**, 1996. A Finite Model For Static and Dynamic Analysis of Thin- Walled Beams with Asymmetric Cross- Sections, *Computers & Structures*, **61(5)**, 897-908.
- [18] **Yaman, Y.**, 1997. Vibrations of Open Cross -Section Channels: A Coupled Flexural and Torsional Wave Analysis, *Journal of Sound and Vibration*, **204(1)**, 131-158.
- [19] **Tanaka, M. and Bercin, A. N.**, 1999. Free Vibration Solution for Uniform Beams of Nonsymmetrical Cross Section Using Mathematica, *Computers & Structures*, **71**,1-8.
- [20] **Li, D. B. and Chui, Y. H. and Smith, I.**, 1994. Effect of Warping on Torsional Vibration of Members with Open Crosss-Sections, *Journal of Sound and Vibration*, **170(2)**, 270-275.

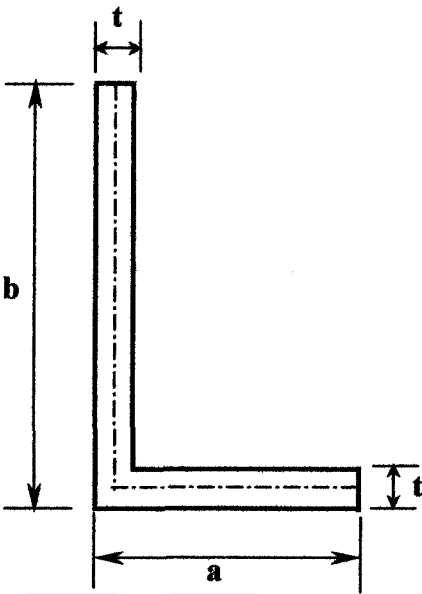
- [21] **Timoshenko, S. P.**, 1955. Strength of Materials, Van Nastran Comp. Inc. Newyork.
- [22] **Vlasov, V. Z.**, 1961. Thin – Walled Elastic Beams, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem
- [23] **Hill, N.**, 1943. Torsion of Flanged Members With Cross Sections Restrained Against Warping, National Advisory Commitee for Aeronautics Technical Notes, **NACA- No: 888**, Aluminum Company of America.,
- [24] **Gere, J. M.**, 1954. Torsional Vibrations of Beams of Thin-Walled Open Section, Journal of Applied Mechanics, **December**, 381-387.
- [25] **Pöschl, T.**, 1936. Elementare Festigkeitslehre, Julius Springer, Berlin.
- [26] **İnan, M.**, 1970. Cisimlerin Mukavemeti, İTÜ Vakfi, İstanbul.



EK-A. DİYAGRAMLAR



A-1. Asimetrik L Profil

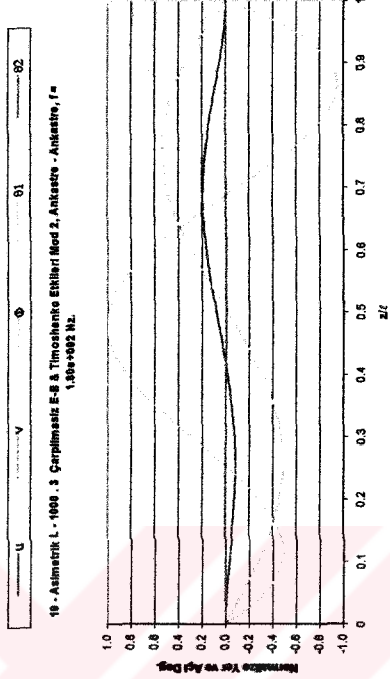
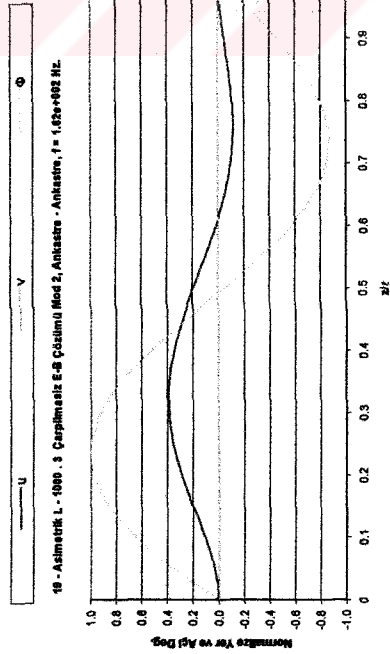


t = 3 mm.
b = 26 mm.
a = 20 mm.
ℓ = 1000 mm.

e₁ (m)	-0.006891
e₂ (m)	-0.004062
k_x	2.5096
k_y	2.235



Şekil A-1.1 Asimetrik L Profil – Ankastre Kiriş - Mod 1



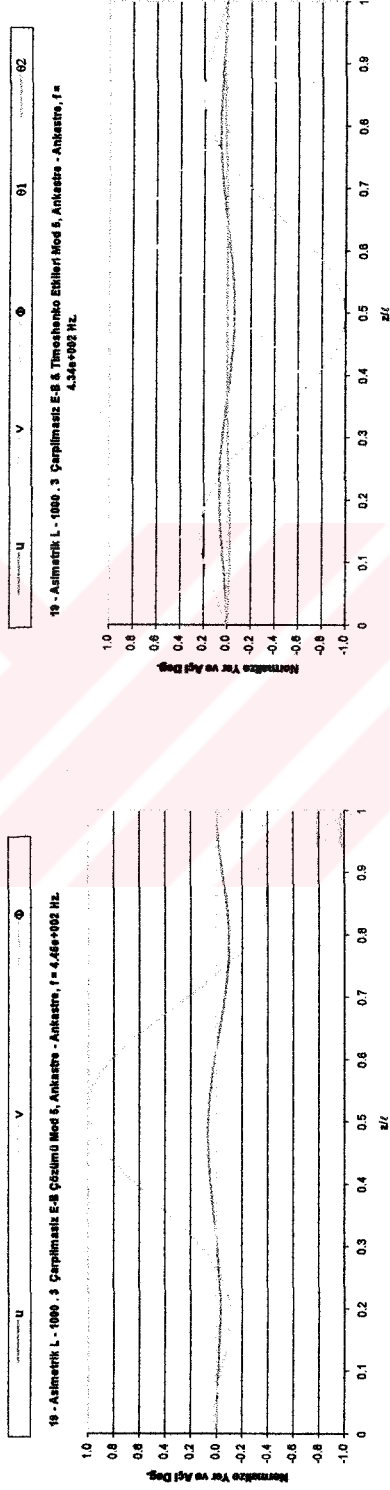
Şekil A-1.2 Asimetrik L Profil – Ankastre Kiriş - Mod 2



Şekil A-1.3 Asimetrik L Profil – Ankastre Kiriş - Mod 3



Şekil A-1.4 Asimetrik L Profil – Ankastre Kiriş - Mod 4



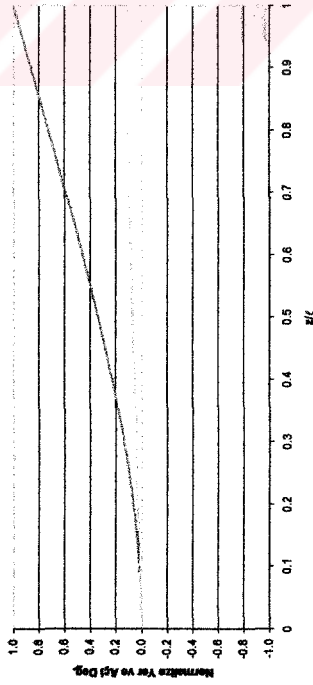
Şekil A-1.5 Asimetrik L Profil – Ankastre Kiriş - Mod 5



Şekil A-1.6 Asimetrik L Profil – Ankastre Kiriş - Mod 6

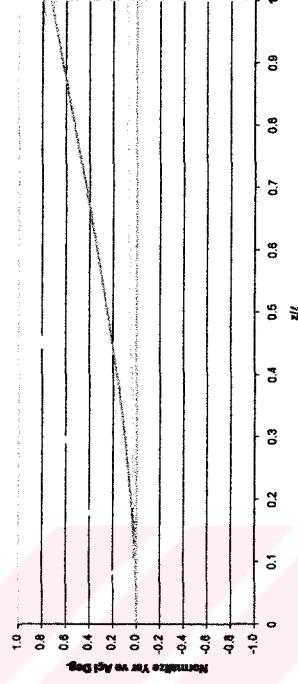
U	V	Ø
---	---	---

19 - Asimetrik L - 1000 - 3 Çarpımsız E-S Çözümü Mod 1, Ankastre - Serbest, f = 1.28e+001 Hz.



U	V	Ø
---	---	---

19 - Asimetrik L - 1000 - 3 Çarpımsız E-S Çözümü Etkileri Mod 1, Ankastre - Serbest, f = 1.28e+001 Hz.



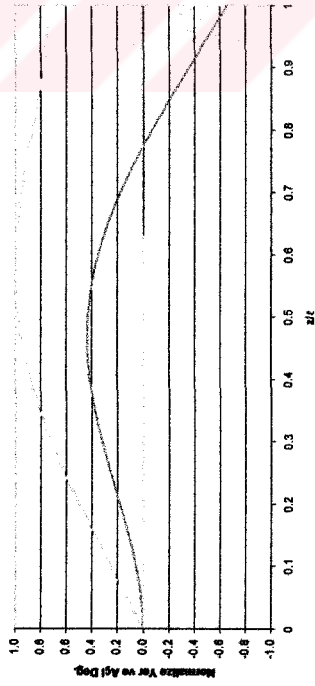
Şekil A-1.7 Asimetrik L Profil –Konsol Kiriş - Mod 1



Şekil A-1.8 Asimetrik L Profil –Konsol Kiriş - Mod 2

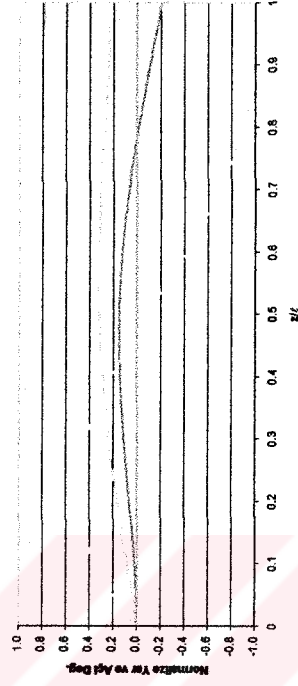
U	V	Ø
---	---	---

19 - Asimetrik L - 1000 . 3 Çarpılmasız E-3 Çözümü Mod 3, Antazite - Serbest, f = 7.52e+001 Hz.



U	V	Ø	Ø1	Ø2
---	---	---	----	----

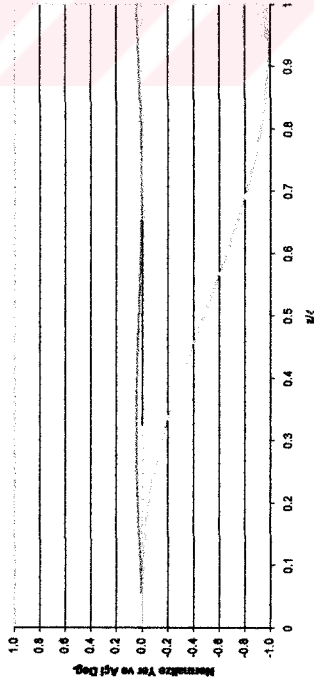
19 - Asimetrik L - 1000 . 3 Çarpılmasız E-3 Ç. Timoshenko EKilari Mod 3, Antazite - Serbest, f = 7.52e+001 Hz.



Şekil A-1.9 Asimetrik L Profil –Konsol Kiriş - Mod 3

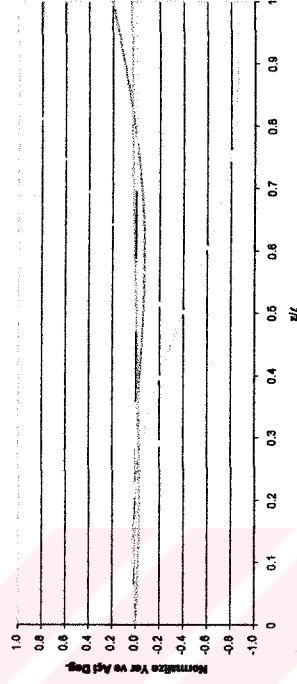
U	V	Φ
---	---	---

19 - Asimetrik L - 1000 . 3 Çarpılmalı E-3 Çözümlü Mod 4, Ankastre - Serbest, $f = 1.80 \times 10^2$ Hz.



U	V	Φ	θ1	θ2
---	---	---	----	----

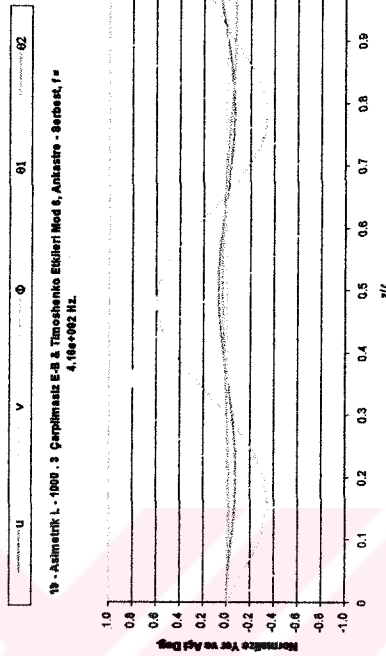
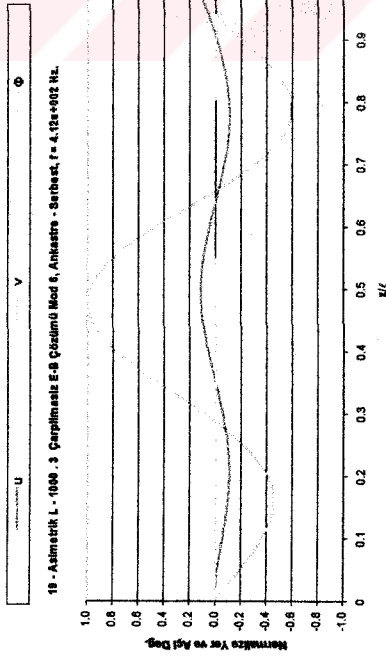
19 - Asimetrik L - 1000 . 3 Çarpılmalı E-3 & Timoshenko Etkileri Mod 4, Ankastre - Serbest, $f = 1.80 \times 10^2$ Hz.



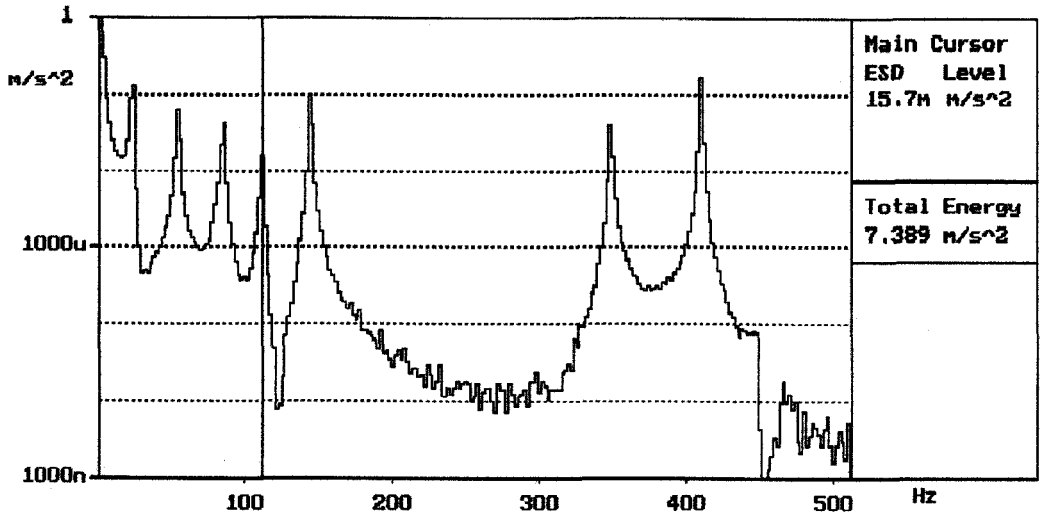
Şekil A-1.10 Asimetrik L Profil –Konsol Kiriş - Mod 4



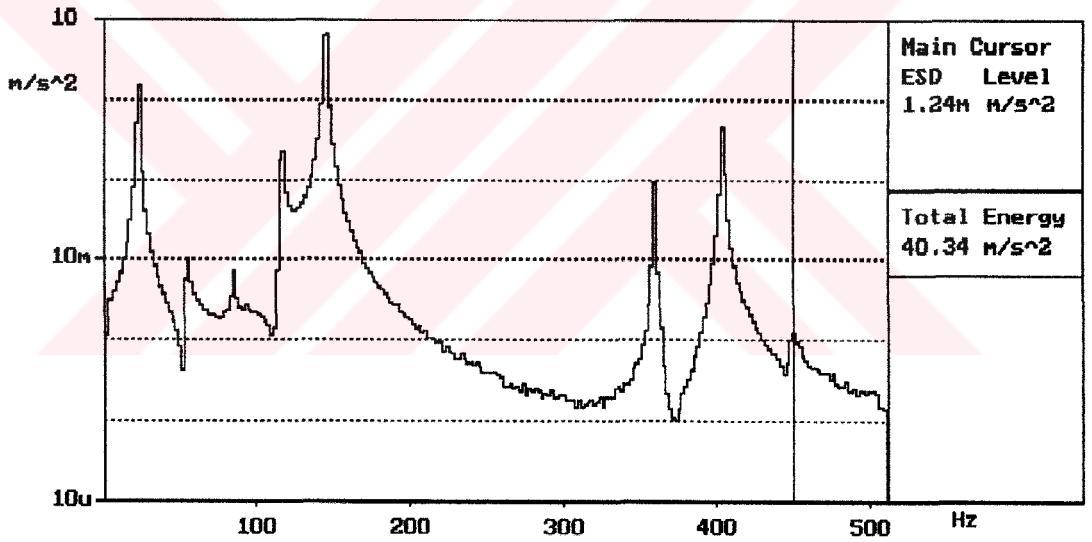
Şekil A-1.11 Asimetrik L Profil –Konsol Kiriş - Mod 5



Şekil A-1.12 Asimetrik L Profil –Konsol Kiriş - Mod 6

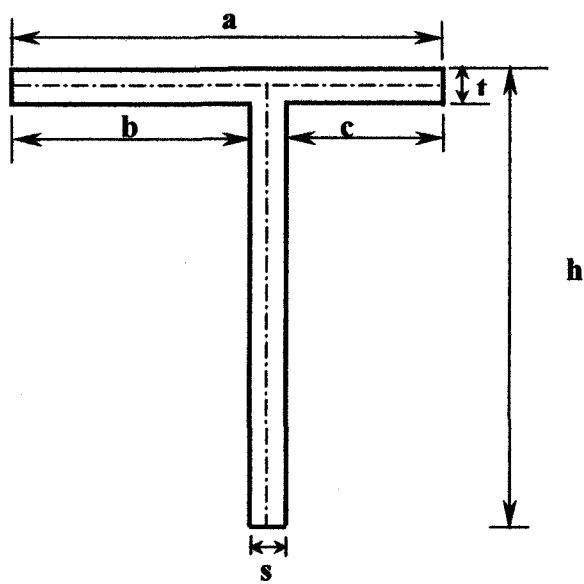


Şekil A-1.13 Asimetrik L Profil ile Yapılan Deneyde Transduser'in Düşey Tutulması Halinde Alınan Frekans Spektrumu:



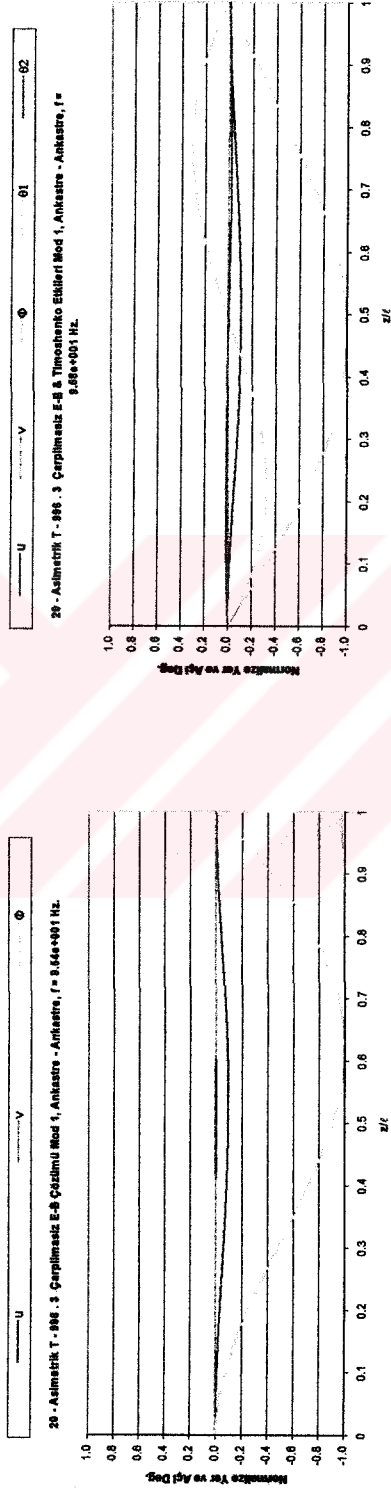
Şekil A-1.14 Asimetrik L Profil ile Yapılan Deneyde Transduser'in Yatay Tutulması Halinde Alınan Frekans Spektrumu:

A-2. Asimetrik T Profil

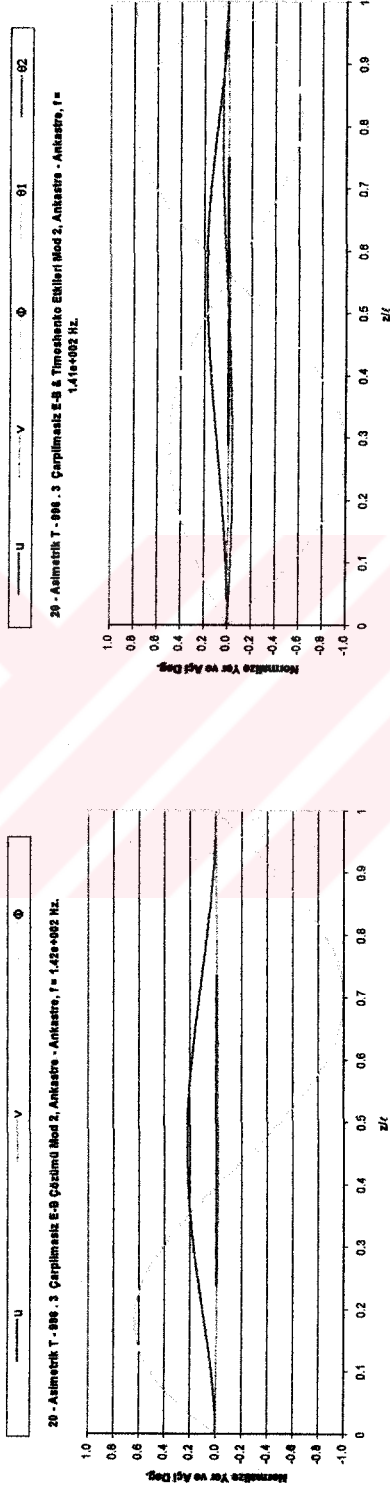


$a = 26 \text{ mm.}$
 $b = 14 \text{ mm.}$
 $c = 9 \text{ mm.}$
 $h = 26 \text{ mm.}$
 $t = 3 \text{ mm.}$
 $s = 3 \text{ mm.}$

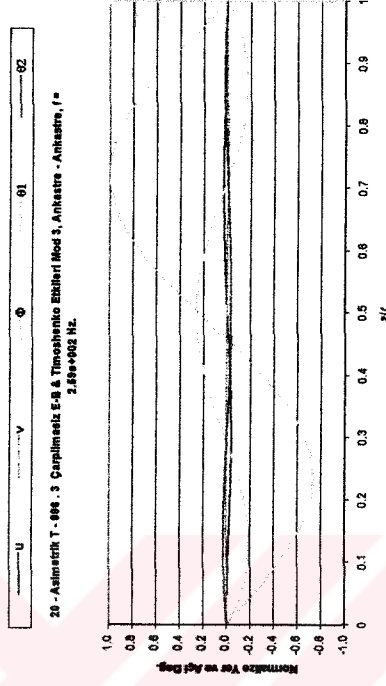
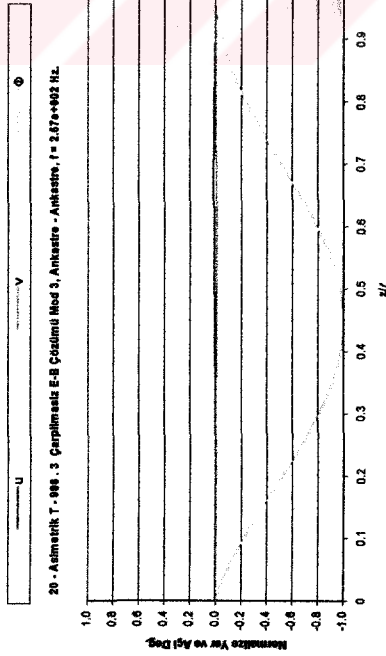
$e_1 \text{ (m)}$	-0.002728
$e_2 \text{ (m)}$	-0.005617
k_x	2.19775
k_y	2.55231



Şekil A-2.1 Asimetrik T Profil – Ankastre Kiriş - Mod 1



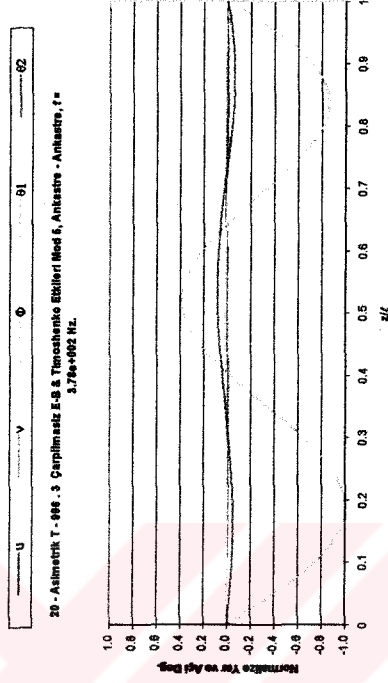
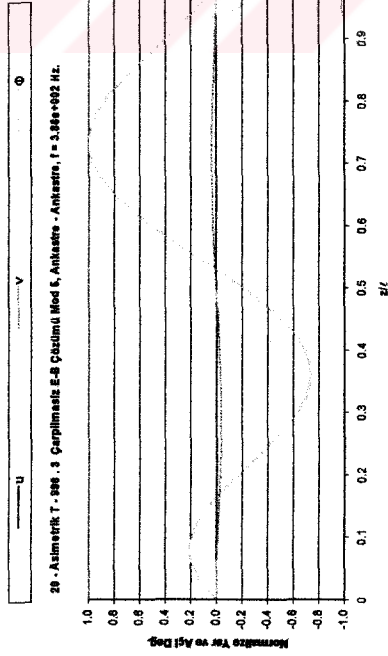
Şekil A-2.2 Asimetrik T Profil – Ankastre Kiriş - Mod 2



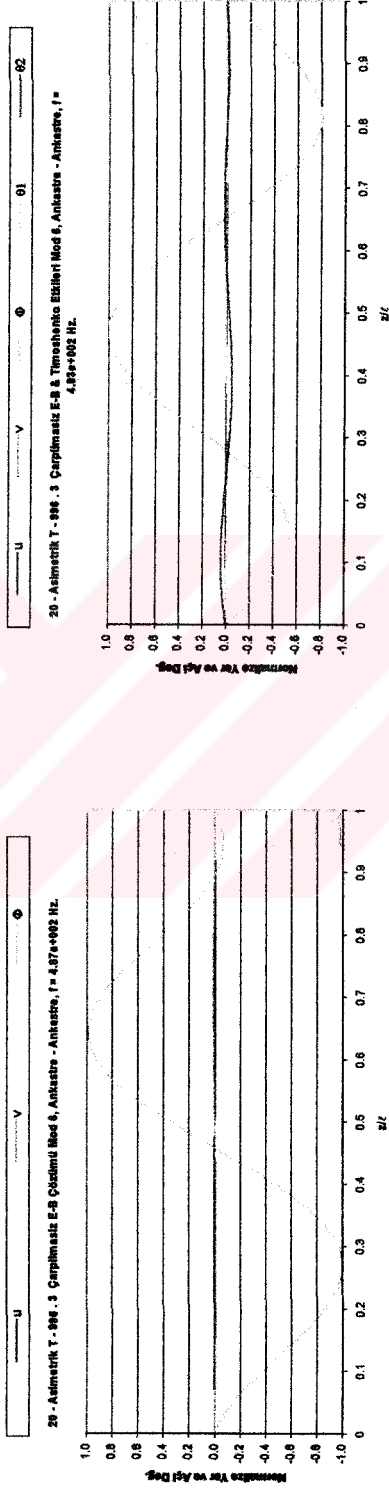
Şekil A-2.3 Asimetrik T Profil – Ankastre Kiriş - Mod 3



Şekil A-2.4 Asimetrik T Profil – Ankastre Kiriş - Mod 4



Şekil A-2.5 Asimetrik T Profil – Ankastre Kiriş - Mod 5



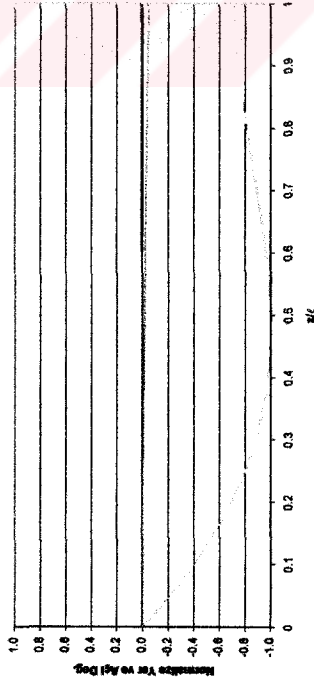
Şekil A-2.6 Asimetrik T Profil – Ankastre Kiriş - Mod 6



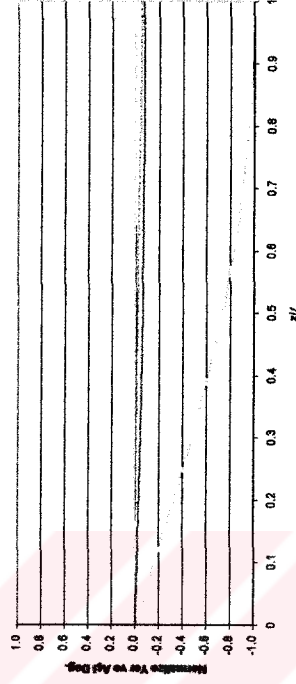
Şekil A-2.7 Asimetrik T Profil –Konsol Kiriş - Mod 1



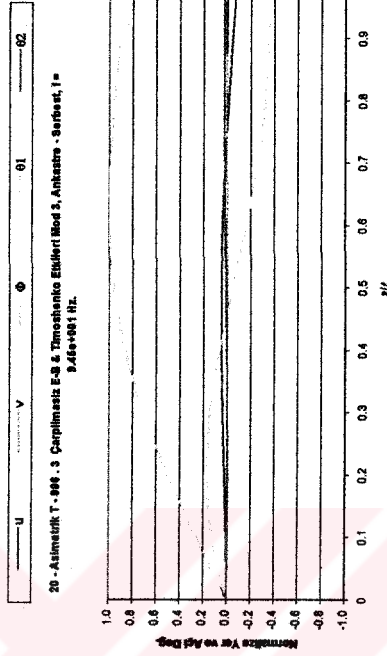
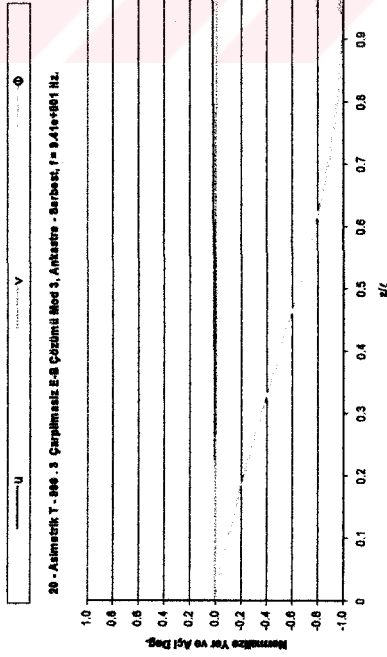
20 - Asimetrik T - 808 . 3 Çarpılmasız E-8 Çözümü Mod 2, Anisotre - Serbest, $f = 2.25e+001$ Hz.



