

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**GENEL KABUKLARA AİT FONKSİYONEL VE PARABOLİK SİLİNDİR
KABUKLAR İÇİN KARMA SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU**

DOKTORA TEZİ

**Y. Müh. Atilla ÖZÜTOK
(501920019012)**

100681

TEZİN
KAYIT
NO
501920019012

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 14 Temmuz 1999
Tezin Savunulduğu Tarih : 14 Ekim 1999**

Tez Danışmanı : Prof. Dr. A. Yalçın AKÖZ

A. Yalçın Aköz

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Atilla AŞKAR (K.Ü)

Atilla Aşkar

Prof. Dr. Vural CİNEMRE

Vural Cinemre

Prof. Dr. Nahit KUMBASAR

Nahit Kumbasar

Prof. Dr. Zekeriya POLAT (Y.T.Ü)

Zekeriya Polat

EKİM 1999

ÖNSÖZ

Çalışmalarım sırasında değerli bilgi ve yardımlarını esirgemeyen, her zaman destek olan, tez çalışmasının yanında bilimsel açıdan bulunduğum durumdan daha iyi yetişmem için tecrübelerini aktaran Sayın hocam Prof. Dr. A. Yalçın AKÖZ' e sevgi ve saygı ile teşekkür ederim.

Çalışmalarım sırasında ilgi ve yardımlarını esirgemeyen, her zaman fikirlerinden yararlandığım Sayın Yrd. Doç. Dr. Nihal ERATLI ve Araş.Gör. Fethi KADIOĞLU'na teşekkür ederim.

İlgi ve yardımlarını her zaman gördüğüm başta Sayın Prof. Dr. Vural CİNEMRE olmak üzere Mekanik Anabilim dalının değerli Öğretim üyeleri ve Arş Gör. arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Bugüne kadar çalışmalarımda maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen sevgili aileme teşekkür ederim.

Çalışmalarım boyunca büyük bir sabır ve özveri ile beni destekleyen, yardımcı olan sevgili eşim Zeynep'e sonsuz teşekkürlerimi sevgiyle sunarım.

Temmuz, 1999

Atilla ÖZÜTOK

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ	v
ŞEKİL LİSTESİ	vi
SEMBOL LİSTESİ	viii
ÖZET	ix
SUMMARY	xiv
1. GİRİŞ	1
2. KABUK ELEMANLARININ GEOMETRİSİ	6
2.1. Yüzeyin Birinci Ana Formu	6
2.2. Yüzeyin İkinci Ana Formu	9
2.3. Birim Baz Vektörlerinin Türetilmesi	10
2.3.1. Birim vektörlerin yüzey koordinatlarına göre türevleri	11
2.4. Kabuğun keyfi bir noktası	12
2.5. Yerdeğiştirme ve şekil değiştirme bağıntıları	14
3. GERİLMELER, İÇ KUVVETLER VE DENGE DENKLEMLERİ	18
4. KEYFİ GEOMETRİYE SAHİP KABUKLARA AİT FONKSİYONEL	23
4.1. Alan Denklemleri ve Fonksiyonelin Elde Edilmesi	23
5. PARABOLİK SİLİNDİR VE DAİRESEL SİLİNDİRİK KABUKLAR İÇİN SONLU ELEMAN FORMÜLASYONLARI	30
5.1. Parabolik Silindir Kabukların Geometrisi ve Fonksiyoneli	30
5.2. Dairesel Silindirik Kabukların Geometrisi ve Fonksiyoneli	32
5.3. Sonlu Eleman Meodunun Tanımı	32
5.4. Dikdörtgen Elemanlar	33
5.5. Parabolik Silindir Kabuklar İçin Sonlu Eleman Formülasyonu	35
5.5.1. Sınır koşulları	42
5.6. Dairesel Silindirik Kabuklar İçin Sonlu Eleman Formülasyonu	45
5.6.1. Sınır koşulları	50
5.7. Hata Analizi	51
6. SAYISAL ÖRNEKLER	52
6.1. Statik Uygulamalar	52
6.1.1. İki ucu ankastre mesnetli giriş	52
6.1.2. Kenarlarından basit mesnetli, düzgün yayılı yüke maruz plak	57
6.1.3. İki ucu ankastre mesnetli parabolik giriş	59
6.1.4. Dairesel silindirik kabuk	64

6.1.5. Parabolik silindir kabuğun basıklık oranının iç kuvvetler üzerindeki etkisi	66
6.1.6. Parabolik ve dairesel silindirik kabukların karşılaştırılması	69
6.1.7. Değişken kalınlıklı parabolik silindir kabuklar	78
6.2. Kabukların Titreşim Analizi	81
6.2.1. Dört kenarından basit mesnetli kare plak	82
6.2.2. <i>ASSS</i> kare plak	85
6.2.3. Dairesel silindirik kabuğun serbest titreşim analizi	86
6.2.4. Parabolik silindir kabuğun serbest titreşim analizi	88
7. SONUÇLAR	96
KAYNAKLAR	98
ÖZGEÇMİŞ	102



TABLO LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 6.1.	<i>ABBB</i> kare plak için frekans parametreleri.....	83
Tablo 6.2.	Değişik ($h/2a$) oranları için <i>BBBB</i> kare plağın frekans parametreleri	85
Tablo 6.3.	<i>ASSS</i> kare plak için frekans parametreleri.....	85
Tablo 6.4.	<i>ASSS</i> dairesel silindirik kabuk için simetrik frekans parametreleri ve mod şekilleri	87
Tablo 6.5.	<i>ASSS</i> dairesel silindirik kabuk için antisimetrik frekans parametreleri ve mod şekilleri	88
Tablo 6.6.	<i>ASSS</i> plak için simetrik frekans parametreleri ve mod şekilleri $\omega_{mn} = \omega_{mn} L^2 \sqrt{\rho h/D}$, $m = 0.001$	89
Tablo 6.7.	<i>ASSS</i> plak için antisimetrik frekans parametreleri ve mod şekilleri $\omega_{mn} = \omega_{mn} L^2 \sqrt{\rho h/D}$, $m = 0.001$	90
Tablo 6.8.	<i>ASSS</i> parabolik silindir kabuk için simetrik frekans parametreleri ve mod şekilleri $\omega_{mn} = \omega_{mn} L^2 \sqrt{\rho h/D}$, $m = 0.0635$	91
Tablo 6.9.	<i>ASSS</i> parabolik silindir kabuk için antisimetrik frekans parametreleri ve mod şekilleri $\omega_{mn} = \omega_{mn} L^2 \sqrt{\rho h/D}$, $m = 0.0635$	92
Tablo 6.10.	<i>ASSS</i> parabolik silindir kabuk için simetrik frekans parametreleri ve mod şekilleri $\omega_{mn} = \omega_{mn} L^2 \sqrt{\rho h/D}$, $m = 0.127$	93
Tablo 6.11.	<i>ASSS</i> parabolik silindir kabuk için antisimetrik frekans parametreleri ve mod şekilleri $\omega_{mn} = \omega_{mn} L^2 \sqrt{\rho h/D}$, $m = 0.127$	94
Tablo 6.12.	$m = f/\ell$ basıklık oranı için simetrik frekans parametreleri.....	95
Tablo 6.13.	$m = f/\ell$ basıklık oranı için antisimetrik frekans parametreleri.....	95

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1 :Eğrisel koordinatlar	6
Şekil 2.2 :Kabuk geometrisi	13
Şekil 2.3 :Yerdeğiştirme vektörü	14
Şekil 3.1 :Kabuk elemanda pozitif kuvvet ve moment bileşenleri	19
Şekil 5.1 :Parabolik silindir kabuk geometrisi	30
Şekil 5.2 :Global ve yerel koordinat sisteminde eleman	33
Şekil 5.3 :Dikdörtgen eleman	34
Şekil 6.1 :Parabolun geometrisi	52
Şekil 6.2 :Düzgün yayılı yükle yüklü, iki ucu ankastre mesnetli kiriş	53
Şekil 6.3 :Eleman ağırları	53
Şekil 6.4 :İki ucu ankastre mesnetli kirişte çökme için yaklaşım kontrolü	54
Şekil 6.5 :İki ucu ankastre mesnetli kirişte moment için yaklaşım kontrolü	54
Şekil 6.6 :w'deki hatanın eleman boyuna göre logaritmik koordinatlarda gösterimi	55
Şekil 6.7 : M'deki hatanın eleman boyuna göre logaritmik koordinatlarda gösterimi	55
Şekil 6.8 :a)Kesme kuvveti diyagramı b) Moment diyagramı c) Elastik eğri Diyagramı	56
Şekil 6.9 :Basit mesnetli dikdörtgen plak	57
Şekil 6.10 :Basit mesnetli plakta çökme için yaklaşım kontrolü	57
Şekil 6.11 :Basit mesnetli plakta moment için yaklaşım kontrolü	58
Şekil 6.12 : w'deki hatanın eleman boyuna göre logaritmik koordinatlarda gösterimi	58
Şekil 6.13 : M'deki hatanın eleman boyuna göre logaritmik koordinatlarda gösterimi	59
Şekil 6.14 :İki ucu ankastre mesnetli parabolik kiriş	59
Şekil 6.15 :Parabolik kirişin tepe noktasındaki enine yerdeğiştirme için yaklaşım kontrolü	60
Şekil 6.16 :Parabolik kirişin tepe noktasındaki moment için yaklaşım kontrolü	60
Şekil 6.17 :Parabolik kirişin tepe noktasındaki normal kuvvet için yaklaşım kontrolü	61
Şekil 6.18 : w'deki hatanın eleman boyuna göre logaritmik koordinatlarda gösterimi	62
Şekil 6.19 : M'deki hatanın eleman boyuna göre logaritmik koordinatlarda gösterimi	62
Şekil 6.20 :Parabolik kiriş boyunca iç kuvvetlerin değişimi a)N, b)M, c)Q	63
Şekil 6.21 :Uçlarından diyafram olarak mesnetlenmiş dairesel silindirik kabuk	64
Şekil 6.22 : $\overline{CD}$ boyunca yerdeğiştirmeler ve iç kuvvetlerin değişimi	64
Şekil 6.23 :Kabuklar için düşey yük dağılımları	66
Şekil 6.24 :Parabolik silindir kabuğun basıklık oranının yerdeğiştirme ve iç kuvvetler üzerindeki etkisi	67

Şekil 6.25 :Parabolik silindir kabuk ile dairesel silindirik kabuklar için yer- değiştirme ve iç kuvvet dağılımlarının karşılaştırılması $f = 1.783 \text{ m}$, $\theta = 40^\circ$	69
Şekil 6.26 :Parabolik silindir kabuk ile dairesel silindirik kabuklar için yer- değiştirme ve iç kuvvet dağılımlarının karşılaştırılması $f = 2.828 \text{ m}$, $\theta = 60^\circ$	72
Şekil 6.27 :Parabolik silindir kabuk ile dairesel silindirik kabuklar için yer- değiştirme ve iç kuvvet dağılımlarının karşılaştırılması $f = 3.732 \text{ m}$, $\theta = 74.62^\circ$	75
Şekil 6.28 :Farklı kalınlık değişimleri için yerdeğiştirme ve iç kuvvet sonuçlarının karşılaştırılması	78
Şekil 6.29 :BBBB ω_{11} , ω_{12} , ω_{21} , ω_{22} , ve ω_{33} frekanslarına ait mod şekilleri ve kontur çizgileri	84
Şekil 6.30 :ASSS dairesel silindirik kabuk	86



SEMBOL LİSTESİ

σ, ε	: Gerilme ve şekil değiştirme tansörleri
$\mathbf{n}$	: Yüzeyin birim normal vektörü
E	: Elastisite modülü
ν	: Poisson oranı
h	: Kabuğun kalınlığı
h_b, h_o	: Kabuğun başlangıç ve orta noktasındaki kalınlığı
R_1, R_2	: Kabuğun orta yüzeyinin asal eğrilik yarıçapları
$I(y)$	: Fonksiyonel
$\mathbf{Q}$	: Operatör
$\langle, \rangle, [,]$	: İç çarpım
U, V, W	: α, β ve z koordinatları doğrultusundaki yerdeğiştirmeler
u, v, w	: Kabuk ortalama yüzeyindeki teğetsel ve normal yerdeğiştirmeler
$\Omega_\alpha, \Omega_\beta$	: Kabuk kesitinin x ve y eksenleri etrafındaki dönmesi
P, N, L	: Normal ve düzlem içi kayma kuvvetleri
S, Q	: Kesme kuvvetleri
K, M, T	: Eğilme ve burulma momentleri
B, D	: Uzama ve eğilme rijitliği
q_k	: Yük bileşenleri $k = \alpha, \beta, z$
ψ_i	: Şekil fonksiyonları, $i = 1, \dots, 4$
a, b	: Dikdörtgen sonlu eleman boyutları
ξ, η	: Doğal koordinat takımı
ξ_i, η_i	: i . Düğüm noktasının doğal koordinatları
$\mathbf{L}$	: Katsayı matrisi
$\mathbf{f}$	: Yük vektörü
$\mathbf{y}$	: Bilinmeyen vektör
$[k_P]$	: Parabolik silindir kabuğun eleman matrisi
$[k_C]$	: Dairesel silindirik kabuğun eleman matrisi
$[m]$	: Eleman kütle matrisi
m	: Basıklık oranı

GENEL KABUKLARA AİT FONKSİYONEL VE PARABOLİK SİLİNDİR KABUKLAR İÇİN KARMA SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU

ÖZET

Kabuklar, diğer iki boyutunun (a,b) kalınlığa (h) oranı $(a/h) = 20 \div 1000$ arasında değişen ince çeperli yapılardır. Kabuk yapılar kemer barajlar, basınç odaları, su tankları, sığınak türü vb. gibi yapılarda geniş bir uygulama alanına sahiptir. Genellikle kabuk problemleri, kalınlığın kabuğun diğer boyutlarına göre oranı küçük olduğundan iki boyutlu problemlere indirgenebilmektedir. Bu indirgeme kinematik deformasyona ilişkin belirli hipotezlerle başarılmış ve değişik doğrulukta ve karmaşıklıkta kabuk teorileri elde edilmiştir. Karmaşık geometri ve sınır koşuluna sahip problemlerinin çözümünde kullanışlı olması nedeni ile sonlu elemanlar yöntemi araştırmacılar için çok uygun bir yöntemdir. Kabuklar için sonlu elemanlar yöntemini aşağıdaki şekilde sınıflıyabiliriz.

- İnce veya kalın kabuk teorilerinin formülasyonunda kullanılan kabuk teorileri (Kirchhoff, Reissner ve yüksek mertebeden kabuk teorisi)
- Kullanılan eleman tipi, seçilmiş eleman, bağımsız parametreler, eleman şekil fonksiyonları ve Reduce/Selective integrasyon, Ayrık Kirchhoff Teorisi vb. özel teknikler
- Potansiyel enerji teoremi, Hu-Washizu ve Hellinger-Reissner teorileri, varyasyonel formülasyon, ağırlık formülasyonu, Gâteaux türevi gibi sonlu elemanlar metodunu türetmek için kullanılan yöntemler

İnce kabuklar için, dik kesitin düzlem ve eksene dik kaldığını ifade eden Kirchhoff-Love hipotezine dayalı bir çok teori geliştirilmiştir. Kirchhoff hipotezine dayalı kabuk yapıların konvansiyonel çözümü orta düzlemin yerdeğiştirme alanını tanımlar. Eleman sınırlarında eğimlerin sürekliliğinin sağlanmasında büyük güçlükler ortaya çıkar. Aynı zamanda, Kirchhoff hipotezi enine kesme kuvvetini belirlemede yetersiz kalır.

Bu çalışmada, en kesitin dönmesine ve çarpılmasına izin veren yüksek mertebeli bir kabuk teorisi önerilmiştir. Bu yaklaşım serbest yüzeydeki kayma sınır koşullarını otomatik olarak sağlamaktadır.

Gâteaux diferansiyeli yaklaşımı kullanılarak keyfi geometriye sahip ince-kalın kabuklara ait yeni fonksiyonel sınır koşulları ile birlikte elde edilmiştir. Bu fonksiyonel kullanılarak değişken kalınlıklı parabolik silindir ve dairesel silindirik kabuklar için PRSH52 ve CRS52 kabuk elemanı geliştirilmiştir.

Gâteaux diferansiyeli yaklaşımının aşağıdaki avantajları vardır.

- Her tip lineer veya non-lineer plak ve kabuk teorilerine uygulanabilir.

- Herhangi bir bünye denklemi bu formülasyonda kullanılabilir. Son zamanlarda bu yaklaşım viskoelastik kirişler için kullanılmıştır.
- Bir tek eleman kullanarak sürekli kirişler için doğru sonuç elde edilebilir.
- Kayma kilitlenmesi gözlenmemiştir.
- Herhangi bir yapay sayısal düzeltme faktörüne gerek yoktur.
- *Gâteaux* yaklaşımı ile rijitlik matrisinin tersine gerek olmaksızın elemanların formülasyonu açık olarak yazılabilir.
- İnce ve kalın plak ve kabukların iç kuvvet, moment, dönme, yerdeğiştirme ve frekansları ω hesaplanabilir.
- Verilen alan denklemlerinden, fonksiyonel ve sınır koşulları çok kolaylıkla elde edilebilir.
- Alan denklemleri ve sınır koşulları sağlam olarak fonksiyonele yansıtılır.
- Alan denklemlerinin uyumluluğu kontrol edilmiş olur.

Kabuğun herhangi bir Q noktasının yerdeğiştirmesi

$$U(\alpha, \beta, z) = U(\alpha, \beta, z) \mathbf{E}_1 + V(\alpha, \beta, z) \mathbf{E}_2 + W(\alpha, \beta, z) \mathbf{n} \quad (1)$$

vektörü ile tanımlanabilir. Bu çalışmada yerdeğiştirme fonksiyonları, Mindlin tipi teorilerde olduğu gibi orta yüzeyin düzlem olmayan çarpılmasına ve kesitin dönmesine izin vermektedir.

$$\begin{aligned} U(\alpha, \beta, z) &= u(\alpha, \beta) + \beta_1 z + \gamma_1 F_1(z) \\ V(\alpha, \beta, z) &= v(\alpha, \beta) + \beta_2 z + \gamma_2 F_2(z) \\ W(\alpha, \beta, z) &= w(\alpha, \beta) \end{aligned} \quad (2)$$

burada β_1 , ve β_2 dönmeleri, γ_1 , ve γ_2 kabuğun asal enkesitlerinin kaymalarıdır.

Bu çalışmada kabuk yüzey sınır koşullarını sağlamak üzere $F_1(z)$ ve $F_2(z)$ aşağıda gösterildiği gibi seçilmiştir.

$$F_1(z) = H_1 f(z) \quad , \quad F_2(z) = H_2 f(z) \quad (3)$$

burada H_1, H_2 ve $f(z)$

$$H_1 = 1 + \frac{z}{R_1} \quad , \quad H_2 = 1 + \frac{z}{R_2} \quad , \quad f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (4)$$

olarak seçilmişlerdir. Bu yerdeğiştiremelerle elde edilen gerilmeler

$$\gamma_{1n} = \gamma_1 H_1 \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \quad , \quad \gamma_{2n} = \gamma_2 H_2 \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \quad (5)$$

dir. (5) denklemi kabuk yüzeyi üzerinde sıfır kayma gerilmesi koşulunu sağlamaktadır.

Bu yaklaşımla elde edilen denklemler Novozhilov tarafından elde edilen denklemlere çok benzer olmakla beraber, bazı farklılıklar vardır. Bu denklemlere parabolik kayma dağılımları eklenmiştir. İlave terimler sıfır olmayan enine kayma gerilmelerinin dağılımını ifade eder. Enine kaymanın moment üzerine etkisi $\frac{4}{5} \chi_1$ ve $\frac{4}{5} \chi_2$ olarak gözlenebilir. Bu denklemler kalın kabuklar için geçerlidir fakat kabuk problemlerinin çözümünde kullanmak çok zordur. Çok sayıdaki pratik uygulamalar için kabuk kalınlığı $\left(\frac{1}{1000} < \frac{h}{R} < \frac{1}{50} \right)$ arasında değişmektedir. Bu nedenle $(h/R)^2 \ll 1$ basitlik için ihmal edilebilir.

Bu kinematik kabul, eğilme moment ifadesini etkiler; daha önemlisi kesme kuvveti ile yerdeğiştirme arasında ilişki kurar.

Kabuğun sınır koşulları sembolik olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$-\mathbf{R} + \hat{\mathbf{R}} = 0, \quad -\mathbf{M} + \hat{\mathbf{M}} = 0, \quad \mathbf{\Omega} - \hat{\mathbf{\Omega}} = 0, \quad \mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}} = 0 \quad (6)$$

Sınır koşullarının açık ifadeleri varyasyonel işlemler sonunda elde edilecektir. Kabuklar için sınır koşullarını içerecek şekilde alan denklemleri operatör formda yazılabilir.

$$\mathbf{Q} = \mathbf{L} \mathbf{y} - \mathbf{f} \quad (7)$$

Alan denklemleri belli olduktan sonra, fonksiyoneli bulmak için bir yöntem ihtiyacı vardır. Gâteaux diferansiyel yönteminin bu amaç için uygun olduğuna inanıyoruz. $\mathbf{Q}$ operatörünün Gâteaux türevi aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

$$d\mathbf{Q}(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}) = \left. \frac{\partial \mathbf{Q}(\mathbf{y} + \tau \bar{\mathbf{y}})}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} \quad (8)$$

Burada τ bir skalerdir. $\mathbf{Q}$ operatörünün potansiyel olması için gerekli ve yeterli koşul:

$$\langle d\mathbf{Q}(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}), \mathbf{y}^* \rangle = \langle d\mathbf{Q}(\mathbf{y}, \mathbf{y}^*), \bar{\mathbf{y}} \rangle \quad (9)$$

dir. Sınır koşulları da açık olarak

$$\begin{aligned} [\mathbf{R}, \mathbf{u}] &= [A_1 L, u]_{\beta} + [A_2 P, u]_{\alpha} + [A_2 L, v]_{\alpha} + [A_1 N, v]_{\beta} \\ &\quad + [A_2 S, w]_{\alpha} + [A_1 Q, w]_{\beta} \\ [\mathbf{M}, \mathbf{\Omega}] &= [A_2 K, \Omega_1]_{\alpha} + [A_1 T, \Omega_1]_{\beta} + [A_2 T, \Omega_2]_{\alpha} + [A_1 M, \Omega_2]_{\beta} \\ &\quad + [A_2 S, w]_{\alpha} + [A_1 Q, w]_{\beta} \end{aligned} \quad (10)$$

elde edilir. Burada parantezler, sınırda tanımlanan iç çarpımları gösterir. Bütün terimler, sınırdeki kuvvetlerin yaptığı işi gösterir. Eğer $\mathbf{Q}$ operatörü potansiyelse, alan denklemlerine karşı gelen fonksiyonel

$$I(\mathbf{y}) = \int_0^l [\mathbf{Q}(\mathbf{s}\mathbf{y}, \mathbf{y})\mathbf{y}] ds \quad (11)$$

dir. Burada s bir skalerdir. Alan denklemlerine karşı gelen fonksiyonelin açık formu aşağıdaki şekilde elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} I(\mathbf{y}) = & -[A_2 u, \alpha, P] - [u, \beta, A_1 L] - [A_2, \alpha u, N] + [A_1, \beta L, u] - \langle S, \Omega_1 \rangle \\ & - [S, A_2 w, \alpha] + \left\langle S, \frac{u}{R_1} \right\rangle - [A_2 L, v, \alpha] + [A_2, \alpha L, v] - [A_1 N, v, \beta] \\ & - [P A_1, \beta, v] - \langle Q, \Omega_2 \rangle - [Q, A_1 w, \beta] + \left\langle Q, \frac{v}{R_2} \right\rangle - \left\langle \frac{P}{R_1}, w \right\rangle - \left\langle \frac{N}{R_2}, w \right\rangle \\ & + \langle q_1, u \rangle + \langle q_2, v \rangle + \langle q_n, w \rangle - [A_2 K, \Omega_{1, \alpha}] + [A_1, \beta \Omega_1, T] - [A_1 T, \Omega_{1, \beta}] \\ & - [M A_2, \alpha, \Omega_2] - [A_2 \Omega_{2, \alpha}, T] - [A_1 \Omega_{2, \beta}, M] + [T A_2, \alpha, \Omega_2] \\ & - [K A_1, \beta, \Omega_2] + \frac{1}{B(1-\nu^2)} \left\{ \frac{1}{2} \langle P, P \rangle - \nu \langle P, N \rangle + \frac{1}{2} \langle N, N \rangle \right\} + \frac{1}{B(1-\nu)} \langle L, L \rangle \\ & + \frac{1}{D(1-\nu^2)} \left\{ \frac{1}{2} \langle K, K \rangle - \nu \langle K, M \rangle + \frac{1}{2} \langle M, M \rangle \right\} + \frac{1}{D(1-\nu)} \langle T, T \rangle \\ & + \frac{6}{5B(1-\nu)} \{ \langle S, S \rangle + \langle Q, Q \rangle \} + [\mathbf{R}, (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}})]_{\mathcal{E}} + [\mathbf{M}, (\Omega - \hat{\Omega})]_{\mathcal{E}} + [\hat{\mathbf{R}}, u]_{\mathcal{E}} + [\hat{\mathbf{M}}, \Omega]_{\mathcal{E}} \end{aligned} \quad (12)$$

Burada parantezli ifadeler iç çarpımı göstermektedir ve aşağıdaki şekilde tanımlanmışlardır..

$$\langle f, g \rangle = \iint_A f g A_1 A_2 d\alpha d\beta, \quad [f, g] = \iint_A f g d\alpha d\beta \quad (13)$$

ε, σ alt indisli parantez içerisindeki ifadeler sırasıyla geometrik ve dinamik sınır koşullarının verildiği noktalarda geçerlidir.

Bu fonksiyon keyfi geometriye sahip kabuklar için sonlu eleman matrisinin elde edilmesinde kullanılacaktır. Örneğin parabolik (PRSH52) ve dairesel silindirik (CRSH52) kabukların sonlu eleman matrisleri, bu yolla hesaplanmıştır.

Geliştirilen bu teori, ilk olarak parabolik silindir kabuklara uygulanmıştır. Çünkü parabolik geometri mühendislik uygulamalarında sıkça kullanılmaktadır.

Bu formülasyonun özellikleri özetlenirse:

- Keyfi geometriye sahip kabuklar için yüksek mertebeden kabuk teorisi üretilmiştir.
- Gâteaux diferansiyel metodu kullanılmıştır.
- Gâteaux diferansiyel metodu aşağıdaki avantajları sağlamaktadır.
 - ♦ Alan denklemleri uyumludur.
 - ♦ Sistemik bir yolla fonksiyonelde sınır koşulları terimleri kolaylıkla elde edilebilir.
- PRSH52 ve CRSH52 eleman denklemlerinin kapalı formda elde edilmesi hesaplama zamanında büyük ekonomi sağlar.
- Bu formülasyonda değişken kalınlıklı problemler çözülebilir.
- Bu formülasyonda kayma kilitlenmesi gözlenmemiştir.
- Bu formülasyon titreşim problemlerine de uygundur.
- Kabukların analizi için fortran programa dilinde bir bilgisayar programı geliştirilmiştir.



A FUNCTIONAL FOR SHELLS OF ARBITRARY GEOMETRY AND THE MIXED FINITE ELEMENT METHOD FOR PARABOLIC CYLINDRICAL SHELLS

SUMMARY

Shells are assumed to be thin-walled structures in which the valid interval for the ratio of thickness (h) to two other linear dimensions (a, b) ranges within the limit $(a/h) \cong 20 \div 1000$. Shell structures have found wide application in engineering fields ranging from water tank, pressure vessels, submarine hulls, wings and fuselages of airplanes to arch dam. Often shell problems are reduced to two dimensional problems due to the smaller thickness ratio with respect to their other dimensions. This reduction is accomplished by proposing certain hypothesis regarding the kinematics of deformation and shell theories of varied accuracy and complexity are obtained. Because of its versatility in handling the complex geometry and boundary condition, finite element method (FEM) is the most suitable choice for the structural analyst. There exist extensive literature for FEM. We may classify the FEM for shells, as follows:

- The theory of shells is used in formulation of thin or thick shells theories (Kirchhoff, Reissner and higher order shell theories)
- The chosen element, independent parameters, element interpolation function and special technique such as Reduced / Selective integration discrete Kirchhoff Theory etc..
- The method is used to derive FEM such as Potential energy theorem, Hu-Washizu an Hellinger-Reissner theory, variational formulation, weak formulation, Gâteaux derivatives.

Many of theories were develop originally for thin shells, and are based on the Kirchhoff-Love hypothesis states that the normal remains straight and normal to middle surface. The conventional treatment of shell structures based on Kirchhoff hypothesis defines fully the displacement pattern by the middle surface displacement. A great difficulty arises in satisfying the necessary continuity of slopes at interface. Also Kirchhoff hypothesis is not capable to take into account the transverse shear.

In this study, higher order shell theory is proposed for general shell geometries, which allows the cross-section to rotate with respect to the middle surface, and to warp into a non-planer surface. This assumption satisfies the shear free surface boundary condition automatically.

Then a functional and the boundary condition are obtained for the general thin-thick shells based on Gâteaux differential approaches. Using this functional quadrilateral FEM PRSH52 and CRSH52 are obtained for parabolic and cylindrical shells with variable thickness respectively.

Gâteaux differential approaches has some important advantages:

- Any linear or nonlinear shell and plate theory can be adopted.
- Any constitutive equations can be used in this formulation. Recently this approach is applied to the viscoelastic beams.
- It gives a very accurate result. Using only single element the exact result is obtained for a cantilever beam. This approach satisfies convergence requirements
- It does not exhibits shear-locking
- It does not use any artificial numerical adjusted factors.
- It is capable of predicting accurately displacement, stress and frequency in both thin and thick plates and shells.
- A Gâteaux approach allows a direct formulation of the elements of the stiffness matrix without the matrix inversion required.
- It is easy to implement
- The given field equations are enforced to the functional in straightforward manner and also boundary condition for given problem can be constructed easily.
- It provides the consistency of the field equations.

We now define the deformation at any point Q in the shell by the following displacement vector:

$$U(\alpha, \beta, z) = U(\alpha, \beta, z) \mathbf{E}_1 + V(\alpha, \beta, z) \mathbf{E}_2 + W(\alpha, \beta, z) \mathbf{n} \quad (1)$$

In this study we assume the following displacement functions that allow the cross-sections to rotate relative to the middle surface, as the Mindlin type theories, and to warp into a non-planer surface:

$$\begin{aligned} U(\alpha, \beta, z) &= u(\alpha, \beta) + \beta_1 z + \gamma_1 F_1(z) \\ V(\alpha, \beta, z) &= v(\alpha, \beta) + \beta_2 z + \gamma_2 F_2(z) \\ W(\alpha, \beta, z) &= w(\alpha, \beta) \end{aligned} \quad (2)$$

where β_1 , and β_2 are rotations, γ_1 , and γ_2 are shears of the principal cross-sections of shell. $F_1(z)$ and $F_2(z)$ has been chosen so that creates reasonable shear distribution. If we choose $F_1(z)$ and $F_2(z)$ as follows

$$F_1(z) = H_1 f(z) \quad , \quad F_2(z) = H_2 f(z) \quad (3)$$

where H_1, H_2 and $f(z)$ are defined as

$$H_1 = I + \frac{z}{R_1} \quad , \quad H_2 = I + \frac{z}{R_2} \quad , \quad f(z) = z \left(I - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (4)$$

following shear distributions.

$$\gamma_{1n} = \gamma_1 H_1 \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) , \quad \gamma_{2n} = \gamma_2 H_2 \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) \quad (5)$$

This shear distribution satisfies free shear on the shell surfaces.

Although equations, which are obtained by this approach, are very similar to that obtained by Novozhilov there are some differences. Here we added parabolic shear distribution. That additional term represents the contribution to non-vanishing transverse shear stresses. The effect of lateral shear can also be observed in moment equation as $\frac{4}{5} \chi_1$ and $\frac{4}{5} \chi_2$. These equations are valid for thick shells but it is very difficulty to use them in the solution of shell problems. For a large number of practical applications, the thicknesses of shells lie in the range $\left(\frac{1}{1000} < \frac{h}{R} < \frac{1}{50}\right)$.

Therefore, $(h/R)^2 \ll 1$ can be omitted compared with unity.

The effect of the new kinematic assumption appears in bending moment as additional terms and more importantly than that non-vanishing shear represents a contribution to shell theory.

The boundary conditions of shells are written in symbolic form as follows:

$$-\mathbf{R} + \hat{\mathbf{R}} = 0 , \quad -\mathbf{M} + \hat{\mathbf{M}} = 0 , \quad \mathbf{\Omega} - \hat{\mathbf{\Omega}} = 0 , \quad \mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}} = 0 \quad (6)$$

The explicit form of boundary conditions will be obtained through variational process. All field equations including boundary conditions for shells can be written in operator form as,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{L} \mathbf{y} - \mathbf{f} \quad (7)$$

Having the field equations one needs a method to obtain the functional. We believe Gâteaux differential method is suitable for this aim. The Gâteaux derivative of an operator is defined as

$$d\mathbf{Q}(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}) = \left. \frac{\partial \mathbf{Q}(\mathbf{y} + \tau \bar{\mathbf{y}})}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} \quad (8)$$

where τ is a scalar. A necessary and sufficient condition that $\mathbf{Q}$ is potential is.

$$\langle d\mathbf{Q}(\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}), \mathbf{y}^* \rangle = \langle d\mathbf{Q}(\mathbf{y}, \mathbf{y}^*), \bar{\mathbf{y}} \rangle \quad (9)$$

The explicit boundary condition are

$$\begin{aligned}
[\mathbf{R}, \mathbf{u}] &= [A_1 L, u]_\beta + [A_2 P, u]_\alpha + [A_2 L, v]_\alpha + [A_1 N, v]_\beta \\
&\quad + [A_2 S, w]_\alpha + [A_1 Q, w]_\beta \\
[\mathbf{M}, \Omega] &= [A_2 K, \Omega_1]_\alpha + [A_1 T, \Omega_1]_\beta + [A_2 T, \Omega_2]_\alpha + [A_1 M, \Omega_2]_\beta \\
&\quad + [A_2 S, w]_\alpha + [A_1 Q, w]_\beta
\end{aligned} \tag{10}$$

where parentheses indicate the inner product which is defined on the boundary. The boundary conditions are very meaningful in the mechanical viewpoint. All of the terms define the work done by boundary forces. If the operator $\mathbf{Q}$ is potential, then the functional, which corresponds to the field equations, is given as

$$I(\mathbf{y}) = \int_0^1 [\mathbf{Q}(\mathbf{s}\mathbf{y}, \mathbf{y})\mathbf{y}] ds \tag{11}$$

where $\mathbf{s}$ is a scalar quantity. Explicit form of the functional corresponding to the field equation is

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}(\mathbf{y}) &= -[A_2 u, \alpha, P] - [u, \beta, A_1 L] - [A_2, \alpha u, N] + [A_1, \beta L, u] - \langle S, \Omega_1 \rangle \\
&\quad - [S, A_2 w, \alpha] + \left\langle S, \frac{u}{R_1} \right\rangle - [A_2 L, v, \alpha] + [A_2, \alpha L, v] - [A_1 N, v, \beta] \\
&\quad - [P A_1, \beta, v] - \langle Q, \Omega_2 \rangle - [Q, A_1 w, \beta] + \left\langle Q, \frac{v}{R_2} \right\rangle - \left\langle \frac{P}{R_1}, w \right\rangle - \left\langle \frac{N}{R_2}, w \right\rangle \\
&\quad + \langle q_1, u \rangle + \langle q_2, v \rangle + \langle q_n, w \rangle - [A_2 K, \Omega_1, \alpha] + [A_1, \beta \Omega_1, T] - [A_1 T, \Omega_1, \beta] \\
&\quad - [M A_2, \alpha, \Omega_2] - [A_2 \Omega_2, \alpha, T] - [A_1 \Omega_2, \beta, M] + [T A_2, \alpha, \Omega_2] \\
&\quad - [K A_1, \beta, \Omega_2] + \frac{1}{B(1-\nu^2)} \left\{ \frac{1}{2} \langle P, P \rangle - \nu \langle P, N \rangle + \frac{1}{2} \langle N, N \rangle \right\} + \frac{1}{B(1-\nu)} \langle L, L \rangle \\
&\quad + \frac{1}{D(1-\nu^2)} \left\{ \frac{1}{2} \langle K, K \rangle - \nu \langle K, M \rangle + \frac{1}{2} \langle M, M \rangle \right\} + \frac{1}{D(1-\nu)} \langle T, T \rangle \\
&\quad + \frac{6}{5B(1-\nu)} \{ \langle S, S \rangle + \langle Q, Q \rangle \} + [\mathbf{R}, (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}})]_\varepsilon + [\mathbf{M}, (\Omega - \hat{\Omega})]_\varepsilon + [\hat{R}, u]_\sigma + [\hat{M}, \Omega]_\sigma
\end{aligned} \tag{12}$$

where parenthesis indicates inner product and defined as:

$$\langle f, g \rangle = \iint_A f g A_1 A_2 d\alpha d\beta, \quad [f, g] = \iint_A f g d\alpha d\beta \tag{13}$$

and the parentheses with ε, σ subscripts indicate the geometric and dynamic boundary conditions respectively.

