

75227

## İNCE ÇEPERLİ ÇUBUKLARIN EĞİLME VE BURULMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Müh. Bahadır UĞURLU

75227

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 19 Ocak 1998

Tezin Savunulduğu Tarih : 9 Şubat 1998

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Y.Müh. Bil. Dr. M. Cengiz DÖKMECİ

*[Signature]* 20.7.1998

Diğer Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Ahmet ERGİN

*[Signature]* 20.7.1998

Doç. Dr. Selman BAYOĞLU

*[Signature]* 20.07.1998

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

## ÖNSÖZ

Bilim çatısının genişliğini, öğrendiğim her şeyle sanki sadece bilmediklerim artıyormuş hissine kapıldığımda fark ettim. Bu durum oldukça caydırıcıydı fakat bir noktadan başlamak gerekiyordu. Bu çalışma da bundan ibarettir.

Üniversite hayatım boyunca desteğini esirgemeyen değerli hocam Sayın M. Cengiz Dökmeci'ye, destekleri ve yardımları için biricik aileme, sevgili Sema'ya, Mustafa'ya ve tüm dostlara teşekkür ederim.

İstanbul,  
Ocak 98

Bahadır UĞURLU



# İÇİNDEKİLER

|                                                             | <u>SAYFA NO</u> |
|-------------------------------------------------------------|-----------------|
| ÖNSÖZ                                                       | ii              |
| SEMBOL LİSTESİ                                              | v               |
| ŞEKİL LİSTESİ                                               | vii             |
| TABLO LİSTESİ                                               | ix              |
| ÖZET                                                        | x               |
| SUMMARY                                                     | xi              |
| <b>BÖLÜM I GİRİŞ</b>                                        | 1               |
| <b>BÖLÜM II İNCE ÇEPERLİ ÇUBUKLARIN EĞİLME VE BURULMASI</b> | 7               |
| 2.1 Giriş                                                   | 7               |
| 2.2 Şekil Değiştirme                                        | 11              |
| 2.2.1 Açık En Kesitli Çubuklarda Eksenel Yerdeğiştirme      | 14              |
| 2.2.2 Kapalı En Kesitli Çubuklarda Eksenel Yerdeğiştirme    | 16              |
| 2.3 Gerilme Durumu                                          | 19              |
| 2.3.1 Normal Gerilme                                        | 20              |
| 2.3.2 Kayma Gerilmesi                                       | 21              |
| 2.4 Çubuk Kuvvetleri                                        | 28              |
| 2.5 Diferansiyel Denge Denklemleri                          | 35              |
| 2.6 Asal Koordinat Eksenleri                                | 40              |
| 2.7 Asal Formlarında Çubuk Kuvvetleri ve Denge Denklemleri  | 46              |
| 2.8 Kayma ve Burulma Merkezi                                | 49              |
| 2.9 İnce Çeperli Çubuklarda Burulma Problemi                | 51              |
| 2.10 Bescoter Teorisi                                       | 61              |
| 2.11 En Kesitlerin Geometrik Özelliklerinin Belirlenmesi    | 67              |
| 2.11.1 Açık En Kesit Örneği: U Profil                       | 68              |
| 2.11.2 Kapalı En Kesit Örneği: Üç Hücreli Simetrik Kesit    | 73              |

|                  |                                                    |            |
|------------------|----------------------------------------------------|------------|
| <b>BÖLÜM III</b> | <b>MOMENT METODUNUN İNCE ÇEPERLİ</b>               | <b>85</b>  |
|                  | <b>ÇUBUKLARIN EĞİLME-BURULMA TEORİSİNE</b>         |            |
|                  | <b>UYGULANMASI</b>                                 |            |
| 3.1              | Ağırlıklı Artık Metodları                          | 85         |
| 3.2              | İnce Çeperli Çubuklar için Moment Metodu İfadeleri | 86         |
| 3.3              | İnce Çeperli Çubukların Burulma Probleminin Moment | 87         |
|                  | Metoduyla Çözümü                                   |            |
| <b>SONUÇLAR</b>  |                                                    | <b>96</b>  |
| <b>KAYNAKLAR</b> |                                                    | <b>97</b>  |
| <b>ÖZGEÇMİŞ</b>  |                                                    | <b>100</b> |



## SEMBOL LİSTESİ

|                                         |                                                |
|-----------------------------------------|------------------------------------------------|
| $t$                                     | : Çeper kalınlığı                              |
| $\theta$                                | : x ve s doğrultuları arasındaki açı           |
| $U$                                     | : x eksenini doğrultusunda çubuk yerdeğiştirme |
| $V$                                     | : y eksenini doğrultusunda çubuk yerdeğiştirme |
| $\Phi$                                  | : z eksenini etrafında çubuğun dönmesi         |
| $u$                                     | : n doğrultusunda çeper yerdeğiştirme          |
| $v$                                     | : s doğrultusunda çeper yerdeğiştirme          |
| $w$                                     | : z doğrultusunda çeper yerdeğiştirme          |
| $\omega$                                | : Sektörel alan, Çarpılma fonksiyonu           |
| $\epsilon_z, \epsilon_s, \epsilon_n$    | : Birim uzama bileşenleri                      |
| $\gamma_{zs}, \gamma_{zn}, \gamma_{sn}$ | : Birim kayma bileşenleri                      |
| $\sigma_z, \sigma_s, \sigma_n$          | : Normal gerilme bileşenleri                   |
| $\tau_{zs}, \tau_{zn}, \tau_{sn}$       | : Kayma gerilmesi bileşenleri                  |
| $\tau_{zs,s}$                           | : St. Venant kayma gerilmesi                   |
| $q_s$                                   | : St. Venant kayma akımı                       |
| $q_{II}$                                | : İkincil kayma akımı                          |
| $E$                                     | : Elastisite modülü                            |
| $G$                                     | : Kayma modülü                                 |
| $N$                                     | : Normal kuvvet                                |
| $M_x$                                   | : x eksenine göre eğilme momenti               |
| $M_y$                                   | : y eksenine göre eğilme momenti               |
| $M_\omega$                              | : Bimoment, Çarpılma momenti                   |
| $T_x$                                   | : x eksenini doğrultusunda kesme kuvveti       |
| $T_y$                                   | : y eksenini doğrultusunda kesme kuvveti       |
| $M_t$                                   | : Burulma momenti                              |
| $M_{ts}$                                | : St. Venant burulma momenti                   |
| $M_{t\omega}$                           | : Çarpılma burulma momenti                     |
| $P_z, P_s, P_n, p_z, p_s, p_n$          | : Yanal yükler                                 |
| $J$                                     | : Burulma sabiti                               |
| $A$                                     | : En kesit alanı                               |
| $S_y$                                   | : En kesitin x eksenine göre statik momenti    |
| $S_x$                                   | : En kesitin y eksenine göre statik momenti    |
| $S_\omega$                              | : En kesitin sektörel momenti                  |
| $I_y$                                   | : En kesitin x eksenine göre atalet momenti    |
| $I_x$                                   | : En kesitin y eksenine göre atalet momenti    |
| $I_{xy}$                                | : En kesitin çarpım atalet momenti             |
| $I_{\omega x}, I_{\omega y}$            | : En kesitin ikinci sektörel momentleri        |
| $I_{\omega\omega}$                      | : Çarpılma sabiti                              |
| $P_A$                                   | : Asal dönme noktası                           |
| $O_A$                                   | : Asal sektörel orijin                         |
| $F_s, F_s^*$                            | : St. Venant kayma akımı fonksiyonları         |

|                 |                               |
|-----------------|-------------------------------|
| $K$             | : Kayma akımı fonksiyonu      |
| $L$             | : Diferansiyel operatör       |
| $\Phi_i$        | : Deneme fonksiyonu           |
| $\alpha_i$      | : Deneme fonksiyonu katsayısı |
| $\varepsilon_n$ | : Hata fonksiyonu             |
| $w_i$           | : Ağırlık fonksiyonu          |



## ŞEKİL LİSTESİ

|                                                                                           | <u>Sayfa No</u> |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| Şekil 2.1 Bir U profilin üniform olmayan burulması                                        | 8               |
| Şekil 2.2 Eksenel P yükünün bileşenlerine ayrılmasıyla I profilde oluşan gerilmeler.      | 10              |
| Şekil 2.3 Eksen takımları ve koordinatlar                                                 | 11              |
| Şekil 2.4 Çubuk ve çeper üzerindeki yerdeğiştirmeler                                      | 13              |
| Şekil 2.5 Sektörel alan                                                                   | 15              |
| Şekil 2.6 I kesitte $\omega$ 'nın değişimi                                                | 15              |
| Şekil 2.7 Kapalı bir en kesitte $F_s$ fonksiyonları                                       | 17              |
| Şekil 2.8 $F_s^*$ fonksiyonları                                                           | 18              |
| Şekil 2.9 Açık en kesitli bir çubuk parçasının eksenel dengesi                            | 23              |
| Şekil 2.10 Kesim noktalarının değişimi                                                    | 24              |
| Şekil 2.11 Açık en kesitli bir çubukta elemanter denge                                    | 26              |
| Şekil 2.12 Çubuk kuvvetleri                                                               | 34              |
| Şekil 2.13 $\omega$ ve $\omega^*$ çarpılma fonksiyonları                                  | 41              |
| Şekil 2.14 Dönme noktası ve sektörel orijinin değişimi                                    | 42              |
| Şekil 2.15 Koordinat dönüşümü                                                             | 45              |
| Şekil 2.16 Burulma momenti etkisindeki ankastre bağlı çubuk                               | 54              |
| Şekil 2.17 $M_{TS}$ ve $M_{TQ}$ 'nın farklı $\lambda$ değerlerinde çubuk boyunca değişimi | 56              |
| Şekil 2.18 Çarpılma momentinin farklı $\lambda$ değerlerinde çubuk boyunca değişimi       | 56              |
| Şekil 2.19 $\Phi$ 'nin farklı $\lambda$ değerlerinde çubuk boyunca değişimi               | 57              |
| Şekil 2.20 Çarpılma momentleri etkisindeki çubuk                                          | 57              |
| Şekil 2.21 $k = 0.5$ için çarpılma momenti eğrileri                                       | 58              |
| Şekil 2.22 $\Phi$ 'nin farklı $\lambda$ değerlerinde çubuk boyunca değişimi               | 59              |
| Şekil 2.23 Aynı boyutlara sahip açık ve kapalı en kesitli çubuklarda çarpılma             | 60              |
| Şekil 2.24 U profilin boyutları                                                           | 68              |
| Şekil 2.25 Eleman koordinatlarının yönü                                                   | 69              |
| Şekil 2.26 Çarpılma fonksiyonu ve normal gerilme dağılımı                                 | 70              |
| Şekil 2.27 Sektörel moment ve kayma akımının dağılımı                                     | 71              |
| Şekil 2.28 Kayma akımlarının oluşturduğu kesme kuvvetleri ve burulma momenti              | 72              |
| Şekil 2.29 Üç hücreli kapalı en kesit                                                     | 73              |
| Şekil 2.30 Çarpılma fonksiyonu                                                            | 76              |
| Şekil 2.31 $S_y^s$ 'nin hesaplanmasında kullanılan s koordinatı                           | 78              |
| Şekil 2.32 $S_x^s, K_x, S_x^s - K_x$ fonksiyonlarının dağılımı                            | 82              |
| Şekil 2.33 $S_y^s, K_y, S_y^s - K_y$ fonksiyonlarının dağılımı                            | 83              |

|            |                                                                                 |    |
|------------|---------------------------------------------------------------------------------|----|
| Şekil 2.34 | $S_{\Omega}^s, K_{\Omega}, S_{\Omega}^s - K_{\Omega}$ fonksiyonlarının dağılımı | 84 |
| Şekil 3.1  | Yayıllı moment yükü etkisindeki ankastre bağlı çubuk                            | 88 |
| Şekil 3.2  | $L = 1m.$ için yaklaşık çözümlerin analitik çözümle Karşılaştırılması           | 91 |
| Şekil 3.3  | $L = 2m.$ için yaklaşık çözümlerin analitik çözümle Karşılaştırılması           | 92 |
| Şekil 3.4  | $L = 4m.$ için yaklaşık çözümlerin analitik çözümle Karşılaştırılması           | 93 |
| Şekil 3.5  | $L = 8m.$ için yaklaşık çözümlerin analitik çözümle Karşılaştırılması           | 94 |
| Şekil 3.6  | $L = 12m.$ için yaklaşık çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması          | 95 |



## TABLO LİSTESİ

Sayfa No

|           |                                                                      |    |
|-----------|----------------------------------------------------------------------|----|
| Tablo 2.1 | Burulma probleminde sınır şartları                                   | 52 |
| Tablo 2.2 | R koordinatları                                                      | 74 |
| Tablo 2.3 | Elemanlar üzerindeki K fonksiyonları                                 | 81 |
| Tablo 3.1 | L değerleri için deneme fonksiyonu katsayıları                       | 90 |
| Tablo 3.2 | L = 1m. için yaklaşık çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması  | 91 |
| Tablo 3.3 | L = 2m. için yaklaşık çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması  | 92 |
| Tablo 3.4 | L = 4m. için yaklaşık çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması  | 93 |
| Tablo 3.5 | L = 8m. için yaklaşık çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması  | 94 |
| Tablo 3.6 | L = 12m. için yaklaşık çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması | 95 |

## ÖZET

İnce çeperli çubukların genel yapısı, enine ve boyuna elemanlarla desteklenen uzun prizmatik bir kabuk şeklindedir ve çubuk boyutları arasındaki oranların büyüklüğü ana karakteristiklerini oluşturur: Çubuk çeper kalınlığının, en kesit boyutlarına oranı ve en kesit boyutlarının çubuk boyuna oranı küçüktür.

Yapı mühendisliğinin tüm alanlarında, gerekli katılık ve mukavemete ağırlık ve maliyetten önemli kazançlar sağlayarak ulaşmaları sebebiyle ince çeperli çubuk uygulamaları en modern çözüm olarak karşımıza çıkarlar. Bununla birlikte ince çeperli çubukları diğer yapısal elemanlardan ayıran önemli davranış farklılıkları vardır. Bu özellikleri dikkate alarak ince çeperli çubukların eğilme-burulma davranışlarını belirleyen genel bir teori ilk olarak Vlasov tarafından açık en kesitler için ortaya konulmuştur.

Bu çalışmanın ilk bölümünde, ince çeperli çubuklar ana hatlarıyla tanımlanarak taşıdıkları karakteristik özelliklerden bahsedilecek ve ince çeperli çubuk örneklerinin geniş olarak yer aldığı gemi yapısına kısaca göz atılacaktır. Ayrıca, ince çeperli çubuk teorisinin geliştirilmesinde önemli katkıları bulunan bazı çalışmalara da değinilmiştir.

İkinci bölüm, ince çeperli çubuk teorisinin anlatılmasına ayrılmıştır. Bu bölümde, ilk olarak açık en kesitler için Vlasov teorisi anlatılacaktır. Bu teoride, bazı kabuller yapılarak çarpılma adı verilen eksenel yerdeğiştirmeler, ‘Sektörel Alanlar Kanunu’ ile belirlenir ve buna bağlı olarak gerilmeler, çubuk kuvvetleri ve denge denklemleri ifade edilir. Kapalı en kesitler içinse von Karman-Christensen teorisi ele alınacaktır. Her iki teori benzer kabullere dayanır ve bunlar arasında en kritik olanı kayma şekil değiştirmelerinin St. Venant burulmasında oluşan şekil değiştirmeler şeklinde alınması kabulüdür. Bu kabulün kapalı en kesitlerde hatalı sonuçlar üretebilmesi sebebiyle probleme daha doğrudan bir yaklaşım içeren Bescoter teorisine de yer verilmiştir. Ayrıca, ince çeperli çubukların belirleyici özelliğinin burulma davranışları olması sebebiyle, burulma problemi incelenerek bazı önemli noktalara açıklık getirilmeye çalışılmış, açık ve kapalı en kesitler için birer örnek üzerinde, hesaplamalarda kullanılan en kesit büyüklüklerinin belirlenmesi gösterilmiştir.

Üçüncü bölüm ise, ‘Ağırlıklı Artık Metodları’nın tanımlanması ve bunlardan biri olan ‘Moment Metodu’nun, ince çeperli çubukların diferansiyel denge denklemlerinin çözümüne uygulanmasının gösterilmesi şeklindedir. Uygulamaya basit bir örnek olarak, verilen bir çubuğa ait burulma problemi ele alınmış ve ‘Moment Metodu’nun getirdiği çözüm, analitik çözümle karşılaştırılmıştır.

## THE FLEXURE AND TORSION OF THIN WALLED BARS

### SUMMARY

A thin walled bar is characterized by the relative magnitude of its dimensions. The wall thickness is small compared to the linear dimensions of the cross section and in turn, are small compared to the length of the bar. Bars fitting this general description appear in many forms and sizes, from a simple I bar to the complex hull of a ship.

The most distinctive feature of the thin walled bars is that they may undergo axial deformations which are called warping as a result of torsion. In the case of flexural torsion, the warping of the bar is accompanied by normal stresses appearing in the cross section in addition to the shearing stresses. In each section of the bar the normal stresses lead to a new generalized force which has the form of a self balancing system. This generalized force is called bimoment.

The theory of torsion and flexure of thin walled bars is based on three kinematic assumption:

1. The contour does not deform in its plane.
2. The shear strain  $\gamma_{zs}$  in the middle surface which is the surface lying midway through the wall is to have the same distribution as it does in the St. Venant torsion.
3. Each element behave as a thin shell. This means straight lines remain normal to the middle surface during a deformation.

According to the Assumption 1, the cross section does not deform in its own plane and so the contour and pole of the cross section can be thought of as embedded in a rigid disk lying in the  $x, y$  plane. The movement of the contour in its plane can be described by the displacement of the point on the disk corresponding to the pole, and the rotation of the disk about the pole axis. Let the displacement components in the  $x$  and  $y$  directions and the rotation about the positive  $z$  direction be  $U, V, \Phi$ . The displacements of a point on the contour can also be described relative to the contour coordinate system. Let the displacements of a point A in the contour be  $u, v, w$  in the  $n, s, z$  directions. Two displacements group are related by,

$$u(s, z) = U(z) \sin \theta(s) - V(z) \cos \theta(s) - \Phi'(z) q(s) \quad (1)$$

$$u(s, z) = U(z) \sin \theta(s) - V(z) \cos \theta(s) - \Phi'(z) q(s) \quad (2)$$

and from the Assumption 2 the out of plane displacement of the middle surface is,

$$w(s, z) = W'(Z) - U'(z)x(s) - V'(z)y(s) - \Phi''(z)\omega(s) \quad (3)$$

where,

$$\omega(s) = \int_0^s r(s) ds \quad (4)$$

for open cross section and,

$$\varpi(s) = \int_0^s \left( r(s) - \frac{F_s(s)}{t} \right) ds \quad (5)$$

for closed cross section.

Here,  $F_s$  is a function that defines the St. Venant shear flow as,

$$q_s = G\Phi'F_s \quad (6)$$

and which is constant on each element of the contour since the shear flow is constant.  $F_s$  functions can be determined from the continuity conditions at the junctions and

$$\oint_i \frac{F_s}{t} ds = 2A_i \quad (7)$$

conditions for all  $i$  closed cells, which are obtained from w continuity of a close cell by using Assumption 2.

In equation (3),  $W$  is an integration function representing the axial displacement of the  $s$  origin. The last term in the equation represents the nonplanar or warping deformation of the cross section. For this reason  $\omega$  is called the warping function.

Equation (4) describes the general law for the longitudinal displacements of a thin walled bars. This law was expressed by Vlasov as follows for open cross sections:

The longitudinal displacement in the section  $z = \text{const.}$  of a thin walled open shell of cylindrical or prismatic shape are made up of displacements linear in the cartesian coordinates of the point on the profile line and displacements proportional to the sectorial area, providing there are no bending deformations of the cross section and the middle surface is free of shear

The first three terms of the equation express the Bernoulli-Navier law. According to this law, any cross sections which were plane before deformation, remain plane after it. The forth term determines the part of the displacement that does not obey the law of plane sections and which arises as a result of torsion.

By using Assumption 3 we can neglect the normal stresses in the  $n$  and  $z$  direction and the shearing stresses which are directed along the normal to the profile line and we will only consider the normal stresses in the axial direction of the middle surface and in spite of Assumption 2 the shearing stresses in the direction of the tangent to the profile line.

We can also assume that the normal stresses are uniform along the wall. So from Hooke law they are given by,

$$\sigma_z(s, z) = E(W'(z) - U''(z)x(s) - V''(z)y(s) - \Phi''(z)\omega(s)) \quad (8)$$

The shearing stresses are developed owing to two distinct mode of deformation. These are, a pure twisting of the bar during which all cross sections are free to warp and a transverse bending of the bar coupled with nonuniform axial deformation. The first of deformation leads to shearing stresses which vary linearly over the thickness for open cross sections and a shear flow for closed cross sections. The additional stresses developed during the second mode of deformation are uniform over  $t$  and also produce a shear flow  $q_{II}$  which acts along the contour of the cross section.

Similarly, we may regard the total twisting moment developed on any section as the sum of two parts: St. Venant twisting moment due to St. Venant shear stresses and warping torque due to  $q_{II}$ .

$$M_t = M_{ts} + M_{rw} \quad (9)$$

As the first part of the shear stress gives the St. Venant twisting moment, the state of the stress in the cross section can be stated by the normal stresses  $\sigma_z$  and the shear flow  $q_{II}$ .

To determine the shear flow, we can not use Hooke's law as with second assumption we make zero the shear strain. So, by using the equilibrium equation of a beam element we can express the shear flow as,

$$q_{II}(s, z) = E\{A^s(s)W''(z) - S_y^s(s)U'''(z) - S_x^s(s)V'''(z) - S_\omega^s(s)\Phi'''(z)\} + F_z^s(s, z) \quad (10)$$

As there is a state of static indeterminacy, determination of shear flow includes some difficulty in closed sections. This problem is solved by considering a fictitious shear deformation and assuming the total shear flow  $q$  includes two parts, one of which is St. Venant shear flow.

$$q = q_s + q_{II} \quad (11)$$

To arrive an actual expression for  $q_{II}$ , we make an imaginary cut in the wall of each cell of the bar and to change it into one with an open section. So the shear flow becomes,

$$q_{II} = q'_{II} + q''_{II} \quad (12)$$

where,  $q'_{II}$  is the shear flow for an open section and  $q''_{II}$  is a redundant shear flow which is given by,

$$q''_{II}(s, z) = E\{-K_z(s)W''(z) + K_y(s)U'''(z) + K_x(s)V'''(z) + K_\omega(s)\Phi'''(z)\} - K_f(s)F(z) \quad (13)$$

K shear flow functions are determined by solving the equations,

$$\oint_i \frac{F_z}{t} ds = \oint_i \frac{A^*}{t} ds \quad (14a)$$

$$\oint_i \frac{F_y}{t} ds = \oint_i \frac{S_y^*}{t} ds \quad (14b)$$

$$\oint_i \frac{F_x}{t} ds = \oint_i \frac{S_x^*}{t} ds \quad (14c)$$

$$\oint_i \frac{F_\omega}{t} ds = \oint_i \frac{S_\omega^*}{t} ds \quad (14d)$$

$$\oint_i \frac{F_f}{t} ds = \oint_i \frac{S_f^*}{t} ds \quad (14e)$$

and the continuity of the shear flows at junctions. The (14) equations are obtained from the continuity of the axial displacements in each cell.

The stress resultants acting in the complete cross section of the bar are referred to as the bar forces. In simple bar theory the bar forces are the two shear forces, the axial force, the two bending moments and the twisting moment. In thin walled bar theory a new bar force appears which is called as bimoment and the twisting moment consists of two parts.

The bar forces can be related to the stresses by calculating the work done during a virtual displacement of the cross section.

The final relations between the longitudinal bar forces and the stresses are,

$$N = \int_A \sigma_z dA = E(W' \int_c t ds - V'' \int_c y t ds - U'' \int_c x t ds - \phi'' \int_c \omega t ds) \quad (15a)$$

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA = E(W' \int_c y t ds - V'' \int_c y^2 t ds - U'' \int_c x y t ds - \phi'' \int_c \omega y t ds) \quad (15b)$$

$$M_y = - \int_A \sigma_z x dA = -E(W' \int_c x t ds - V'' \int_c y x t ds - U'' \int_c x^2 t ds - \phi'' \int_c \omega x t ds) \quad (15c)$$

$$M_\omega = - \int_A \sigma_z \omega dA = -E(W' \int_c \omega t ds - V'' \int_c \omega y t ds - U'' \int_c \omega x t ds - \phi'' \int_c \omega^2 t ds) \quad (15d)$$

and by using the equilibrium of dz part of the bar,

$$T_x = -M'_y + m_y \quad (16a)$$

$$T_y = M'_x + m_x \quad (16b)$$

$$M_{\omega} = -M'_\omega + m_\omega \quad (16c)$$

The integral terms in the equations are sectional properties.

The equations of bar forces can be uncoupled by transforming the cartesian and contour coordinate system to the principal systems. If capital letters are used to indicate a principal system, the principal system conditions are,

$$S_x = S_y = I_{xy} = 0 \quad (17a)$$

$$S_\Omega = I_{\Omega x} = I_{\Omega y} = 0 \quad (17b)$$

So, the bar forces reduce to their principal form.

$$N = EAW' \quad (18a)$$

$$M_x = -EI_x V'' \quad (18b)$$

$$M_y = EI_y U'' \quad (18c)$$

$$M_\Omega = EI_{\Omega\Omega} \Phi'' \quad (18d)$$

$$T_x = -EI_y U''' + m_y \quad (18e)$$

$$T_y = -EI_x V''' + m_x \quad (18f)$$

$$M_\tau = GJ\Phi' - EI_{\Omega\Omega} \Phi''' + m_\Omega \quad (18g)$$

By using the principle of minimum potential energy we can deduce the equations of equilibrium of a thin walled bar as follows.

$$E \begin{bmatrix} A & -S_x & -S_y & -S_\omega & 0 \\ -S_x & I_x & I_{xy} & I_{\omega x} & 0 \\ -S_y & I_{xy} & I_y & I_{\omega y} & 0 \\ -S_\omega & I_{\omega x} & I_{\omega y} & I_{\omega\omega} & -\frac{GJ}{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W''' \\ V'''' \\ U'''' \\ \Phi'''' \\ \Phi''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_z \\ F_y + m'_x \\ F_x + m'_y \\ m_t + m'_\omega \end{bmatrix} \quad (19)$$

As the theory fails to consider with sufficient accuracy the effects of shearing strains upon deflections due to Assumption 2, some important errors occur for closed sections. To solve this problem Bescoter gives a method which determines the warping displacements directly by using a  $f$  function instead of Assumption 2 as,

$$w = -f(z)\Omega(s) \quad (20)$$

The warping and twist of the bar are obtained from the following equilibrium equations.

$$EI_{\Omega\Omega} f'' - GJ\eta^2 f = m_{\Omega} - \eta^2 M_T \quad (20a)$$

$$\frac{EI_{\Omega\Omega}}{\eta^2} \Phi'' - GJ\Phi'' = m_T - \frac{EI_{\Omega\Omega}}{GI_R \eta^2} m_T'' + m_{\Omega}' \quad (20b)$$

From these displacements expressions for stresses and bar forces can be obtained which are very similar to the ones in previously given theory.

The differential equations of thin walled bars can be solved by the 'Method of Moments' which is one of the 'Weighted Residual Methods'. The procedure is as follows,

If  $L$  is the differential operator and  $Z_i$  are the bar displacements  $W$ ,  $U$ ,  $V$  and  $\Phi$ , the problem becomes,

$$LZ_i = F_i(z) \quad i = 1, \dots, 4 \quad (21)$$

Then  $Z_i$  are approximated by  $Z_{in}$ , which are expressed by,

$$Z_i \cong Z_{in} = \alpha_{ij} \Phi_{ij} \quad i = 1, \dots, 4 \quad j = 1, \dots, n \quad (22)$$

Here  $\Phi_{ij}$  are trial functions which can be obtained by introducing the boundary conditions.

By describing the residual as,

$$\varepsilon_{in} = LZ_{in} - F_i \quad i = 1, \dots, 4 \quad (23)$$

and from the minimization of the residual,

$$\langle w_i, \varepsilon_{in} \rangle = \int_L \varepsilon_{in} z^{j-1} dz = 0 \quad i = 1, \dots, 4 \quad j = 1, \dots, n \quad (24)$$

$\alpha$  coefficients and so the approximate solution are obtained.

# BÖLÜM I

## GİRİŞ

Yapı elemanları, ana boyutları dikkate alınarak sınıflandırıldıklarında dört farklı grup şeklinde karşımıza çıkarlar: Boyut oranlarının birbirine yakın olduğu, bir hacmi tamamen dolduran kütsel elemanlar; bir boyutun (yükseklik), diğer iki boyuta (genişlik ve uzunluk) kıyasla küçük olduğu plak ve kabuklar; en kesiti oluşturan iki boyutun, uzunluk boyutuna göre küçük olduğu dolu çubuklar ve ince çeperli çubuklar.

İnce çeperli çubukların genel yapısı, enine ve boyuna elemanlarla desteklenen uzun prizmatik bir kabuk şeklindedir. Ana karakteristikleri, çubuk boyutları arasındaki oranların büyüklüğüdür: Çubuk çeper kalınlığının, en kesit boyutlarına oranı ve en kesit boyutlarının çubuk boyuna oranı küçüktür. Bu tanım, basit bir I kirişten, bir geminin kompleks yapısına kadar birçok şekil ve büyüklüğü kapsar. Yapıdaki destekleyici elemanlar, çubuk en kesitinin şeklini korumak ve dış yüklerin çubuk çeperindeki etkilerini düzenlemek (gerilmelerin çeper üzerinde üniform dağılmasını sağlayarak şekil değıştirmenin eğilmesiz olmasını sağlamak) amacıyla çubuk boyunca sık aralıklarla yer alır ve kendi düzlemlerinde rijid olmakla birlikte çubuğun aksenal hareketini engellemedikleri varsayılır. Çubuk, çeperinin bir kapalı çevrim oluşturup oluşturmamasına göre, kapalı ya da açık en kesitli olarak tanımlanır.

Yapı mühendisliğinin tüm alanlarında, ince çeperli çubuk uygulamaları en modern çözüm olarak karşımıza çıkarlar. Sandık kiriş kesitinde bir kirişli köprü veya U en kesite sahip bir asma köprü, bir kafes sistemin elemanları, bir kreyn, bir uçak kanadı, bir geminin omurgası ya da uçak veya gemi yapısındaki destekleyici elemanların her biri yük, çevre, malzeme veya beklenen davranış özellikleri sebebiyle tasarımları birbirinden farklılaşsa da, ince çeperli çubuk örnekleridir ve

alternatif yapılarla karşılaştırıldıklarında, gerekli katılık ve mukavemete, ağırlık ve maliyetten önemli kazançlar sağlayarak ulaşırlar. Bununla birlikte, ince çeperli çubukların yapısal davranışlarında bazı önemli farklılıklar vardır ve bunlar tasarım ve analizlerinde özellikle dikkat edilmesi gereken noktaları oluşturur:

1) İnce çeperli çubuklar, burulma etkisiyle eksenel doğrultuda şekil değiştirirler ve çubuk teorisine temel oluşturan Bernoulli-Navier hipotezi geçerliliğini yitirir. Çarpılma adı verilen bu şekil değişiklikleri sonucunda, çubuk en kesitinde ortaya çıkan normal gerilmeler ve kayma gerilmeleri, özellikle burulma rijitliğinin çok düşük olduğu açık kesitlerde büyük değerler alır.

2) Bir çubuğun burulma rijitliğinin küçük olması halinde, çubukta burkulma daima Euler burkulması olarak gerçekleşmez ve burulma veya beraber etkiyen burulma ve eğilme etkisiyle de kritik yükün altındaki değerlerde burkulma olayı görülebilir. En kesitteki gerilmelerin kritik değerlerini aşması durumunda, ince çeperli çubuklar lokal olarak da burkulabilirler ve her iki burkulma hali karşılıklı etkileşerek, kritik burkulma yükünü daha aşağılara çekebilir.

3) St. Venant prensibine göre, bir cismin küçük bir bölümüne etkiyen, değeri statik olarak sıfır olan bir kuvvet sisteminin etkileri, uygulama noktasından uzaklaştıkça hızla küçülür ve bu etkilerin ihmalı mümkündür. İnce çeperli çubuklar ise bu prensibe aykırı olarak davranırlar: Üniform olmayan burulma etkisindeki bir çubuk kesitinde ortaya çıkan normal gerilmelerin oluşturdukları sistem statik olarak sıfır şiddetindedir. Fakat, özellikle açık kesitlerde, bu gerilmelerin çubuk boyunca kaybolmasının oldukça yavaş olması ve aldıkları değerlerin çubuğun lokal burkulmasındaki önemli etkilerine bağlı olarak, ince çeperli çubuk sistemlerine St. Venant prensibinin uygulanması hatalı sonuçlara sebep olabilir.

4) St. Venant prensibine göre, çubuk uçlarına etkiyen dış yükler statik olarak eşdeğerleriyle değiştirildiklerinde, çubuğa olan tesirlerinde çubuk uçlarından belirli bir mesafe dışında bir değişiklik olmayacaktır. Çubuk teorisinin bu özelliği ve Bernoulli-Navier hipotezinin bir sonucu, çubukta oluşan eğilme gerilmelerinin çubuk tarafsız ekseninden uzaklıkla doğru orantılı olarak değiştiği, dolayısıyla üniform bir dağılım gösterdikleridir. Fakat, özellikle flençlerin geniş ve gövdenin kısa olduğu ince çeperli çubuklarda, Bernoulli-Navier hipoteziyle ihmal edilen kayma şekil değiştirmeleri, en kesitin düzlemliğinin bozularak çarpılmasına ve gerilmelerdeki üniformluğun kaybolmasına yol açar. Mesela bir kutu kirişte bu durum, iç kısımların

eğilmede daha az etkin olması ve dış kısımdaki gerilmelerin daha önemli hale gelmesi şeklindedir. Bu olay ‘kayma gecikmesi’ (shear lag) olarak tanımlanır.