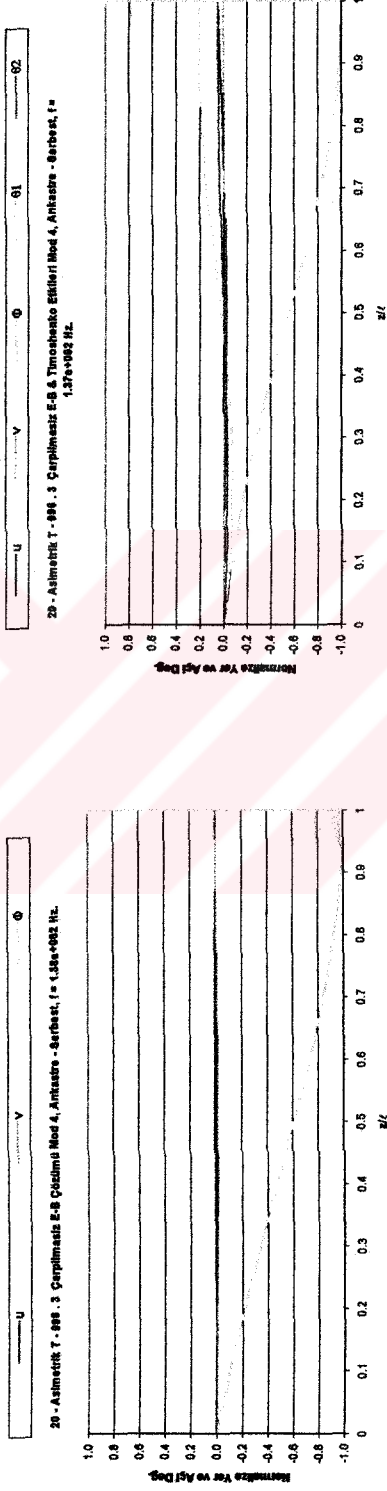
20 - Asimetrik T - 808 . 3 Çarpılmasız E-8 Çözümü Mod 2, Anisotre - Serbest, $f = 2.25e+001$ Hz.



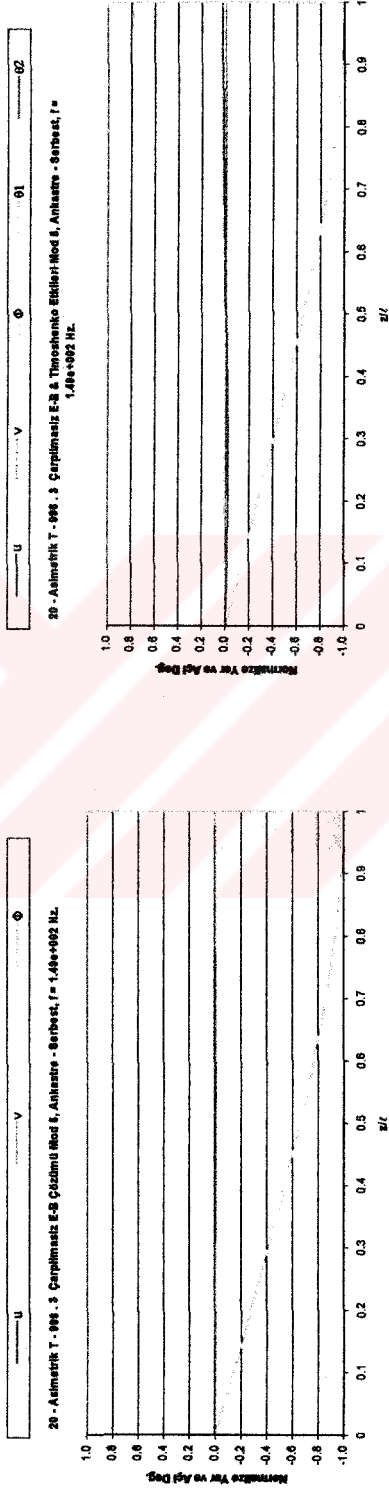
Şekil A-2.8 Asimetrik T Profil –Konsol Kiriş - Mod 2



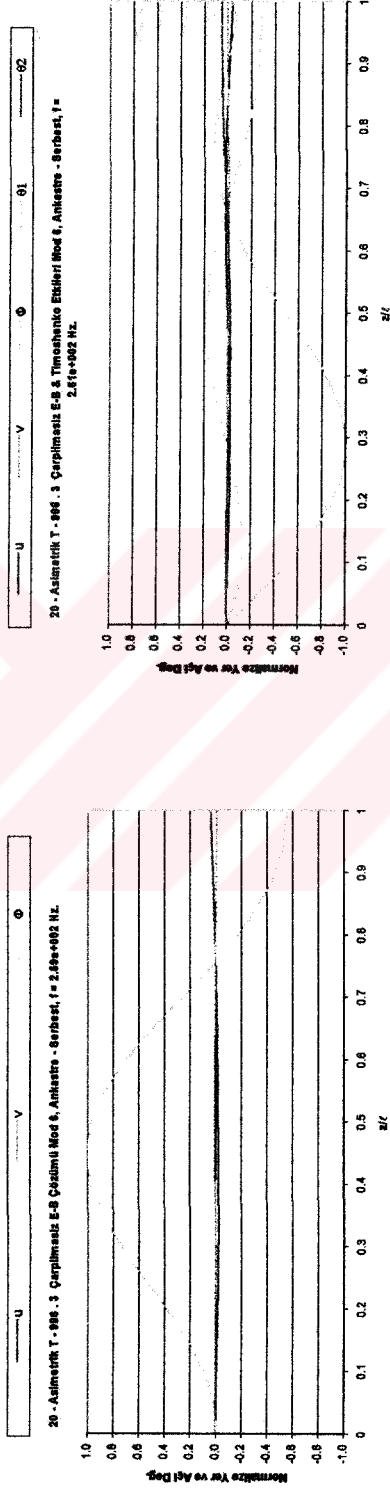
Şekil A-2.9 Asimetrik T Profil –Konsol Kiriş - Mod 3



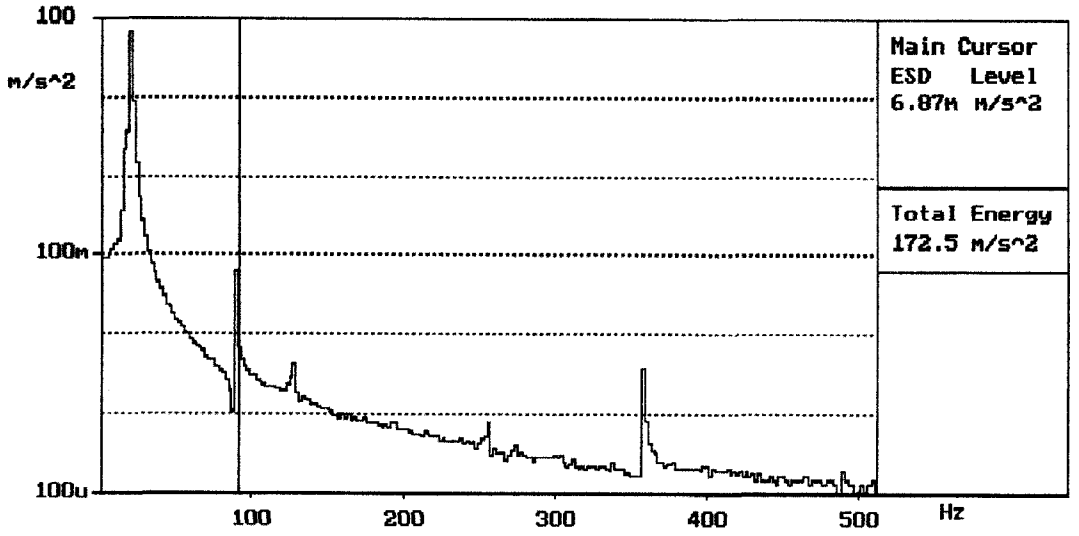
Şekil A-2.10 Asimetrik T Profil -Konsol Kiriş - Mod 4



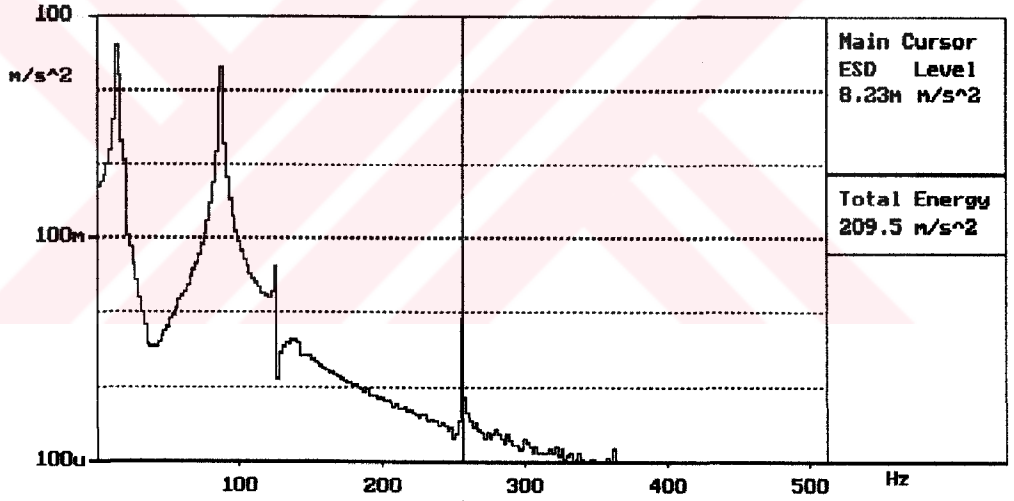
Şekil A-2.11 Asimetrik T Profil –Konsol Kiriş - Mod 5



Şekil A-2.12 Asimetrik T Profil –Konsol Kiriş - Mod 6

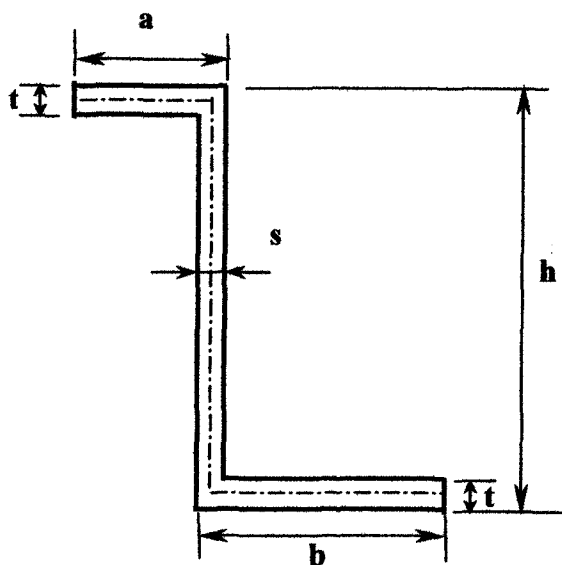


Şekil A-2.13 Asimetrik T Profil ile Yapılan Deneyde Transduser'in Düşey Tutulması Halinde Alınan Frekans Spektrumu:



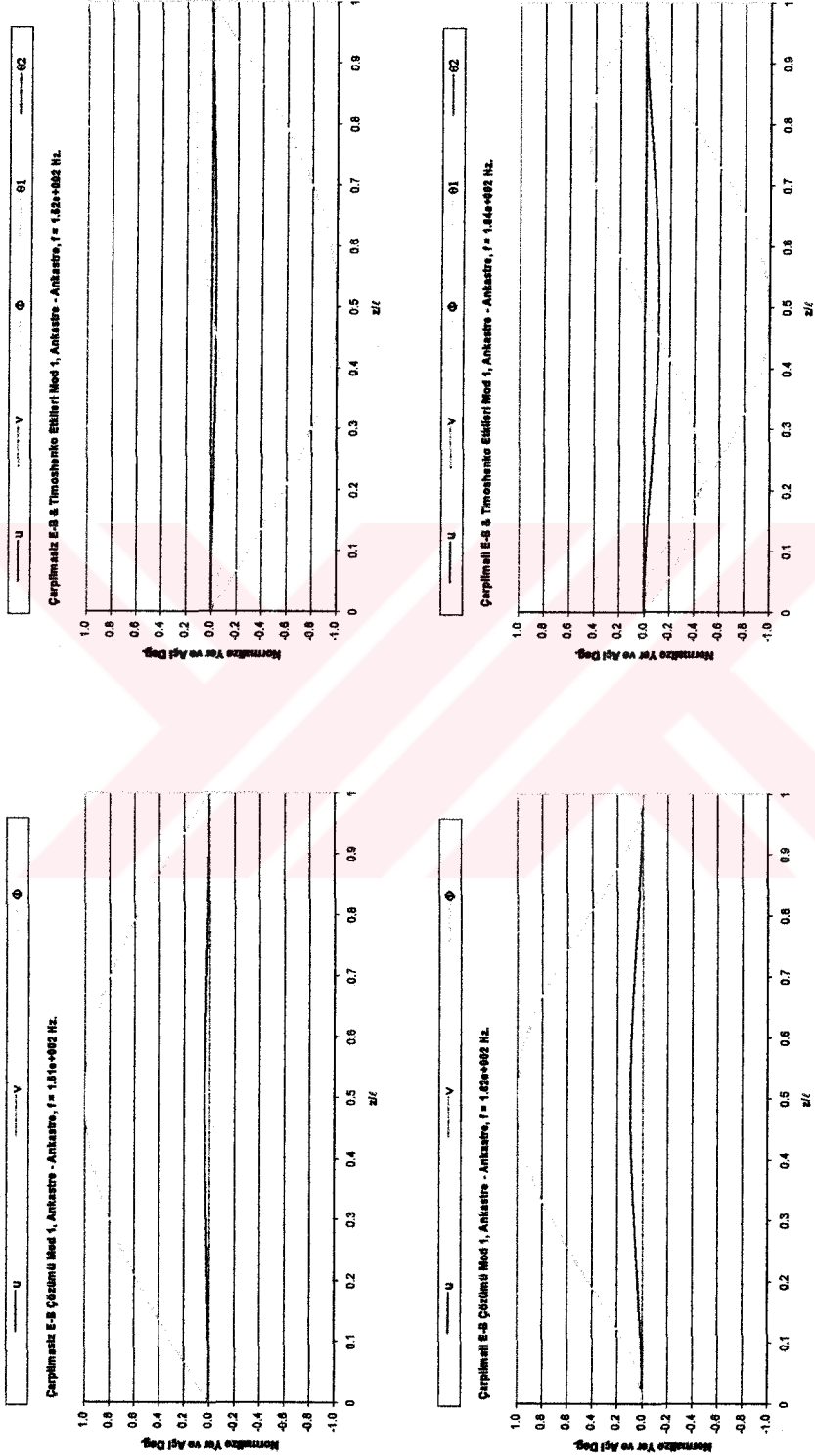
Şekil A-2.14 Asimetrik T Profil ile Yapılan Deneyde Transduser'in Yatay Tutulması Halinde Alınan Frekans Spektrumu:

A-3. Asimetrik Z Profil

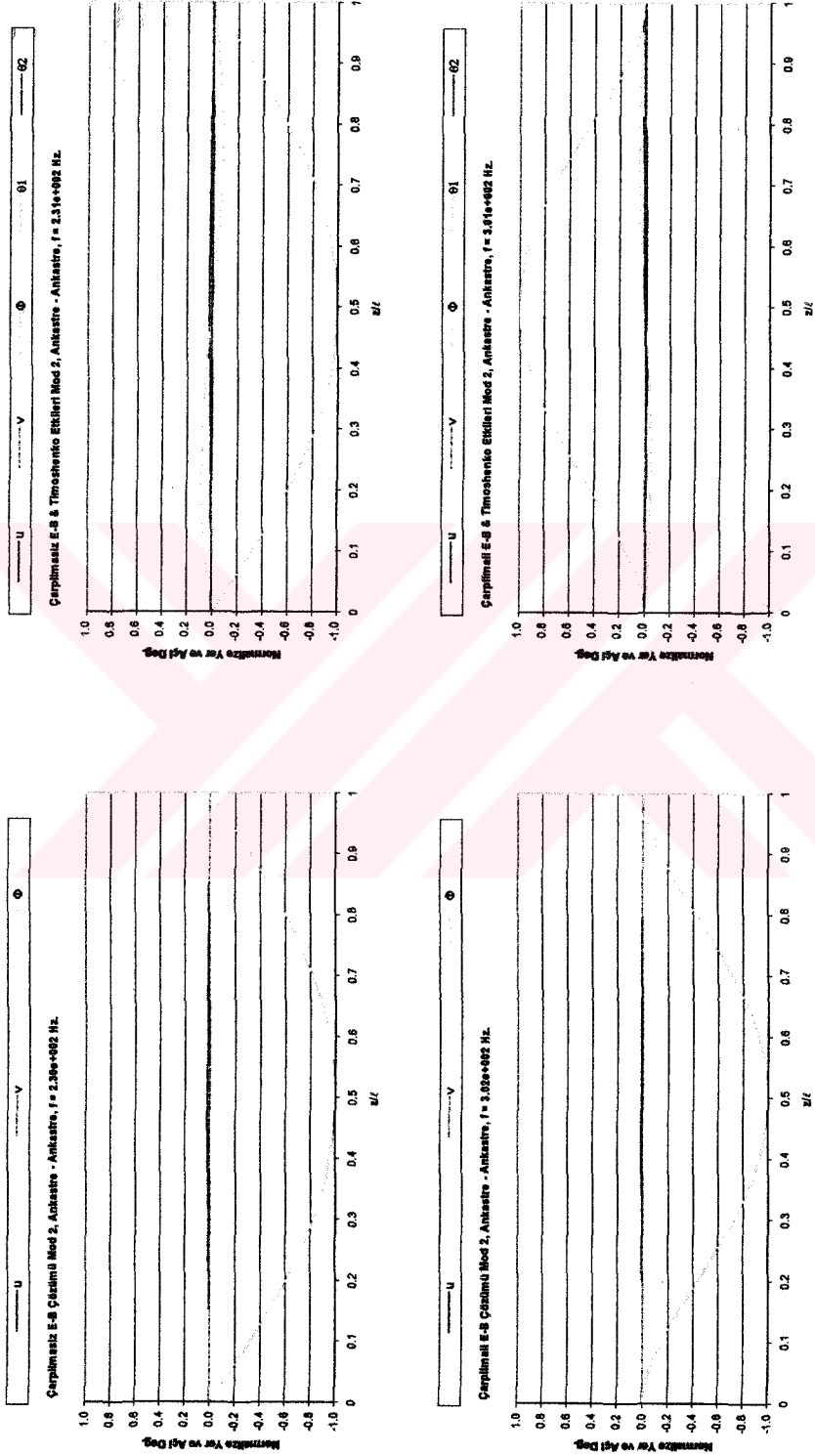


$a = 20 \text{ mm.}$
 $s = 3.5 \text{ mm.}$
 $h = 42 \text{ mm.}$
 $t = 3.5 \text{ mm.}$
 $b = 30 \text{ mm.}$
 $\ell = 800 \text{ mm.}$

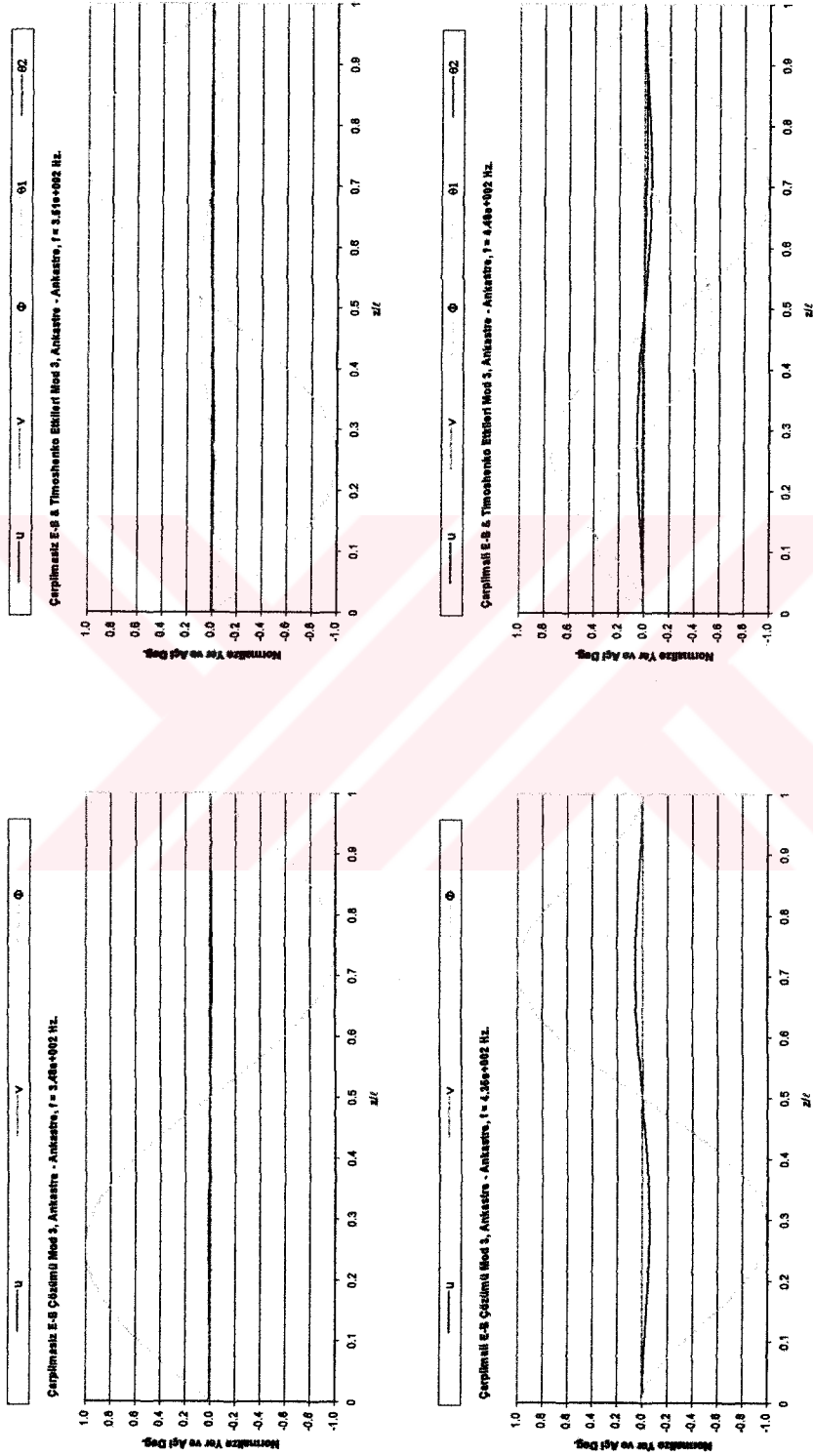
$e_1 \text{ (m)}$	-0.004596
$e_2 \text{ (m)}$	-0.008363
k_x	3.8249
k_y	3.1636



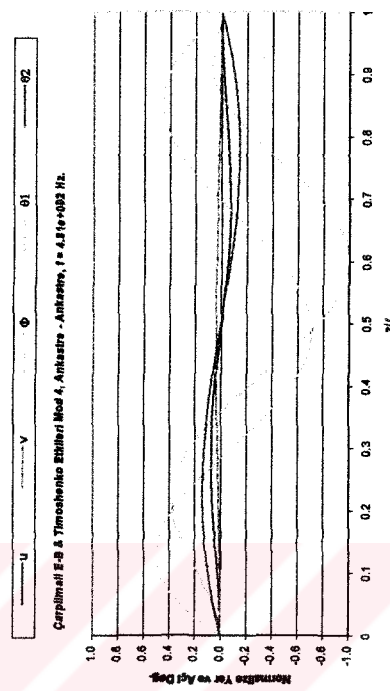
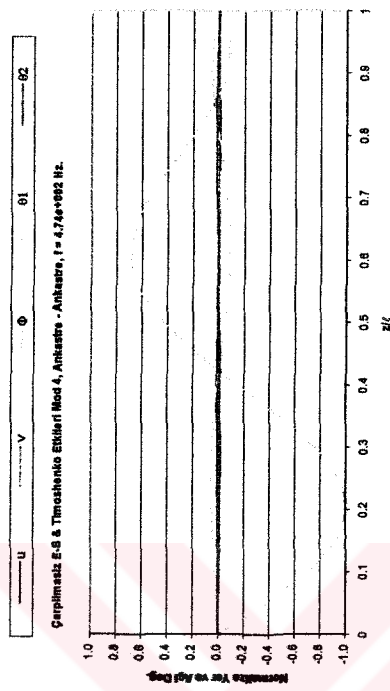
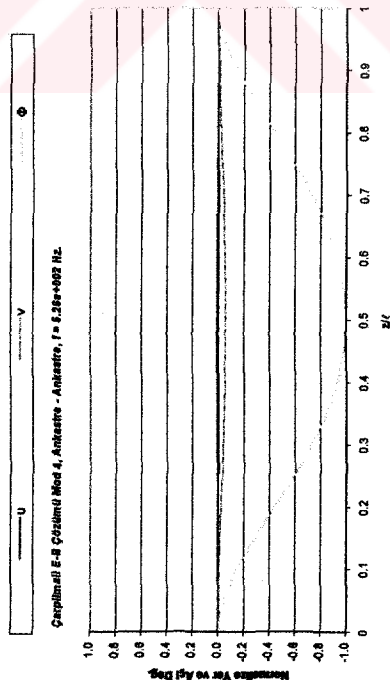
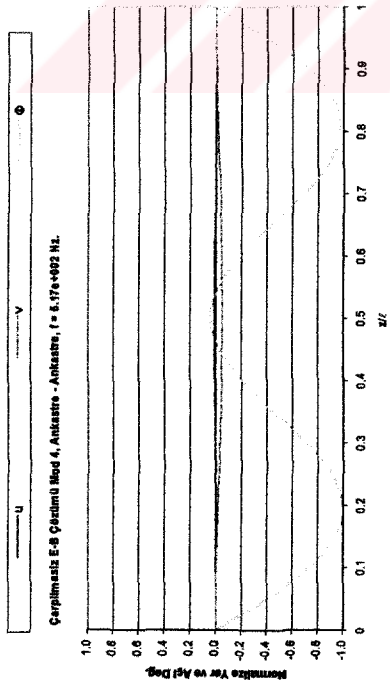
Şekil A-3.1 Asimetrik Z Profil – Ankastre Kiriş - Mod 1