This functional serves as the finite element matrix for the shells, which has arbitrary geometry. As an example finite element matrix for parabolic and circular cylinder is given.

The developed theory will be applied first to the parabolic cylindrical shell. Because the parabolic geometry finds a wide area of use in engineering applications.

The properties of formulation briefly are:

- A higher order shell theory is proposed for general shell geometries.
- Gâteaux differential method has been used.
- Gâteaux differential method provides the following advantages
 - ♦ The consistency of the field equations
 - ♦ Boundary condition terms are constructed and included to the functional in a systematic way.
- The closed form of element equations PRSH52 and CRSH52 are obtained which eliminate the time consuming numerical inversion of the element matrix.
- The variable cross-section can be handled by this formulation.
- This formulation avoids shear locking.
- This formulation is also suitable for the dynamic problems, which are under study.
- A computer program written in Fortran programming language is developed for the analysis of shells

1.GİRİŞ

Kabuklar diğer boyutunun (a,b) kalınlığa (h) oranı $(a/h) = 20 \div 1000$ arasında değişen ince çeperli yapılardır. Modern teknolojiye geniş uygulama alanına sahip kabuk yapılar uçak ve uzay araçlarında, tünellerde, kemer barajlarda, basınç odalarında ve geniş açıklıklı yapı sistemlerinde kullanılan yapı elemanlarıdır. Değişik geometrideki kabuk yapıların analizi ile ilgili olarak yapılan çok sayıda çalışma vardır [1-5]. Yapı analiz problemleri genellikle üç boyutludur. Matematiksel güçlükler nedeniyle karmaşık geometriye ve sınır koşullarına sahip kabuk yapıların analizi zordur. Bu zorlukları aşmak için bazı kabuller yapılır. Örneğin kalınlığın, kabuğun diğer boyutlarına göre küçük olmasından dolayı iki boyutlu problemlere indirgenir. Bu indirgeme kinematik deformasyona ilişkin bazı hipotezlerle başarılmış ve değişik doğrulukta ve karmaşıklıkta kabuk teorileri elde edilmiştir.

Karmaşık problemlerin çözümünü kolaylaştırmak açısından sonlu elemanlar metodu uygun olmaktadır. Konuyla ilgili literatür araştırması yapıldığı zaman karmaşık geometriye ve sınır koşullarına sahip kabuk problemlerin çözümü için sonlu elemanlar metodu ve uygulamaları üzerine yapılmış çok sayıda çalışma olduğu gözlenmiştir [5-9]. İncelenen çalışmaları, teori, kullanılan özel teknikler ve yöntemler açısından üç ana başlık altında sınıflıyabiliriz.

- İnce ve kalın kabuk teorilerinin formülasyonunda kullanılan kabuk teorileri
 - ♦ *Kirchhoff - Love hipotezi*
 - ♦ *Reissner Teorisi*
 - ♦ *Yüksek mertebeden kabuk teorileri*
- Kullanılan eleman tipi,seçilen bağımsız parametreler, eleman şekil fonksiyonları ve Reduce/Selective integrasyon, Ayrık Kirchhoff teorisi vb. özel teknikler
- Sonlu elemanlar metodunu üretmek için kullanılan yöntemler
 - ♦ *Potansiyel enerji teoremleri*

- ♦ *Hu-Washizu ve Hellinger-Reissner teorileri*
- ♦ *Varyasyonel formülasyon*
- ♦ *Ağırlık formülasyonu*
- ♦ *Gâteaux türevi*

Çoğunlukla ince kabuk kabulü ile kayma etkilerinin ihmal edildiği Kirchhoff-Love hipotezi kullanılmaktadır. Kirchhoff-Love hipotezinde şekil değiştirmemiş orta yüzeye normal bir düzlem parçası, şekil değiştirmesinden sonra da orta yüzeye normal bir düzlem parçası olarak kalmaktadır. Kirchhoff-Love hipotezine dayalı kabuk yapıların yerdeğiştirmeleri orta yüzeye göre tanımlanmışlardır. Bir büyük zorluk iç yüzeylerin eğimlerdeki gerekli sürekliliğin sağlanmasında olmaktadır [6].

Bu zorluklara rağmen, Kirchhoff kabukları için sonlu eleman metodunun uygulamaları üzerine bir çok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmaların bazıları Zienkiewicz ve Cheung [10], Przemieniecki ve diğ. [11], De Veubeke [12], Zienkiewicz ve Holister [13], Argyris [14], Clough ve Tocher [15], ve Jones ve Strome [16] olarak sayılabilir.

Klasik Kirchhoff-Love hipotezinin yetersiz kaldığı durumları ortadan kaldırmak için Reissner teorisi geliştirilmiştir. Reissner teorisinin esası kayma gerilmelerinden meydana gelen kayma şekil değiştirmelerini hesaba katmış olmasıdır. Kaymayı gözönüne alan teorilerde sonlu eleman formülasyonu C^0 sürekliliğini gerektirir. Böylece interpolasyon fonksiyonları çok kolaylıkla elde edilebilir [17-18].

Bir çok C^0 uyumlu kabuk elemanları üzerine yapılan çalışmalarda potansiyel enerji teoremi kullanılarak yerdeğiştirme ve dönmeler bağımsız parametreler olarak alınmıştır [19]. Bu elemanlarda çok sık karşılaşılan kayma kilitlenmesi (Shear locking) bir çok araştırmacı tarafından incelenmiştir [5,6,19,20].

Zienkiewicz ve diğ. [20] tarafından kayma kilitlenmesini ortadan kaldıracak Reduced integrasyon yöntemi ve bunu izleyen yıllarda Selective integrasyon yöntemi geliştirilmiştir [22-26].

Belytschko [27] tarafından dinamik analizlerdeki zorlukları aşmak için sıfır enerji modunu yönlendiren Stabilizasyon matris yöntemi geliştirilmiştir.

[27-29] daki yazarlar tarafından Ayrık Kirchhoff-Mindlin elemanı geliştirilmiştir. Ayrık sayıdaki noktalarda Kirchhoff şartlarını koyan Kirchhoff elemanları sonlu elemanlar tekniğidir.

Ahmad ve diğ. [19] tarafından kabuğun orta yüzeyindeki düğüm noktalarındaki değişkenleri içeren üç boyutlu alan denklemlerinin direk ayrıklaştırılmasına izin veren dejenerasyon kavramı tanıtılmıştır. Kabuk teorilerinde dejenere kabuk kavramı enine kayma deformasyonlarına izin veren temel yaklaşımları kabul etmektedir. Dejenere kabuk elemanı ile kabukların sonlu eleman analizi yeni bir boyut kazanmıştır. Bu yaklaşımın farklı alternatifleri de geliştirilmiştir [30]. Ziyaeifar ve Elwi [31] tarafından yapılan çalışmada kalınlık boyunca parabolik ve simetrik olmayan enine kayma şekil değiştirme dağılımlarına müsaade eden dejenere plak ve kabuk elemanları tanımlamışlardır. Bununla birlikte özel bir gayret sarfedilmezse diğer yaklaşımlarda olduğu gibi kayma kilitlenmesinin etkisi görülmektedir.

Kilitlenmenin etkisini azaltan diğer karışık formülasyon Hellinger-Reissner ve Hu-Washizu prensiplerine dayanmaktadır [32-33].

Bhimaraddi ve diğ. [34] tarafından bu problemi dikdörtgen plaklar, genel dönel kabuklar ve silindirik kabuklarda gidermek için yüksek mertebeden kabuk teorileri üretmişlerdir.

Son zamanlarda Koziey [35] tarafından önerilen kalın kabuk sonlu eleman formülasyonunda ortaya çıkan sorunu kaldırmak için düzeltilmiş kayma parametresine ihtiyaç duyulmuştur.

Kumbasar ve Aksu [36] da kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmelerinin ve kabuk kalınlığının etkisini hesaba katarak genel biçimli kabuklar için elde edilen fonksiyonel yardımı ile yerdeğiştirmelerin bilinmeyen olarak tanımlandığı izoparemetrik bir dörtgen sonlu eleman geliştirilmiştir.

Kara [37] de genel biçimli ve genel statik yükler etkisindeki kalın kabuklarda bütün etkiler dikkate alınarak yerel eğrisel ortogonal koordinatlarda, üç boyutlu elastisite teorisinden hareketle sonlu eleman yöntemi ile analiz yapılmıştır.

Kabuklar için kabul edilen kabuk teorilerinin (Kirchhoff-Love ve yüksek mertebeden kabuk teorileri) den başka kalın ve ince kabuklar için güvenilir eleman geliştirmek

sonlu eleman üretiminde başlıca öneme sahiptir. Bir çok çalışmada eleman denklemlerinin elde edilmesinde potansiyel enerji teoremleri kullanılmıştır. Karışık sonlu eleman formülasyonunda kabul edilen teorilerde özellikle Hellinger-Reissner ve Hu-Washizu prensiplerinin kullanıldığı görülmüştür [32-33]. Değişim metodlarının da karışık eleman formülü üretilmesinde kullanılabilir [38-39].

Son yıllarda Aköz ve çalışma grubu tarafından Gâteaux diferansiyeli kullanılarak çeşitli problemler için fonksiyoneller üretilmiş ve bu yöntemle çeşitli karışık sonlu eleman çalışmaları yapılmıştır [40-44].

Basit problemler için Hellinger-Reissner ve Hu-Washizu prensipleri ile de benzer fonksiyoneller elde edilebilmektedir. Fakat *Gâteaux diferansiyeli* yaklaşımının bazı önemli avantajları vardır.

- Her tip lineer veya non-lineer plak ve kabuk teorilerine uygulanabilir. Kármán plakları için bir fonksiyonel, sınır koşulları ile birlikte Aköz [45] tarafından elde edilmiştir.
- Herhangi bünye denklemleri bu formülasyonda kullanılabilir. Son zamanlarda bu yaklaşım viskoelastik kirişler için kullanılmıştır [46].
- Bir tek eleman kullanılarak sürekli kirişler için doğru sonuç elde edilebilir[41].
- Kayma kilitlenmesi gözlenmemiştir [47].
- Herhangi bir yapay sayısal düzeltme faktörüne gerek yoktur.
- Gâteaux yaklaşımı ile rijitlik matrisinin tersine gerek olmaksızın elemanların formülasyonu açık olarak yazılabilir.
- İnce ve kalın plak ve kabukların iç kuvvet, moment, dönme, yerdeğiştirme ve ω frekansları hesaplanabilir.
- Verilen alan denklemlerinden, fonksiyonel ve sınır koşulları çok kolaylıkla elde edilebilir.
- Alan denklemleri ve sınır koşulları sağlam olarak fonksiyonele yansıtılır.
- Alan denklemlerinin uyumluluğu kontrol edilmiş olur [1,48].

Bu çalışmada, kayma etkilerini de gözönüne alan keyfi geometriye sahip kabuklar için yüksek mertebeden kabuk teorisi önerilmiştir. Bu teori, orta yüzeye göre kesitin dönmesine ve yüzeyin çarpılmasına izin verir. Bu yaklaşım serbest yüzeydeki kayma sınır koşullarını otomatik olarak sağlamaktadır.

Gâteaux diferansiyel yaklaşımı kullanılarak keyfi geometriye sahip ince-kalın kabuklara ait yeni fonksiyonel dinamik ve geometrik sınır koşulları ile birlikte elde edilmiştir. Bu fonksiyonel kullanılarak çözümü istenen herhangi bir kabuğu çözmek mümkündür. Bu çalışmada parabolik silindir kabuk ve dairesel silindirik kabuklar incelenmiştir. Bu kabukların sonlu elemanlar yöntemi ile çözülebilmesi için yerdeğiştirme, düzlem içi kuvvetler, düzlem içi kayma kuvvetleri, eğilme momentleri, burulma momentlerine ilave olarak enine kayma kuvvetleri ve dönme deformasyonlarının bilinmeyen olarak tanımlandığı PRSH52 ve CRSH52 kabuk elemanı elde edilmiştir. Elde edilen her iki PRSH52 ve CRSH52 kabuk elemanı ile değişik problemlerin statik ve dinamik analizleri yapılmıştır.

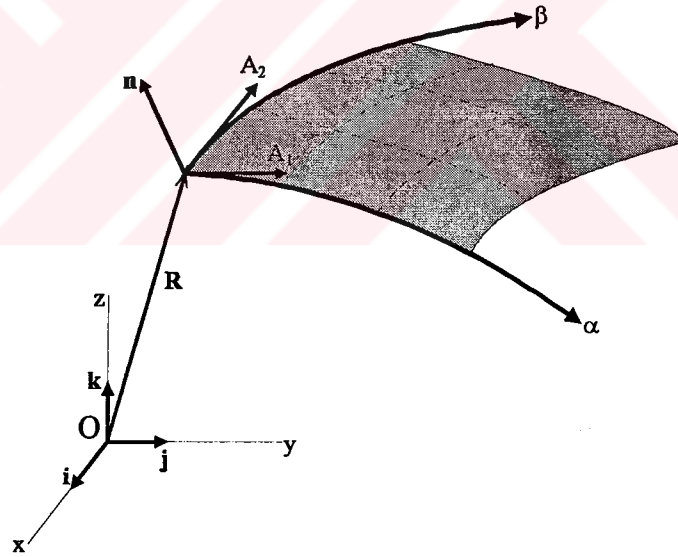
2. KABUK ELEMANLARININ GEOMETRİSİ

2.1 Yüzeyin Birinci Ana Formu

E3 uzayı içerisinde keyfi bir F yüzey üzerindeki her noktanın yerini O merkezli ortogonal kartezyen koordinat takımında tanımlayan vektör

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\alpha, \beta) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k} \quad (2.1)$$

şeklindedir. Şekil 2.1 de gösterildiği gibi $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ kartezyen koordinatın baz vektörleri, α, β yüzeyin eğrisel koordinatlarıdır.



Şekil 2.1 Eğrisel koordinatlar

α ve β arasındaki her bağıntı yüzey üzerinde çizilmiş bir eğri tanımlar. F üzerindeki $\beta = \text{sabit}$ için α eğrisi, $\alpha = \text{sabit}$ için β eğrisi elde edilir. α ve β parametrelerine göre $\mathbf{R}$ konum vektörünün kısmi türevleri ($i, j = 1, 2$)

$$\mathbf{A}_i = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \alpha^i} = \mathbf{R}_{,i}$$

burada $\alpha^1 = \alpha$, $\alpha^2 = \beta$ dır. Buna göre,

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \alpha} = \mathbf{R}_{,1} \quad \mathbf{A}_2 = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \beta} = \mathbf{R}_{,2} \quad (2.2)$$

dir. Burada $\mathbf{A}_1$ ve $\mathbf{A}_2$ α ve β doğrultularındaki kovaryant baz vektörleridir ve α ve β eğrilerine teğettir (Şekil 2.1).

Ortogonal koordinatlar için orta yüzey üzerindeki iki nokta arasındaki dS yay elemanının boyu

$$\begin{aligned} dS^2 &= d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R} = \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}_j d\alpha^i d\alpha^j = A_{ij} d\alpha^i d\alpha^j \\ dS^2 &= d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R} = A_{11} d\alpha^2 + A_{22} d\beta^2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

şeklinde yazılabilir. Burada A_{ij} yüzey ölçüm tansörüdür ve

$$A_{ij} = \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}_j, \quad A_{11} = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_1, \quad A_{22} = \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_2 \quad (2.4)$$

baz vektörlerin skaler çarpımı ile elde edilir. Bu tansörler yüzey koordinatlarının dönüşümlerinde gereken koşulları yerine getirirler. (2.3) denklemi yüzeyin *birinci ana formu* olarak adlandırılır.

$\mathbf{A}_1$ ve $\mathbf{A}_2$ baz vektörlerinin şiddetleri

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}_i| &= \sqrt{\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}_i} = \sqrt{A_{ii}} = A_i \\ |\mathbf{A}_1| &= \sqrt{\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_1} = \sqrt{A_{11}} = A_1 \quad |\mathbf{A}_2| = \sqrt{\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_2} = \sqrt{A_{22}} = A_2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

dir. Koordinat eğrileri boyunca yay elemanları

$$dS_1 = \mathbf{A}_1 d\alpha \quad dS_2 = \mathbf{A}_2 d\beta \quad (2.6)$$

vektörleriyle gösterilecektir; bu vektörlerin büyüklüğü

$$dS_1 = \sqrt{A_{11}} d\alpha \quad dS_2 = \sqrt{A_{22}} d\beta \quad (2.7)$$

dır. Şekil 2.1 de görüldüğü gibi $\mathbf{A}_1$ ve $\mathbf{A}_2$ arasındaki φ açısı

$$\cos\varphi = \frac{d\mathbf{S}_1 \cdot d\mathbf{S}_2}{dS_1 dS_2} = \frac{A_{12}}{\sqrt{A_{11}A_{22}}}, \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A_{11}A_{22}}}, \quad (2.8)$$

ile verilir. Burada

$$A = A_{11} A_{22} - (A_{12})^2 \quad (2.9)$$

dir. Eğer koordinat eğrileri ortogonal ise $A_{12} = 0$ dır. F yüzey alan elemanı ise,

$$dF = \sqrt{A} d\alpha d\beta \quad (2.10)$$

dır. Birinci ana form yüzeyin üzerine çizilen eğrilerin uzunluğunu, eğriler arasındaki açıları ve eğrileri kesen yüzey kısımları arasındaki alanları vermektedir.

$\mathbf{A}_3$ birim normal vektörü F yüzeyine dik olmaktadır ve birim uzunluğu

$$\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}_3 = 0, \quad \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{A}_3 = 1 \quad (2.11)$$

dir. $\mathbf{A}_3$ birim normal vektörü

$$\mathbf{A}_3 = \frac{\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2}{|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2|} = \frac{\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2}{\sqrt{A}} \quad (2.12)$$

olarak elde edilir.

2.2 Yüzeyin İkinci Ana Formu

(2.2) ve (2.11) denkleminin kısmi türevleri alınırsa,

$$\mathbf{A}_{i,j} = \mathbf{A}_{j,i} = \mathbf{R}_{,ij} \quad (2.13)$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}_3 &= 0 \\ \mathbf{A}_{i,j} \cdot \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}_{3,j} &= 0 \\ \mathbf{A}_{i,j} \cdot \mathbf{A}_3 &= -\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}_{3,j} \end{aligned} \quad (2.14)$$

özellikleri geçerlidir. $d\mathbf{A}_3 \cdot d\mathbf{R}$ skaler çarpımından

$$d\mathbf{A}_3 \cdot d\mathbf{R} = (\mathbf{A}_{3,i} d\alpha^i) \cdot (\mathbf{A}_j d\alpha^j) = -B_{ij} d\alpha^i d\alpha^j \quad (2.15)$$

ilişkisi elde edilir. Burada B_{ij} simetrik eğrilik tansörüdür ve

$$\begin{aligned} B_{ij} &= B_{ji} = -\mathbf{A}_{3,i} \cdot \mathbf{A}_j = -\mathbf{A}_{3,j} \cdot \mathbf{A}_i = \mathbf{A}_{i,j} \cdot \mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_{j,i} \cdot \mathbf{A}_3 \\ B_j^i &= A^{ik} B_{kj} \\ B^{ij} &= A^{ik} A^{jl} B_{kl} \end{aligned} \quad (2.16)$$

ilişkileri geçerlidir. (2.15) denklemini yüzey teorisinin *ikinci ana formu* olarak adlandırılır. İkinci ana form, yüzeyin dış geometrisini, ve eğrilik yarıçaplarını belirler.

2.3 Birim Baz Vektörlerinin Türetilmesi (Christoffel Sembolleri)

Yüzeyin baz vektörlerin kısmi türevleri alınır

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{i,j} &= \Gamma_{ij}^k \mathbf{A}_k + B_{ij} \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_{,j}^i &= -\Gamma_{jk}^i \mathbf{A}^k + B_j^i \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_{3,j} &= -B_j^k \mathbf{A}_k \end{aligned} \quad (2.17)$$

elde edilir. (2.17) denklemindeki Γ_{ij}^k bilinmeyen katsayılarıdır. Bilinmeyen bu katsayıları hesaplamak için

$$\Gamma_{ij}^\lambda = A^{\lambda p} \Gamma_{ij,p} \quad (2.18)$$

ifadesi kullanılır. Burada $\Gamma_{ij,p} = \{ij,p\}$ I. mertebeden Christoffel sembolleridir. Bu açık olarak yazılırsa,

$$\begin{aligned} \{ij,p\} &= \frac{1}{2} [A_{ip,j} + A_{jp,i} - A_{ij,p}] \\ \{11,1\} &= \frac{1}{2} A_{11,1} \quad , \quad \{11,2\} = -\frac{1}{2} A_{11,2} \\ \{12,1\} &= \frac{1}{2} A_{11,2} \quad , \quad \{12,2\} = \frac{1}{2} A_{22,1} \\ \{21,1\} &= \frac{1}{2} A_{11,2} \quad , \quad \{21,2\} = \frac{1}{2} A_{22,1} \\ \{22,1\} &= -\frac{1}{2} A_{22,1} \quad , \quad \{22,2\} = \frac{1}{2} A_{22,2} \end{aligned} \quad (2.19)$$

elde edilir. (2.19) denklemini (2.18) denkleminde yerine konulursa bilinmeyen katsayılar hesaplanabilir.

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= A^{11} \frac{1}{2} A_{11,1} = \frac{1}{2} \frac{A_{11,1}}{A_{11}} & \Gamma_{12}^1 &= A^{11} \frac{1}{2} A_{11,2} = \frac{1}{2} \frac{A_{11,2}}{A_{11}} \\
\Gamma_{11}^2 &= -A^{22} \frac{1}{2} A_{11,2} = -\frac{1}{2} \frac{A_{11,2}}{A_{22}} & \Gamma_{12}^2 &= A^{22} \frac{1}{2} A_{22,1} = \frac{1}{2} \frac{A_{22,1}}{A_{22}} \\
\Gamma_{22}^1 &= -A^{11} \frac{1}{2} A_{22,1} = -\frac{1}{2} \frac{A_{22,1}}{A_{11}} & \Gamma_{21}^1 &= A^{11} \frac{1}{2} A_{11,2} = \frac{1}{2} \frac{A_{11,2}}{A_{11}} \\
\Gamma_{22}^2 &= A^{22} \frac{1}{2} A_{22,2} = \frac{1}{2} \frac{A_{22,2}}{A_{22}} & \Gamma_{21}^2 &= A^{22} \frac{1}{2} A_{22,1} = \frac{1}{2} \frac{A_{22,1}}{A_{22}}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Hesaplanan Γ_{ij}^k katsayılarına ikinci mertebeden *Christoffel Sembolleri* denir. Elde edilen bu ifadeleri (2.17) denkleminde yerine konulursa, yüzeyin baz vektörlerinin kısmi türevleri açık olarak elde edilebilir.

2.3.1 Birim Vektörlerin Yüzey Koordinatlarına Göre Türevleri

$\mathbf{A}_1$ ve $\mathbf{A}_2$ boyunca $\mathbf{E}_1$ ve $\mathbf{E}_2$ birim vektörleri

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_i &= \frac{\mathbf{A}_i}{\sqrt{A_{ii}}} \\
\mathbf{E}_1 &= \frac{\mathbf{A}_1}{\sqrt{A_{11}}} & \mathbf{E}_2 &= \frac{\mathbf{A}_2}{\sqrt{A_{22}}} & \mathbf{E}_3 &= \mathbf{n}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

bulunur. (2.21) denkleminde ifade edilen birim vektörlerinin türevleri alınır

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{i,j} &= \frac{1}{\sqrt{A_{ii}}} \mathbf{A}_{i,j} - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{A}_i}{A_{ii} \sqrt{A_{ii}}} A_{ii,j} \\
&= \frac{1}{\sqrt{A_{ii}}} \left\{ \Gamma_{ij}^\lambda \mathbf{A}_\lambda + B_{ij} \mathbf{A}_3 - \frac{1}{2} \frac{A_{ii,j}}{A_{ii}} \mathbf{A}_i \right\}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

elde edilir. (2.22) denklemi açık olarak yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{1,1} &= -\frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \beta} \mathbf{E}_2 - \frac{A_1}{R_1} \mathbf{n} & \mathbf{E}_{1,2} &= \frac{1}{A_1} \frac{A_2}{\partial \alpha} \mathbf{E}_2 & \mathbf{E}_{2,1} &= \frac{1}{A_2} \frac{A_1}{\partial \beta} \mathbf{E}_1 \\
\mathbf{E}_{2,2} &= -\frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha} \mathbf{E}_1 - \frac{A_2}{R_2} \mathbf{n} & \mathbf{n}_{,1} &= \frac{A_1}{R_1} \mathbf{E}_1 & \mathbf{n}_{,2} &= \frac{A_2}{R_2} \mathbf{E}_2
\end{aligned} \quad (2.23)$$

birim vektörleri elde edilir. (2.23) denklemindeki R_1, R_2 asal eğrilik yarıçaplarını göstermek üzere A_1, A_2 , parametreleri arasındaki differansiyel bağıntıları vermektedir. (2.23) denkleminin ikinci mertebeden türevleri alınırsa örneğin aşağıdaki özdeşlikten

$$\mathbf{n}_{,12} = \mathbf{n}_{,21} \quad , \quad \mathbf{E}_{,12} = \mathbf{E}_{,21} \quad (2.24)$$

ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{A_2}{R_2} \right)_{,1} &= \frac{1}{R_1} A_{2,1} \quad , \quad \left(\frac{A_1}{R_1} \right)_{,2} = \frac{1}{R_2} A_{1,2} \\
\left(\frac{1}{A_1} A_{2,1} \right)_{,1} + \left(\frac{1}{A_2} A_{1,2} \right)_{,2} &= -\frac{A_1 A_2}{R_1 R_2}
\end{aligned} \quad (2.25)$$

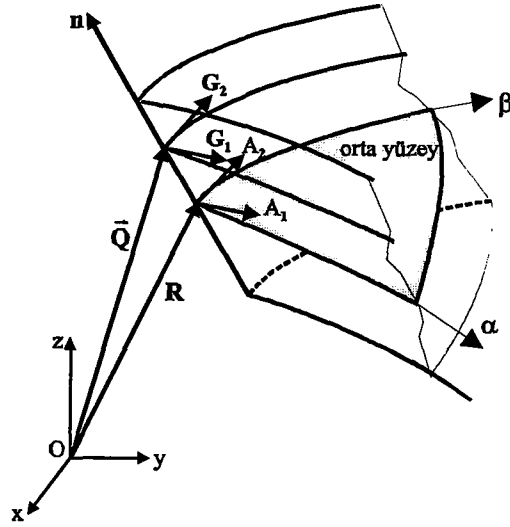
elde edilir. Bu ilişkiler verilen bir yüzeyin Codazzi ve Gauss şartları olarak bilinir [2]. Bulunan A_1, A_2, R_1, R_2 değerlerinin bu şartları sağlaması yüzeyin sürekli olduğunu göstermektedir.

2.4 Kabuğun Keyfi Bir Noktası

Şekil 2.2 de gösterildiği gibi kabuk ortalama yüzeyinden z mesafedeki keyfi herhangi bir noktanın konum vektörü $\bar{\mathbf{Q}}$

$$\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{R} + z \mathbf{n} \quad (2.26)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\mathbf{R}$, kabuk ortalama yüzeyine karşı gelen bir noktanın konum vektörü, $\mathbf{n}$ orta yüzeyin normal doğrultusundaki birim normal vektörü göstermektedir.



Şekil 2.2. Kabuk geometrisi

(2.26) denkleminin kısmi türevi alınırsa,

$$G_1 = \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \alpha} = A_1 + z n_{,1} \quad G_2 = \frac{\partial \bar{Q}}{\partial \beta} = A_2 + z n_{,2} \quad (2.27)$$

bu noktanın baz vektörleri elde edilir. (2.21) ve (2.23) denklemi (2.27) denkleminde yerine konursa

$$G_1 = G_1 E_1 \quad G_2 = G_2 E_2 \quad G_3 = n \quad (2.28)$$

elde edilir. Burada

$$G_1 = A_1 \left(1 + \frac{z}{R_1} \right) \quad G_2 = A_2 \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) \quad (2.29)$$

dir. $\bar{Q}$ konum vektörünün yay uzunluğu

$$dS^2(z) = d\bar{Q} \cdot d\bar{Q} = G_{11} d\alpha^2 + G_{22} d\beta^2 \quad (2.30)$$

şeklinde bulunabilir. Burada G_{11} ve G_{22} aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir.

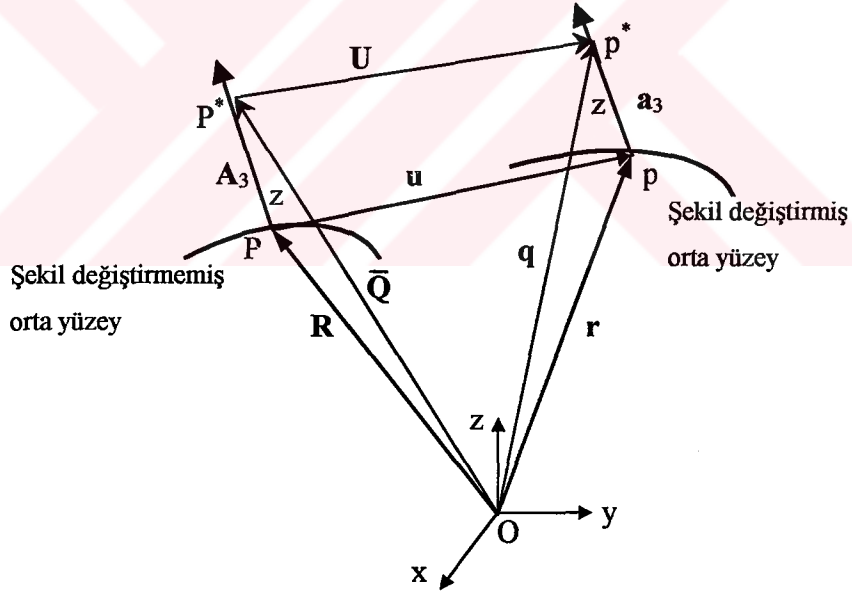
$$G_{11} = A_{11} \left(1 + \frac{z}{R_1} \right)^2 \quad G_{22} = A_{22} \left(1 + \frac{z}{R_2} \right)^2 \quad (2.31)$$

2.5 Yerdeğiştirme ve Şekil Değiştirme Bağlılıları

Başlangıcı O olan sabit dik bir x_i kartezyen sistemine göre ifade edilen elastik bir cismin P noktasının konum vektörü (2.1) denkleminde ifade edildiği şekildedir. Bu cismin noktalarının konumlarının P noktasından p ye gidecek şekilde değiştiği kabul edilir. p noktasının O ya göre konum vektörü Şekil (2.3) de görüldüğü gibi r dir. P ye göre p noktasının u konum vektörü kabuğun orta yüzey üzerinde P nin ne kadar yer değiştirdiğini göstermektedir. Bundan dolayı

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{R} \quad (2.32)$$

kabuğun orta yüzey üzerindeki yerdeğiştirme vektörüdür.



Şekil 2.3 Yerdeğiştirme vektörü

Şekil değiştirmemiş kabuk ortalama yüzeyinden z mesafedeki keyfî herhangi bir nokta P^* olsun. (2.26) denkleminde $\bar{Q}$ konum vektörü ile ifade edilen P^* noktasına karşı gelen şekil değiştirmiş kabuk ortalama yüzeyinden z mesafedeki nokta p^* olsun. p^* ın konum vektörü

$$\mathbf{q} = \mathbf{r} + z \mathbf{a}_3 \quad (2.33)$$

şeklinde ifade edilir. Şekil (2.3) den görüldüğü gibi kabuğun herhangi bir z mesafesindeki yerdeğiştirme vektörü

$$\mathbf{U} = \mathbf{q} - \bar{\mathbf{Q}} \quad (2.34)$$

ile verilmektedir.

Kabuğun herhangi bir $\bar{\mathbf{Q}}$ noktasının yerdeğiştirmesi

$$\mathbf{U}(\alpha, \beta, z) = U(\alpha, \beta, z) \mathbf{E}_1 + V(\alpha, \beta, z) \mathbf{E}_2 + W(\alpha, \beta, z) \mathbf{n} \quad (2.35)$$

vektörü ile tanımlanabilir. Burada $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, ve $\mathbf{n}$ sırasıyla α , β ve yüzeyin normali boyunca birim vektörleridir ve U , V , W ortogonal koordinatlar doğrultularına karşı gelen yerdeğiştirme vektörünün bileşenleridir.