5) İnce çeperli yapılar, yapının yüklere karşı davranışı üzerinde etkili olan imalat kusurlarına karşı oldukça hassastır.

Çubukların eğilme ve burulma davranışları, birbirinden bağımsız gelişen Bernoulli-Navier hipotezine dayanan eğilme teorisi ve en kesitlerin burulma etkisiyle eksenel şekil değiştirebildikleri St. Venant burulma teorisiyle verilmiş, eğilme ve burulma arasındaki ilişki ise çok sonraları Mailart’ın ‘kayma merkezi’ni, eğilmenin burulmasız olabilmesi için dış yük ve mesnet tepkilerinin bileşkesinin geçmesi gereken nokta şeklinde tanımlamasıyla [1] açığa çıkmıştır.

St. Venant teorisinin ince çeperli çubuklara uygulanması, Bredt’in tüpler üzerinde yaptığı çalışmalar [2] ve Prandtl’in zar analojisiyle [3] gerçekleşti. 1905’te bir I kirişin lateral burkulmasını inceleyen Timoshenko, flençler üzerindeki normal gerilme dağılımının lineer değiştiği varsayımından hareketle, çarpılmanın engellenmesiyle oluşan üniform olmayan burulmayı ifade etti [4]. Bunu, Z ve simetrik olmayan I profilleri inceleyen Weber [5], Timoshenko’nun çözümünü ‘birim çarpılma’ kavramını kullanarak diğer açık kesitler için genişleten Wagner [6] ile Kappus [7] ve F. ve H. Bleich’in [8] açık kesitli çubukların burkulması üzerindeki çalışmaları takip etti. İnce çeperli açık kesitli çubuklar için genel bir teori ilk defa 1940’da Vlasov tarafından oluşturuldu [9]. Vlasov’un teorisi, elemanter çubuk teorisinin temelini oluşturan Bernoulli-Navier hipotezi yerine onu kapsayan ‘Sektörel Alanlar Kanunu’ şeklinde tanımladığı bir hipoteze dayanıyordu. Daha sonra, Timoshenko [10] da benzer bir çalışmayı gerçekleştirdi. Tüm bu yapılanlar aynı kabullere, çubuk en kesitinin kendi düzleminde herhangi bir şekil değişikliğine uğramadığı, çubuk ortalama yüzeyindeki kayma şekil değişikliklerinin sadece St. Venant burulmasından kaynaklandığı, yani ek çarpılma kayma şekil değiştirmelerinin etkisinin ihmal edilebileceği ve gerilmelerin çubuk çeperi üzerinde üniform dağıldığı kabullerine dayanıyordu. Teorilerden elde edilen sonuçlar ve deney sonuçları genelde uyumluluk gösterse de, özellikle kısa ve çeper kalınlığının daha az olduğu çubuklarda ikinci kabulün geçerliliğini yitirmesi ve çubuktaki süreksizlik noktaları civarında, verilen çözümlerin yeterli doğruluğu taşınamaması teorilerin zayıf tarafını oluşturuyordu. Vlasov [9], Goodier [11] ve Gjelsvik [12],

kabuk kuvvetlerinin etkilerini dikkate alarak, üniform gerilme şartını içermeyen daha genel çözümler de vermişlerdir.

Kapalı kesitlerin üniform olmayan burulması üzerine ilk önemli çalışmalar dikdörtgen bir kirişi, eksenel yerdeğiştirmelerin çeper üzerinde lineer şekilde değiştiği kabulüyle birlikte inceleyen Reissner [13] ve dikdörtgen en kesit için çözümü en kesiti idealleştirerek elde eden Ebner [14] ile asal kayma eksen ve sıfır çarpılma eksen kavramlarını tanıtarak, çok hücreli en kesitlere uygulanabilir bir çözüm ortaya koyan Kirste [15] tarafından gerçekleştirildi. 1944'de von Karman ve Christensen [16], en kesitteki eksenel yerdeğiştirmeleri St. Venant burulmasında oluşan yerdeğiştirmeler şeklinde alarak, açık kesitleri olduğu kadar tek ve çok hücreli kapalı kesitleri de kapsayan bir çözüm sundu. Bu çözümdeki, çarpılma kayma şekil değıştirmelerinin etkisinin ihmal edilmesiyle gerilme ve çubuğun dönme değerlerinde görülen hata, eksenel yerdeğiştirmelerin St. Venant yerdeğiştirmeleri olarak alınması yerine ortak bir fonksiyonla değıştiğinin varsayıldığı Benscoter'in [17] çalışmasında düzeltildi.

Bu yaklaşık teorilerin ötesinde, çarpılma kayma gerilmelerinin etkilerini dahil eden, 'doğru' olmakla birlikte uygulaması kolay olmayan çözümler von Karman ve Chien [18] ve Argyris ve Dunne [19] tarafından verilmiştir.

İnce çeperli çubukların davranış özelliklerinin belirlenmesi ve gelişen hesaplama metotları, ince çeperli çubukların kullanım alanlarını genişletmenin yanı sıra daha efektif kullanımı da sağlamıştır. Gemi inşaatı mühendisliği, bunun açık örneklerinden birisidir.

Geminin genel yapısına göz attığımızda, dip yapı ve bordada yer alan tek ya da çok hücreli bölümlerle birlikte, açık ve kapalı en kesitli ince çeperli elemanlardan oluşan kompleks bir yapı görürüz: Geminin dış kılıfı, geminin yüzmesini sağlayan ve hidrodinamik gerilmeleri karşılayan ince bir kabuk şeklindedir. Bu kabuk, gerilmelerin daha geniş bir yüzeye yayılmasını sağlayan, yanlarda borda stringerleri ve postalar, dipte ise döşekler ile merkez omurga ve yan iç tulaniler tarafından desteklenir. Gemiye etkiyen yükler arasında en önemlisinin boyuna etkiyen eğilme momenti olması, geminin boyuna mukavemetini artırıcı elemanların yaygın olarak kullanılmasını gerektirir. Bu elemanlar arasında merkez omurga ve levha omurga, çift dip sacı, boyuna posta ve perdeler, ana güverte ve boyuna stringerler ile güverte altı tulanileri sayılabilir. Döşekler, derin postalar, enine perdeler ve kemereler,

geminin enine mukavemetini sağlayan başlıca elemanlardır. Ayrıca döşekler, makine yataklarıyla birlikte makinelerin titreşimiyle oluşan gerilmelerin karşılanması, kemereler, güverte altı tulanileri ve puntellerle birlikte güvertelerin taşınması ve takviye edilmesi, derin elemanlar da dipte, bordada ve güverte altındaki boyuna elemanların desteklenmesi işlemini de görür.

Gemi yapısal tasarımında geleneksel yaklaşım, klas kuruluşlarının belirlediği gemi tiplerine göre değişen dizayn kurallarının uygulanması şeklindedir. Birikim ve deneyime dayanan bu kurallar, geminin yapısal elemanlarının belirlenmesini basit ve kullanımı kolay ampirik formüllere indirgeyerek hem tasarım sürecini kısaltır hem de geminin bir klas kuruluşunca onaylanmasını, bu şart zaten baştan sağlandığı için kolaylaştırır. Fakat bu yaklaşım, bazı dezavantajları da beraberinde getirir [20]: Formüllerdeki temel hedef yapısal göçmenin engellenmesi olmakla birlikte, göçmenin birçok şekilde gerçekleşebilen karmaşık bir olay olması, basit formüllerle sağlanan bir göçme emniyetinin derecesini belirsizleştirir. Emniyet payında gereksiz bir fazlalığın ise, ağırlık ve maliyette gereksiz bir artışa yol açacağı açıktır. Bir başka önemli nokta, formüllerin birçok basitleştirici kabul içermesi ve sadece bazı limitler içinde geçerli olmasıdır. Tüm bu dezavantajlar, işletim verimliliğinde talep edilen artışlarla birlikte değişen yapısal özellikleri sebebiyle modern gemiler için daha da kritik bir durum oluşturmaktadır. Bu noktada gereken, yapısal tasarımın geleneksel yöntemlerle gerçekleştirilmesi yerine yapı teorilerine, özellikle burulma etkilerinin giderek daha önemli hale gelmesiyle birlikte ince çeperli çubuk teorisine dayanan bilgisayar destekli çözümlerin üretilmesidir. Bu amaçla gerçekleştirilen çalışmalar giderek artmakta ve her geçen gün daha olumlu sonuçlar elde edilmektedir. Özellikle ön dizayn aşamalarında kullanılan bu çalışmalar arasında Wilde [21], Haslum ve Tonnessen [22], Kawai [23], Gunnlaugsson ve Pedersen [24] ve Pedersen [25]'i sayabiliriz.

Bu çalışmada, açık ve kapalı en kesitli ince çeperli çubukların eğilme-burulma teorisiyle birlikte, bir 'Ağırlıklı Artık Metodu' olan 'Moment Metodu'nun ince çeperli çubukların diferansiyel denge denklemlerine uygulanması ele alınacaktır.

Açık en kesitler için Vlasov, kapalı en kesitler içinse von Karman-Christensen ve Bescoter teorilerinin ortaya konulduğu Bölüm II'de, büyük oranda Vlasov [9] ve Gjelsvik [12]'den yararlanılmıştır. Verilen teoriler, lineer elastik, homojen ve izotrop malzemeden oluşan sabit en kesitli doğrusal çubukların statik

yükler altındaki davranışlarını belirler. Bölüm III’de ise, kısaca ‘Ağırlıklı Artık Metodları’ ve ‘Moment Metodu’ tanımlanmış ve ‘Moment Metodu’nun Bölüm II’de elde edilen denge denklemlerine uygulanması temel denklemlerle verilmiştir. Ayrıca, bir uygulama olarak ince çeperli çubukların burulma denkleminin verilen bir örnek için moment metoduyla elde edilen çözümü, analitik çözümle karşılaştırılmıştır.

Geniş uygulama alanlarının varlığıyla beraber teorilerin zayıf tarafı, kayma şekil değiştirmelerinin teorilerin daha basit ortaya konabilmesi için dikkate alınmamasıdır. Bu durum için gerek iteratif gerekse teorik çözümler bulunmakla birlikte konu dışındadırlar. Stifner vb. takviye elemanlarının etkileri ve çubukların perde, posta gibi elemanlarla bağlantı noktalarında oluşan gerilme durumları da burada ele alınmayacaktır.



## BÖLÜM II

### İNCE ÇEPERLİ ÇUBUKLARIN EĞİLME VE BURULMASI

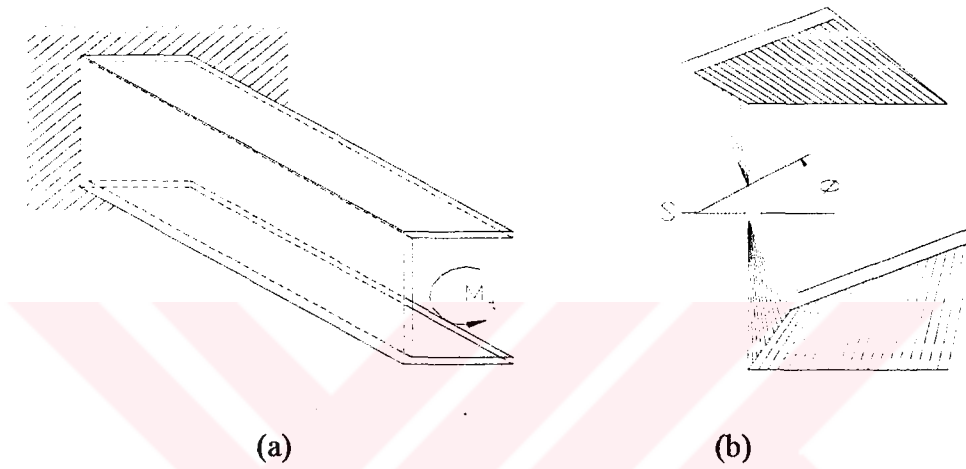
#### 2.1 Giriş

Çubukların burulma problemi, çubuk sınır şartlarına ve burulma momentinin çubuk üzerindeki dağılımına bağlı olarak iki farklı şekilde karşımıza çıkar. Çözümü St. Venant tarafından verilen, serbest burulma, St. Venant burulması ya da üniform burulma olarak tanımlanan durum, çubuğun, uçlarından etkiyen ve çubuk boyunca değişmeyen momentler etkisiyle çubuk en kesitinin hareketi engellenmeden serbestçe burulmasıdır. Birim dönme açısının sabit olduğu ve çubukta bütün en kesitler için aynı dağılımı taşıyan bir kayma halinin olduğu bu durumda, kayma şekil değiştirmeleri en kesitte çarpılma adı verilen ve çubuk boyunca sabit kalan düzlem dışı hareketlere yol açar.

Çubuğun herhangi bir en kesitinde çarpılmanın engellenmesi veya burulma momentinin çubuk boyunca değişmesi, burulma probleminin karakterini birçok noktada değiştirir ve St. Venant teorisi geçersiz hale gelir. İnce çeperli çubuk teorisinin çıkış noktasını oluşturan bu burulma halini ‘eğilmeli burulma’ ya da ‘üniform olmayan burulma’ şeklinde tanımlıyoruz.

Şekil 2.1a’da,  $M_t$  burulma momenti etkisinde ankastre bağlı U profil görülmektedir. Ankastre uçta çubuk hareketinin tamamen engellenmiş olması, çarpılmanın serbest uca doğru çubuk boyunca değişmesine ve aksenal doğrultuda lineer olmayan basınç veya çekme gerilmelerinin oluşmasına sebep olur. Çubuğun sadece burulma momenti etkisinde olduğu dikkate alındığında, bu gerilmelerin en kesit üzerindeki bileşkesinin, bir normal kuvvet ya da eğilme momenti oluşturmayacağı, bir başka deyişle kendi içinde dengede olduğu açıktır. Bununla

birlikte flençler ve gövde üzerindeki gerilme dağılımı, Şekil 2.1b’de görüldüğü gibi kendi düzlemlerinde eğilmelerine yol açar ve en kesit üzerinde ek şekil değiştirmeler oluşur. Bunun anlamı, çubuğa etkiyen burulma momentinin sadece bir kısmının çubuğun doğrudan dönmesine yol açtığı, kalan kısmın ise çubuk içi eğilme momentleri oluşturduğudur. Eğilme momentlerinin bileşkesi ise, ince çeperli çubukların üniform olmayan burulmasında yeni bir büyüklüğü, bimoment [9] ya da çarpılma momenti [26] olarak tanımlanan çubuk kuvvetini ortaya çıkartır.



Şekil 2.1 Bir U profilin üniform olmayan burulması

Çubuk mukavemetinden bilindiği gibi, çubuğun üniform olmayan eğilmesi sonucunda çubuk en kesitinde normal gerilmelerin yanısıra kayma gerilmeleri de oluşur. U profilin çarpılmanın engellenmesiyle eğilen gövde ve flençleri için de benzeri bir durum söz konusudur ve çubuğun dönmesiyle oluşan kayma gerilmeleriyle birlikte ek kayma gerilmeleri oluşur. Çarpılma kayma gerilmeleri olarak tanımlanan bu gerilmelerin bileşkesinin bir burulma momenti vermesiyle çubuğa etkiyen burulma momenti biri doğrudan çubuğun dönmesiyle, diğeri oluşan eğilme momentleriyle bağlantılı iki ayrı burulma momentinin, St. Venant burulma momenti ve çarpılma burulma momentinin birleşimi haline gelir.

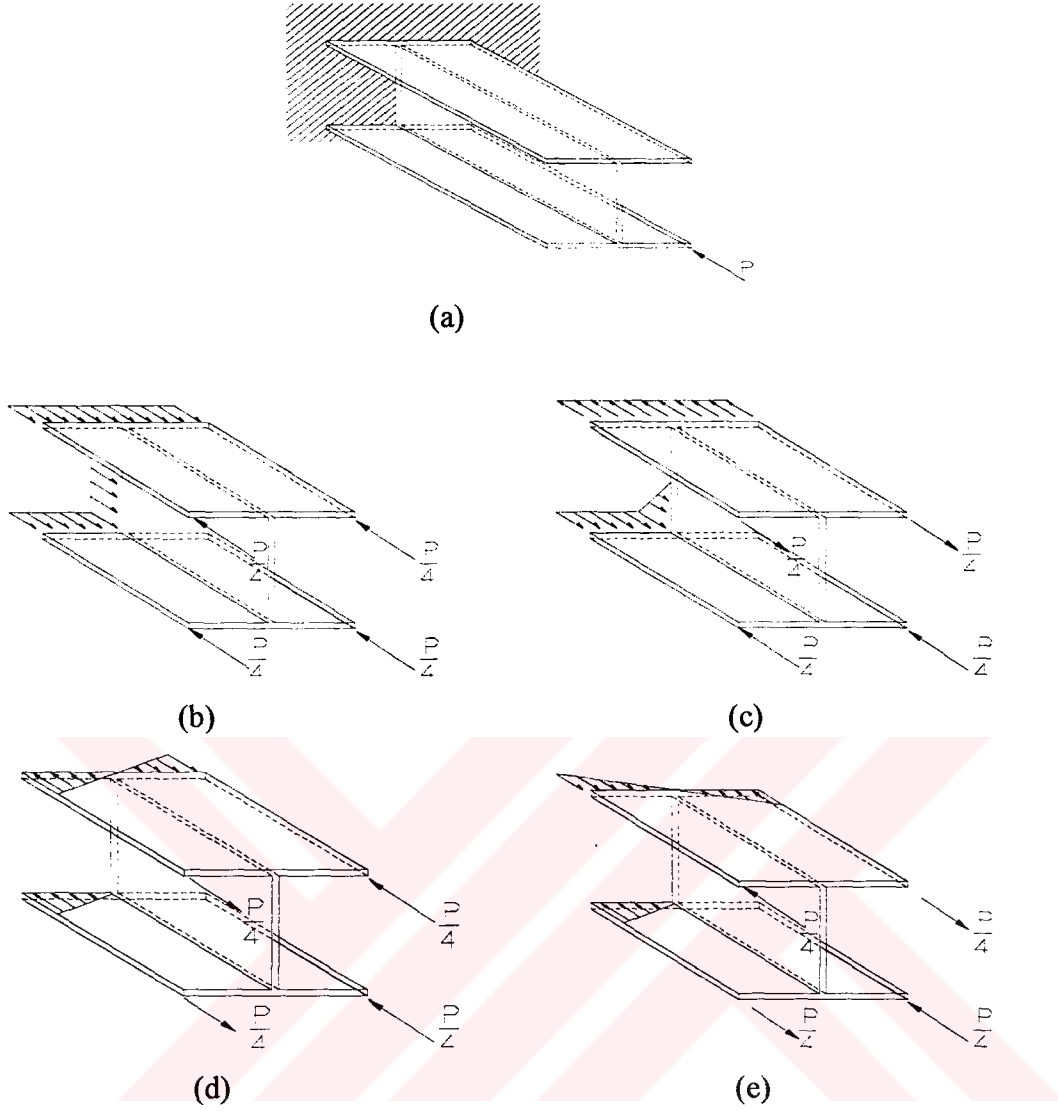
Elemanter çubuk teorisi, çubuk uçlarına etkiyen kuvvetlerin dağılımının teorisinin verdiği çözümün gerektirdiği şekilde olduğunu varsaymıştır. Kuvvetlerin dağılımı farklılık taşırsa, teori de geçerliliğini yitirecektir. Fakat, kuvvet dağılımdaki farklılığı yansıtan özel çözümler, elemanter teoriyle elde edilen gerilme dağılımının kuvvetlerin etkiye noktası civarı dışında kalan bölgeler için yeterli doğruluğu

taşıdığını göstermiştir. Bu sebeple, çubuğa etkiyen dış kuvvetlerin elemanter teorisinin gerektirdiği dağılımdaki statik eşdeğerleriyle değiştirilmesi, küçük bir bölge dışındaki gerilme dağılımını etkilemeyecektir. St. Venant prensibi olarak bilinen bu durum, “Elastik bir cismin belirli bir bölgesine etkiyen dış kuvvetler, kendi statik eşdeğerleriyle değiştirilecek olursa, söz konusu noktadan yeter derecede uzak noktalardaki gerilme hali pratikte değişmez” şeklinde ifade edilir [27]. Buradaki ‘yeter derecede uzak’ kavramı, dış kuvvetlerin değiştirildiği bölgenin büyük boyutunun katlarını ifade etmektedir.

St. Venant prensibi ve en kesitlerin şekil değiştirme sırasında düzlem kalması olarak bilinen Bernoulli-Navier hipotezi, elemanter çubuk teorisinin temellerini oluşturan kabullerdir. İnce çeperli çubuklar söz konusu olduğunda bu iki kabule de dikkatle yaklaşmak gerekir. Bunu bir örnekle açıklamaya çalışalım.

Şekil 2.2’de görülen I profil, P yüküyle aksenal olarak yüklensin. St. Venant prensibine göre, P yükü yerine statik olarak eşiti olan, (b) durumundaki normal kuvvet ile (c) ve (d)’deki xz ve yz düzlemlerinde etkiyen eğilme momentleri alınabilir. Her üç yükleme durumunda da Bernoulli-Navier hipotezinin sağlandığı açıktır. Kuvvetlerin bileşkesinin P yükünü vermemesi sebebiyle, (e)’de görülen bir dördüncü bileşene daha ihtiyaç duyulur. Fakat bu yükleme, I kirişin flençlerinde eşit büyüklükte ama ters işaretli eğilme momentleri oluşturur. Bu momentlerin flençlerin kendi düzlemlerinde eğilmesine ve çubuk en kesitlerinin çarpılmasına yol açacağı açıktır.

Şekil 2.2’deki P yükü etkisindeki cisim ince çeperli bir çubuk yerine dolu bir çubuk olsaydı, çarpılmanın lokal karakterine bağlı olarak gerilmelerin çubuk boyunca hızlıca azalmasıyla, (e) durumundaki aksenal bimomentsel yüklemenin etkileri ihmal edilebilirdi ve en kesitlerin düzlemligi korunurdu. St. Venant bu durumu, “Bir cismin bir bölgesine etkiyen bir kuvvet topluluğu statik olarak sıfır şiddetindeyse, etkime noktasından küçük bir bölgeye kadar olan kısım dışında önemli bir etkiye yol açmaz” [28] şeklinde ifade etmiştir. Oysa I profildeki çarpılmalar ve dolayısıyla çarpılma gerilmelerinin yükün etkime noktasından uzaklaştıkça azalmaları oldukça yavaştır ve lokal etkiler olarak alınmaları mümkün değildir.



Şekil 2.2 Eksenel  $P$  yükünün bileşenlerine ayrılmasıyla I profilde oluşan gerilmeler

Bu örnekteki bir başka dikkat çekici nokta ise, Betti-Rayleigh karşılıklı teoreminin bir sonucu olarak, bimoment etkisiyle flençlerde oluşan eğilmenin en kesitin dönmesine yol açması yani, bir çubuğun sadece burulma momentleri etkisiyle değil eksenel kuvvetler altında da burulabilecek olmasıdır

Yukarıda görüldüğü gibi ince çeperli çubukların, Bernoulli-Navier hipotezine ve St. Venant prensibine aykırı davranış göstermeleri, elemanter çubuk teorisi kullanılarak incelenememelerine sebep olmuş ve farklı kabullere dayanan yeni teorilerin oluşturulmasını gerektirmiştir. Bu bölümde ilk olarak aynı kabullere dayanan açık en kesitler için Vlasov ve kapalı en kesitler için von Karman-

Şekil 2.3 Eksen takımları ve koordinatlar

şeklinde elde edilir.  $r$  ve  $q$  için işaret kuralı şu şekildedir: A noktası, pozitif  $s$  doğrultusunda ilerlerken PA vektörü  $z$  eksenini etrafında pozitif yönde dönüyorsa  $r$  pozitif; A noktası pozitif  $n$  doğrultusunda ilerlerken, PA vektörü  $z$  eksenini etrafında negatif yönde dönüyorsa  $q$  pozitif alınır.

İnce çeperli çubuklar için bir eğilme-burulma teorisi oluşturulmasında, üç kinematik kabul genel olarak kullanılmıştır [12]:

**2.1** Çubuk en kesiti kendi düzleminde herhangi bir şekil bozukluğuna uğramaz.

**2.2** Çubuk ortalama yüzeyindeki  $\gamma_{zs}$  kayma şekil değiştirmesi, St. Venant burulmasında oluşan şekil değiştirmeye aynı alınır.

**2.3** Çubuk ince bir kabuk gibi davranır.

2.1 kabulüyle, çubuk en kesitinin deformasyonu ile oluşacak etkilerin ihmal mümkündür. Kabulün sağlanabilmesi için, çubuğun kendi düzleminde rijit, düzlem dışında şekil değiştirmeye uygun posta, perde gibi enine elemanlarla ve daima boyuna stringerlerle birlikte sık aralıklarla takviye edilmesi gerekir. Takviye elemanları, açık en kesitlere göre kapalı en kesitlerde daha fazla önem taşır ve genellikle çeper kalınlığı ve çubuk uzunluğunun artmasıyla önemleri azalır.

Elemanter mukavemetten bilindiği gibi çubukların eğilme teorisi, Bernoulli-Navier hipotezine dayanır. Bu hipotezle birlikte kayma şekil değiştirmelerinin çubuğun eğilmesine olan etkisinin ihmalıyla, en kesitlerin şekil değiştirme sırasında düzlem kaldıkları kabul edilir. 2.2 kabulü, Bernoulli-Navier hipotezinin burulma etkisinin dahil edilmesiyle ince çeperli çubukları kapsayan daha genel halidir.

Üniform olmayan burulma etkisindeki ince çeperli çubuklarda, çarpılmanın çubuk boyunca değişmesiyle birlikte eksenel doğrultudaki şekil değişiklikleri ile normal ve St. Venant kayma gerilmelerine ek, çarpılma kayma gerilmelerinin oluştuğundan bahsedilmiştir. Ek kayma gerilmelerinin yol açtığı kayma şekil değişiklikleri çarpılma değerlerini değiştirmekle beraber, etkilerini dikkate almak kolay değildir. Bu sebeple, 2.2 kabulüyle çarpılmadan kaynaklanan kayma şekil değişiklikleri ihmal edilir. Bu bir anlamda, çubuğa etkiyen burulma momentinin iki kısımdan -St. Venant burulma momenti ve çarpılma burulma momenti- oluştuğu düşünüldüğünde, çarpılma burulma momentinin çarpılmaya olan etkisinin ihmal edilmesidir. Bölüm 2.1'deki burulma momenti etkisindeki U profile tekrar dönersek, (2.2) kabulü, çarpılmanın engellenmesiyle flençler ve gövdede oluşan eğilmeyi Bernoulli-Navier hipotezinin geçerli olduğu bir eğilme haline getirecektir.

Şekil 2.4 Çubuk ve çeper üzerindeki yerdeğiştirmeler

$$u(s, z) = U(z) \sin \theta(s) - V(z) \cos \theta(s) - \Phi(z)q(s) \quad (2.2a)$$

$$v(s, z) = U(z) \cos \theta(s) + V(z) \sin \theta(s) + \Phi(z)r(s) \quad (2.2b)$$

şeklinde elde edilir.

A noktasının düzlem dışı hareketini gösteren  $w$  yerdeğiştirmesini, 2.2 kabulünü kullanarak belirleyebiliriz. St. Venant kayma gerilmesinin farklılık göstermesi sebebiyle bu durum açık ve kapalı kesitler ayrı ayrı ele alınacaktır.

### 2.2.1 Açık En Kesitli Çubuklarda Eksenel Yerdeğiştirme

Açık en kesitlerde St. Venant kayma gerilmelerinin ortalama yüzeyde sıfır olacak şekilde değişmesi sebebiyle 2.2 kabulünden,

$$\gamma_{zs} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial s} = 0 \quad (2.3)$$

elde edilir.

(2.2b) denklemindeki  $v$  ifadesi ve,

$$dx = ds \cos \theta \quad dy = ds \sin \theta \quad (2.4)$$

eşitliklerinin (2.3) denkleminde kullanılması,

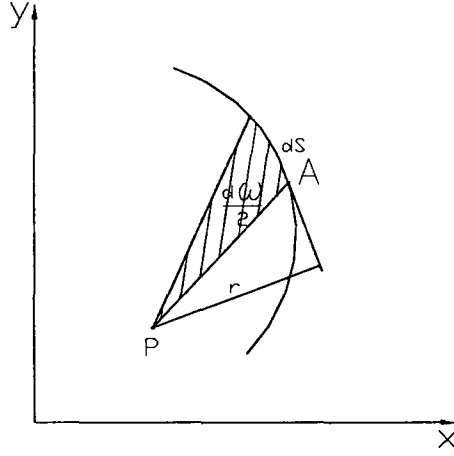
$$w(s, z) = W(z) - U'(z)x(s) - V'(z)y(s) - \Phi'(z)\omega(s) \quad (2.5)$$

şeklinde en kesitin düzlem dışı hareketini verecektir. ( $'$ ),  $z$ 'ye göre türevi belirtir.

Denklemdaki  $W$ , integrasyon sabiti olarak gelen,  $O$  orijininin eksenel yerdeğiştirmesi şeklinde alabileceğimiz  $z$ 'ye bağlı bir fonksiyondur.  $\omega$  ise,

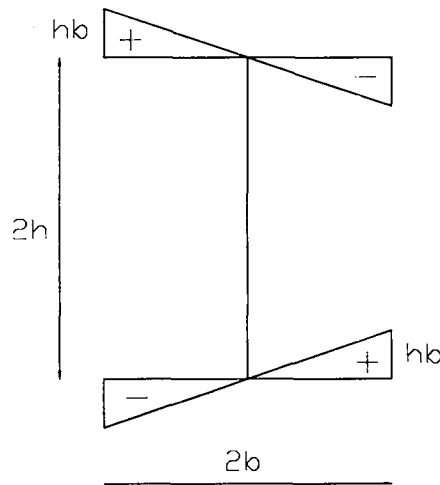
$$\omega(s) = \int_0^s r(s) ds \quad (2.6)$$

ile verilir. İntegralin yönü  $s$  ile aynıdır ve  $\omega(s_0) = 0$  alınır.  $\omega$ 'nın işareti  $r$  ile aynı şekilde,  $A$  noktası pozitif  $s$  doğrultusunda ilerlerken,  $PA$  vektörü  $z$  eksenini etrafında pozitif yönde dönüyorsa pozitif olur.



Şekil 2.5 Sektörel alan

Şekil 2.5'de,  $d\omega$ 'nın  $A$  noktasının  $ds$  kadar hareketi sırasında  $PA$  vektörünün taradığı alanın iki katını gösterdiği görülmektedir. Buna dayanarak Vlasov  $\omega$ 'yı sektörel alan,  $P$  ve  $O$  noktalarını da sektörel kutup ve sektörel orijin şeklinde tanımlamıştır [9]. Şekil 2.6'da ise, sektörel kutup ve orijinin ağırlık merkezinde alındığı simetrik bir I kesitte,  $\omega$ 'nın değişimi gösterilmiştir.



Şekil 2.6 I kesitte  $\omega$ 'nın değişimi

2.5 denklemi, ince çeperli açık kesitli bir çubuğun eksenel yerdeğiştirmesini en genel haliyle veren bir kanunun ifadesidir. Vlasov tarafından ‘Sektörel Alanlar Kanunu’ olarak tanımlanan bu kanun, “Silindirik ya da prizmatik formda ince çeperli açık kesitli bir çubuğun bir  $z = s$  kesitinde oluşan eksenel yerdeğiştirmeler, en kesitte herhangi bir eğilme deformasyonu ve ortalama yüzeyde kayma olmaması şartıyla, en kesit üzerindeki noktaların kartezyen koordinatlarına lineer bağılı yerdeğiştirmeler ve sektörel alan ile orantılı yerdeğiştirmelerden oluşur” şeklinde verilmiştir [9].

(2.5) denkleminin sağındaki ilk üç terim, sırasıyla en kesitin üniform yerdeğiştirmesini ve  $yz$ ,  $xz$  düzlemlerinin eğilmesiyle oluşan yerdeğiştirmeleri gösterir. Her üç durumda da kesitlerin düzlemliklerini korudukları açıktır. Çubuğun dönmesine bağılı dördüncü terim ise, düzlemligi bozan kısım olarak en kesitin çarpılmasını belirler. Bu terimin  $\omega$  ile orantılı olması sebebiyle  $\omega$ , çarpılma fonksiyonu olarak da adlandırılır [26].

## 2.2.2 Kapalı En Kesitli Çubuklarda Eksenel Yerdeğiştirme

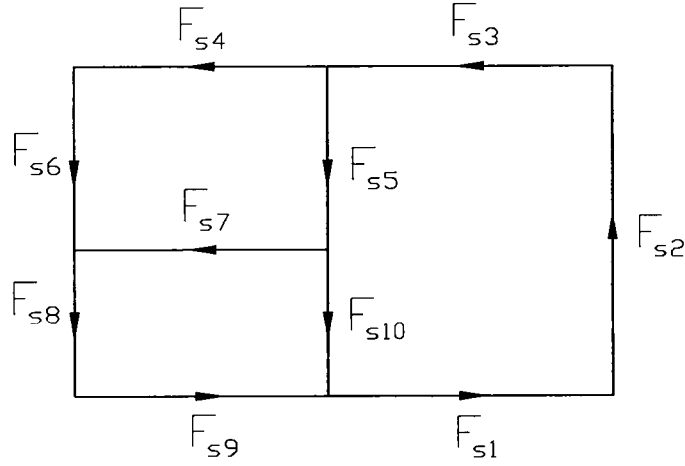
Kapalı en kesitlerin St. Venant burulmasında oluşan kayma gerilmeleri çeper boyunca üniformdurlar ve bir kayma akımı oluşturlar [27]. Bu akımı  $q_s$  ile göstererek bir  $F_s$  fonksiyonu yardımıyla,

$$q_s(s, z) = GF_s(s)\Phi'(z) \quad (2.7)$$

şeklinde ifade edelim [12].  $F_s$ ’yi St. Venant kayma akımının dağılımını veren, pozitif  $s$  doğrultusunda pozitif değer alan bir büyüklük şeklinde düşünebiliriz. En kesiti oluşturan elemanlar üzerinde  $q_s$  kayma akımı sabit olacağından,  $F_s$  fonksiyonu da (2.7) denkleminde göre eleman boyunca sabittir. Açık en kesitlerde kayma gerilmelerinin lineer dağılımı sebebiyle  $F_s$  sıfır olur. Şekil 2.7’de, on elemanlı ve üç hücreli bir kapalı en kesitteki  $F_s$  fonksiyonları gösterilmiştir.