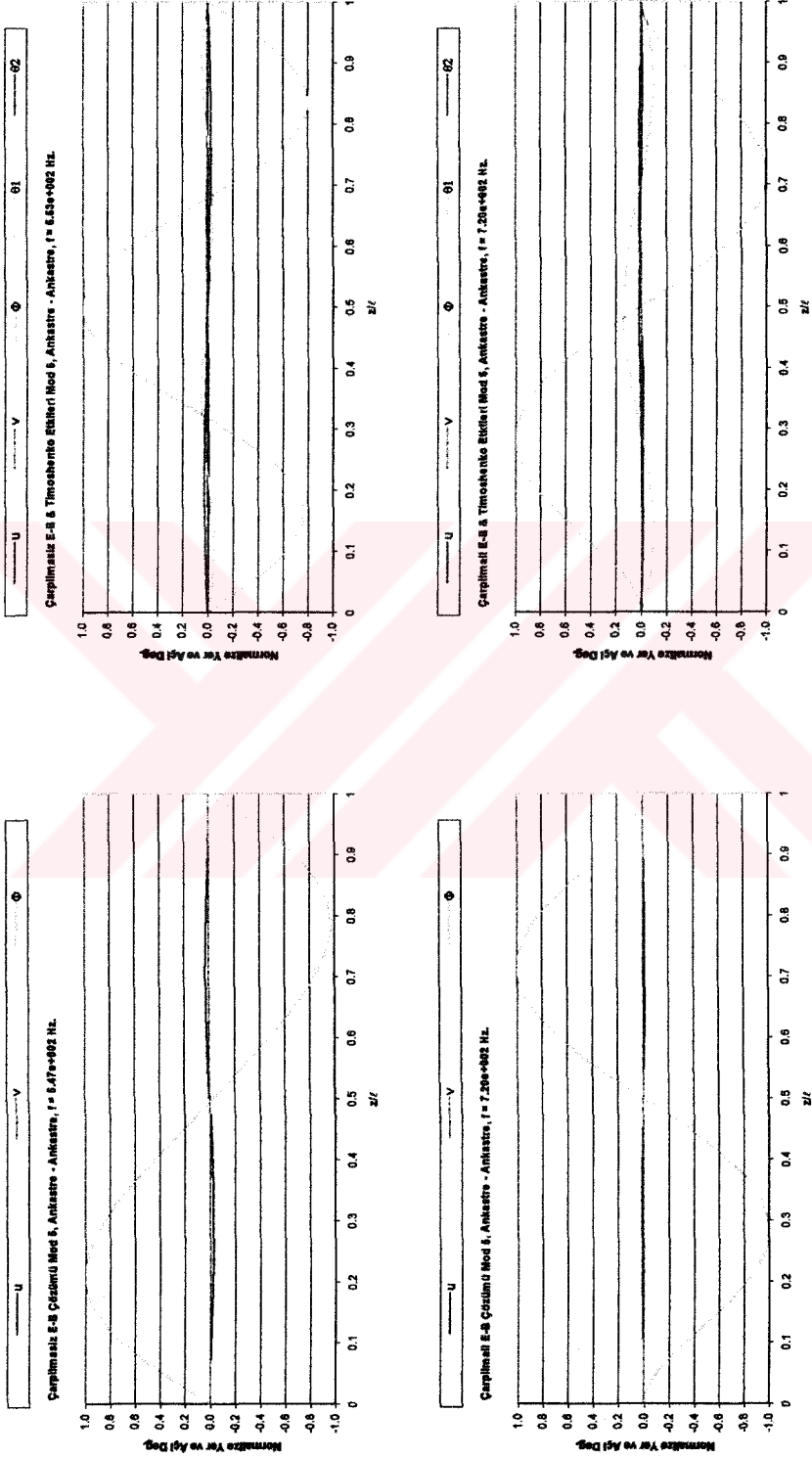
Şekil A-3.2 Asimetrik Z Profil – Ankastre Kiriş - Mod 2



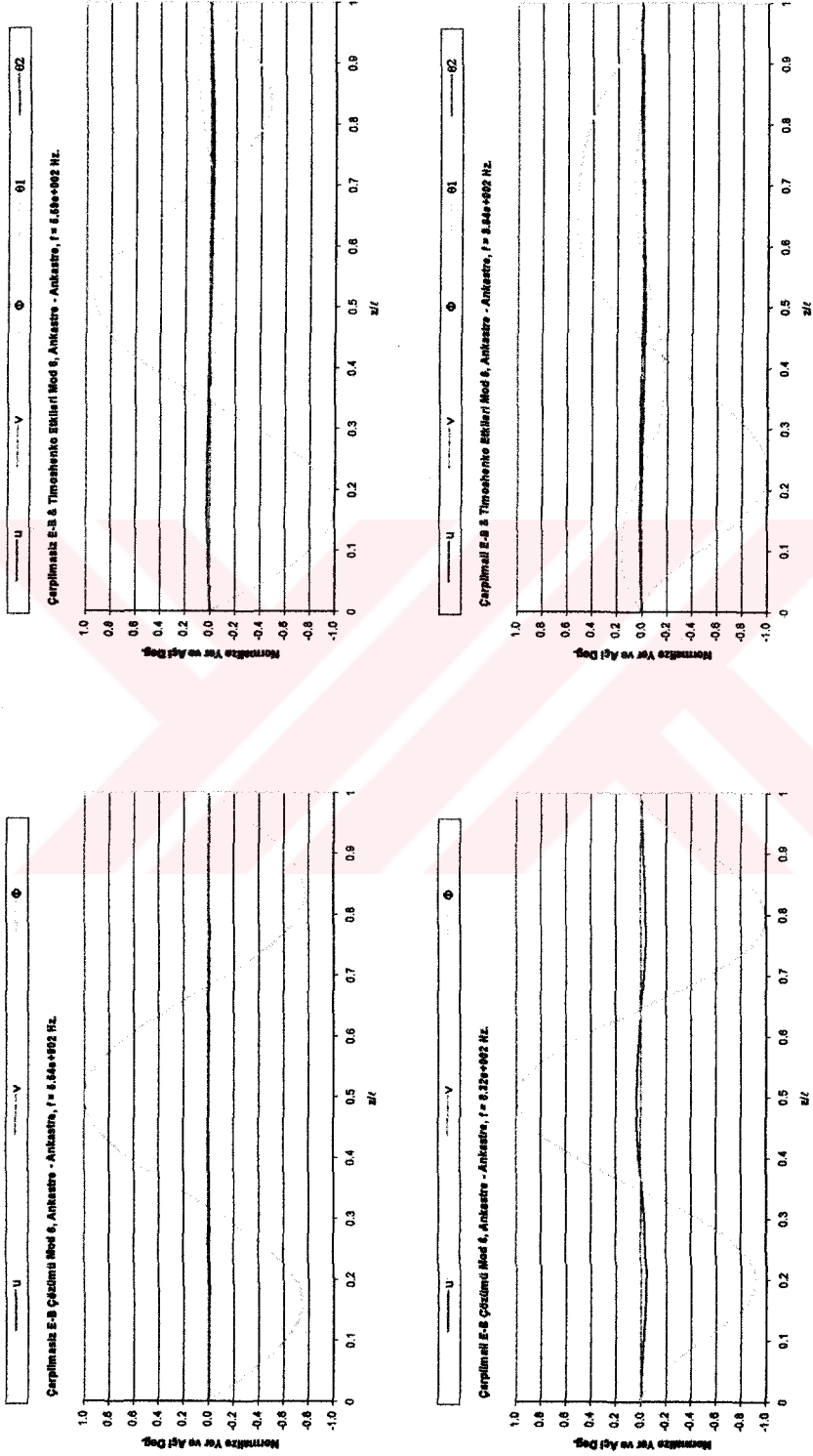
Şekil A-3.3 Asimetrik Z Profil – Ankastre Kiriş - Mod 3



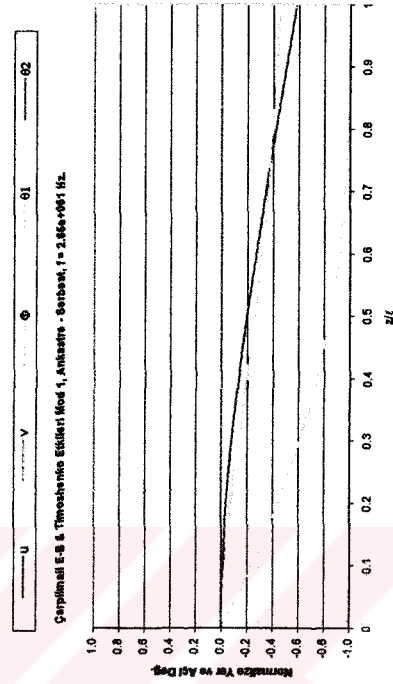
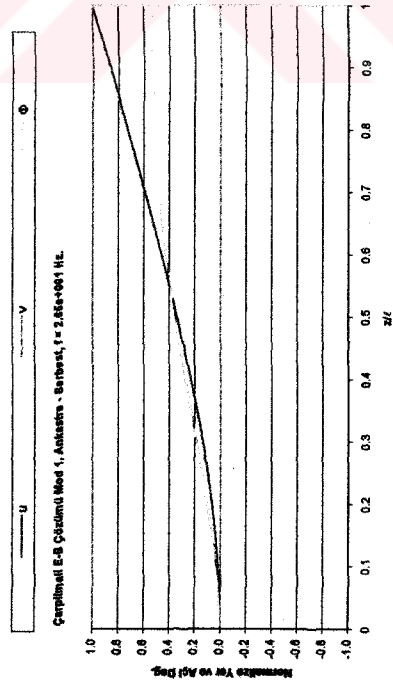
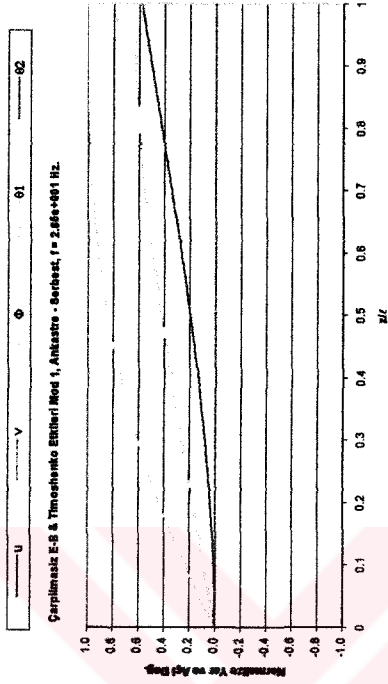
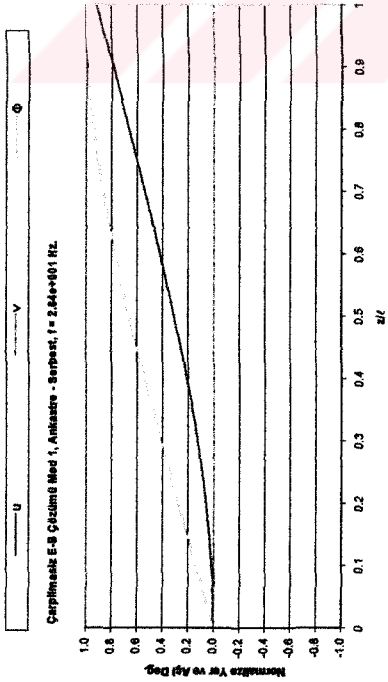
Şekil A-3.4 Asimetrik Z Profil – Ankastre Kiriş - Mod 4



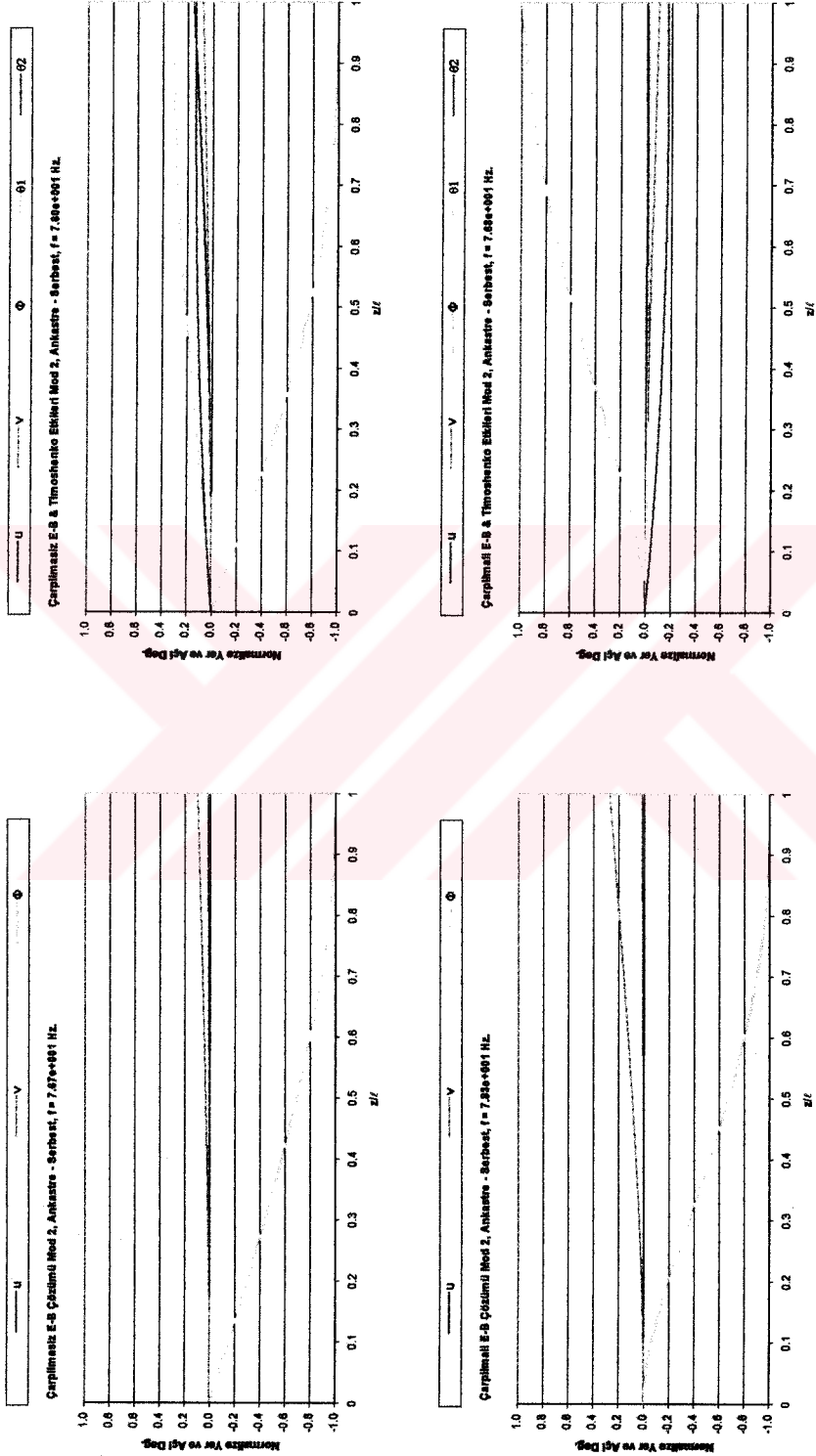
Şekil A-3.5 Asimetrik Z Profil – Ankastre Kiriş - Mod 5



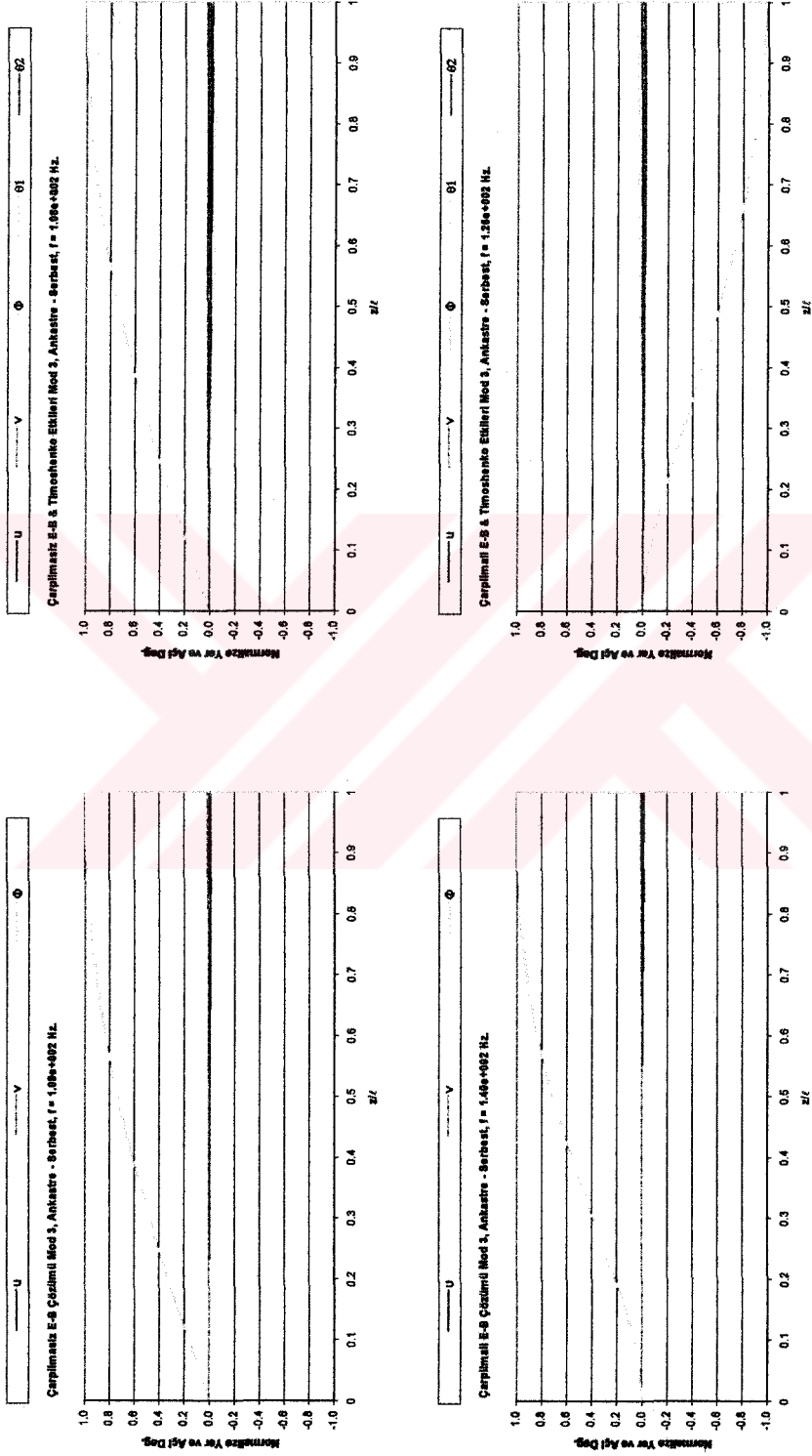
Şekil A-3.6 Asimetrik Z Profil – Ankastre Kiriş - Mod 6



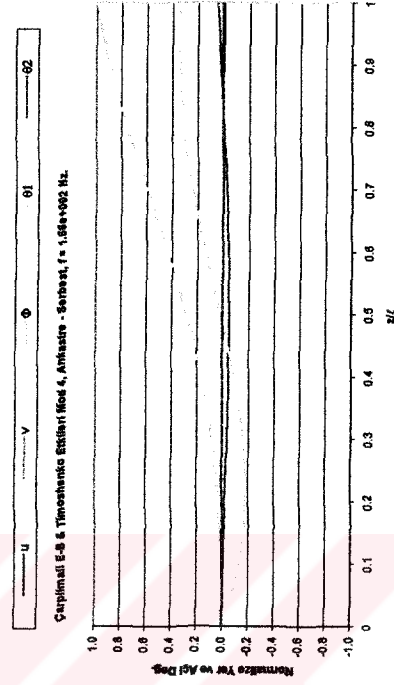
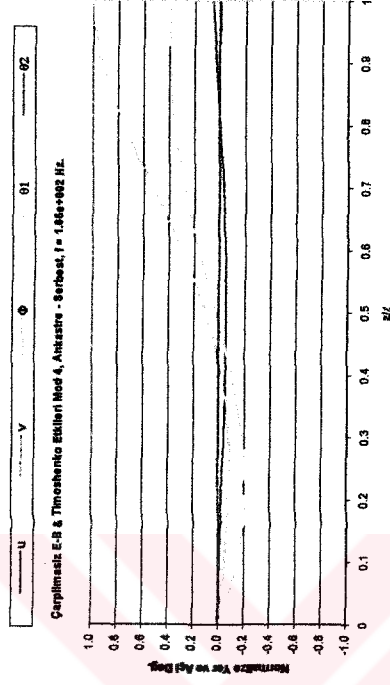
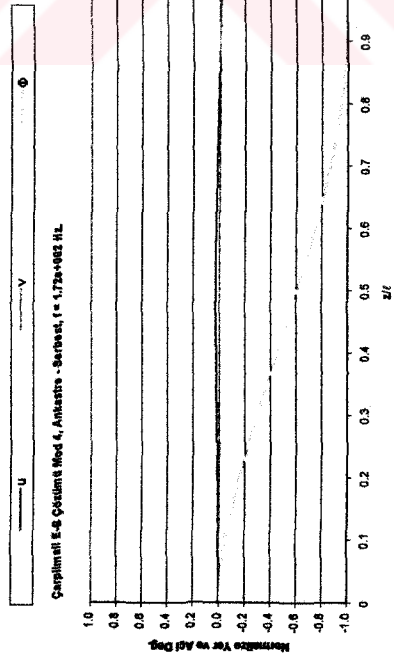
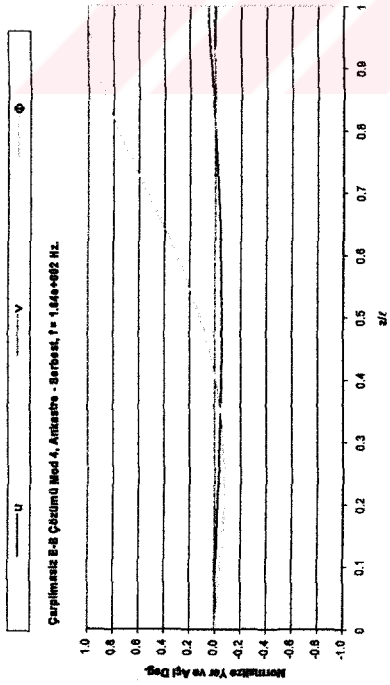
Şekil A-3.7 Asimetrik Z Profil –Konsol Kiriş - Mod 1



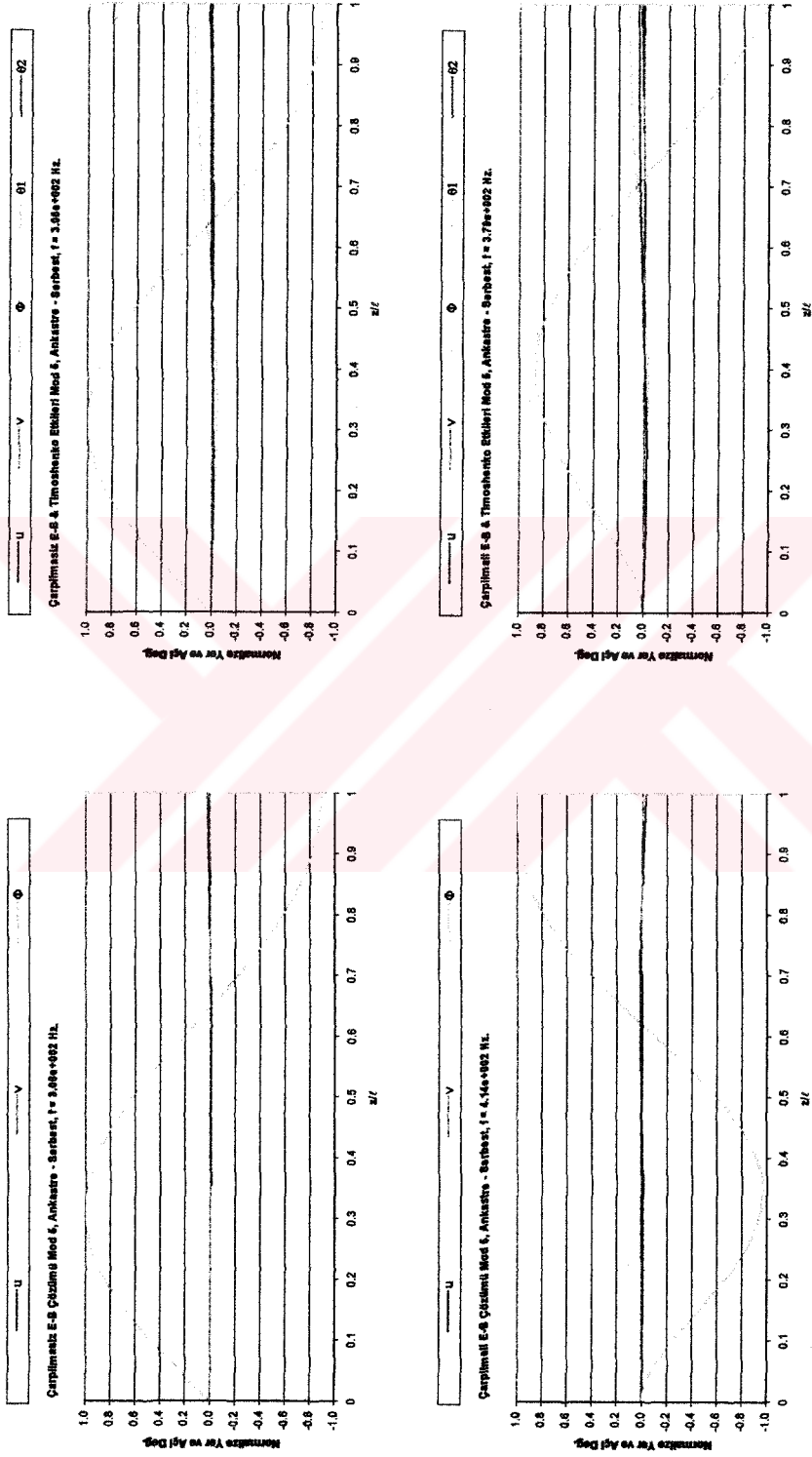
Şekil A-3.8 Asimetrik Z Profil –Konsol Kiriş - Mod 2



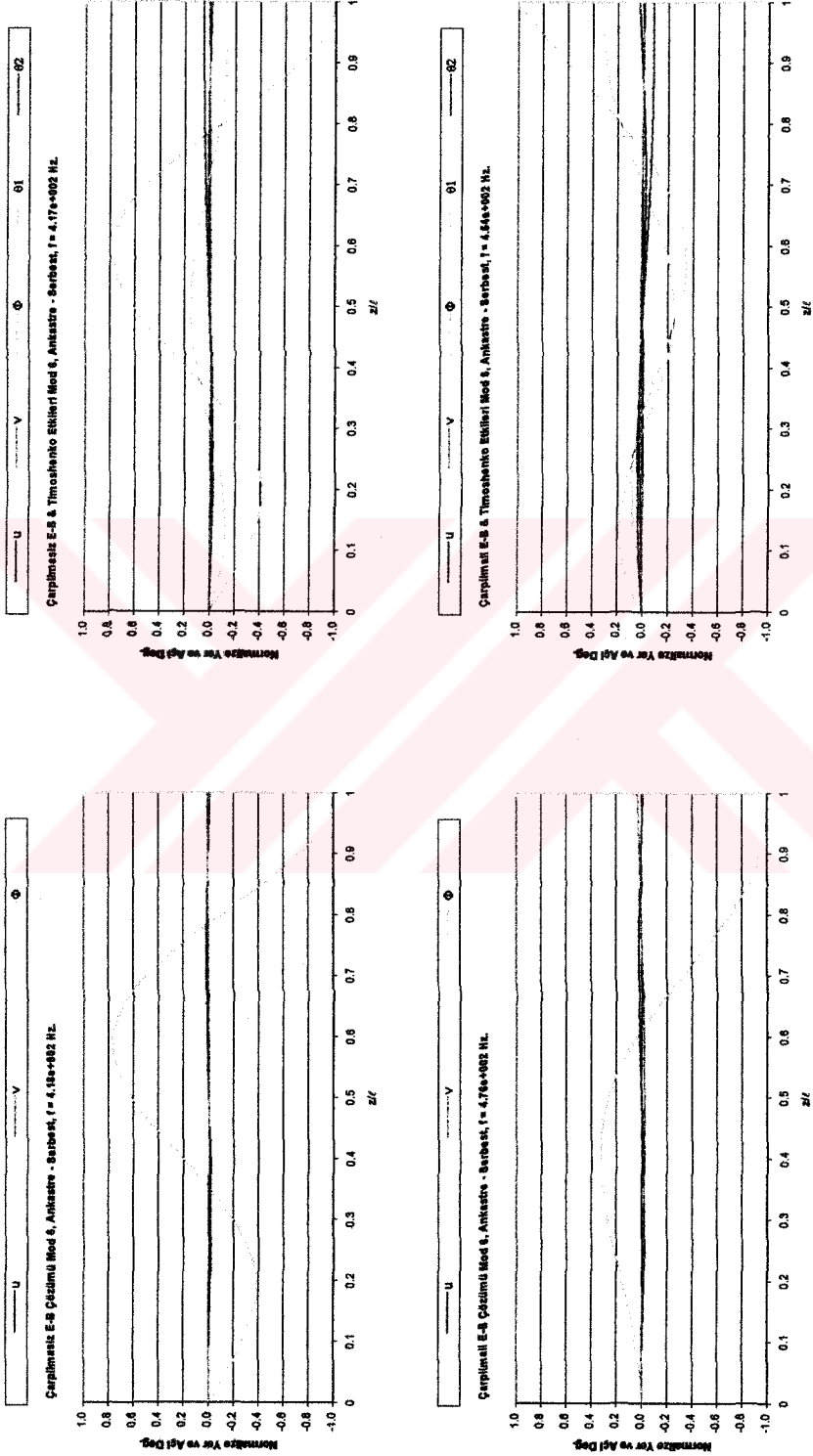
Şekil A-3.9 Asimetrik Z Profil –Konsol Kiriş - Mod 3