Elastisite teorisinde ortogonal eğrisel koordinatlarda şekil değiştirme bağıntıları [4,49]

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{G_1} \left\{ U_{,\alpha} + \frac{V}{A_2} A_{1,\beta} + \frac{A_1 W}{R_1} \right\} \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{G_2} \left\{ V_{,\beta} + \frac{U}{A_2} A_{2,\alpha} + \frac{A_2 W}{R_2} \right\} \\ \varepsilon_n &= W_{,z} \\ \gamma_{1n} &= \frac{1}{G_1} W_{,\alpha} + G_1 \left(\frac{U}{G_1} \right)_{,z} \\ \gamma_{2n} &= \frac{1}{G_2} W_{,\beta} + G_2 \left(\frac{V}{G_2} \right)_{,z} \\ \gamma_{12} &= \frac{G_2}{G_1} \left(\frac{V}{G_2} \right)_{,\alpha} + \frac{G_1}{G_2} \left(\frac{U}{G_1} \right)_{,\beta} \end{aligned} \quad (2.36)$$

U , V , W yerdeğiştirmeler cinsinden ifade edilmiştir.

Bu çalışmada yerdeğiştirmelerin z' ye bağımlılığı, doğrusal (z) ile doğrusal olmayan $F_i(z)$ fonksiyonları ile ifade edilmiştir.

$$\begin{aligned} U(\alpha, \beta, z) &= u(\alpha, \beta) + \beta_1(\alpha, \beta) z + \gamma_1(\alpha, \beta) F_1(z) \\ V(\alpha, \beta, z) &= v(\alpha, \beta) + \beta_2(\alpha, \beta) z + \gamma_2(\alpha, \beta) F_2(z) \\ W(\alpha, \beta, z) &= w(\alpha, \beta) \end{aligned} \quad (2.37)$$

burada u, v, w kabuk ortalama yüzeyinin α, β doğrultularındaki yerdeğiştirmeler, β_1 ve β_2 dönmeleri, γ_1 ve γ_2 kabuğun asal enkesitlerinin kaymalarıdır.

β_1 ve β_2 dönmelerini, klasik ince kabuk teorilerinde olduğu gibi kayma meydana getirmeyen diye tanımlınabilir. Böylece (2.37) denklemindeki U, V , terimlerinin ilk ikisi alınır ve W (2.36) denklemindeki γ_{1n} ve γ_{2n} ifadelerinde yerine konur ve sıfıra eşitlenirse β_1 ve β_2

$$\beta_1 = \frac{u}{R_1} - \frac{1}{A_1} w_{,\alpha} \quad \beta_2 = \frac{v}{R_2} - \frac{1}{A_2} w_{,\beta} \quad (2.38)$$

olarak bulunur.

Bu çalışmada kabuk yüzey sınır koşullarını sağlamak üzere $F_1(z)$ ve $F_2(z)$ aşağıda gösterildiği gibi seçilmiştir.

$$F_1(z) = H_1 f(z) \quad F_2(z) = H_2 f(z) \quad (2.39)$$

burada H_1, H_2 and $f(z)$

$$H_1 = 1 + \frac{z}{R_1} \quad H_2 = 1 + \frac{z}{R_2} \quad f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (2.40)$$

gibi tarif edilebilir. Benzer fonksiyonlar Bhimaradda ve diğ. [34] tarafından genel dönel kabuklar için kullanılmıştır. (2.36) denklemindeki son üç terim kayma dağılımlarını vermektedir.

$$\gamma_{1n} = \gamma_1 H_1 \left(1 - \frac{4 z^2}{h^2} \right) \quad , \quad \gamma_{2n} = \gamma_2 H_2 \left(1 - \frac{4 z^2}{h^2} \right) \quad (2.41)$$

Bu kayma dağılımları kabuk yüzeyi üzerinde sıfır kayma gerilmesi koşulunu sağlamaktadır. Eğriliğin sıfır olması durumunda plaklarda bilinen parabolik kayma dağılımları bulunur. Diğer şekil değiştirme ifadelerinin elde edilmesi için (2.36) denkleminde (2.37) denklemindeki yer değiştirme ifadeleri yerleştirilerek ortalama yüzeye z mesafedeki bir nokta için,

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{H_1} \{ \varepsilon_{10} + \kappa_1 z + \chi_1 f(z) \} \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{H_2} \{ \varepsilon_{20} + \kappa_2 z + \chi_2 f(z) \} \\ \gamma_{12} &= \gamma_{120} + \kappa z + \chi f(z) \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{1n} &= \gamma_1 H_1 \left(1 - \frac{4}{h^2} z^2 \right) \\ \gamma_{2n} &= \gamma_2 H_2 \left(1 - \frac{4}{h^2} z^2 \right) \end{aligned}$$

bulunur. Burada ε_{10} , ε_{20} , κ_1 , κ_2 , χ_1 , χ_2 , γ_{120} , κ , χ parametrelerinin açık yazılışları aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{10} &= \frac{1}{A_1} u_{,\alpha} + \frac{v}{A_1 A_2} A_{1,\alpha} + \frac{w}{R_1}, \quad \varepsilon_{20} = \frac{1}{A_2} v_{,\beta} + \frac{u}{A_1 A_2} A_{2,\alpha} + \frac{w}{R_2} \\ \kappa_1 &= \frac{1}{A_1} \beta_{1,\alpha} + \frac{\beta_2}{A_1 A_2} A_{1,\beta}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{A_2} \beta_{2,\beta} + \frac{\beta_1}{A_1 A_2} A_{2,\alpha} \\ \chi_1 &= \frac{H_1}{A_1} \gamma_{1,\alpha} + \frac{\gamma_2 H_2}{A_1 A_2} A_{1,\beta}, \quad \chi_2 = \frac{H_2}{A_2} \gamma_{2,\beta} + \frac{\gamma_1 H_1}{A_1 A_2} A_{2,\alpha} \\ \gamma_{120} &= \frac{G_2}{G_1} \left(\frac{v}{G_2} \right)_{,\alpha} + \frac{G_1}{G_2} \left(\frac{u}{G_1} \right)_{,\beta}, \quad \kappa = \frac{G_2}{G_1} \left(\frac{\beta_2}{G_2} \right)_{,\alpha} + \frac{G_1}{G_2} \left(\frac{\beta_1}{G_1} \right)_{,\beta} \\ \chi &= \frac{G_2}{G_1} \left(\frac{\gamma_2}{A_2} \right)_{,\alpha} + \frac{G_1}{G_2} \left(\frac{\gamma_1}{A_1} \right)_{,\beta} \end{aligned} \quad (2.43)$$

3. GERİLMELER, İÇ KUVVETLER VE DENGİ DENKLEMLERİ

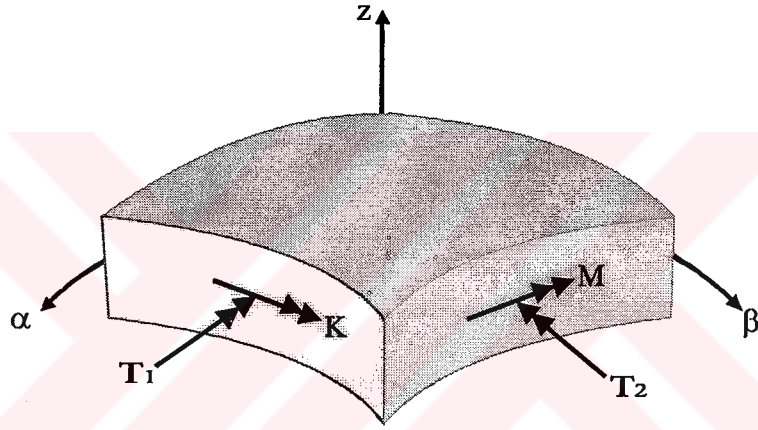
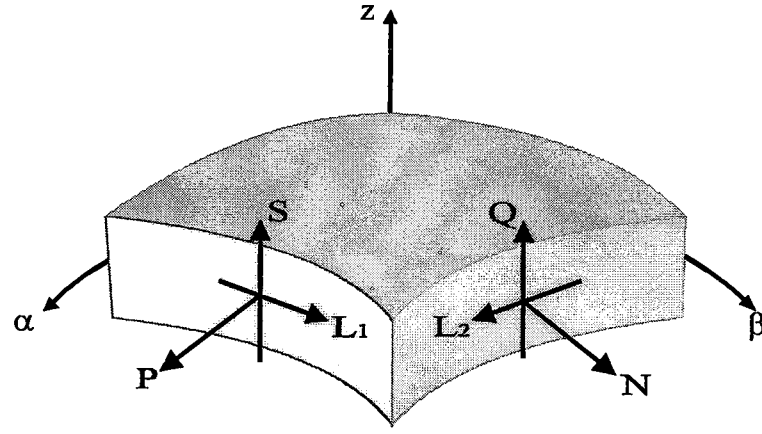
Hooke kanunu ile gerilme ve şekil değıştirme bağıntıları aşığıdaki gibi ifade edilmiştir.

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{E}{1-\nu^2} \{\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2\} \\ \sigma_2 &= \frac{E}{1-\nu^2} \{\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1\} \\ \tau_{1n} &= G \gamma_{1n} \\ \tau_{2n} &= G \gamma_{2n} \\ \tau_{12} &= G \gamma_{12}\end{aligned}\tag{3.1}$$

Burada E elastisite modülünü, ν Poisson oranını ve G kayma modülünü göstermektedir. Orta yüzeyin birim uzunluğuna etki eden toplam momentlerle toplam kuvvetler olarak tanımlanan iç kuvvetler, gerilmelerin, kabuk kalınlığı boyunca integrallerine eşittir.

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} P \\ L_1 \\ S \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \tau_{12} \\ \tau_{1n} \end{Bmatrix} H_2 dz \\ \begin{Bmatrix} N \\ L_2 \\ Q \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_2 \\ \tau_{21} \\ \tau_{2n} \end{Bmatrix} H_1 dz \\ \begin{Bmatrix} K \\ T_1 \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} z H_2 dz \\ \begin{Bmatrix} M \\ T_2 \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_2 \\ \tau_{21} \end{Bmatrix} z H_1 dz\end{aligned}\tag{3.2}$$

İç kuvvetlerin pozitif doğrultuları Şekil 3.1' de gösterildiğı gibidir.



Şekil 3.1 Kabuk elemanda pozitif kuvvet ve moment bileşenleri

İntegrallerin değerlendirilmesinde bazı basitleştirmeler uygulanarak keyfi geometriye sahip kabuklara ait iç kuvvetler aşağıdaki şekilde elde edilmiştir.

$$P = B \{ \varepsilon_{10} + \nu \varepsilon_{20} \} + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) D \bar{\kappa}_1$$

$$N = B \{ \varepsilon_{20} + \nu \varepsilon_{10} \} + \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) D \bar{\kappa}_2$$

$$K = D \{ \bar{\kappa}_1 + \nu \bar{\kappa}_2 \} + D \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \varepsilon_{10}$$

$$M = D \{ \bar{\kappa}_2 + \nu \bar{\kappa}_1 \} + D \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \varepsilon_{20}$$

$$\begin{aligned}
S &= \frac{B(1-\nu)}{3} \gamma_1 \\
Q &= \frac{B(1-\nu)}{3} \gamma_2 \\
L_1 &= G \frac{A_2}{A_1} \left\{ \frac{v h + \frac{4}{5} \frac{I}{R_2} \gamma_2}{A_2} \right\}_{,\alpha} + G \frac{A_1}{A_2} \left\{ \frac{u h + \frac{4}{5} \frac{I}{R_1} \gamma_1}{A_1} \right\}_{,\beta} \\
&\quad + G \frac{A_2}{A_1} \left\{ \frac{\Omega_2}{A_2} \right\}_{,\alpha} \frac{I}{R_2 - R_1} \\
L_2 &= G \frac{A_2}{A_1} \left\{ \frac{v h + \frac{4}{5} \frac{I}{R_2} \gamma_2}{A_2} \right\}_{,\alpha} + G \frac{A_1}{A_2} \left\{ \frac{u h + \frac{4}{5} \frac{I}{R_1} \gamma_1}{A_1} \right\}_{,\beta} \\
&\quad + G \frac{A_1}{A_2} \left\{ \frac{\Omega_1}{A_1} \right\}_{,\beta} \frac{I}{R_1 - R_2} \\
T_1 &= G \frac{A_2}{A_1} I \left\{ \frac{\Omega_2}{A_2} \right\}_{,\alpha} + G \frac{A_1}{A_2} I \Omega_1 + G \frac{A_2}{A_1} I \left\{ \frac{v + \frac{4}{5} \gamma_2}{A_2} \right\}_{,\alpha} \left(\frac{I}{R_2} - \frac{I}{R_1} \right) \\
T_2 &= G \frac{A_2}{A_1} I \left\{ \frac{\Omega_2}{A_2} \right\}_{,\alpha} + G \frac{A_1}{A_2} I \Omega_1 + G \frac{A_1}{A_2} I \left\{ \frac{u + \frac{4}{5} \gamma_1}{A_1} \right\}_{,\beta} \left(\frac{I}{R_1} - \frac{I}{R_2} \right) \quad (3.3)
\end{aligned}$$

Burada $B = E h / (1 - \nu^2)$ uzama rijitliğini, $D = E h^3 / 12 (1 - \nu^2)$ eğilme rijitliğini ve

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \beta_1 + \frac{4}{5} \gamma_1 \quad , \quad \Omega_2 = \beta_2 + \frac{4}{5} \gamma_2, \\
\bar{\kappa}_1 &= \kappa_1 + \frac{4}{5} \bar{\chi}_1 \quad , \quad \bar{\kappa}_2 = \kappa_2 + \frac{4}{5} \bar{\chi}_2 \\
\bar{\chi}_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha} + \frac{\gamma_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \beta} \quad , \quad \bar{\chi}_2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \gamma_2}{\partial \beta} + \frac{\gamma_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha} \quad , \quad I = \frac{h^3}{12}
\end{aligned} \quad (3.4)$$

dir. Bu denklemler Novozhilov [2] tarafından elde edilen denklemlere çok benzer olmakla beraber, bazı önemli farklılıklar vardır. Bu farklılıklardan en önemlisi Novozhilov denklemlerinde olmayan kayma bağıntılarının elde edilmiş olmasıdır.

Ayrıca, enine kaymanın moment üzerine etkisi (3.3) ve (3.4) denklemlerinde $\frac{4}{5} \chi_1$ ve $\frac{4}{5} \chi_2$ olarak ortaya çıkması Novozhilov denklemlerine göre farklılıklardır.

Bu denklemler kalın kabuklar için geçerlidir. Ancak bunları kabuk problemlerinin çözümünde kullanmak çok zordur. Zorluk, alan denklemlerinin potansiyel olduğunu gösterip bunlara karşı gelen fonksiyoneli türetmektedir. Çok sayıdaki pratik uygulamalar için kabuk kalınlığı $\left(\frac{1}{1000} < \frac{h}{R} < \frac{1}{50} \right)$ arasında değişmektedir. Bu

nedenle $\left(\frac{h}{R} \right)^2 \ll 1$ terimi basitlik için ihmal edilebilir. Bu basitleştirme kullanılarak aşağıdaki ilişkiler elde edilir.

$$P = B \{ \varepsilon_{10} + \nu \varepsilon_{20} \} \quad N = B \{ \varepsilon_{20} + \nu \varepsilon_{10} \}$$

$$K = D \{ \bar{\kappa}_1 + \nu \bar{\kappa}_2 \} \quad M = D \{ \bar{\kappa}_2 + \nu \bar{\kappa}_1 \}$$

$$S = \frac{B(1-\nu)}{3} \gamma_1 \quad Q = \frac{B(1-\nu)}{3} \gamma_2$$

$$L = \frac{B(1-\nu)}{2 A_1 A_2} \{ A_2 v_{,\alpha} - \nu A_{2,\alpha} + A_1 u_{,\beta} - \nu A_{1,\beta} \}$$

$$T = \frac{D(1-\nu)}{2} \left\{ \frac{1}{A_1} \Omega_{2,\alpha} - \frac{\Omega_2}{A_1 A_2} A_{2,\alpha} + \frac{1}{A_2} \Omega_{1,\beta} - \frac{\Omega_1}{A_1 A_2} A_{1,\beta} \right\} \quad (3.5)$$

Şekil (3.1) deki iç kuvvetler ve dış yükler altında kabuk elemanının orta yüzeyine etki eden kuvvetlerin dengesi beş diferansiyel denklemle [2],

$$\begin{aligned}
\frac{1}{A_1 A_2} \left\{ (A_2 P)_{,\alpha} + (A_1 L)_{,\beta} - N A_{2,\alpha} + L A_{1,\beta} \right\} + \frac{S}{R_1} + q_1 &= 0 \\
\frac{1}{A_1 A_2} \left\{ (A_2 L)_{,\alpha} + (A_1 N)_{,\beta} + L A_{2,\alpha} - P A_{1,\beta} \right\} + \frac{Q}{R_2} + q_2 &= 0 \\
\frac{1}{A_1 A_2} \left\{ (A_2 S)_{,\alpha} + (A_1 Q)_{,\beta} \right\} - \left(\frac{P}{R_1} + \frac{N}{R_2} \right) + q_n &= 0 \\
\frac{1}{A_1 A_2} \left\{ (A_2 K)_{,\alpha} + (A_1 T)_{,\beta} + T A_{1,\beta} - M A_{2,\alpha} \right\} - S &= 0 \\
\frac{1}{A_1 A_2} \left\{ (A_2 T)_{,\alpha} + (A_1 M)_{,\beta} + T A_{2,\alpha} - K A_{1,\beta} \right\} - Q &= 0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

şeklinde ifade edilebilir.

4. KEYFİ GEOMETRİYE SAHİP KABUKLARA AİT FONKSİYONEL

4.1 Alan Denklemleri ve Fonksiyonelin Elde Edilmesi

(3.6) denkleminde verilen denge denklemleri ile (3.5) denkleminde verilen kinematik denklemlerin yanısıra kabuğun dinamik sınır koşulları,

$$-\mathbf{R} + \hat{\mathbf{R}} = 0, -\mathbf{M} + \hat{\mathbf{M}} = 0, \quad (4.1)$$

ve geometrik sınır koşulları,

$$\Omega - \hat{\Omega} = 0, \quad \mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}} = 0 \quad (4.2)$$

şeklinde sembolik olarak yazılabilir. Sınır koşullarının açık ifadeleri varyasyonel işlemler sonunda elde edilecektir. (4.1) ve (4.2) denklemindeki şapkalı terimler sırasıyla sınırlarda bilinen $\mathbf{R}$, $\mathbf{M}$, Ω , $\mathbf{u}$ kuvvet, moment, dönme, ve yerdeğiştirme vektörlerine karşı gelmektedir.

Kabuklar için sınır koşullarını da içerecek şekilde alan denklemleri operatör formda yazılabilir.

$$\mathbf{Q} = \mathbf{L} \mathbf{y} - \mathbf{f} \quad (4.3)$$

$\mathbf{Q}$ operatörü, (3.5) ve (3.6) denklemleri kullanılarak

$$\begin{bmatrix}
L_{ij} & 0 \\
0 & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} y_i \\ \bar{u} \\ \bar{\Omega} \\ \bar{M} \\ \bar{R} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ -\hat{\bar{u}} \\ -\hat{\bar{\Omega}} \\ \hat{\bar{M}} \\ \hat{\bar{R}} \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

matris formunda yazılabilir. Burada L_{ij} , y_i ve f_i için,

$$L_{1,6} = \frac{B}{A_1 A_2} \{ (A_2 \cdot)_{,\alpha} - \nu A_{2,\alpha} \} \quad L_{1,7} = \frac{B}{A_1 A_2} \{ \nu (A_2 \cdot)_{,\alpha} - A_{2,\alpha} \}$$

$$L_{1,8} = \frac{B(1-\nu)}{2A_1 A_2} \{ (A_1 \cdot)_{,\beta} - A_{1,\beta} \} \quad L_{1,12} = \frac{5}{12} \frac{B(1-\nu)}{R_1}$$

$$L_{2,6} = \frac{B}{A_1 A_2} \{ -A_{1,\beta} + \nu (A_1 \cdot)_{,\beta} \} \quad L_{2,7} = \frac{B}{A_1 A_2} \{ (A_1 \cdot)_{,\beta} - \nu A_{1,\beta} \}$$

$$L_{2,8} = \frac{B(1-\nu)}{2A_1 A_2} \{ (A_2 \cdot)_{,\alpha} + A_{2,\alpha} \} \quad L_{2,13} = \frac{5}{12} \frac{B(1-\nu)}{R_2}$$

$$L_{3,6} = -B \left\{ \frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2} \right\} \quad , \quad L_{3,7} = -B \left\{ \frac{\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right\}$$

$$L_{3,12} = -\frac{12B}{5(1-\nu)A_1 A_2} \{ (A_2 \cdot)_{,\alpha} + \nu (A_1 \cdot)_{,\beta} \}$$

$$L_{3,13} = -\frac{12B}{5(1-\nu)A_1 A_2} \{ \nu (A_2 \cdot)_{,\alpha} + (A_1 \cdot)_{,\beta} \}$$

$$L_{4,9} = \frac{D}{B} L_{1,6}; \quad L_{4,10} = \frac{D}{B} L_{1,7}; \quad L_{4,11} = \frac{D}{B} L_{1,8}; \quad L_{4,12} = \frac{5}{12} B(1-\nu)$$

$$L_{5,9} = \frac{D}{B} L_{2,6}; \quad L_{5,10} = \frac{D}{B} L_{2,7}; \quad L_{5,11} = \frac{D}{B} L_{2,8}; \quad L_{5,13} = \frac{5}{12} B(1-\nu)$$

$$L_{6,1} = -\frac{B}{A_1 A_2} \left\{ \nu A_{2,\alpha} + A_2(\cdot)_{,\alpha} \right\} ; \quad L_{6,2} = -\frac{B}{A_1 A_2} \left\{ A_{1,\beta} + \nu A_1(\cdot)_{,\beta} \right\}$$

$$L_{6,3} = L_{3,6} ; \quad L_{6,6} = B ; \quad L_{6,7} = \nu B$$

$$L_{7,1} = -\frac{B}{A_1 A_2} \left\{ A_{2,\alpha} + \nu A_2(\cdot)_{,\alpha} \right\} ; \quad L_{7,2} = -\frac{B}{A_1 A_2} \left\{ \nu A_{1,\beta} + A_1(\cdot)_{,\beta} \right\}$$

$$L_{7,3} = -B \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2} \right) ; \quad L_{7,6} = \nu B ; \quad L_{7,7} = B$$

$$L_{8,1} = -\frac{B(1-\nu)}{2A_1 A_2} \left\{ A_1(\cdot)_{,\beta} - A_{1,\beta} \right\} ; \quad L_{8,2} = -\frac{B(1-\nu)}{2A_1 A_2} \left\{ A_2(\cdot)_{,\alpha} - A_{2,\alpha} \right\}$$

$$L_{9,4} = \frac{D}{B} L_{6,1} ; \quad L_{9,5} = -\frac{D}{B} L_{6,2} ; \quad L_{9,9} = D ; \quad L_{9,10} = \nu D$$

$$L_{10,4} = \frac{D}{B} L_{7,1} ; \quad L_{10,5} = \frac{D}{B} L_{7,2} ; \quad L_{10,9} = \nu D ; \quad L_{10,10} = D$$

$$L_{11,4} = -\frac{D}{B} L_{8,1} ; \quad L_{11,5} = -\frac{D}{B} L_{8,2} ; \quad L_{11,11} = -\frac{D(1-\nu)}{2}$$

$$L_{12,1} = \frac{5B(1-\nu)}{12} \frac{1}{R_1} ; \quad L_{12,3} = -\frac{5B(1-\nu)}{12} \left\{ \frac{1}{A_1}(\cdot)_{,\alpha} \right\}$$

$$L_{12,4} = \frac{B(1-\nu)}{3} ; \quad L_{12,12} = \frac{5B(1-\nu)}{12}$$

$$L_{13,2} = \frac{5B(1-\nu)}{12} \frac{1}{R_2} ; \quad L_{13,3} = \frac{5B(1-\nu)}{12} \left(\frac{1}{A_2}(\cdot)_{,\beta} \right) ; \quad L_{13,13} = \frac{5B(1-\nu)}{12}$$

$$y_1 = u ; \quad y_2 = \nu ; \quad y_3 = w ; \quad y_4 = \Omega_1 ; \quad y_5 = \Omega_2 ; \quad y_6 = \frac{P - \nu N}{B(1 - \nu^2)},$$

$$y_7 = \frac{N - \nu P}{B(1 - \nu^2)} ; \quad y_8 = \frac{2L}{B(1 - \nu)} ; \quad y_9 = \frac{K - \nu M}{D(1 - \nu^2)} ; \quad y_{10} = \frac{M - \nu K}{D(1 - \nu^2)},$$

$$y_{11} = \frac{2T}{D(1 - \nu)} ; \quad y_{12} = \frac{12S}{5B(1 - \nu)} ; \quad y_{13} = \frac{12Q}{5B(1 - \nu)}$$

$$f_1 = -q_1 , f_2 = -q_2 , f_3 = -q_n \quad (4.5)$$

ifadeleri elde edilir.

(3.5) ve (3.6) denklemlerinde verilen alan denklemlerine ait fonksiyonelin elde edilmesi için bu amaca uygun *Gâteaux diferansiyeli* metodu kullanılmıştır. Bu metoda ait geniş kullanımı ve açıklamaları [41] de yer almaktadır. Burada basitlik için temel kavram ve tanımları verilecektir. Q operatörünün *Gâteaux* türevi şu şekilde tanımlanmaktadır [50]:

$$dQ(y, \bar{y}) = \left. \frac{\partial Q(y + \tau \bar{y})}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} \quad (4.6)$$

Burada τ bir skalerdir. Eğer Q sürekli bir operatörse ve $\langle dQ(y, \bar{y}) \rangle$ gibi *Gâteaux* diferansiyeli varsa ve

$$\langle dQ(y, \bar{y}), y^* \rangle = \langle dQ(y, y^*), \bar{y} \rangle \quad (4.7)$$

eşitliği sağlanıyorsa Q operatörü potansiyeldir. Burada parantez içerisindeki ifadeler iç çarpımı göstermektedir. Bu tanım kullanılarak iç çarpımlar yapılırsa denklem (4.4) deki Q operatörünün potansiyel olduğu görülür ve sınır koşulları da;

$$[R, u] = [A_1 L, u]_\beta + [A_2 P, u]_\alpha + [A_2 L, v]_\alpha + [A_1 N, v]_\beta + [A_2 S, w]_\alpha + [A_1 Q, w]_\beta \quad (4.8)$$

$$[M, \Omega] = [A_2 K, \Omega_1]_\alpha + [A_1 T, \Omega_1]_\beta + [A_2 T, \Omega_2]_\alpha + [A_1 M, \Omega_2]_\beta + [A_2 S, w]_\alpha + [A_1 Q, w]_\beta$$

şeklinde elde edilir. Sınır koşulları mekanik açıdan önemlidir. Bütün bu terimler sınır kuvvetleri tarafından yapılan işi tanımlamaktadır. Bu durumda alan denklemlerine karşı gelen I fonksiyoneli

$$I(y) = \int_0^1 [Q(sy, y) y] ds \quad (4.9)$$

şeklinde hesaplanabilir [50]. Burada s bir skalerdir.

Bu çalışmada alan denklemlerine karşı gelen bu fonksiyonel iki şekilde elde edilmiştir.

I. Form Fonksiyonel

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_1(\mathbf{y}) = & -[A_2 u, \alpha, P] - [u, \beta, A_1 L] - [A_{2,\alpha} u, N] + [A_{1,\beta} L, u] - \langle S, \Omega_1 \rangle \\
& - [S, A_2 w, \alpha] + \left\langle S, \frac{u}{R_1} \right\rangle - [A_2 L, v, \alpha] + [A_{2,\alpha} L, v] - [A_1 N, v, \beta] \\
& - [P A_{1,\beta}, v] - \langle Q, \Omega_2 \rangle - [Q, A_1 w, \beta] + \left\langle Q, \frac{v}{R_2} \right\rangle - \left\langle \frac{P}{R_1}, w \right\rangle - \left\langle \frac{N}{R_2}, w \right\rangle \\
& + \langle q_1, u \rangle + \langle q_2, v \rangle + \langle q_n, w \rangle - [A_2 K, \Omega_{1,\alpha}] + [A_{1,\beta} \Omega_1, T] - [A_1 T, \Omega_{1,\beta}] \\
& - [M A_{2,\alpha}, \Omega_2] - [A_2 \Omega_{2,\alpha}, T] - [A_1 \Omega_{2,\beta}, M] + [T A_{2,\alpha}, \Omega_2] \\
& - [K A_{1,\beta}, \Omega_2] + \frac{1}{B(1-\nu^2)} \left\{ \frac{1}{2} \langle P, P \rangle - \nu \langle P, N \rangle + \frac{1}{2} \langle N, N \rangle \right\} \\
& + \frac{1}{B(1-\nu)} \langle L, L \rangle + \frac{1}{D(1-\nu^2)} \left\{ \frac{1}{2} \langle K, K \rangle - \nu \langle K, M \rangle + \frac{1}{2} \langle M, M \rangle \right\} \\
& + \frac{1}{D(1-\nu)} \langle T, T \rangle + \frac{6}{5B(1-\nu)} \{ \langle S, S \rangle + \langle Q, Q \rangle \} \\
& + [\mathbf{R}, (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}})]_{\mathcal{E}} + [\mathbf{M}, (\Omega - \hat{\Omega})]_{\mathcal{E}} + [\hat{\mathbf{R}}, u]_{\mathcal{G}} + [\hat{\mathbf{M}}, \Omega]_{\mathcal{G}}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

II. Form Fonksiyonel

Bu fonksiyonelin elde edilmesinde bazı sınır koşullarının problemlere kolaylıkla uygulanmasına karşılık, bazılarında güçlüklerle karşılaşmaktadır. Örneğin serbest kenarlarda eğilme ve burulma momentleri ile kesme kuvvetleri bilinen değerlerdir. Serbest kenarlarda (3.4) denkleminin içindeki Ω_1 ve Ω_2 ifadelerini *I. form* fonksiyonelde tanımlamak güçtür. Bu nedenle (3.3) denklemindeki kesme kuvvetleri S , ve Q içerisindeki γ_1 , γ_2 ifadeleri

$$\gamma_1 = \frac{3}{B(1-\nu)} S \quad , \quad \gamma_2 = \frac{3}{B(1-\nu)} Q \tag{4.11}$$

elde edilerek Ω_1 ve Ω_2 ifadelerinde yerine yazılırsa,

$$\Omega_1 = \beta_1 + \frac{12}{5} \frac{S}{B(1-\nu)} \quad , \quad \Omega_2 = \beta_2 + \frac{12}{5} \frac{Q}{B(1-\nu)} \quad (4.12)$$

şeklinde ifade edilebilir. (4.12) denklemi *I. form* fonksiyonelde yerine konularak *II. form* fonksiyonel elde edilir.

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_2(\mathbf{y}) = & -[A_2 u, \alpha, P] - [u, \beta, A_1 L] - [A_{2,\alpha} u, N] + [A_{1,\beta} L, u] - \langle S, \beta_1 \rangle \\ & - \frac{6}{5B(1-\nu)} \langle S, S \rangle - [S, A_2 w, \alpha] + \left\langle S, \frac{u}{R_1} \right\rangle - [A_2 L, v, \alpha] + [A_{2,\alpha} L, v] \\ & - [A_1 N, v, \beta] - [P A_{1,\beta}, v] - \langle Q, \beta_2 \rangle - \frac{6}{5B(1-\nu)} \langle Q, Q \rangle - [Q, A_1 w, \beta] \\ & + \left\langle Q, \frac{v}{R_2} \right\rangle - \left\langle \frac{P}{R_1}, w \right\rangle - \left\langle \frac{N}{R_2}, w \right\rangle + \langle q_1, u \rangle + \langle q_2, v \rangle + \langle q_n, w \rangle \\ & - [A_2 K, \beta_{1,\alpha}] + [A_{1,\beta} \beta_1, T] - [A_1 T, \beta_{1,\beta}] - [M A_{2,\alpha}, \beta_2] \\ & - [A_2 \beta_{2,\alpha}, T] - [A_1 \beta_{2,\beta}, M] + [T A_{2,\alpha}, \beta_2] - [K A_{1,\beta}, \beta_2] \\ & + \frac{12}{5B(1-\nu)} \{ [A_{1,\beta} S, T] - [A_1 T, S_{1,\beta}] - [A_2 K, S_{1,\alpha}] - [M A_{2,\alpha}, Q] \\ & - [A_2 Q_{2,\alpha}, T] - [A_1 Q_{2,\beta}, M] + [T A_{2,\alpha}, Q] - [K A_{1,\alpha}, Q] \} \\ & + \frac{1}{B(1-\nu^2)} \left\{ \frac{1}{2} \langle P, P \rangle - \nu \langle P, N \rangle + \frac{1}{2} \langle N, N \rangle \right\} + \frac{1}{B(1-\nu)} \langle L, L \rangle \\ & + \frac{1}{D(1-\nu^2)} \left\{ \frac{1}{2} \langle K, K \rangle - \nu \langle K, M \rangle + \frac{1}{2} \langle M, M \rangle \right\} + \frac{1}{D(1-\nu)} \langle T, T \rangle \\ & + [\mathbf{R}, (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}})]_{\mathcal{E}} + [\mathbf{M}, (\Omega - \hat{\Omega})]_{\mathcal{E}} + [\hat{\mathbf{R}}, \mathbf{u}]_{\mathcal{G}} + [\hat{\mathbf{M}}, \Omega]_{\mathcal{G}} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Fonksiyonellerdeki parantezli ifadeler iç çarpımı göstermektedir ve aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

$$\begin{aligned}\langle f, g \rangle &= \iint_A f g A_1 A_2 d\alpha d\beta \\ [f, g] &= \iint_A f g d\alpha d\beta\end{aligned}\tag{4.14}$$

(4.10) ve (4.13) denklemindeki σ ve ε alt indisli parantez içerisindeki ifadeler sırasıyla dinamik ve geometrik sınır koşullarının verildiği noktalarda geçerlidir.

Böylece elde edilen (4.10) ve (4.13) denklemleri *keyfi geometriye sahip kabuklar* için geçerli olan fonksiyonlardır.