$m$  elemandan ve  $n$  kapalı hücreden oluşan bir kapalı en kesitte,  $m$  sayıdaki  $F_s$  fonksiyonunu belirlemek için gerekli şartlardan  $(m-n)$  tanesi, eksenel doğrultudaki denge şartı gereğı, elemanlardaki kayma akımlarının bir birleşme noktasında sıfır toplamını vermeleriyle (kayma akımların süreklilik şartı) elde edilir. Kalan  $n$  şart ise

statik belirsizlik taşıyan tüm problemlerde olduğu gibi geometrik uygunluk şartlarıyla ifade edilir.



Şekil 2.7 Kapalı bir en kesitte  $F_s$  fonksiyonları

Sürekli bir fonksiyon olan  $w$  aksel yerdeğiştirmesi her  $i$  kapalı hücresinde,

$$\oint_i dw = \oint_i \frac{\partial w}{\partial s} ds = 0 \quad (2.8)$$

şartını taşır. (2.7) denklemine göre, en kesitteki kayma şekil değiştirmeleri,

$$\gamma_{zs} = \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} = \Phi' \frac{F_s}{t} \quad (2.9)$$

şeklindedir ve buradan elde edilen,

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{F_s}{t} \Phi' - \frac{\partial v}{\partial z} \quad (2.10)$$

eşitliğinde (2.2b) denklemindeki  $v$  ifadesinin yerine konmasıyla (2.8) şartı,

$$\oint_i \frac{F_s}{t} ds = \oint_i r ds \quad (2.11)$$

haline gelir. İntegrallerin yönü aynı olmalıdır. Bu yönün z eksenine etrafında pozitif dönme yönü seçilmesi durumunda, r koordinatının yukarıda bahsedilen özelliğinden,

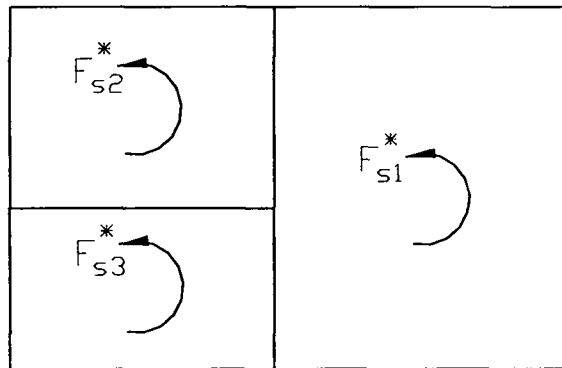
$$\oint_i r ds = 2 A_i \quad (2.12)$$

elde edilir ve (2.11) denklemini

$$\oint_i \frac{F_s}{t} ds = 2 A_i \quad (2.13)$$

şeklinde yazmak mümkün olur. Denklemdaki  $A_i$ , i kapalı hücresinin alanıdır. Böylece her kapalı hücre için (2.13) denklemiyle elde edilecek n şart ve (m-n) süreklilik denklemi kullanılarak, en kesitteki  $F_s$  fonksiyonları ve kayma akımları belirlenebilir. (2.13) denkleminde,  $F_s$ 'nin sadece en kesitin geometrisine bağlı bir büyüklük olduğu açıktır.

Elemanlar üzerinde alınan  $F_s$  fonksiyonları yerine, her kapalı hücre için, sabit ve pozitif yönleri z eksenine etrafında pozitif dönme yönü olan  $F_s^*$  fonksiyonları kullanılarak da kayma akımı elde edilebilir [12].  $F_s$ 'nin herhangi bir eleman üzerindeki değeri, eleman üzerindeki  $F_s^*$  fonksiyonlarının pozitif s doğrultusundaki toplamıdır. Bu durumda, süreklilik şartları kendiliğinden sağlanacağından, n hücreli bir kesitte n sayıdaki  $F_s^*$  fonksiyonu, St. Venant kayma akımının belirlenmesi



Şekil 2.8  $F_s^*$  fonksiyonları

için yeterlidir. Şekil 2.8’de, yukarıdaki en kesit için  $F_s^*$  fonksiyonları gösterilmiştir.  $F_s$  ve  $F_s^*$  fonksiyonları arasındaki ilişkiye örnek olarak, 7 ve 10 numaralı elemanlar için,

$$F_{s7} = F_{s3}^* - F_{s2}^* \quad F_{s10} = F_{s1}^* - F_{s3}^* \quad (2.14)$$

eşitlikleri verilebilir.

Kapalı en kesitlerin eksenel yerdeğiştirmeleri, (2.10) denkleminin integrasyonu ile elde edilir. (2.6) denklemiyle verilen çarpılma fonksiyonunun,

$$\omega(s) = \int_c (r(s) - \frac{F_s(s)}{t(s)}) ds \quad (2.15)$$

şeklinde tanımlanmasıyla, açık en kesitler için elde edilen (2.5) denklemi, kapalı kesitler için de kullanılabilir.

$$w(s, z) = W(z) - U'(z)x(s) - V'(z)y(s) - \Phi'(z)\omega(s) \quad (2.16)$$

### 2.3 Gerilme Durumu

Bölüm 2.2’de yapılan 2.3 kabulüyle ince çeperli çubuğun ince bir kabuk gibi davranacağı belirtilmişti. Buna göre [29],

1. Şekil değiştirme öncesi, çubuk ortalama yüzeyinde dik olan çizgiler, sonra da dik kalırlar ve  $\tau_m$ ,  $\tau_{sn}$  kayma gerilmelerinin şekil değiştirmeye olan etkisi ihmal edilebilir.

2. Çubuk yüzeyine dik doğrultudaki normal gerilmeler ( $\sigma_n$ ) ihmal edilebilir.

Bu kabul ve aşağıda görüleceği gibi  $\sigma_s$  gerilmesinin  $\sigma_z$  yanında ihmal edilebilir olması, ince çeperli bir çubuk en kesitindeki gerilme durumunun belirlenmesi için gerilme tansörünün sadece iki bileşeninin yeterli olduğu sonucunu verir. Eksenel doğrultudaki  $\sigma_z$  normal gerilmesi ve  $\gamma_{zs}$  kayma gerilmesi.

### 2.3.1 Normal Gerilme

(2.5) denklemiyle verilen çubuk ortalama yüzeyine ait eksenel yerdeğiştirme ifadesi kullanılarak  $\sigma_z$  normal gerilmesi, gerilme-şekil değıştirme bağıntılarından elde edilebilir. 2.1 ve 2.3 kabullerine göre ortalama yüzey üzerinde oluşan,

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_s) \quad (2.17a)$$

$$\varepsilon_s = \frac{1}{E}(\sigma_s - \nu\sigma_z) = 0 \quad (2.17b)$$

şekil değıştirmelerinden  $\sigma_z$ ,

$$\sigma_z = \frac{E}{1-\nu^2} \varepsilon_z \quad (2.18a)$$

olarak elde edilir. Bu noktada  $\sigma_s$  gerilmesinin,  $\sigma_z$  ile kıyaslandığında oldukça küçük olduğunu göz önüne alarak Hooke Kanunu'nda ihmal edebiliriz. Bu kabul, özellikle destekleyici elemanlar sık aralıklarla yer almıyorsa, 2.1 kabulüyle verilen  $\varepsilon_s$ 'nin  $\varepsilon_z$ 'ye kıyasla ihmal edilebilir olmasına tercih edilir. Böylece, (2.18a) denklemindeki  $(1-\nu^2)$  teriminin ortadan kalkmasıyla,

$$\sigma_z = E\varepsilon_z = E \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.18b)$$

ve (2.5) denkleminden,

$$\sigma_z(s, z) = E(W'(z) - U''(z)x(s) - V''(z)y(s) - \Phi''(z)\omega(s)) \quad (2.19)$$

ile  $\sigma_z$  normal gerilmesi elde edilir.

(2.19) denklemi, çubuk mukavemetinden bilinen normal gerilme ifadesinin burulmaya bağılı etkilerin de dahil edilmesiyle ince çeperli çubuklar için elde edilen

genel halidir. İlk üç terim, sırasıyla çubuğun eksenel şekil değiştirmesi ve eğilmesiyle oluşan gerilmeleri, dördüncü terim ise burulmaya bağlı, bir başka değişle çarpılmanın engellenmesiyle oluşan normal gerilmeleri verir. Birim dönme açısının sabit olduğu St. Venant burulmasında normal gerilme oluşmayacağı denklemden açıkça görülebilir.

(2.19) denklemi kapalı en kesitler için de geçerlidir. Tek dikkat edilmesi gereken nokta, çarpılma fonksiyonu  $\omega$ 'nın açık en kesitlerde (2.6), kapalı en kesitlerde (2.15) denklemiyle verilmiş olduğudur.

### 2.3.2 Kayma Gerilmesi

2.2 kabulüyle ortalama yüzeydeki kayma şekil değişikliklerinin sadece St. Venant burulmasından kaynaklandığının kabul edilmesi, en kesitteki diğer gerilme bileşeni  $\tau_{zs}$  kayma gerilmesinin doğrudan şekil değiştirmelere bağlı olarak elde edilmesini engeller. Bu durumda kayma gerilmesini, biri verilmiş olan şekil değiştirmelerden, diğeri ise bu şekil değiştirmelerden elde edilen eksenel yer değiştirmelerin başlangıç noktasını oluşturduğu denge denklemlerinden (kapalı en kesitlerde süreklilik denklemleriyle birlikte) elde edilecek iki parçanın birleşimi şeklinde yaklaşık olarak ifade etmek mümkündür. Kuşkusuz bu, iteratif bir yaklaşımdır. Başlangıç olarak St. Venant kayma şekil değiştirmelerinin seçilmesiyle çarpılma ve normal gerilmeler elde edilmekte, bu gerilmeler de St. Venant kayma gerilmelerinin düzeltilmesi olan ek kayma gerilmelerine temel oluşturmaktadır. Bu iki gerilme bileşeni, birinin diğeri kullanılarak bulunması sebebiyle genellikle birincil ve ikincil gerilmeler şeklinde tanımlanır [16]. Gjelsvik, bu ayrımla bir parçanın diğerinden daha büyük ve önemli olduğunun vurgulandığını belirterek, gerilmelerin doğrudan şekil değiştirmeler yoluyla elde edilip edilmemesine göre aktif-reaktif ayrımını uygun görür [12]. Burada her iki tanımlama da yeri geldikçe kullanılacaktır.

Burulma rijitliğinin düşük olması sebebiyle çarpılmanın büyük değerler alabildiği, dolayısıyla çarpılmanın engellenmesiyle oluşan gerilmelerin de büyük değerlerde olacağı açık en kesitlerde, kayma gerilmelerinin ihmalıyla elde edilen bir çözümün taşıdığı doğruluk derecesi sorgulanabilir. Oysa açık en kesitlerde normal gerilmelerin çubuk boyunca değişiminin oldukça yavaş olması, çarpılma kayma

gerilmelerinin büyük değerlere ulaşmasını engellemektedir. Teorik ve deneysel sonuçların uyumluluğu da kabulün geçerliliğini onaylar. Kapalı en kesitlerde ise problemin bu şekilde basitleştirilmesi, bazı durumlarda ikincil gerilmelerin birincil gerilmelere kıyasla oldukça büyük değerler almasıyla sonuçlanır ki böyle bir durum burulma rijitliğinin genellikle büyük olması sebebiyle çarpılmanın küçük değerlerde kaldığı kapalı en kesitler için doğruluk taşımaz. Bu probleme Benscoter tarafından getirilen bir çözüm ileride ele alınacaktır.

Doğrudan şekil değiştirmelerden elde edilen St. Venant kayma gerilmeleri, açık ve kapalı en kesitlerde birbirinden farklı yapıdadır. Açık en kesitli çubuklarda bu gerilmeler çeper boyunca,

$$\tau_{zs,s} = 2G\Phi'h \quad (2.20)$$

bağıntısıyla ortalama yüzeyde sıfır olacak şekilde lineer değişirken, kapalı en kesitlerde üniformdurlar ve bir kayma akımı oluştururlar [27]. Bölüm 2.2'de bu akım,

$$q_s = GF_s\Phi' \quad (2.21)$$

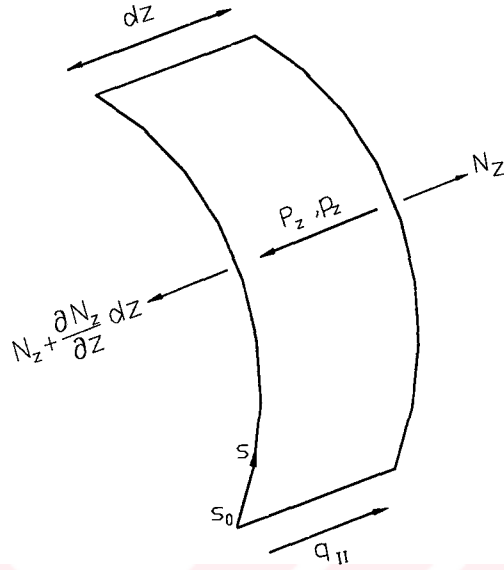
ile verilmişti.

Açık en kesitli bir çubuğun bir  $dz$  parçasının  $s = s_0$ 'da kesilmesiyle elde edilen  $s_0$ 'ın üzerinde kalan kısmı Şekil 2.9'da gösterilmiştir. Bu parçanın çubuk eksenini doğrultusundaki dengesinden,

$$q_{II}(s, z) = \frac{\partial N_z(s, z)}{\partial z} + \int_{C'} p_z(s, z) ds + \sum_{C'} P_z(z) \quad (2.22)$$

şeklinde  $q_{II}$  ikincil kayma gerilmeleri ifade edilir.  $C'$ , en kesitin  $s_0$ 'ın üzerinde kalan kısmı,  $p_z$  ve  $P_z$  eksenel doğrultudaki yayılı ve tekil dış kuvvetlerdir. St. Venant kayma gerilmeleri, bileşkeleri bir kuvvet oluşturmadığından bu denklemde yer almazlar.  $N_z$  ise,  $\sigma_z$  gerilmelerinin ayrılan kısım üzerindeki toplamıdır.

$$N_z(s, z) = \int_{C'} \sigma_z(s, z) t(s) ds \quad (2.23)$$



Şekil 2.9 Açık en kesitli bir ince çeperli çubuk parçasının eksenel dengesi

(2.19), (2.22) ve (2.23) denklemlerinden,

$$q_{II}(s, z) = E \left\{ W''(z) \int_{C'} t ds - U''(z) \int_{C'} x t ds - V''(z) \int_{C'} y t ds - \Phi''(z) \int_{C'} \omega t ds \right\} + \int_{C'} p_z(s, z) ds + \sum_{C'} P_z(z) \quad (2.24)$$

elde edilir. Bu denklemdeki integral terimleri ve dış kuvvet bileşenlerinin,

$$A^s(s) = \int_{C'} t ds \quad (2.25a)$$

$$S_x^s(s) = \int_{C'} y t ds \quad (2.25b)$$

$$S_y^s(s) = \int_{C'} x t ds \quad (2.25c)$$

$$S_\omega^s(s) = \int_{C'} \omega t ds \quad (2.25d)$$

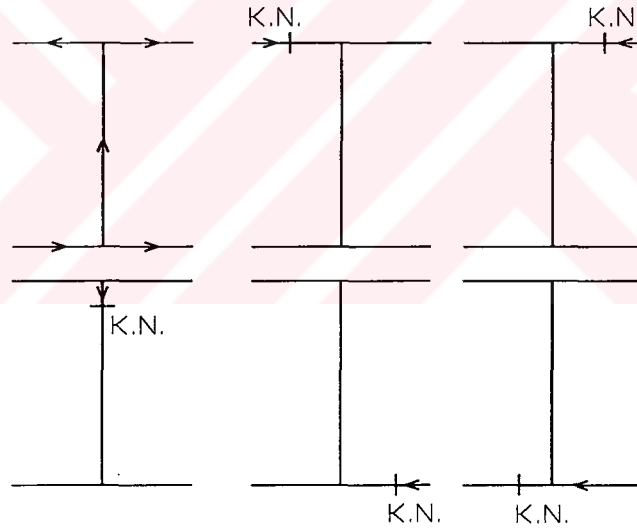
$$F_z^s(s, z) = \int_C p_z(s, z) ds + \sum_C P_z(z) \quad (2.25e)$$

şeklinde tanımlanmasıyla açık en kesitler için  $q_{II}$  kayma akımı,

$$q_{II}(s, z) = E \{ A^s(s) W''(z) - S_y^s(s) U'''(z) - S_x^s(s) V'''(z) - S_\omega^s(s) \Phi'''(z) \} + F_z^s(s, z) \quad (2.26)$$

olarak ifade edilir.

En kesitin kayma akımını aradığımız nokta üzerinde kalan bölgesinin alanını, x ve y eksenlerine göre statik momentlerini ve birinci sektörel momentini veren (2.25a-d) ifadeleri, kayma gerilmelerinin dağılımını belirlemeleri sebebiyle dağılma fonksiyonları olarak adlandırılırlar [12].



Şekil 2.10 Kesim noktalarının değişimi

Dağılma fonksiyonlarının hesabında integrasyon aralığı ve yönü, (2.22) denkleminin çıkarılışına uygun olmalıdır. Bunu sağlamak için, en kesitin herhangi bir serbest ucunu son uç seçerek, en kesitin bir noktadan kesilmesiyle oluşan iki parçadan bu son ucun yer aldığı parçayı kesim noktasının aşağısında kabul etmek ve integrasyonu, yönü kesim noktasından serbest uçlara olacak şekilde yukarıda kalan parça üzerinde almak gerekir [12]. Buna ait bir örnek Şekil 2.10'da verilmiştir.

Oklar, ilk şekilde  $s$  koordinatının, diğerlerinde kesim noktasının ilerleme yönünü gösterir. İntegrasyon yönünün,  $s$  koordinatı ile aynı olması gerekmemekle birlikte aynı seçildiğinde, dağılma fonksiyonlarının aldıkları değerler, en kesitin kesim noktası üzerinde kalan parçasına ait olacaktır.

Dağılma fonksiyonlarının bir noktadaki değeri, son ucun ve integrasyon için seçilen yönün seçimine bağlı olarak değişir. Kayma akımının o noktadaki değeriye bu seçimlerden bağımsızdır.

Kapalı en kesitlerde  $q_{II}$  kayma akımının elde edilmesi, Bölüm 2.2’de St. Venant kayma akımının bulunması sırasında belirtildiği gibi  $n$  kapalı hücreden oluşan bir kesitin taşıdığı  $n$ . dereceden statik belirsizlik sebebiyle daha karışıktır. Statik belirsizliğin kaynağı, kayma akımının elemanlardaki dallanmasının sadece statik hesaplarla belirlenememesidir. Çözüme kapalı en kesitlerin eğilme problemine benzer şekilde [30], eksenel yerdeğiştirmelerin sürekliliği kullanılarak ulaşılabilir.

$$q = q_s + q_{II} \quad (2.27)$$

ile verilen  $q$  toplam kayma akımının oluşturduğu şekil değiştirme  $\gamma'_{zs}$  ise,

$$\frac{q}{Gt} = \gamma'_{zs} = \frac{\partial w'}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad (2.28)$$

olacaktır.  $w'$ , 2.2 kabulüyle elde edilen (2.16) eksenel yerdeğiştirmesinden farklı olarak, toplam kayma akımının yol açtığı varsayılan bir yerdeğiştirmeyi gösterir.

(2.8) denklemiyle benzer olarak bir  $i$  kapalı hücreinde  $w'^i$ ’nin sürekliliği,

$$\oint_i \frac{\partial w'}{\partial s} ds = 0 \quad (2.29)$$

şeklindedir. (2.2b), (2.11), (2.27) ve (2.28) denklemlerinin kullanılmasıyla bu ifade,

$$\oint_i \frac{q_{II}}{t} ds = 0 \quad (2.30)$$

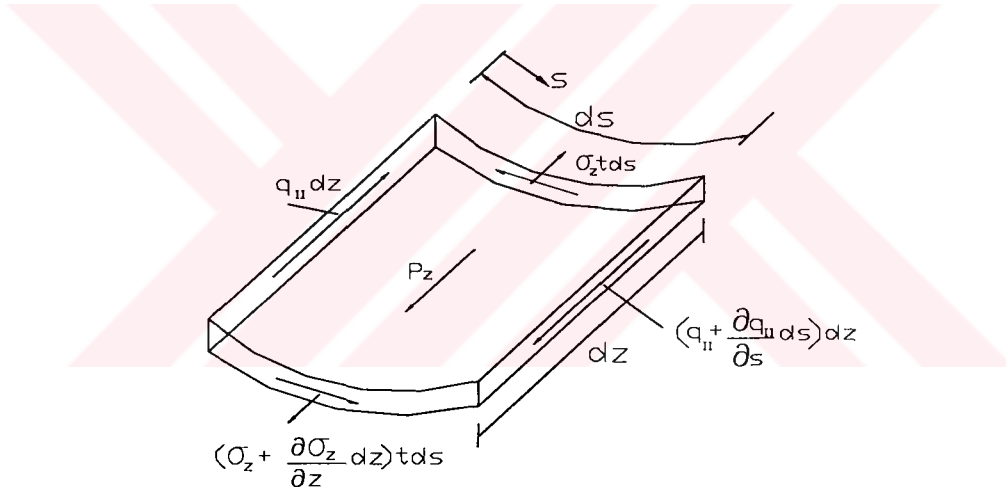
ile  $q_{II}$ 'nin sağlaması gereken şarta dönüşür.

Çubuk en kesitindeki her hücrenin bir noktadan kesilerek açık hale getirildiği varsayımıyla, statik belirsizliğin ortadan kaldırılması ve (2.30) şartını sağlayacak bir  $q_{II}$  ifadesine ulaşılması mümkündür [12]. Bu durumda  $q_{II}$ ,

$$q_{II} = q'_{II} + q''_{II} \quad (2.31)$$

şeklinde iki kayma akımının toplamı haline gelir.  $q'_{II}$ , (2.26) denklemiyle açık en kesitler için elde edilen kayma akımı ve  $q''_{II}$ , her hücrenin kesilmesiyle oluştuğu varsayılan bir artık kayma akımıdır.

Açık en kesitli bir çubuğun Şekil 2.11'de görülen çok küçük bir parçasının çubuk eksenini doğrultusundaki dengesi,  $p_z$  eleman üzerindeki yayılı yük ise,



Şekil 2.11 Açık en kesitli bir çubukta elemanter denge

$$\frac{\partial(\sigma_z t)}{\partial z} + \frac{\partial q_{II}}{\partial s} + p_z = 0 \quad (2.32)$$

şeklinde dir. Benzer bir eşitliği kapalı en kesitli bir çubuk için de yazabiliriz.

$$\frac{\partial(\sigma_z t)}{\partial z} + \frac{\partial(q_s + q'_{II} + q''_{II})}{\partial s} + p_z = 0 \quad (2.33)$$

(2.32) ve (2.33) denklemlerinden,  $q''_{II}$  'nün her eleman boyunca sabit olacağı fakat bu değerin elemandan elemana değişebileceği açıktır.

(2.26) denkleminde  $q'_{II}$  'nü oluşturan eksenel, eğilme, çarpılma ve dış yük bileşenlerinden her biri  $q''_{II}$  'de de bulunacaktır ve  $q''_{II}$ ,

$$q''_{II}(s, z) = E \left\{ -K_z(s)W''(z) + K_y(s)U'''(z) + K_x(s)V'''(z) + K_\omega(s)\Phi'''(z) \right\} - K_f(s)F(z) \quad (2.34)$$

şeklinde değişkenlerine ayrılarak ifade edilebilir [12]. Denklemdaki K fonksiyonları, artık kayma akımını belirlemek için kullanılan ve  $F_s$  ile aynı özellikleri taşıyan kayma akımı fonksiyonlarıdır.

(2.26) denklemindeki  $F_z^s$  'nin de değişkenlerine ayrılarak,

$$F_z^s(s, z) = S_f^s(s)F(z) \quad (2.35)$$

ile verilmesiyle, (2.26), (2.31) ve (2.34) denklemlerinden kapalı en kesitler için  $q_{II}$  kayma akımı,

$$q_{II} = E \left\{ W''(A^s - K_z) - U'''(S_y^s - K_y) - V'''(S_x^s - K_x) - \Phi'''(S_\omega^s - K_\omega) \right\} + F(S_f^s - K_f) \quad (2.36)$$

şeklinde elde edilir.

(2.36) denkleminin (2.30) şartına taşınması, her i hücresi için beş gruptan oluşan aşağıdaki denklem sistemini verir.

$$\oint_i \frac{K_z}{t} ds = \oint_i \frac{A^s}{t} ds \quad (2.37a)$$

$$\oint_i \frac{K_x}{t} ds = \oint_i \frac{S_x^s}{t} ds \quad (2.37b)$$

$$\oint_i \frac{K_y}{t} ds = \oint_i \frac{S_y^s}{t} ds \quad (2.37c)$$

$$\oint_i \frac{K_\omega}{t} ds = \oint_i \frac{S_\omega^s}{t} ds \quad (2.37d)$$

$$\oint_i \frac{K_f}{t} ds = \oint_i \frac{S_f^s}{t} ds \quad (2.37e)$$

Kayma akımlarının birleşme noktalarındaki süreklilik denklemleriyle birlikte (2.37) denklemleri çözülerek, n hücreli bir kapalı en kesit için 5n sayıdaki K fonksiyonu ve (2.36) denklemi kullanılarak kapalı en kesitler için  $q_{II}$  kayma akımı belirlenir. (2.37) denklemlerinin katsayılar matrisi, St. Venant kayma akımının elde edilmesinde kullanılan matrisle aynıdır ve K yerine  $K^*$  fonksiyonları kullanarak denklem sayısı azaltılabilir. (2.37) denklemleri benzer formda ilk defa, ince çeperli kapalı en kesitli çubukların burulmasını inceleyen Bencoter tarafından verilmiştir [17].

## 2.4 Çubuk Kuvvetleri

Gerilmelerin çubuk en kesitindeki bileşkelerini, çubuk kuvvetleri olarak tanımlıyoruz. Elemanter çubuk teorisinde bu kuvvetler, bir normal kuvvet, iki kesme kuvveti, bir burulma momenti ve iki eğilme momentinden oluşurken, ince çeperli çubuk teorisinde bu altı kuvvete ek yeni bir kuvvetin tanımlanmasının yanısıra burulma momenti de iki kısımdan oluşur.

Gerilmelerle çubuk kuvvetleri arasındaki ilişki, en kesitin virtüel bir hareketi sırasında yapılan işin ifade edilmesiyle kurulabilir [12]. Çubuk en kesitindeki  $\sigma_z dA$  ve  $\tau_{zs} dA$  kuvvet elemanlarının, bu virtüel hareket sırasında yaptıkları iş,

$$\int_A (\sigma_z \delta w + \tau_{zs} \delta v) dA \quad (2.38)$$

şeklinde dir. St. Venant kayma gerilmelerinin bileşkesi,

$$M_{ts} = GJ\Phi' \quad (2.39)$$

ile St. Venant burulma momentini verdiği bilindiğine göre [27], (2.38) denkleminde sadece  $q_{II}$  kayma akımının dikkate almakla yetinebiliriz.

(2.39) denkleminde yer alan burulma sabiti  $J$  açık en kesitlerde,

$$J = \frac{1}{3} \int_C t^3 ds \quad (2.40)$$

değerindedir [27].

(2.7) kayma akımı ifadesinden kapalı en kesitlerde St. Venant burulma momentini,

$$M_{ts} = \int_C q_s r ds = G\Phi' \int_C F_s r ds \quad (2.41)$$

şeklinde yazabiliriz. (2.13) denkleminde,

$$\int_C F_s r ds = \sum_i F_{si}^* \oint_i r ds = \sum_i 2F_{si}^* A_i \quad (2.42)$$

olduğuna göre, (2.39), (2.41) denklemlerinden kapalı en kesitler için burulma sabiti,

$$J = \sum_i 2F_{si}^* A_i \quad (2.43)$$

olarak elde edilir. (2.2b) ve (2.5) denklemlerinin (2.38) ifadesine taşınması ve virtüel işin,

$$N\delta W - M_x \delta V' + M_y \delta U' + M_\omega \delta \Phi' + T_x \delta U + T_y \delta V + M_{t\omega} \delta \Phi \quad (2.44)$$

şeklinde verilmesiyle, çubuk kuvvetleri ve gerilmeler arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde kurulur.

$$N = \int_A \sigma_z dA \quad (2.45a)$$

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA \quad (2.45b)$$

$$M_y = - \int_A \sigma_z x dA \quad (2.45c)$$

$$M_\omega = - \int_A \sigma_z \omega dA \quad (2.45d)$$

$$T_x = \int_A q_{II} \cos \theta dA \quad (2.45e)$$

$$T_y = \int_A q_{II} \sin \theta dA \quad (2.45f)$$

$$M_{t\omega} = \int_A q_{II} r dA \quad (2.45g)$$

(2.45a,bc,e,f) denklemleri, çubuk mukavemetinden bilinen normal kuvvet ile x ve y eksenlerine etkiyen eğilme momentleri ve kesme kuvvetlerini gösterir. (2.45d) denklemiyle verilen çubuk kuvveti, Bölüm 2.1’de bimoment şeklinde tanımladığımız ince çeperli çubuklarda görülen ek çubuk kuvvetidir. Çarpılma fonksiyonu  $\omega$ ’nın moment kolu olması sebebiyle çarpılma momenti olarak da adlandırılan  $M_\omega$ , kendi içinde dengede olan bir kuvvet ve moment sistemidir.  $\sigma_z$ ’ye bağlı diğer çubuk kuvvetleri N,  $M_x$  ve  $M_y$  ‘Bernoulli-Navier yasası’na bağlıken  $M_\omega$ , en kesitin çarpılarak düzlemlüğünün bozulmasıyla ortaya çıkan gerilmelerin birleşimidir. (2.45g) denklemiyle verilen  $M_{t\omega}$  ise Bölüm 2.1’de bahsettiğimiz çarpılma burulma momentidir ve (2.39) denklemiyle verilen St. Venant burulma momentiyile birlikte çubuğa etkiyen toplam burulma momentini oluşturur.

(2.19)  $\sigma_z$  ifadesinden,

$$N = E(W' \int_C t ds - U'' \int_C x t ds - V'' \int_C y t ds - \Phi'' \int_C \omega t ds) \quad (2.46a)$$

$$M_x = E(W' \int_C y t ds - U'' \int_C x y t ds - V'' \int_C y^2 t ds - \Phi'' \int_C \omega y t ds) \quad (2.46b)$$

$$M_y = -E(W' \int_C x t ds - U'' \int_C x^2 t ds - V'' \int_C y x t ds - \Phi'' \int_C \omega x t ds) \quad (2.46c)$$

$$M_\omega = -E(W' \int_C \omega t ds - U'' \int_C \omega x t ds - V'' \int_C \omega y t ds - \Phi'' \int_C \omega^2 t ds) \quad (2.46d)$$

şeklinde normal gerilme ile ilişkili çubuk kuvvetleri yerdeğiştirmeler cinsinden elde edilir.

Kayma akımına bağlı (2.45e-g) çubuk kuvvetlerinin aşağıda açık en kesitler için elde edilecek ifadeleri, kayma akımı farklılık gösterse de ileride görüleceği gibi kapalı en kesitler için de geçerlidir.

İlk olarak  $T_x$  kesme kuvvetini ele alalım. (2.45e) denklemi, kısmi integrasyon uygulanarak,

$$T_x = \int_C q_{II} \cos \theta ds = \int_C q_{II} \frac{dx}{ds} ds = - \int_C \frac{\partial q_{II}}{\partial s} x ds + \sum_C P_z x \quad (2.47)$$

şeklinde yazılabilir. Toplam ifadesi, serbest uçlara dış yüklerin etkimesi durumunda yer alır. (2.47) denkleminde, (2.32) dengesinin kullanılmasıyla elde edilen,

$$T_x = \int_C \frac{\partial(\sigma_z t)}{\partial z} x ds + \int_C p_z x ds + \sum_C P_z x \quad (2.48)$$

eşitliğinde y eksenine göre momenti gösteren dış yük etkilerinin,

$$m_y = \int_C p_z x ds + \sum_C P_z x \quad (2.49)$$

şeklinde tanımlanmasıyla  $T_x$  kesme kuvveti,

$$T_x = E(W'' \int_C x t ds - U'' \int_C x^2 t ds - V'' \int_C y x t ds - \Phi'' \int_C \omega x t ds) + m_y \quad (2.50a)$$

ile çubuk yerdeğiştirmelerine bağlı olarak ifade edilir. Benzer şekilde,

$$T_y = E(W'' \int_C y t ds - U'' \int_C x y t ds - V'' \int_C y^2 t ds - \Phi'' \int_C \omega y t ds) + m_x \quad (2.50b)$$

ve  $d\omega = r ds$  eşitliği kullanılarak,

$$M_{\omega} = E(W'' \int_C \omega t ds - U'' \int_C x \omega t ds - V'' \int_C y \omega t ds - \Phi'' \int_C \omega^2 t ds) + m_{\omega} \quad (2.50c)$$

şeklinde diğer çubuk kuvvetleri elde edilir. Burada,

$$m_x = \int_C p_z y ds + \sum_C P_z y \quad (2.51a)$$

$$m_{\omega} = \int_C p_z \omega ds + \sum_C P_z \omega \quad (2.51b)$$

x eksenine göre eğilme yükü ve çarpılma yükü olarak tanımlanmıştır.