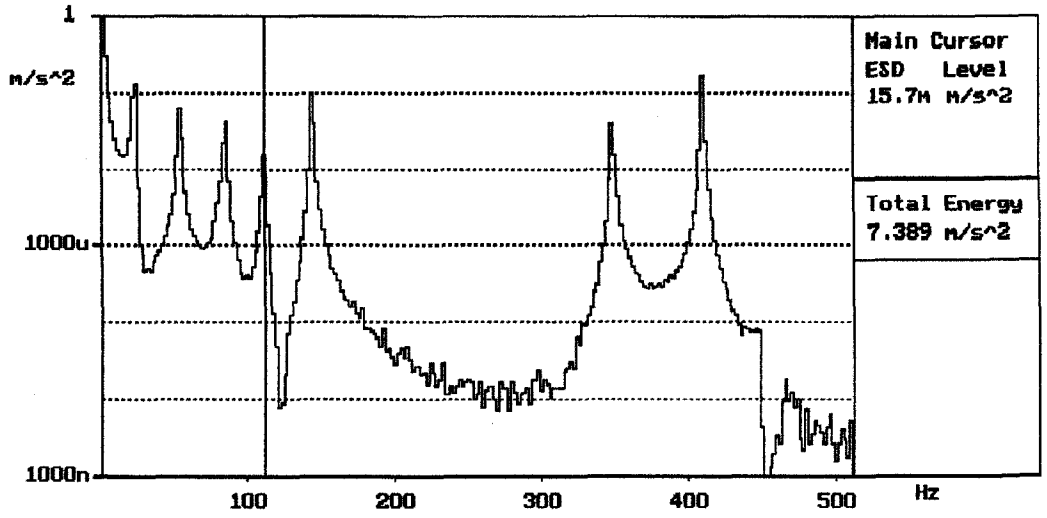
Şekil A-3.10 Asimetrik Z Profil –Konsol Kiriş - Mod 4



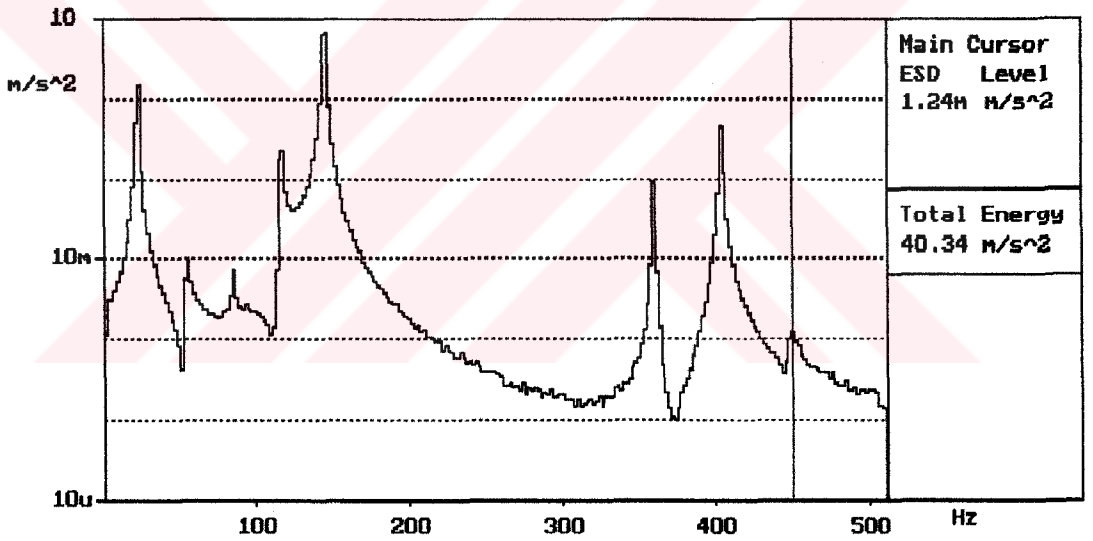
Şekil A-3.11 Asimetrik Z Profil –Konsol Kiriş - Mod 5



Şekil A-3.12 Asimetrik Z Profil –Konsol Kiriş - Mod 6

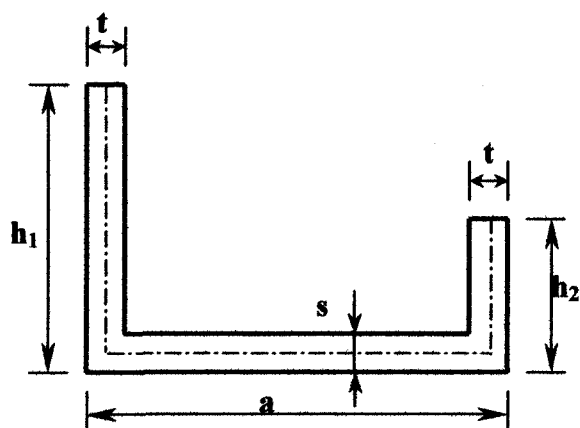


Şekil A-3.13 Asimetrik Z Profil ile Yapılan Deneyde Transduser'in Düşey Tutulması Halinde Alınan Frekans Spektrumu:



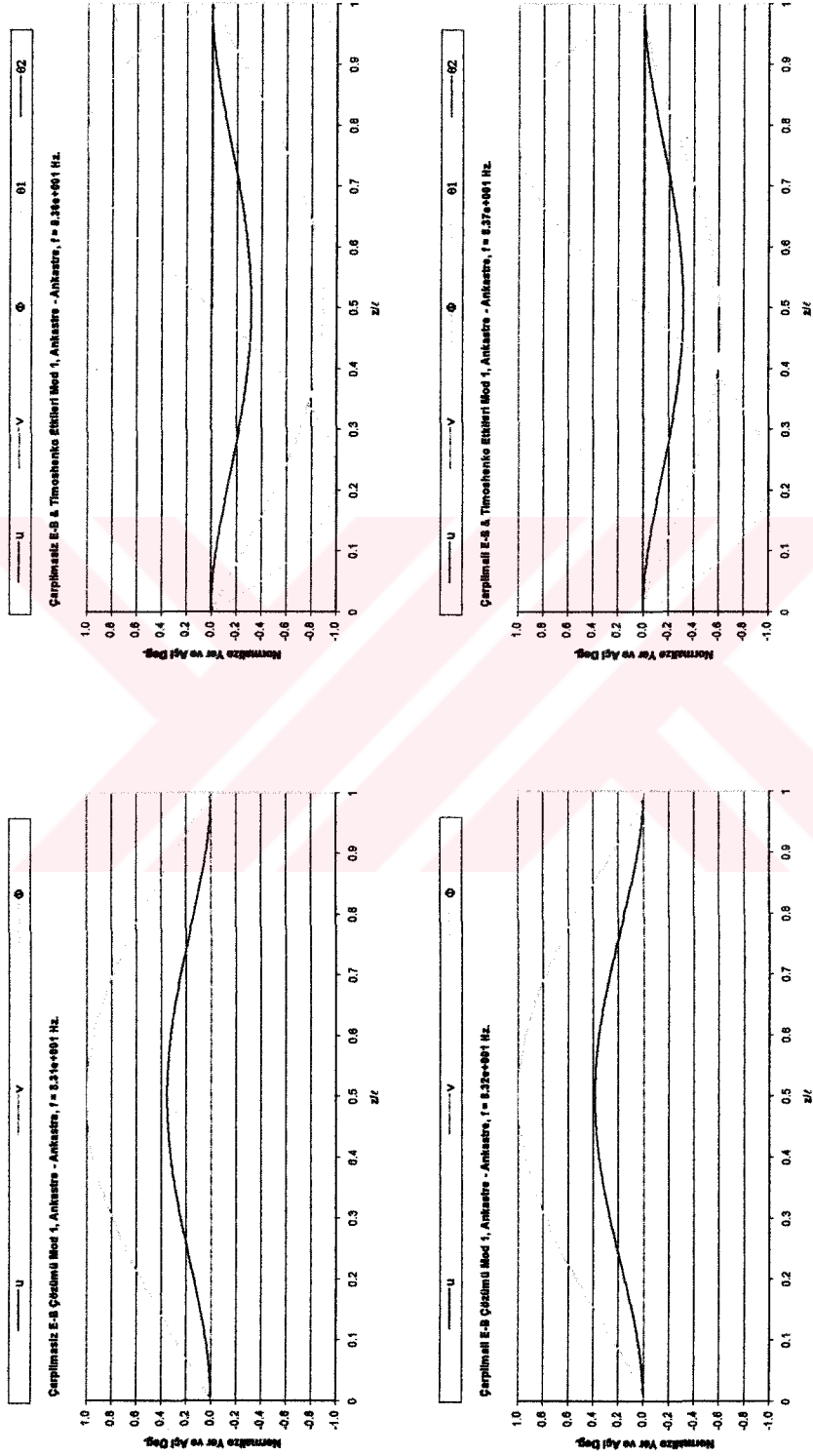
Şekil A-3.14 Asimetrik Z Profil ile Yapılan Deneyde Transduser'in Yatay Tutulması Halinde Alınan Frekans Spektrumu:

A-4. Asimetrik U Profil

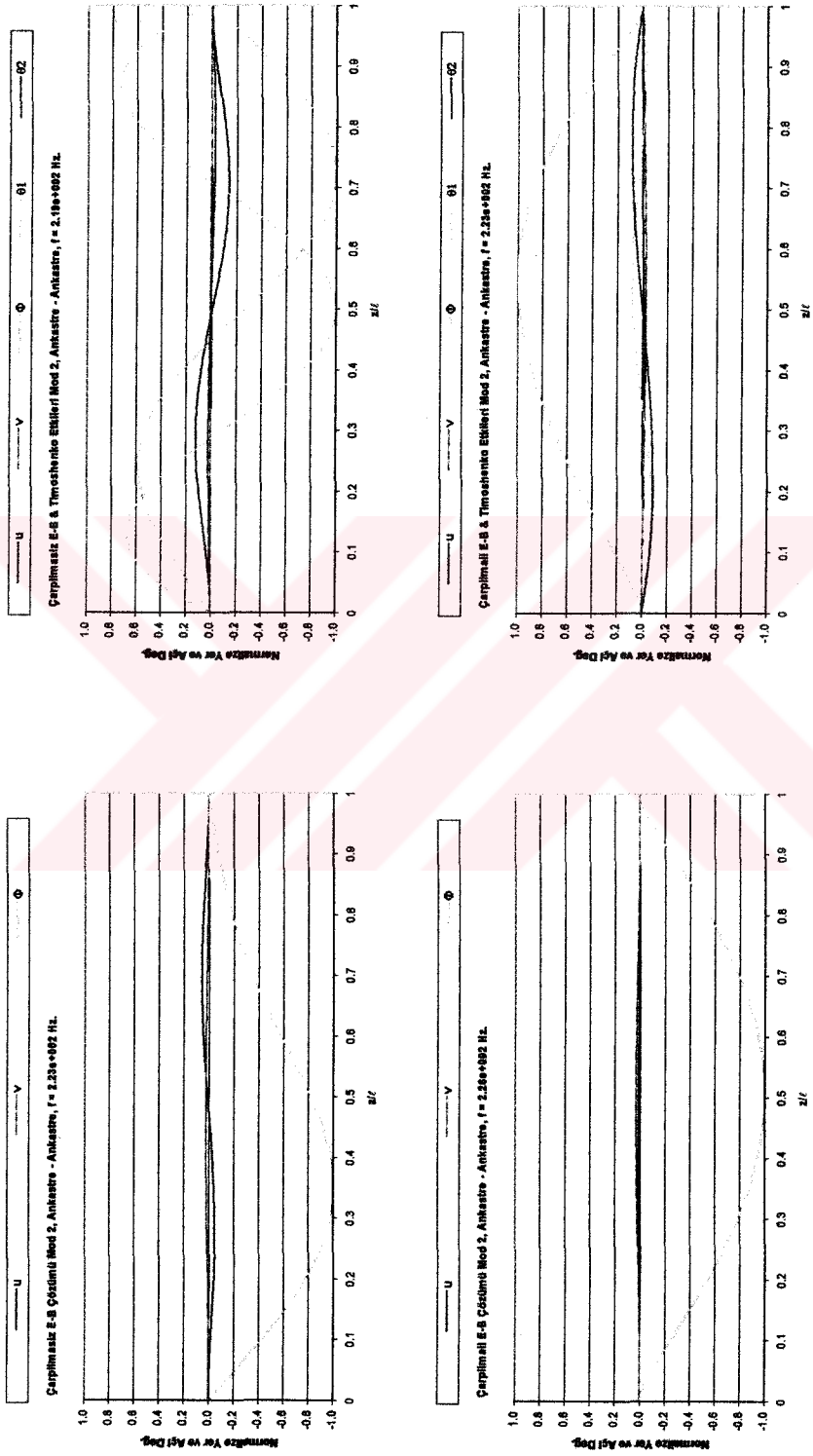


$t = 5 \text{ mm.}$
 $s = 5 \text{ mm.}$
 $h_1 = 21 \text{ mm.}$
 $h_2 = 10 \text{ mm.}$
 $a = 40 \text{ mm.}$
 $\ell = 980 \text{ mm.}$

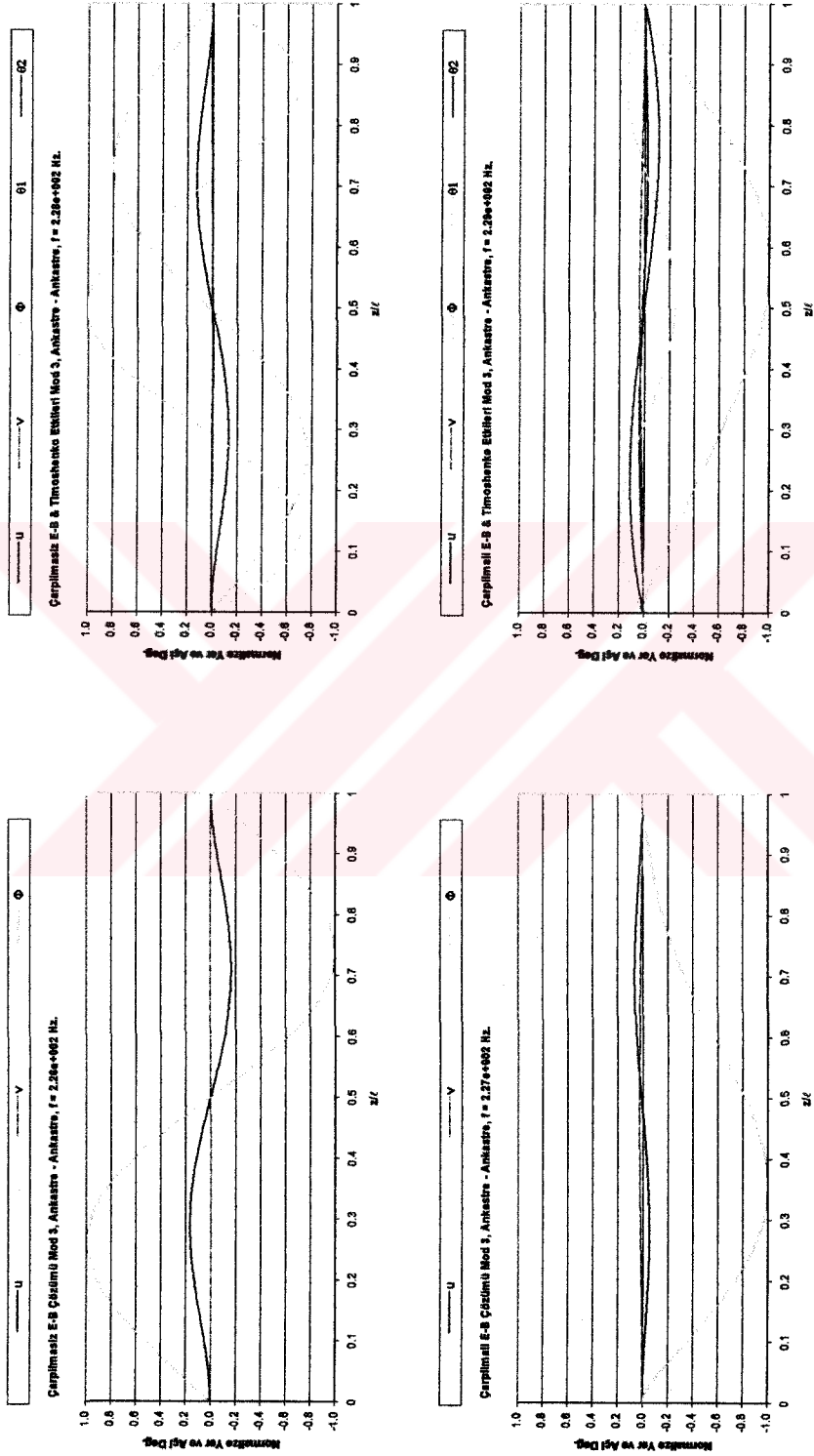
$e_1 \text{ (m)}$	-0.007669
$e_2 \text{ (m)}$	-0.008988
k_x	4.0258
k_y	2.0131



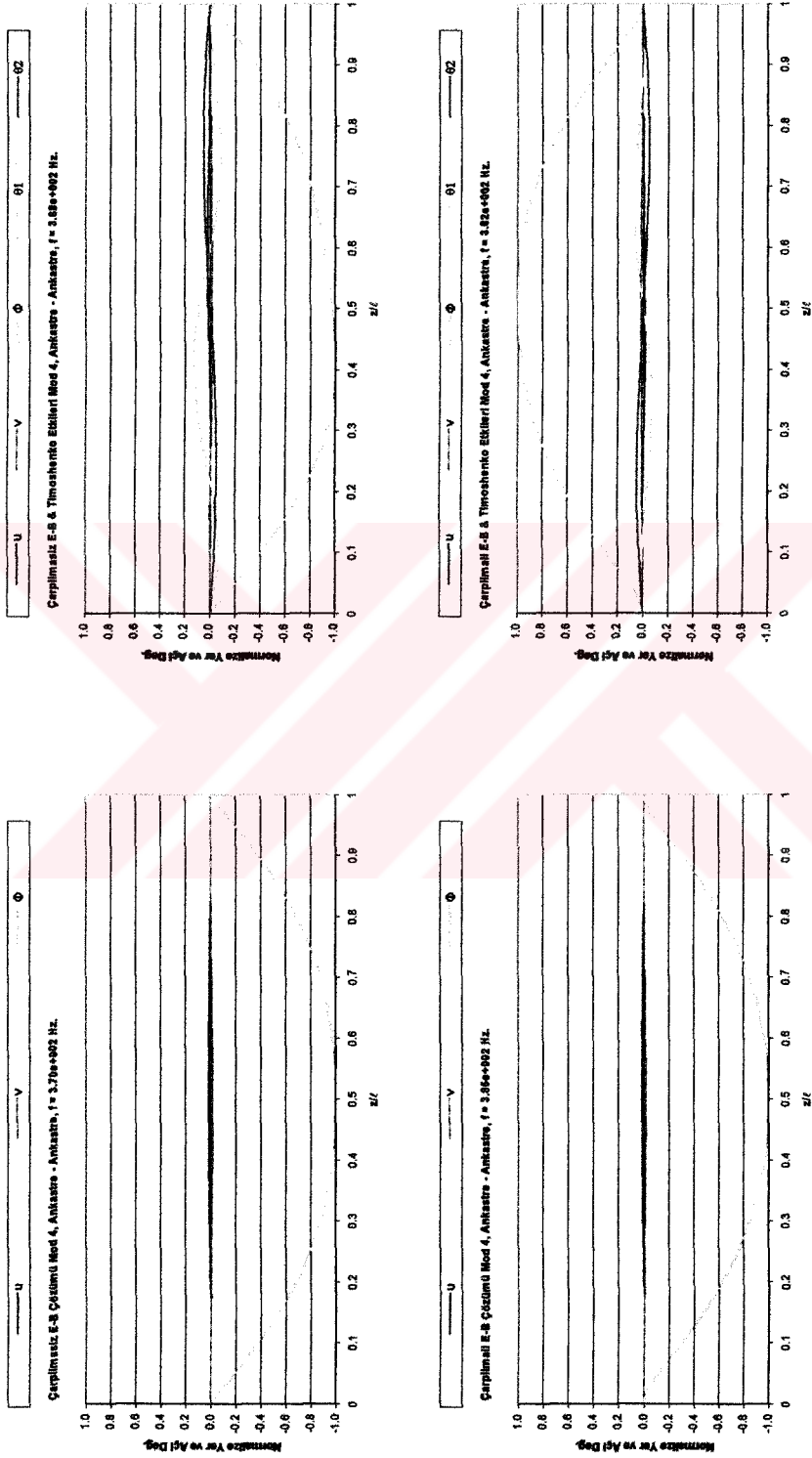
Şekil A-4.1 Asimetrik U Profil – Ankastre Kiriş - Mod 1



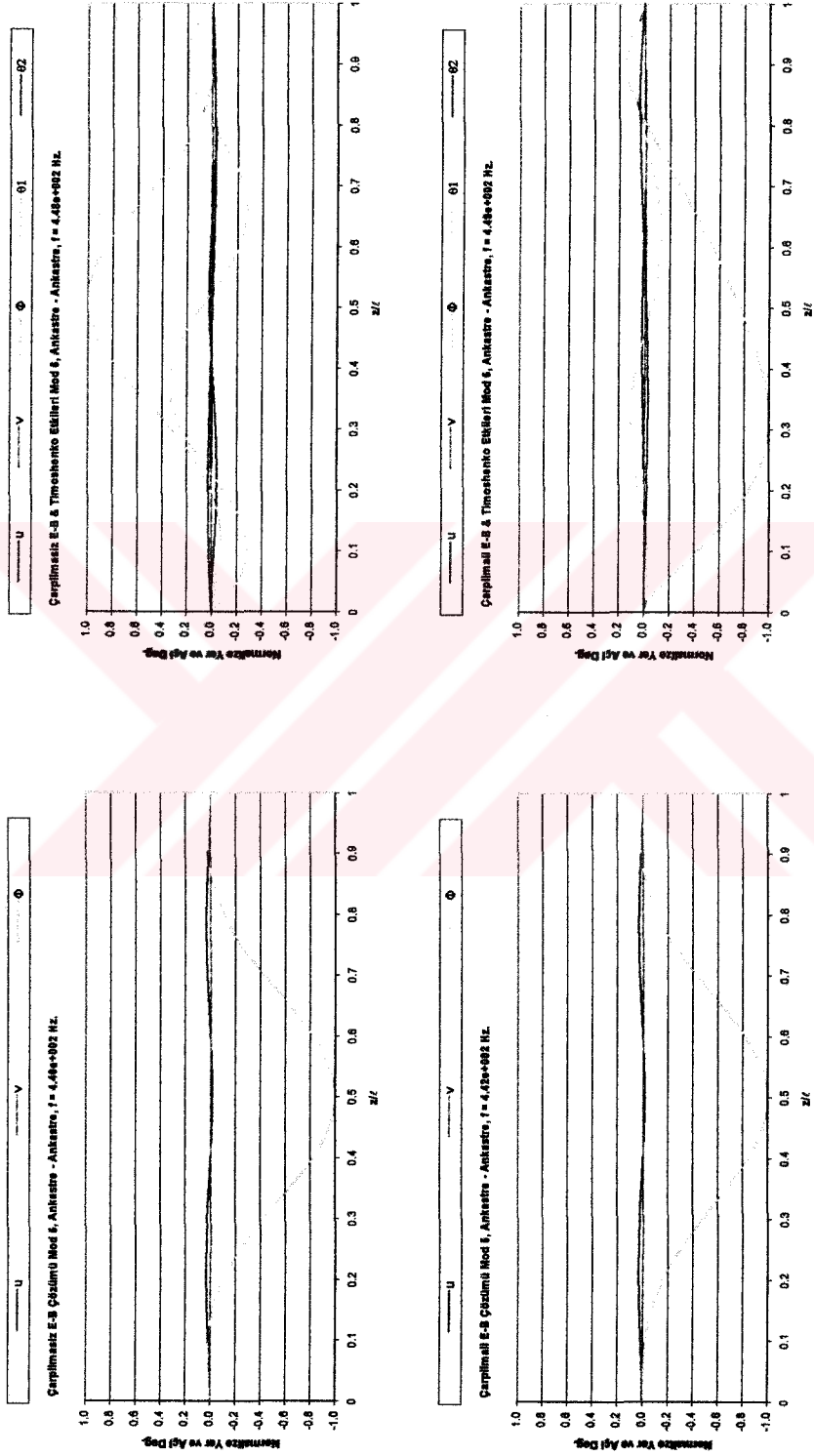
Şekil A-4.2 Asimetrik U Profil – Ankastre Kiriş - Mod 2



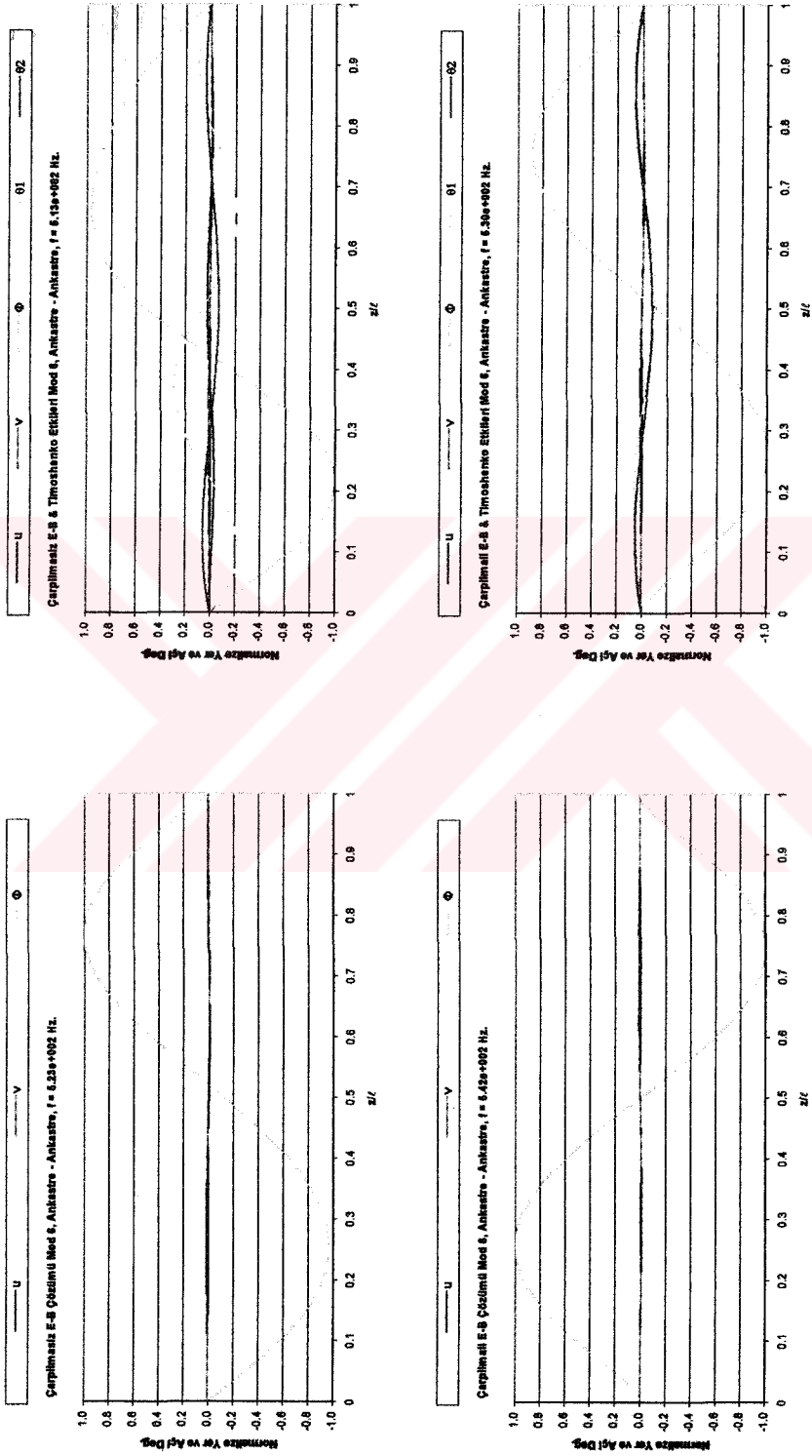
Şekil A-4.3 Asimetrik U Profil – Ankastre Kiriş - Mod 3