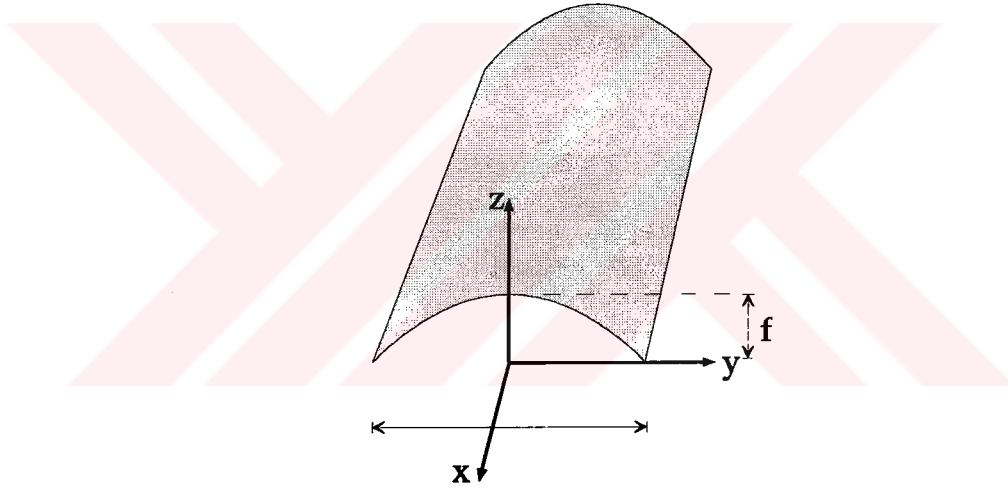


5. PARABOLİK SİLİNDİR VE DAİRESEL SİLİNDİRİK KABUKLAR İÇİN SONLU ELEMEN FORMÜLASYONLARI

5.1 Parabolik Silindir Kabukların Geometrisi ve Fonksiyoneli

Bu çalışmada geliştirilen teori, ilk olarak parabolik silindir kabuklara uygulanmıştır. Mühendislik uygulamalarında parabolik geometri geniş kullanım alanına sahiptir.

Parabolik silindir Şekil 5.1'de gösterildiği gibi



Şekil 5.1 Parabolik silindir kabuk geometrisi

$$z = f \left\{ 1 - \frac{4}{\ell^2} y^2 \right\} \quad (5.1)$$

fonksiyonu ile tanımlanmıştır. Parabolik silindir kabuğun eğriliği aşağıdaki şekilde bulunabilir.

$$R_1 = \infty \quad \text{ve} \quad \chi = \frac{1}{R_2} = \frac{z''}{(1 + z'^2)^{3/2}} = - \frac{2 \alpha f}{(1 + A^2 y^2)^{3/2}} \quad (5.2)$$

Burada,

$$\alpha = \frac{4}{\ell^2} \quad , \quad A = -\frac{8f}{\ell^2} \quad (5.3)$$

dir. İki nokta arasındaki yay boyu (2.3) denkleminde

$$dS^2 = A_1^2 dx^2 + A_2^2 dy^2 \quad (5.4)$$

yazılabilir. Parabolik silindir kabuk için

$$A_1 = 1 \quad , \quad A_2 = \sqrt{1 + A^2 y^2} \quad (5.5)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. (5.5) denklemini (4.10) denkleminde yerine konulursa parabolik silindir kabuklar için fonksiyonel aşağıdaki şekle dönüşür.

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(\mathbf{y}) = & -[A_2 u_{,x}, P] - [u_{,y}, L] - \langle S, \Omega_1 \rangle - [S, A_2 w_{,x}] - [A_2 L, v_{,x}] - [N, v_{,y}] \\ & - \langle Q, \Omega_2 \rangle - [Q, w_{,y}] + \left\langle Q, \frac{v}{R_2} \right\rangle - \left\langle \frac{N}{R_2}, w \right\rangle + \langle q_1, u \rangle + \langle q_2, v \rangle + \langle q_n, w \rangle \\ & - [A_2 K, \Omega_{1,x}] - [T, \Omega_{1,y}] - [A_2 \Omega_{2,x}, T] - [\Omega_{2,y}, M] \\ & + \frac{1}{B(1-\nu^2)} \left\{ \frac{1}{2} \langle P, P \rangle - \nu \langle P, N \rangle + \frac{1}{2} \langle N, N \rangle \right\} + \frac{1}{B(1-\nu)} \langle L, L \rangle \\ & + \frac{1}{D(1-\nu^2)} \left\{ \frac{1}{2} \langle K, K \rangle - \nu \langle K, M \rangle + \frac{1}{2} \langle M, M \rangle \right\} \\ & + \frac{1}{D(1-\nu)} \langle T, T \rangle + \frac{6}{5B(1-\nu)} \{ \langle S, S \rangle + \langle Q, Q \rangle \} \\ & + [\mathbf{R}, (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}})]_{\mathcal{E}} + [\mathbf{M}, (\Omega - \hat{\Omega})]_{\mathcal{E}} + [\hat{\mathbf{R}}, u]_{\mathcal{O}} + [\hat{\mathbf{M}}, \Omega]_{\mathcal{O}} \end{aligned} \quad (5.6)$$

5.2. Dairesel Silindirik Kabukların Geometrisi ve Fonksiyoneli

Keyfi geometriye sahip kabuklar için elde edilen fonksiyonele uygulama olmak üzere pratik öneme sahip olan ve mevcut çalışmalarda çok kullanılan dairese silindirik kabuklar gözönüne alınmıştır. Silindirik kabuklara ait çalışmalar ve uygulamaları [43,51,52] yer almaktadır. (4.10) denkleminde aşağıdaki ifadeler yerine konursa,

$$A_1 = A_2 = 1 \quad , \quad R_1 = \infty \quad , \quad R_2 = R \quad (5.7)$$

dairese silindirik kabuklar için fonksiyonel elde edilir.

$$\begin{aligned} I(\mathbf{y}) = & -[u_{,x}, P] - [u_{,s}, L] - \langle S, \Omega \rangle - [S, w_{,x}] - [L, v_{,x}] - [N, v_{,s}] \\ & - \langle Q, \Omega_2 \rangle - [Q, w_{,s}] + \left\langle Q, \frac{v}{R} \right\rangle - \left\langle \frac{N}{R}, w \right\rangle + \langle q_1, u \rangle + \langle q_2, v \rangle + \langle q_n, w \rangle \\ & - [K, \Omega_{1,x}] - [T, \Omega_{1,s}] - [\Omega_{2,x}, T] - [\Omega_{2,s}, M] \\ & + \frac{1}{B(1-\nu^2)} \left\{ \frac{1}{2} \langle P, P \rangle - \nu \langle P, N \rangle + \frac{1}{2} \langle N, N \rangle \right\} + \frac{1}{B(1-\nu)} \langle L, L \rangle \\ & + \frac{1}{D(1-\nu^2)} \left\{ \frac{1}{2} \langle K, K \rangle - \nu \langle K, M \rangle + \frac{1}{2} \langle M, M \rangle \right\} \\ & + \frac{1}{D(1-\nu)} \langle T, T \rangle + \frac{6}{5B(1-\nu)} \{ \langle S, S \rangle + \langle Q, Q \rangle \} \\ & + [\mathbf{R}, (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}})]_{\mathcal{E}} + [\mathbf{M}, (\Omega - \hat{\Omega})]_{\mathcal{E}} + [\hat{\mathbf{R}}, u]_{\mathcal{G}} + [\hat{\mathbf{M}}, \Omega]_{\mathcal{G}} \end{aligned} \quad (5.8)$$

5.3. Sonlu Eleman Metodunun Tanımı

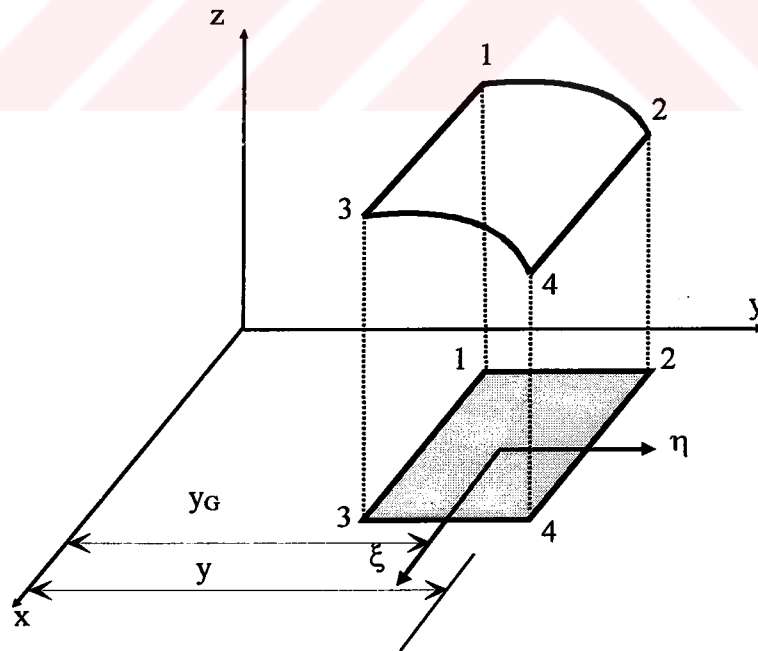
Sonlu elemanlar metodu mühendislik uygulamalarında iki ve üç boyutlu karmaşık problemlerin kesin metodlarla çözümünde karşılaşılan zorlukları aşmak için kullanılan yaklaşık ve sayısal çözüm yöntemlerinden birisidir. Sonlu elemanlar metodu aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

- İki veya üç boyutlu problem sonlu sayıda elemanlara ayrılır ve elemanlar düğüm denilen sınır noktaları ile birbirine bağlanırlar.
- Bölgenin elemanlara ayrılmasından sonra kabuk büyüklüklerini ifade etmek için sürekli fonksiyonlar seçilir. Bu fonksiyonlara şekil fonksiyonları adı verilir.
- Parametrelerin nodal değerlerine göre fonksiyonel ekstremum yapılır, bilinmeyen sayısı kadar doğrusal denklem bulunur.
- Eleman matrisi elde edildikten sonra sistem matrisi oluşturulur.
- Sınır koşulları dikkate alınarak denklem takımının çözümü yapılır.

Eleman sayısı artırılarak yaklaşık çözümün gerçek sonuca yaklaşması için şekil fonksiyonu süreklilik ve tamlık koşulunu sağlamalıdır.

5.4. Dikdörtgen elemanlar

Sonlu eleman formülasyonunda kartezyen koordinat sistemi içerisinde gösterilen bir keyfi kabuk elemanın geometrisi, Şekil 5.2' de gösterildiği gibi, yerel veya doğal koordinatlardaki dikdörtgen elemana dönüşür.

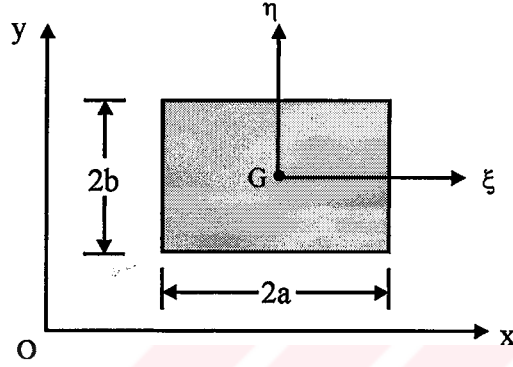


Şekil 5.2 Global ve yerel koordinat sisteminde eleman

Eleman matrislerini elde etmek için ψ_i bilinear şekil fonksiyonu

$$\psi_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) \quad , \quad \xi_i = \pm 1, \eta_i = \pm 1, \quad (i = 1, \dots, 4) \quad (5.9)$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu çalışmada kenarlar boyunca ara noktaları olmayan dikdörtgen eleman kullanılmıştır (Şekil 5.2.).



Şekil 5.3. Dikdörtgen eleman

Şekil 5.3 de görüldüğü gibi G dikdörtgen elemanın ağırlık merkezi olmak üzere ξ_G ve η_G ,

$$\xi = \frac{x - x_G}{a} \quad , \quad \eta = \frac{y - y_G}{b} \quad (5.10)$$

olur ve (5.9) denklemi her düğüm noktası için yazılırsa,

$$\begin{aligned} \psi_1(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta) \\ \psi_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta) \\ \psi_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta) \\ \psi_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta) \end{aligned} \quad (5.11)$$

bulunur. (4.10) denklemindeki fonksiyonel incelendiğinde, (4.11) denklemindeki ifadelerin $\partial/\partial\alpha$ ve $\partial/\partial\beta$ kısmi türevlerinin bilinmesi gerekmektedir. Zincir kuralına göre,

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial x} = \frac{\partial\psi_i}{\partial\xi} \frac{\partial\xi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\psi_i}{\partial y} = \frac{\partial\psi_i}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial y} \quad (5.12)$$

şeklinde hesaplanabilir. Buna göre $i = 1, \dots, 4$ için bu türev işlemleri yapılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi_1}{\partial x} &= \frac{1}{4a} (-1 + \eta) \quad , \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial y} = \frac{1}{4b} (-1 + \xi) \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x} &= \frac{1}{4a} (-1 - \eta) \quad , \quad \frac{\partial\psi_2}{\partial y} = \frac{1}{4b} (1 - \xi) \\ \frac{\partial\psi_3}{\partial x} &= \frac{1}{4a} (1 - \eta) \quad , \quad \frac{\partial\psi_3}{\partial y} = \frac{1}{4b} (-1 - \xi) \\ \frac{\partial\psi_4}{\partial x} &= \frac{1}{4a} (1 + \eta) \quad , \quad \frac{\partial\psi_4}{\partial y} = \frac{1}{4b} (1 + \xi) \end{aligned} \quad (5.13)$$

bulunur.

5.5 Parabolik Silindir Kabuklar İçin Sonlu Eleman Formülasyonu

Parabolik silindir kabuk eleman alt matrislerinin hesabı için (5.10) denklemindeki η tanımını kullanılarak (5.5) denklemindeki ifadeden

$$A_2 = \sqrt{1 + 4\alpha^2 f^2 (\eta b + y_G)^2} \quad (5.14)$$

elde edilir.

Elemanın düğüm noktalarındaki değişkenler u, v, w yerdeğiştirmeler, Ω_1, Ω_2 dönmeler, P, N, L, S, Q, K, M, T iç kuvvetler olarak seçilirse, bu değişkenler ψ_i şekil fonksiyonları ile örneğin $u = \sum u_i \psi_i$ şeklinde ifade edilecektir.

Parabolik silindir kabuk için eleman matrislerini açık şekilde, şekil fonksiyonu ifadeleri ile bunların kısmi türevlerinin dikdörtgen eleman üzerinde alan

integrasyonun $i = 1, \dots, 4, j = 1, \dots, 4$ e kadar hesaplanmasıyla elde edilir. Bu integraller Mathematica 3.0 programı kullanılarak hesaplanmıştır.

$$\begin{aligned} [k_1] &= \int_A \psi_i \psi_j A_2 dA, \quad [k_2] = \int_A \psi_i \psi_{j,\alpha} A_2 dA \\ [k_3] &= \int_A \psi_i \psi_{j,\beta} dA, \quad [k_4] = \int_A \psi_i \psi_j A_2 \frac{1}{R} dA \end{aligned} \quad (5.15)$$

Bu altmatrislerin açık ifadeleri aşağıda verilmiştir. Bütün alt matrisler için geçerli olan bazı parametreler

$$Sqr1 = \sqrt{1 + (bf1)^2}, \quad Sqr2 = \sqrt{1 + (bf2)^2} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} XLog1 &= LOG \left(1 + 4 fa (b^2 - 2 b yg + yg^2) \right) \\ XLog2 &= LOG \left(1 + 4 fa (b^2 + 2 b yg + yg^2) \right) \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$ArcSh1 = LOG \left(bf1 + \sqrt{(bf1)^2 + 1} \right), \quad ArcSh2 = LOG \left(bf2 + \sqrt{(bf2)^2 + 1} \right) \quad (5.18)$$

$$Arct1 = ATAN(2 f (-b + yg) \alpha), \quad Arct2 = ATAN(2 f (b + yg) \alpha) \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} fb1 &= \alpha^3 b^2 f^3 & fa &= f^2 \alpha^2 & bf &= b f \alpha \\ fb2 &= \alpha^2 b^2 f^2 & fg &= f yg \alpha & bf1 &= 2 f \alpha (b - yg) \\ fb3 &= \alpha^3 b^3 f^3 & fg2 &= f^2 yg^2 \alpha^2 & bf2 &= 2 f \alpha (b + yg) \\ fb4 &= \alpha^4 b^3 f^4 & fg3 &= f^3 yg^3 \alpha^3 & & \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\alpha = \frac{4}{L^2} \quad (5.21)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu alt matrisler

$$[k_1] = \begin{bmatrix} 2*c1 & 2*c2 & c1 & c2 \\ 2*c2 & 2*c3 & c2 & c3 \\ c1 & c2 & 2*c1 & 2*c2 \\ c2 & c3 & 2*c2 & 2*c3 \end{bmatrix} \quad (5.22.a)$$

burada,

$$\begin{aligned} c1 &= A \left\{ Sqr1 (38 bf + 26 fg + 272 fb3 - 176 fb2 fg - 80 bf fg2 - 16 fg3) \right. \\ &\quad - Sqr2 (26 bf + 26 fg - 16 fb3 - 48 fb2 fg - 48 bf fg2 - 16 fg3) \\ &\quad \left. - (ArcSh1 + ArcSh2) (3 - 48 fb2 - 96 bf fg - 48 fg2) \right\} / (2304 fb1) \\ c2 &= A \left\{ Sqr1 (-6 bf - 26 fg + 48 fb3 - 80 fb2 fg + 16 bf fg2 + 16 fg3) \right. \\ &\quad - Sqr2 (6 bf - 26 fg - 48 fb3 - 80 fb2 fg - 16 bf fg2 + 16 fg3) \\ &\quad \left. + (ArcSh1 + ArcSh2) (3 + 48 fb2 - 48 fg2) \right\} / (2304 fb1) \\ c3 &= A \left\{ Sqr1 (-26 bf + 26 fg + 16 fb3 - 48 fb2 fg + 48 bf fg2 - 16 fg3) \right. \\ &\quad + Sqr2 (38 bf - 26 fg + 272 fb3 + 176 fb2 fg - 80 bf fg2 + 16 fg3) \\ &\quad \left. - (ArcSh1 + ArcSh2) (3 - 48 fb2 + 96 bf fg - 48 fg2) \right\} / (2304 fb1) \end{aligned} \quad (5.22.b)$$

$$[k_2] = \begin{bmatrix} -d1 & -d2 & d1 & d2 \\ -d2 & -d3 & d2 & d3 \\ -d1 & -d2 & d1 & d2 \\ -d2 & -d3 & d2 & d3 \end{bmatrix} \quad (5.23.a)$$

burada,

$$\begin{aligned} d1 &= \left\{ Sqr1 (38 bf + 272 fb3 + 26 fg - 176 fb2 fg - 80 bf fg2 - 16 fg3) \right. \\ &\quad - Sqr2 (26 bf - 16 fb3 + 26 fg - 48 fb2 fg - 48 bf fg2 - 16 fg3) \\ &\quad \left. - (ArcSh1 + ArcSh2) (3 - 48 fb2 - 96 bf fg - 48 fg2) \right\} / (1536 * fb1) \\ d2 &= \left\{ Sqr1 (-6 bf + 48 fb3 - 26 fg - 80 fb2 fg + 16 bf fg2 + 16 fg3) \right. \\ &\quad - Sqr2 (6 bf - 48 fb3 - 26 fg - 80 fb2 fg - 16 bf fg2 + 16 fg3) \\ &\quad \left. + (ArcSh1 + ArcSh2) (3 + 48 fb2 - 48 fg2) \right\} / (1536 * fb1) \end{aligned}$$

$$d3 = \left\{ Sqr1 (-26 bf + 16 fb3 + 26 fg - 48 fb2 fg + 48 bf fg2 - 16 fg3) \right. \\ \left. + Sqr2 (38 bf + 272 fb3 - 26 fg + 176 fb2 fg - 80 bf fg2 + 16 fg3) \right. \\ \left. - (ArcSh1 + ArcSh2) (3 - 48 fb2 + 96 bf fg - 48 fg2) \right\} / (1536 * fb1) \quad (5.23.b)$$

$$[k_3] = \frac{a}{6} \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

$$[k_4] = \begin{bmatrix} 2 * e1 & 2 * e2 & e1 & e2 \\ 2 * e2 & 2 * e3 & e2 & e3 \\ e1 & e2 & 2 * e1 & 2 * e2 \\ e2 & e3 & 2 * e2 & 2 * e3 \end{bmatrix} \quad (5.25.a)$$

burada,

$$e1 = A \left\{ -4 bf - (Arct1 - Arct2) (1 - 4 fb2 - 8 bf fg - 4 fg2) \right. \\ \left. - 2 (XLog1 - XLog2) (bf + fg) \right\} / (48 * fb2)$$

$$e2 = A \left\{ 4 bf + (Arct1 - Arct2) (1 + 4 fb2 - 4 fg2) \right. \\ \left. + 2 (XLog1 - XLog2) (fg) \right\} / (48 * fb2)$$

$$e3 = A \left\{ -4 bf - (Arct1 - Arct2) (1 - 4 fb2 + 8 bf fg - 4 fg2) \right. \\ \left. + 2 (XLog1 - XLog2) (bf - fg) \right\} / (48 * fb2) \quad (5.25.b)$$

olarak tanımlanmışlardır.

(5.15) denkleminde verilen eleman altmatrisleri, sabit kesitli parabolik silindir kabuklar için geçerlidir. Değişken kesitli kabuklar söz konusu olduğu zaman h kalınlık ifadesini içeren B uzama rijitliği, ve D eğilme rijitliği, interpolasyon fonksiyonları ile hesaba katılmaktadır.

$$\frac{1}{B} = \sum B_m \psi_m \quad , \quad \frac{1}{D} = \sum D_m \psi_m \quad , \quad m = 1, \dots, 4 \quad (5.26)$$

burada,

$$B_m = \frac{1}{h_m} \quad , \quad D_m = \frac{1}{h_m^3} \quad , \quad m = 1, \dots, 4 \quad (5.27)$$

düğüm noktalarındaki kabuk elemanının kalınlığına bağlı büyüklükleri göstermektedir. Kesiti değişken olan kabuklar için alt matrisler,

$$\begin{aligned} [k_{d1}] &= \int_A \psi_i \psi_j A_2 \psi_m B_m dA \\ [k_{d2}] &= \int_A \psi_i \psi_j A_2 \psi_m D_m dA \end{aligned} \quad (5.28)$$

şeklinde hesaplanmıştır. Bu alt matrislerin açık ifadeleri aşağıda verilmiştir

$$[k_{d1}] = \begin{bmatrix} B11 & B12 & B13 & B14 \\ & B22 & B23 & B24 \\ & & B33 & B34 \\ & & & B44 \end{bmatrix} \quad (5.29.a)$$

burada,

$$B11 = [3 * cc1 * B1 + 3 * cc2 * B2 + cc1 * B3 + cc2 * B4]$$

$$B12 = [3 * cc2 * B1 + 3 * cc3 * B2 + cc2 * B3 + cc3 * B4]$$

$$B13 = [cc1 * B1 + cc2 * B2 + cc1 * B3 + cc2 * B4]$$

$$B14 = [cc2 * B1 + cc3 * B2 + cc2 * B3 + cc3 * B4]$$

$$B22 = [3 * cc3 * B1 + 3 * cc4 * B2 + cc3 * B3 + cc4 * B4]$$

$$B23 = [cc2 * B1 + cc3 * B2 + cc2 * B3 + cc3 * B4]$$

$$B24 = [cc3 * B1 + cc4 * B2 + cc3 * B3 + cc4 * B4]$$

$$\begin{aligned}
B33 &= [cc1 * B1 + cc2 * B2 + cc1 * B3 + cc2 * B4] \\
B34 &= [cc2 * B1 + cc3 * B2 + 3 * cc2 * B3 + 3 * cc3 * B4] \\
B44 &= [cc3 * B1 + cc4 * B2 + 3 * cc3 * B3 + 3 * cc4 * B4]
\end{aligned} \tag{5.29.b}$$

değerlerini ifade etmektedir.

$$[kd_2] = \begin{bmatrix} D11 & D12 & D13 & D14 \\ & D22 & D23 & D24 \\ & & D33 & D34 \\ & & & D44 \end{bmatrix} \tag{5.30.a}$$

burada,

$$\begin{aligned}
D11 &= [3 * cc1 * D1 + 3 * cc2 * D2 + cc1 * D3 + cc2 * D4] \\
D12 &= [3 * cc2 * D1 + 3 * cc3 * D2 + cc2 * D3 + cc3 * D4] \\
D13 &= [cc1 * D1 + cc2 * D2 + cc1 * D3 + cc2 * D4] \\
D14 &= [cc2 * D1 + cc3 * D2 + cc2 * D3 + cc3 * D4] \\
D22 &= [3 * cc3 * D1 + 3 * cc4 * D2 + cc3 * D3 + cc4 * D4] \\
D23 &= [cc2 * D1 + cc3 * D2 + cc2 * D3 + cc3 * D4] \\
D24 &= [cc3 * D1 + cc4 * D2 + cc3 * D3 + cc4 * D4] \\
D33 &= [cc1 * D1 + cc2 * D2 + cc1 * D3 + cc2 * D4] \\
D34 &= [cc2 * D1 + cc3 * D2 + 3 * cc2 * D3 + 3 * cc3 * D4] \\
D44 &= [cc3 * D1 + cc4 * D2 + 3 * cc3 * D3 + 3 * cc4 * D4]
\end{aligned} \tag{5.30.b}$$

burada $[kd_1]$, $[kd_2]$ alt matrislerinde kullanılan bazı parametreler,

$$cc1 = A \left\{ Sqr1 (-8 + 346 fb2 + 448 bf fg + 166 fg2 + 2352 (fb2)^2 - 1248 fb3 fg - 768 fb2 fg2 - 288 bf fg fg2 - 48 (fg2)^2) + Sqr2 (8 - 166 fb2 - 332 bf fg - 166 fg2 + 48 (fb2)^2 + 192 fb3 fg + 288 fb2 fg2 + 192 bf fg fg2 + 48 (fg2)^2) - (ArcSh1 + ArcSh2) (45 bf + 45 fg - 240 fb3 - 720 fb2 fg - 720 fg2 bf - 240 fg3) \right\} / (46080 * fb4)$$

$$cc2 = A \left\{ Sqr1 (8 + 34 fb2 - 188 bf fg - 166 fg2 + 368 (fb2)^2 - 512 fb3 fg - 32 fb2 fg2 + 128 bf fg fg2 + 48 (fg2)^2) + Sqr2 (8 + 94 fb2 - 72 bf fg - 166 fg2 - 112 (fb2)^2 - 288 fb3 fg - 192 fb2 fg2 + 32 bf fg fg2 + 48 (fg2)^2) + (ArcSh1 + ArcSh2) (15 bf + 45 fg + 240 fb3 + 240 fb2 fg - 240 fg2 bf - 240 fg3) \right\} / (46080 * fb4)$$

$$cc3 = A \left\{ Sqr1 (-8 - 94 fb2 - 72 bf fg + 166 fg2 + 112 (fb2)^2 - 288 fb3 fg + 192 fb2 fg2 + 32 bf fg fg2 - 48 (fg2)^2) + Sqr2 (8 + 34 fb2 + 188 bf fg - 166 fg2 + 368 (fb2)^2 + 512 fb3 fg - 32 fb2 fg2 - 128 bf fg fg2 + 48 (fg2)^2) + (ArcSh1 + ArcSh2) (15 bf - 45 fg + 240 fb3 - 240 fb2 fg - 240 fg2 bf + 240 fg3) \right\} / (46080 * fb4)$$

$$cc4 = A \left\{ Sqr1 (8 - 166 fb2 + 332 bf fg - 166 fg2 + 48 (fb2)^2 - 192 fb3 fg + 288 fb2 fg2 - 192 bf fg fg2 + 48 (fg2)^2) + Sqr2 (-8 + 346 fb2 - 448 bf fg + 166 fg2 + 2352 (fb2)^2 + 1248 fb3 fg - 768 fb2 fg2 + 288 bf fg fg2 - 48 (fg2)^2) - (ArcSh1 + ArcSh2) (45 bf - 45 fg - 240 fb3 + 720 fb2 fg - 720 fg2 bf + 240 fg3) \right\} / (46080 * fb4)$$

(5.31)

şeklinde tanımlanabilir. Bu durumda değişken kesitli olmasını da gözönüne alan parabolik silindir kabuklara ait sonlu eleman matrisi,

$$[k_P] = \begin{bmatrix} u & v & w & \Omega_1 & \Omega_2 & P & N & L & S & Q & K & M & T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -[k_2]^T & 0 & -[k_3]^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -[k_3]^T & -[k_2]^T & 0 & [k_4] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -[k_4] & 0 & -[k_2]^T & -[k_3]^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -[k_1] & 0 & [k_2] & 0 & [k_3] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -[k_1] & 0 & [k_3] & [k_2] \\ & & & \gamma[k_{d1}] & -\alpha[k_{d1}] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \gamma[k_{d1}] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \mu[k_{d1}] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \phi[k_{d1}] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \text{simetrik} & & & & & \phi[k_{d1}] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & \delta[k_{d2}] & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & \delta[k_{d2}] & -\beta[k_{d2}] & \\ & & & & & & & & & & & \lambda[k_{d2}] & \end{bmatrix}$$

(5.32)

şeklinde elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{E} \quad , \quad \alpha = \nu \gamma \quad , \quad \mu = \frac{2(1+\nu)}{E} \quad , \quad \delta = \frac{12}{E} \\ \beta &= \nu \delta \quad , \quad \lambda = \frac{24(1+\nu)}{E} \quad , \quad \varphi = \frac{12(1+\nu)}{5^*E} \end{aligned} \quad (5.33)$$

dir.

5.5.1. Sınır koşulları

(4.8) denkleminde verilen sınır koşulları geometrik ve dinamik olmak üzere iki türdür. Bu fonksiyoneldeki sınır koşulları terimleri açık olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned}
I_{BC} = & [L, (u - \hat{u})]_{\varepsilon}^{\beta} + [A_2 P, (u - \hat{u})]_{\varepsilon}^{\alpha} + [A_2 L, (v - \hat{v})]_{\varepsilon}^{\alpha} + [N, (v - \hat{v})]_{\varepsilon}^{\beta} \\
& + [A_2 S, (w - \hat{w})]_{\varepsilon}^{\alpha} + [Q, (w - \hat{w})]_{\varepsilon}^{\beta} + [\hat{L}, u]_{\sigma}^{\beta} + [A_2 \hat{P}, u]_{\sigma}^{\alpha} \\
& + [A_2 \hat{L}, v]_{\sigma}^{\alpha} + [\hat{N}, v]_{\sigma}^{\beta} + [A_2 \hat{S}, w]_{\sigma}^{\alpha} + [\hat{K}, w]_{\sigma}^{\beta} \\
& + [A_2 E, (\Omega_1 - \hat{\Omega}_1)]_{\varepsilon}^{\alpha} + [T, (\Omega_1 - \hat{\Omega}_1)]_{\varepsilon}^{\beta} + [A_2 T, (\Omega_2 - \hat{\Omega}_2)]_{\varepsilon}^{\alpha} \\
& + [M, (\Omega_2 - \hat{\Omega}_2)]_{\varepsilon}^{\beta} + [A_2 \hat{E}, \Omega_1]_{\sigma}^{\alpha} + [\hat{T}, \Omega_1]_{\sigma}^{\beta} + [\hat{T}, \Omega_2]_{\sigma}^{\alpha} + [\hat{M}, \Omega_2]_{\sigma}^{\beta}
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Parantez altındaki σ ve ε alt indisli terimler, sırasıyla, sınır noktaları üzerinde geçerli dinamik ve geometrik sınır koşullarını göstermektedir. (5.34) denklemindeki şapkalı değişkenler sınır noktaları üzerinde bilindiği zaman, bu şapkalı değişkene karşı gelen terim veya terimler eleman matrisine katkı sağlayacaktır. α üst indisli terimler Şekil 5.2’de görüldüğü gibi normal α olan sınırlar üzerinde geçerlidir. Örneğin Şekil 5.3 deki dikdörtgen elemanın x-y eksen takımı da gözönüne alınarak $[A_2 P, (u - \hat{u})]_{\varepsilon}^{\alpha}$ sınır koşulu terimleri 1-2, 3-4 sınırları üzerinde, $[L, (u - \hat{u})]_{\varepsilon}^{\beta}$ sınır koşulu terimleri 1-3, 2-4 sınırları üzerinde geçerlidir. Bu sınır terimlerinden eleman matrisine katkı, eleman sınırları boyunca hesaplanan integrallerdir. Bu integraller,

$$[S_1]_{\beta} = \begin{bmatrix} -2a/3 & 0 & -a/3 & 0 \\ 0 & 2a/3 & 0 & a/3 \\ -a/3 & 0 & -2a/3 & 0 \\ 0 & a/3 & 0 & 2a/3 \end{bmatrix} \tag{5.35}$$

$$[S_3]_{\alpha} = \begin{bmatrix} s1 & s2 & 0 & 0 \\ s2 & s3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s1 & -s2 \\ 0 & 0 & -s2 & -s3 \end{bmatrix} \tag{5.36.a}$$

şeklinde elde edilir. Burada,

(5.38) denkleminde toplu olarak verilen eleman matrisi üniform kalınlıklı parabolik silindir kabuk için de geçerlidir. Böylece eleman matrisini ayrı ayrı vermeye gerek yoktur.

5.6 Dairesel Silindirik Kabuklar İçin Sonlu Eleman Formülasyonu

Bu çalışmada geliştirilen teori, pratik öneme sahip olması açısından dairesel silindirik kabuklara da uygulanmıştır. Dairesel silindirik kabuklarla ilgili çözümlü örnekler bir çok çalışma içinde yer almıştır [43,51,52]. Eğer (4.10) denklemindeki fonksiyonelde,

$$A_1 = A_2 = 1 \quad , \quad R_1 = \infty \quad , \quad R_2 = R \quad (5.39)$$

yerine konursa, dairesel silindirik kabuklar için fonksiyonel elde edilmektedir.

$$\begin{aligned} I(y) = & -[u_{,x}, P] - [u_{,s}, L] - \langle S, \Omega_1 \rangle - [S, w_{,x}] - [L, v_{,x}] - [N, v_{,s}] \\ & - \langle Q, \Omega_2 \rangle - [Q, w_{,s}] + \left\langle Q, \frac{v}{R} \right\rangle - \left\langle \frac{N}{R}, w \right\rangle + \langle q_1, u \rangle + \langle q_2, v \rangle + \langle q_n, w \rangle \\ & - [K, \Omega_{1,x}] - [T, \Omega_{1,s}] - [\Omega_{2,x}, T] - [\Omega_{2,s}, M] \\ & + \frac{1}{B(1-\nu^2)} \left\{ \frac{1}{2} \langle P, P \rangle - \nu \langle P, N \rangle + \frac{1}{2} \langle N, N \rangle \right\} + \frac{1}{B(1-\nu)} \langle L, L \rangle \\ & + \frac{1}{D(1-\nu^2)} \left\{ \frac{1}{2} \langle K, K \rangle - \nu \langle K, M \rangle + \frac{1}{2} \langle M, M \rangle \right\} \\ & + \frac{1}{D(1-\nu)} \langle T, T \rangle + \frac{6}{5B(1-\nu)} \{ \langle S, S \rangle + \langle Q, Q \rangle \} \\ & + [R, (u - \hat{u})]_{\epsilon} + [M, (\Omega - \hat{\Omega})]_{\epsilon} + [\hat{R}, u]_{\sigma} + [\hat{M}, \Omega]_{\sigma} \end{aligned}$$

(5.40)

Kalınlık boyunca kayma dağılımı sabit olduğu farzedilen benzer bir fonksiyonel Omurtag ve Aköz [43] tarafından elde edilmiştir. Bu çalışmada ise parabolik kayma

dağılımı gözönüne alındığından, anılan çalışma [43] ile Ω_1 , Ω_2 anlam farklılığına sahiptir.