Kapalı en kesitler için elde ettiğimiz  $q''_{II}$  kayma akımının, kendi kendini dengelediği için  $T_x$  ve  $T_y$  kesme kuvvetlerine, en kesiti oluşturan her eleman boyunca sabit olduğu dikkate alındığında,

$$\int_C q''_{II} r ds = - \int_C \frac{\partial q''_{II}}{\partial s} \omega ds = 0 \quad (2.52)$$

olması sebebiyle burulma momentine etkisi yoktur. Dolayısıyla, açık en kesitler için elde edilen kesme kuvveti ve çarpılma burulma momenti ifadelerini kapalı en kesitlerde de kullanabiliriz.

Gjelsvik'in kayma akımları için kullandığı aktif-reaktif ayrımı, çubuk kuvvetlerine de uygulanabilir. Doğrudan şekil değiştirmeler yoluyla elde edilen  $N$ ,

$M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_\omega$ , ve  $M_{ts}$ , reaktif çubuk kuvvetlerini , aktif çubuk kuvvetlerine bağlı olarak (2.46) ve (2.50) denklemlerinden,

$$T'_x = -M'_y + m_y \quad (2.53a)$$

$$T'_y = M'_x + m_x \quad (2.53b)$$

$$M'_{t\omega} = -M'_\omega + m_\omega \quad (2.53c)$$

şeklinde vermenin mümkün olduğu  $T_x$ ,  $T_y$ ,  $M_{t\omega}$  ise reaktif çubuk kuvvetlerini oluşturur.

(2.46) ve (2.50) denklemlerindeki alan integrallerinin bir kısmı, Bölüm 2.3'de kayma akımı ifade edilirken en kesitin ayrılan kısmının alanı  $A$ , statik momentleri  $S_x$ ,  $S_y$  ve birinci sektörel momenti  $S_\omega$  şeklinde tanımlanmıştı. Buradaki fark, integralin tüm en kesit üzerinde alınmasıdır. Diğerleri ise,

$$I_x = \int_C y^2 t ds \quad (2.54a)$$

$$I_y = \int_C x^2 t ds \quad (2.54b)$$

$$I_{xy} = \int_C xy t ds \quad (2.54c)$$

$$I_{ax} = \int_C \omega y t ds \quad (2.54d)$$

$$I_{ay} = \int_C \omega x t ds \quad (2.54e)$$

$$I_{\omega\omega} = \int_C \omega^2 t ds \quad (2.54f)$$

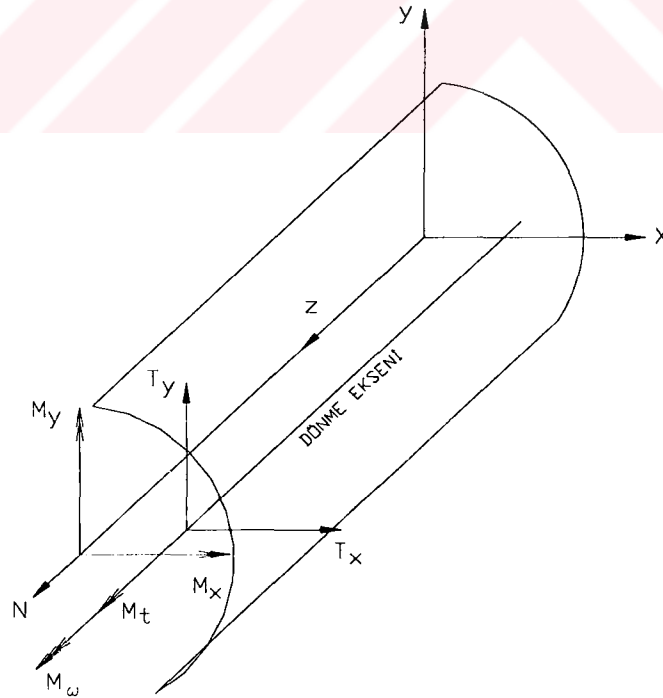
şeklinde verilir.

Burada  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_{xy}$ , atalet momentleri,  $I_{\omega x}$ ,  $I_{\omega y}$ ,  $I_{\omega\omega}$ , ikinci sektörel momentlerdir.  $I_{\omega\omega}$ , kesitin çarpılma sabiti olarak da adlandırılır. Böylece (2.39), (2.46), (2.50) ve (2.54) denklemlerinden çubuk kuvvetlerini matris formda,

$$\begin{Bmatrix} N \\ -M_x \\ M_y \\ M_\omega \\ M_{ts} \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} A & -S_x & -S_y & -S_\omega & 0 \\ -S_x & I_x & I_{xy} & I_{\omega x} & 0 \\ -S_y & I_{xy} & I_y & I_{\omega y} & 0 \\ -S_\omega & I_{\omega x} & I_{\omega y} & I_{\omega\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & GJ/E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W' \\ V'' \\ U'' \\ \Phi'' \\ \Phi' \end{Bmatrix} \quad (2.55a)$$

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ M_{t\omega} \end{Bmatrix} = -E \begin{bmatrix} -S_y & I_{xy} & I_y & I_{\omega y} \\ -S_x & I_x & I_{xy} & I_{\omega x} \\ -S_\omega & I_{\omega x} & I_{\omega y} & I_{\omega\omega} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W'' \\ U'' \\ V'' \\ \Phi'' \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} m_y \\ m_x \\ m_\omega \end{Bmatrix} \quad (2.55b)$$

şeklinde verebiliriz. (2.55a) denkleminin simetrikliği, aktif çubuk kuvvetlerinin Betti karşılıklı teoremini sağladığını gösterir.



Şekil 2.12 Çubuk kuvvetleri

(2.55) denklemleri, herhangi bir yükleme sonucunda ince çeperli bir çubuk en kesitinde oluşan çubuk kuvvetlerini, yerdeğiştirmelere ve en kesitin şekline bağlı olarak en genel haliyle verir. şekil 2.13'den görüleceği gibi, eğilme momentleri x ve y eksenlerine göre verildiğinden, normal kuvvet de z eksenine doğrultusunda etkimeli, benzer şekilde burulma momenti dönme eksenine göre verildiğinden, kesme kuvvetleri de bu eksenden geçmelidir. şekilde dönme merkezine göre verilmişse de, bimomentin herhangi bir uygulama noktası yoktur.

## 2.5 Diferansiyel Denge Denklemleri

Bölüm 2.3 ve 2.4'de, çubuk en kesitindeki gerilmeler ve çubuk kuvvetleri, W, U, V ve  $\Phi$  yerdeğiştirmelerine bağlı olarak elde edildiler. Hala birer bilinmeyen olan bu yerdeğiştirmeler ise, çubuk dengesini ifade eden diferansiyel denklemlerin, çubuk uç şartlarından elde edilecek sınır şartlarıyla birlikte çözülmesiyle belirlenir.

Çubuk denge denklemlerini, 'minimum toplam potansiyel enerji' prensibini kullanarak elde edebiliriz. Bir sistemde toplam potansiyel enerji, ancak sistem gerçek denge konumundayken bir ekstremumdan geçer ve çoğu durumda bu ekstremum bir minimuma karşılık gelir. Bu durumun dikkate alınmasıyla prensip, "Bir sistemin, geometrik sınır şartlarını sağlayan tüm konumları arasında, denge denklemlerini ve Hooke yasasını sağlayan 'gerçek' konum, potansiyel enerjinin minimum olmasıyla diğerlerinden ayrılır" şeklinde ifade edilmiştir [31].

$\Pi_i$  ve  $\Pi_e$ , iç ve dış kuvvetlerin potansiyel enerjisi ise, toplam potansiyel enerji  $\Pi$ ,

$$\Pi = \Pi_i - \Pi_e \quad (2.56)$$

ile verilir.  $\Pi_i$ 'yi,

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \int_L \int_C (E \varepsilon_z^2 + G \gamma_{xz}^2) t ds dz \quad (2.57)$$

şeklinde şekil değiştirmelere bağlı olarak ifade edebiliriz. L, çubuk boyudur.

(2.5) denkleminde  $\varepsilon_z$ 'yi,

$$\varepsilon_z = W' - U''x - V''y - \Phi''\omega \quad (2.58a)$$

ile ve 2.2 kabulüyle verilen  $\gamma_{zs}$  kayma şekil değiştirmesini, kapalı en kesitler için tanımladığımız  $F_s$  fonksiyonunu kullanarak (2.9) denklemi ile verelim.

$$\gamma_{zs} = \frac{F_s}{t} \Phi' \quad (2.58b)$$

Bir kapalı en kesitte (2.11) denklemi dikkate alınarak,

$$\int_A \frac{F_s^2}{t^2} dA = \sum_i F_{si}^* \oint_i \frac{F_s}{t} ds = \sum_i F_{si}^* \oint_i r ds = \int_C F_s r ds \quad (2.59)$$

yazılabilir ve (2.42), (2.43) denklemlerinden,

$$\int_A \frac{F_s^2}{t^2} dA = J \quad (2.60)$$

elde edilir.

(2.58) şekil değiştirmelerinin (2.57) denklemine yerleştirilmesi ve (2.54), (2.60) denklemlerinin göz önüne alınmasıyla iç kuvvetlerin potansiyel enerjisi,

$$\begin{aligned} \Pi_i = \frac{1}{2} \int_L [E\{AW'^2 + I_y U''^2 + I_x V''^2 + I_{\omega\omega} \Phi''^2 - 2S_y W'U'' - 2S_x W'V'' - 2S_{\omega} W'\Phi'' + \\ + 2I_{xy} U''V'' + 2I_{\omega y} U''\Phi'' + 2I_{\omega x} V''\Phi''\} + GJ\Phi'^2] dz \end{aligned} \quad (2.61)$$

şeklini alır.

(2.60) eşitliğinin kapalı en kesitler için tanımlanan  $F_s$  fonksiyonu kullanılarak elde edilmesi, her ne kadar  $F_s$ 'nin açık en kesitlerde sıfır olması sebebiyle (2.58b) şekil değiştirmesi açık en kesitleri kapsasa da, (2.61) potansiyel enerji ifadesinin açık en kesitler için ne kadar geçerli olduğu sorusunu akla getirebilir. Gerek (2.61) denklemini, gerekse aşağıda elde edilecek diğer sonuçları dikkate alarak bu soruya 'geçerlidir' cevabını verebiliriz.

Çubuğa etkiyen dış kuvvetler, çepere dik doğrultuda  $p_n$ ,  $P_n$ , çeper doğrultusunda  $p_s$ ,  $P_s$  ve çubuk eksenini doğrultusunda  $p_z$ ,  $P_z$  yayılı ve tekil yükleri ise,

$$\Pi_e = \int_L \left\{ \int_C (p_n u + p_s v + p_z w) ds + \sum_C (P_n u + P_s v + P_z w) \right\} dz \quad (2.62)$$

dış kuvvetlerin potansiyel enerjisidir.

(2.2) ve (2.5) denklemlerinden,

$$F_x = \int_C (p_n \sin \theta + p_s \cos \theta) ds + \sum_C (P_n \sin \theta + P_s \cos \theta) \quad (2.63a)$$

$$F_y = \int_C (-p_n \cos \theta + p_s \sin \theta) ds + \sum_C (-P_n \cos \theta + P_s \sin \theta) \quad (2.63b)$$

$$F_z = \int_C p_z ds + \sum_C P_z \quad (2.63c)$$

$$m_t = \int_C (-p_n q + p_s r) ds + \sum_C (-P_n q + P_s r) \quad (2.63d)$$

şeklinde, x, y, z eksenleri doğrultusunda etkiyen kuvvet bileşenlerinin ve burulma yükünün tanımlanması ve (2.49) ve (2.51) denklemleri ile verilen eğilme ve çarpılma yüklerinin dikkate alınmasıyla, (2.62) denkleminde dış kuvvetlerin potansiyel enerjisi,

$$\Pi_e = \int_L [F_x U + F_y V + F_z W - m_x V' - m_y U' + m_t \Phi - m_\omega \Phi'] dz \quad (2.64)$$

haline gelir.

Toplam potansiyel enerjinin minimum olma durumu matematiksel ifadesi  $\Pi$ 'nin birinci varyasyonunun sıfıra eşit olmasıdır.

$$\delta \Pi = \delta (\Pi_i - \Pi_e) = 0 \quad (2.65)$$

Varyasyonel hesaptan bilindiği gibi,  $f_i$  fonksiyonlarına bağlı bir  $F$  fonksiyoneline ekstremum yapan şartlar,

$$\frac{\partial F}{\partial f_i} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial f_i'} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial f_i''} = 0 \quad (2.66)$$

Euler denklemleriyle elde edilebilir.

Euler denkleminin (2.61) ve (2.64) denklemleri dikkate alınarak (2.56) denkleminin uygulanmasıyla, bir minimuma karşılık gelen  $W$ ,  $U$ ,  $V$  ve  $\Phi$  fonksiyonlarına bağlı olan  $\Pi$  potansiyel enerjisinin ekstremum olma durumu, ince çeperli bir çubuğun diferansiyel denge denklemleri olarak aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\mathbf{W}: -F_z + E(-AW''' + S_y U''' + S_x V''' + S_\omega \Phi''') = 0 \quad (2.67a)$$

$$\mathbf{V}: -F_y - m'_x + E(-S_x W''' + I_{xy} U^{iv} + I_x V^{iv} + I_{\omega x} \Phi^{iv}) = 0 \quad (2.67c)$$

$$\mathbf{U}: -F_x - m'_y + E(-S_y W''' + I_y U^{iv} + I_{xy} V^{iv} + I_{\omega y} \Phi^{iv}) = 0 \quad (2.67b)$$

$$\mathbf{\Phi}: -m_t - m'_\omega + E(-S_\omega W''' + I_{\omega y} U^{iv} + I_{\omega x} V^{iv} + I_{\omega\omega} \Phi^{iv}) - GJ\Phi'' = 0 \quad (2.67d)$$

(2.55a) denklemlerinden, denge denklemleri aktif çubuk kuvvetlerine bağlı olarak da yazılabilir.

$$N' + F_z = 0 \quad (2.68a)$$

$$M_x'' + F_y + m'_x = 0 \quad (2.68b)$$

$$M_y'' - F_x - m'_y = 0 \quad (2.68c)$$

$$M''_{\omega} - M'_{\omega} - m_t - m'_{\omega} = 0 \quad (2.68d)$$

Doğrudan şekil değiştirmelerle ifade edilemeyen reaktif çubuk kuvvetleri  $T_x$ ,  $T_y$  ve  $M_{\omega}$ , denge denklemlerinde yer almazlar. Bu kuvvetleri (2.53) denklemleriyle aktif çubuk kuvvetlerinden ya da,

$$T'_x + F_x = 0 \quad (2.69a)$$

$$T'_y + F_y = 0 \quad (2.69b)$$

$$M'_{\omega} + M'_{\omega} + m_t = 0 \quad (2.69c)$$

şeklindeki çubuğun x, y eksenleri doğrultusundaki kuvvet ve z eksen etrafındaki moment dengelerinden elde etmek mümkündür.

(2.67) denklemleri matris formda aşağıdaki şekilde verilir. Uyumu sağlayabilmek için, W eşitliğinin bir kez daha türevi alınmıştır.

$$E \begin{bmatrix} A & -S_x & -S_y & -S_{\omega} & 0 \\ -S_x & I_x & I_{xy} & I_{\omega x} & 0 \\ -S_y & I_{xy} & I_y & I_{\omega y} & 0 \\ -S_{\omega} & I_{\omega x} & I_{\omega y} & I_{\omega\omega} & -\frac{GJ}{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W'' \\ V'' \\ U'' \\ \Phi'' \\ \Phi'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F'_z \\ F'_y + m'_x \\ F'_x + m'_y \\ m_t + m'_{\omega} \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

(2.70) denklemleri, elemanter çubuk mukavemetindeki benzer denklemlerden çarpılma terimlerinin yer alması ve denklemlerin derecesinin ikiden dörde çıkmasıyla ayrılır.

Denge denklemlerini çözebilmek için gerekli olan sınır şartları, çubuk kuvvetleri ya da yerdeğiştirmelerinin çeşitli varyasyonları olarak birçok şekilde verilebilir.

Örnek olarak, sırasıyla bir ankastre mesnet ve serbest uç için bu şartlar,

$$W = U = V = U' = V' = \Phi = \Phi' = 0 \quad (2.71)$$

$$N = T_x = T_y = M_y = M_x = M_t = M_\omega = 0 \quad (2.72)$$

şeklindedir. Çubuk mukavemetinden bilindiği varsayılarak, çubuğun eksenel şekil değiştirme ve eğilme hallerine ait sınır şartlarından bahsedilmeyecek, burulmaya ait sınır şartları ise, ileride burulma probleminin incelenmesi sırasında ayrıntılı olarak ele alınacaktır.

## 2.6 Asal Koordinat Eksenleri

Çubuk kuvvetlerini ve dengesini veren (2.55) ve (2.70) denklemleri, (x, y, z) kartezyen eksen takımı orijini ile dönme noktası ve sektörel orijinin, en kesit üzerinde herhangi bir nokta olarak alındığı, çok sayıda terim içeren genel denklemlerdir. Eksen takımlarının asal olarak seçilmesiyle bu denklemler, en basit ve kullanışlı olan asal formlarında elde edilir.

Asal koordinat eksenleri fiziksel olarak şu şekilde tanımlanabilir: Çubuk en kesiti asal koordinat eksenlerine göre verildiğinde, çubuk kuvvetleri, W, U, V ve  $\Phi$  yerdeğiştirmelerine karşılık gelen bir şekil değiştirme halinden bir diğerine geçerken herhangi bir iş yapmazlar ve diğer çubuk kuvvetlerinden bağımsız olarak ifade edilebilirler. Bu durumda, mesela çubuğun eğilmesi sırasında normal kuvvetin yapacağı iş sıfır olur. Bir başka deyişle, normal kuvvet çubuğun sadece üniform eksenel şekil değiştirmesine yol açar ve eğilmesine etkisi olmaz. Böylece, her şekil değiştirme hali diğerlerinden ayrılarak tek başına incelenebilir.

Bu açıklamalara göre, (2.55) denklemlerinden asal sistemleri belirleyen şartlar,

$$S_X = S_Y = I_{XY} = 0 \quad (2.73a)$$

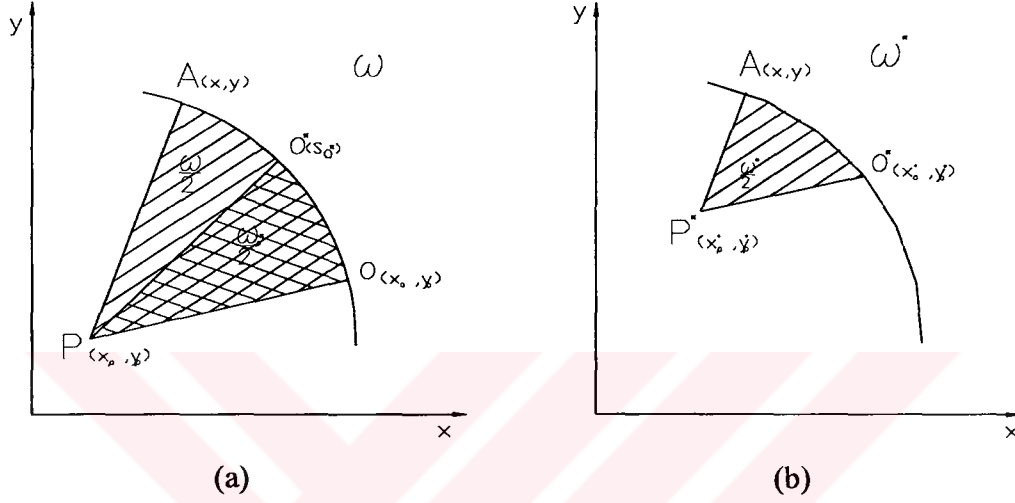
$$S_\Omega = I_{\Omega X} = I_{\Omega Y} = 0 \quad (2.73b)$$

şeklindedir. Büyük harfler asal eksenleri belirtmek için kullanılmıştır.

(2.73a) denklemindeki  $S_X$  ve  $S_Y$ , X,Y eksenlerinin konumunu,  $I_{XY}$ , eksenlerin doğrultusunu, (2.73b) denklemindeki  $S_\Omega$ , sektörel orijinin,  $I_{\Omega X}$  ve  $I_{\Omega Y}$  ise dönme noktasının konumunu belirler.

İlk olarak, kartezyen eksen takımını sabit tutarak sektörel orijin ve dönme noktasının değişmesiyle oluşan etkileri inceleyelim.

Şekil 2.13’de, ince çeperli bir çubuk en kesiti ile iki farklı  $s$  ve  $s^*$  koordinatı, bu koordinatların  $O(x_0, y_0)$ ,  $O^*(x_0^*, y_0^*)$  orijinleri ve  $P(x_p, y_p)$ ,  $P^*(x_p^*, y_p^*)$  dönme noktaları gösterilmiştir.  $O^*$  noktasının  $s$  sistemindeki konumu,  $s_{O^*}$  noktasına karşılık gelir.



Şekil 2.13  $\omega$  ve  $\omega^*$  çarpılma fonksiyonları [12]

$P$  noktasının  $P^*$  konumuna gelmesiyle, Bölüm 2.2’de tanımlanan  $r$  koordinatı Şekil 2.14’den,

$$r^*(s^*) = r(s) - (x_{p^*} - x_p) \sin \theta(s) + (y_{p^*} - y_p) \cos \theta(s) \quad (2.74)$$

şeklinde değişir ve  $ds^* = ds$  olduğunun dikkate alınmasıyla (2.6) ve (2.74) denklemlerinden,

$$d(\omega^* - \omega) = (r^* - r)ds = -(x_{p^*} - x_p)dy + (y_{p^*} - y_p)dx \quad (2.75)$$

elde edilir. Çarpılma fonksiyonunun tanımından,

$$\omega^*(0) = \omega(0) = 0 \quad (2.76)$$

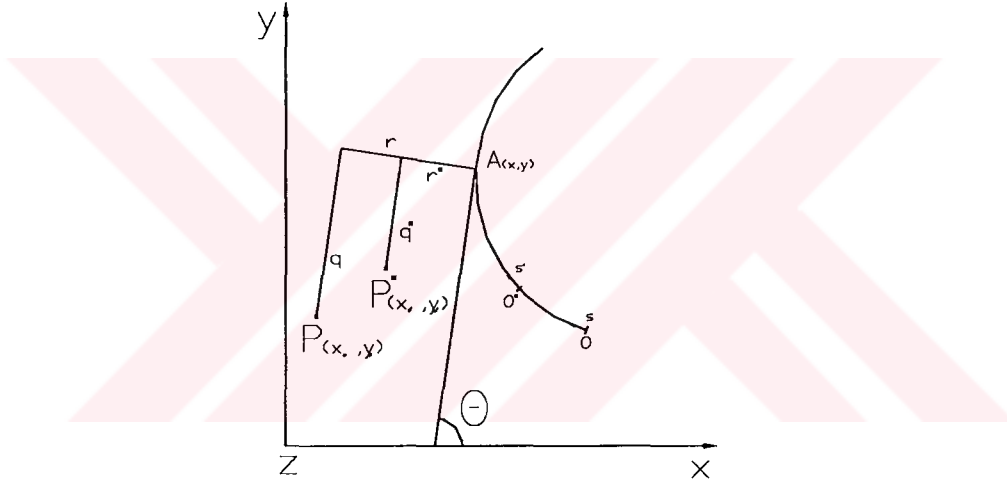
olduğuna göre, (2.75) denkleminin (2.4) denklemleriyle birlikte integrasyonundan,

$$\omega^* = \omega - \omega_{O^*} - (x_{p^*} - x_p)(y - y_{O^*}) + (y_{p^*} - y_p)(x - x_{O^*}) \quad (2.77)$$

şeklinde, dönme noktası ve sektörel orijindeki değişimin çarpılma fonksiyonuna olan etkisi elde edilir. Şekil 2.13a'da görüldüğü gibi  $\omega_{O^*}$ ,

$$\omega_{O^*} = \int_0^{s_{O^*}} d\omega = \omega(s_{O^*}) \quad (2.78)$$

ile  $\omega$ 'nın  $O^*$  noktasındaki değeridir.



Şekil 2.14 Dönme noktası ve sektörel orijinin değişimi [12]

Kapalı en kesitlerde, (2.15) denklemiyle verilen  $\omega$ 'nın  $s$  ve  $s^*$  sistemlerindeki değişimi,

$$d(\omega^* - \omega) = -(x_{p^*} - x_p)dy + (y_{p^*} - y_p)dx - \left(\frac{F_s^*}{t}ds - \frac{F_s}{t}ds\right) \quad (2.79)$$

şeklindedir.  $F_s$  fonksiyonu, dönme noktasının ve sektörel orijinin konumuna bağlı olmadığı için  $\omega_{O^*}$ 'ın,

$$\omega_{O^*} = \int_0^{s_{O^*}} \left(r - \frac{F_s}{t}\right) ds \quad (2.80)$$

ile verilmesiyle (2.77) denklemi kapalı en kesitleri de kapsar.

$\omega$ 'ya bağlı en kesit büyüklüklerinin  $s^*$  sistemindeki değerleri, (2.77) denkleminin (2.25d) ve (2.54d,e,f) denklemlerine uygulanmasıyla,

$$S_{\omega^*} = S_{\omega} - \omega_{O^*} A - (x_{P^*} - x_P)(S_x - y_{O^*} A) + (y_{P^*} - y_P)(S_y - x_{O^*} A) \quad (2.81a)$$

$$I_{\omega^*x} = I_{\omega x} - \omega_{O^*} S_x - (x_{P^*} - x_P)(I_x - y_{O^*} S_x) + (y_{P^*} - y_P)(I_{xy} - x_{O^*} S_x) \quad (2.81b)$$

$$I_{\omega^*y} = I_{\omega y} - \omega_{O^*} S_y - (x_{P^*} - x_P)(I_{xy} - y_{O^*} S_y) + (y_{P^*} - y_P)(I_y - x_{O^*} S_y) \quad (2.81c)$$

$$\begin{aligned} I_{\omega^*\omega^*} = & I_{\omega\omega} - 2\omega_{O^*} S_{\omega} + \omega_{O^*}^2 A + (x_{P^*} - x_P)^2 [I_x - 2y_{O^*} S_x + y_{O^*}^2 A] + \\ & + (y_{P^*} - y_P)^2 [I_y - 2x_{O^*} S_y + x_{O^*}^2 A] - \\ & - 2(x_{P^*} - x_P) [I_{\omega x} - \omega_{O^*} S_x - y_{O^*} S_{\omega} + \omega_{O^*} y_{O^*} A] + \\ & + 2(y_{P^*} - y_P) [I_{\omega y} - \omega_{O^*} S_y - x_{O^*} S_{\omega} + \omega_{O^*} x_{O^*} A] - \\ & - 2(x_{P^*} - x_P)(y_{P^*} - y_P) [I_{xy} - x_{O^*} S_x - y_{O^*} S_y + x_{O^*} y_{O^*} A] \end{aligned} \quad (2.81d)$$

şeklinde elde edilir. Kartezyen eksen takımının (2.73a) şartlarıyla asal olarak seçilmesiyle denklemler,

$$S_{\omega^*} = S_{\omega} - A[\omega_{O^*} - Y_O(X_{P^*} - X_P) + X_O(Y_{P^*} - Y_P)] \quad (2.82a)$$

$$I_{\omega^*Y} = I_{\omega Y} + (y_{P^*} - y_P)I_Y \quad (2.82b)$$

$$I_{\omega^*X} = I_{\omega X} - (x_{P^*} - x_P)I_X \quad (2.82c)$$

$$\begin{aligned} I_{\omega^*\omega^*} = & I_{\omega\omega} - 2\omega_{O^*} S_{\omega} + \omega_{O^*}^2 A + (X_{P^*} - X_P)^2 [I_X + Y_{O^*}^2 A] + \\ & + (Y_{P^*} - Y_P)^2 [I_Y + X_{O^*}^2 A] - 2(X_{P^*} - X_P) [I_{\omega X} + \omega_{O^*} Y_{O^*} A] + \\ & + 2(Y_{P^*} - Y_P) [I_{\omega Y} - \omega_{O^*} S_Y + \omega_{O^*} X_{O^*} A] - 2(X_{P^*} - X_P)(Y_{P^*} - Y_P) X_{O^*} Y_{O^*} A \end{aligned} \quad (2.82d)$$

haline gelir.

P\* noktası, P<sub>A</sub> ile belirtilen asal dönme noktası olarak alınırsa,

$$I_{\omega^*X} = I_{\Omega X} = 0 \quad I_{\omega^*Y} = I_{\Omega Y} = 0 \quad (2.83)$$

şartlarının (2.82b-c) denklemlerine taşınmasıyla,

$$X_{P_A} = X_P + \frac{I_{\omega X}}{I_X} \quad Y_{P_A} = Y_P - \frac{I_{\omega Y}}{I_Y} \quad (2.84)$$

ile asal dönme noktasının koordinatları, herhangi bir O sektörel orijini ve P dönme noktasının konumuna göre asal kartezyen koordinatlarda elde edilir. Asal dönme noktası, ağırlık merkezi gibi en kesitin özel bir noktasıdır ve konumu sadece en kesitin geometrisine bağlıdır.

(2.82a) denkleminde, P ve P\* dönme noktaları asal konumlarında ve O\* noktası,  $S_{\omega^*} = S_{\Omega} = 0$  şartını sağlayan O<sub>A</sub> asal sektörel orijini ise,

$$\omega_{O^*} = -\frac{S_{\omega}}{A} \quad (2.85)$$

denkleminde asal orijinin konumu, herhangi bir sektörel orijine bağlı olarak elde edilir. Bazı en kesitlerde, (2.85) şartını sağlayan asal orijin birden fazla sayıda olabilir. Örnek olarak, simetrik bir I kesitin gövdesindeki herhangi bir nokta asal orijin olarak alınabilir.

Çubuk en kesiti bir simetri eksenine sahip ve bu eksen x ekseniye, sektörel orijin ve dönme noktası en kesitin bir asal ekseni olan bu eksen üzerinde alındığında,

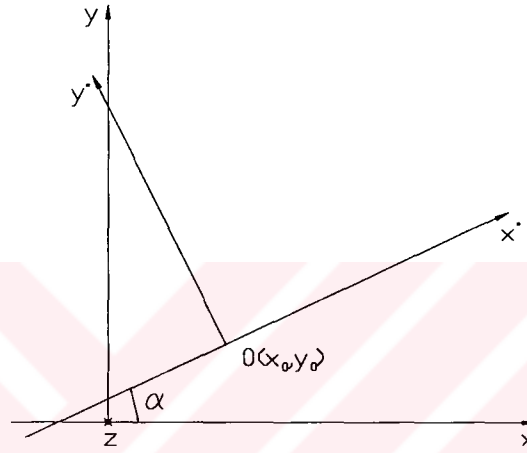
$$S_{\omega} = I_{\omega y} = 0 \quad (2.86)$$

olur. Bu şart, tüm y eksenleri için geçerli olduğundan, (2.84) ve (2.85) denklemlerine göre, asal orijin ve dönme noktası de x simetri ekseni üzerinde yer alır. Kesitin ikinci bir simetri ekseni varsa, asal dönme noktası ve ağırlık merkezinin çakışacağı açıktır.

P ve O noktaları asal konumlarındayken, (2.54f) denklemiyle verilen çarpılma sabiti minimum değerini alır. Asal çarpılma sabiti olarak adlandırılan bu değer (2.82d) denkleminde,

$$I_{\Omega\Omega} = I_{\omega\omega} - (X_P - X_{P_a})I_X - (Y_P - Y_{P_a})I_Y - \frac{S_{\omega}^2}{A} \quad (2.87)$$

şeklindedir.



Şekil 2.15 Koordinat dönüşümü

Şimdi de kartezyen eksen takımındaki değişikliklerin etkilerini inceleyelim. Şekil 2.15’de, (x, y) ve (x\*, y\*) eksenleri görülmektedir. İkinci sisteme ait orijinin, birinci sistemdeki koordinatları (x<sub>o</sub>, y<sub>o</sub>) ise, bir (x, y) noktasının ikinci sistemdeki konumu,

$$x^* = (x - x_o) \cos \alpha + (y - y_o) \sin \alpha \quad (2.88a)$$

$$y^* = -(x - x_o) \sin \alpha + (y - y_o) \cos \alpha \quad (2.88b)$$

ile belirlenir. (2.25b,c) ve (2.54c) denklemleriyle verilen S<sub>x</sub>, S<sub>y</sub> ve I<sub>xy</sub> büyüklüklerinin yeni sistemdeki değerleri,

$$S_{x^*} = (S_x - y_o A) \cos \alpha - (S_y - x_o A) \sin \alpha \quad (2.89a)$$

$$S_{x^*} = (S_x - y_o A) \cos \alpha - (S_y - x_o A) \sin \alpha \quad (2.89b)$$

$$I_{x^*y^*} = (I_{xx} - I_y - 2y_o S_x + 2x_o S_y + y_o^2 A - x_o^2 A) \sin \alpha \cos \alpha - 2(I_{xy} - y_o S_y - x_o S_x + x_o y_o A)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \quad (2.89c)$$

şeklindedir.

Eğer  $(x^*, y^*)$  koordinat sistemi asal ise,  $S_{x^*} = S_{y^*} = 0$  şartlarının (2.89a-b) denklemlerine taşınmasıyla, eksenlerin konumu herhangi bir  $(x, y)$  eksen takımına göre,

$$x_o = \frac{S_y}{A} \quad y_o = \frac{S_x}{A} \quad (2.90)$$

olarak elde edilir. Kuşkusuz bunlar, en kesitin ağırlık merkezinin koordinatlarıdır. X asal ekseninin x eksenine göre doğrultusu ise,  $I_{xy} = 0$  şartı ve (2.89c), (2.90) denklemlerinden,

$$\tan 2\alpha = \frac{2(I_{xy} - x_o y_o A)}{(I_y - x_o^2 A) - (I_x - y_o^2 A)} \quad (2.91)$$

olarak elde edilir.