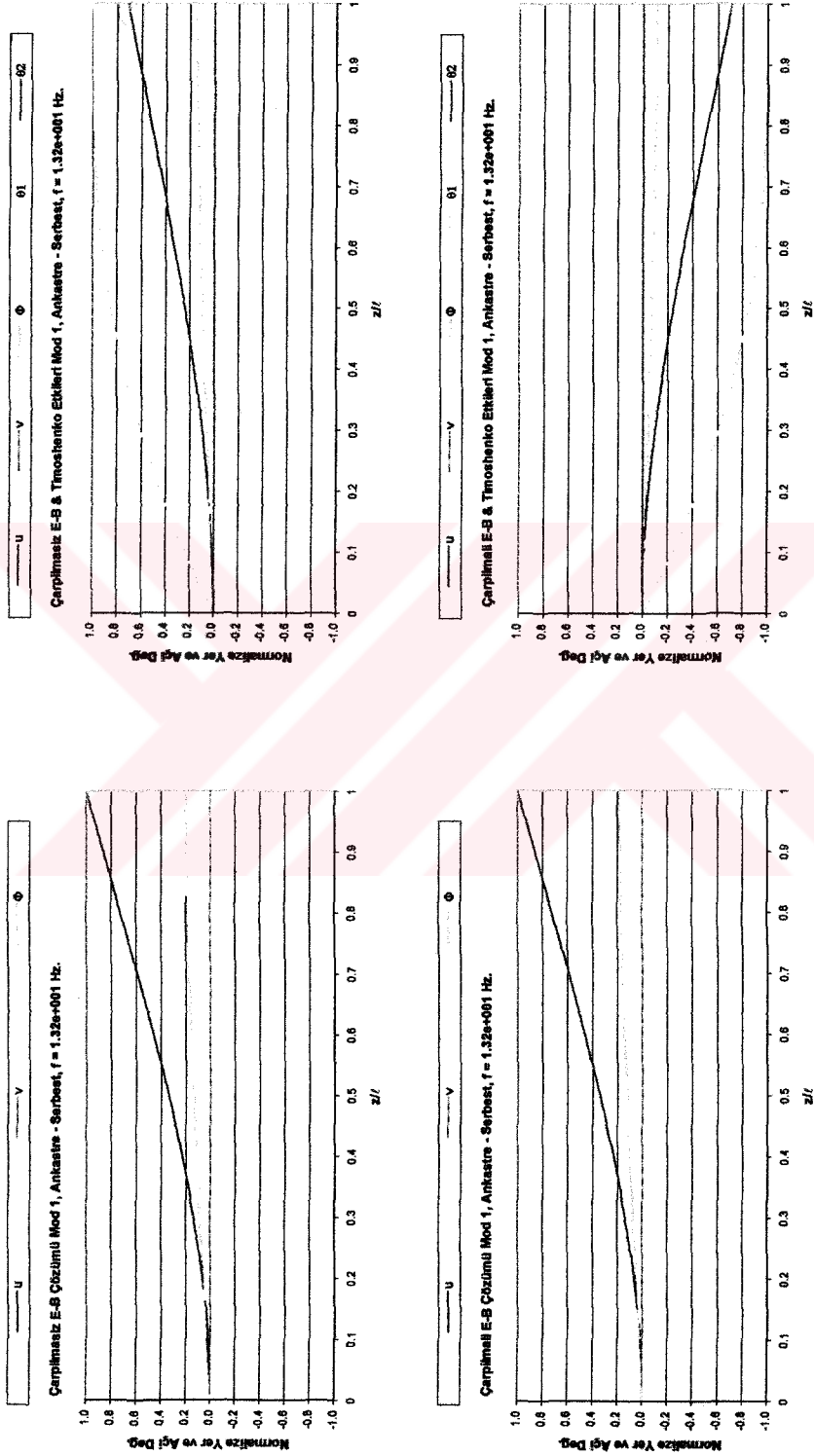
Şekil A-4.4 Asimetrik U Profil – Ankastre Kiriş - Mod 4



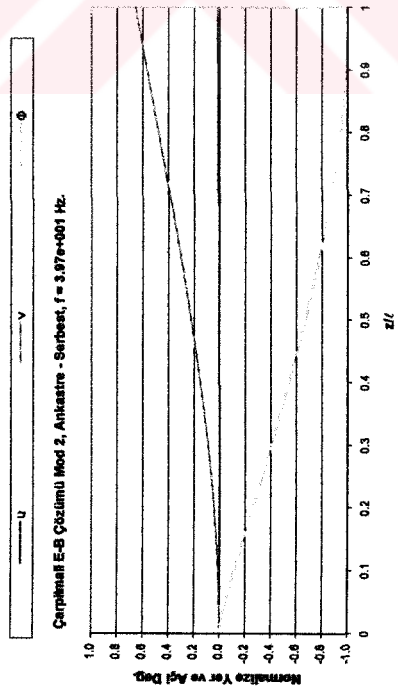
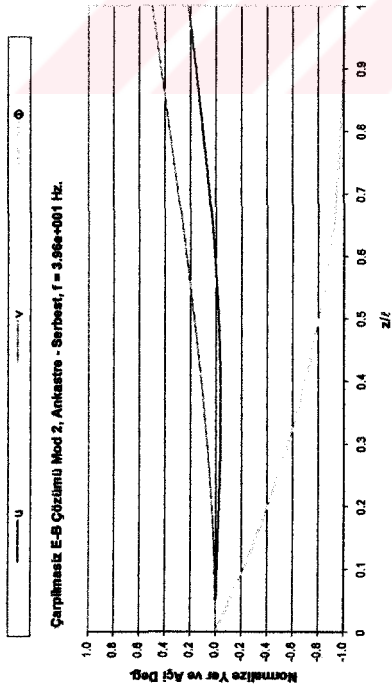
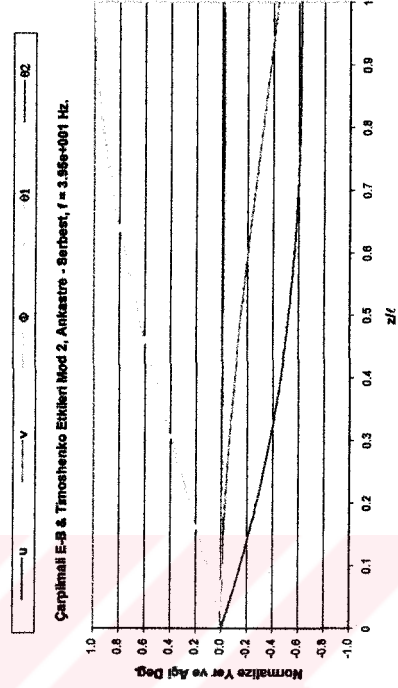
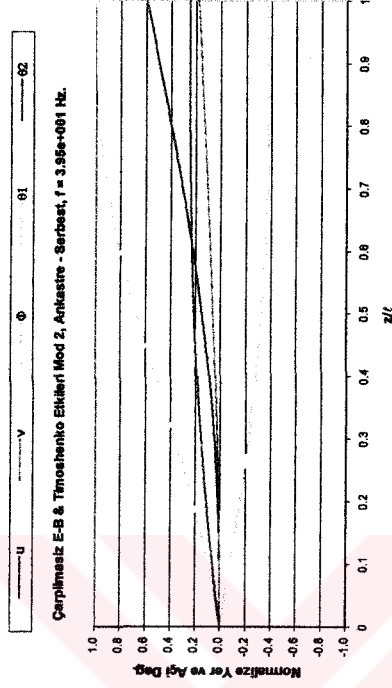
Şekil A-4.5 Asimetrik U Profil – Ankastra Kiriş - Mod 5



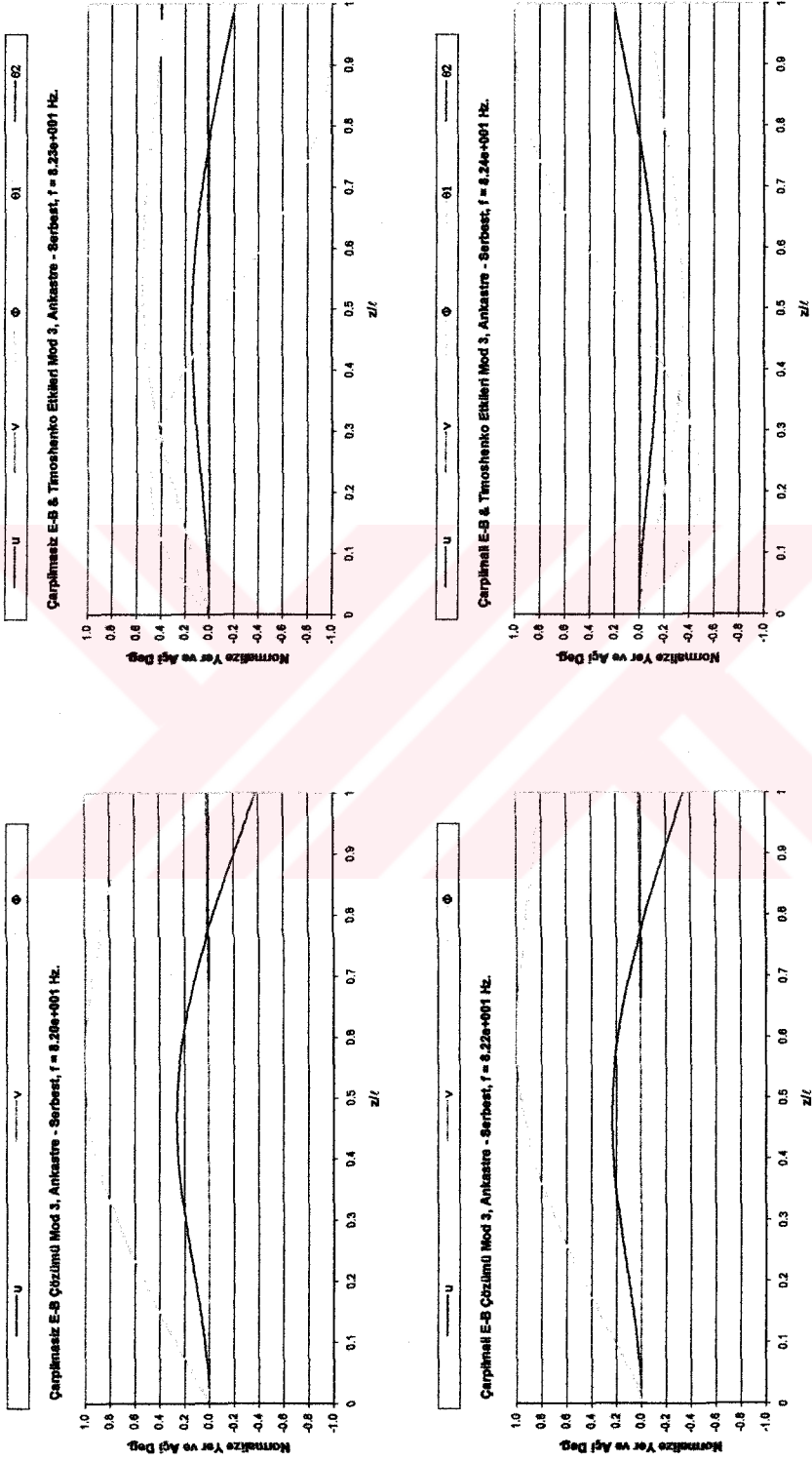
Şekil A-4.6 Asimetrik U Profil – Ankastre Kiriş - Mod 6



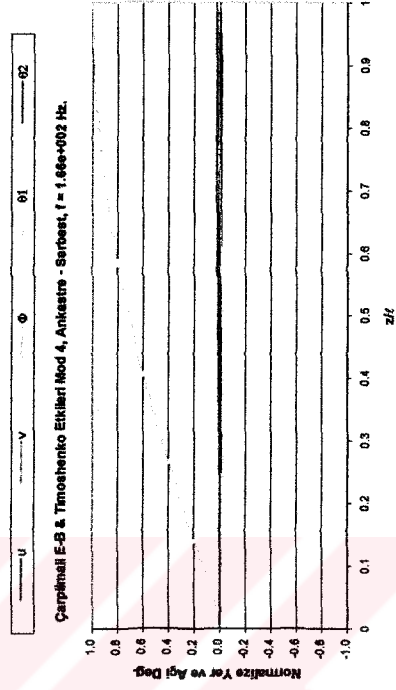
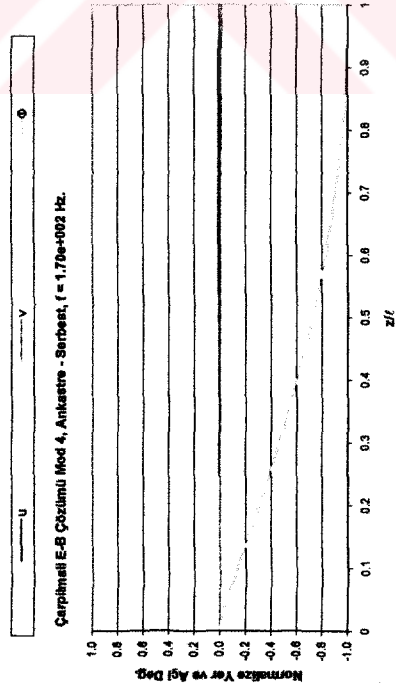
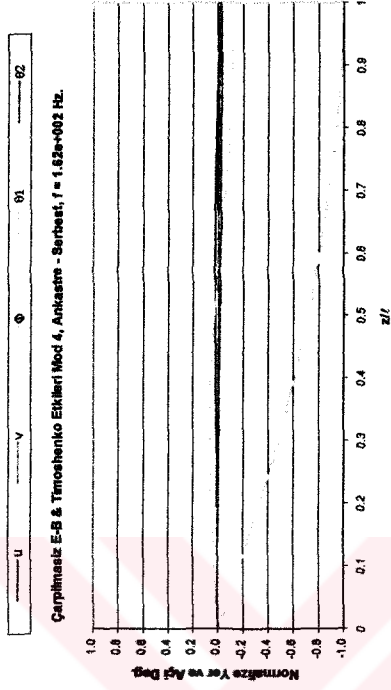
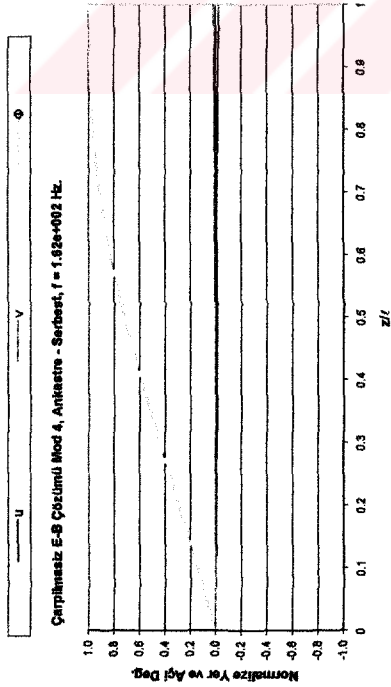
Şekil A-4.7 Asimetrik U Profil –Konsol Kiriş - Mod 1



Şekil A-4.8 Asimetrik U Profil -Konsol Kiriş - Mod 2



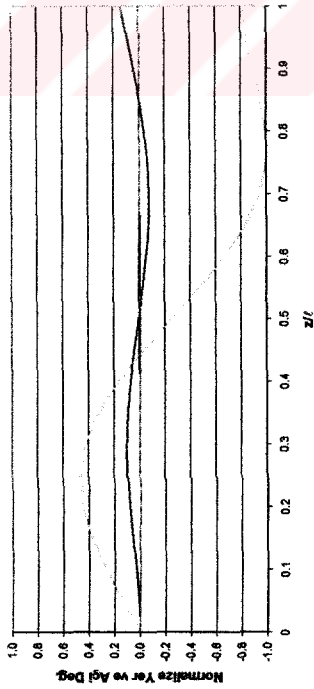
Şekil A-4.9 Asimetrik U Profil –Konsol Kiriş - Mod 3



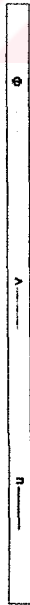
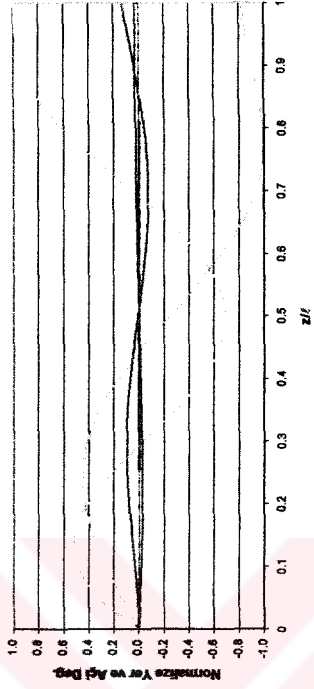
Şekil A-4.10 Asimetrik U Profil –Konsol Kiriş - Mod 4



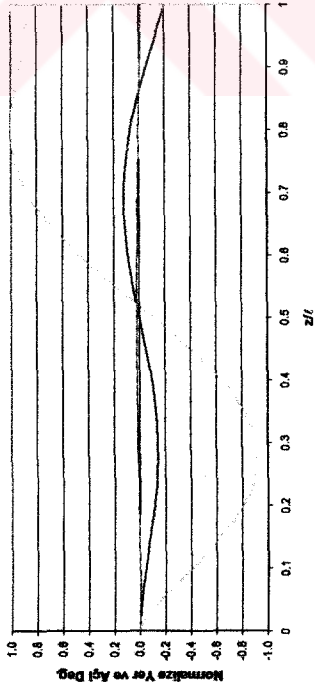
Çarpılmasız E-B Çözümü Mod 5, Ankastre - Serbest, $f = 2.27e+002$ Hz.



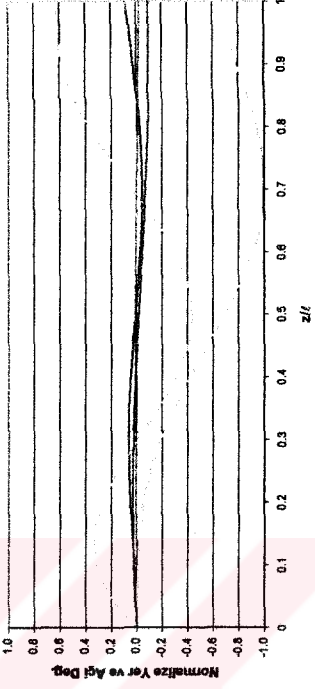
Çarpılmasız E-B & Timoshenko Etkileri Mod 5, Ankastre - Serbest, $f = 2.28e+002$ Hz.



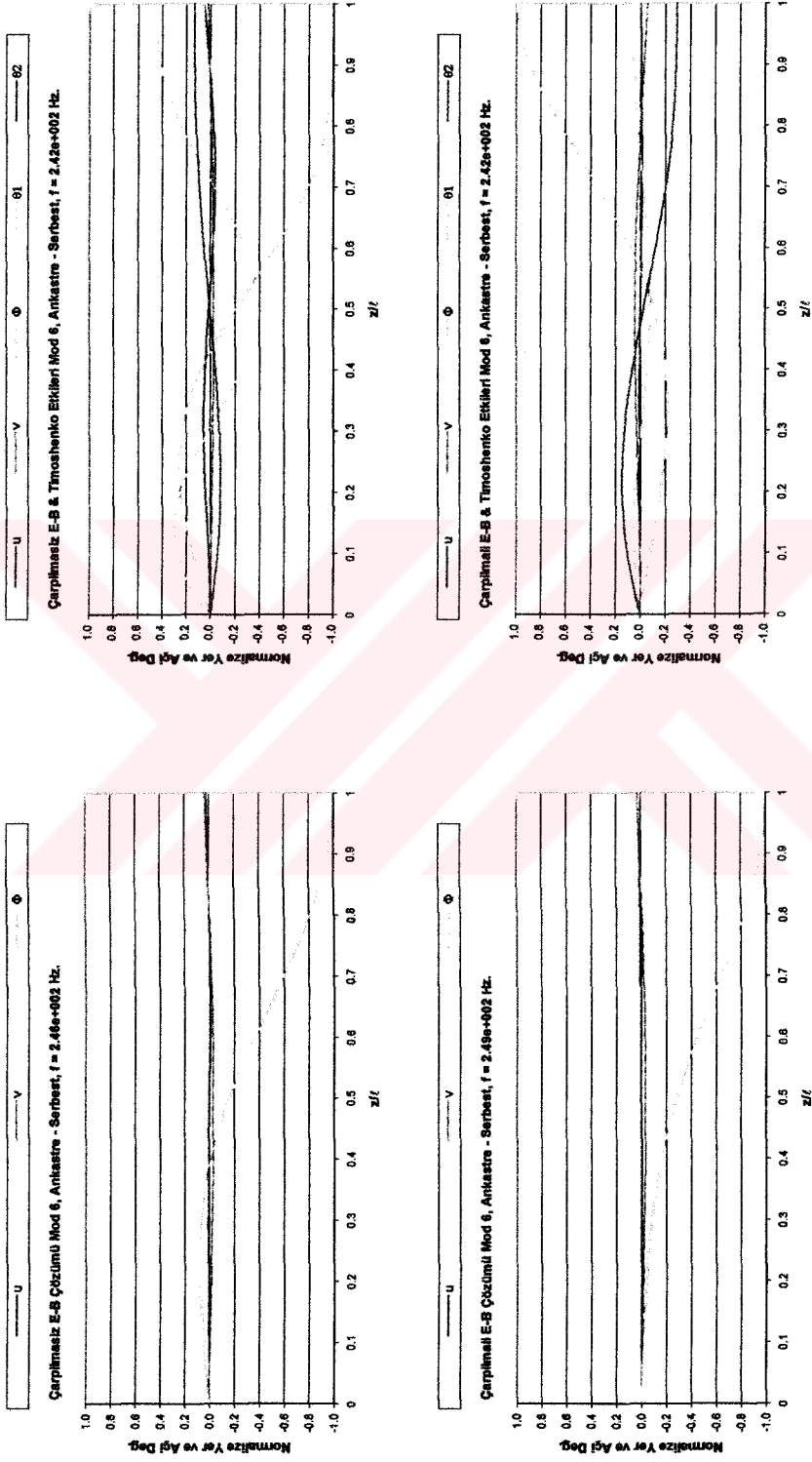
Çarpılmalı E-B Çözümü Mod 5, Ankastre - Serbest, $f = 2.28e+002$ Hz.



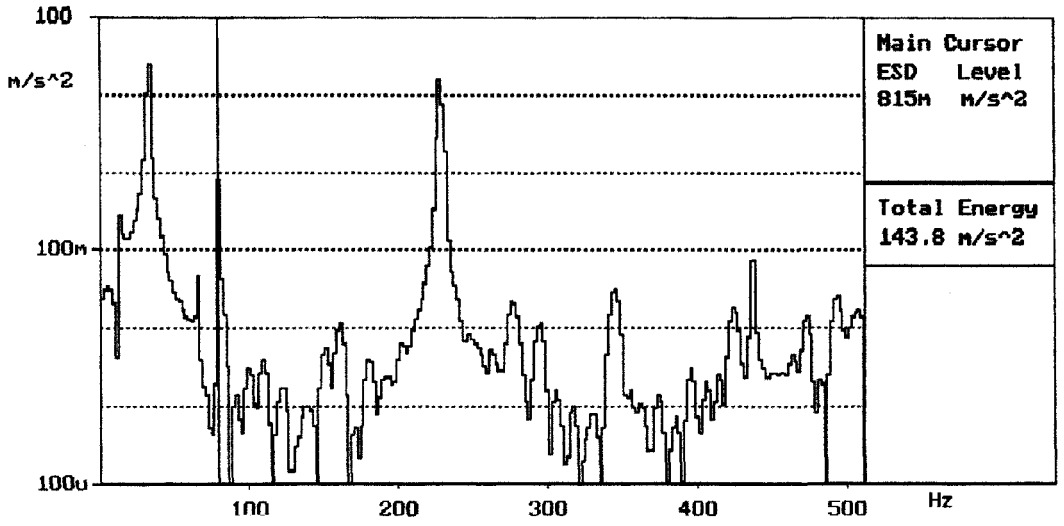
Çarpılmalı E-B & Timoshenko Etkileri Mod 5, Ankastre - Serbest, $f = 2.28e+002$ Hz.