Elemanın düğüm noktalarındaki değişkenler u, v, w yerdeğiştirmeleri, Ω_1 , Ω_2 dönmeleri, P, N, L, S, Q, K, M, T iç kuvvetleri olarak seçilirse bu değişkenler ψ_i şekil fonksiyonları ile ifade edilecektir. Denklem (5.15) de ifade edilen dikdörtgen elemana ait şekil fonksiyonları kullanılacaktır. Dairesel silindirik kabuklar için alt matrisler,

$$\begin{aligned}\left[\bar{k}_1\right] &= \int_A \psi_i \psi_j dA \\ \left[\bar{k}_2\right] &= \int_A \psi_{i,\alpha} \psi_j dA \\ \left[\bar{k}_3\right] &= \int_A \psi_{i,\beta} \psi_j dA\end{aligned}\tag{5.41}$$

biçiminde hesaplanacaktır. Bu alt matrislerin açık ifadeleri,

$$\left[\bar{k}_1\right] = \begin{bmatrix} 4ab/9 & 4ab/18 & 4ab/18 & 4ab/36 \\ 4ab/18 & 4ab/9 & 4ab/36 & 4ab/18 \\ 4ab/18 & 4ab/36 & 4ab/9 & 4ab/18 \\ 4ab/36 & 4ab/18 & 4ab/18 & 4ab/9 \end{bmatrix}\tag{5.42}$$

$$\left[\bar{k}_2\right] = \begin{bmatrix} -b/3 & -b/6 & -b/3 & -b/6 \\ -b/6 & -b/3 & -b/6 & -b/3 \\ b/3 & b/6 & b/3 & b/6 \\ b/6 & b/3 & b/6 & b/3 \end{bmatrix}\tag{5.43}$$

$$\left[\bar{k}_3\right] = \begin{bmatrix} -a/3 & -a/3 & -a/6 & -a/6 \\ a/3 & a/3 & a/6 & a/6 \\ -a/6 & -a/6 & -a/3 & -a/3 \\ a/6 & a/6 & a/3 & a/3 \end{bmatrix}\tag{5.44}$$

olur. (5.41) denkleminde verilen eleman alt matrisleri, sabit kesitli daireSEL silindirik kabuklar için geçerlidir. Değişken kesitli kabuklar söz konusu olduğu zaman (5.26)

ve (5.27) denklemlerine benzer işlemler yapılarak değişken kesitli dairesel silindirik kabuk için alt matrisler,

$$\begin{aligned} [\bar{k}_{c1}] &= \int_A \psi_i \psi_j B_m \psi_m dA \\ [\bar{k}_{c2}] &= \int_A \psi_i \psi_j D_m \psi_m dA \end{aligned} \quad (5.45)$$

ve (5.45) denkleminin açık ifadeleri

$$[\bar{k}_{c1}] = \begin{bmatrix} \bar{B}_{11} & \bar{B}_{12} & \bar{B}_{13} & \bar{B}_{14} \\ & \bar{B}_{22} & \bar{B}_{23} & \bar{B}_{24} \\ & & \bar{B}_{33} & \bar{B}_{34} \\ & & & \bar{B}_{44} \end{bmatrix} \quad (5.46.a)$$

burada,

$$\bar{B}_{11} = \left[\frac{ab}{4} * B1 + \frac{ab}{12} * B2 + \frac{ab}{12} * B3 + \frac{ab}{36} * B4 \right]$$

$$\bar{B}_{12} = \left[\frac{ab}{12} * B1 + \frac{ab}{12} * B2 + \frac{ab}{36} * B3 + \frac{ab}{36} * B4 \right]$$

$$\bar{B}_{13} = \left[\frac{ab}{12} * B1 + \frac{ab}{36} * B2 + \frac{ab}{12} * B3 + \frac{ab}{36} * B4 \right]$$

$$\bar{B}_{14} = \left[\frac{ab}{36} * B1 + \frac{ab}{36} * B2 + \frac{ab}{36} * B3 + \frac{ab}{36} * B4 \right]$$

$$\bar{B}_{22} = \left[\frac{ab}{12} * B1 + \frac{ab}{4} * B2 + \frac{ab}{36} * B3 + \frac{ab}{12} * B4 \right]$$

$$\bar{B}_{23} = \left[\frac{ab}{36} * B1 + \frac{ab}{36} * B2 + \frac{ab}{36} * B3 + \frac{ab}{36} * B4 \right]$$

$$\bar{B}_{24} = \left[\frac{ab}{36} * B1 + \frac{ab}{12} * B2 + \frac{ab}{36} * B3 + \frac{ab}{12} * B4 \right]$$

$$\begin{aligned}
\bar{B}_{33} &= \left[\frac{ab}{12} * B1 + \frac{ab}{36} * B2 + \frac{ab}{4} * B3 + \frac{ab}{12} * B4 \right] \\
\bar{B}_{34} &= \left[\frac{ab}{36} * B1 + \frac{ab}{36} * B2 + \frac{ab}{12} * B3 + \frac{ab}{12} * B4 \right] \\
\bar{B}_{44} &= \left[\frac{ab}{36} * B1 + \frac{ab}{12} * B2 + \frac{ab}{12} * B3 + \frac{ab}{4} * B4 \right]
\end{aligned} \tag{5.46.b}$$

değerlerini ifade etmektedir.

$$[\bar{k}c_2] = \begin{bmatrix} \bar{D}_{11} & \bar{D}_{12} & \bar{D}_{13} & \bar{D}_{14} \\ & \bar{D}_{22} & \bar{D}_{23} & \bar{D}_{24} \\ & & \bar{D}_{33} & \bar{D}_{34} \\ & & & \bar{D}_{44} \end{bmatrix} \tag{5.47.a}$$

$$\bar{D}_{11} = \left[\frac{ab}{4} * D1 + \frac{ab}{12} * D2 + \frac{ab}{12} * D3 + \frac{ab}{36} * D4 \right]$$

$$\bar{D}_{12} = \left[\frac{ab}{12} * D1 + \frac{ab}{12} * D2 + \frac{ab}{36} * D3 + \frac{ab}{36} * D4 \right]$$

$$\bar{D}_{13} = \left[\frac{ab}{12} * D1 + \frac{ab}{36} * D2 + \frac{ab}{12} * D3 + \frac{ab}{36} * D4 \right]$$

$$\bar{D}_{14} = \left[\frac{ab}{36} * D1 + \frac{ab}{36} * D2 + \frac{ab}{36} * D3 + \frac{ab}{36} * D4 \right]$$

$$\bar{D}_{22} = \left[\frac{ab}{12} * D1 + \frac{ab}{4} * D2 + \frac{ab}{36} * D3 + \frac{ab}{12} * D4 \right]$$

$$\bar{D}_{23} = \left[\frac{ab}{36} * D1 + \frac{ab}{36} * D2 + \frac{ab}{36} * D3 + \frac{ab}{36} * D4 \right]$$

$$\bar{D}_{24} = \left[\frac{ab}{36} * D1 + \frac{ab}{12} * D2 + \frac{ab}{36} * D3 + \frac{ab}{12} * D4 \right]$$

$$\begin{aligned}\bar{D}_{33} &= \left[\frac{ab}{12} * D1 + \frac{ab}{36} * D2 + \frac{ab}{4} * D3 + \frac{ab}{12} * D4 \right] \\ \bar{D}_{34} &= \left[\frac{ab}{36} * D1 + \frac{ab}{36} * D2 + \frac{ab}{12} * D3 + \frac{ab}{12} * D4 \right] \\ \bar{D}_{44} &= \left[\frac{ab}{36} * D1 + \frac{ab}{12} * D2 + \frac{ab}{12} * D3 + \frac{ab}{4} * D4 \right]\end{aligned}\quad (5.47.b)$$

şeklindedir. Böylece değişken kesitli olmasını da gözönüne alan dairesel silindirik kabuklara ait eleman matrisi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$[k_C] = \begin{bmatrix} u & v & w & \Omega_1 & \Omega_2 & P & N & L & S & Q & K & M & T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -[\bar{k}_2] & 0 & -[\bar{k}_3] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -[\bar{k}_3] & -[\bar{k}_2] & 0 & \frac{1}{R}[\bar{k}_1] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{R}[\bar{k}_1] & 0 & -[\bar{k}_2] & -[\bar{k}_3] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -[\bar{k}_1] & 0 & -[\bar{k}_2]^T & 0 & -[\bar{k}_3]^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -[\bar{k}_1] & 0 & -[\bar{k}_3]^T & -[\bar{k}_2]^T \\ \gamma[\bar{k}_{c1}] & -\alpha[\bar{k}_{c1}] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma[\bar{k}_{c1}] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu[\bar{k}_{c1}] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi[\bar{k}_{c1}] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi[\bar{k}_{c1}] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta[\bar{k}_{c2}] & -\beta[\bar{k}_{c2}] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta[\bar{k}_{c2}] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda[\bar{k}_{c2}] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

burada, (5.33) denklemleri geçerlidir.

5.6.1 Sınır koşulları

Dairesel silindirik kabukların sınır koşulu ifadelerini elde etmek için denklem (5.34) de $A_2 = 1$ yerleştirilerek

$$\begin{aligned}
BC = & [L, (u - \hat{u})]_{\mathcal{E}}^{\beta} + [P, (u - \hat{u})]_{\mathcal{E}}^{\alpha} + [L, (v - \hat{v})]_{\mathcal{E}}^{\alpha} + [N, (v - \hat{v})]_{\mathcal{E}}^{\beta} \\
& + [S, (w - \hat{w})]_{\mathcal{E}}^{\alpha} + [Q, (w - \hat{w})]_{\mathcal{E}}^{\beta} + [\hat{L}, u]_{\mathcal{G}}^{\beta} + [\hat{P}, u]_{\mathcal{G}}^{\alpha} + [\hat{L}, v]_{\mathcal{G}}^{\alpha} \\
& + [\hat{N}, v]_{\mathcal{G}}^{\beta} + [\hat{S}, w]_{\mathcal{G}}^{\alpha} + [\hat{K}, w]_{\mathcal{G}}^{\beta} + [E, (\Omega_1 - \hat{\Omega}_1)]_{\mathcal{E}}^{\alpha} \\
& + [T, (\Omega_1 - \hat{\Omega}_1)]_{\mathcal{E}}^{\beta} + [T, (\Omega_2 - \hat{\Omega}_2)]_{\mathcal{E}}^{\alpha} + [M, (\Omega_2 - \hat{\Omega}_2)]_{\mathcal{E}}^{\beta} + [\hat{E}, \Omega_1]_{\mathcal{G}}^{\alpha} \\
& + [\hat{T}, \Omega_1]_{\mathcal{G}}^{\beta} + [\hat{T}, \Omega_2]_{\mathcal{G}}^{\alpha} + [\hat{M}, \Omega_2]_{\mathcal{G}}^{\beta}
\end{aligned} \tag{5.49}$$

elde edilir. Bölüm 5.5.1 de anlatılan benzer işlemler uygulanarak,

$$[S_1]_{\beta} = \begin{bmatrix} -2a/3 & 0 & -a/3 & 0 \\ 0 & 2a/3 & 0 & a/3 \\ -a/3 & 0 & -2a/3 & 0 \\ 0 & a/3 & 0 & 2a/3 \end{bmatrix} \tag{5.50}$$

$$[S_2]_{\alpha} = \begin{bmatrix} -2b/3 & -b/3 & 0 & 0 \\ -b/3 & -2b/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2b/3 & b/3 \\ 0 & 0 & b/3 & 2b/3 \end{bmatrix} \tag{5.51}$$

elde edilir. Sınır terimlerinin dağılımı aşağıdaki eleman matrisinde gösterilmiştir.

$$[k_C]_{BC} = \begin{bmatrix} u & v & w & \Omega_1 & \Omega_2 & P & N & L & S & Q & K & M & T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [S_1] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [S_1] & [S_2] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [S_2] & [S_1] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [S_2] & 0 & [S_1] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [S_1] & [S_2] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.52}$$

5.7 Hata Analizi

Sonlu eleman çözümlerinde ortaya çıkan yaklaşım hataları

- Geometride yaklaşıklık
- Değişkenlerin interpolasyon fonksiyonları ile yaklaşık gösterimi
- Sayısal işlem hataları
 - ♦ Eleman denklemlerinin bulunuşunda integrasyon
 - ♦ Denklem çözümleri
- Bazı büyüklüklerin sonradan sayısal türevle bulunması

Bu hataların enerji normundaki aşağıdaki eşitsizliği sağladığı gösterilebilir.

$$\|e\| \equiv \|u - u_h\| \leq c \ell^k \quad (5.53)$$

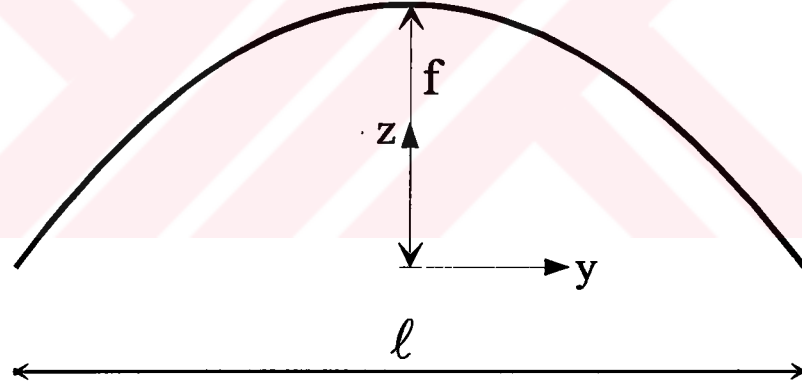
burada u gerçek çözüm, u_h sonlu eleman çözümü, k yaklaşım oranı, c sabit, ℓ karakteristik eleman uzunluğudur.

6. SAYISAL ÖRNEKLER

6.1 Statik Uygulamalar

Bu bölümde geliştirilmiş olan parabolik silindir (PRSH52) kabuk elemanı ile dairesel silindirik (CRSH52) kabuk elemanına ait örnekler incelenmiştir.

PRSH52 kabuk elemanı ile değişik problemleri çözmek mümkündür. Şekil 6.1 de gösterildiği gibi f parabolün sarkması, ℓ parabolün açıklığı olmak üzere $m = f/\ell$ oranı parabolün basıklığını göstermektedir. Basıklık oranı m azaldıkça parabolik silindir kabuk bir plağa, ve parabolik kiriş doğru eksenli bir kirişe dönüşmektedir.



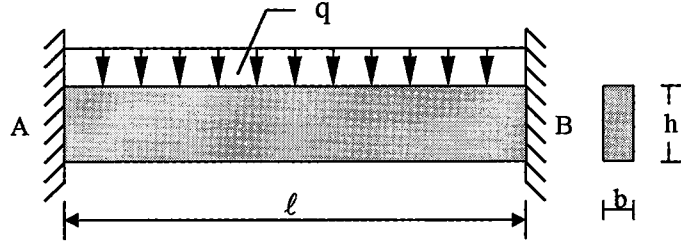
Şekil 6.1 Parabolün geometrisi

Geliştirilen teoremin performansını ve doğruluğunu gözlemek üzere özel halde doğru eksenli çubuk, plak, eğri eksenli çubuk problemleri çözülmüştür. Sayısal sonuçların kesin çözümlerle uyumluluğu gözlenmiştir.

6.1.1 İki Ucu Ankastre Mesnetli Kiriş

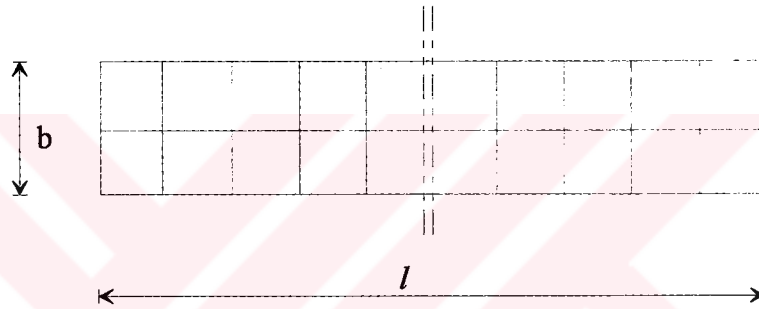
Bu örnek ile PRSH52 kabuk elemanının kesin çözüme yaklaşımı ve doğruluğu gösterilecektir. Çok basit olarak Şekil 6.2 de gösterildiği gibi $q = 10$ kN/m düzgün yayılı yüküyle yüklü iki ucu ankastre mesnetli kirişlerin çözümü incelenmiştir.

Malzeme özellikleri ve boyutları; $E = 2 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$, $\nu = 0.3$, $l = 10 \text{ m}$, $f = 0.01 \text{ m}$, $h = 0.50 \text{ m}$, $b = 0.20 \text{ m}$ dir.



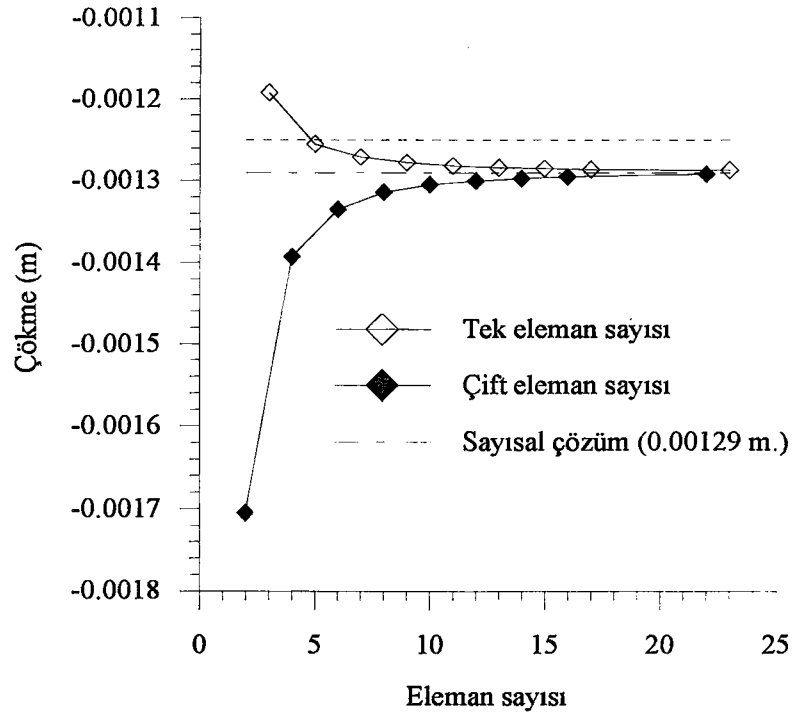
Şekil 6.2. Düzgün yayılı yükle yüklü , iki ucu ankastre mesnetli kiriş

Şekil 6.3' de sembolik olarak gösterilen eleman ağı gözönüne alınarak yapılan

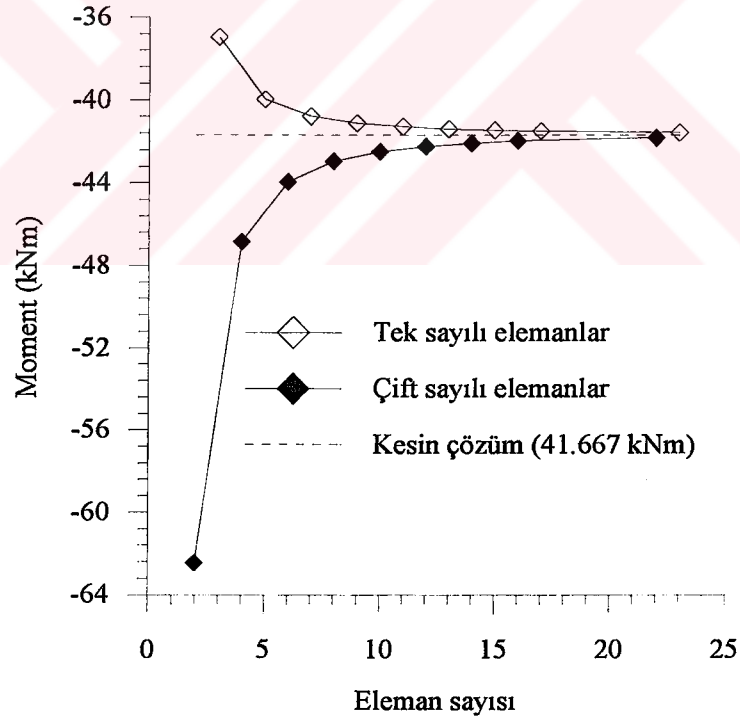


Şekil 6.3 Eleman ağları

çözümlerde yarı açıklıktaki eleman sayısına karşı orta noktanın çökmesi ve momenti sırayla Şekil 6.4 ve 6.5 de grafik olarak verilmiştir. b genişliğinde eleman sayısı tek olarak alınmıştır.



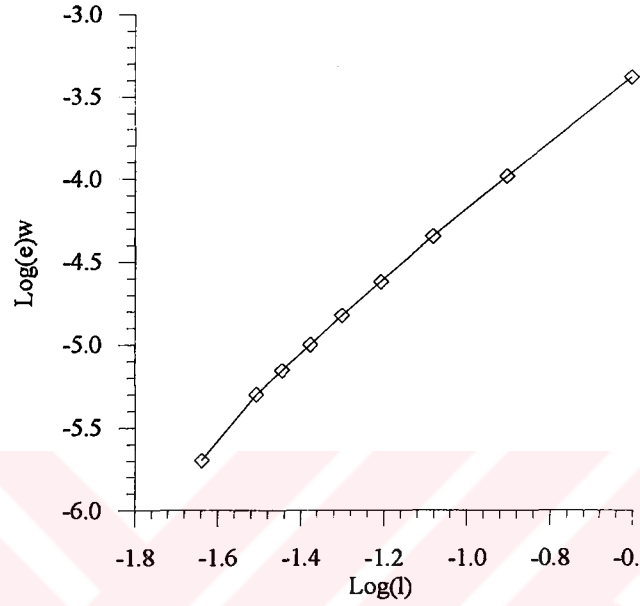
Şekil 6.4 İki ucu ankastre mesnetli kirişte çökme için yaklaşım kontrolü



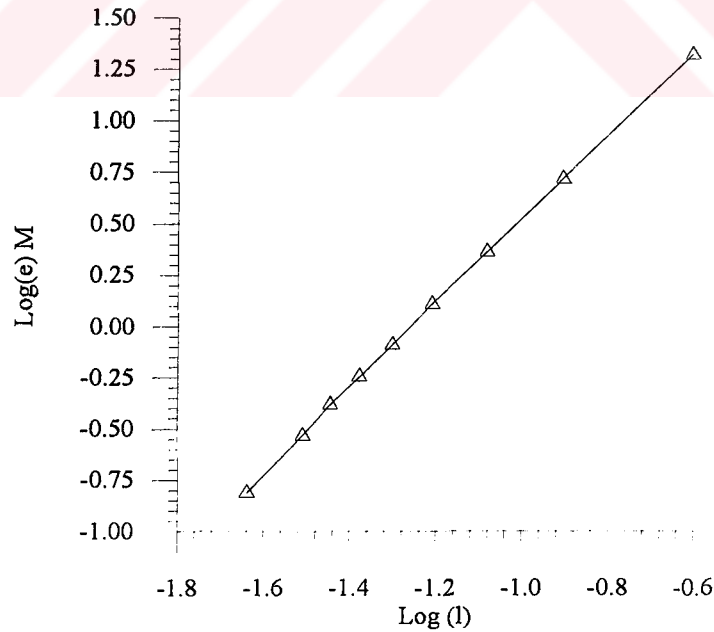
Şekil 6.5 İki ucu ankastre mesnetli kirişte moment için yaklaşım kontrolü

Bu şekillerden görüldüğü gibi, tek veya çift sayılı elemanlara bağlı olarak elde edilen sonuçların üstten ve alttan doğru sonuçlara yaklaştığı gözlenmektedir.

(5.53) denkleminde verilen hata analizi çok yararlıdır. Bu hata analizi ile doğru sonuçlar bilinsin ya da bilinmesin yaklaşık çözümlerin doğruluğu ve sonlu eleman çözümlerinin doğru sonuçlara nasıl yaklaştığı hakkında fikir verir. Şekil 6.6 ve Şekil 6.7 de gösterildiği gibi sırasıyla $\text{Log}(\ell) - \text{Log}(e)_w$ ve $\text{Log}(\ell) - \text{Log}(e)_M$ hata eğrilerinin yaklaşık olarak doğrusal olduğu görülmektedir [8].

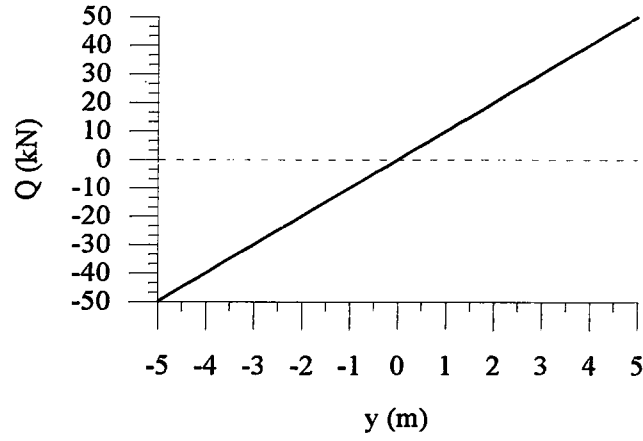


Şekil 6.6 w' deki hatanın eleman boyuna göre logaritmik koordinatlarda gösterimi

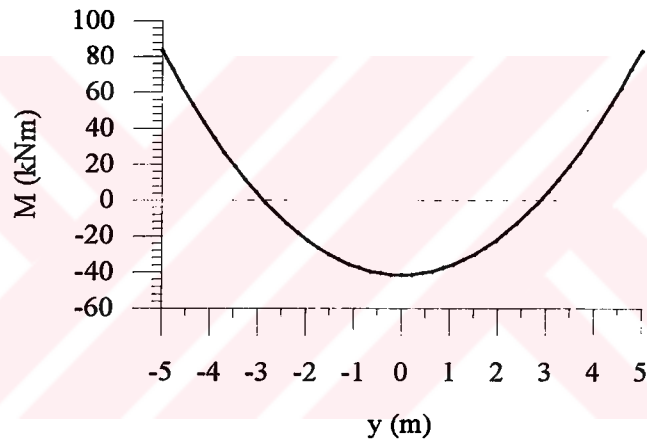


Şekil 6.7 M' deki hatanın eleman boyuna göre logaritmik koordinatlarda gösterimi

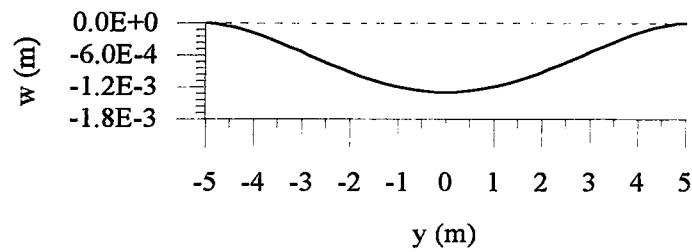
İki ucu ankastre mesnetli kirişler için eksen boyunca elde edilen Q kesme kuvveti, M momenti ve w çökme sonuçları Şekil 6.8 (a)-(c) de verilmiştir.



(a)



(b)

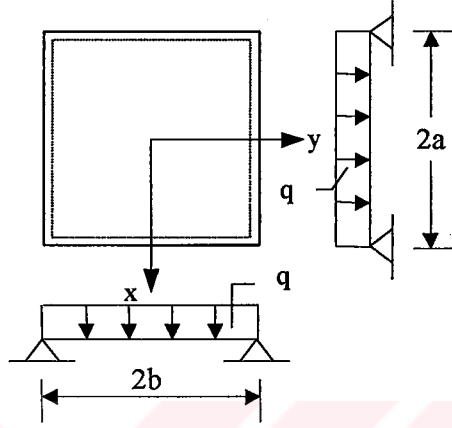


(c)

Şekil 6.8. a) Kesme kuvveti diyagramı b) Moment diyagramı c) Elastik eğri diyagramı

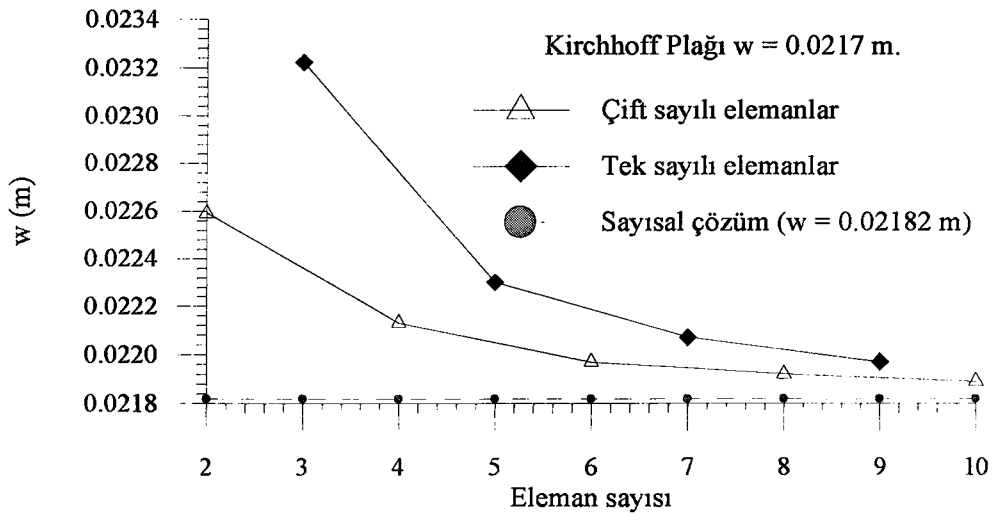
6.1.2 Kenarlarından Basit Mesnetli, Düzgün Yayılı Yüke Maruz Plak

Bu çalışmada geliştirilen PRSH52 kabuk elemanı ile bir çok çalışmada ele alınan dört kenarından basit mesnetli, düzgün yayılı yüke maruz plak çözümü yapılmıştır. Şekil 6.9 da problemin boyutları, yükü ve malzeme özellikleri sırasıyla $2a=2b=10$ m, $f=0.01$, $h=0.1$ m, $q=1$ kN/m², $E=2 \times 10^7$ kN/m², $\nu=0.3$ olarak alınmıştır.

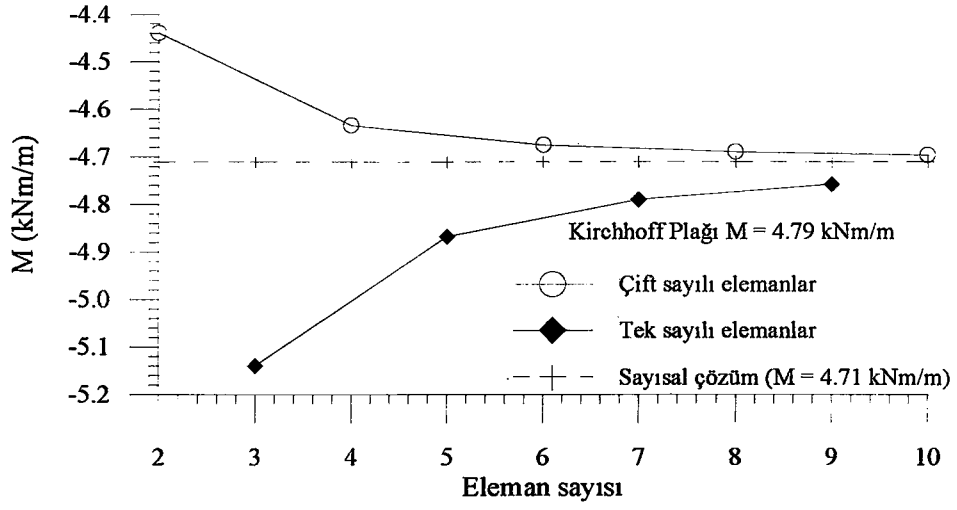


Şekil 6.9 Basit mesnetli dikdörtgen plak

Eleman sayısı artırılarak yapılan çözümlerde orta noktanın çökme ve moment değerlerinin kesin çözüme yaklaşımları Şekil (6.10-6.11) de gösterilmiştir. Şekil 6.11 de gösterildiği gibi tek ve çift sayılı elemanlar için moment değerlerinin doğru değere yaklaşımının alt ve üst limitleri olduğu gözlenmiştir.

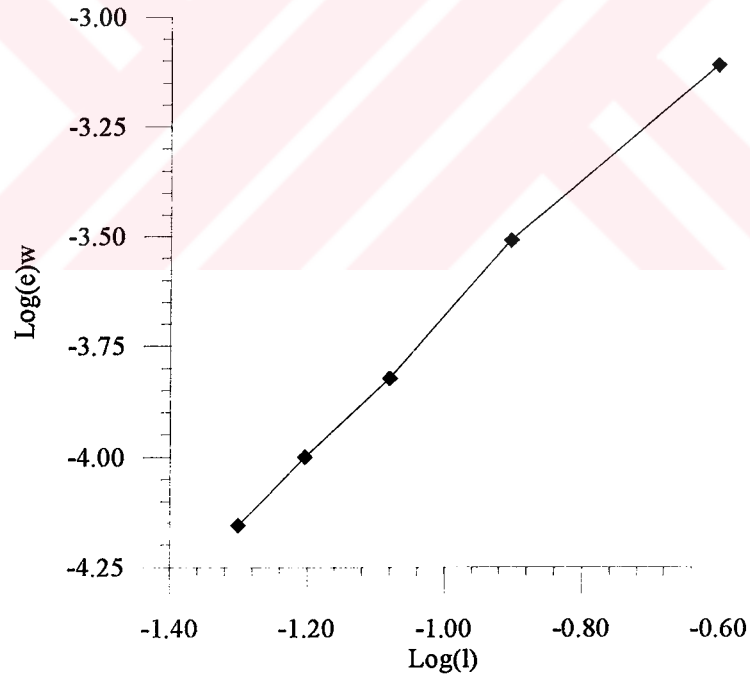


Şekil 6.10 Basit mesnetli plakta çökme için yaklaşım kontrolü

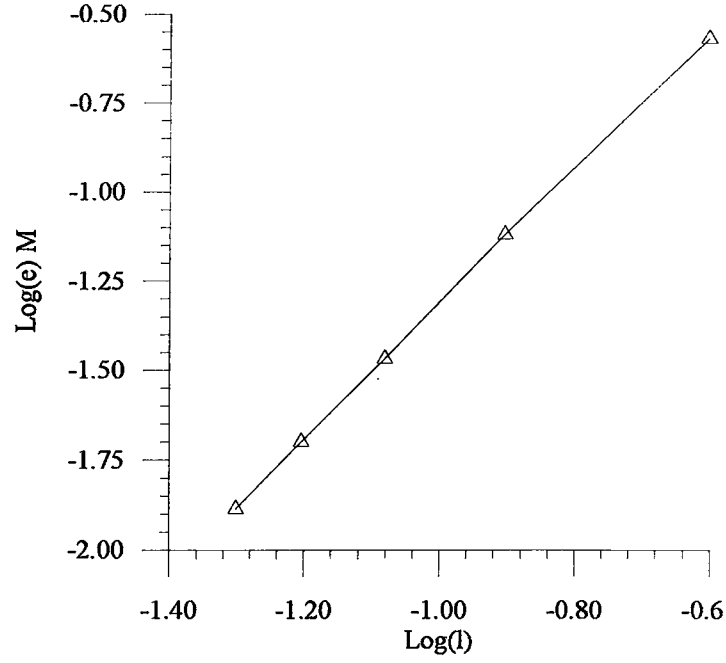


Şekil 6.11 Basit mesnetli plakta moment için yaklaşım kontrolü

Sonlu eleman çözümlerinden elde edilen sayısal sonuçlardaki hata analizleri $\text{Log}(\ell)$ eksenine karşı $\text{Log}(e)_w$ Şekil 6.12 de ve $\text{Log}(\ell)$ eksenine karşı $\text{Log}(e)_M$ Şekil 6.13 de verilmiştir.