Kısaca,  $(X, Y)$  asal koordinat sisteminin konumu ve doğrultusu, (2.90) ve (2.91) denklemleri kullanılarak herhangi bir  $(x, y)$  sistemine göre elde edildikten sonra, bu asal kartezyen koordinatlarda asal dönme noktasının konumu, (2.84) denklemleriyle herhangi bir dönme noktasına göre, asal sektörel orijinin konumu ise, (2.85) denklemiyle herhangi bir sektörel orijine göre ya da (2.25d) denklemiyle doğrudan tanımları kullanılarak bulunur.

## 2.7 Asal Formlarında Çubuk Kuvvetleri ve Denge Denklemleri

(2.55) denklemleriyle verilen çubuk kuvvetlerinin asal koordinat eksenlerine taşınmasıyla her bir çubuk kuvveti, diğerlerinden bağımsız tek bir şekil değiştirme

haline bağı olarak aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$N = EA W' \quad (2.92a)$$

$$M_x = -EI_x V'' \quad (2.92b)$$

$$M_y = EI_y U'' \quad (2.92c)$$

$$M_{TS} = GJ \Phi' \quad (2.92d)$$

$$M_{\Omega} = EI_{\Omega\Omega} \Phi'' \quad (2.92e)$$

$$T_x = -EI_y U''' + m_y \quad (2.92f)$$

$$T_y = -EI_x V''' + m_x \quad (2.92g)$$

$$M_{T\Omega} = -EI_{\Omega\Omega} \Phi''' + m_{\Omega} \quad (2.92h)$$

(2.92d,h) denklemleriyle verilen St. Venant burulma momenti ve çarpılma burulma momentinin birleşimi toplam burulma momentini oluşturur.

$$M_T = GJ \Phi' - EI_{\Omega\Omega} \Phi''' + m_{\Omega} \quad (2.92i)$$

Gerilmeler ve çubuk kuvvetleri arasında doğrudan bir ilişkinin kurulması ve gerilmeleri oluşturan her bir etkinin açık olarak görülebilmesi, (2.92) denklemlerinden çubuk kuvvetlerine bağı olarak elde edilecek şekil değiştirmelerin gerilme ifadelerinde kullanılmasıyla mümkün olur. Böylece açık en kesitlerde (2.19), (2.20), (2.26) denklemlerinden  $\sigma_z$  ve  $\tau_{zs}$ ,

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} Y - \frac{M_y}{I_y} X - \frac{M_{\Omega}}{I_{\Omega\Omega}} \Omega \quad (2.93a)$$

$$\tau_{zs} = \tau_{zs,s} + \frac{q_{II}}{t} = \frac{2M_{TS}}{J}n + \frac{1}{t} \left[ \left( \frac{N'}{A} A^s + F_z^s \right) + \frac{M'_X}{I_X} S_X^s - \frac{M'_Y}{I_Y} S_Y^s - \frac{M'_{\Omega}}{I_{\Omega\Omega}} S_{\Omega}^s \right] \quad (2.93b)$$

şeklinde çubuk kuvvetlerine bağlı olarak elde edilir.

(2.93a) denklemi,  $\sigma_z$  ile çubuk kuvvetleri arasındaki çubuk mukavemetinden bilinen ilişkinin, bimoment etkisiyle oluşan gerilmelerin dahil edilmesiyle ince çeperli çubuklar için elde edilmiş genel halidir. İlk üç terim Bernoulli-Navier hipotezine dayanan gerilmeleri, dördüncü terim ise en kesitin burulma sonucunda düzlem kalmayıp çarpılmasıyla oluşan gerilmeleri gösterir.

(2.93b) denkleminde, parantez içindeki normal kuvvet ve eksenel doğrultuda etkiyen yüklerden kaynaklanan terimlerin katkısı genellikle küçük olmakla birlikte, ancak eksenel yükün olmaması veya  $s$  koordinatına göre sabit olması durumunda ortadan kalkar. Böyle bir durumda (2.53) denklemlerini dikkate alarak,

$$q = \frac{2M_{TS}}{J}n + \frac{1}{t} \left[ \frac{T_Y}{I_X} S_X^s + \frac{T_X}{I_Y} S_Y^s + \frac{M_{T\Omega}}{I_{\Omega\Omega}} S_{\Omega}^s \right] \quad (2.94)$$

yazabiliriz.

Kapalı en kesitlerde, (2.93a) normal gerilme ifadesi çarpılma fonksiyonunun (2.6) yerine (2.15) denklemiyle verilmesiyle geçerliliğini korur.  $q$  kayma akımı ise (2.21) ve (2.36) denklemlerinden,

$$\begin{aligned} q = q_s + q_{II} = & \frac{M_{TS} F_s}{J} + \frac{N'}{A} (A^s - K_z) + \frac{M'_X}{I_X} (S_X^s - K_X) - \frac{M'_Y}{I_Y} (S_Y^s - K_Y) - \\ & - \frac{M'_{\Omega}}{I_{\Omega\Omega}} (S_{\Omega}^s - K_{\Omega}) + F(S_f^s - K_f) \end{aligned} \quad (2.95)$$

şeklinde çubuk kuvvetlerine bağlıdır.

(2.94) denkleminin bir benzerini kapalı en kesitler için de yazabiliriz.

$$q = \frac{M_{TS} F_s}{J} + \frac{T_Y}{I_X} (S_X^s - K_X) + \frac{T_X}{I_Y} (S_Y^s - K_Y) + \frac{M_{T\Omega}}{I_{\Omega\Omega}} (S_{\Omega}^s - K_{\Omega}) \quad (2.96)$$

Çubuk dengesini belirleyen (2.62) denklemleri de, asal koordinatlarda birbirlerinden ayrılırlar ve aşağıdaki şekilde verilirler.

$$AEW'' = -F_z \quad (2.97a)$$

$$EI_x V^{IV} = F_y + m'_x \quad (2.97b)$$

$$EI_y U^{IV} = F_x + m'_y \quad (2.97c)$$

$$EI_{\Omega\Omega} \Phi^{IV} - GJ\Phi'' = m_t + m'_{\Omega} \quad (2.97d)$$

## 2.8 Kayma ve Dönme Merkezi

Bir çubukta eğilmenin burulmasız olabilmesi için, kesme kuvvetlerinin en kesitte geçmesi gereken nokta kayma merkezi olarak tanımlanır [27]. Bir başka deyişle, kesitte dağılı olan kayma gerilmelerinin bileşkesi, burulma olmaması için kayma merkezinden geçmelidir.

Eğilme momentleri etkisindeki bir çubuk en kesitinde oluşan kayma akımının asal eksenlerde ifadesi (2.94) denkleminde,

$$q = \frac{T_y}{I_x} S_x^s + \frac{T_x}{I_y} S_y^s \quad (2.98)$$

şeklindedir. Kayma akımının dönme noktasına göre momentini veren,

$$\int_C q r ds = \int_C q d\Omega = \frac{T_y}{I_x} \int_C S_x^s d\Omega + \frac{T_x}{I_y} \int_C S_y^s d\Omega \quad (2.99)$$

ifadesinde (2.73b) şartlarından,

$$\int_C S_x^s d\Omega = S_x^s \Omega \Big|_C - \int_C \Omega dS_x^s = -I_{\Omega x} = 0 \quad (2.100a)$$

ve benzer şekilde,

$$\int_C S_y^s d\Omega = -I_{\Omega y} = 0 \quad (2.100b)$$

olduğu ve kesme kuvvetlerinin dönme noktasına göre verildiği dikkate alınarak kayma merkezinin yukarıdaki tanımından, kayma merkezi ile asal dönme noktasının aynı noktalar olduğu sonucuna ulaşılır.

Burulma merkezini kayma merkezine benzer şekilde, bir burulmanın eğilmesiz olabilmesi için dönme noktası olarak alınması gereken yer şeklinde tanımlayabiliriz. Ancak bir burulma merkezinin tanımlanabilmesi için, burulmanın üniform olmayan burulma olması gerekir [32].

Eğilmesiz bir burulma halinde çubukta oluşan  $\sigma_z$  normal gerilmesi (2.19) denkleminde,

$$\sigma_z = -\Phi''\omega \quad (2.101)$$

şeklindedir ve çubuk başka bir yük etkilemediğine göre,

$$\int_C \sigma_z x t ds = \int_C \sigma_z y t ds = 0 \quad (2.102)$$

olacaktır. Dolayısıyla (2.101) denkleminde,

$$\int_C \omega x t ds = \int_C \omega y t ds = 0 \quad (2.103)$$

ile dönme merkezini belirleyen şartlar, asal dönme noktasının taşıdığı şartlar olarak elde edilir.

Görülüyor ki, asal dönme noktası, kayma merkezi ve dönme merkezi en kesitin aynı bir noktasına karşılık gelmektedir. Bu sonuca doğrudan asal koordinat eksenlerinin tanımından ya da Betti-Rayleigh karşılık teoreminden de kolaylıkla ulaşılabilir:

Asal koordinat eksenleri, bir şekil değiştirme halinin diğerlerinden bağımsız tek başına incelenemediği durum olarak verilmişti. Dolayısıyla, eğilme ve burulma ancak eksenlerin asal olarak seçilmesiyle birbirinden ayrılabilir ve tanımları gereği kayma ve dönme merkezlerinin asal dönme noktası olduğu açıktır.

Betti-Rayleigh karşılıklı teoremi, lineer elastik bir cisimde iki ayrı kuvvet ve şekil değiştirme grubu alındığında, ilk gruba ait kuvvetlerin ikinci gruba ait yerdeştirmelerle yaptığı işin, ikinci gruba ait kuvvetlerin birinci gruba ait yerdeştirmelerle yaptığı işe eşit olması gerektiğini ifade eder [27]. Kuvvet ve şekil değiştirme gruplarının ilkinin eğilme momentleri ve çubuğun eğilmesi, ikincisinin ise burulma momenti ve çubuğun dönmesi şeklinde alınması durumunda, Betti-Rayleigh teoremi ancak kayma ve dönme merkezlerinin aynı noktalar ve bu noktanın asal dönme noktası olması durumunda sağlanacaktır.

Kapalı en kesitlerde, (2.90b) kayma akımı denklemindeki  $K_x$  ve  $K_y$  fonksiyonlarının elemanlar üzerinde sabit olduğu ve  $\sigma_z$  ifadesinin değişmediğini dikkate alarak, kayma ve dönme merkezlerinin kapalı en kesitlerde de açık kesitler için elde edilen özellikleri taşıdığını söyleyebiliriz.

Son olarak önemli bir noktayı belirtelim: Kayma merkezi, dönme merkezi ve asal dönme noktasının aynı noktalar olması (2.2) kabulünün bir sonucudur ve bu kabulün kaldırılmasıyla birlikte yukarıda elde edilen sonuçlar geçerliliklerini yitirirler.

## 2.9 İnce Çeperli Çubuklarda Burulma Problemi

İnce çeperli çubukların karakteristik özelliklerini daha açık olarak ortaya koymak amacıyla, burulma problemini asal eksen takımlarında yazılan,

$$EI_{\Omega\Omega}\Phi''' - GJ\Phi'' = m_T + m'_\Omega \quad (2.104)$$

şeklindeki (2.97d) denge denklemiyle diğer şekil değiştirmelerden bağımsız olarak inceleyelim. Denklemden yer alan  $I_{\Omega\Omega}$ , çarpılma sabiti;  $J$ , burulma sabiti;  $m_T$  ve  $m_\Omega$  ise çubuğa etkiyen burulma ve çarpılma yükleri olarak daha önce tanımlanmıştı.

Denklemin çözülmesi için gereken sınır şartları, çubuk uçlarında burulma ve çarpılma durumlarının belirlenmesiyle elde edilir. Bu sınır şartlarının bir bölümü,

Tablo 2.1’de gösterilmiştir.

Tablo 2.1 Burulma probleminde sınır şartları [12]

|   | Durum                                                    | Kinematik sınır şartı | Kuvvet sınır şartı                | Kuvvet                                          | Diğer kinematik büyüklükler                        |
|---|----------------------------------------------------------|-----------------------|-----------------------------------|-------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| 1 | Ankastre mesnet<br>Dönme ve çarpılma yok                 | $\Phi = \Phi' = 0$    |                                   | $M_T = M_{T\Omega} \neq 0$<br>$M_\Omega \neq 0$ | $\Phi'' \neq 0$                                    |
| 2 | Mafsallı uç<br>Çarpılma serbest                          | $\Phi = 0$            | $M_\Omega = 0$                    | $M_T \neq 0$                                    | $\Phi' \neq 0$<br>$\Phi'' = 0$                     |
| 3 | Burulma momenti var<br>Çarpılma yok                      | $\Phi' = 0$           | $M_T = M_{T\Omega} \neq 0$        | $M_\Omega \neq 0$                               | $\Phi \neq 0$<br>$\Phi'' \neq 0$                   |
| 4 | Mafsallı uç<br>Burulma momenti var<br>Çarpılma serbest   |                       | $M_T \neq 0$<br>$M_\Omega = 0$    |                                                 | $\Phi \neq 0$<br>$\Phi' \neq 0$<br>$\Phi'' = 0$    |
| 5 | Serbest uç<br>Çarpılma momenti var                       |                       | $M_T = 0$<br>$M_\Omega \neq 0$    | $M_{TS} = -M_{T\Omega}$                         | $\Phi \neq 0$<br>$\Phi' \neq 0$<br>$\Phi'' \neq 0$ |
| 6 | Serbest uç<br>Burulma momenti ve<br>çarpılma momenti var |                       | $M_T \neq 0$<br>$M_\Omega \neq 0$ |                                                 | $\Phi \neq 0$<br>$\Phi' \neq 0$<br>$\Phi'' \neq 0$ |
| 7 | Serbest uç<br>Dış kuvvet yok                             |                       | $M_T = 0$<br>$M_\Omega = 0$       |                                                 | $\Phi \neq 0$<br>$\Phi' = 0$<br>$\Phi'' = 0$       |

Tablodan görüldüğü gibi, çarpılmanın tamamen engellendiği durumlarda (1-3),  $\Phi'$  ve  $M_{TS}$ 'nin sıfır olmasıyla burulma momentini tümüyle  $M_{T\Omega}$  oluşturmakta, çarpılma serbest bırakıldığında ise (2-4),  $M_\Omega$  ve  $\Phi''$  sıfır değerini almaktadır. Sadece çarpılma momentinin etkidiği (5) durumunda,  $M_{TS}$  ve  $M_{T\Omega}$ 'nın birbirlerine ters işaretli eşit olması dikkat çekicidir.

(2.104) denkleminin formu ve (5) sınır şartının varlığı, sadece burulma momentlerinin değil, aksenal doğrultudaki kuvvetlerin oluşturacağı çarpılma yükleri ya da çarpılma momentlerinin de çubukta burulmaya yol açabileceğini gösterir.

İnce çeperli çubukların burulma problemine, St. Venant burulmasının etkilerinin ihmal edilmesi veya çarpılmanın engellenmesiyle oluşan etkilerin ihmal edilmesi şeklinde iki yaklaşım yapmak mümkündür [12]. Fakat belirtmek gerekir ki, burulma problemi genellikle bu iki uç durumun bir bileşkesi şeklindedir ve aşağıda görüleceği gibi, yaklaşımlar ancak belirli şartlar içinde anlam kazanabilir.

‘Vlasov burulması’ olarak bilinen ilk yaklaşımda (2.104) burulma denklemi,

$$EI_{\Omega\Omega} \Phi^{IV} = m_T + m'_\Omega \quad (2.105)$$

haline gelir. Denklemin derecesinin değişmediği ve (2.104) denkleminde ait tüm sınır şartlarının geçerliliğini koruduğu bu durumda, burulma momenti tümüyle (2.92h) denklemiyle verilen çarpılma burulma momentinden oluşur.

$$M_T = M_{T\Omega} = -EI_{\Omega\Omega} \Phi''' + m_\Omega \quad (2.106)$$

İkinci yaklaşım ise,

$$GJ\Phi'' = -m_T \quad (2.107)$$

şeklinde St. Venant burulma problemidir. Denklemin derecesinin ikiye düşmesiyle birlikte çarpılmayla ilgili sınır şartları da ortadan kalkar ve burulma momenti St. Venant burulma momentinden oluşur.

$$M_T = M_{TS} = GJ\Phi' \quad (2.108)$$

(2.104) burulma denklemini, bir  $\zeta = z/L$  değişkeni ile boyutsuzlaştırarak,

$$\Phi_\zeta^{IV} - \lambda^2 \Phi_\zeta'' = \frac{\lambda^2 L^2 (m_T + m'_\Omega)}{GJ} \quad (2.109)$$

şeklinde verebiliriz.  $L$ , çubuk boyudur ve  $\zeta$  indisi  $\Phi$ 'nin bağlı olduğu değişkeni göstermek için kullanılmıştır.  $\lambda$  ise, ileride görüleceği gibi çubuğun burulma davranışını belirleyen boyutsuz bir katsayı olarak,

$$\lambda^2 = \frac{GJ}{EI_{\Omega\Omega}} L^2 \quad (2.110)$$

ile verilir.

(2.109) diferansiyel denkleminin genel çözümü,

$$\Phi = C_1 + C_2 \frac{z}{L} + C_3 \cosh \lambda \frac{z}{L} + C_4 \sinh \lambda \frac{z}{L} + \Phi_p \quad (2.111)$$

şeklindedir.  $\Phi_p$  dış yüklere bağlı özel çözüm, C değerleri sınır şartlarından elde edilen katsayılarıdır.

Çubuğun herhangi bir z en kesitinde tekil bir dış kuvvetin varlığı ya da yayılı yükün değişmesi durumunda, problemin çözülmesi için sınır şartlarıyla birlikte çubuğun söz konusu en kesitten önceki ve sonraki kısımlarının kinematik uyumluluk ve statik denge şartları da kullanılır. Örnek olarak eğer bu kuvvet bir burulma momentiyse, bu şartlar momentin etkidiği noktada dönme, çarpılma ve normal gerilme değerlerinin sürekliliğinden,

$$\Phi_1 = \Phi_2 \quad , \quad \Phi'_1 = \Phi'_2 \quad , \quad \Phi''_1 = \Phi''_2 \quad (2.112)$$

ve (2.92i) denklemiyle burulma momenti dengesinden,

$$\Phi''_1 - \Phi''_2 = M_T \quad (2.113)$$

şeklinde elde edilir.

Birkaç örnek üzerinde, ince çeperli çubukların burulma problemini ve probleme yapılan iki yaklaşımı inceleyelim.

Şekil 2.16'da, serbest ucu T burulma momentinin etkisinde, diğer ucu ankastre mesnetli bir çubuk görülmektedir.



Şekil 2.16 Burulma momentinin etkisindeki ankastre bağlı çubuk

Problemin Tablo 2.1 ve (2.92i) denkleminde elde edilen,

$$\Phi(0) = \Phi'_\zeta(0) = \Phi''_\zeta(1) = 0 \quad , \quad \lambda^2 \Phi'_\zeta(1) - \Phi''_\zeta(1) = \frac{TL\lambda^2}{GJ} \quad (2.114)$$

sınır şartlarından (2.111) denklemi,

$$\Phi = \frac{TL}{GJ\lambda} \left( -\tanh \lambda + \lambda \frac{z}{L} + \tanh \lambda \cosh \lambda \frac{z}{L} - \sinh \lambda \frac{z}{L} \right) \quad (2.115)$$

çözümünü verir ve (2.92d,e,h) denklemlerinden çubuk kuvvetleri,

$$M_{TS} = GJ\Phi' = T \left( 1 + \tanh \lambda \sinh \lambda \frac{z}{L} - \cosh \lambda \frac{z}{L} \right) \quad (2.116a)$$

$$M_{T\Omega} = -EI_{\Omega\Omega} \Phi'' = T(1 - M_{TS}) = T \left( -\tanh \lambda \sinh \lambda \frac{z}{L} + \cosh \lambda \frac{z}{L} \right) \quad (2.116b)$$

$$M_{\Omega} = EI_{\Omega\Omega} \Phi'' = \frac{TL}{\lambda} \left( \tanh \lambda \cosh \lambda \frac{z}{L} - \sinh \lambda \frac{z}{L} \right) \quad (2.116c)$$

olarak elde edilir.

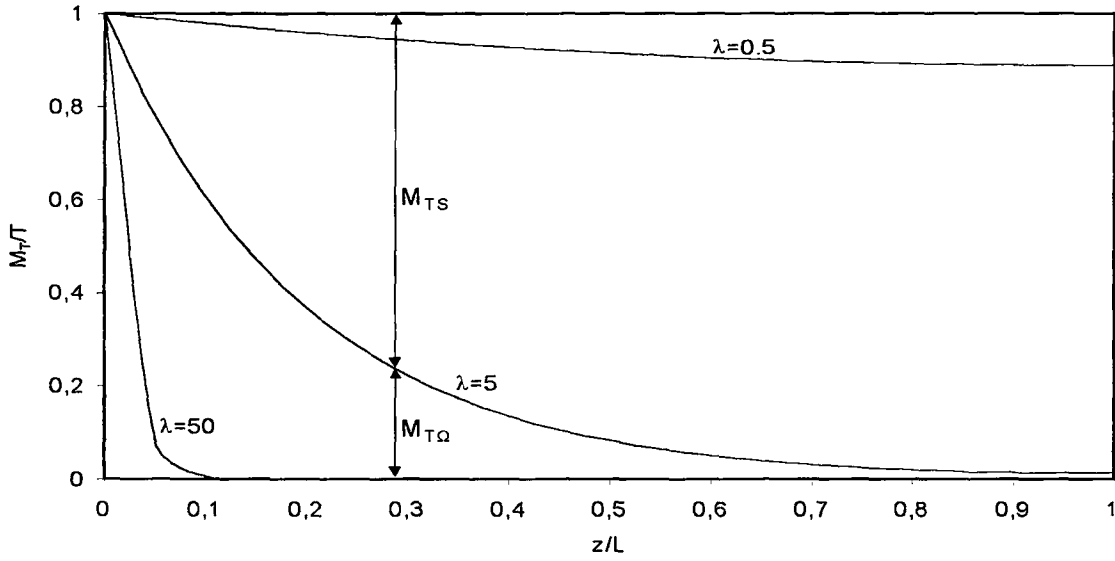
Problemin Vlasov ve St. Venant yaklaşımlarıyla çözümü ise (2.105) ve (2.107) denklemlerinden sırasıyla,

$$\Phi = \frac{TL^3}{6EI_{\Omega\Omega}} \left[ 3\left(\frac{z}{L}\right)^2 - \left(\frac{z}{L}\right)^3 \right] \quad (2.117a)$$

$$\Phi = \frac{T}{GJ} z \quad (2.117b)$$

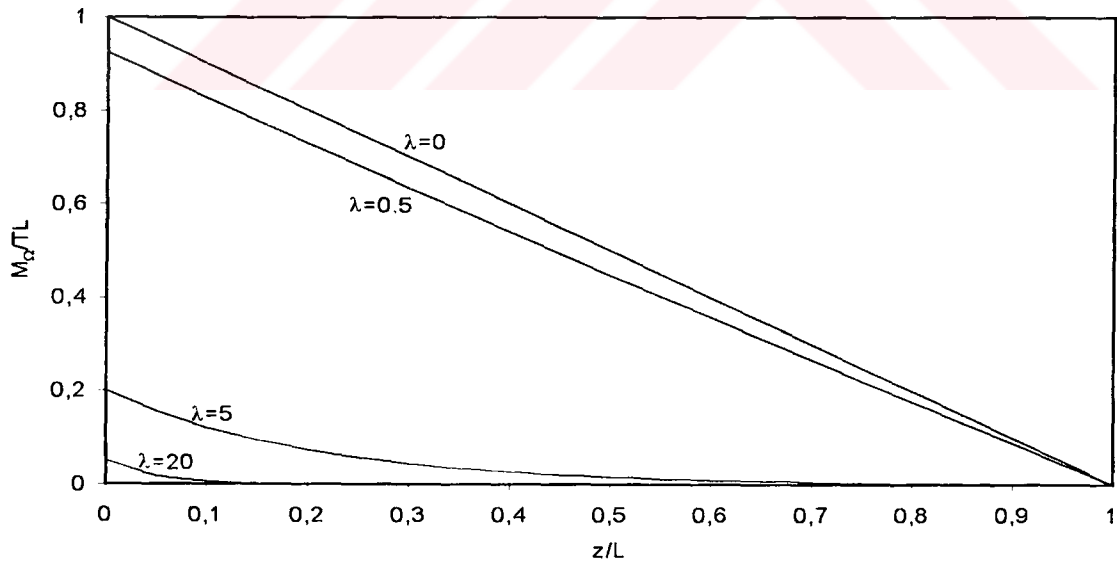
şeklindedir.

Şekil 2.17'de  $M_{TS}$  ve  $M_{T\Omega}$  burulma momentlerinin çeşitli  $\lambda$  değerlerindeki çubuk boyunca değişimi verilmiştir. Diyagramdan görüldüğü gibi,  $\lambda$  değeri büyüdükçe çarpılma burulma momentinin ağırlıklı olduğu kısmın çubuk boyuna



Şekil 2.17  $M_{TS}$  ve  $M_{T\Omega}$ 'nin farklı  $\lambda$  değerlerinde çubuk boyunca değişimi

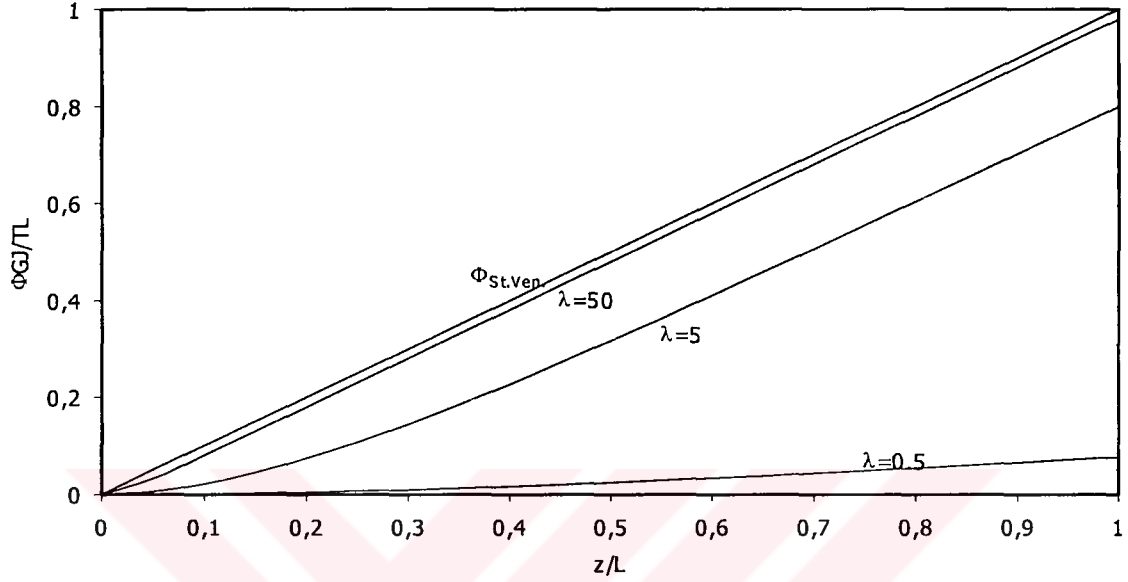
oranı azalmaktadır.  $\lambda = 0.5$  için Vlasov yaklaşımı ( $\lambda = 0$ , çubuk boyunca  $M_{TS} = T$ ,  $M_{T\Omega} = 0$ ) (2.115) çözümüne oldukça yakınken,  $\lambda = 0.5$  için St. Venant yaklaşımı (çubuk boyunca  $M_{TS} = T$ ,  $M_{T\Omega} = 0$ ) çubuk genelinde (2.115) çözümüyle aynı sonucu vermektedir. Benzer sonuçlar, çarpılma momentinin çubuk boyunca değişiminin gösterildiği Şekil 2.18'de de görülebilir.



Şekil 2.18 Çarpılma momentinin farklı  $\lambda$  değerlerinde çubuk boyunca değişimi

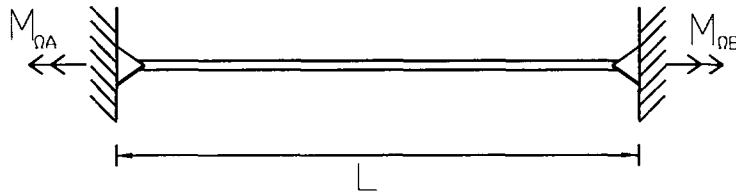
Farklı  $\lambda$  değerlerinde çubuğun burulması gösteren Şekil 2.19'da,  $\lambda = 50$  eğrisi ve St. Venant çözümü beklenildiği gibi oldukça yakındır.  $\lambda$  değerinin artması

ve çarpılmanın engellenmesiyle oluşan etkilerin kaybolmasıyla birlikte,  $\Phi$  eğrisinin St. Venant eğrisine paralel hale gelmesinin yanında bir başka dikkat çekici nokta küçük  $\lambda$  değerlerinde, çarpılmanın engellenmesinin burulmayı büyük oranda azaltmasıdır.



Şekil 2.19  $\Phi$ 'nin farklı  $\lambda$  değerlerinde çubuk boyunca değişimi

İkinci bir örnek olarak Şekil 2.20'de görülen, uçları  $M_{\Omega A}$  ve  $M_{\Omega B}$  çarpılma momentleri etkisindeki çubuğu ele alalım.



Şekil 2.20 Çarpılma momentleri etkisindeki çubuk

Tablo 2.1 ve (2.92c) denkleminde elde edilen,

$$\Phi(0) = \Phi(1) = 0 \quad , \quad \Phi''_{\zeta}(0) = \frac{M_{\Omega A} \lambda^2}{GJ} \quad , \quad \Phi''_{\zeta}(1) = \frac{M_{\Omega B} \lambda^2}{GJ} \quad (2.118)$$

çubuk sınır şartlarından (2.104) denkleminin çözümü,

$$\Phi = \frac{M_{\Omega A}}{GJ} \left( \frac{z}{L} + \cosh \lambda \frac{z}{L} - \frac{\sinh \lambda z/L}{\tanh \lambda} - 1 + k \left( \frac{\sinh \lambda z/L}{\sinh \lambda} - \frac{z}{L} \right) \right) \quad (2.119)$$

ve çubuk kuvvetleri,

$$M_{TS} = -M_{T\Omega} = \frac{M_{\Omega A}}{L} \left( 1 + \lambda \sinh \lambda \frac{z}{L} - \lambda \frac{\cosh \lambda z/L}{\tanh \lambda} + k \left( \lambda \frac{\cosh \lambda z/L}{\sinh \lambda} - 1 \right) \right) \quad (2.120a)$$

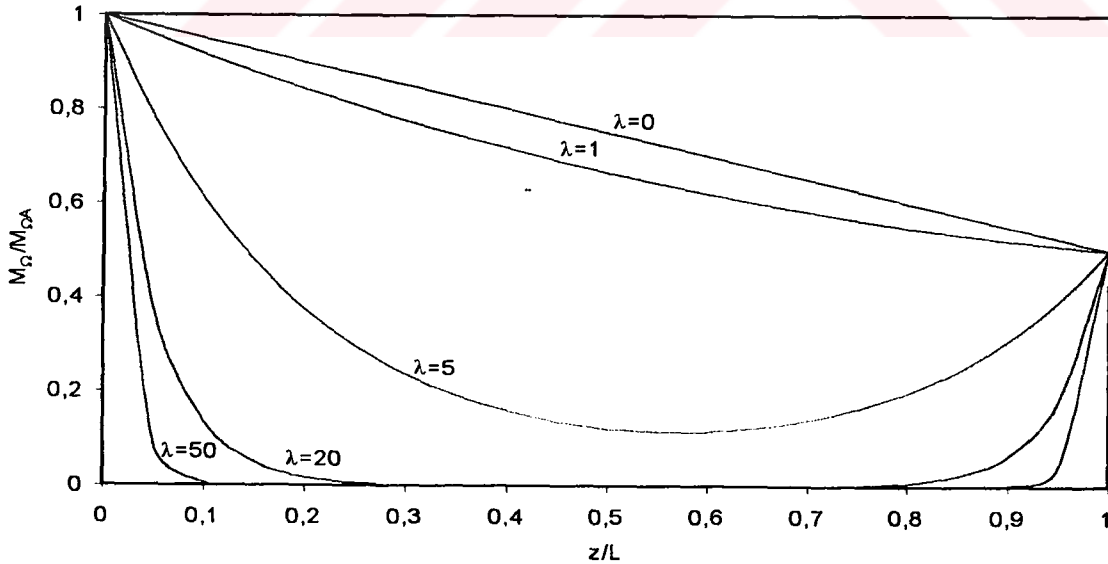
$$M_{\Omega} = M_{\Omega A} \left( \cosh \lambda \frac{z}{L} - \frac{\sinh \lambda z/L}{\tanh \lambda} + k \frac{\sinh \lambda z/L}{\sinh \lambda} \right) \quad (2.120b)$$

şeklindedir.  $k$ ,  $M_{\Omega B}/M_{\Omega A}$  oranını gösterir. Çubuğa etkiyen bir burulma momenti olmadığından,  $M_{TS}$  ve  $M_{T\Omega}$  momenti birbirlerine ters işaretli eşittir.