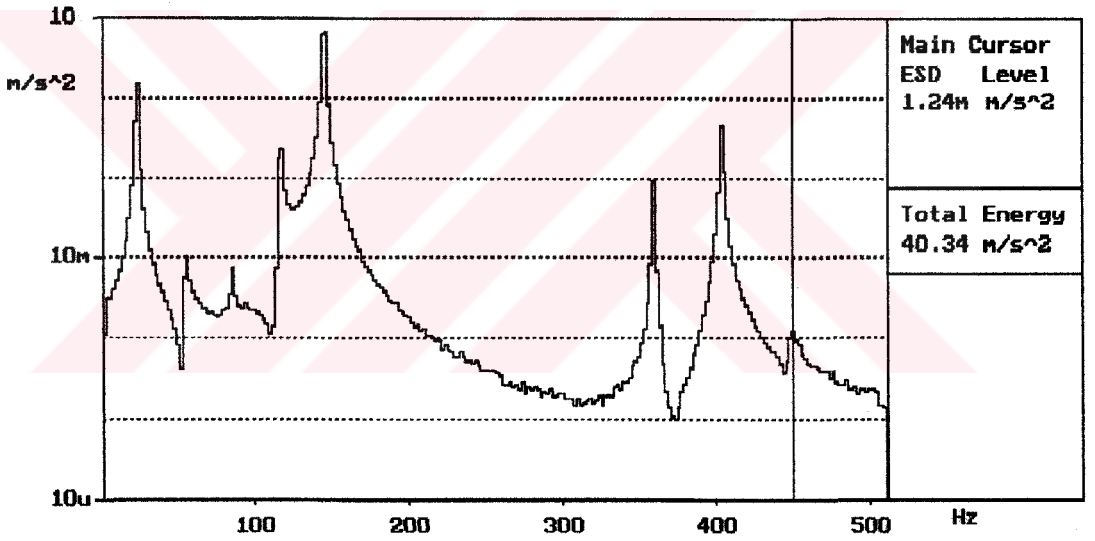
Şekil A-4.11 Asimetrik U Profil –Konsol Kiriş - Mod 5



Şekil A-4.12 Asimetrik U Profil –Konsol Kiriş - Mod 6

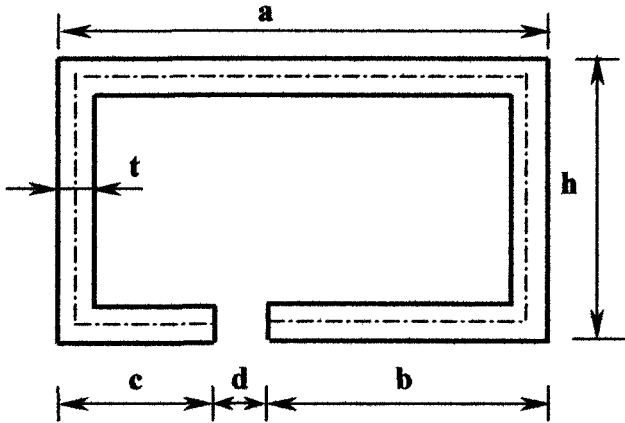


Şekil A-4.13 Asimetrik U Profil ile Yapılan Deneyde Transduser'in Düşey Tutulması Halinde Alınan Frekans Spektrumu:



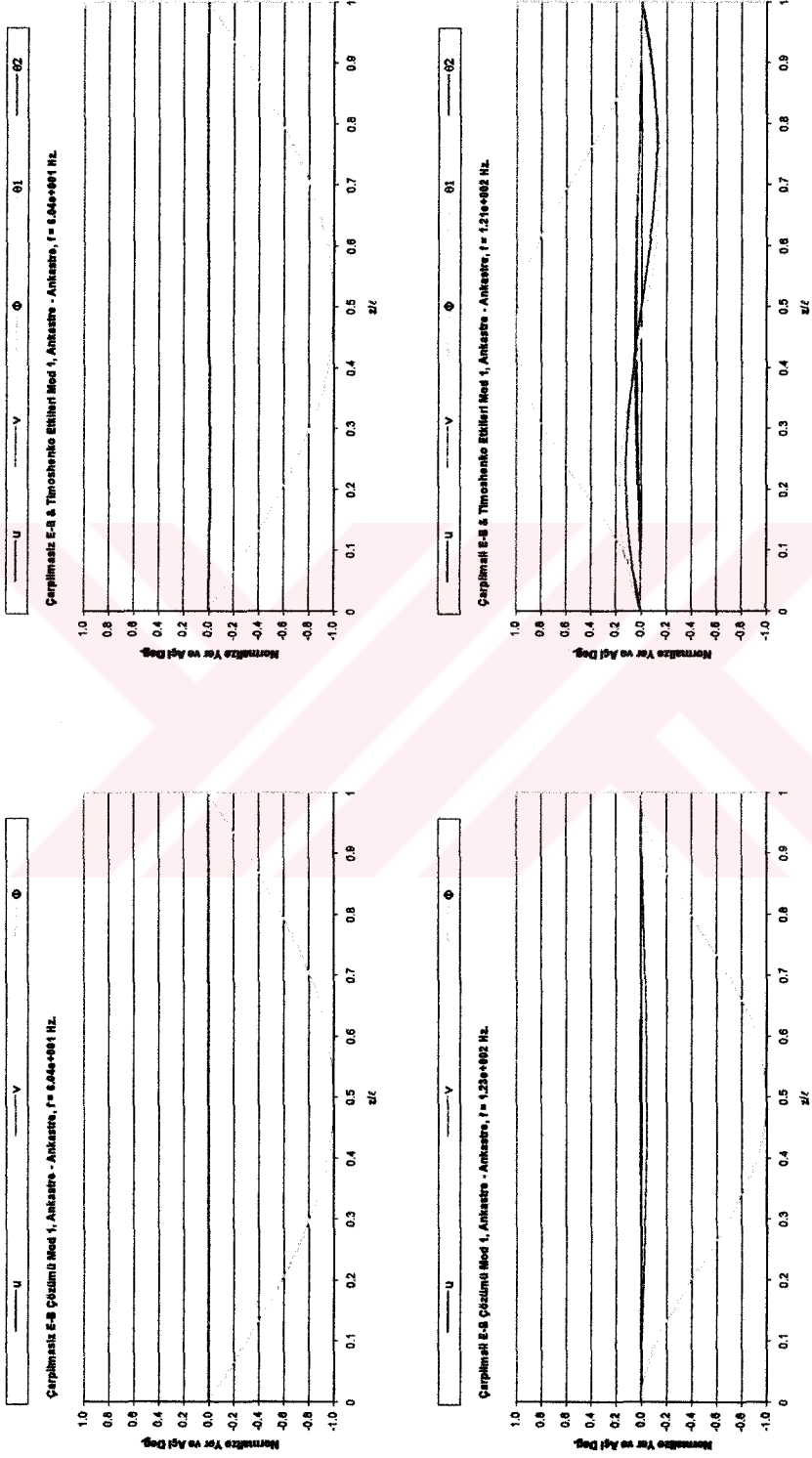
Şekil A-4.14 Asimetrik U Profil ile Yapılan Deneyde Transduser'in Yatay Tutulması Halinde Alınan Frekans Spektrumu:

A-5. Asimetrik Kutu Profil

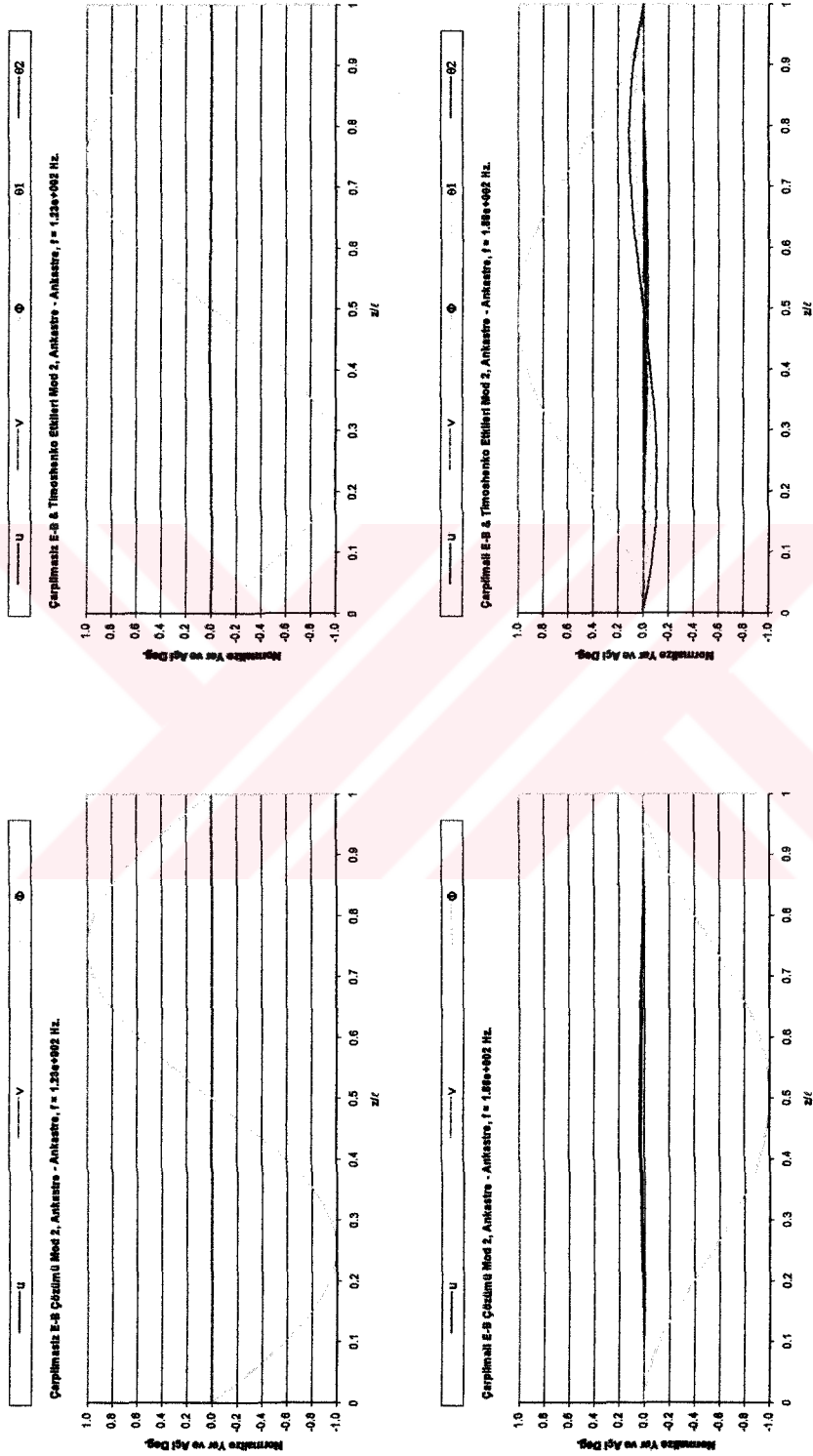


a = 40 mm.
b = 27.5 mm.
c = 9 mm.
d = 3.5 mm.
t=2 mm.
ℓ= 1000 mm.

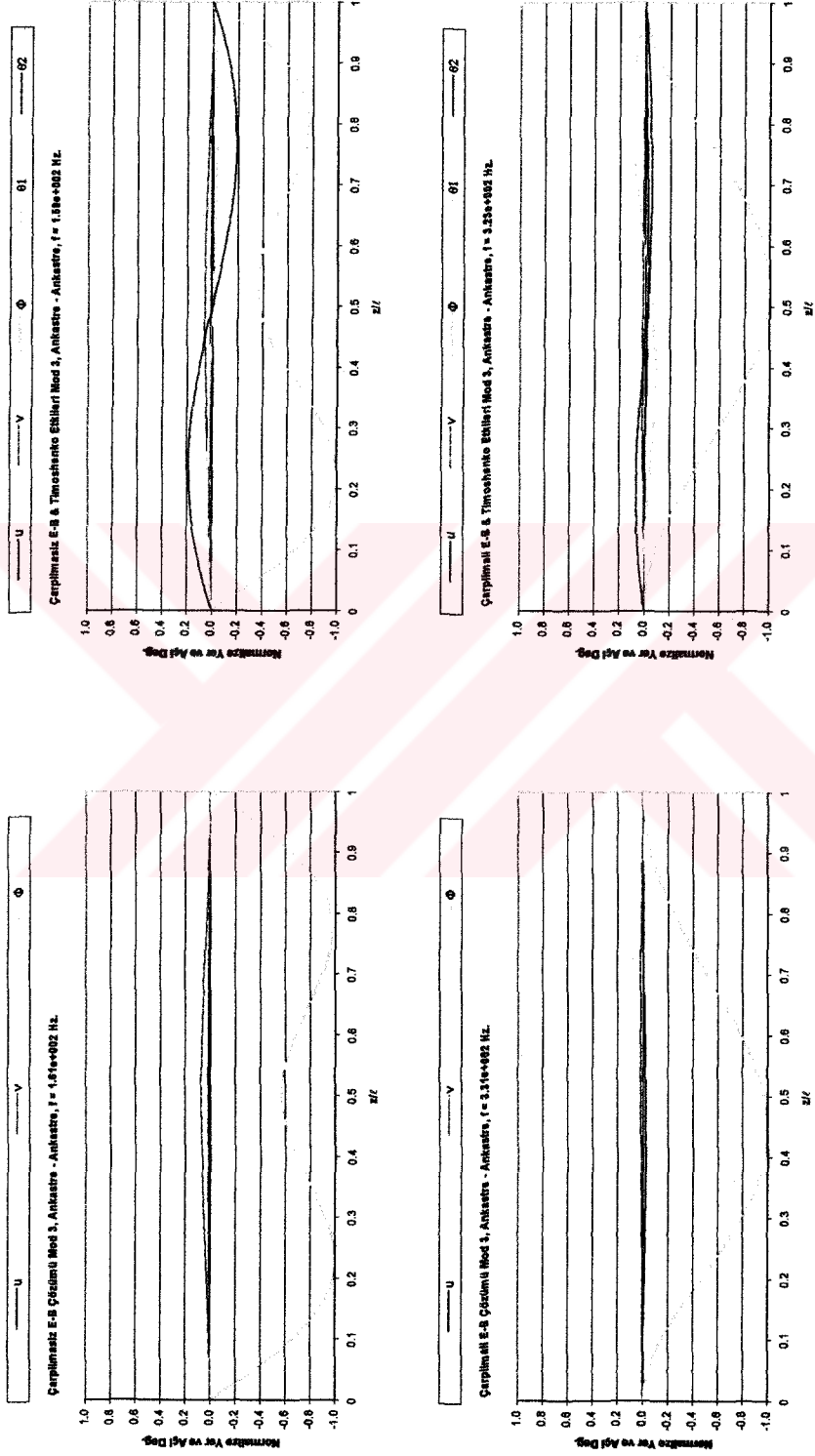
e₁ (m)	-0.01592
e₂ (m)	0.017164
k_x	6.1168
k_y	3.9829



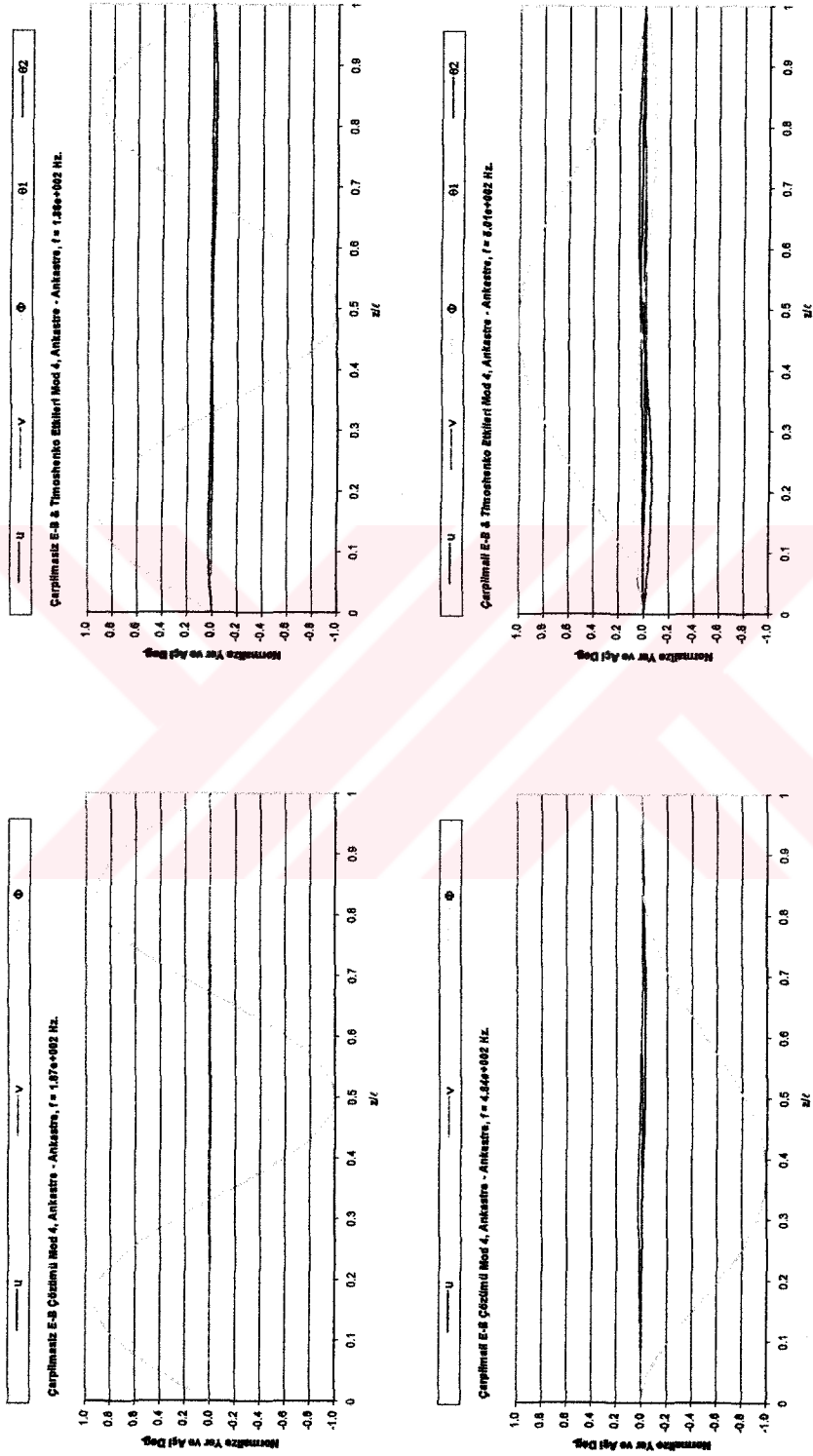
Şekil A-5.1 Asimetrik Açık Kutu Profil – Ankastre Kiriş - Mod 1



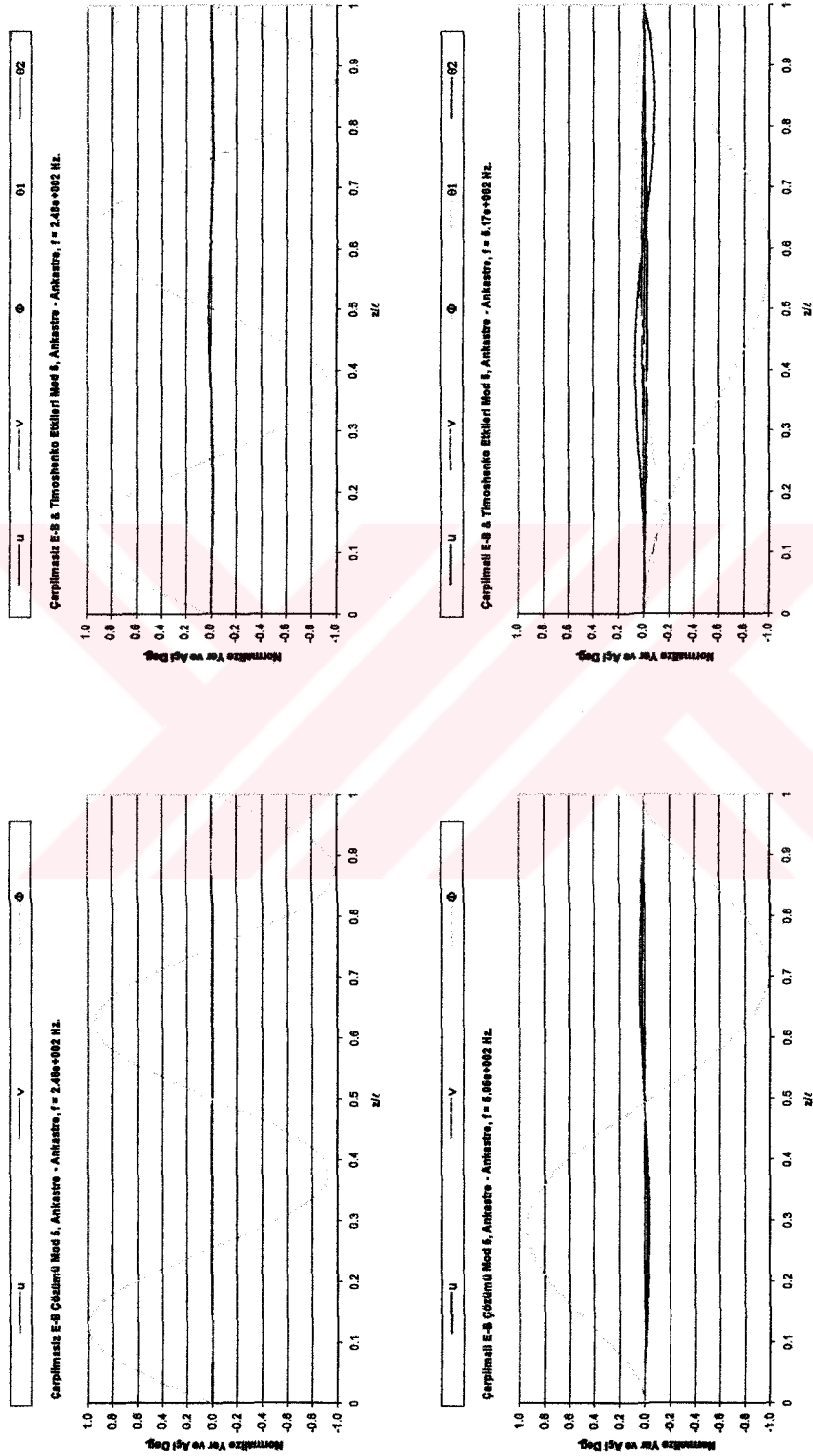
Şekil A-5.2 Asimetrik Açık Kutu Profil – Ankastre Kiriş - Mod 2



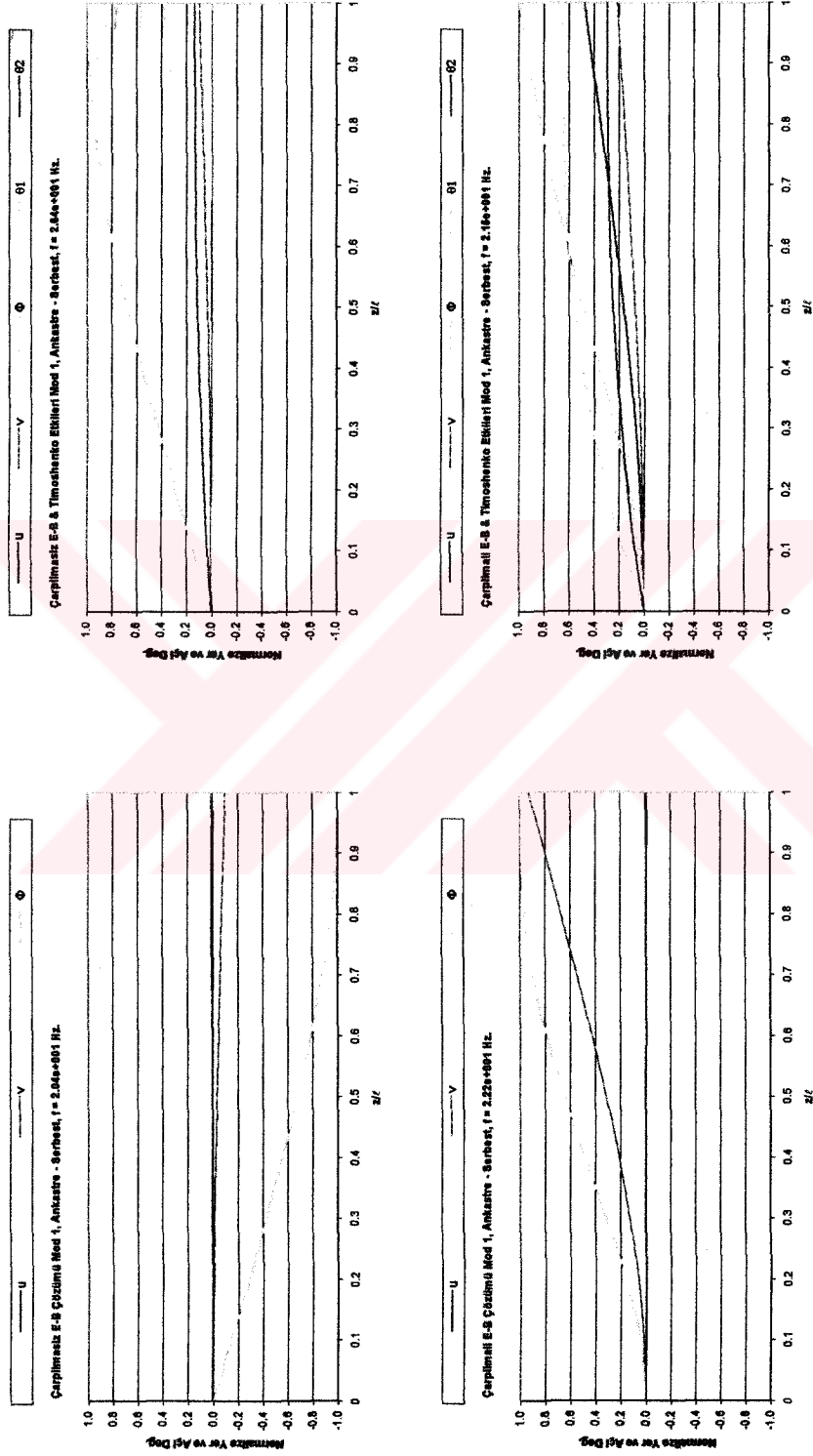
Şekil A-5.3 Asimetrik Açık Kutu Profil – Ankastre Kiriş - Mod 3



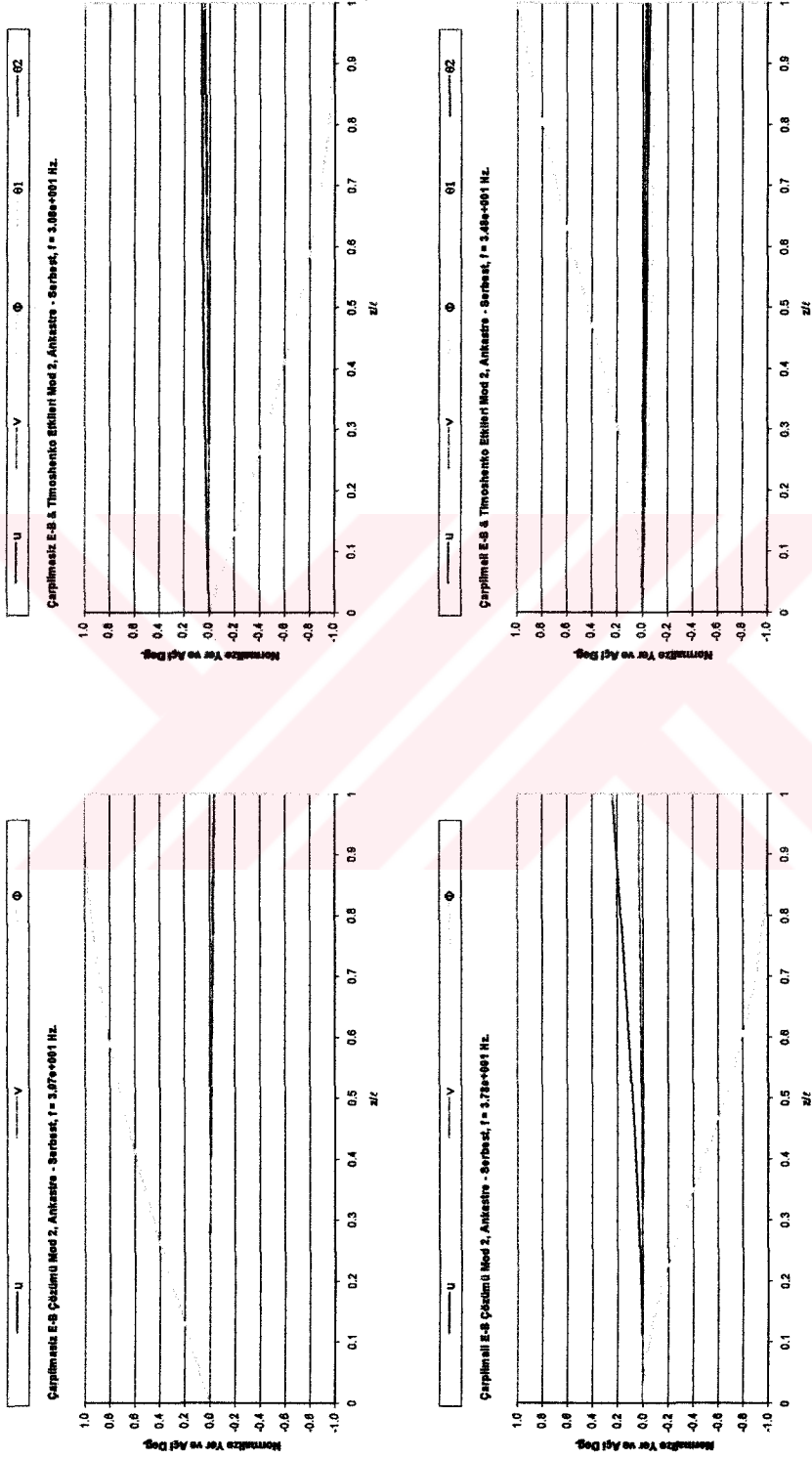
Şekil A-5.4 Asimetrik Açık Kutu Profil – Ankastre Kiriş - Mod 4



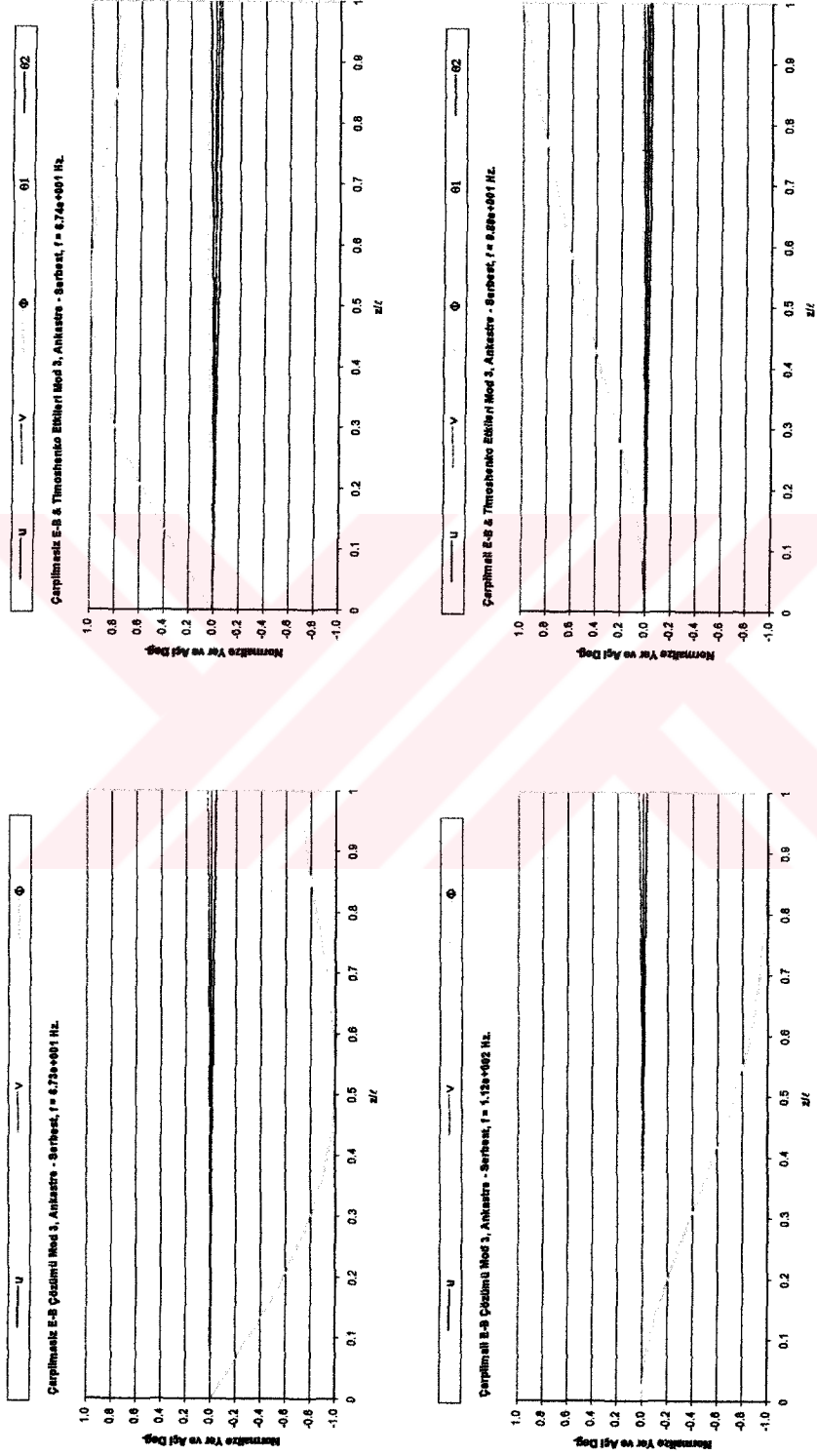
Şekil A-5.5 Asimetrik Açık Kutu Profil – Ankastre Kiriş - Mod 5