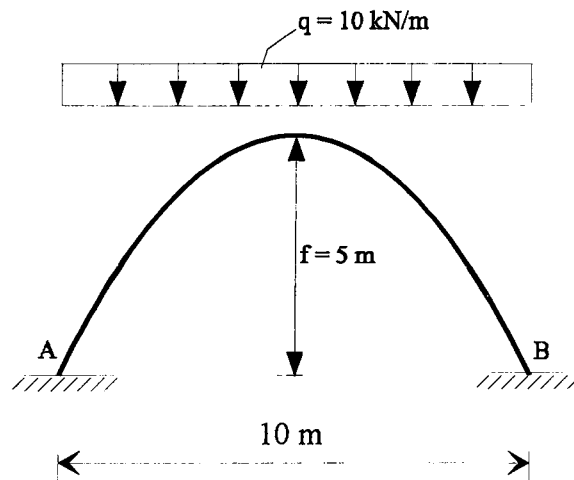
Şekil 6.12 w' deki hatanın eleman boyuna göre logaritmik koordinatlarda gösterimi



Şekil 6.13 M' deki hatanın eleman boyuna göre logaritmik koordinatlarda gösterimi

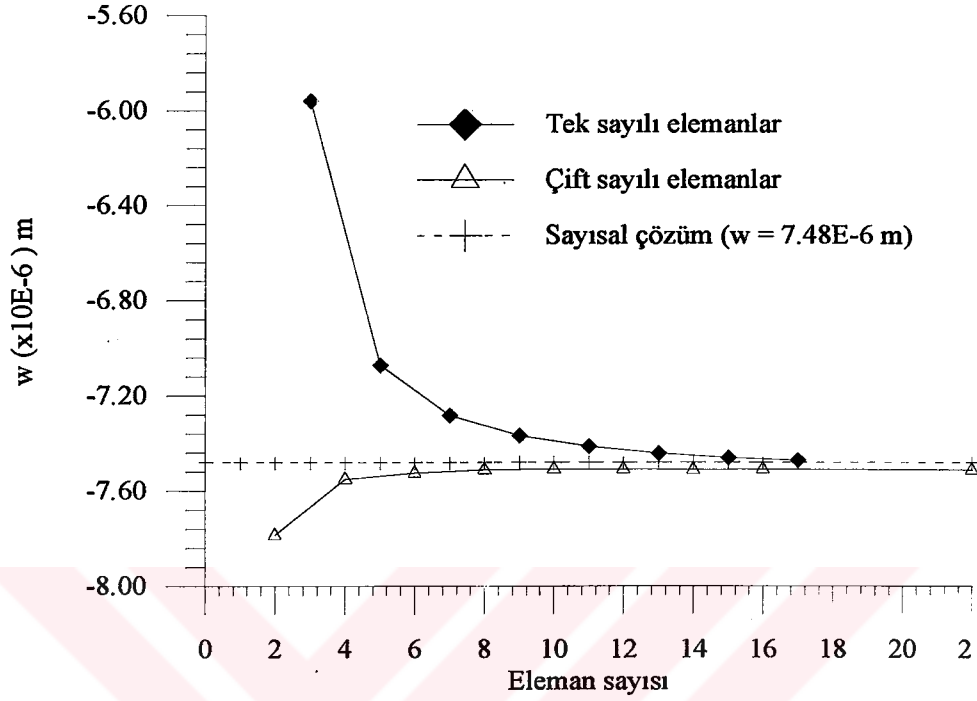
6.1.3 İki Ucu Ankastre Mesnetli Parabolik Kiriş

Geliştirilen PRSH52 kabuk elemanının perfonmansını kontrol etmek için Şekil 6.14 de geometrisi ve yüklemesi gösterilen parabolik bir kirişin çözümü yapılmıştır. Parabolik kirişe ait boyutlar, yükleme, ve malzeme özellikleri, sırasıyla $\ell = 10$ m, $f = 5$ m, $h = 0.50$ m, $b = 0.20$ m, $q = 10$ kN/m, $E = 2 \times 10^7$ kN/m² $\nu = 0.3$ alınmıştır.

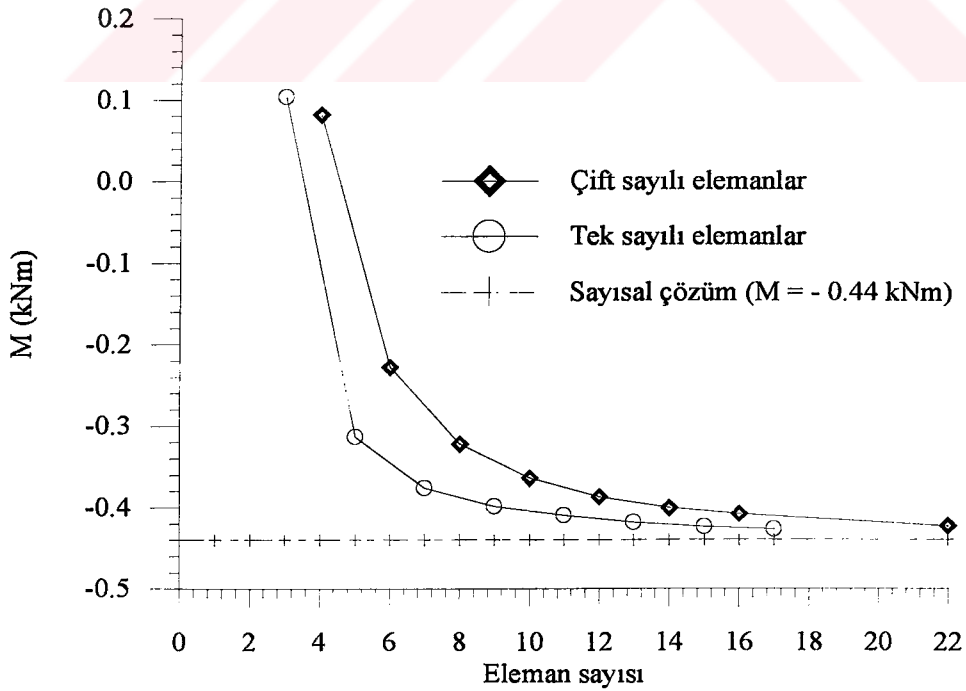


Şekil 6.14 İki ucu ankastre mesnetli parabolik kiriş

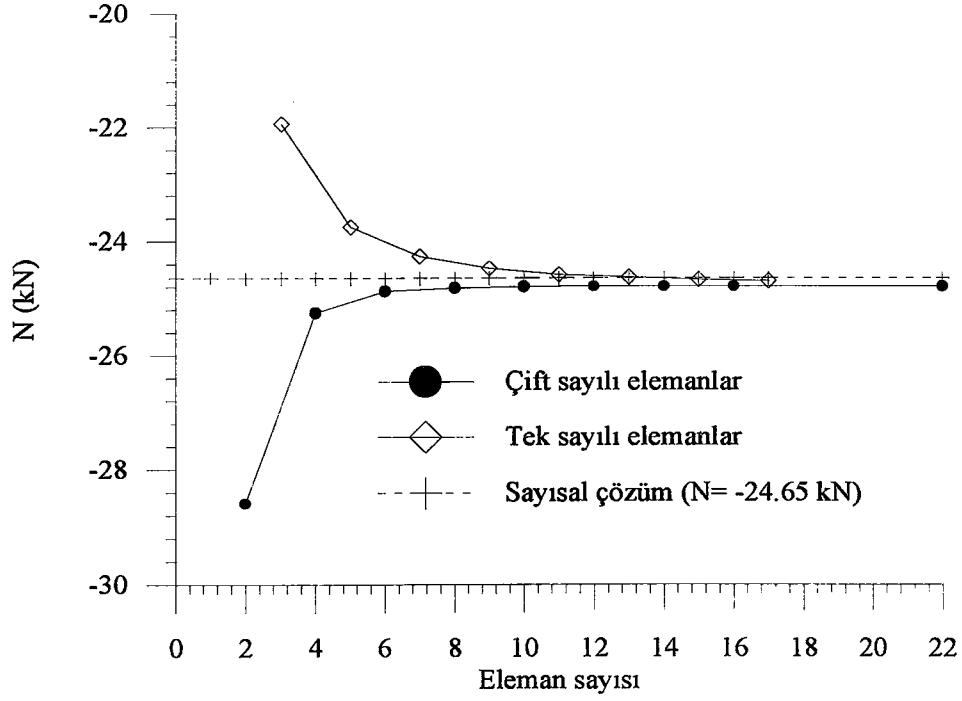
Şekil 6.15 ve 6.17 de görüldüğü gibi eleman sayılarına karşı parabolik kirişin tepe noktasına ait w yerdeğiştirme, M moment ve N normal kuvvetin sayısal çözüme yaklaşımı gösterilmiştir.



Şekil 6.15. Parabolik kirişin tepe noktasındaki enine yerdeğiştirme için yaklaşım kontrolü

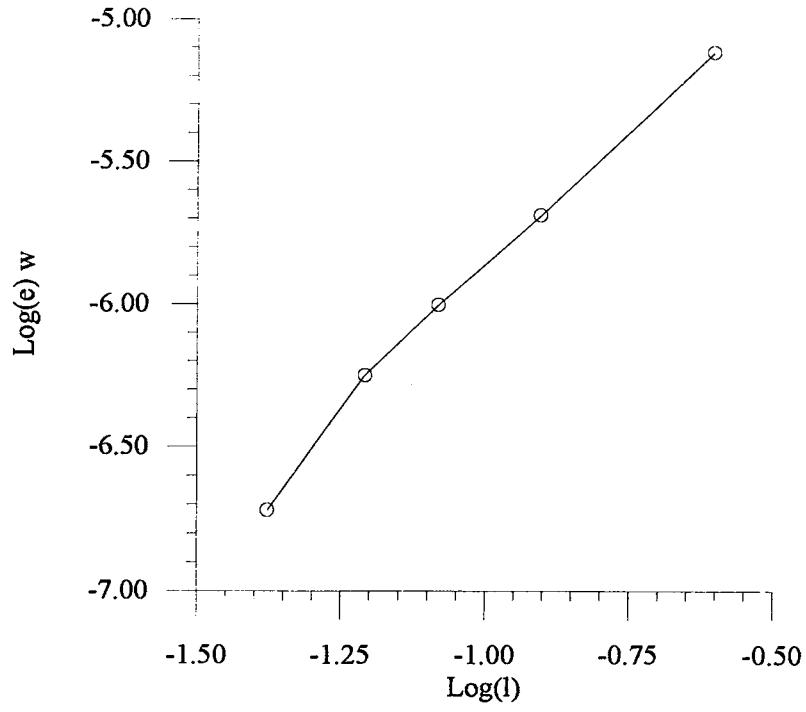


Şekil 6.16. Parabolik kirişin tepe noktasındaki moment için yaklaşım kontrolü

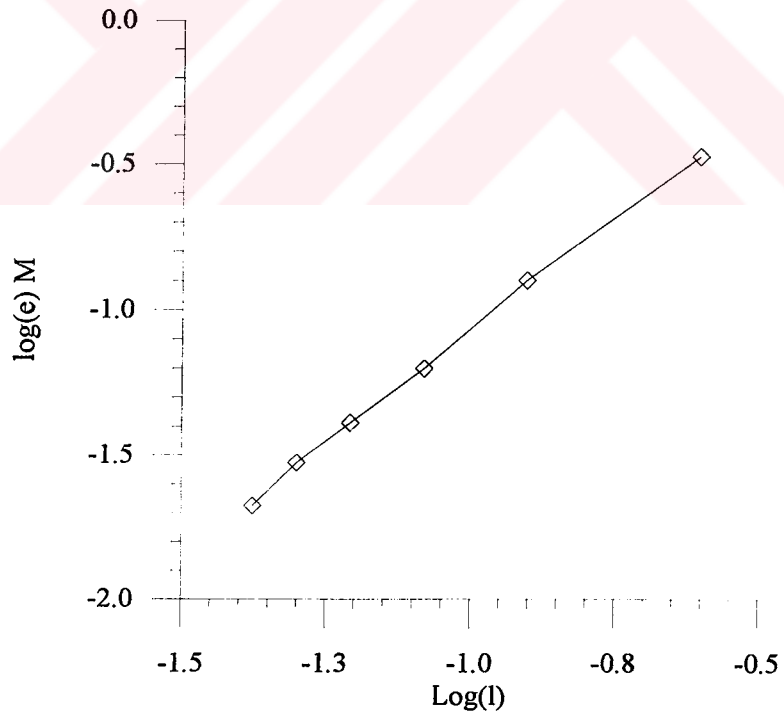


Şekil 6.17. Parabolik kirişin tepe noktasındaki normal kuvvet için yaklaşım kontrolü

Şekil 6.15-6.17 den görüldüğü gibi tek ve çift sayılı elemanlar için çökme ve normal kuvvet değerlerinin teorik sonuçlara yaklaşımının alt ve üst limitleri olduğu gözlenmiştir. Sonlu eleman çözümlerinden elde edilen sayısal sonuçlardaki hata analizleri $\text{Log}(\ell)$ eksenine karşı $\text{Log}(e)_w$ Şekil 6.18 de ve $\text{Log}(\ell)$ eksenine karşı $\text{Log}(e)_M$ Şekil 6.19 da verilmiştir.

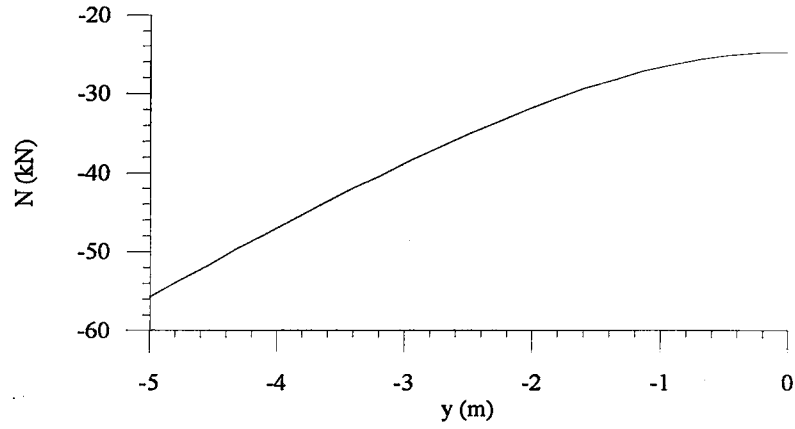


Şekil 6.18. w' deki hatanın eleman boyuna göre logaritmik koordinatlarda gösterimi

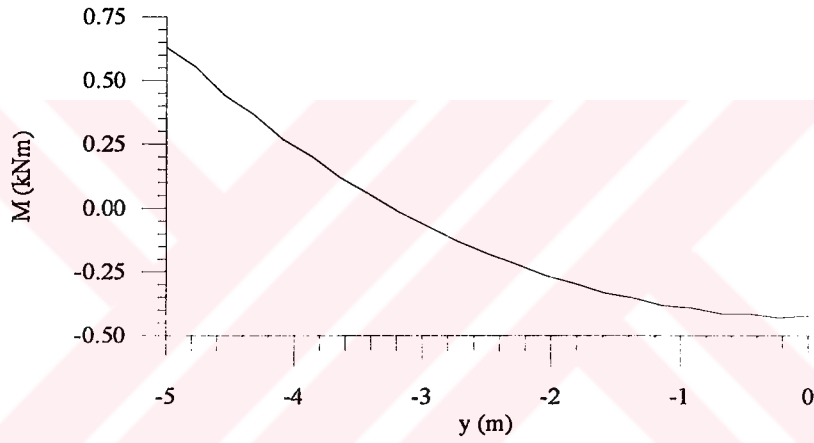


Şekil 6.19. M' deki hatanın eleman boyuna göre logaritmik koordinatlarda gösterimi

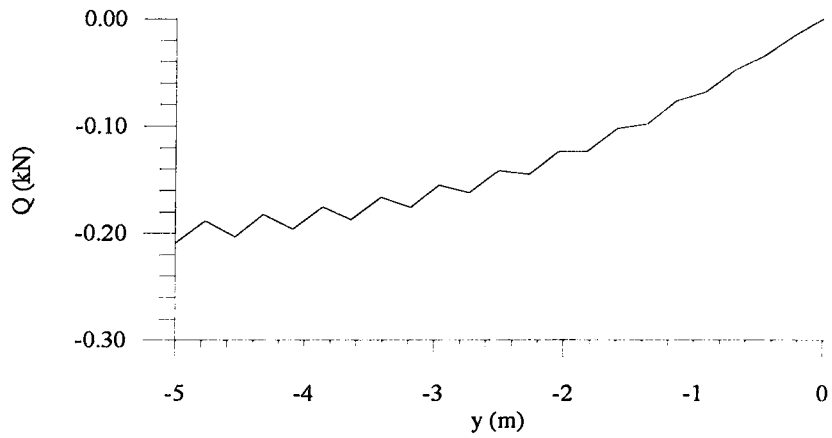
Şekil 6.20 (a)-(c) de parabolik kirişin eksenini boyunca N normal kuvvet, M eğilme momenti ve Q kesme kuvvetinin değişimleri verilmiştir.



(a)



(b)

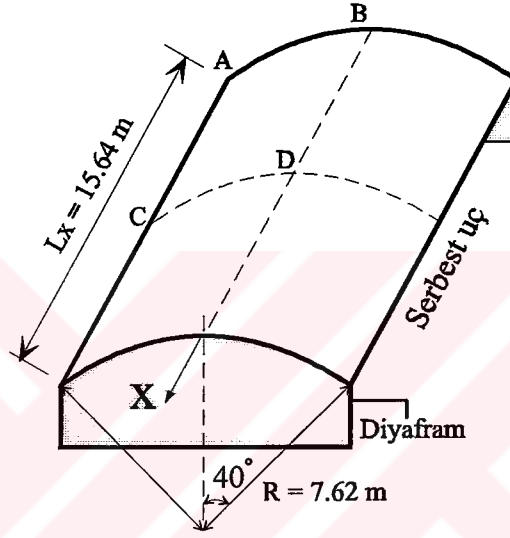


(c)

Şekil 6.20. Parabolik kiriş boyunca iç kuvvetlerin değişimi a) N , b) M , c) Q

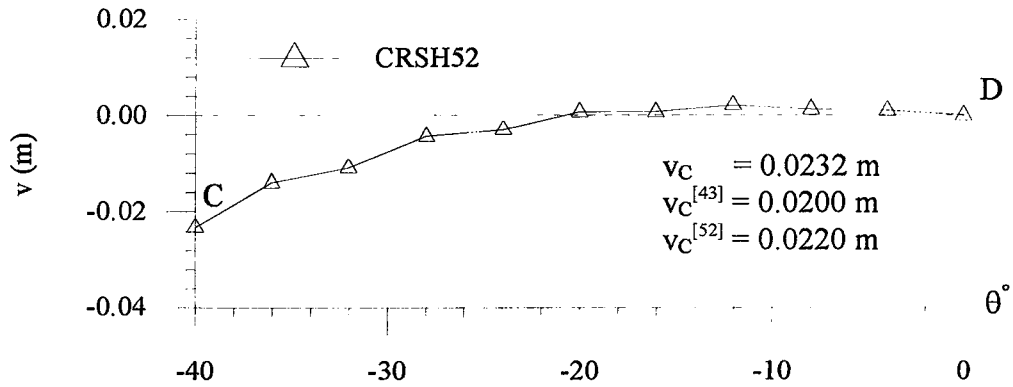
6.1.4 Dairesel Silindirik Kabuk

Geliştirilen CRSH52 kabuk elemanın performansı, bir çok mevcut çalışmada çözümü yapılan kabuk çatı probleminde denenecektir. CRSH52 kabuk elemanı Omurtag ve Aköz [43] tarafından geliştirilen S13 kabuk elemanı ile hemen hemen benzer özellik gösterse de tamamen kinematik farklılığa sahiptir. Şekil 6.21 de geometrisi verilen üniform dairesel silindirik kabuk, $q = 4.393 \text{ kN/m}^2$ kendi ağırlığı altında uçlarındaki diyaframlara mesnetlenmiştir. Malzeme özellikleri ve boyutları sırasıyla $\nu = 0.3$, $E = 2 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$, $L_x = 15.64 \text{ m}$, $h = 0.0762 \text{ m}$, $\theta = 40^\circ$ dir.

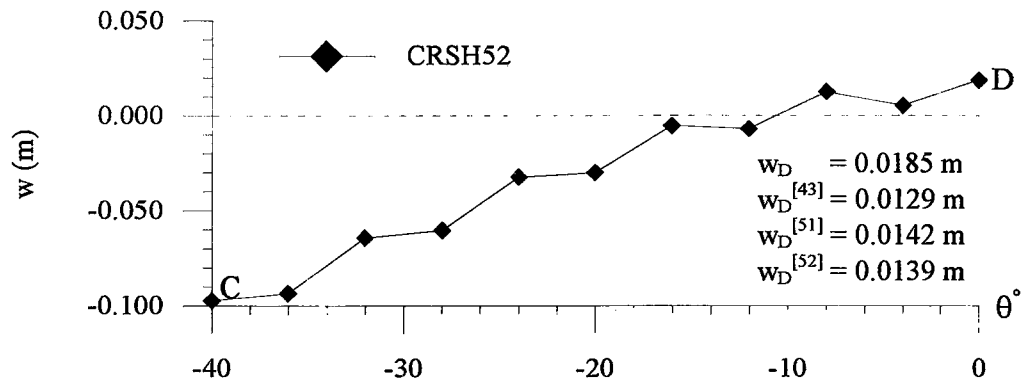


Şekil 6.21 Uçlarından diyafram olarak mesnetlenmiş dairesel silindirik kabuk

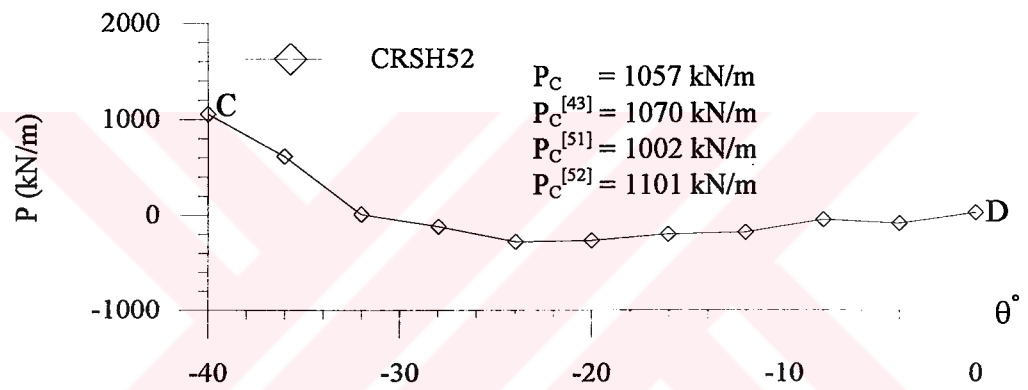
Problem, simetri koşulları kullanılarak sistemin dörtte biri için çözülmüştür. Karşılaştırmalı sonuçlar v , w yerdeğiştirmeler ve P , K , M iç kuvvetleri için Şekil 6.22 (a)-(e) de grafik olarak verilmiştir.



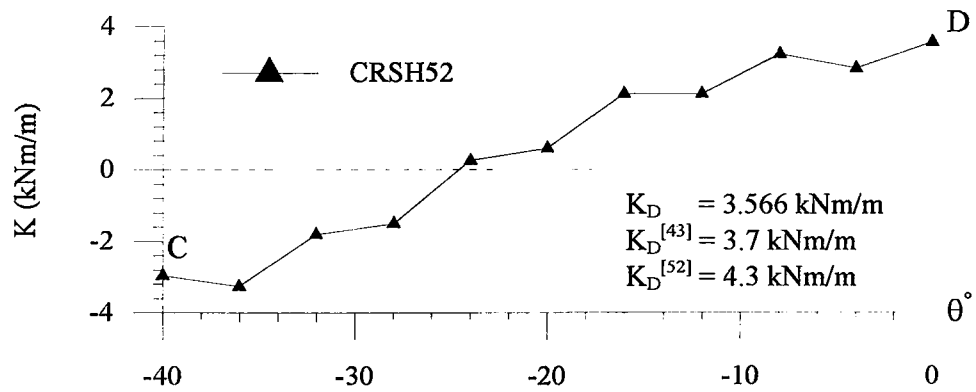
(a)



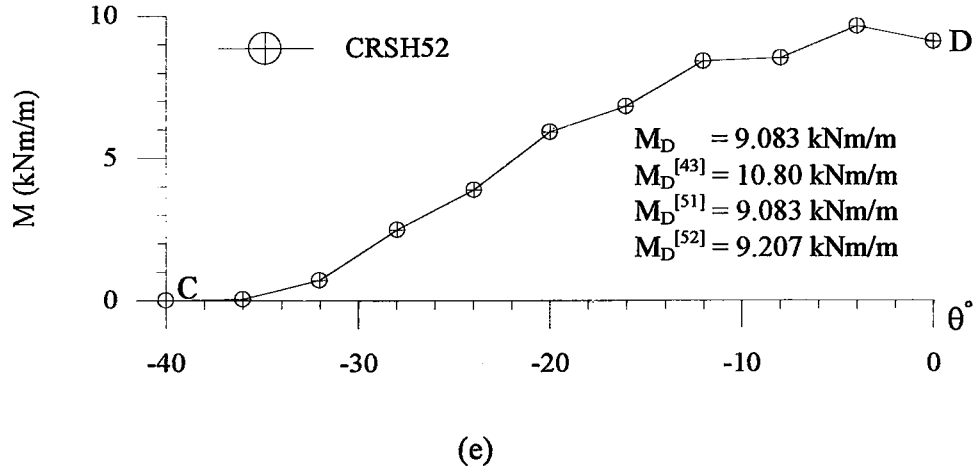
(b)



(c)



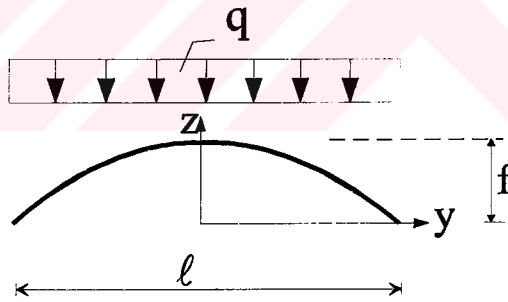
(d)



Şekil 6.22. $\overline{CD}$ boyunca yerdeğiştirmeler ve iç kuvvetlerin değişimi

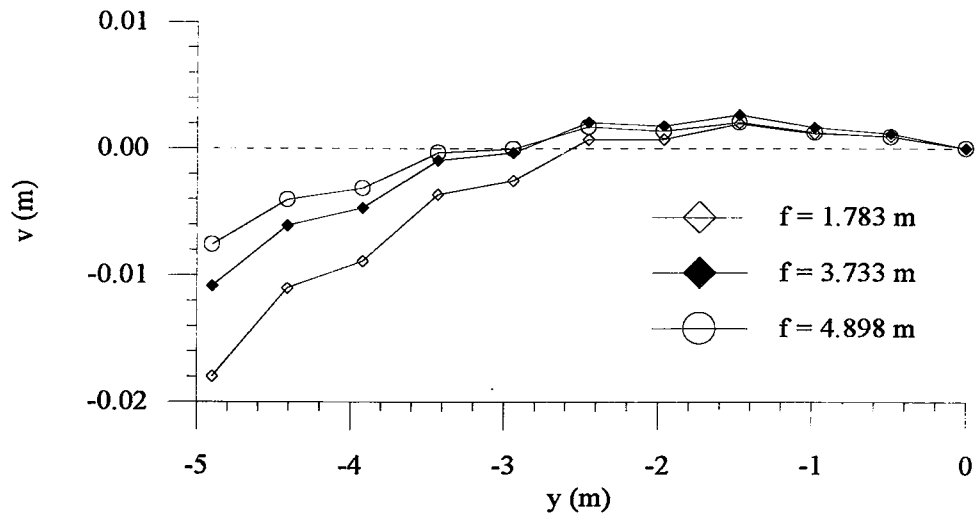
6.1.5 Parabolik Silindir Kabuğun Basıklık Oranının Yerdeğiştirme ve İç Kuvvetler Üzerindeki Etkisi

Bu örnekte parabolik silindir kabuğun iç kuvvetlerin dağılımı ile basıklık arasındaki ilişki araştırılmıştır. Üniform yük etkisi altındaki kabuğun geometrisi ve yük dağılımları sırasıyla Şekil 6.21 ve Şekil 6.23 de verilmiştir.

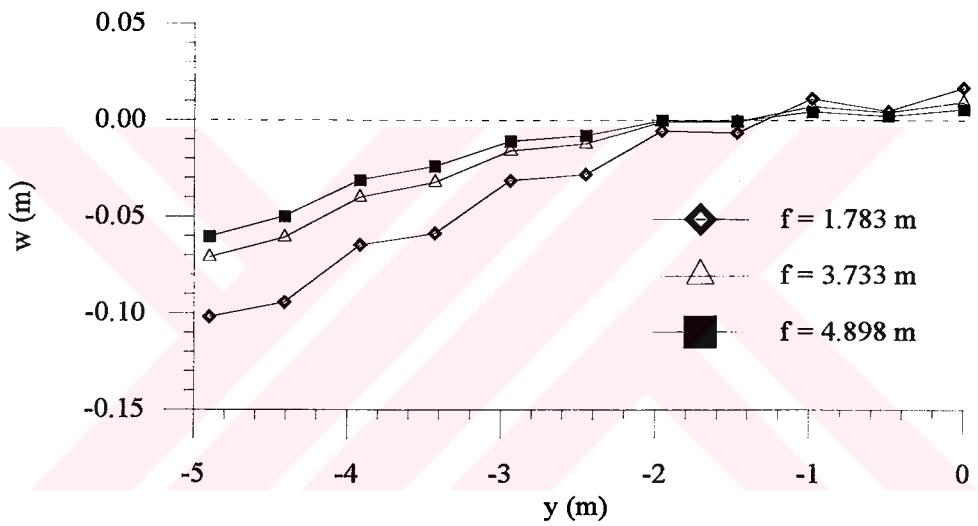


Şekil 6.23 Kabuklar için düşey yük dağılımları

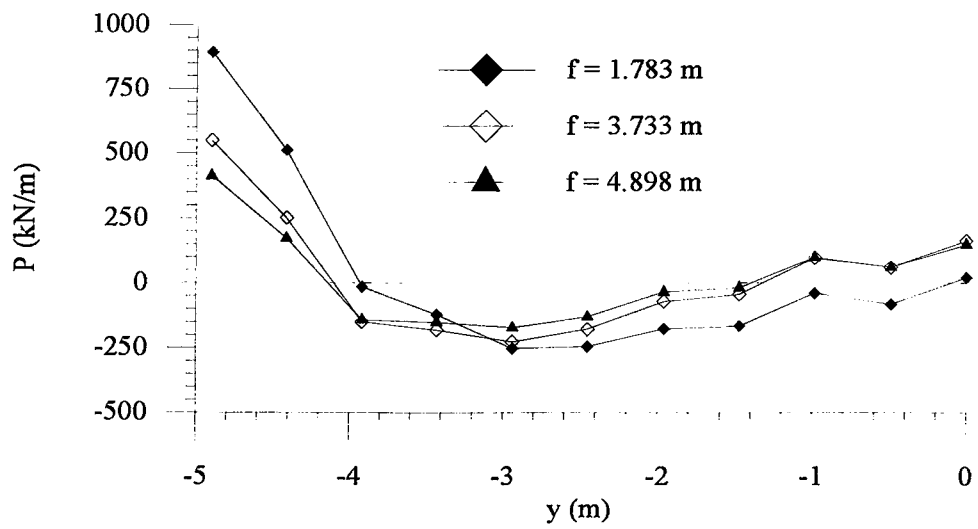
Parabolik kabuğun malzeme özellikleri ve boyutları $E = 2 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$, $\nu = 0.3$, $L_x = 15.64 \text{ m}$, $h = 0.0762 \text{ m}$, $y = 4.898 \text{ m}$, $f_1 = 1.782 \text{ m}$, $f_2 = 3.733 \text{ m}$, $f_3 = 4.898 \text{ m}$ dir. Problem simetri koşulları kullanılarak sistemin dörtte biri için çözülmüştür. Üç farklı yükseklığe göre v , w yerdeğiştirme ve M , K , P , N , Q iç kuvvetlerin $\overline{CD}$ boyunca değişimi Şekil 6.24(a)-(g) grafik olarak verilmiştir.