Problemin Vlasov yaklaşımıyla çözümüyse,

$$\Phi = \frac{M_{\Omega A} L^2}{6EI_{\Omega\Omega}} \left[ (k-1) \left( \frac{z}{L} \right)^3 + 3 \left( \frac{z}{L} \right)^2 - (2+k) \left( \frac{z}{L} \right) \right] \quad (2.121)$$

sonucunu verir

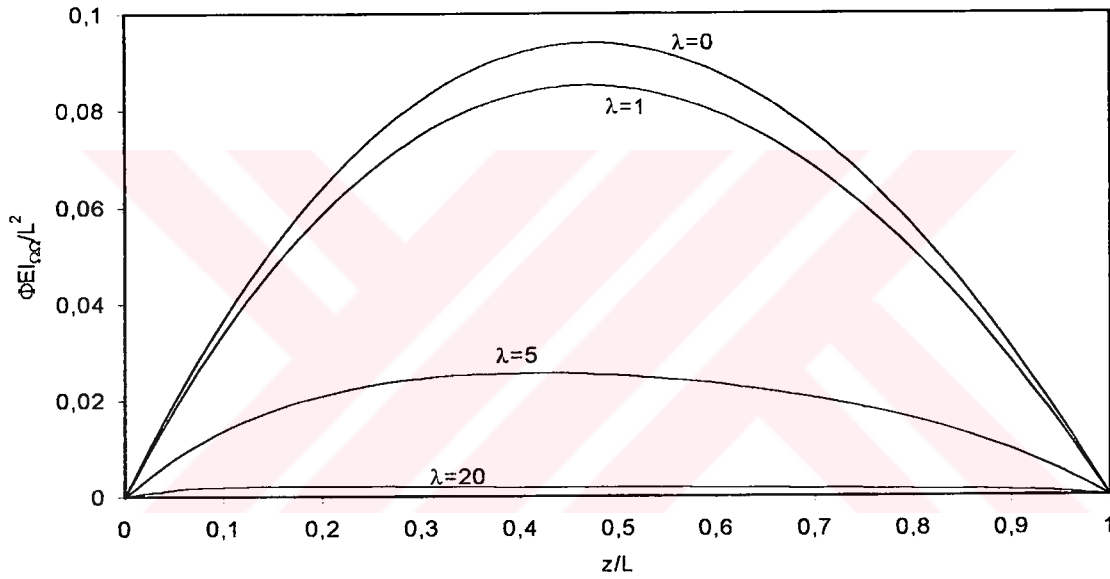


Şekil 2.21  $k = 0.5$  için çarpılma momenti eğrileri

Şekil 2.21'de çeşitli  $\lambda$  değerleri için çarpılma momenti eğrileri çizilmiştir.

Diyagramdan görüldüğü gibi, çubuk uçlarına etkiyen çarpılma momentlerinin çubuktaki etkileri  $\lambda$  değeri büyüdükçe azalmaktadır ve  $\lambda = 50$  için sadece çubuk uçlarında etkili olan lokal büyüklükler haline gelmektedirler.

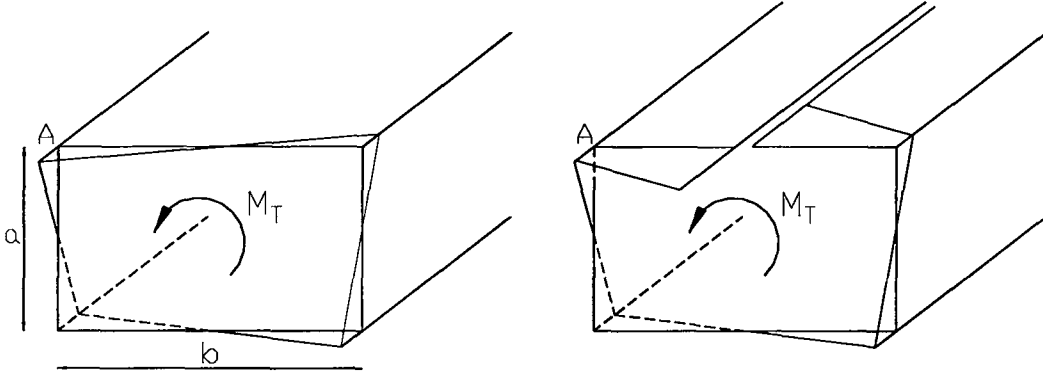
Şekil 2.22'deki burulma eğrisinde, önceki örneğin tersine  $\lambda$  değerindeki artışla birlikte burulmanın azaldığı görülmektedir. Bilindiği gibi St. Venant burulması, çubuğun uçlarından etkiyen ve çubuk boyunca değişmeyen burulma momentleri etkisiyle burulmasıdır. Dolayısıyla çubuğa etkiyen çarpılma momentlerinin St. Venant burulmasında etkisi yoktur ve burada da önceki örnekte olduğu gibi,  $\lambda$  değerinin artmasıyla birlikte burulma probleminin karakteri St. Venant burulmasına yaklaşmaktadır.



Şekil 2.22  $\Phi$ 'nin farklı  $\lambda$  değerlerinde çubuk boyunca değişimi

Örneklerden görüldüğü gibi, ince çeperli çubuklarda burulma probleminin karakteri  $\lambda$ 'nın değerine bağlıdır ve bu değer küçük ya da büyük değerler almasına göre problemi Vlasov veya St. Venant burulmasıyla çubuk genelinde yaklaşık olarak çözmek mümkündür. Bu noktada,  $\lambda$ 'nın küçük ya da büyük değerler almasının ne anlama geldiğinin incelenmesi örneklerden elde edilen sonuçları daha açık hale getirecektir.

Şekil 2.23'de aynı boyutlara sahip açık ve kapalı en kesitli iki çubuğun çarpılması görülmüyor. Açık en kesitli çubuk, kapalı en kesitin  $b/2$ 'de kesilmesiyle elde edilmiştir. St. Venant teorisine göre, bir  $M_t$  burulma momenti



Şekil 2.23 Aynı boyutlara sahip açık ve kapalı en kesitli çubuklarda çarpılma

etkisiyle çubukların A noktasındaki çarpılması (2.5), (2.6), (2.15), (2.16), (2.39), (2.40) ve (2.43) denklemlerinden  $b/a = 2$  için,

$$w_{Aç.} = \frac{M_T a}{4t^3 G} \quad w_{Kap.} = \frac{M_T}{8atG} \quad (2.122)$$

şeklindedir.  $a/t = 10$  için çarpılma değerlerinin oranı  $w_{Aç.}/w_{Kap.} = 200$  olur ki, bunun anlamı aynı şartlar altında açık en kesitli çubuğun, kapalı en kesitli çubuğa kıyasla 200 kat daha fazla çarpılacağıdır.

Açık ve kapalı en kesitli çubukların bu örnekteki burulma yükleri altında gösterdikleri davranış farklılığı geneldir. Burulma rijitliklerinin verildiği (2.40) ve (2.43) denklemlerinden görüleceği gibi, açık en kesitlerde rijitlik  $t^3$  ile orantılıyken, kapalı en kesitlerde bu oran  $t$ 'dir. Dolayısıyla açık çubukların, kapalı çubuklara göre çok daha fazla burulması ve çarpılması ve (2.110) denklemiyle verilen  $\lambda$ 'nın açık en kesitlerde küçük, kapalı en kesitlerde ise büyük değerler alması beklenir.

Örnek olarak Şekil 2.23'deki iki çubuğun  $\lambda$  katsayıları (2.6), (2.15), (2.40), (2.43), (2.54f) ve (2.110) denklemlerinden  $L/a = 10$ ,  $b/a = 2$  ve  $a/t = 10$  için,

$$\lambda_{aç.} = L \sqrt{\frac{2at^3 E}{23/6a^5 tG}} = 0.45 \quad \lambda_{kap.} = L \sqrt{\frac{8/3a^3 tE}{1/18a^5 tG}} = 42.97 \quad (2.123)$$

şeklindedir.  $G = E/2(1 + \nu)$  ve  $\nu = 0.3$  alınmıştır.

Açık en kesitli çubukların serbest burulmasında çarpılmaların büyük değerler alması, bir en kesitte çubuk hareketinin engellenmesi durumunda çubuk üzerinde oluşan etkilerin de büyük ve çoğu durumda çubuk boyunca devamlı olması sonucunu getirir. Birinci probleme ait Şekil 2.19'daki burulma eğrileri bunun açık bir örneğidir. Bu noktada çubuğun burulmaya karşı gösterdiği direnç, büyük oranda St. Venant burulma rijitliğinden değil, çarpılmanın engellenmesinden kaynaklanacaktır. Kapalı en kesitlerdeyse çarpılma büyük değerlere ulaşmadığından, engellenmesiyle ortaya çıkan etkilerin de önemli olması beklenmez ve bu etkiler çoğu zaman lokal büyüklükler olarak çubuk boyunca hızla kaybolurlar.

Sonuç olarak şunları söyleyebiliriz: İnce çeperli çubukların burulma problemi, çubuk boyu da dikkate alınarak  $\lambda$  katsayısının yeterince küçük olduğu açık en kesitli çubuklarda Vlasov burulmasıyla,  $\lambda$ 'nın genellikle büyük değerler aldığı kapalı en kesitli çubuklarda ise St. Venant burulmasıyla yaklaşık olarak çözülebilir. Bununla birlikte, çubuğun genel davranışı ne kadar bu yaklaşımlara yakın olsa da, ihmal edilen büyüklüklerin, özellikle çarpılmanın engellendiği en kesit civarındaki çarpılma gerilmelerinin büyük değerler alabileceği beklenmelidir.

## 2.10 Bescoter Teorisi

İnce çeperli çubuk teorisi, çubuğun şekil değiştirme durumunu daha basit ifade edebilmek amacıyla, Bölüm 2.2'de belirtilen kinematik kabuller üzerine kurulmuştur. 2.1 ve 2.3 kabulleri, çubuktaki şekil değiştirme ve gerilme durumlarını basitleştirirken, 2.2 kabulüyle şekil değiştirme ve gerilme bileşenleri belirlenir.

Kuşkusuz bu kabuller arasında en kritik olanı, çubuk ortalama yüzeyindeki kayma şekil değiştirmelerinin, St. Venant burulmasında oluşan kayma şekil değiştirmeleri olarak alınabileceği şeklindeki 2.2 kabulüdür. Çubuğun burulmasını dikkate aldığımızda bu kabul, çarpılma gerilmelerinin şekil değiştirmeye olan etkisinin ihmal anlamını taşır. Dolayısıyla, kayma şekil değiştirmeleri kullanılarak elde edilen en kesitin eksenel yerdeğiştirmesi ve normal gerilme dağılımı ile normal gerilmelere bağlı olarak elde edilen çarpılma gerilmeleri ve çubuğun burulmasını ifade eden denge denklemi bir miktar hata içerecektir.

Açık en kesitlerde bu hatanın büyük olmadığını deneysel sonuçlar göstermiştir. Kapalı en kesitlerde ise, teorinin verdiği çözüm bazı durumlarda yeterli

doğruluğu taşımaz: Burulma rijitliğinin büyük olması sebebiyle, kapalı en kesitlerde çarpılmanın küçük değerlerde kalacağı ve çarpılmanın engellenmesiyle ortaya çıkan gerilmelerin önemli olmayacağı beklendiği halde, çarpılma kayma gerilmelerinin St. Venant gerilmelerinden daha büyük değerler alabildiği [18] veya gerilmelerin ve çubuğun dönme açısının çubuk eksenine doğrultusundaki değişiminin hatalı olduğu gözlenmiştir [17].

Bu probleme yaklaşık bir çözüm getiren Benscoter, (2.2) kabulünü kullanmak yerine, eksenel yerdeğiştirmeleri  $z$ 'ye bağlı bir fonksiyon ve çarpılma fonksiyonu yardımıyla ifade ederek probleme daha doğrudan bir yaklaşım önerir. Bu yaklaşımı von Karman-Christensen teorisinden ayıran nokta, en kesitin eksenel yerdeğiştirmesinin St. Venant burulmasında oluşan eksenel yerdeğiştirme şeklinde alınmayıp, aynı temel büyüklükle -çarpılma fonksiyonu- orantılı olacak şekilde tanımlanmasıdır. Bu iki teori arasında büyük bir fark yoktur ve aşağıda görüleceği gibi, birçok ifade benzer yapıdadır. Bölüm 2.2'de yapılan (2.1) ve (2.3) kabulleri burada da kullanılmıştır.

Çubuğun sadece burulma problemini ele alacağımız için koordinat sistemi, (2.73b) denklemi ile verdiğimiz,

$$S_{\Omega} = I_{\Omega X} = I_{\Omega Y} = 0 \quad (2.124)$$

şartlarını taşıyan asal sistem olacaktır.

Bölüm 2.2'de (2.15) denklemiyle,

$$w = -\Phi'(z)\Omega(s) \quad (2.125)$$

olarak verilen burulma eksenel yerdeğiştirmesi bir  $f(z)$  fonksiyonu kullanılarak,

$$w = -f(z)\Omega(s) \quad (2.126)$$

şeklinde tanımlansın.  $\Omega$ , (2.16) denklemiyle verilen kapalı en kesitler için çarpılma fonksiyonudur.

(2.2b) denkleminde, en kesitin  $s$  koordinatı doğrultusundaki yerdeğiştirmesi

$$v = \Phi(z)r(s) \quad (2.127)$$

şeklindedir ve (2.126), (2.127) denklemlerinden şekil değiştirmeler,

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = -f'\Omega \quad (2.128a)$$

$$\gamma_{zs} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial s} = f\left(\frac{F_s}{I} - r\right) + \Phi'r \quad (2.128b)$$

olarak elde edilir.

Çubuğun burulma davranışını belirleyen denge denklemleri, Bölüm 2.7'de çubuk denge denklemlerinin ifade edilmesine benzer şekilde, toplam potansiyel enerjinin minimum olma şartı kullanılarak elde edilebilir.

(2.56), (2.57), (2.62) ve (2.128a-b) denklemlerinden çubuğun potansiyel enerjisi,

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L \{Ef'^2 I_{\Omega\Omega} + G[f^2(I_R - J) + 2f\Phi'(J - I_R) + \Phi'^2 I_R] - 2[m_T \Phi - m_\Omega f]\} dz \quad (2.129)$$

şeklindedir. Burada  $I_{\Omega\Omega}$ ,  $J$ , çarpılma ve burulma sabitleri,  $m_\Omega$ ,  $m_T$ , çarpılma ve burulma yükleridir ve sırasıyla (2.43), (2.54f), (2.51b) ve (2.63d) denklemleriyle belirlenirler.

$$I_R = \int_C R^2 t ds \quad (2.130)$$

ile verilen  $I_R$  ise merkezi eylemsizlik momenti olarak tanımlanmıştır [17].

(2.66) Euler denkleminin (2.129) denkleminde uygulanmasıyla, aşağıdaki iki denge ifadesi elde edilir.

$$f: \quad EI_{\Omega\Omega} f'' + G(I_R - J)(\Phi' - f) - m_\Omega = 0 \quad (2.131a)$$

$$\Phi: \quad G[f'(J - I_R) + \Phi''I_R] + m_T = 0 \quad (2.131b)$$

Ebner tarafından,

$$\eta^2 = 1 - \frac{J}{I_R} \quad (2.132)$$

şeklinde en kesitin narinliğini ifade eden boyutsuz bir katsayı tanımlamıştır [14].  $\eta$ 'nın değeri düzgün çokgenlerde sıfır olurken, en kesitin yüksekliği azalıp, genişliği arttıkça bire yaklaşır.  $\eta = 0$ , yani  $I_R = J$  olması durumunda (2.131b) denklemi,

$$GJ\Phi'' = -m_T \quad (2.133)$$

olacaktır ki bu, burulmanın tamamen bir St. Venant burulması haline gelmesi, dolayısıyla çarpılma gerilmelerinin ortadan kalkması anlamını taşır.

(2.132) denklemi ve,

$$m_T = -\frac{dM_T}{dz} \quad (2.134)$$

olduğunun dikkate alınmasıyla (2.131b) denkleminde,

$$\Phi' = \frac{M_T}{GI_R} + \eta^2 f \quad (2.135)$$

elde edilir ve (2.131), (2.135) denklemlerinden,

$$EI_{\Omega\Omega}f'' - GJ\eta^2 f = m_{\Omega} - \eta^2 M_T \quad (2.136a)$$

$$\frac{EI_{\Omega\Omega}}{\eta^2}\Phi''' - GJ\Phi'' = m_T - \frac{EI_{\Omega\Omega}}{GI_R\eta^2}m_T'' + m_{\Omega}' \quad (2.136b)$$

şeklinde  $f$  ve  $\Phi$  fonksiyonlarını, çubuğa etkiyen burulma ve çarpılma yüklerine bağlı olarak ifade eden diferansiyel denge denklemleri elde edilir.

En kesitin eksenel yerdeğiştirmesi ve burulması, (2.136) denklemlerinin çubuk uçlarından elde edilecek uygun sınır şartlarıyla birlikte çözülmesiyle belirlenir. Tablo 2.1'deki kinematik çarpılma sınır şartlarının yerini burada  $f$  ve  $\Phi'$  fonksiyonlarını birbirlerine bağlayan (2.135) denklemi almıştır. Örnek olarak bir serbest uçtaki sınır şartları, serbest uçta normal gerilme oluşmadığını dikkate alarak (2.126) denkleminde elde edilen,

$$\sigma_z = E \frac{\partial w}{\partial z} = -E\Omega f' \quad (2.137)$$

normal gerilme ifadesi ve (2.135) denkleminde,

$$f' = 0, \quad \Phi'' = 0 \quad (2.138)$$

şeklinde verebiliriz.

Normal gerilmelerin en kesitteki dağılımının oluşturduğu çubuk kuvveti (2.124) şartları sebebiyle (2.137) denkleminde,

$$M_\Omega = -\int_C \sigma_z \Omega ds = EI_\Omega f' \quad (2.139)$$

ile sadece bir çarpılma momentidir ve (2.138), (2.139) denklemlerinden çarpılma momentine bağlı olarak  $\sigma_z$ ,

$$\sigma_z = \frac{M_\Omega}{I_\Omega} \Omega \quad (2.140)$$

şeklinde verilebilir.

Çubuğa etkiyen burulma momentini (2.131a-b) ve (2.134) denklemlerinden,

$$M_T = GJ\Phi' - EI_\Omega f'' + m_\Omega \quad (2.141)$$

şeklinde yazabiliriz. Eşitlikteki terimlere dikkat edilecek olursa, ilk terimin St. Venant burulma momenti, ikinci terimin ise (2.139) denklemiyle verilen çarpılma momentinin türevi olduğu görülebilir. (2.53c) denklemini hatırlayarak,

$$M_{T\Omega} = -EI_{\Omega\Omega} f'' + m_{\Omega} \quad (2.142)$$

şeklinde çarpılma burulma momentini tanımladığımızda, (2.92i) denkleminin bir benzeri Bencoter teorisi için de elde edilmiş olur.

$$M_T = M_{TS} + M_{T\Omega} \quad (2.143)$$

Burulma momenti ifadesindeki benzerlikten hareketle, kayma gerilmeleri de Bölüm 2.3'de yapıldığı gibi iki ayrı kısmın birleşimi şeklinde alınabilir.

$$q = q_s + q'_{II} + q''_{II} \quad (2.144)$$

Hatırlanacağı gibi  $q_s$ , (2.7) denklemiyle verilen kapalı en kesitlerde St. Venant kayma akımı,  $q'_{II}$  ve  $q''_{II}$  ise, statik belirsizliği kaldırmak amacıyla en kesitteki her hücrenin kesilerek açık hale getirildiği varsayımı sonucunda oluşan açık en kesitler için kayma akımı ve artık kayma akımıdır.

(2.22), (2.137) denklemlerinden  $q'_{II}$ ,

$$q'_{II} = -ES_{\Omega}^s f'' \quad (2.145a)$$

şeklindedir ve (2.34) denklemiyle benzer olarak  $q''_{II}$ ,

$$q''_{II} = EK_{\Omega} f'' \quad (2.145b)$$

ile verilebilir.

Burada  $S_{\Omega}^s$ , (2.25d) denklemiyle verilen sektörel moment ve  $K_{\Omega}$ ,

$$\oint_i \frac{K_{\Omega}}{t} ds = \oint_i \frac{S_{\Omega}^s}{t} ds \quad (2.146)$$

denkleminin birleşme noktalarındaki süreklilik denklemleriyle birlikte her kapalı hücre için çözülmesiyle elde edilen kayma akımı fonksiyonudur.

Böylece  $q_{II}$ ,

$$q_{II} = E(K_{\Omega} - S_{\Omega}^s) f'' \quad (2.147)$$

veya (2.139) denkleminde,

$$q_{II} = \frac{M'_{\Omega}}{I_{\Omega\Omega}} (K_{\Omega} - S_{\Omega}^s) \quad (2.148)$$

şeklinde elde edilir.

Gerek çubuğun burulmasını ifade eden (2.136b), (2.104) denge denklemlerinin  $\eta^2$  teriminin ve  $m_r$ 'ye bağlı bir ifadenin yer alması dışında benzer yapıda olmasına, gerekse elde edilen gerilme ve çubuk kuvveti ifadelerinin aynı temel mantıkla oluşturulmasına dayanarak von Karman-Christensen ve Benscoter teorileri arasında belirgin bir farklılık olmadığını söyleyebiliriz.

## 2.11 En Kesitlerin Geometrik Özelliklerinin Belirlenmesi

Bir en kesitin geometrik özelliklerinin belirlenmesini, denklemlerin daha basit formlarda elde edildiği ve her şekil değiştirme halinin diğerlerinden bağımsız tek başına incelenebildiği asal koordinat sistemlerinin kullanılmasının hesapları kolaylaştıracağını dikkate alarak üç bölüme ayırabiliriz:

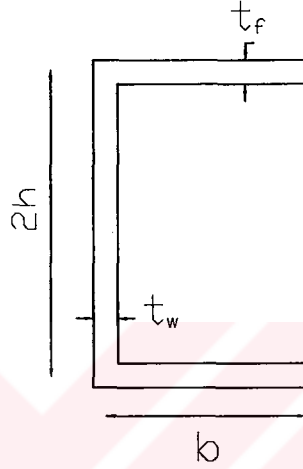
1) En kesitin ağırlık merkezi, asal sektörel orijini ve dönme merkezi ile asal kartezyen eksenlerin doğrultusunun belirlenmesi ve problemin çözümüne uygun bir  $s_i$  koordinatının seçimi. Bazı durumlarda, en kesiti oluşturan her eleman üzerinde bir  $s_i$  koordinatı kullanmak hesapları kolaylaştırabilir.

2) Asal eksen takımlarında, en kesiti oluşturan her elemana ait  $X$ ,  $Y$ ,  $R$  koordinatlarının ve kapalı en kesitler için  $F_s$  fonksiyonlarının belirlenmesi.

3) Çubuk kuvvetleri ve gerilmelerin elde edilmesinde kullanılacak  $\Omega$ ,  $A$ ,  $J$ ,  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_{\Omega\Omega}$ ,  $A^s$ ,  $S_x^s$ ,  $S_y^s$  ve  $S_{\Omega}^s$ , en kesit fonksiyonlarının bulunması.

Aşağıda açık ve kapalı en kesitler için birer örnek ele alınacaktır. Açık en kesit örneğinde, temel çubuk mukavemetinden bilindiği varsayılarak eğilme ve St. Venant burulmasıyla ilgili büyüklükler hesaplanmamıştır.

### 2.11.1 Açık En Kesit Örneği: U Profil



Şekil 2.24 U profilin boyutları

Şekil 2.24'de bir U profil görülmektedir. Simetri sebebiyle,  $G$  ağırlık merkezi,  $P_a$  dönme merkezi ve  $O_a$  asal sektörel merkez,  $x$  ekseni üzerinde yer alır.

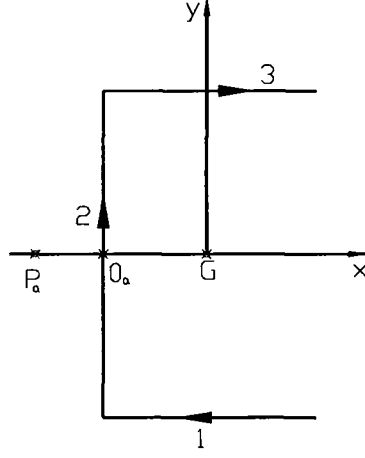
(2.90) denkleminde ağırlık merkezinin en kesitin gövdesine göre konumu,

$$x_G = \frac{b^2 t_f}{2b t_f + h t_w} \quad (2.149)$$

şeklindedir.

Şekil 2.25'de görüldüğü gibi en kesit üç elemandan oluşmaktadır. Hesabı kolaylaştırmak için her eleman üzerinde bir  $s_i$  koordinatı ve Bölüm 2.7'de anlatıldığı şekilde asal dönme merkezinin konumunun belirlenmesi için  $O_a$  noktası üzerinde yardımcı bir  $P$  dönme noktası alalım.

Elemanlar için  $r$  değerleri  $r_1 = r_2 = h$  ve  $r_3 = 0$  ise (2.6) denkleminde çarpılma fonksiyonları,



Şekil 2.25 Eleman koordinatlarının yönü

$$\begin{aligned}
 (1) \quad 0 \leq s_1 \leq b & \quad \omega_1 = -hds_1 + c_1 & \quad \omega_1 = h(b - s_1) \\
 (2) \quad 0 \leq s_2 \leq 2h & \quad \omega_2 = c_2 & \quad \omega_2 = 0 \\
 (3) \quad 0 \leq s_3 \leq b & \quad \omega_3 = -hds_3 + c_3 & \quad \omega_3 = -hs_3
 \end{aligned} \tag{2.150}$$

şeklindedir.

c sabitleri, birleşme noktalarında  $\omega$ 'nın sürekliliği sağlanacak ve (2) elemanı boyunca  $\omega$  sıfır olacak şekilde belirlenmiştir.

$O_a$  noktasına göre  $I_{\omega X}$ , (2.54d) denkleminde her eleman için bulunan değerlerin toplanmasıyla elde edilir.

$$I_{\omega X1} = \int_0^b h(b - s_1)hds_1 = -\frac{h^2 b^2 t_f}{2}, \quad I_{\omega X2} = 0, \quad I_{\omega X3} = -\int_0^b hs_3 ds_3 = -\frac{h^2 b^2 t_f}{2} \tag{2.151}$$

$$I_{\omega X} = \sum_i I_{\omega Xi} = -h^2 b^2 t_f \tag{2.152}$$

(2.54a) denkleminde X eksenine göre atalet momentini veren,

$$I_X = 2 \left( \frac{bt_f^3}{12} + bt_f h^2 \right) + \frac{2h^3 t_w}{3} \tag{2.153}$$

ifadesinde  $t_f^3$ 'l  terimin ihmal edilmesiyle, (2.84) ve (2.153) denklemlerinden asal dönme noktasının ve kayma merkezinin konumu,

$$e = -\frac{3b^2 t_f}{6bt_f + 2ht_w} \quad (2.154)$$

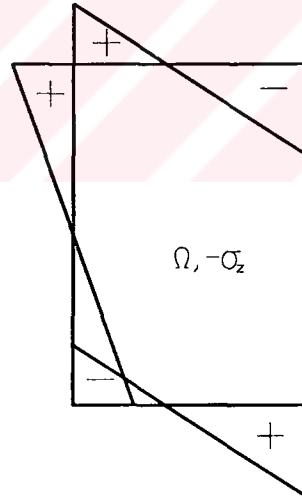
olarak elde edilir.

Asal dönme noktasına göre çarpılma fonksiyonlarının değerleri  $R_1 = R_2 = h$   $R_3 = -e$  için,

$$\Omega_1 = h(b - s_1 - e) \quad \Omega_2 = e(s_2 - h) \quad \Omega_3 = h(e - s_3) \quad (2.155)$$

 eklindedir.

$\Omega$ 'nın en kesit üzerindeki dağılımı  ekil 2.26'da gösterilmiştir.  arpılmaya bağlı normal gerilmelerinin dağılımı da (2.19) denkleminde görüleceği gibi  $\Omega$  ile benzerlik gösterir.



Şekil 2.26  arpılma fonksiyonu ve normal gerilme dağılımı

(2.54f) denkleminde en kesitin çarpılma sabiti, her eleman için (2.155) denklemleri kullanılarak bulunan değerlerin toplanmasıyla elde edilir.

$$I_{\Omega\Omega_1} = h^2 \left( \frac{b^3}{3} + be^2 - b^2 e \right) t_f, \quad I_{\Omega\Omega_2} = \frac{2}{3} e^2 h^3 t_w, \quad I_{\Omega\Omega_3} = h^2 \left( \frac{b^3}{3} + be^2 - b^2 e \right) t_f \quad (2.156)$$

$$I_{\Omega\Omega} = \sum_i I_{\Omega\Omega} 2h^2 \left( \left( \frac{b^3}{3} + be^2 - b^2 e \right) t_f + \frac{eh}{3} t_w \right) \quad (2.157)$$

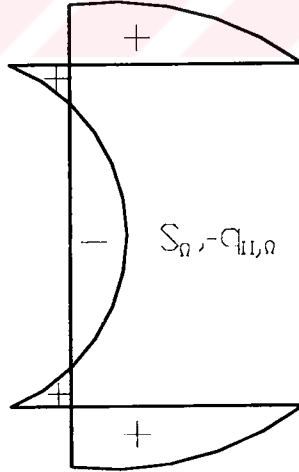
Sektörel momentin en kesit üzerindeki değişimi, Bölüm 2.3’de anlatıldığı şekilde (2.25d) denklemiyle hesaplanır.

$$S_{\Omega 3} = \int_{s_3}^b \Omega_3 t_f ds_3 = ht_f \left( e(b - s_3) - \frac{b^2 - s_3^2}{2} \right) \quad (2.158a)$$

$$S_{\Omega 2} = S_{\Omega 3}(0) + \int_{s_2}^{2h} \Omega_3 t_w ds_2 = bht_f \left( e - \frac{b}{2} \right) + et_w \left( \frac{s_2^2}{2} - hs_2 \right) \quad (2.158b)$$

$$S_{\Omega 1} = S_{\Omega 2}(0) + \int_{s_1}^b \Omega_1 t_f ds_1 = ht_f \left( es_1 + \frac{s_1^2}{2} - bs_1 \right) \quad (2.158c)$$

Şekil 2.27’de, sektörel momentin değişimi gösterilmiştir. Çarpılma kayma akımı da (2.26) denklemine göre sektörel momentle orantılıdır.



Şekil 2.27 Sektörel moment ve kayma akımının dağılımı

Çarpılma kayma akımlarının elemanlar üzerinde bileşkesinin oluşturduğu kesme kuvvetleri (2.93b) denklemine göre,

$$T_1 = \int_0^b q_1 ds_1 = \frac{M'_\Omega}{I_{\Omega\Omega}} h t_f b^2 \left( \frac{b}{3} - \frac{e}{2} \right) \quad (2.159a)$$

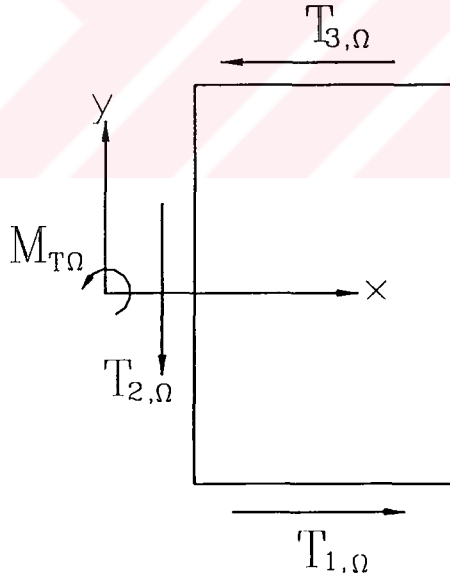
$$T_2 = \int_0^b q_2 ds_2 = \frac{M'_\Omega}{I_{\Omega\Omega}} (h^2 b t_f (b - 2e) - \frac{2}{3} h^3 e t_w) \quad (2.159b)$$

$$T_3 = \int_0^b q_3 ds_3 = \frac{M'_\Omega}{I_{\Omega\Omega}} h t_f b^2 \left( \frac{b}{3} - \frac{e}{2} \right) = T_1 \quad (2.159c)$$

şeklindedir. Kesme kuvvetleri ve kuvvetlerin dönme merkezine göre momentlerinin oluşturduğu,

$$M_{T\Omega} = T_1 2h - T_2 e \quad (2.160)$$

çarpılma burulma momenti, Şekil 2.28'de gösterilmiştir.

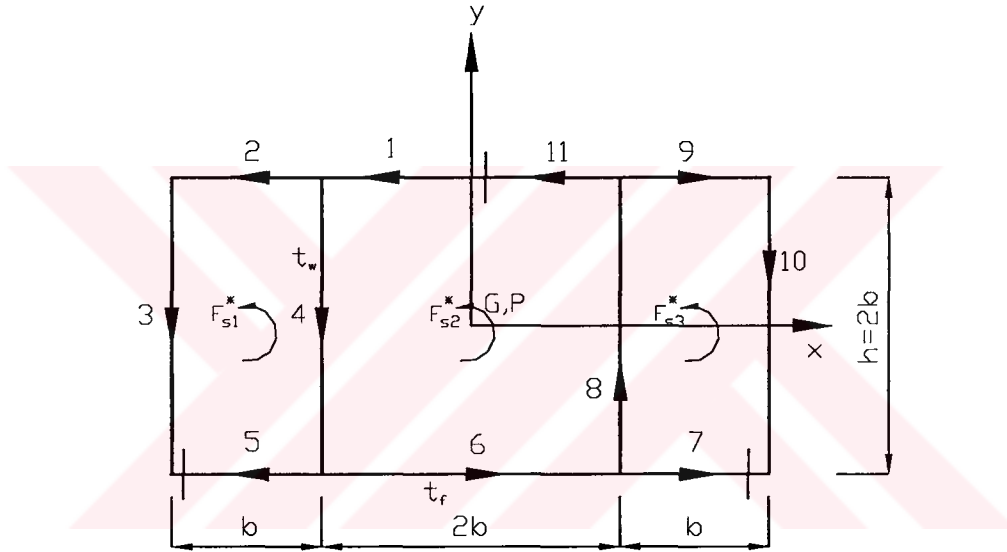


Şekil 2.28 Kayma akımlarının oluşturduğu kesme kuvvetleri ve burulma momenti

### 2.11.2 Kapalı En Kesit Örneği: Üç Hücreli Simetrik En Kesit

Şekil 2.29'da üç hücre ve on elemandan oluşan ve boyutları  $h = 2b$ ,  $t_w = t_f = t$  olarak verilen simetrik bir kapalı en kesit gösterilmiştir. Bölüm 2.3'de anlatıldığı şekilde  $s$  koordinatının doğrultusu seçilmiş ve en kesit 1, 5 ve 7 numaralı elemanlarda kesilerek açık hale getirilmiştir. Kesim sonucunda eleman sayısı bir artmıştır.