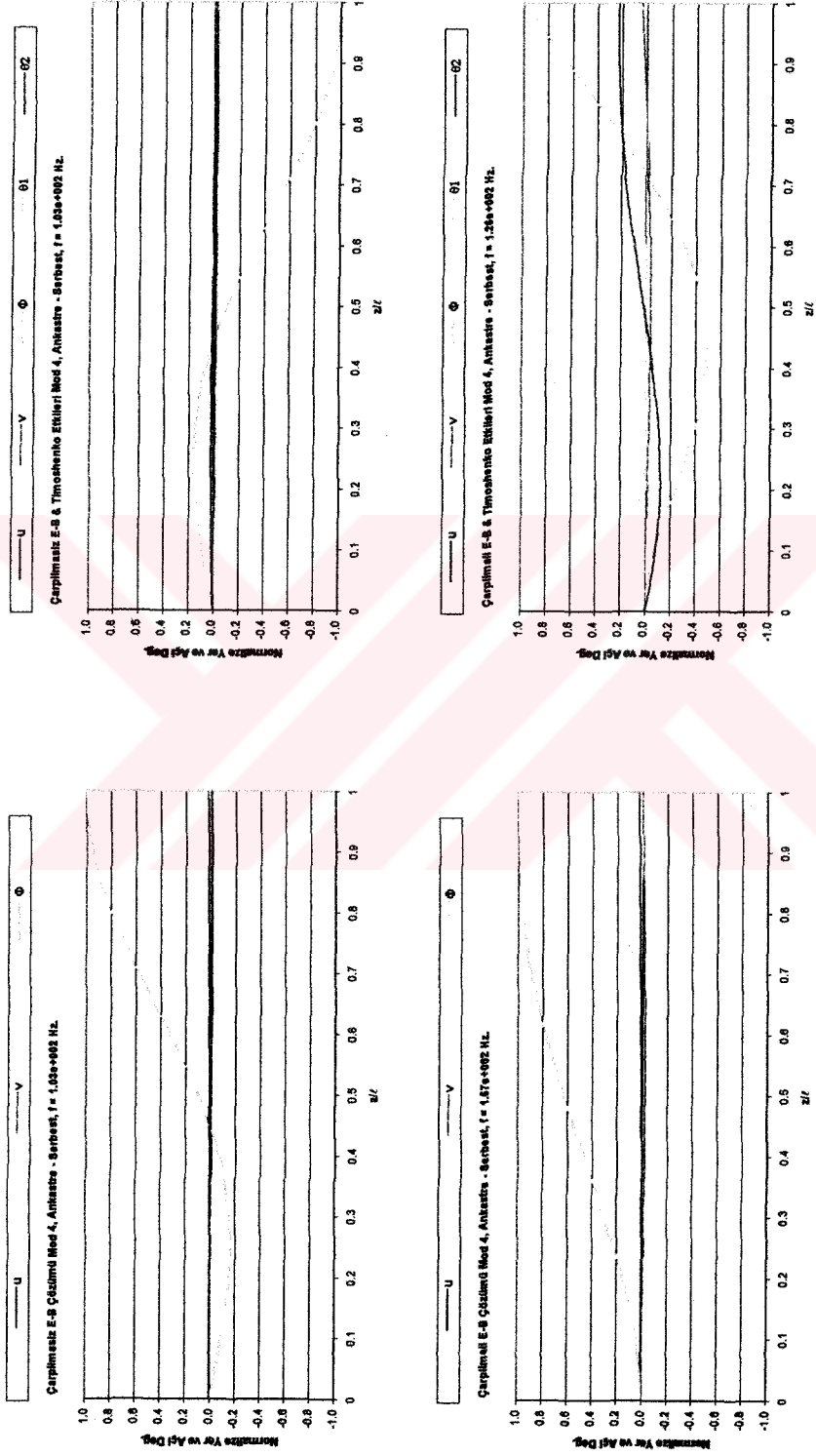
Şekil A-5.7 Asimetrik Açık Kutu Profil –Konsol Kiriş - Mod 1



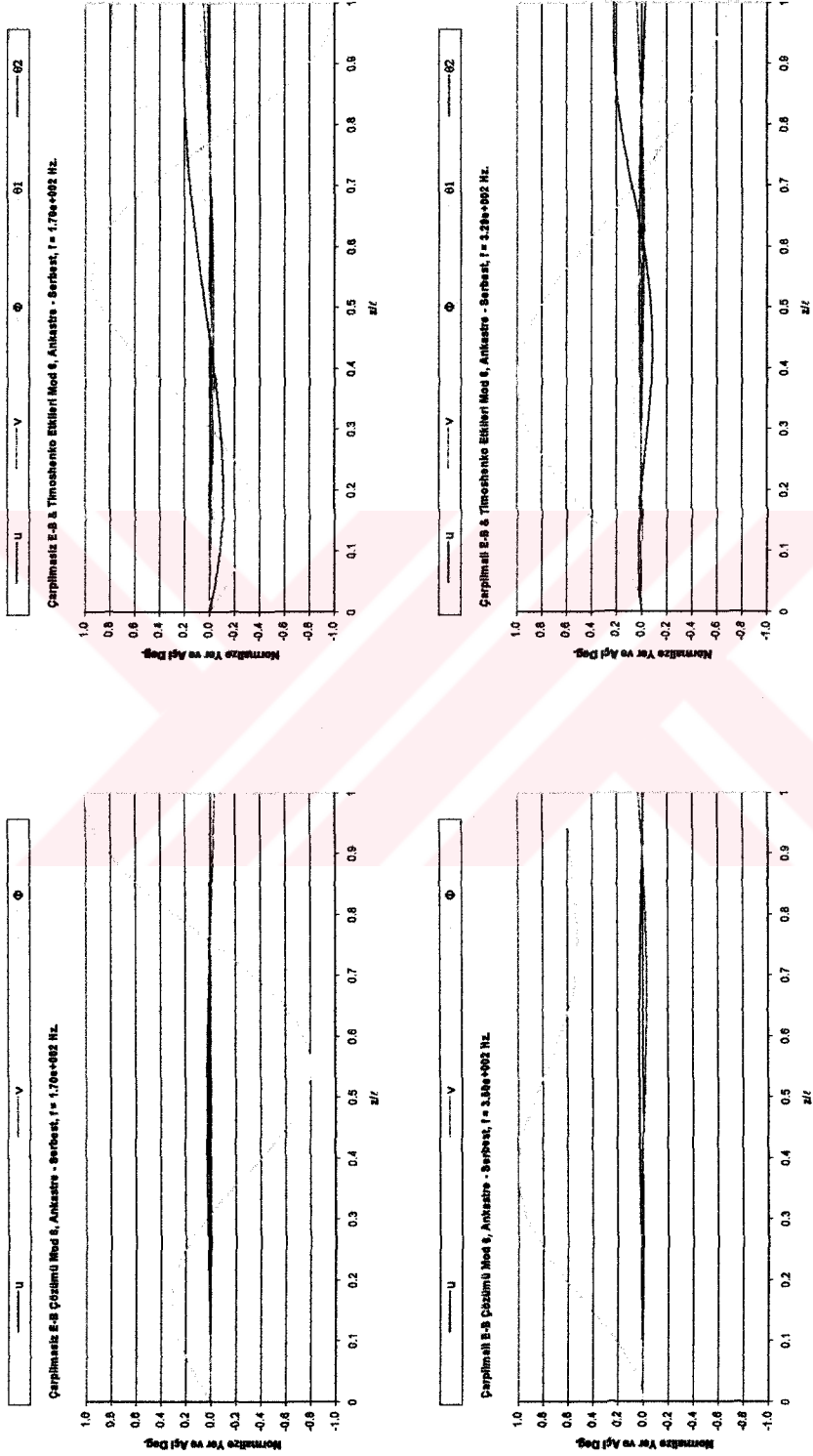
Şekil A-5.8 Asimetrik Açık Kutu Profil –Konsol Kiriş - Mod 2



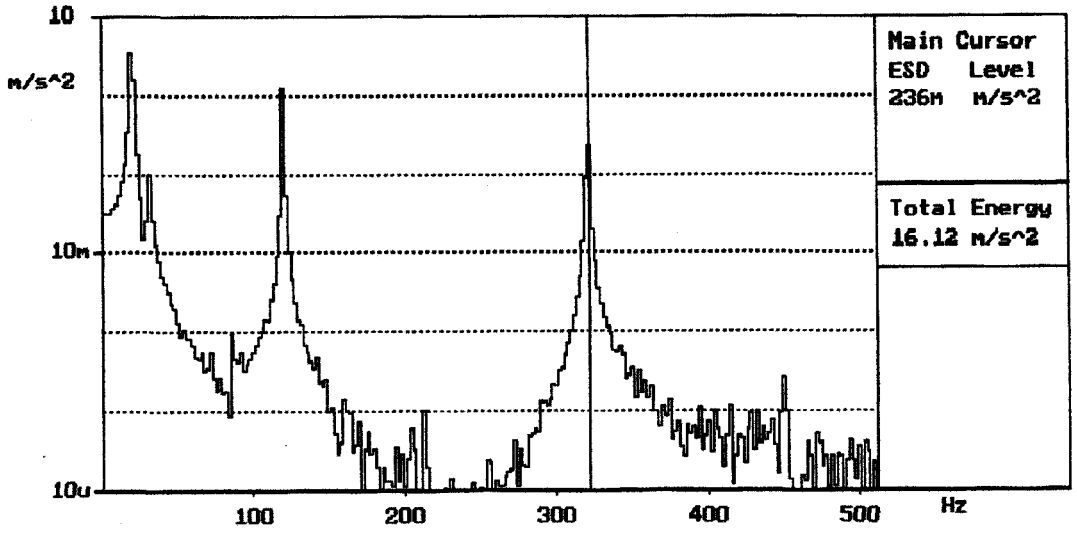
Şekil A-5.9 Asimetrik Açık Kutu Profil –Konsol Kiriş - Mod 3



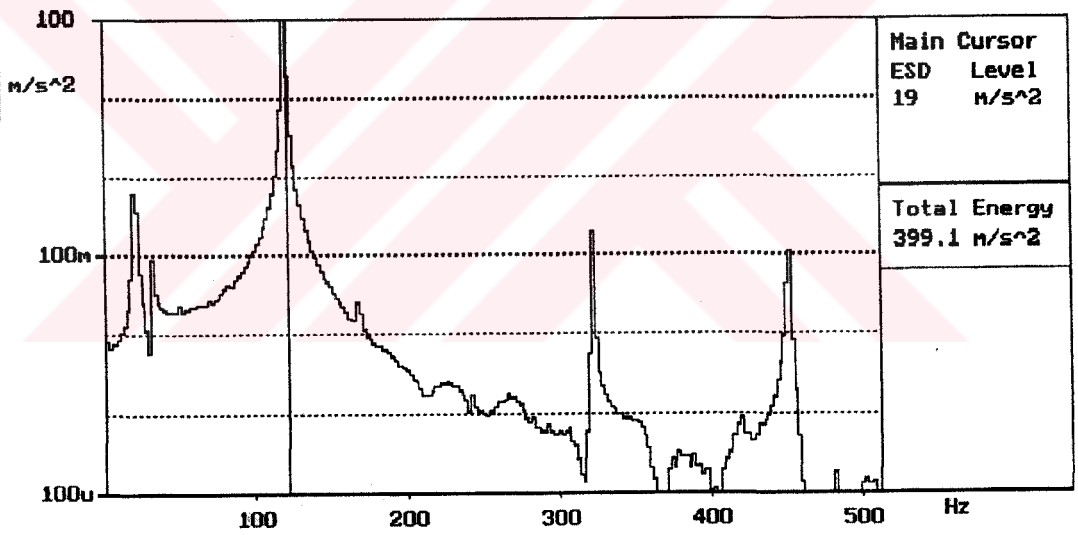
Şekil A-5.10 Asimetrik Açık Kutu Profil –Konsol Kiriş - Mod 4



Şekil A-5.12 Asimetrik Açık Kutu Profil –Konsol Kiriş - Mod 6

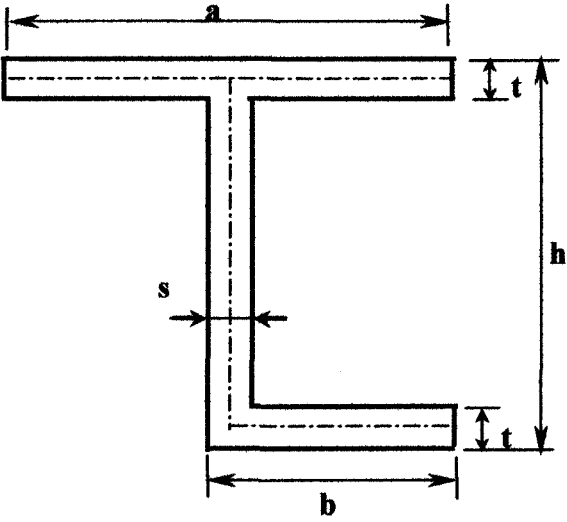


Şekil A-5.13 Asimetrik Açık Kutu Profil ile Yapılan Deneyde Transduser'in Düşey Tutulması Halinde Alınan Frekans Spektrumu:



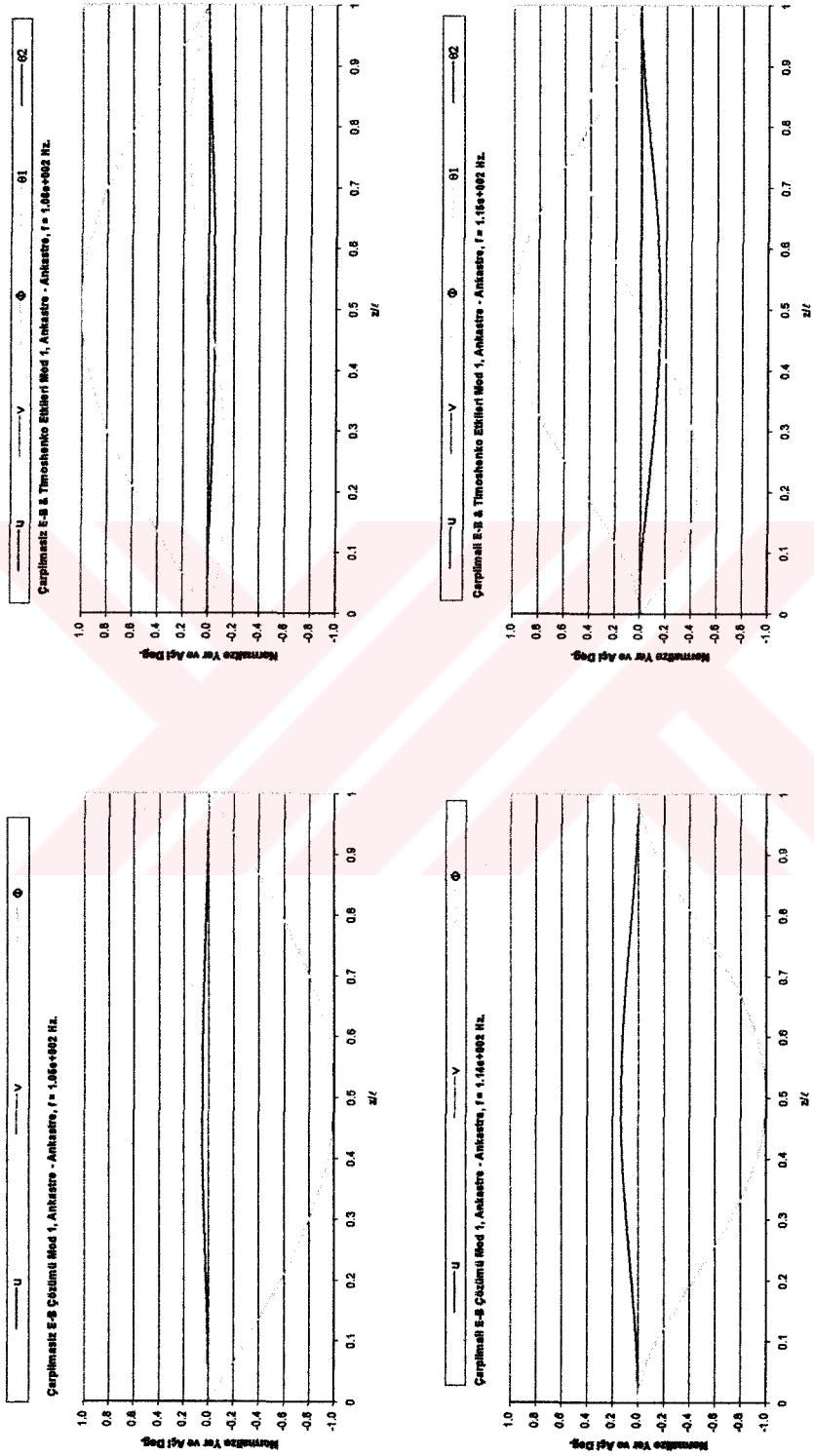
Şekil A-5.14 Asimetrik Açık Kutu Profil ile Yapılan Deneyde Transduser'in Yatay Tutulması Halinde Alınan Frekans Spektrumu

A-6. Asimetrik Kollu T Profil

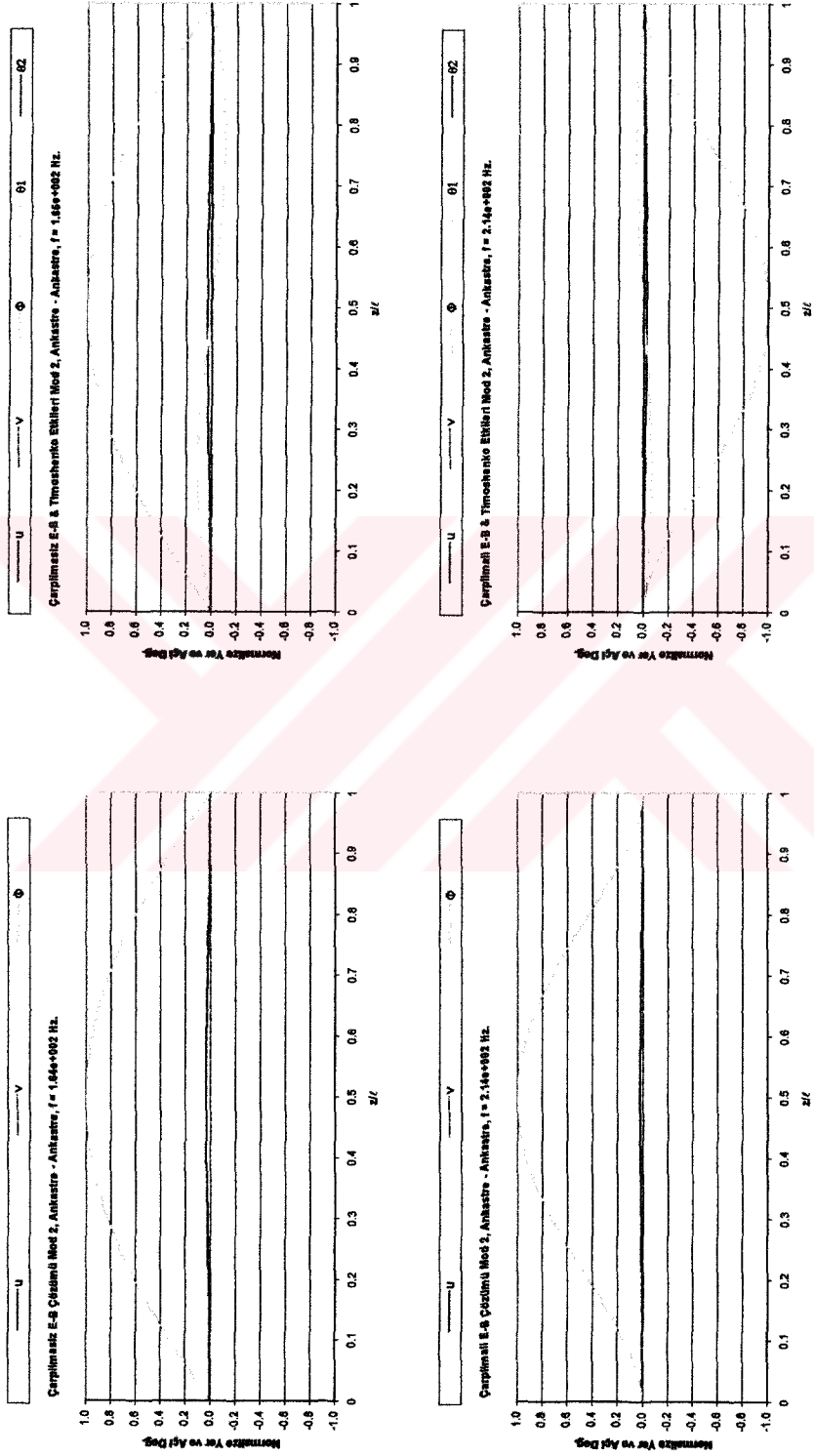


$a = 40 \text{ mm.}$
 $b = 22.5 \text{ mm.}$
 $h = 80 \text{ mm.}$
 $t = 5 \text{ mm.}$
 $s = 5 \text{ mm.}$

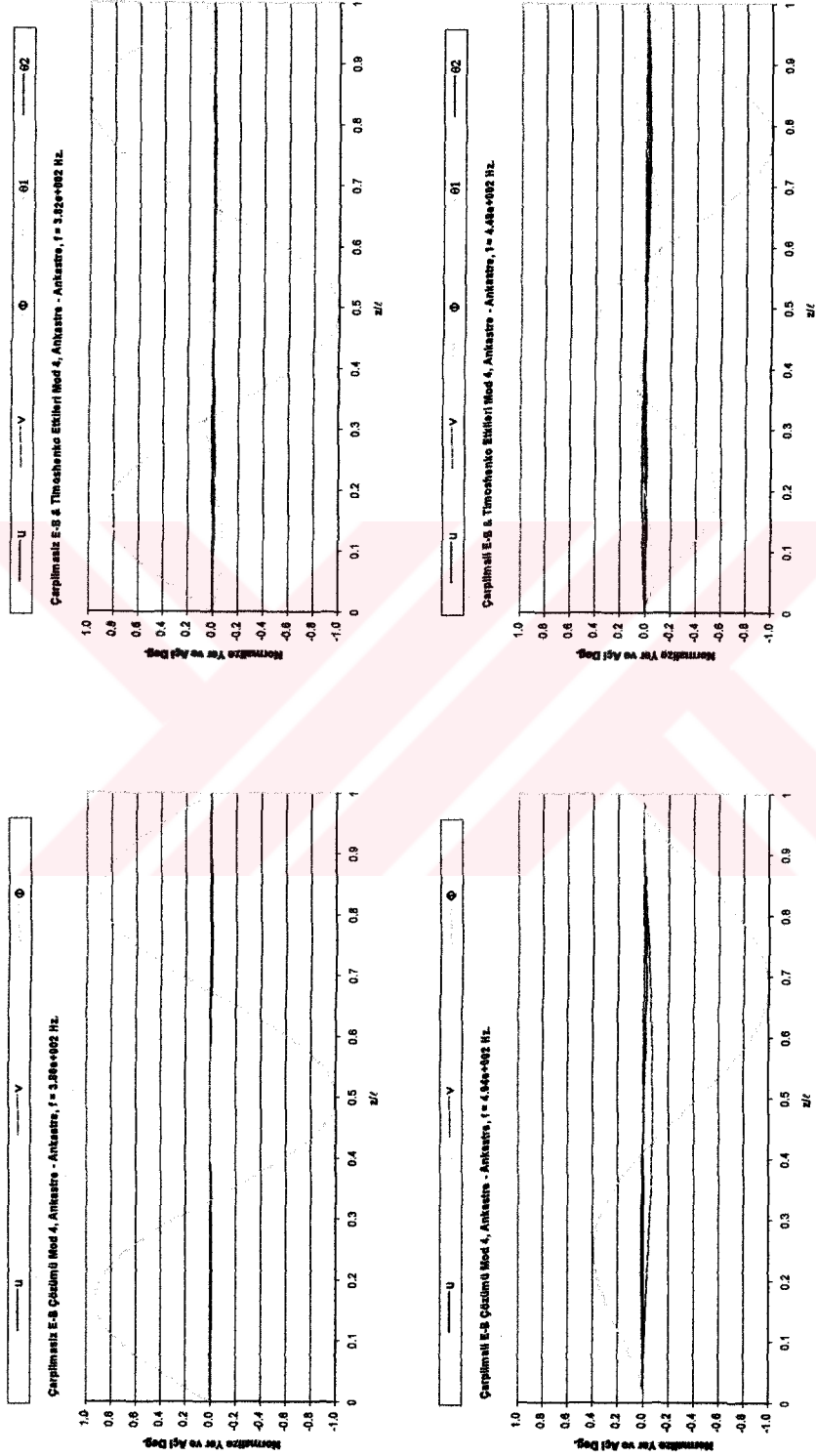
$e_1 \text{ (m)}$	-0.004617
$e_2 \text{ (m)}$	0.013999
k_x	3.2072
k_y	1.9373



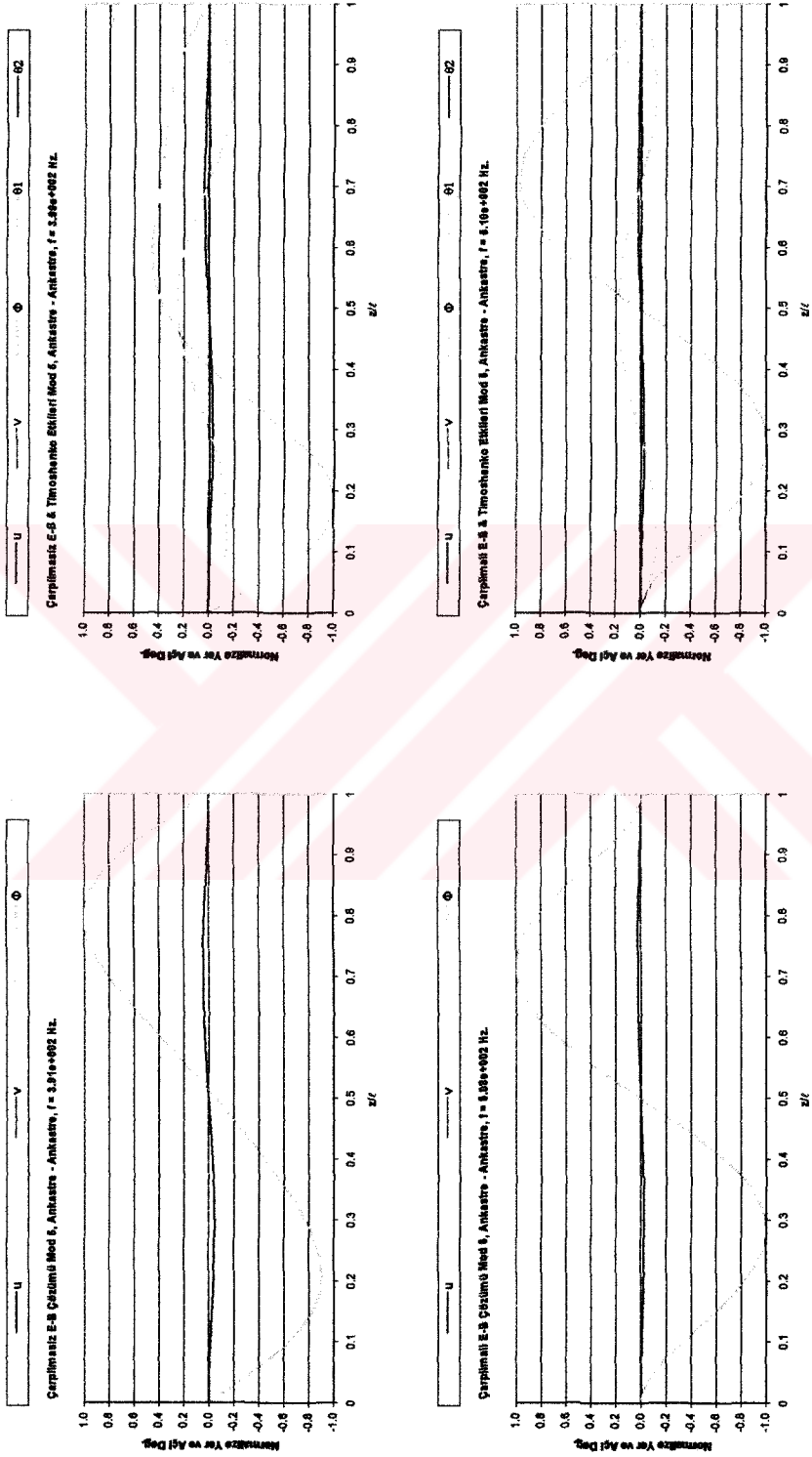
Şekil A-6.1 Asimetrik Kollu T Profil – Ankastre Kiriş - Mod 1