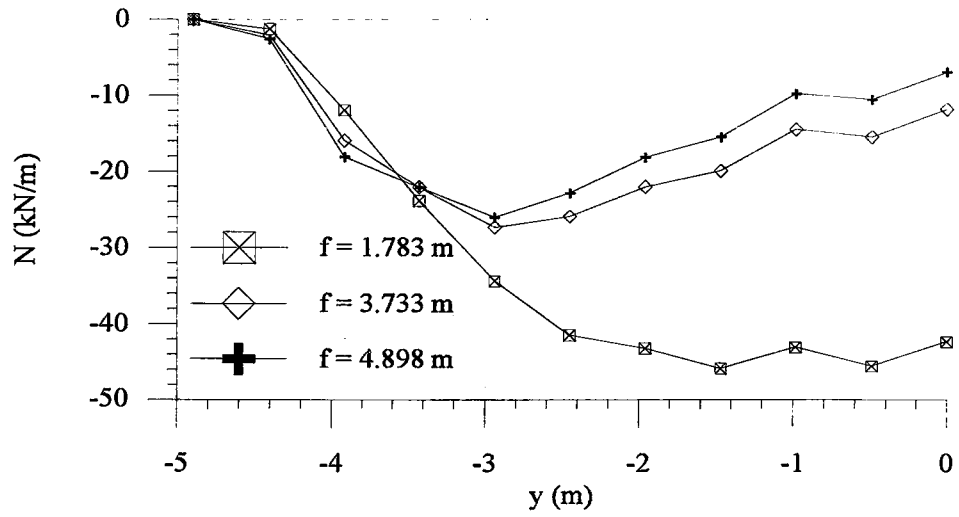
(a)



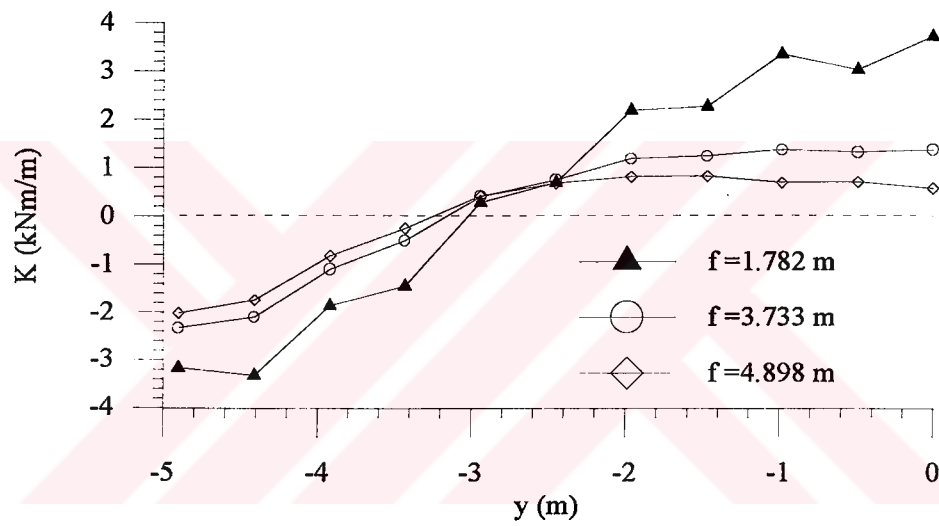
(b)



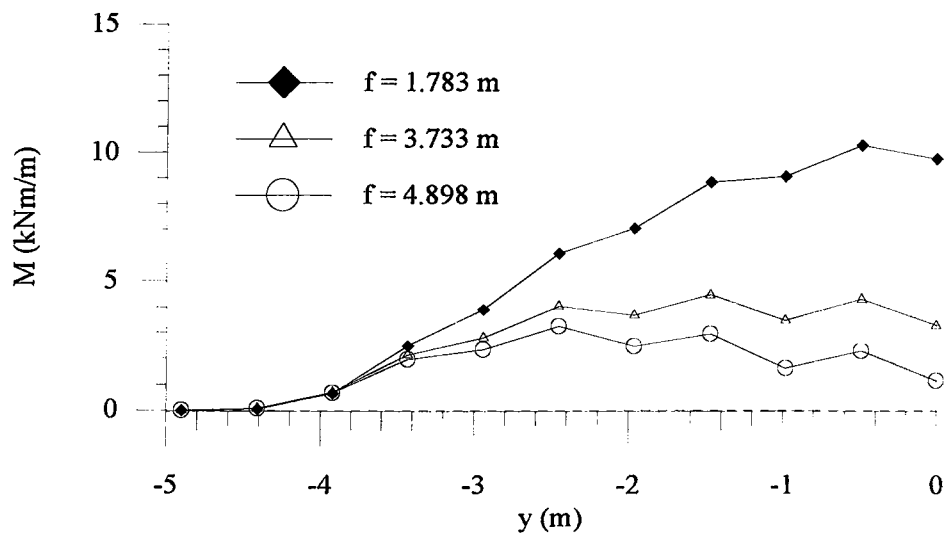
(c)



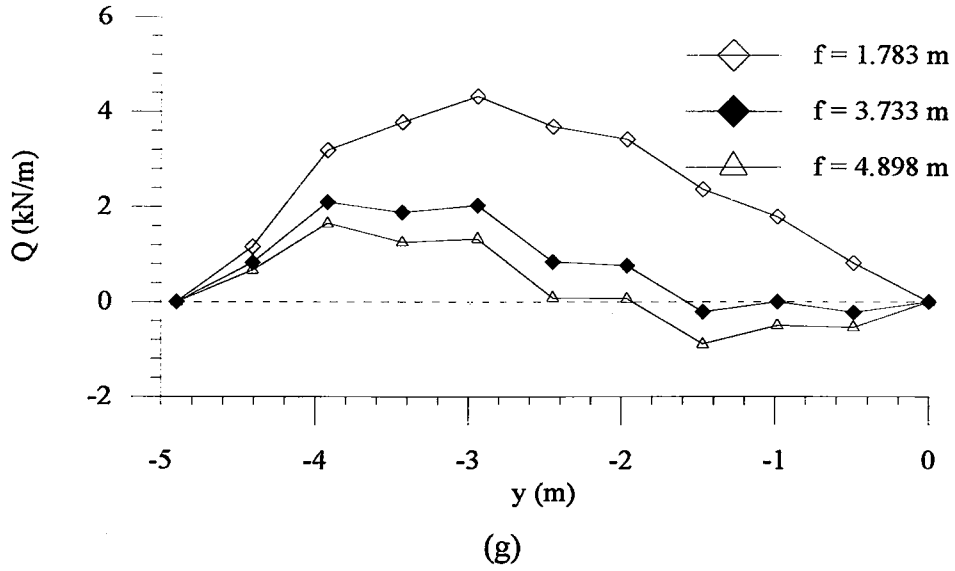
(d)



(e)



(f)



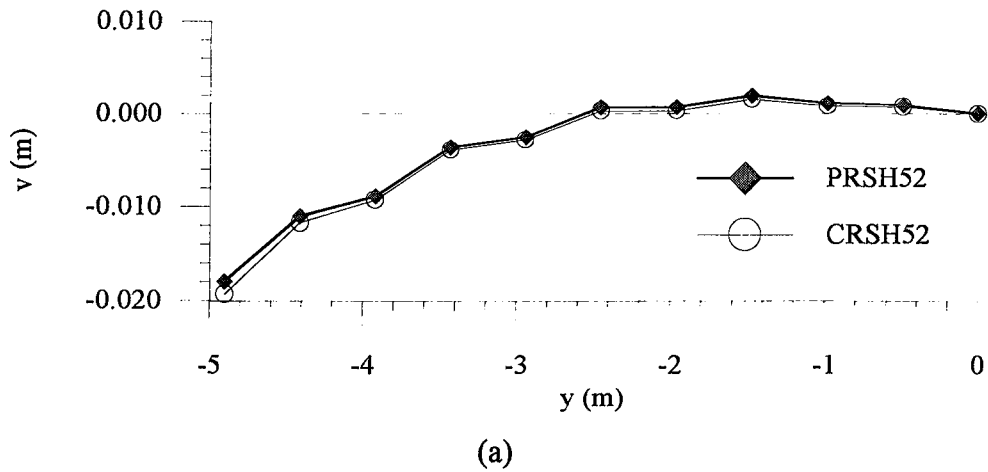
Şekil 6.24 Parabolik silindir kabuğun basırlık oranının yerdeğiştirme ve iç kuvvetler üzerindeki etkisi

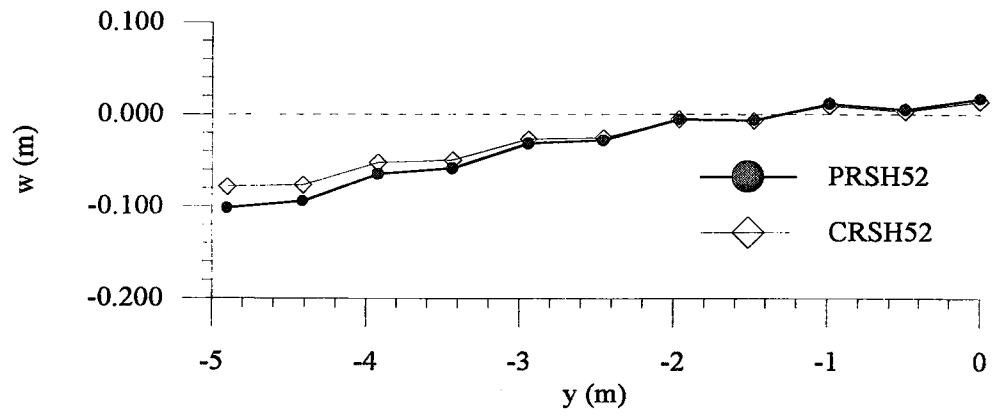
İç kuvvetlere ait grafikler incelendiğinde f arttıkça iç kuvvetlerin değeri azalmaktadır. Böylece basırlık oranı küçük olan kabukların uygun olmadığı gözlenmektedir.

6.1.6 Parabolik ve Dairesel Silindirik Kabukların Karşılaştırılması

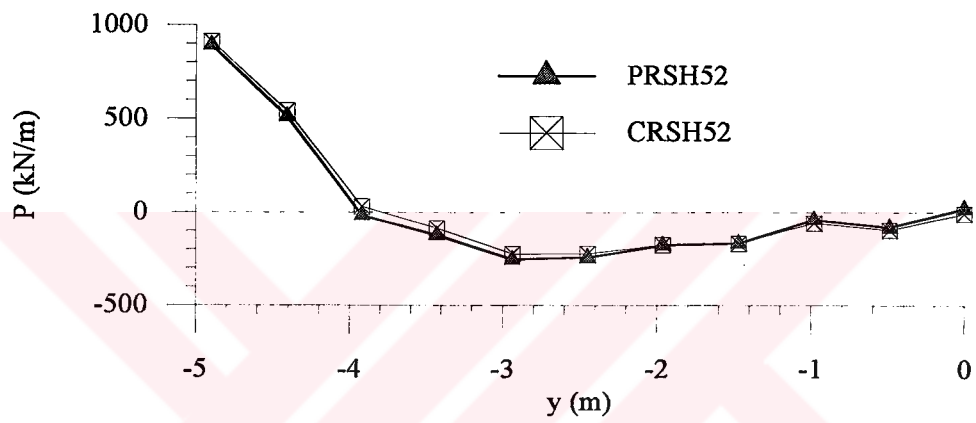
Şekil 6.21 de verilen dairesel silindir kabuk çatı ile, Şekil 6.23 de üniform düşey yüke maruz parabolik silindir kabukların aynı açıklığa ve yüksekliğe sahip olmaları halinde geometrilerinin iç kuvvetler üzerindeki etkisi karşılaştırılmıştır.

- Karşılaştırılan sonuçlar $\theta = 40^\circ$, $f_1 = 1.783$ m için yerdeğiştirme v , w ve iç kuvvetler M , K , P , N için grafikler Şekil 6.25(a)-(g) verilmiştir.

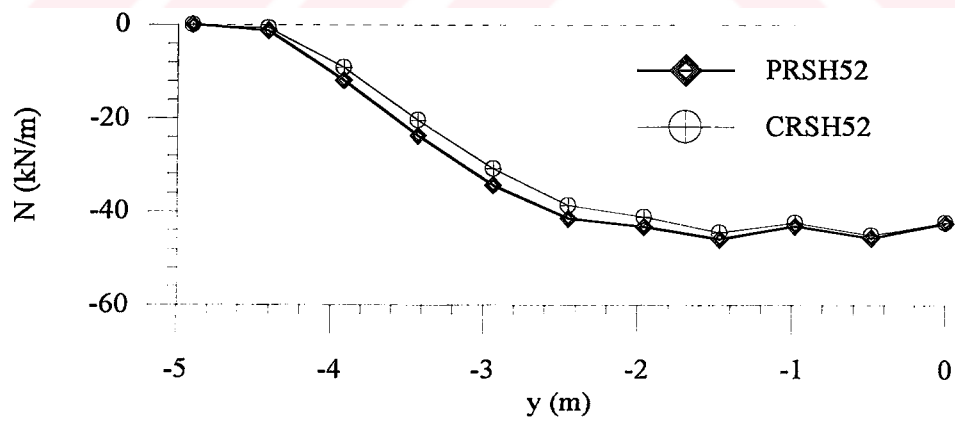




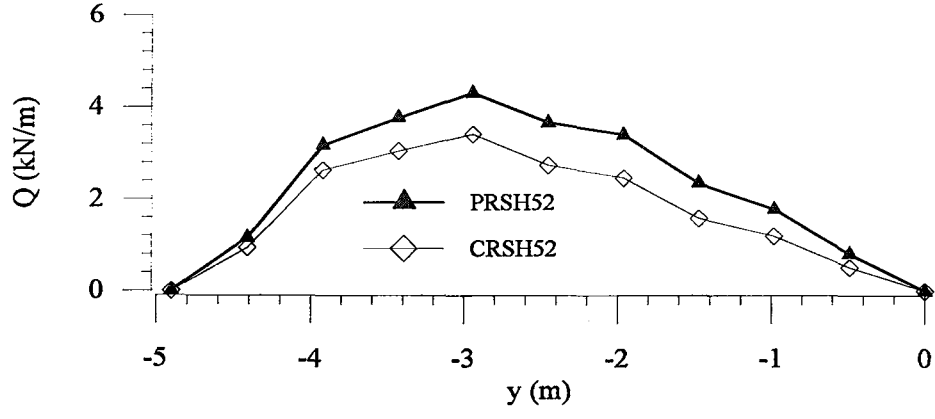
(b)



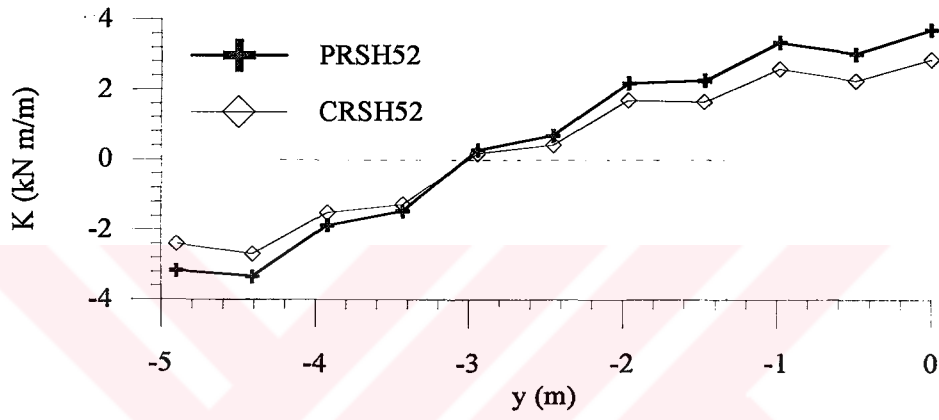
(c)



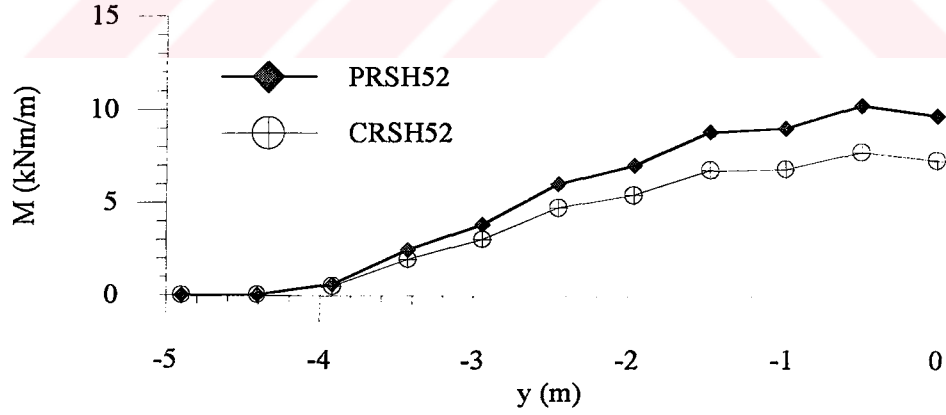
(d)



(e)



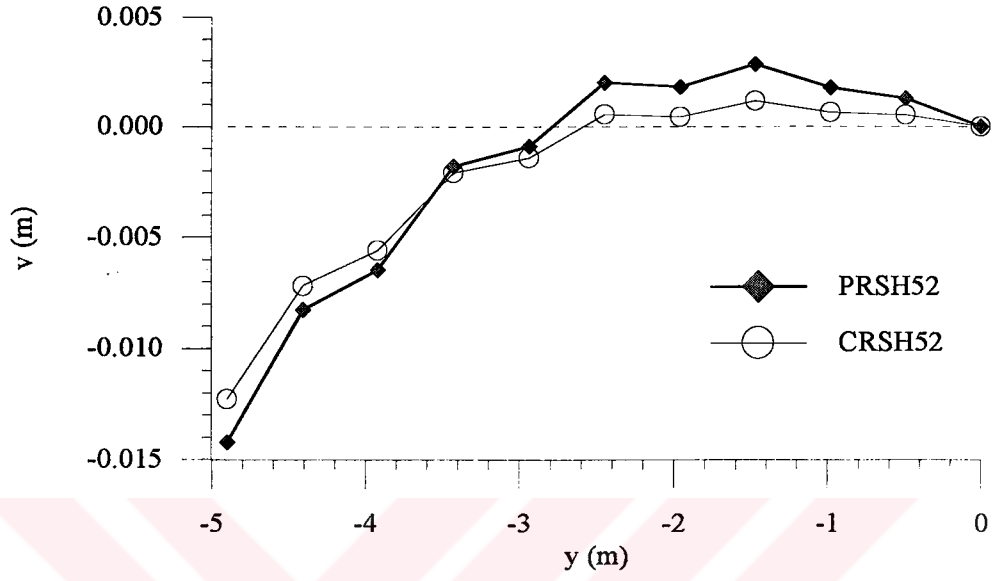
(f)



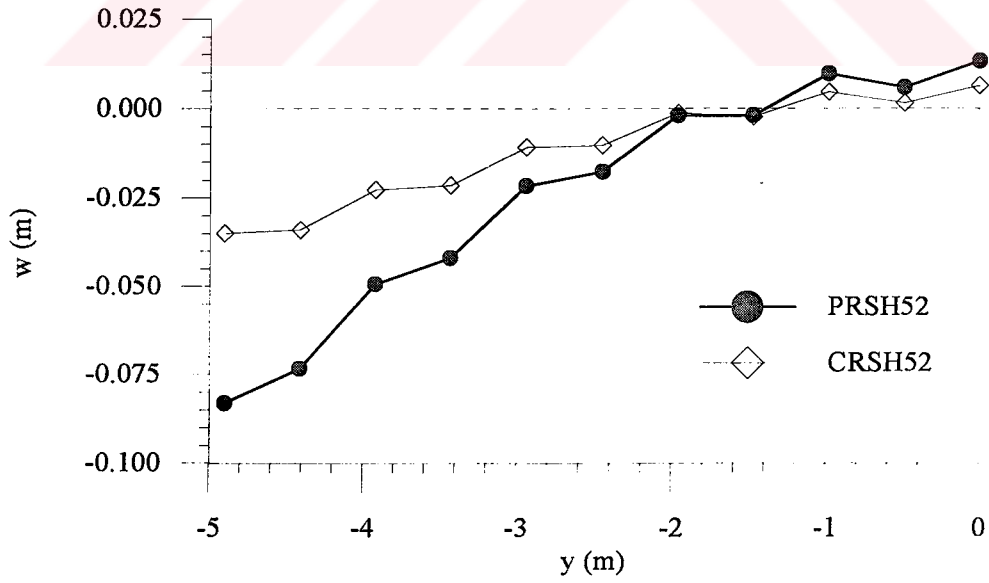
(g)

Şekil 6.25. Parabolik silindir kabuk ile dairesel silindirik kabuklar için yerdeğiştirme ve iç kuvvet dağılımlarının karşılaştırılması, $f = 1.783$ m, $\theta = 40^\circ$

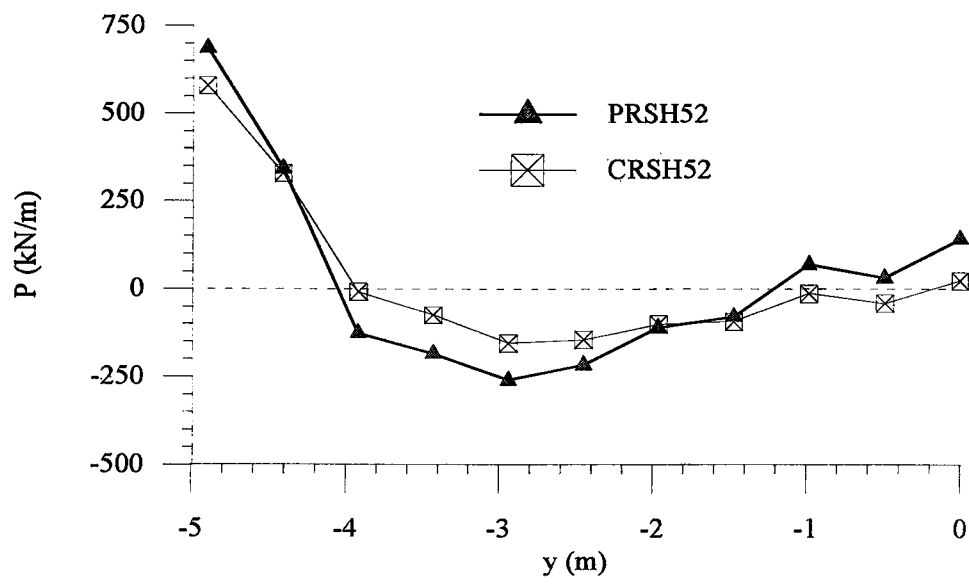
- İkinci karşılaştırmada ise dairesel silindirik kabuk için $\theta = 60^\circ$, ve parabolik silindir kabuk için $f_1 = 2.83$ m alınarak yapılan çözümde yerdeğiştirme v , w ve iç kuvvetler için M , K , P , N grafikleri Şekil 6.26(a)-(f) verilmiştir.



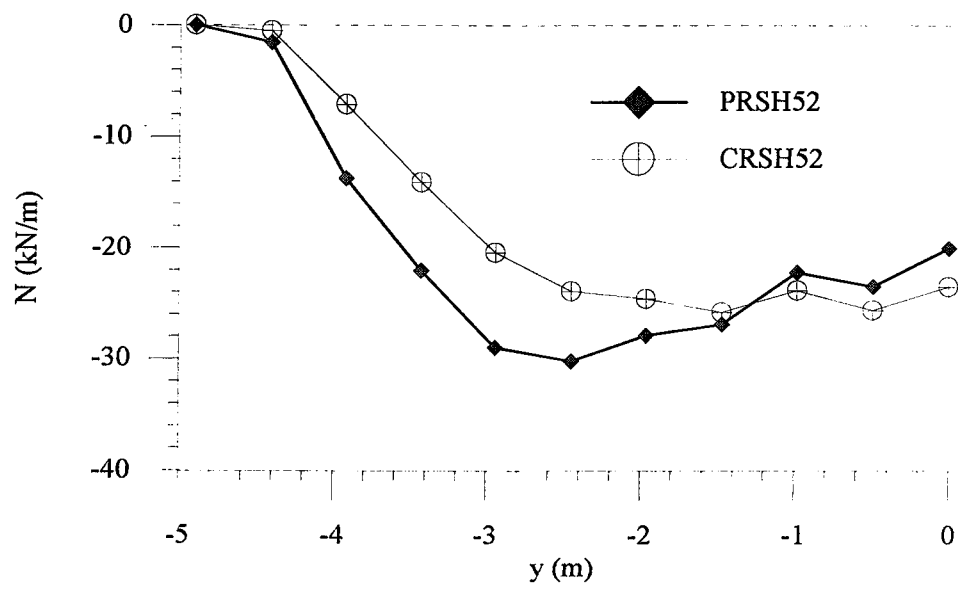
(a)



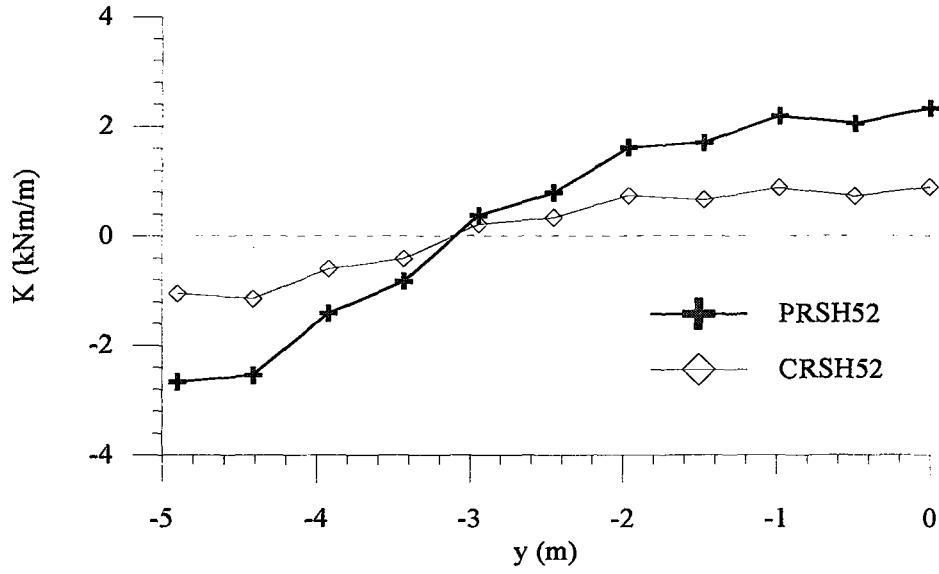
(b)



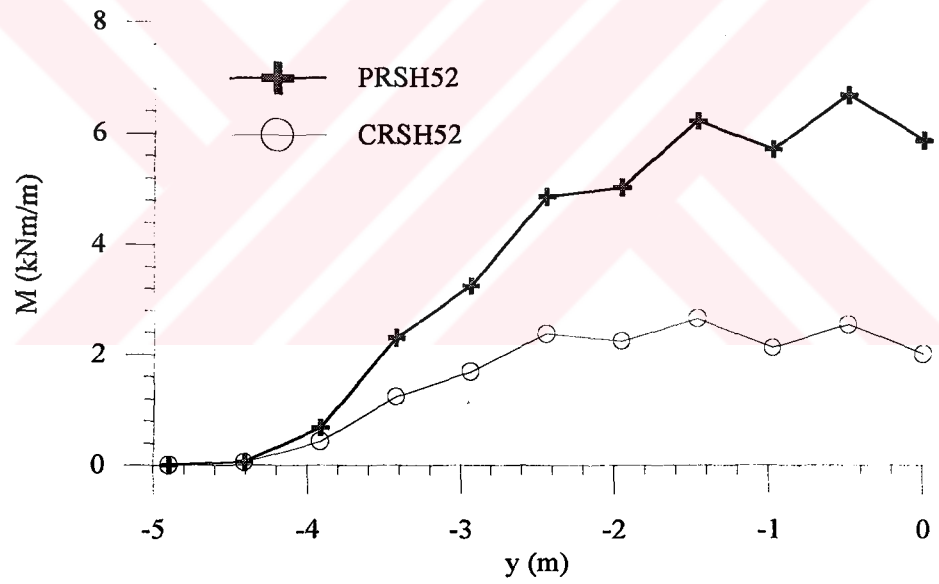
(c)



(d)



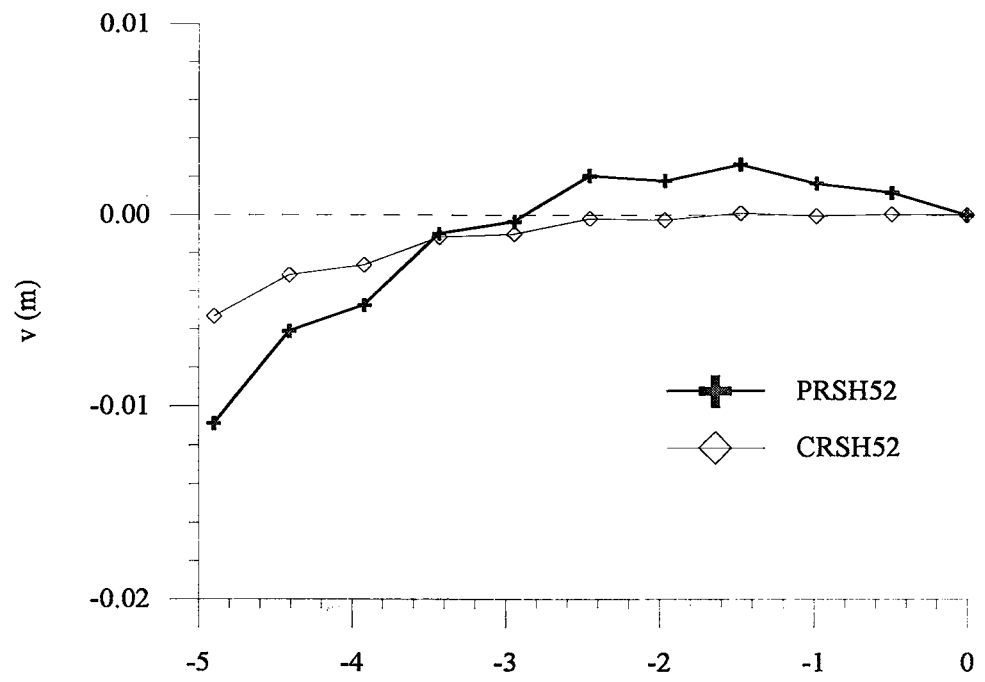
(e)



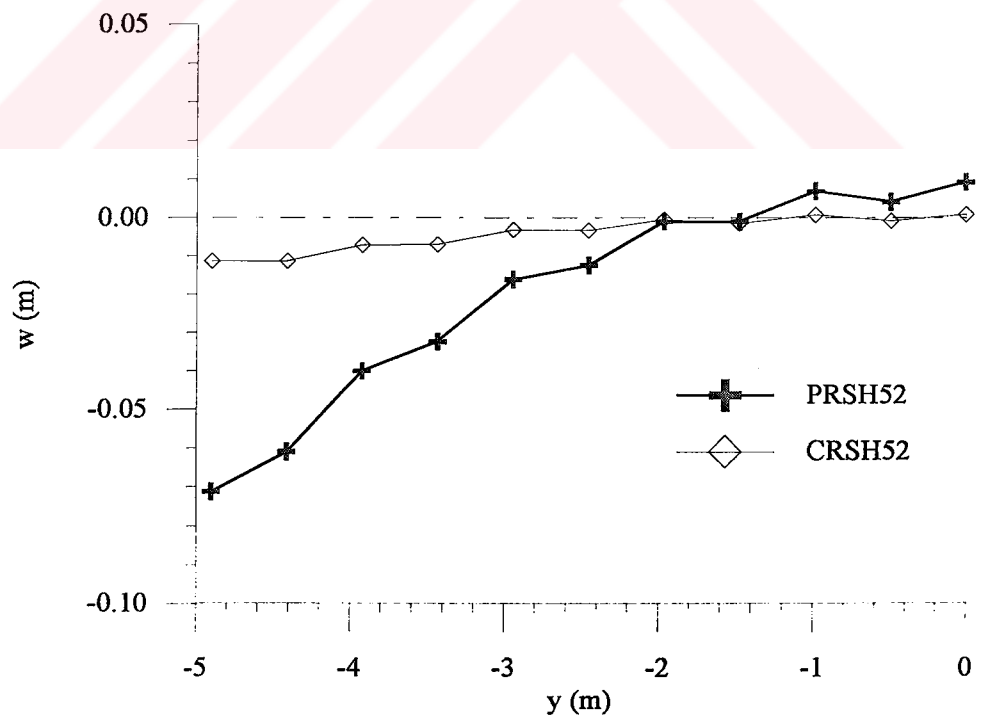
(f)

Şekil 6.26 Parabolik silindirik kabuk ile dairesel silindirik kabuklar için yer değiştirme ve iç kuvvet dağılımlarının karşılaştırılması, $f = 2.828$ m, $\theta = 60^\circ$

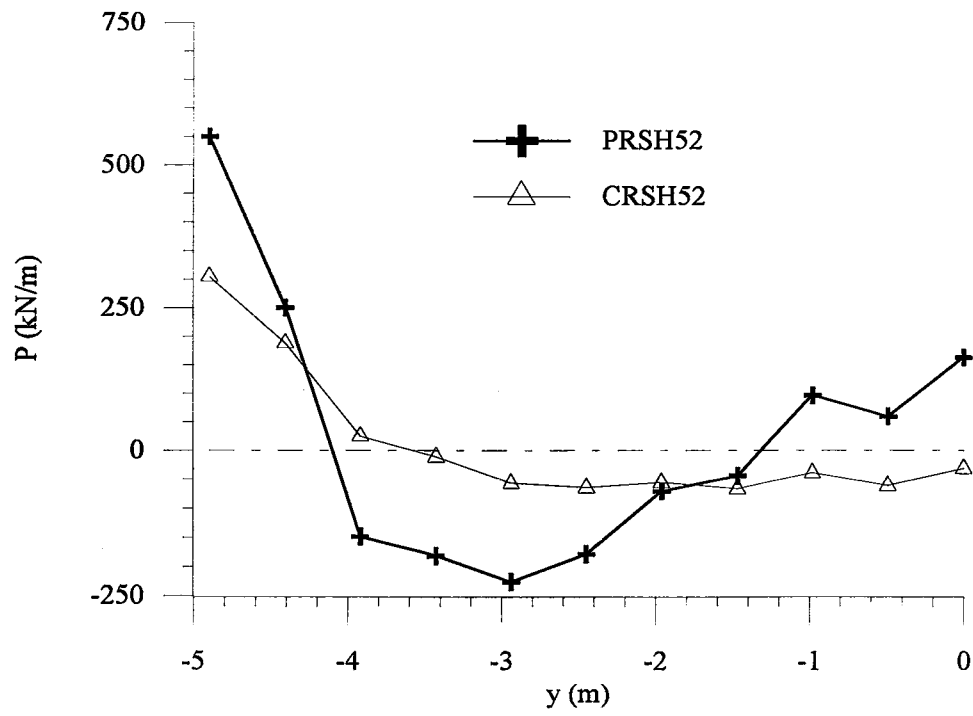
- Son olarak dairesel silindirik kabuk için $\theta = 74.62^\circ$, ve parabolik silindir kabuk için $f_1 = 3.732$ m alınarak yapılan çözümlerde yerdeğiştirme v , w ve iç kuvvetlerin M , K , P , N karşılaştırmalı sonuçları Şekil 6.27(a)-(f) verilmiştir.