Simetri sebebiyle en kesitin ağırlık merkezi ve dönme merkezi çakışır. Hesaplamalar sırasında önceki örnekte olduğu gibi, her eleman üzerinde bir  $s_i$  koordinatı alınacaktır.



Şekil 2.29 Üç hücreli kapalı en kesit

İlk olarak  $F_s$ , St. Venant kayma akımı fonksiyonlarını belirleyelim. Bölüm 2.2'de anlatıldığı gibi, fonksiyonların her kapalı hücre için elde edilmesi ve sonrasında elemanlar üzerindeki fonksiyonların belirlenmesi, süreklilik denklemlerinin kullanılması gereğini ortada kaldırarak hesabı kolaylaştırır.

(2.13) denkleminin her hücre için yazılmasıyla,

$$(1) \quad 2F_{s1}^* \left[ \frac{h}{t_w} + \frac{b}{t_f} \right] - F_{s2}^* \frac{h}{t_w} = 2bh \quad (2.161a)$$

$$(2) \quad -F_{s1}^* \frac{h}{t_w} + 2F_{s2}^* \left[ \frac{h}{t_w} + \frac{2b}{t_f} \right] - F_{s3}^* \frac{h}{t_w} = 4bh \quad (2.161b)$$

$$(3) \quad -F_{s2}^* \frac{h}{t_w} + 2F_{s3}^* \left[ \frac{h}{t_w} + \frac{b}{t_f} \right] = 2bh \quad (2.161c)$$

denklemleri elde edilir. Buradan St. Venant kayma akımı fonksiyonları,

$$F_{s1}^* = F_{s3}^* = 1.2bt \quad F_{s2}^* = 1.6bt \quad (2.162)$$

olarak belirlenir. Elemanlar üzerindeki fonksiyon değerleri, s koordinatı için seçilen yöne bağlı olarak,

$$F_{s1} = F_{s6} = F_{s11} = F_{s2}^* = 1.6bt \quad (2.163a)$$

$$F_{s2} = F_{s3} = F_{s7} = F_{s1}^* = 1.2bt \quad (2.163b)$$

$$F_{s5} = F_{s9} = F_{s10} = -F_{s1}^* = -1.2bt \quad (2.163c)$$

$$F_{s4} = F_{s8} = F_{s2}^* - F_{s1}^* = 0.4bt \quad (2.163d)$$

şeklindedir.

Tablo 2.2 R koordinatları

| El. No | 1   | 2   | 3  | 4 | 5    | 6   | 7   | 8 | 9    | 10  | 11  |
|--------|-----|-----|----|---|------|-----|-----|---|------|-----|-----|
| R      | h/2 | h/2 | 2b | b | -h/2 | h/2 | h/2 | B | -h/2 | -2b | h/2 |

(2.15), (2.163) denklemleri ve Tablo 2.2'deki R koordinatlarından her eleman için çarpılma fonksiyonu,

$$(1) \quad 0 \leq s_1 \leq b \quad \Omega_1 = \int_0^{s_1} \left( \frac{h}{2} - \frac{F_{s1}}{t_f} \right) ds_1 = -0.6bs_1 \quad (2.164a)$$

$$(2) \quad 0 \leq s_2 \leq b \quad \Omega_2 = \Omega_1(b) + \int_0^{s_2} \left( \frac{h}{2} - \frac{F_{s_2}}{t_f} \right) ds_2 = -0.6b^2 - 0.2bs_2 \quad (2.164b)$$

$$(3) \quad 0 \leq s_3 \leq h \quad \Omega_3 = \Omega_2(b) + \int_0^{s_3} \left( 2b - \frac{F_{s_3}}{t_w} \right) ds_3 = -0.8b^2 + 0.8bs_3 \quad (2.164c)$$

$$(4) \quad 0 \leq s_4 \leq h \quad \Omega_4 = \Omega_1(b) + \int_0^{s_4} \left( b - \frac{F_{s_4}}{t_w} \right) ds_4 = -0.6b^2 + 0.6bs_4 \quad (2.164d)$$

$$(5) \quad 0 \leq s_5 \leq b \quad \Omega_5 = \Omega_4(h) + \int_0^{s_5} \left( -\frac{h}{2} - \frac{F_{s_5}}{t_f} \right) ds_5 = 0.6b^2 + 0.2bs_5 \quad (2.164e)$$

$$(6) \quad 0 \leq s_6 \leq 2b \quad \Omega_6 = \Omega_4(h) + \int_0^{s_6} \left( \frac{h}{2} - \frac{F_{s_6}}{t_f} \right) ds_6 = 0.6b^2 - 0.6bs_6 \quad (2.164f)$$

$$(7) \quad 0 \leq s_7 \leq b \quad \Omega_7 = \Omega_6(2b) + \int_0^{s_7} \left( \frac{h}{2} - \frac{F_{s_7}}{t_f} \right) ds_7 = -0.6b^2 - 0.2bs_7 \quad (2.164g)$$

$$(8) \quad 0 \leq s_8 \leq h \quad \Omega_8 = \Omega_6(2b) + \int_0^{s_8} \left( b - \frac{F_{s_8}}{t_w} \right) ds_8 = -0.6b^2 + 0.6bs_8 \quad (2.164h)$$

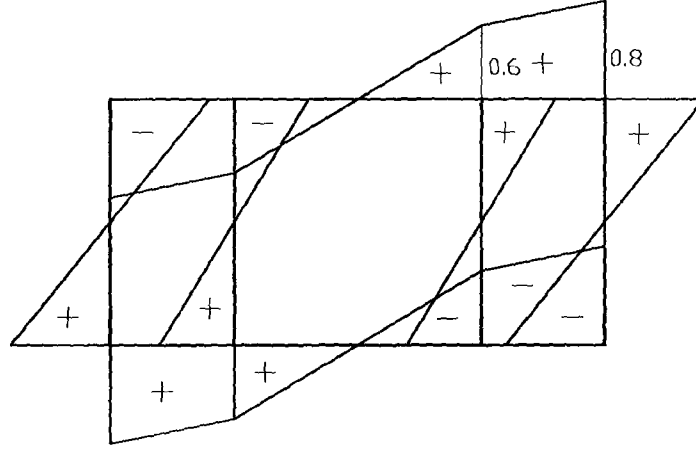
$$(9) \quad 0 \leq s_9 \leq b \quad \Omega_9 = \Omega_8(h) + \int_0^{s_9} \left( -\frac{h}{2} - \frac{F_{s_9}}{t_f} \right) ds_9 = 0.6b^2 + 0.2bs_9 \quad (2.164i)$$

$$(10) \quad 0 \leq s_{10} \leq h \quad \Omega_{10} = \Omega_9(b) + \int_0^{s_{10}} \left( -2b - \frac{F_{s_{10}}}{t_w} \right) ds_{10} = 0.8b^2 - 0.8bs_{10} \quad (2.164j)$$

$$(11) \quad 0 \leq s_{11} \leq b \quad \Omega_{11} = \Omega_8(h) + \int_0^{s_{11}} \left( \frac{h}{2} - \frac{F_{s_{11}}}{t_f} \right) ds_{11} = 0.6b^2 - 0.2bs_{11} \quad (2.164k)$$

şeklinde elde edilir. Şekil 2.30'da çarpılma fonksiyonunun en kesitteki değişimi gösterilmiştir.

Kayma akımının bulunması için (2.95) denkleminde göre,  $S_x^s$ ,  $S_y^s$  statik momentleri ve  $S_\Omega^s$  sektörel momentleri ile  $K_x$ ,  $K_y$ ,  $K_\Omega$  kayma akımı fonksiyonları belirlenmelidir.



Şekil 2.30 Çarpılma fonksiyonu

(2.25b) denkleminde  $S_X^s$ ,

$$S_{X11}^s = \int_{s_{11}}^b \frac{h}{2} t_f ds_{11} = b(b - s_{11})t \quad (2.165a)$$

$$S_{X10}^s = \int_{s_{10}}^h (s_{10} - \frac{h}{2}) t_w ds_{10} = \frac{s_{10}}{2} (s_{10} - 2b)t \quad (2.165b)$$

$$S_{X9}^s = S_{X10}^s(0) + \int_{s_9}^b \frac{h}{2} t_f ds_9 = b(b - s_9)t \quad (2.165c)$$

$$S_{X8}^s = S_{X11}^s(0) + S_{X9}^s(0) - \int_{s_8}^h (s_8 - \frac{h}{2}) t_w ds_8 = 2b^2t - \frac{s_8}{2} (s_8 - 2b)t \quad (2.165d)$$

$$S_{X7}^s = - \int_{s_7}^b \frac{h}{2} t_f ds_7 = -b(b - s_7)t \quad (2.165e)$$

$$S_X^s = S_{X8}^s(0) + S_{X7}^s(0) - \int_{s_6}^{2b} \frac{h}{2} t_f ds_6 = b^2t - b(2b - s_6)t \quad (2.165f)$$

$$S_{X5}^s = - \int_{s_5}^b \frac{h}{2} t_f ds_5 = -b(b - s_5)t \quad (2.165g)$$

$$S_{X4}^s = S_{X6}^s(0) + S_{X5}^s(0) + \int_{s_4}^h (s_4 - \frac{h}{2}) t_w ds_4 = -2b^2 t - \frac{s_4}{2} (s_4 - 2b)t \quad (2.165h)$$

$$S_{X3}^s = \int_{s_3}^h (s_3 - \frac{h}{2}) t_w ds_3 = \frac{s_3}{2} (s_3 - 2b)t \quad (2.165i)$$

$$S_{X2}^s = S_{X3}^s + \int_{s_2}^b \frac{h}{2} t_f ds_2 = b(b - s_2)t \quad (2.165j)$$

$$S_{X1}^s = S_{X4}^s(0) + S_{X2}^s(0) + \int_{s_1}^b \frac{h}{2} t_f ds_1 = -b^2 t + b(b - s_1)t \quad (2.165k)$$

şeklindedir.

$K_X$  fonksiyonları her hücre için (2.37b) denkleminin yazılmasıyla elde edilir. İntegrasyon yönünün z eksenini etrafında pozitif dönme yönü alınmasıyla  $S_X^s$ 'in hücrelerdeki toplamı,

$$S_X^s(I) = \oint_{C_I} S_X^s ds = S_X^s(2) + S_X^s(3) - S_X^s(5) - S_X^s(4) = 5b^3 t \quad (2.166a)$$

$$S_X^s(II) = \oint_{C_{II}} S_X^s ds = S_X^s(1) + S_X^s(4) + S_X^s(6) + S_X^s(8) + S_X^s(11) = 0 \quad (2.166b)$$

$$S_X^s(III) = \oint_{C_{III}} S_X^s ds = S_X^s(7) - S_X^s(10) - S_X^s(9) - S_X^s(8) = -5b^3 t \quad (2.166c)$$

olur ve her hücre için yazılan,

$$(1) \quad 2K_{X1}^* \left[ \frac{h}{t_w} + \frac{b}{t_f} \right] - K_{X2}^* \frac{h}{t_w} = 5b^3 \quad (2.167a)$$

$$(2) \quad -K_{X1}^* \frac{h}{t_w} + K_{X2}^* \left[ \frac{h}{t_w} + \frac{2b}{t_f} \right] - K_{X3}^* \frac{h}{t_w} = 0 \quad (2.167b)$$

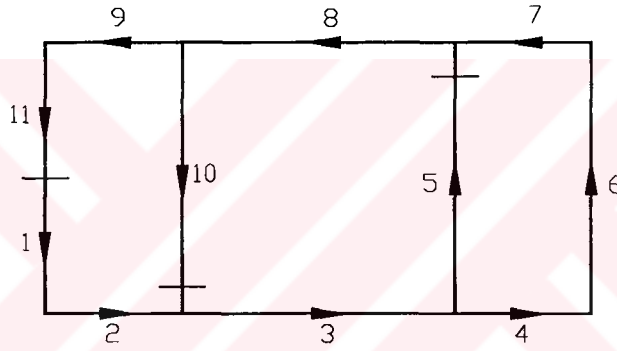
$$(3) \quad -K_{x2}^* \frac{h}{t_w} + 2K_{x3}^* \left[ \frac{h}{t_w} + \frac{b}{t_f} \right] = -5b^3 \quad (2.167c)$$

denklemlerinden  $K_x^*$  fonksiyonları,

$$K_{x1}^* = 0.833b^2t, \quad K_{x2}^* = 0, \quad K_{x3}^* = -0.833b^2t \quad (2.168)$$

şeklinde elde edilir.

$S_Y^s$  değerleri de benzer şekilde hesaplanır. Bazı uyumsuzlukları engellemek amacıyla kesim noktaları ve s koordinatının doğrultusu Şekil 2.31’de görüldüğü gibi değiştirilmiştir.



Şekil 2.31  $S_Y^s$  'nin hesaplanmasında kullanılan s koordinatı

(2.25c) denkleminde  $S_Y^s$  değerleri,

$$S_{Y11}^s = - \int_{s_{11}}^{h/2} 2bt_w ds_{11} = -2b(b - s_{11})t \quad (2.169a)$$

$$S_{Y10}^s = - \int_{s_{10}}^h bt_w ds_{10} = -b(2b - s_{10})t \quad (2.169b)$$

$$S_{Y9}^s = S_{Y11}^s(0) - \int_{s_9}^b (b + s_9)t_f ds_9 = -\frac{7}{2}b^2t + \frac{s_9}{2}(2b + s_9)t \quad (2.169c)$$

$$S_{Y8}^s = S_{Y10}^s(0) + S_{Y9}^s(0) + \int_{s_8}^{2b} (b - s_8) t_f ds_8 = -\frac{11}{2} b^2 t - \frac{s_8}{2} (2b - s_8) t \quad (2.169d)$$

$$S_{Y7}^s = S_{Y8}^s(0) + \int_{s_7}^b (2b - s_7) t_f ds_7 = -4b^2 t - \frac{s_7}{2} (4b - s_7) t \quad (2.169e)$$

$$S_{Y6}^s = S_{Y7}^s(0) + \int_{s_6}^h 2bt_w ds_6 = -4b^2 t + 2b(2b - s_6) t \quad (2.169f)$$

$$S_{Y5}^s = \int_{s_5}^h bt_w ds_5 = b(2b - s_5) t \quad (2.169g)$$

$$S_{Y4}^s = S_{Y6}^s(0) + \int_{s_4}^h (b + s_4) t_f ds_4 = \frac{3}{2} b^2 t - \frac{s_4}{2} (2b + s_4) t \quad (2.169h)$$

$$S_{Y3}^s = S_{Y5}^s(0) + S_{Y4}^s(0) + \int_{s_3}^{2b} (s_3 - b) t_f ds_3 = \frac{7}{2} b^2 t - \frac{s_3}{2} (s_3 - 2b) t \quad (2.169i)$$

$$S_{Y2}^s = S_{Y3}^s(0) - \int_{s_2}^b (2b - s_2) t_f ds_2 = 2b^2 t + \frac{s_2}{2} (4b - s_2) t \quad (2.169j)$$

$$S_{Y1}^s = S_{Y2}^s(0) - \int_{s_1}^{h/2} 2bt_w ds_1 = 2b^2 t - 2b(b - s_1) t \quad (2.169k)$$

ve hücrelerdeki toplamalar,

$$S_Y^s(I) = 2b^3 t \quad , \quad S_Y^s(II) = -4b^3 t \quad , \quad S_Y^s(III) = -10b^3 t \quad (2.170)$$

olarak elde edilir.  $K_Y^*$  fonksiyonları ise (2.37c) denkleminde,

$$K_{Y1}^* = 0 \quad , \quad K_{Y2}^* = -b^2 t \quad , \quad K_{Y3}^* = -2b^2 t \quad (2.171)$$

şeklindedir.

(2.25d) denkleminde  $S_{\Omega}^s$  değerleri,

$$S_{\Omega 11} = \int_{s_{11}}^b (0.6b^2 - 0.6bs_{11})t_f ds_{11} = 0.3b^3 - 0.6b^2s_{11} + 0.3bs_{11}^2)t \quad (2.172a)$$

$$S_{\Omega 10} = \int_{s_{10}}^h 0.8b(b - s_{10})t_w ds_{10} = -0.4b(2b - s_{10})s_{10}t \quad (2.172b)$$

$$S_{\Omega 9} = S_{\Omega 10}(0) + \int_{s_9}^b (0.6b^2 - 0.2bs_9)t_f ds_9 = (0.7b^3 - 0.6b^2s_9 - 0.1bs_9^2)t \quad (2.172c)$$

$$S_{\Omega 8} = S_{\Omega 11}(0) + S_{\Omega 9}(0) - \int_{s_8}^h 0.6b(b - s_8)t_w ds_8 = (b^3 + 0.6b^2s_8 - 0.3bs_8^2)t \quad (2.172d)$$

$$S_{\Omega 7} = - \int_{s_7}^b (0.6b^2 + 0.2bs_7)t_f ds_7 = (-0.7b^3 + 0.6b^2s_7 + 0.1bs_7^2)t \quad (2.172e)$$

$$S_{\Omega 6} = S_{\Omega 8}(0) + S_{\Omega 7}(0) + \int_{s_6}^{2b} 0.6b(b - s_6)t_f ds_6 = (0.3b^3 - 0.6b^2s_6 + 0.3bs_6^2)t \quad (2.172f)$$

$$S_{\Omega 5} = \int_{s_5}^b (0.6b^2 + 0.2bs_5)t_f ds_7 = (0.7b^3 - 0.6b^2s_5 - 0.1bs_5^2)t \quad (2.172g)$$

$$S_{\Omega 4} = S_{\Omega 6}(0) + S_{\Omega 5}(0) - \int_{s_4}^h 0.6b(b - bs_4)t_w ds_4 = (b^3 + 0.6b^2s_4 - 0.3bs_4^2)t \quad (2.172h)$$

$$S_{\Omega 3} = - \int_{s_3}^h 0.8b(b - s_3)t_w ds_3 = 0.4b(2b - s_3)s_3t \quad (2.172i)$$

$$S_{\Omega 2} = S_{\Omega 3}(0) - \int_{s_2}^b (0.6b^2 + 0.2bs_2)t_f ds_2 = (-0.7b^3 + 0.6b^2s_2 + 0.1bs_2^2)t \quad (2.172j)$$

$$S_{\Omega 1} = S_{\Omega 4}(0) + S_{\Omega 2}(0) - \int_{s_1}^b 0.6bs_1t_f ds_1 = 0.3bs_1^2t \quad (2.172k)$$

ve hücrelerdeki toplamalar,

$$S_{\Omega}^*(I) = S_{\Omega}^*(III) = -2.6b^4t \quad , \quad S_{\Omega}^*(II) = 5.2b^4t \quad (2.173)$$

şeklindedir. (2.37d) denkleminden  $K_{\Omega}^*$  fonksiyonları,

$$K_{\Omega 1}^* = -0.26b^3t \quad , \quad K_{\Omega 2}^* = -0.52b^3t \quad , \quad K_{\Omega 3}^* = -0.26b^3t \quad (2.174)$$

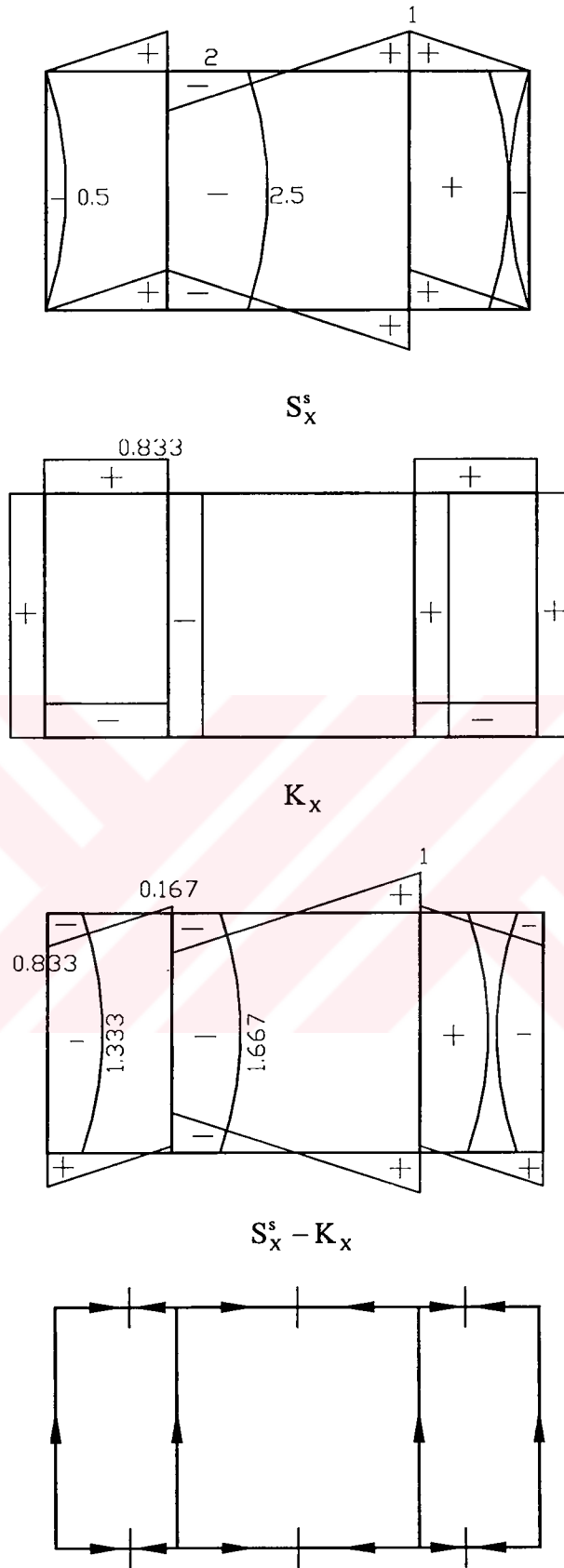
olarak elde edilir.

Tablo 2.3’de kayma akımı fonksiyonlarının elemanlar üzerindeki değerleri verilmiştir.

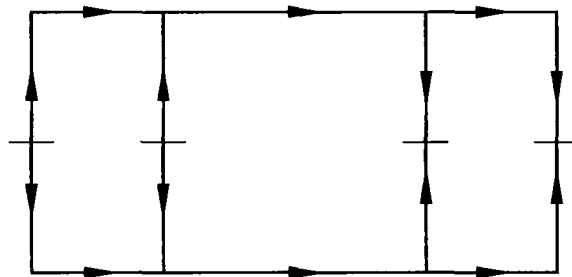
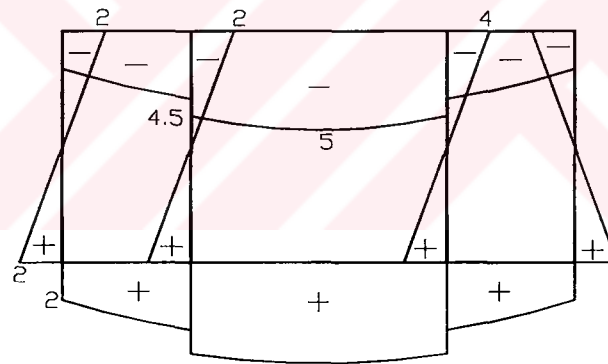
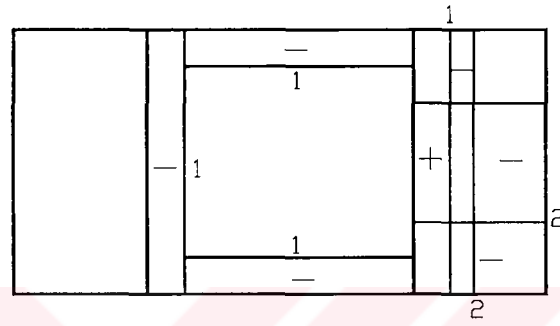
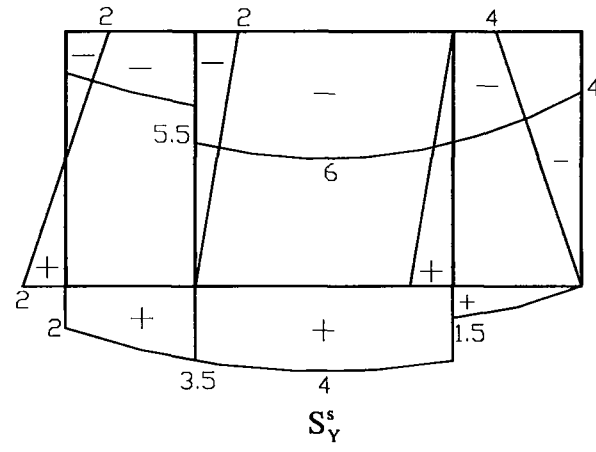
Tablo 2.3 Elemanlar üzerindeki K fonksiyonları

|              | 1    | 2     | 3     | 4      | 5      | 6    | 7      | 8     | 9     | 10    | 11   |
|--------------|------|-------|-------|--------|--------|------|--------|-------|-------|-------|------|
| $K_x$        | 0    | 0.833 | 0.833 | -0.833 | -0.833 | 0    | -0.833 | 0.833 | 0.833 | 0.833 | 0    |
| $K_y$        | 0    | 0     | -1    | -1     | 1      | -1   | -1     | -1    | 0     | -1    | 0    |
| $K_{\Omega}$ | 0.52 | -0.26 | -0.26 | 0.78   | -0.26  | 0.52 | 0.26   | 0.78  | 0.26  | 0.26  | 0.52 |

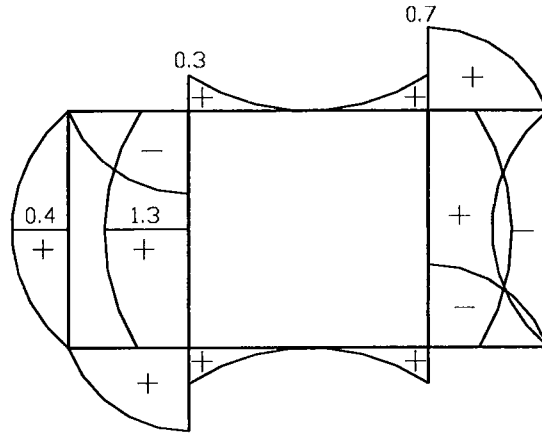
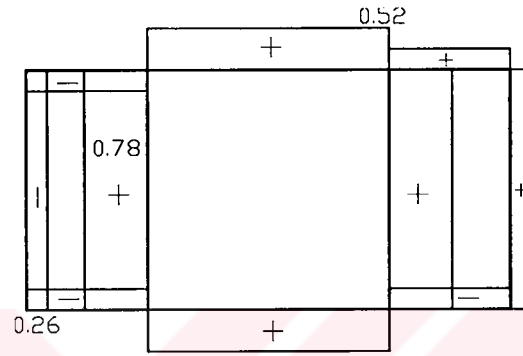
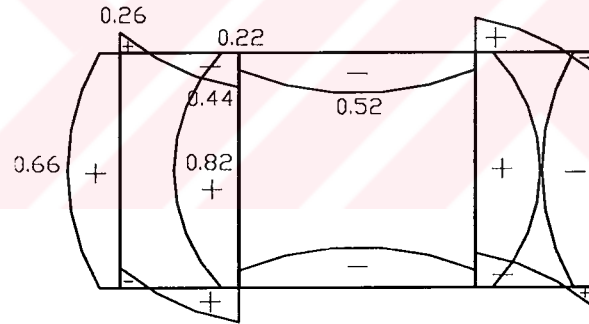
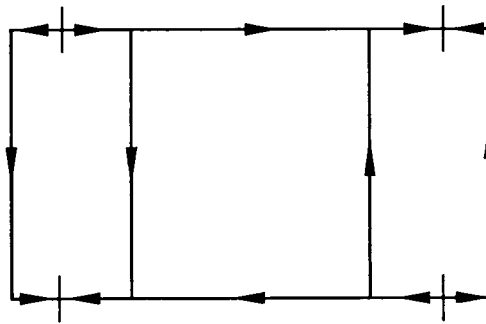
Aşağıdaki şekillerde, (2.165), (2.169), (2.172) denklemlerinden elde edilen dağılma fonksiyonları, Tablo 2.3’den elde edilen kayma akımı fonksiyonları ve (2.96) denklemine göre kayma akımlarının belirleyen fark değerleri çizilmiştir. Her grup içindeki dördüncü şekil, oluşan kayma akımlarının yönlerini göstermektedir.



Şekil 2.32  $S_x^s$ ,  $K_x$ ,  $S_x^s - K_x$  fonksiyonlarının dağılımı



Şekil 2.33  $S_Y^s$ ,  $K_Y$ ,  $S_Y^s - K_Y$  fonksiyonlarının dağılımı

 $S_{\Omega}^s$  $K_{\Omega}$  $S_{\Omega}^s - K_{\Omega}$ Şekil 2.34  $S_{\Omega}^s, K_{\Omega}, S_{\Omega}^s - K_{\Omega}$  fonksiyonlarının dağılımı

## BÖLÜM III

### MOMENT METODUNUN İNCE ÇEPERLİ ÇUBUKLARIN EĞİLME- BURULMA TEORİSİNE UYGULANMASI

#### 3.1 Ağırlıklı Artık Metodları

Diferansiyel denklemlere ait analitik çözümlerin oldukça zor elde edildiği veya çözümün mümkün olmadığı durumlarda çözümün, fonksiyonlardan oluşan bir formda yaklaşık olarak elde edildiği analitik metodlardan yararlanılabilir. Bu metodlardan birisi olan ‘Ağırlıklı Artık Metodları (AAM)’, yaklaşık çözüme, gerçek çözüm ile arasındaki farkı (artık) çeşitli yollarla minimize ederek ulaşmaya çalışır. Mesela, AAM’dan ‘Kollakasyon’, artığın bazı noktalarda sıfırlanmasıyla, ‘Galerkin’ artığın deneme fonksiyonlu integralinin sıfırlanmasıyla minimizasyonu gerçekleştirir. [33].

AAM’da uygulanan genel adımlar şu şekildedir [34]:

$x$ , bağımsız değişken vektörü ve  $L$  bir diferansiyel operatörü ise, bir  $D$  alanı ve alanı çevreleyen  $B$  sınırında tanımlanan herhangi bir diferansiyel denklem,

$$Lu = f(x) \quad D'de \quad u_j = g_j(x) \quad B'de \quad (3.1)$$

ile verilsin.

$$u \cong U_n = \alpha_i \Phi_i(x) \quad i = 1, \dots, n \quad (3.2)$$

şeklinde  $u$ 'ya yaklaşacak bir  $U_n$  fonksiyonu,  $\Phi_i$  deneme fonksiyonları ve  $\alpha_i$  sabitleriyle tanımlanır. Deneme fonksiyonları genellikle, diferansiyel denklemin

sınır şartlarını sağlayacak şekilde seçilen polinomlar ya da trigonometrik, Legendre vb. fonksiyonlardır. Seçimde uygulanan diğer yöntemler, deneme fonksiyonlarının diferansiyel denklemi sağlayacak şekilde belirlenmesi ile ne diferansiyel denklemi ne de sınır şartlarını sağlamayan fonksiyonların seçilmesidir [35].

Eğer deneme fonksiyonu sınırların sağlanması şeklinde bulunduysa, bir  $\varepsilon$  hata fonksiyonu (artık),

$$\varepsilon_n = LU_n - f(x) \quad (3.3)$$

ile tanımlanır. Deneme fonksiyonu diferansiyel denklemi sağlayacak şekilde belirlendiyse, hata fonksiyonu sınırdan aranacaktır.

Tüm AAM'da  $\alpha_i$  sabitleri, artığın D alanında her AAM için farklı olan bir  $w$  ağırlığı kullanılarak sıfırlanmasıyla bulunur.

$$\langle w_i, \varepsilon_n \rangle = \int_D \varepsilon_n w_i dD = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (3.4)$$

eşitliğinden,  $n$  lineer denklem elde edilir. Bu denklem takımının çözümüyle  $\alpha_i$ 'ler belirlenir ve  $u$ 'nun  $U_n$  şeklinde yaklaşık çözümü elde edilir.

Bir AAM olan moment metodunda ağırlık fonksiyonu,

$$w_i = x^{i-1} \quad i = 1, \dots, n \quad (3.5)$$

şeklindedir. Yani çözüme artığın momentlerinin sıfırlanmasıyla yaklaşılr.

### 3.2 İnce Çeperli Çubukların Denge Denklemleri için Moment Metodu İfadeleri

Bölüm 2.5'de ince çeperli çubuklara ait diferansiyel denklemler,

$$E \begin{bmatrix} A & -S_x & -S_y & -S_\omega & 0 \\ -S_x & I_x & I_{xy} & I_{\omega x} & 0 \\ -S_y & I_{xy} & I_y & I_{\omega y} & 0 \\ -S_\omega & I_{\omega x} & I_{\omega y} & I_{\omega\omega} & -\frac{GJ}{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^m \\ V^{iv} \\ U^{iv} \\ \Phi^{iv} \\ \Phi^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_z \\ F_y + m'_x \\ F_x + m'_y \\ m_t + m'_\omega \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

şeklinde verilmişti.

$d/dz = D$  ile belirtilirse,  $L$  diferansiyel operatörü,

$$L = E \begin{bmatrix} A & -S_x & -S_y & -S_\omega & 0 \\ -S_x & I_x & I_{xy} & I_{\omega x} & 0 \\ -S_y & I_{xy} & I_y & I_{\omega y} & 0 \\ -S_\omega & I_{\omega x} & I_{\omega y} & I_{\omega\omega} & -\frac{GJ}{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D''' \\ D'' \\ D' \\ D' \\ D'' \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

olacaktır. Çubuk yerdeğiştirmeleri  $W$ ,  $V$ ,  $U$  ve  $\Phi$ ,  $Z_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) ile verilirse (3.6) denklemi,

$$LZ_i = F_i(z) \quad i = 1, \dots, 4 \quad (3.8)$$

olur. Bundan sonraki adımlar yukarıda belirtildiği gibidir.

$$Z_i \cong Z_{in} = \alpha_{ij} \Phi_{ij} \quad i = 1, \dots, 4 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.9)$$

$\Phi_{ij}$ : çözülecek problem için verilen sınır şartlarıyla belirlenen deneme fonksiyonu

$$\varepsilon_{in} = LZ_{in} - F_i \quad i = 1, \dots, 4 \quad (3.10)$$

$$\langle w_i, \varepsilon_{in} \rangle = \int_L \varepsilon_{in} z^{j-1} dz = 0 \quad i = 1, \dots, 4 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.11)$$

$4n$  sayıdaki denklemin çözülmesiyle  $\alpha_{ij}$  katsayıları elde edilir.