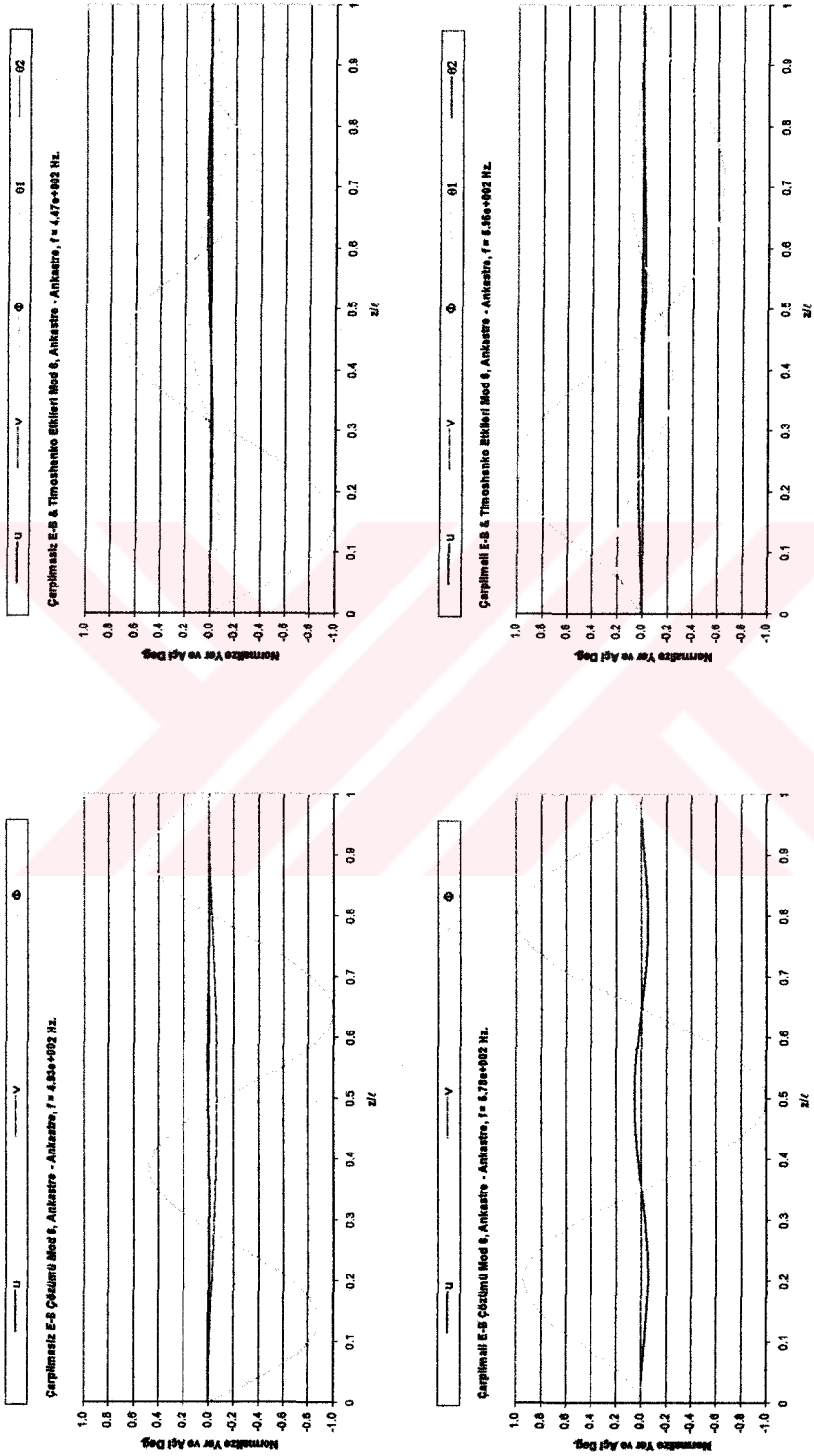
Şekil A-6.2 Asimetrik Kollu T Profil – Ankastre Kiriş - Mod 2



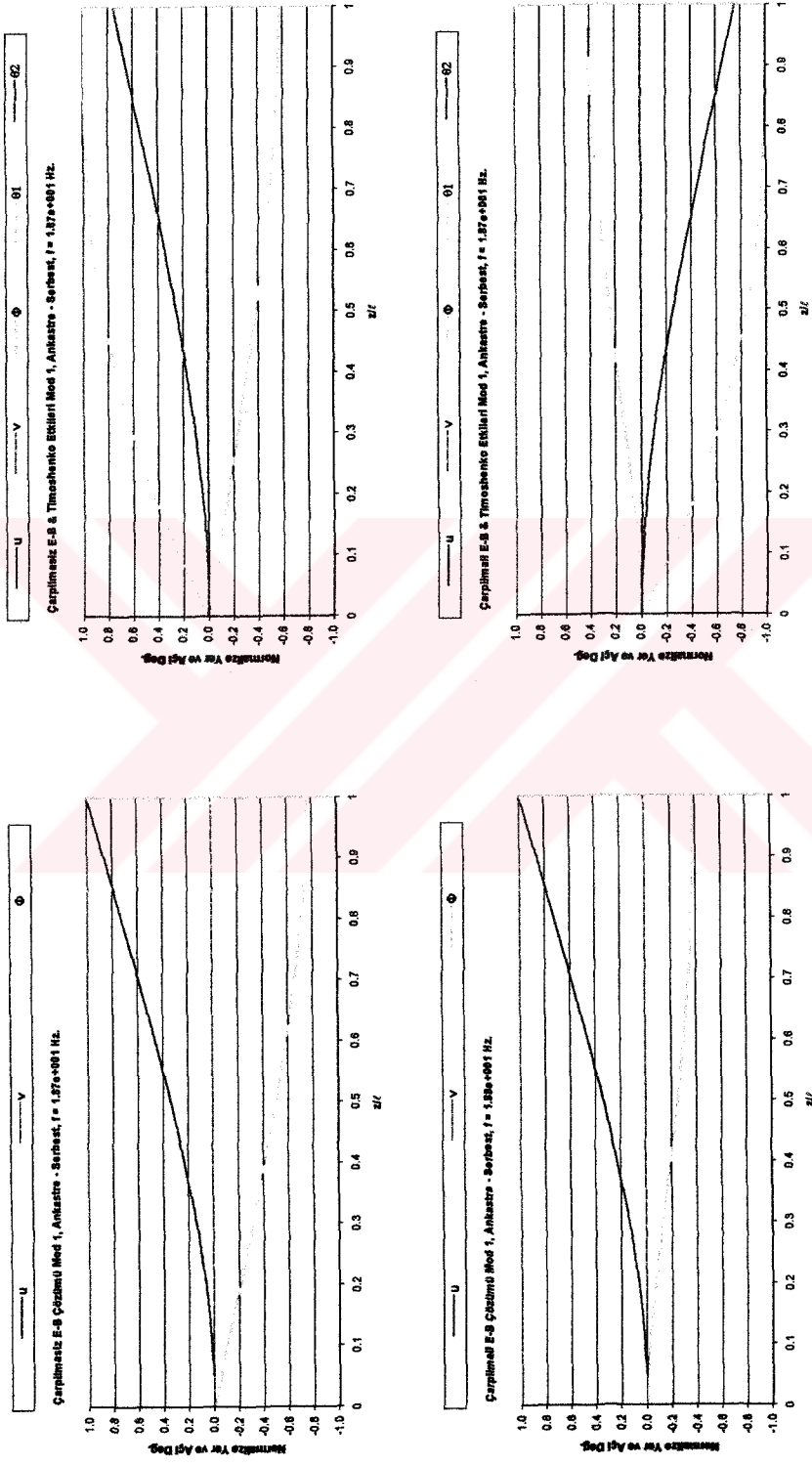
Şekil A-6.4 Asimetrik Kollu T Profil – Ankastre Kiriş - Mod 4



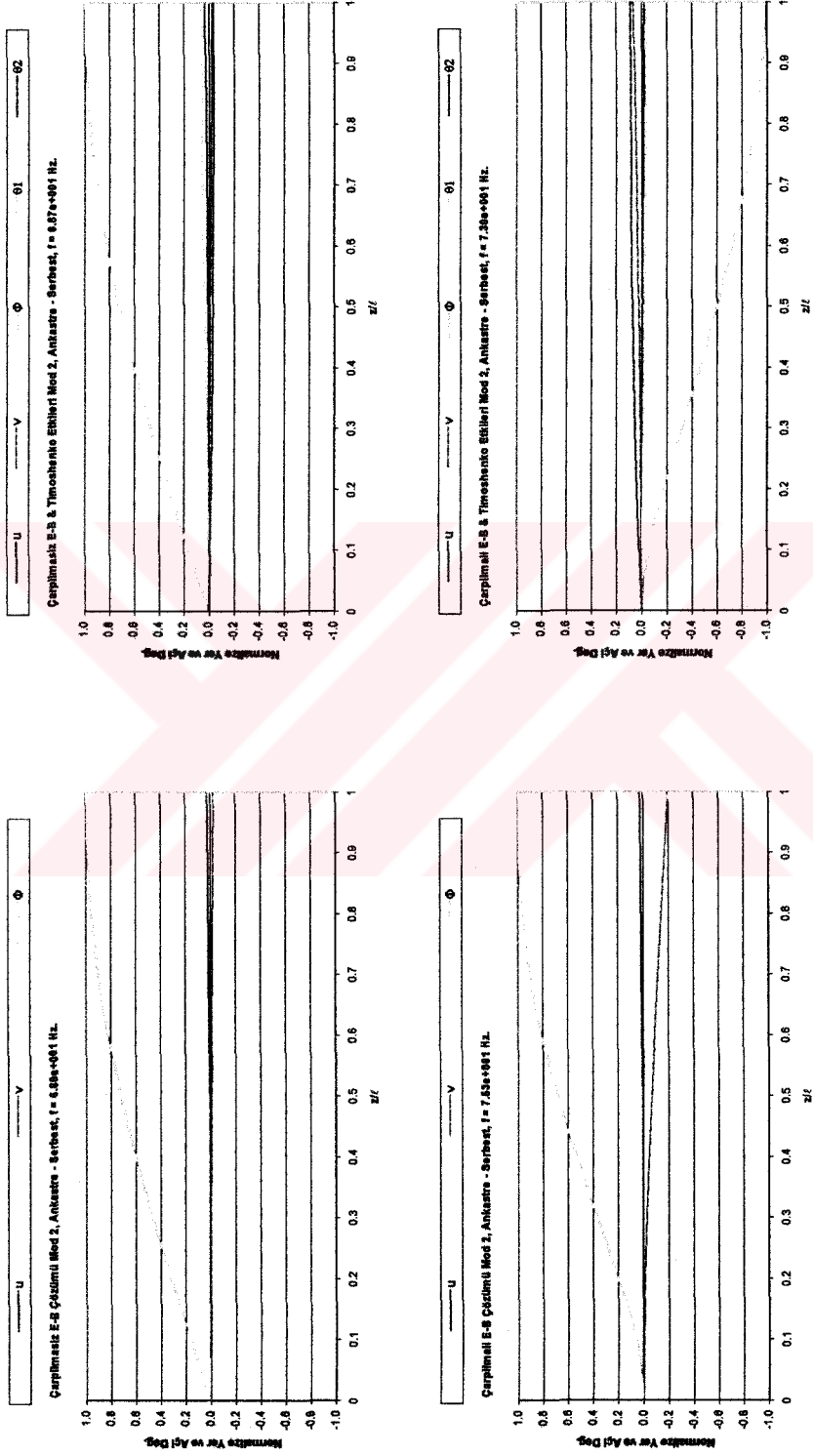
Şekil A-6.5 Asimetrik Kollu T Profil – Ankastre Kiriş - Mod 5



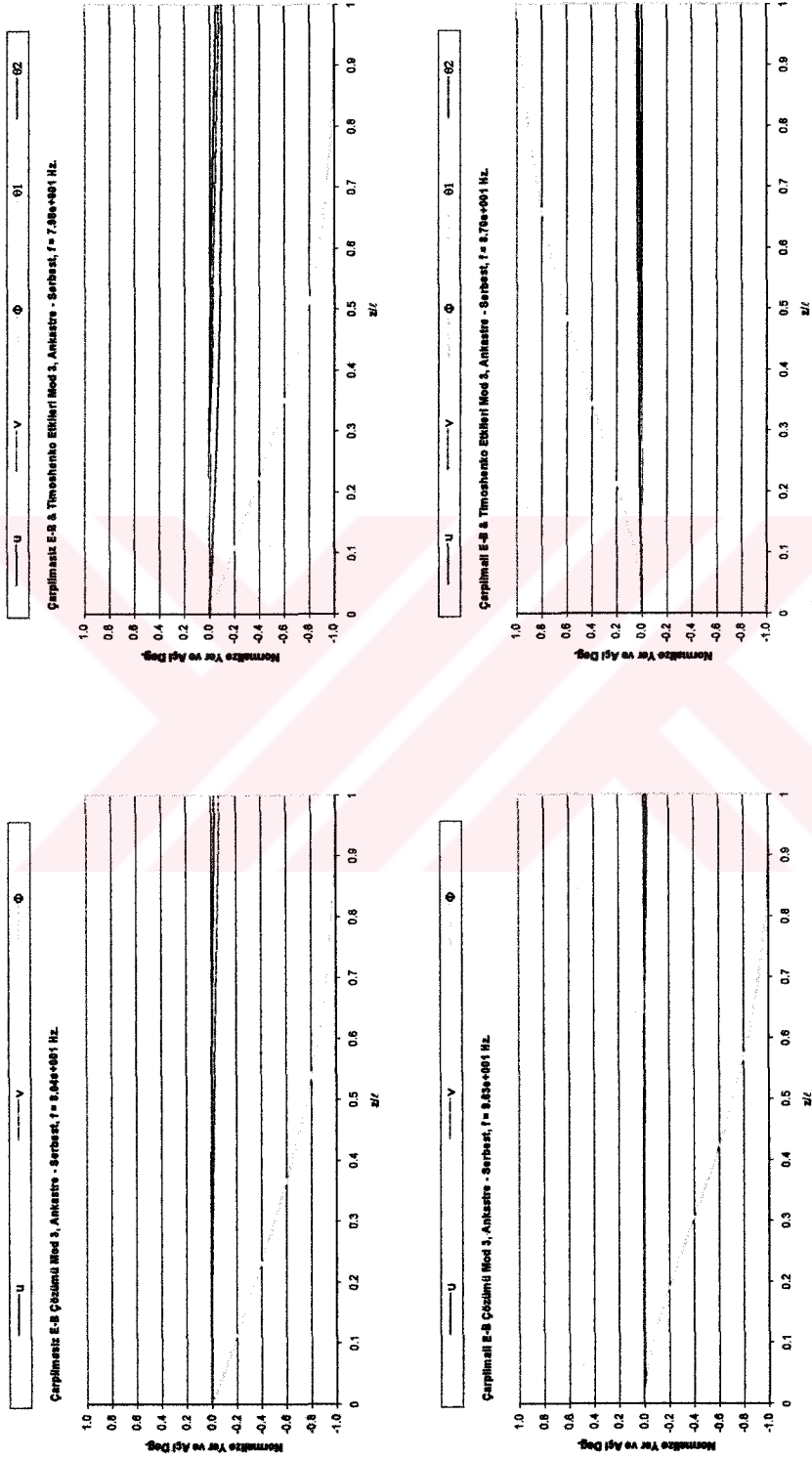
Şekil A-6.6 Asimetrik Kollu T Profil – Ankastre Kiriş - Mod 6



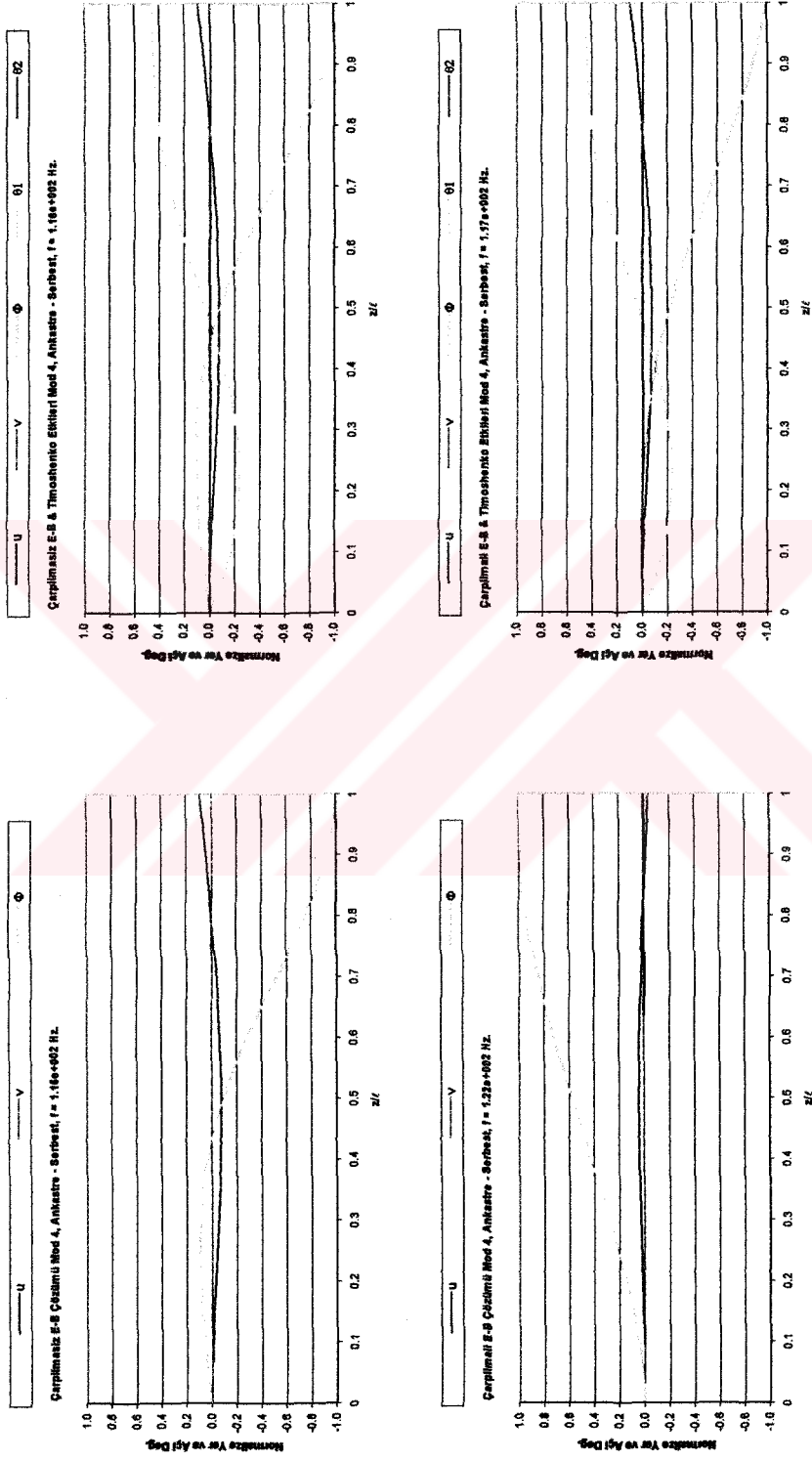
Şekil A-6.7 Asimetrik Kollu T Profil –Konsol Kiriş - Mod 1



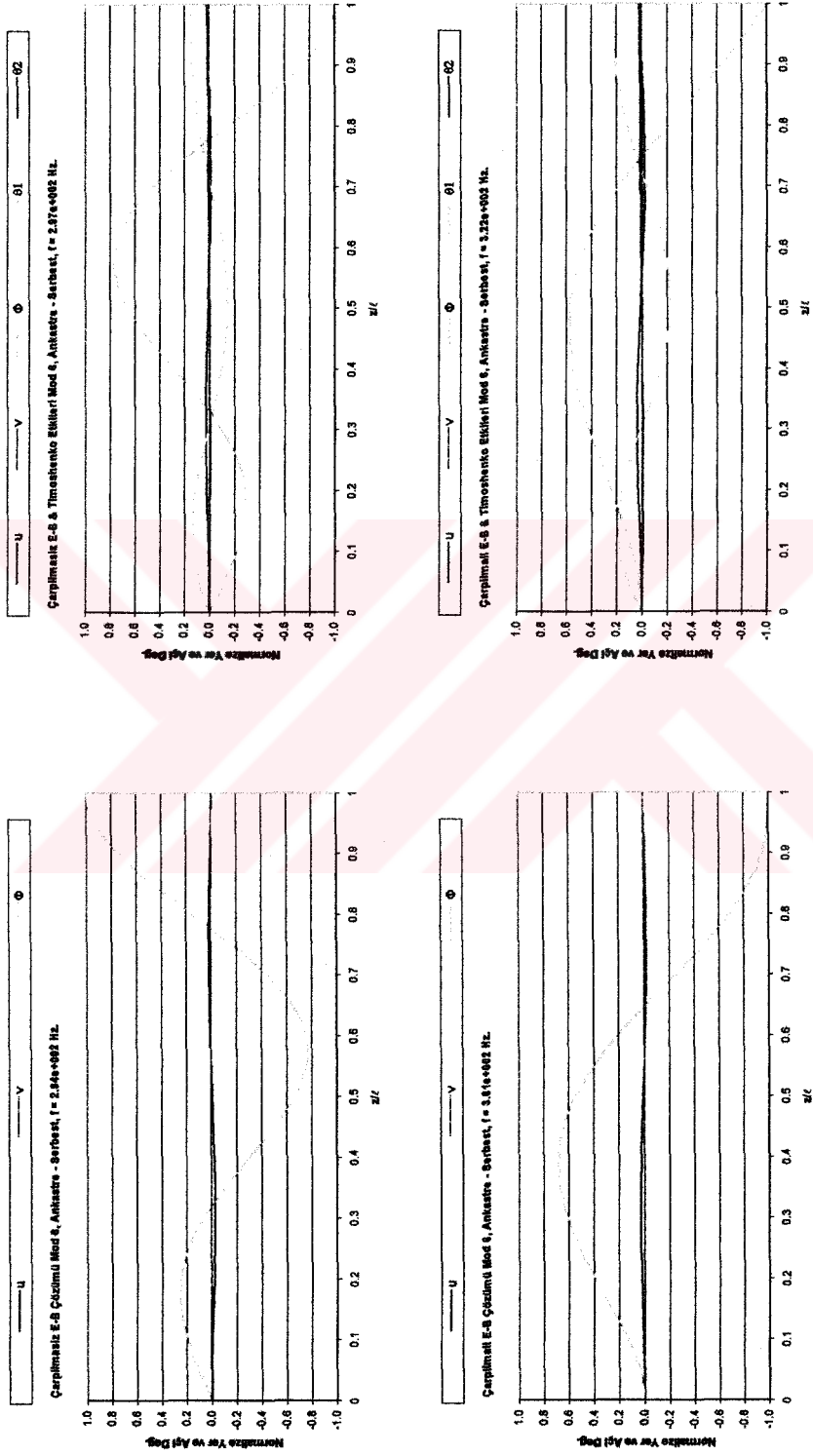
Şekil A-6.8 Asimetrik Kollu T Profil –Konsol Kiriş - Mod 2



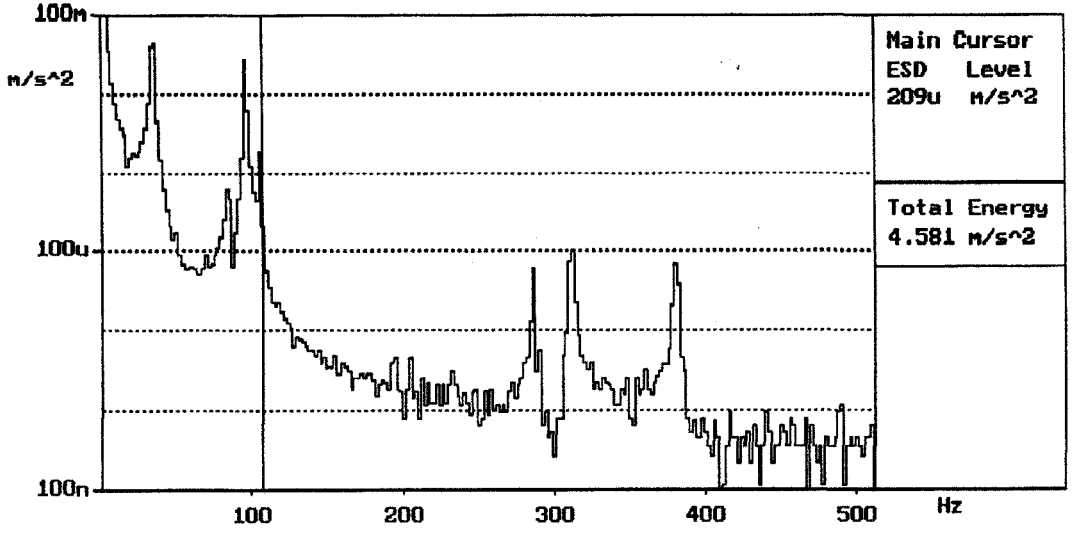
Şekil A-6.9 Asimetrik Kollu T Profil –Konsol Kiriş - Mod 3



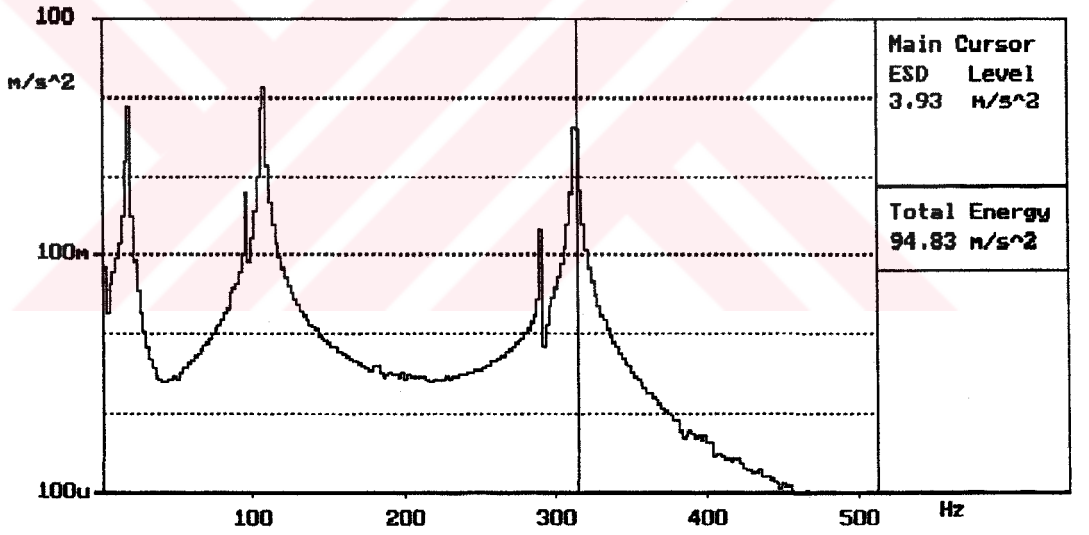
Şekil A-6.10 Asimetrik Kollu T Profil –Konsol Kiriş - Mod 4



Şekil A-6.12 Asimetrik Kollu T Profil –Konsol Kiriş - Mod 6



Şekil A-6.13 Asimetrik Kollu T Profil ile Yapılan Deneyde Transduser'in Düşey Tutulması Halinde Alınan Frekans Spektrumu:



Şekil A-6.14 Asimetrik Kollu T Profil ile Yapılan Deneyde Transduser'in Yatay Tutulması Halinde Alınan Frekans Spektrumu

ÖZGEÇMİŞ

S. Ergün BOZDAĞ 1962 yılında Yalova' da doğdu. 1980 yılında İstanbul Bahçelievler Lisesinden mezun oldu. 1986 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Makina Mühendisliği Bölümünden mühendis olarak mezun oldu. 1987 Yılında Yıldız Teknik Üniversitesi Fen bilimleri Enstitüsü' nde başladığı Yüksek Lisans öğrenimini 1990 yılında tamamlayarak Yüksek Lisans derecesi aldı.1993 yılında İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Makina Anabilim Dalı Konstrüksiyon programında doktora çalışmasına başladı.

1992 – 1993 yılları arasında Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü' nde Araştırma Görevlisi olarak görev yapan S. Ergün BOZDAĞ, 1993 yılında Araştırma Görevlisi olarak geçtiği İ.T.Ü. Makine Fakültesi Makina Teorisi Sistem Dinamiği ve Kontrol Anabilim Dalı, Mukavemet Birimi' nde çalışmalarını sürdürmektedir.