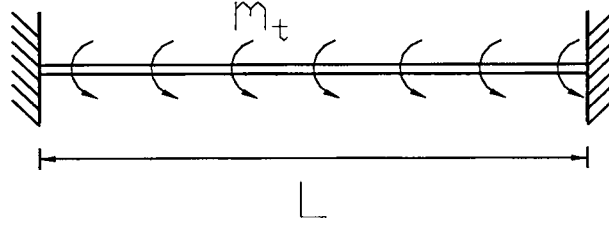
### 3.3 İnce Çeperli Çubukların Burulma Probleminin Moment Metoduyla Çözümü

İnce çeperli çubukların diferansiyel denge denklemlerine moment metodunun uygulamasına basit bir örnek olarak, burulma problemini ele alabiliriz. Bu problem Bölüm 2.9'da (2.104) denklemiyle,

$$EI_{\Omega\Omega}\Phi^{IV} - GJ\Phi'' = m_T + m'_\Omega \quad (3.12)$$

şeklinde verilmişti.

Şekil 3.1’de yayılı bir moment yükü etkisinde iki tarafından ankastre bağlı bir çubuk görülmektedir. Çubuğun  $GJ/EI_{\Omega\Omega}$  oranı 3.076 olarak verilmiştir.



Şekil 3.1 Yayılı moment yükü etkisindeki ankastre bağlı çubuk

Bu çubuğa ait burulma denklemi, bir  $\zeta = z/L$  değişkeni kullanılarak,

$$\Phi_\zeta^{IV} - \lambda^2 \Phi_\zeta'' = \frac{\lambda^2 L^2 m_T}{GJ} \quad (3.13)$$

şeklinde boyutsuz olarak verilebilir. Denklemden yer alan  $\lambda$  Bölüm 2.9’da,

$$\lambda^2 = \frac{GJ}{EI_{\Omega\Omega}} L^2 \quad (3.14)$$

ile tanımlanmıştır.

Problemin,

$$\zeta = 0,1 \text{ için } \Phi = \Phi'_\zeta = 0 \quad (3.15)$$

şeklindeki sınır şartlarından analitik çözümü,

$$\Phi = \frac{m_T L^2}{2\lambda^2 GJ} \left[ \lambda^2 z(1-z) - \lambda \sinh \lambda z + \frac{\lambda \sinh(1 - \cosh \lambda z)}{1 - \cosh \lambda} \right] \quad (3.16)$$

olarak elde edilir [28].

Bu problemin 1.,2. ve 3. derecelerden moment metoduyla çözümü ve L boyunun çeşitli değerleri için elde edilen değerlerin (3.16) analitik çözümüyle karşılaştırması aşağıda tablo ve grafikler şeklinde verilmiştir. Minimizasyona artığın sıfırıncı dereceden momenti alınarak başlanmış, çözüm elde edilemediği anda momentin derecesi bir artırılmıştır.

Çözüm sırasında (3.13) denkleminin sağ tarafı,

$$F = \frac{\lambda^2 L^2 m_T}{GJ} \quad (3.17)$$

şeklinde kısaltılmıştır.

### 1. Dereceden yaklaşım

Deneme fonksiyonu  $\Phi_1 = \alpha_1 z^2 (z-1)^2$

Hata fonksiyonu:  $\varepsilon = 24\alpha_1 - \lambda^2 \alpha_1 (12z^2 - 12z + 2) - F$

Hatanın minimizasyonu:  $\int_0^1 \varepsilon z^2 dz = 0 \quad \alpha_1 = \frac{5F}{120 - \lambda^2}$

### 2. Dereceden yaklaşım

Deneme fonksiyonu  $\Phi_2 = \alpha_1 z^2 (z-1)^2 + \alpha_2 z^3 (z-1)^3$

Hata fonksiyonu:

$$\varepsilon = 24\alpha_1 + \alpha_2 (360z^2 - 360z + 72) - \lambda^2 \{ \alpha_1 (12z^2 - 12z + 2) + \alpha_2 (30z^4 - 60z^3 + 36z^2 - 6z) \} - F$$

Hatanın minimizasyonu:  $\int_0^1 \varepsilon z^2 dz = 0 \quad 8\alpha_1 + 6\alpha_2 - \lambda^2 \left( \frac{\alpha_1}{15} - \frac{\alpha_2}{70} \right) = \frac{F}{3}$

$$\int_0^1 \varepsilon z^3 dz = 0 \quad 6\alpha_1 + 6\alpha_2 - \lambda^2 \left( \frac{\alpha_1}{10} - \frac{3\alpha_2}{140} \right) = \frac{F}{4}$$

### 3. Dereceden yaklaşım

Deneme fonksiyonu  $\Phi_3 = \alpha_1 z^2 (z-1)^2 + \alpha_2 z^3 (z-1)^3 + \alpha_3 z^4 (z-1)^4$

Hata fonksiyonu:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & 24\alpha_1 + \alpha_2 (360z^2 - 360z + 72) + \alpha_3 (1680z^4 - 3360z^3 + 2160z^2 - 480z + 24) - \\ & - \lambda^2 \{ \alpha_1 (12z^2 - 12z + 2) + \alpha_2 (30z^4 - 60z^3 + 36z^2 - 6z) + \\ & + \alpha_3 (56z^6 - 168z^5 + 180z^4 - 80z^3 + 12z^2) \} - F \end{aligned}$$

Hatanın minimizasyonu:

$$\int_0^1 \varepsilon z^4 dz = 0 \quad 4.8\alpha_1 + \frac{204}{35}\alpha_2 + \frac{4}{105}\alpha_3 - \lambda^2 \left( \frac{4\alpha_1}{35} - \frac{\alpha_2}{42} + \frac{2}{385} \right) = \frac{F}{5}$$

$$\int_0^1 \varepsilon z^5 dz = 0 \quad 4\alpha_1 + \frac{39}{7}\alpha_2 + \frac{2}{21}\alpha_3 - \lambda^2 \left( \frac{5\alpha_1}{42} - \frac{\alpha_2}{42} + \frac{\alpha_3}{198} \right) = \frac{F}{6}$$

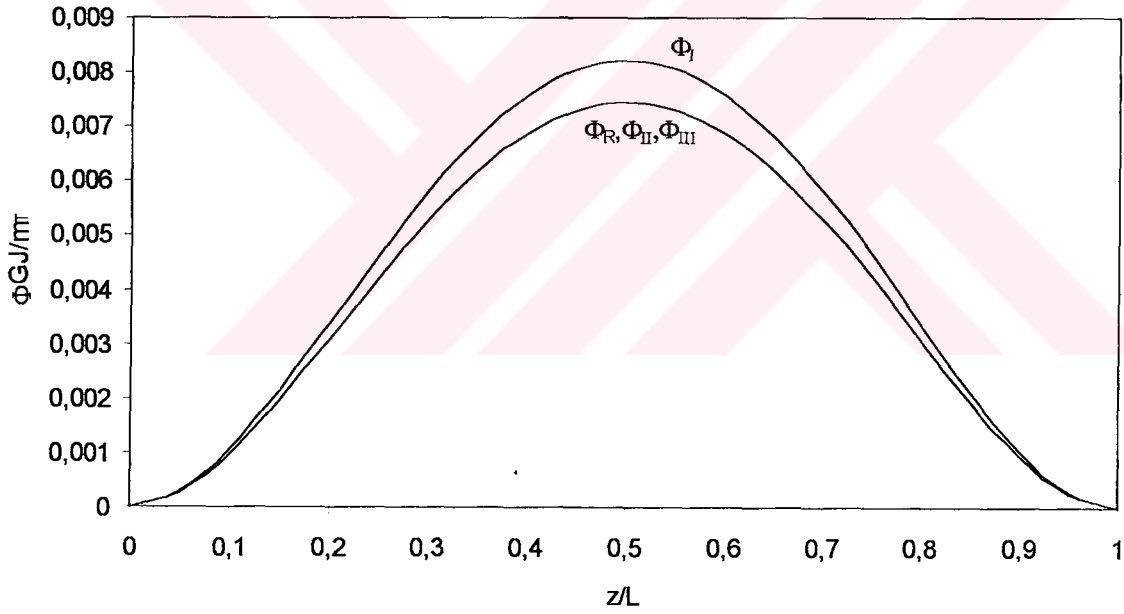
$$\int_0^1 \varepsilon z^6 dz = 0 \quad \frac{24}{7}\alpha_1 + \frac{32}{7}\alpha_2 + \frac{12}{77}\alpha_3 - \lambda^2 \left( \frac{5\alpha_1}{42} - \frac{\alpha_2}{44} + \frac{2\alpha_3}{429} \right) = \frac{F}{7}$$

Tablo 3.1 L değerleri için deneme fonksiyonu katsayıları

|    | $\Phi_1$     | $\Phi_2$     |              | $\Phi_3$     |              |              |
|----|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| L  | $\alpha_1/F$ | $\alpha_1/F$ | $\alpha_2/F$ | $\alpha_1/F$ | $\alpha_2/F$ | $\alpha_3/F$ |
| 1  | 0.042763     | 0.039676     | 0.0039807    | 0.039676     | 0.0039815    | 0.000216     |
| 2  | 0.046427     | 0.035058     | 0.013217     | 0.035038     | 0.013258     | 0.002702     |
| 4  | -            | 0.025930     | 0.031474     | 0.025551     | 0.032252     | 0.021619     |
| 8  | -            | 0.017628     | 0.048076     | 0.015447     | 0.052755     | 0.082647     |
| 12 | -            | 0.015026     | 0.053281     | 0.0113503    | 0.061743     | 0.128566     |

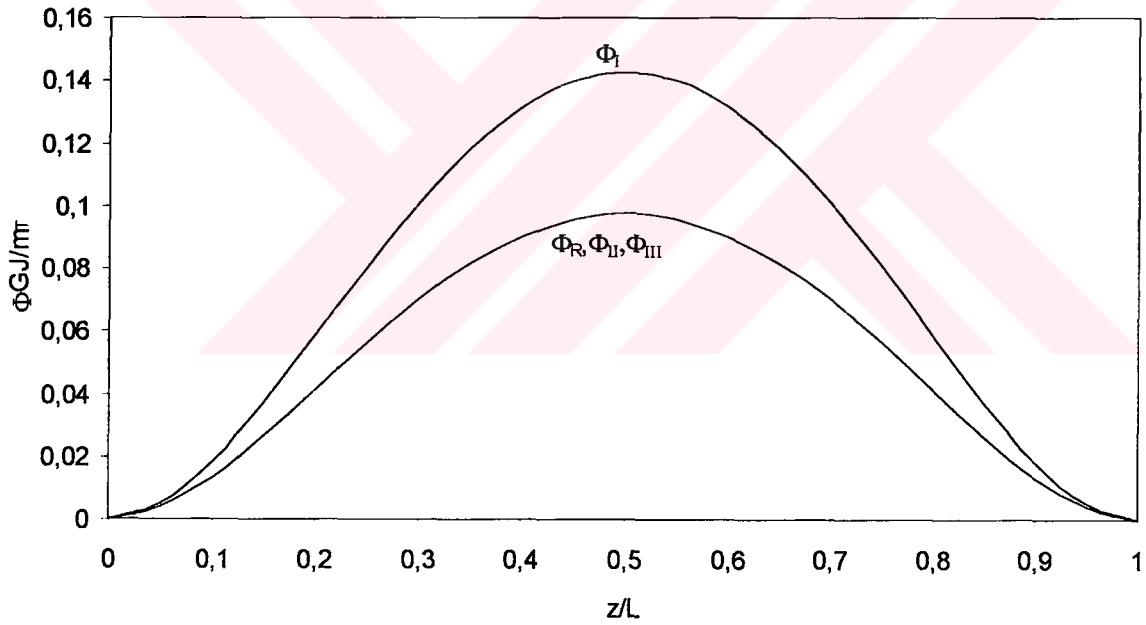
Tablo 3.2  $L = 1\text{m}$ . için yaklaşık çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması

| $L=1$ |         |          |          |       |          |      |          |      |
|-------|---------|----------|----------|-------|----------|------|----------|------|
| $z$   | $\zeta$ | REEL     | 1.DER    | HATA  | 2.DER    | HATA | 3.DER    | HATA |
| 0     | 0       | 0        | 0        | 0     | 0        | 0    | 0        | 0    |
| 0,1   | 0,1     | 0,000980 | 0,001065 | 8,76  | 0,000980 | 0    | 0,000980 | 0    |
| 0,2   | 0,2     | 0,003075 | 0,003367 | 9,52  | 0,003074 | 0,01 | 0,003075 | 0    |
| 0,3   | 0,3     | 0,005270 | 0,005801 | 10,07 | 0,005269 | 0,02 | 0,005270 | 0    |
| 0,4   | 0,4     | 0,006863 | 0,007577 | 10,41 | 0,006860 | 0,03 | 0,006863 | 0    |
| 0,5   | 0,5     | 0,007439 | 0,008221 | 10,52 | 0,007436 | 0,03 | 0,007439 | 0    |
| 0,6   | 0,6     | 0,006863 | 0,007577 | 10,41 | 0,006860 | 0,03 | 0,006863 | 0    |
| 0,7   | 0,7     | 0,005270 | 0,005801 | 10,07 | 0,005269 | 0,02 | 0,005270 | 0    |
| 0,8   | 0,8     | 0,003075 | 0,003367 | 9,52  | 0,003074 | 0,01 | 0,003075 | 0    |
| 0,9   | 0,9     | 0,000980 | 0,001065 | 8,76  | 0,000980 | 0    | 0,000980 | 0    |
| 1,0   | 1,0     | 0        | 0        | 0     | 0        | 0    | 0        | 0    |

Şekil 3.2  $L = 1\text{m}$ . için yaklaşık çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması

Tablo 3.3  $L = 2m$ . için yaklaşık çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması

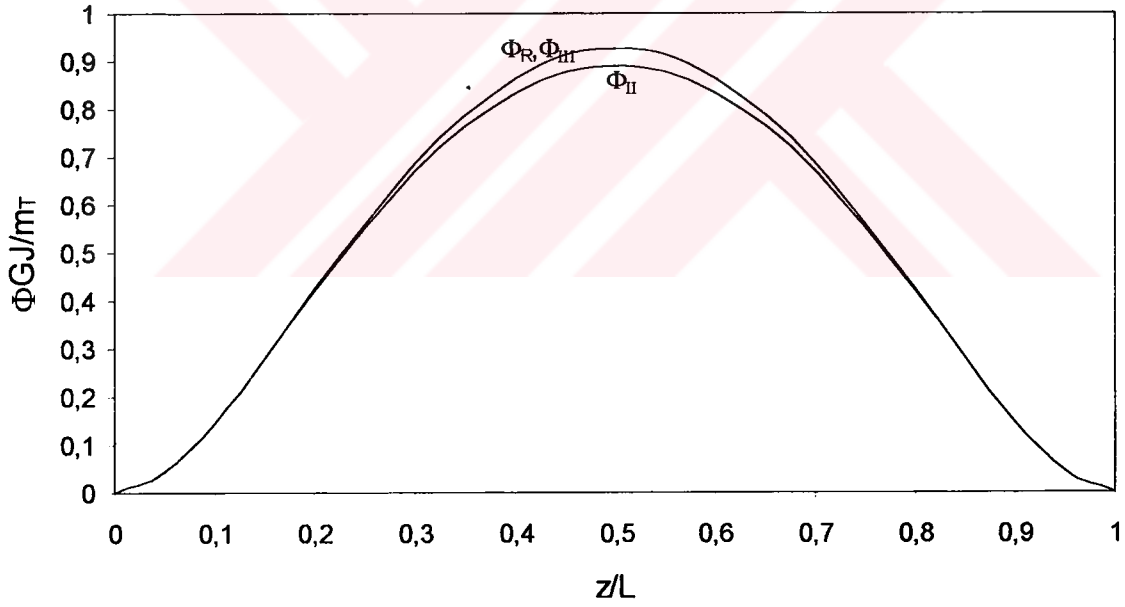
| $L=2$ |         |          |          |       |          |      |          |      |
|-------|---------|----------|----------|-------|----------|------|----------|------|
| Z     | $\zeta$ | REEL     | 1.DER    | HATA  | 2.DER    | HATA | 3.DER    | HATA |
| 0     | 0       | 0        | 0        | 0     | 0        | 0    | 0        | 0    |
| 0,2   | 0,1     | 0,013502 | 0,018508 | 37,08 | 0,013502 | 0    | 0,013501 | 0    |
| 0,4   | 0,2     | 0,041561 | 0,058495 | 40,74 | 0,041506 | 0,13 | 0,041560 | 0    |
| 0,6   | 0,3     | 0,070264 | 0,100766 | 43,41 | 0,070067 | 0,28 | 0,070263 | 0    |
| 0,8   | 0,4     | 0,090748 | 0,131613 | 45,03 | 0,090392 | 0,39 | 0,090748 | 0    |
| 1,0   | 0,5     | 0,098100 | 0,142809 | 45,58 | 0,097675 | 0,43 | 0,098101 | 0    |
| 1,2   | 0,6     | 0,090748 | 0,131613 | 45,03 | 0,090392 | 0,39 | 0,090748 | 0    |
| 1,4   | 0,7     | 0,070264 | 0,100766 | 43,41 | 0,070067 | 0,28 | 0,070263 | 0    |
| 1,6   | 0,8     | 0,041561 | 0,058495 | 40,74 | 0,041506 | 0,13 | 0,041560 | 0    |
| 1,8   | 0,9     | 0,013502 | 0,018508 | 37,08 | 0,013502 | 0    | 0,013501 | 0    |
| 2,0   | 1,0     | 0        | 0        | 0     | 0        | 0    | 0        | 0    |

Şekil 3.3  $L = 2m$ . için yaklaşık çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması

Tablo 3.4

L = 4m. için yaklaşık çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması

| L=4 |         |          |           |      |          |      |
|-----|---------|----------|-----------|------|----------|------|
| Z   | $\zeta$ | REEL     | 2.DER     | HATA | 3.DER    | HATA |
| 0   | 0       | 0        | 0         | 0    | 0        | 0    |
| 0,4 | 0,1     | 0,145588 | 0,1473239 | 1,19 | 0,145635 | 0,03 |
| 0,8 | 0,2     | 0,422367 | 0,4212027 | 0,28 | 0,422398 | 0,01 |
| 1,2 | 0,3     | 0,685138 | 0,6709379 | 2,07 | 0,685540 | 0,06 |
| 1,6 | 0,4     | 0,863544 | 0,8334997 | 3,48 | 0,864754 | 0,14 |
| 2,0 | 0,5     | 0,926010 | 0,8889148 | 4,01 | 0,927660 | 0,18 |
| 2,4 | 0,6     | 0,863544 | 0,8334997 | 3,48 | 0,864754 | 0,14 |
| 2,8 | 0,7     | 0,685138 | 0,6709379 | 2,07 | 0,685540 | 0,06 |
| 3,2 | 0,8     | 0,422367 | 0,4212027 | 0,28 | 0,422398 | 0,01 |
| 3,6 | 0,9     | 0,145588 | 0,1473239 | 1,19 | 0,145635 | 0,03 |
| 4,0 | 1,0     | 0        | 0         | 0    | 0        | 0    |



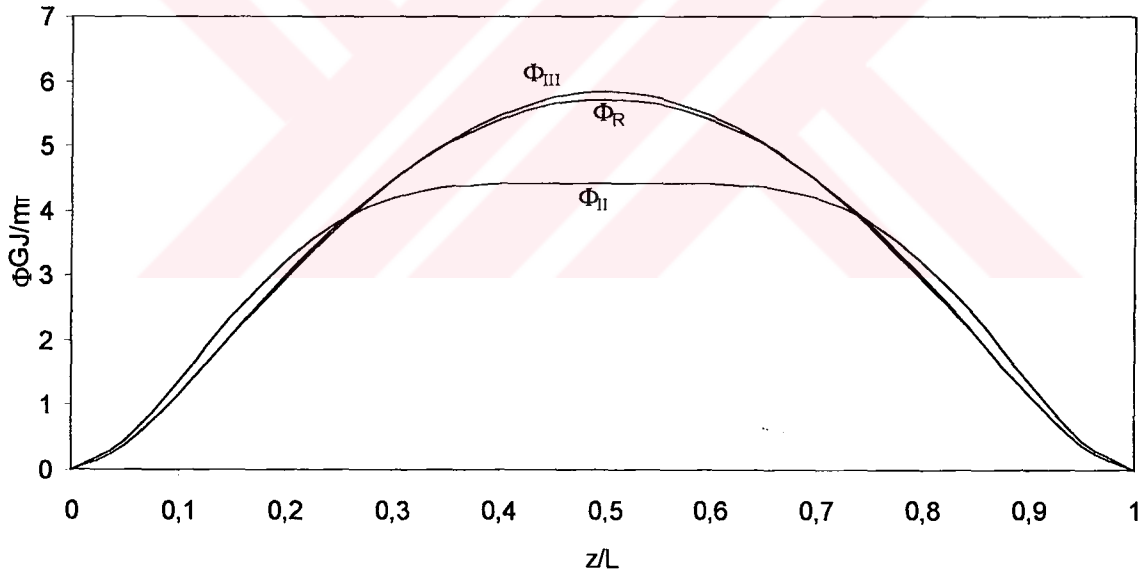
Şekil 3.4

L = 4m. için yaklaşık çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması

Tablo 3.5

$L = 8\text{m.}$  için yaklaşık çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması

| L=8 |     |          |          |       |          |      |
|-----|-----|----------|----------|-------|----------|------|
| Z   | Z*  | REEL     | 2.DER    | HATA  | 3.DER    | HATA |
| 0   | 0   | 0        | 0        | 0     | 0        | 0    |
| 0,8 | 0,1 | 1,159997 | 1,357477 | 17,02 | 1,160203 | 0,02 |
| 1,6 | 0,2 | 2,977175 | 3,204831 | 7,65  | 2,942216 | 1,17 |
| 2,4 | 0,3 | 4,473317 | 4,185189 | 6,44  | 4,452356 | 0,47 |
| 3,2 | 0,4 | 5,408141 | 4,419669 | 18,28 | 5,476473 | 1,26 |
| 4,0 | 0,5 | 5,723403 | 4,417067 | 22,82 | 5,845827 | 2,14 |
| 4,8 | 0,6 | 5,408141 | 4,419669 | 18,28 | 5,476473 | 1,26 |
| 5,6 | 0,7 | 4,473317 | 4,185189 | 6,44  | 4,452356 | 0,47 |
| 6,4 | 0,8 | 2,977175 | 3,204831 | 7,65  | 2,942216 | 1,17 |
| 7,2 | 0,9 | 1,159997 | 1,357477 | 17,02 | 1,160203 | 0,02 |
| 8,0 | 1,0 | 0        | 0        | 0     | 0        | 0    |



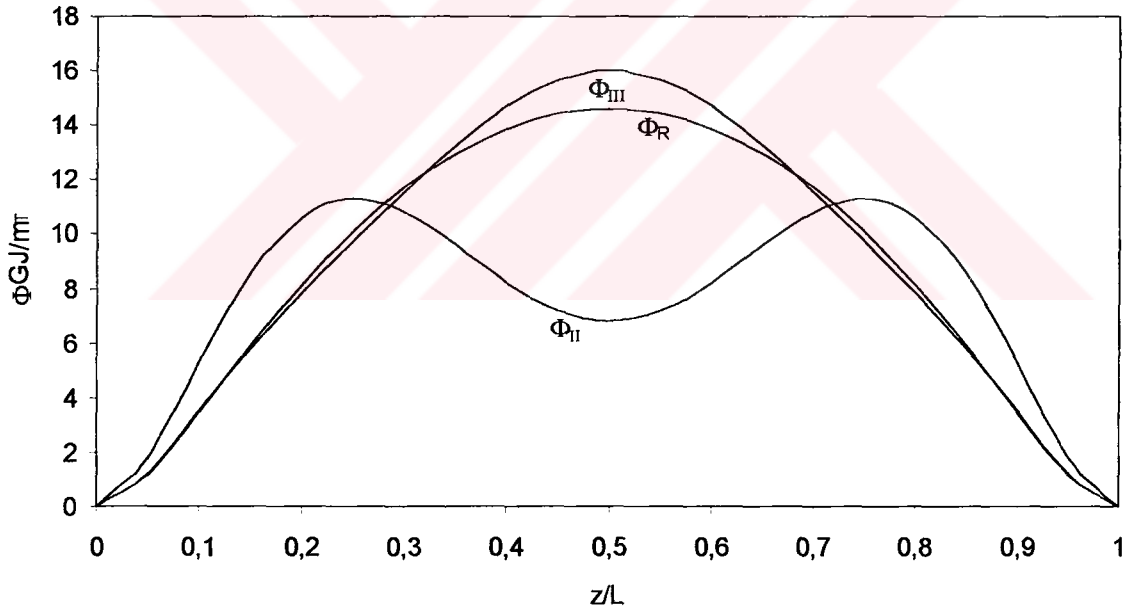
Şekil 3.5

$L = 8\text{m.}$  için yaklaşık çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması

Tablo 3.5

L = 12m. için yaklaşık çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması

| L=12 |     |           |          |       |           |      |
|------|-----|-----------|----------|-------|-----------|------|
| Z    | Z*  | REEL      | 2.DER    | HATA  | 3.DER     | HATA |
| 0    | 0   | 0         | 0        | 0     | 0         | 0    |
| 1,2  | 0,1 | 3,475963  | 5,285686 | 52,06 | 3,543761  | 1,95 |
| 2,4  | 0,2 | 8,149795  | 10,61529 | 30,25 | 7,847420  | 3,71 |
| 3,6  | 0,3 | 11,705163 | 10,79284 | 7,79  | 11,562957 | 1,21 |
| 4,8  | 0,4 | 13,859733 | 8,224192 | 40,66 | 14,703834 | 6,09 |
| 6,0  | 0,5 | 14,579150 | 6,799766 | 53,36 | 16,015449 | 9,85 |
| 7,2  | 0,6 | 13,859733 | 8,224192 | 40,66 | 14,703834 | 6,09 |
| 8,4  | 0,7 | 11,705163 | 10,79284 | 7,79  | 11,562957 | 1,21 |
| 9,6  | 0,8 | 8,149795  | 10,61529 | 30,25 | 7,847420  | 3,71 |
| 10,8 | 0,9 | 3,475963  | 5,285686 | 52,06 | 3,543761  | 1,95 |
| 12,0 | 1,0 | 0         | 0        | 0     | 0         | 0    |



Şekil 3.6

L = 12m. için yaklaşık çözümlerin analitik çözümle karşılaştırılması

## SONUÇLAR

Bu çalışmada, ince çeperli çubukların yapısal davranışlarının incelendiği Vlasov, von Karman ve Benscoter'in açık ve kapalı en kesitlere ait eğilme-burulma teorileri ele alınmış ve bir 'Ağırlıklı Artık Metodu' olan 'Moment Metodu'nun ince çeperli çubuklara ait diferansiyel denklemlere uygulanması tanımlanmıştır. Ayrıca, bir burulma problemi için 'Moment Metodu'yla gerçekleştirilen çözüm analitik çözümle karşılaştırılarak metodun yakınsaklığı araştırılmıştır. Bundan sonraki aşama, daha kompleks problemlerin, Moment Metodu algoritması kullanılarak hazırlanacak programlarla çözülmesi olacaktır.



## KAYNAKLAR

- [1] **Mailart, R.**, Zur Frage der Biegung, Schweiz. Bauztg. Vol. 77, No. 18, pp.195-197, (1921)
- [2] **Bredt, R.**, Kritische Bemerkungen zur Drehungselastisitat, Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 40, p. 785, (1986)
- [3] **Prandtl, L.**, Physik. Z., Vol 4, (1903)
- [4] **Timoshenko, S.**, Bulletin Polytechnic Inst., Vol 4, 5, St. Petersburg, (1905-1906)
- [5] **Weber, C.**, Übertragung des Drehmomentes in Balken mit doppelflanschigem Querschnitt, ZAMM 6, p. 85, (1926)
- [6] **Wagner, H.**, Verdrehung und Knickung von offenen Profilen, Festschrift 25 Jahr Technische Hochschule Danzig, Danzig, (1929)
- [7] **Kappus, R.**, Drillknicken von Staben mit offenem Profil, Jahrbuch der Deutschen Lufo., pp. 1-409, (1937)
- [8] **Bleich F. and Bleich H.**, Buckling Strength of Metal Structures, MacGraw Hill, New York, (1952)
- [9] **Vlasov, V. Z.**, Thin Walled Elastic Beams, Israel Program for Scientific Translations, Jarusalem, (1961)
- [10] **Timoshenko, S. P.**, Theory of Bending, Torsion and Buckling of Thin Walled Members of Open Cross Section, Journal of Franklin Institute, Vol. 239, No.3,4,5 (1945)
- [11] **Goodier, N.J.**, The Buckling of Compressed Bars by Torsion and Flexure, Cornell University Engineering Experiment Solution, Bulletin 27, (1941)
- [12] **Gjelsvik, A.** Theory of Thin Walled Bars, John Wiley&Sons, (1981)
- [13] **Reissner, H.**, Neure Probleme aus der Flugzeugstatik, Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffart, Vol. 17, pp. 137, 179, 384, (1926)
- [14] **Ebner, H.**, Torsional Stresses in Box Beams with Cross-sections Partially Restraint Against Warping, Zeitschrift für Mathematik, Vol. 24, December (1933)

- [15] **Kirste, L.**, Sur le Calcul des Poutres en Caisson”, L’Aeronautique, Vol. 19, pp. 1-6, January (1937), pp. 57-58, May (1937)
- [16] **von Karman, T., Christensen, N. B.**, Method of Analysis for Torsion with Variable Twist, Journal of the Aeronautical Sciences, Vol 11, pp. 110-124, (1944)
- [17] **Benscoter, S. U.**, A Theory of Torsion and Bending for Multicell Beams, Journal of Applied Mechanics, pp. 25-34, March (1954)
- [18] **von Karman, T., Chien, W. Z.**, Torsion with Variable Twist, Journal of the Aeronautical Sciences, Vol 13, No. 10, pp. 503-510, October (1946)
- [19] **Argyris, J. H., Dunne, P. C.**, The General Theory of Cylindrical and Conical Tubes under Torsion and Bending Loads, Journal of the Royal Aeronautical Society, Parts I-IV, pp. 199-269, February (1947), Part V, pp. 757-784, September (1947) and pp. 884-930, November (1947), Part VI, pp. 461-483, May (1949) and pp. 558-620, June (1949)
- [20] **Hughes, O. F.**, Ship Structural Design, The Society of Naval Architectures and Marine Engineers, New Jersey, (1988)
- [21] **de Wilde, I. G.**, Structural Problems in Ships with Large Openings, Int. Shipbuilding Progress, pp. 7-23, January (1967), pp. 73-83 February (1967)
- [22] **Haslum, K., Tonnessen, A.**, An Analysis of Torsion in Ship Hulls, European Shipbuilding, No. 5-6, (1972)
- [23] **Kawai, T.**, The Applications of Finite Element Methods to Ship Structures, Computers and Structures, Vol. 6, No. 3, pp. 1175-1194, (1973)
- [24] **Gunnlaugsson, G. A., Pedersen, P. T.**, A Finite Element Method for Beams with thin walled cross-sections, Computers and Structures, Vol. 15, No. 6, pp. 691-699, (1982)
- [25] **Pedersen, P. T.**, A Beam Model for the Torsional Bending Response of Ship Hulls, Trans. RINA, pp. 171-181, (1982)
- [26] **Timoshenko, S. P., Gere, J. M.**, Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, New York, (1961)
- [27] **İnan, M.**, Cisimlerin Mukavemeti, Arı Matbaası, İstanbul, (1967)
- [28] **Murray, N. W.**, Introduction to the Theory of Thin-Walled Structures, Oxford Engineering Science Series, Oxford, (1984)
- [29] **Timoshenko, S. P., Woinowski-Krieger, S.**, Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill, New York, (1959)

- [30] **Oden, J. T.**, Mechanics of Elastic Structures, McGraw-Hill, New York, (1967)
- [31] **Fung, Y. C.**, Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall, New Delhi, (1968)
- [32] **Timoshenko, S. P., Goodier, J. N.**, Theory of Elasticity, McGraw-Hill, New York, (1970)
- [33] **Crandall, S. H.**, Engineering Analysis, McGraw-Hill, New York, (1956)
- [34] **Collatz, L.**, The Numerical Treatment of Differential Equations, Springer, Berlin, (1960)
- [35] **Ames, W. F.**, Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering, Academic Press, New York, (1965)



## ÖZGEÇMİŞ

Bahadır UĞURLU, 19 Mayıs 1971 tarihinde Antalya’da doğdu. Liseyi 1988 yılında İzmir Fen Lisesi’nde tamamladı ve aynı yıl İstanbul Teknik Üniversitesi Gemi İnşaatı ve Deniz Bilimleri Fakültesi Gemi İnşaatı Bölümü’ne girdi. 1994 yılında mezun olduktan sonra, 94-95 öğretim yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Gemi İnşaatı Programı’nda yüksek lisans öğretimine başladı ve 1998 yılı Ocak ayında İstanbul Teknik Üniversitesi Gemi İnşaatı ve Deniz Bilimleri Fakültesi Gemi İnşaatı Bölümü’ne araştırma görevlisi olarak atandı.