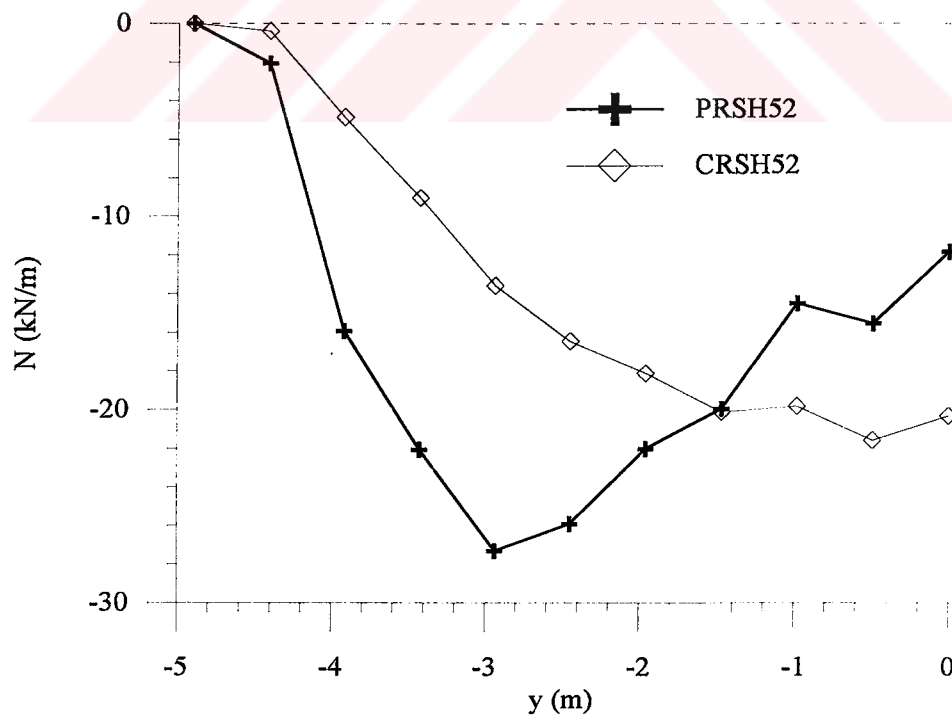
(a)



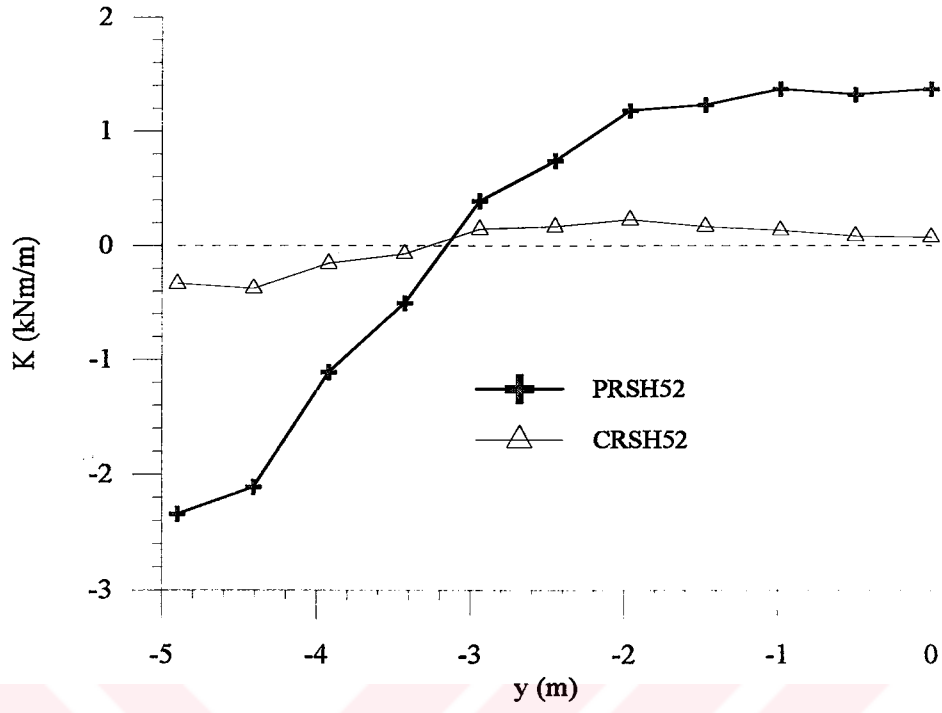
(b)



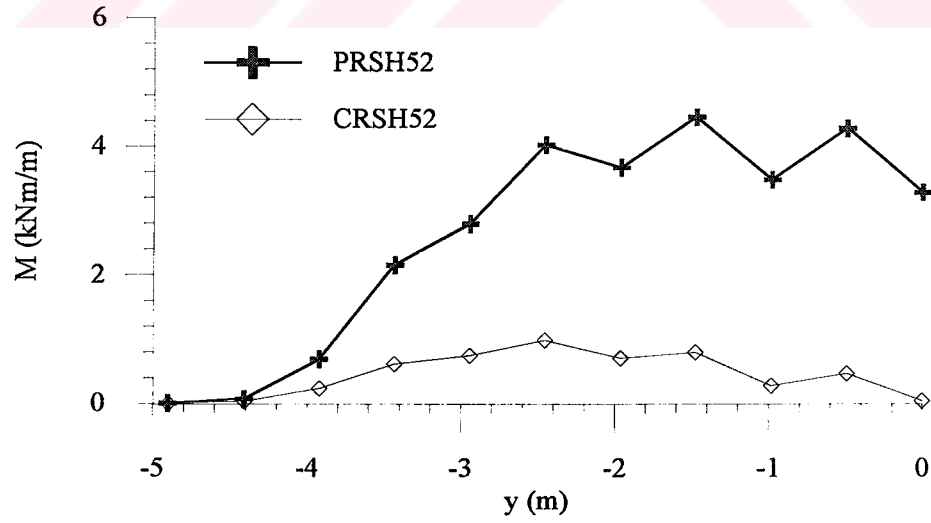
(c)



(d)



(e)



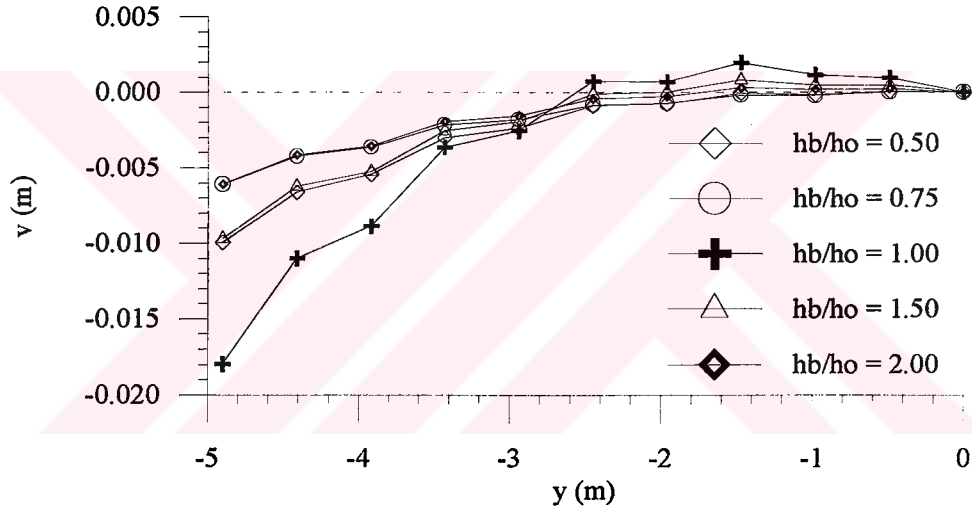
(f)

Şekil 6.27 Parabolik silindirik kabuk ile dairesel silindirik kabuklar için yer değiştirme ve iç kuvvet dağılımlarının karşılaştırılması, $f = 3.732$ m, $\theta = 74.62^\circ$.

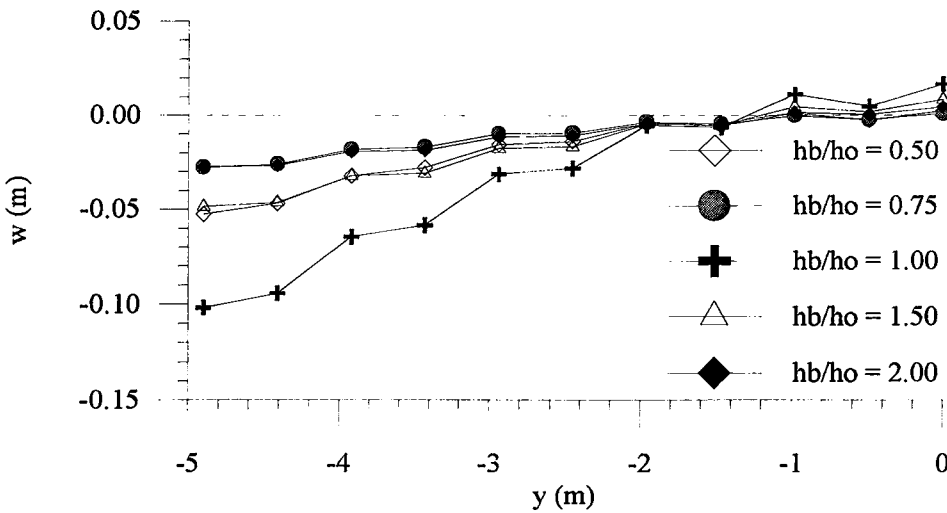
Aynı açıklık ve yüksekliğe sahip parabolik silindir ve dairesel silindirik kabuklar için yapılan çözümlerin grafikleri incelendiğinde, dairesel silindirik kabukların yerdeğiştirme ve iç kuvvetlerinin, parabolik silindir kabuğun yerdeğiştirme ve iç kuvvetlerinden küçük kaldığı gözlenmiştir.

6.1.7 Değişken Kalınlıklı Parabolik Silindir Kabuklar

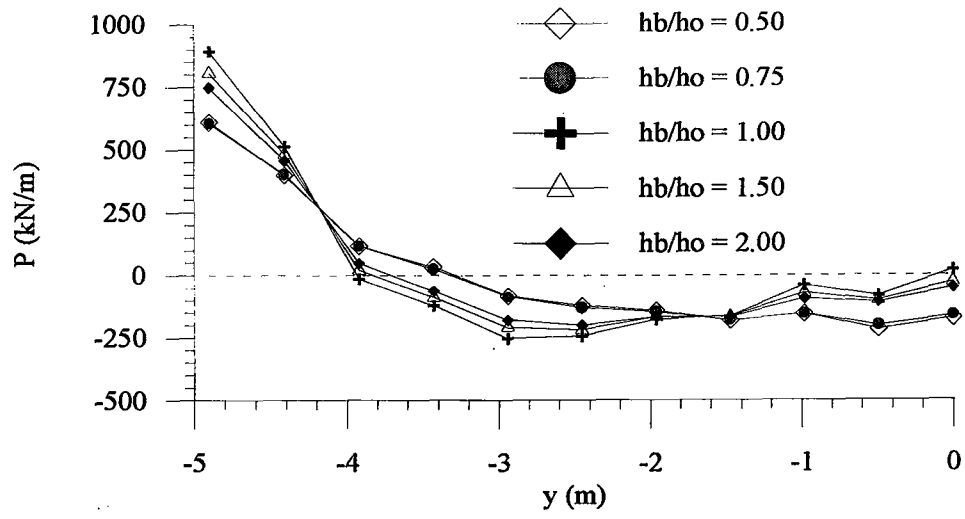
Geliştirilen PRSH52 kabuk elemanı ile x ve/veya y doğrultusunda değişken kalınlıklı kabuk çözümleri de yapmak mümkündür. Şekil 6.21 de gösterilen kabuğun malzeme özellikleri ve boyutları aynı kalmak şartıyla sadece radyal doğrultuda başlangıçtaki (h_b) kalınlığının, tepe noktasındaki (h_o) kalınlığa oranları (h_b/h_o) değiştirilerek yerdeğiştirme ve iç kuvvetler üzerindeki etkisi incelenmiştir. Şekil 6.28(a)-(g) de yerdeğiştirme v, w ve iç kuvvetler M, K, P, N, Q ait grafikler verilmiştir.



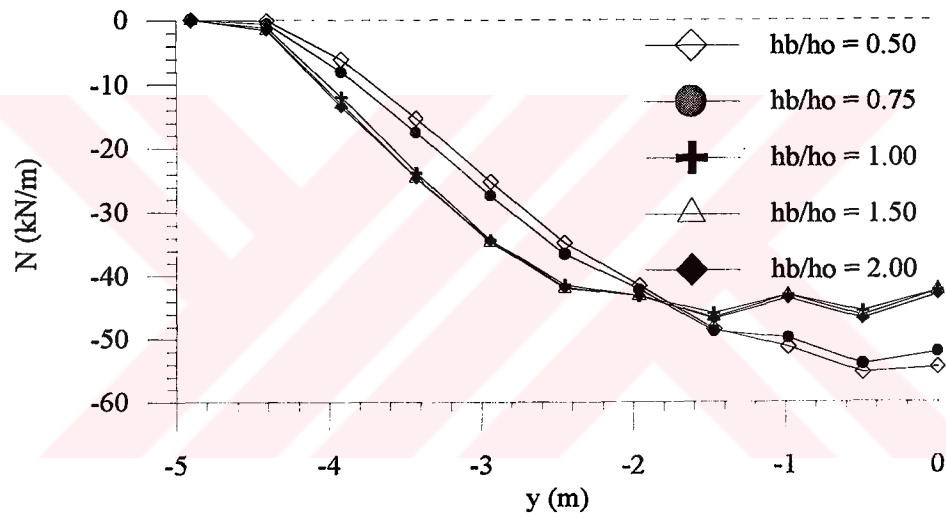
(a)



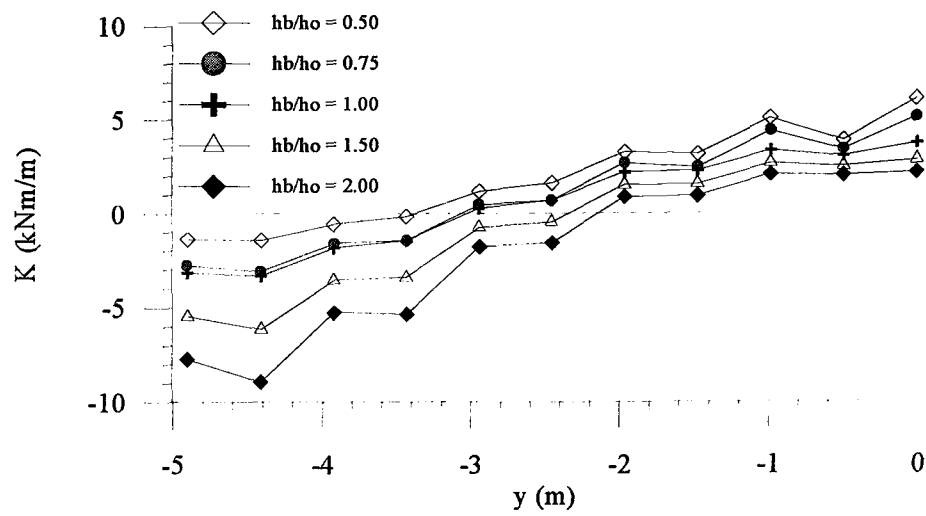
(b)



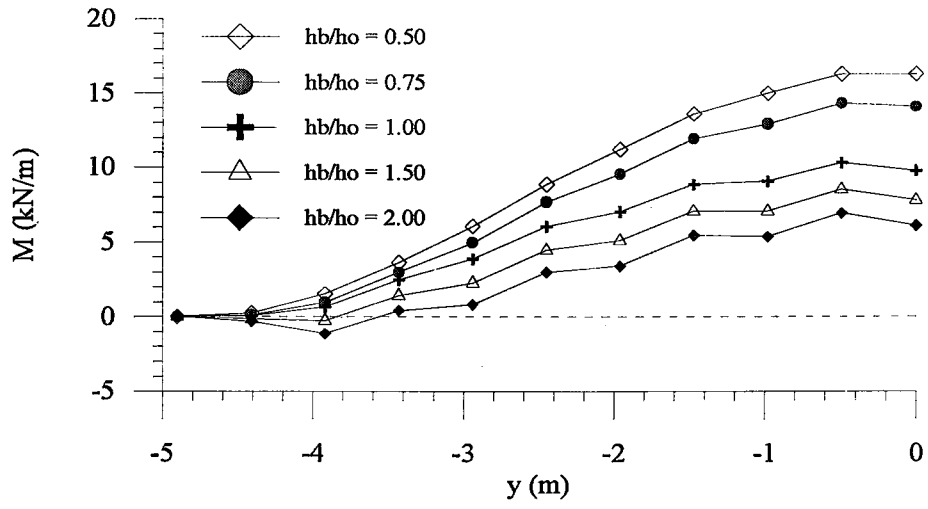
(c)



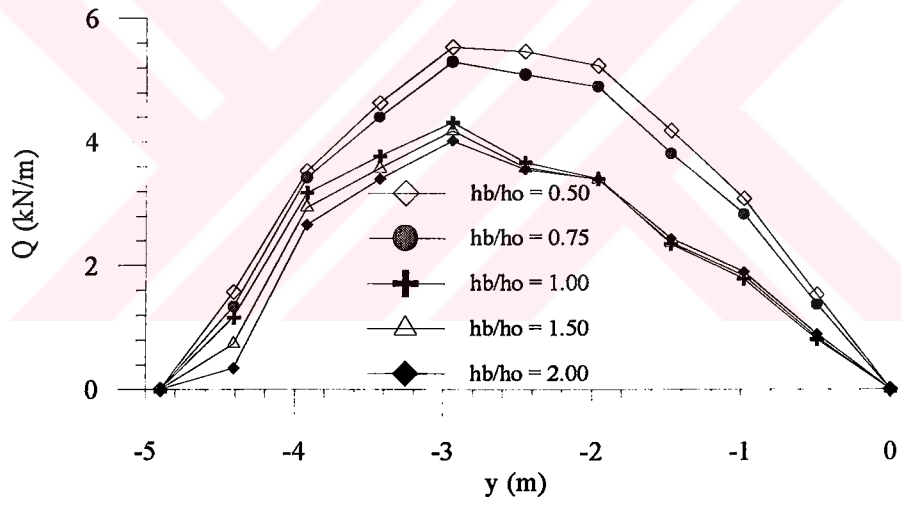
(d)



(e)



(f)



(g)

Şekil 6.28 Farklı kalınlık değişimleri için yerdeğiştirme ve iç kuvvet sonuçlarının karşılaştırılması

6.2. Kabukların Dinamik Analizi

Yapının dinamik yükler altında davranışını bulmak için öncelikle statik davranışlarını veren matematik modele ulaşmak gerekir. Statik analizde yerdeğiştirmelerin türevleri kullanılırken, dinamik özellikler doğrudan yerdeğiştirmelere bağıdır. Bu da daha az değişken kullanılarak dinamik analiz yapılabileceğini gösterir. Bu nedenle dinamik analiz için serbestlik dereceleri azaltılır. Serbestlik derecelerinde azaltma iki şekilde yapılır.

- Atalet kuvveti önemli görülen yerdeğiştirme bileşenlerine verilir.
- Dinamik parametrelerin sayısı seçilen fonksiyonlarla sınırlandırılabilir.
(Rayleigh-Ritz metodunda olduğu gibi).

Bu çalışmada birinci yol izlenmiştir. Çok basit bir yapıya sahip olmasına rağmen dairesel silindirik kabukların bile, kesin çözümü oldukça yorucudur. İki ucu ankastre silindirik kabuğun titreşimleri Donnell denklemlerine dayanarak elde edilmiştir [4]. Teorik çözümlerde de önce u , v , w yerdeğiştirmelerinin her üçüne atalet kuvveti verilerek frekanslar bulunmuş, daha sonra sadece dinamik halde en etkin olduğu düşünölen w ye atalet kuvveti verilerek frekanslar bulunmuştur. Her iki haldeki sonuçların birbirine yakın olduğu gösterilmiştir.

Bu çalışmada, statik analiz için geliştirilen sonlu eleman formölasyonunda, sadece nodlardaki w ler doğrultusunda atalet kuvveti verilerek serbestlik derecesinin azaltılması yoluna gidilmiştir. w lerin dışındaki bütün değişkenler $\mathbf{d}$ ile gösterilmiştir. w doğrultularında $q_w = -\omega^2 m w$ atalet kuvvetleri dış yük olarak alınırsa (5.32) denklemindeki sonlu eleman matrisi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ -\omega^2 m \mathbf{w} \end{Bmatrix} \quad (6.1)$$

haline gelir. Burada $[\mathbf{m}] = \rho h [\mathbf{k}_1]$ eleman yayılı kütle matrisi, ρ yoğunluk, h kesit kalınlığıdır. Bu matris kütleinin sürekli değişimi göz önüne alınarak hesaplanmıştır. Bu denklem açık olarak yazılırsa,

$$\mathbf{K}_{11} \mathbf{d} + \mathbf{K}_{12} \mathbf{w} = 0 \quad (6.2a)$$

$$\mathbf{K}_{21} \mathbf{d} + \mathbf{K}_{22} \mathbf{w} = -\omega^2 \mathbf{M} \mathbf{w} \quad (6.2.b)$$

elde edilir. (6.2a) denkleminde $\mathbf{d}$ çözülür,

$$\mathbf{d} = -[\mathbf{K}_{11}^{-1}][\mathbf{K}_{12}]\{\mathbf{w}\} \quad (6.3)$$

ve (6.2b) denkleminde yerine konursa,

$$[\mathbf{K}^*]\{\mathbf{w}\} = -\omega^2 [\mathbf{M}]\{\mathbf{w}\} \quad (6.4)$$

elde edilir. (6.4) denklemindeki kısaltma ise,

$$[\mathbf{K}^*] = [\mathbf{K}_{22}] - [\mathbf{K}_{21}] [\mathbf{K}_{11}]^{-1} [\mathbf{K}_{12}] \quad (6.5)$$

dir. (6.4) denkleminde standart özdeğer problemine erişilmektedir.

Elde edilen bu yapı önce parabolik silindir kabuklara uygulanmıştır. f sakma değeri çok küçük seçilerek değişik sınır koşulları için bilinen plak serbest titreşim frekanslarına ulaşılarak formülasyonun doğruluğu kontrol edilecektir. Daha sonra dairesel silindirik kabuklar için aynı yaklaşımla yine literatürde çözölen bir ucu ankastre diğör kenarları serbest olan dairesel silindirik kabukların çözümleri yapılacaktır [53-54]. Bu çözümlerden sonra geliştirilen PRSH52 kabuk elemanı ile $m = f/\ell$ basıklık oranı için literatürde bulunmayan parabolik silindir kabukların serbest titreşim frekans ve modları verilecektir.

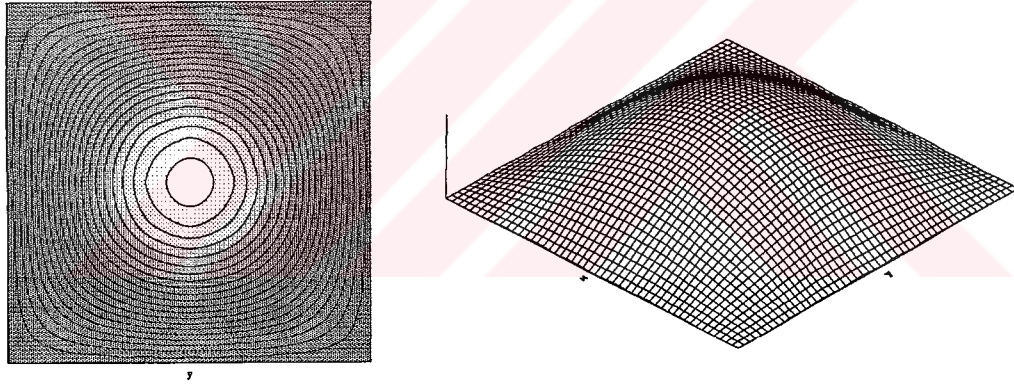
6.2.1 Dört kenarından basit mesnetli kare plak

Dört kenarından basit mesnetli *BBBB* kare plak için titreşim analizi yapılmıştır. Malzemenin geometrik özellikleri $E = 2 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$, $\nu = 0.30$, $L = 2a = 2b = 10 \text{ m}$, $f = 0.01 \text{ m}$ ve $\rho = 2400 \text{ kg/m}^3$ olarak alınmıştır. Geliştirilen programın sonuçları Leissa [55] tarafından elde edilen analitik sonuçlarla, ve Gâteaux diferansiyeli metodu kullanılarak yapılan çözümlerle karşılaştırılmıştır [56-57]. Frekans parametreleri $\omega_{mn} = \omega_{mn} L^2 \sqrt{\rho h/D}$, için Tablo 6.1 de verilmiştir.

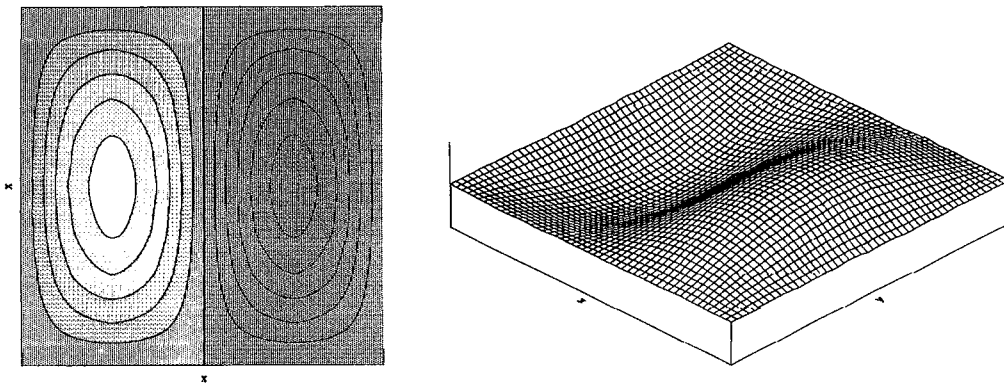
Tablo 6.1 *BBBB* kare plak için frekans parametreleri $\varpi_{mn} = \omega_{mn} L^2 \sqrt{\rho h/D}$

Frekans Parametreleri	[55]	[56]	[57]	PRSH52
ϖ_{11}	19.738	19.911	19.703	19.774
ϖ_{12}	49.349	50.112	49.069	49.088
ϖ_{21}	49.349	50.112	49.069	49.066
ϖ_{22}	78.958	80.090	78.354	78.340
ϖ_{33}	176.981	182.776	172.10	172.10

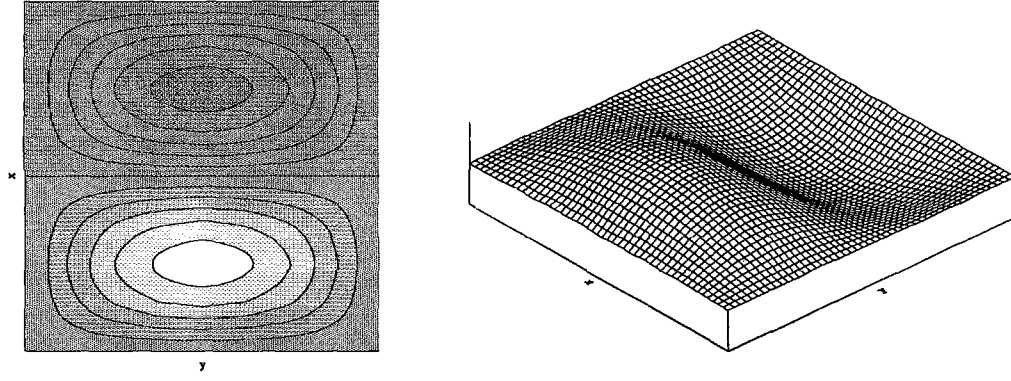
Şekil 6.29(a)-(e) de elde edilen doğal frekanslar ω_j lerin mod şekilleri ve kontur çizgileri verilmiştir.



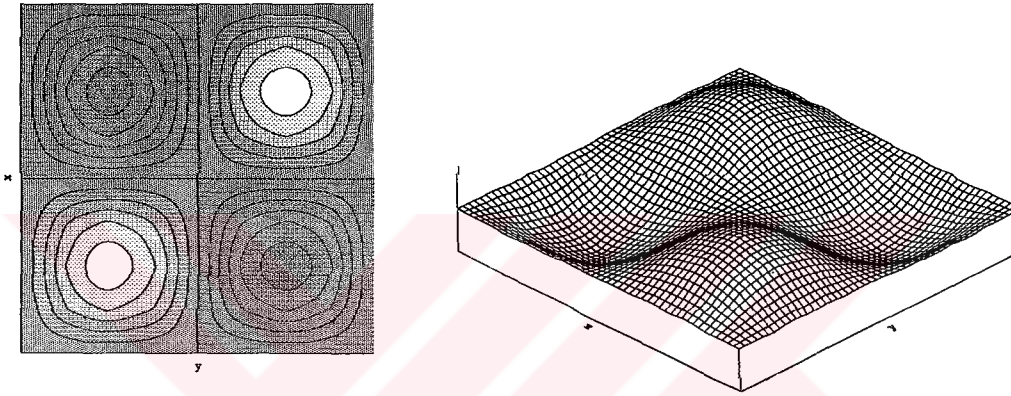
a) *BBBB* için ω_{11} 'e ait mod şekilleri ve kontur çizgileri



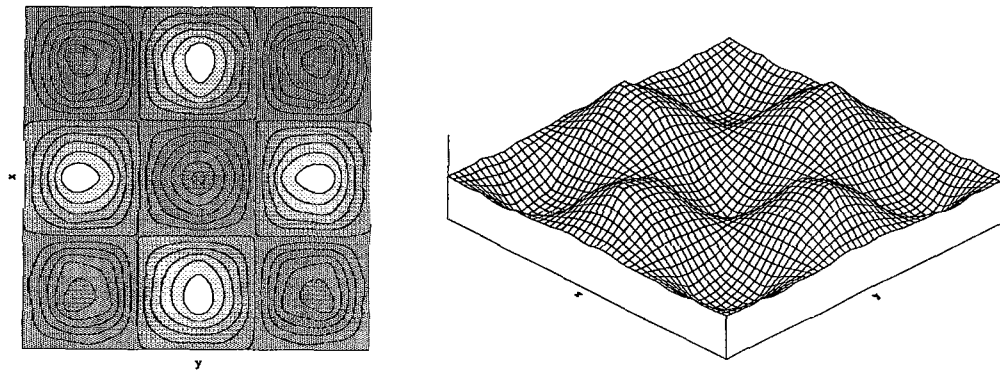
b) *BBBB* için ω_{12} 'e ait mod şekilleri ve kontur çizgileri



c) SSSS için ω_{21} 'e ait mod şekilleri ve kontur çizgileri



c) BBBB için ω_{22} 'e ait mod şekilleri ve kontur çizgileri



d) BBBB için ω_{33} 'e ait mode şekilleri ve kontur çizgileri

Şekil 6.29 BBBB ω_{11} , ω_{12} , ω_{21} , ω_{22} , ve ω_{33} frekanslarına ait mod şekilleri ve kontur çizgileri

Geliştirilen yüksek mertebeden kabuk teorisinin, enine kayma etkilerinin de gözönüne almasından dolayı yukarıda çözümü yapılan *BBBB* kare plak problemin verileri kullanılarak kalınlık değişiminin, frekans parametreleri üzerindeki etkisi incelenmiştir. Değişik ($h/2a$) oranları için frekans parametreleri Tablo 6.2 de verilmiştir.

Tablo 6.2 Değişik ($h/2a$) oranları için *BBBB* kare plağın frekans parametreleri

$\omega_{mn} = \omega_{mn} L^2 \sqrt{\rho h/D}$						
$h/2a$	0.01	0.015	0.02	0.05	0.10	0.20
ω_{11}	19.878	19.774	19.721	19.431	18.682	16.838
ω_{12}	49.181	49.088	48.995	48.063	45.319	38.298
ω_{21}	49.132	49.066	48.992	48.061	45.318	38.298
ω_{22}	78.499	78.340	78.132	75.851	69.454	55.221
ω_{33}	172.710	172.100	171.260	162.200	139.38	98.676

6.2.2 ASSS kare plak

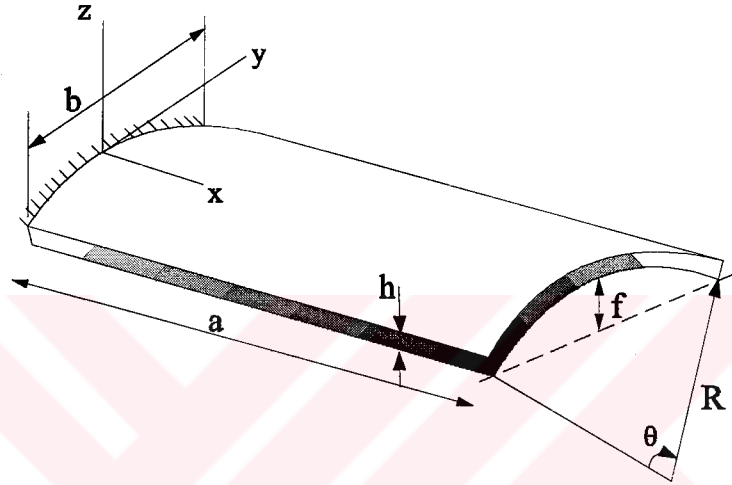
Bir tarafı ankastre diğer kenarları serbest kare plağın titreşim analizi yapılmıştır. Frekans parametreleri $\omega_{mn} = \omega_{mn} L^2 \sqrt{\rho h/D}$ için Tablo 6.3 de verilmiştir. Burada da sonuçların, Leissa [55] tarafından yapılan analitik çözümlerle karşılaştırıldığında, uyumlu olduğu gözlenmiştir.

Tablo 6.3 ASSS kare plak için frekans parametreleri

$\omega_{mn} = \omega_{mn} L^2 \sqrt{\rho h/D}$		
Frekans Parametreleri	[54]	PRSH52
ω_{11}	3.440	3.472
ω_{12}	8.210	8.189
ω_{22}	21.090	21.150

6.2.3 Dairesel silindirik kabuğun serbest titreşim analizi

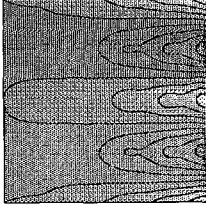
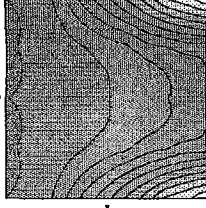
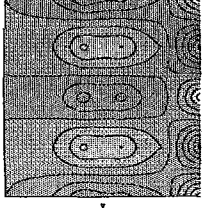
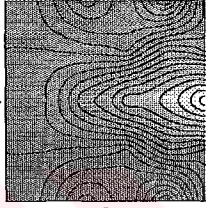
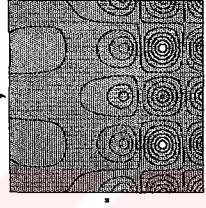
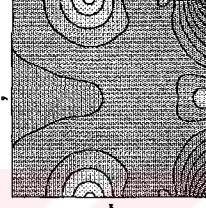
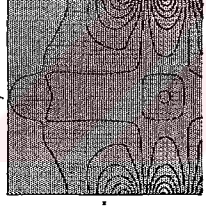
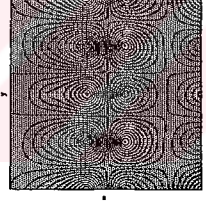
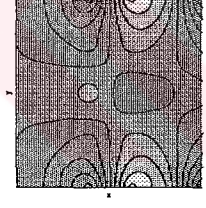
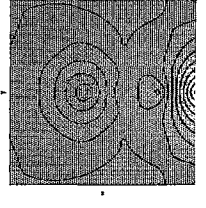
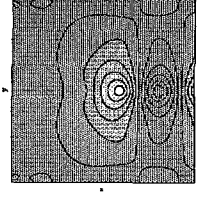
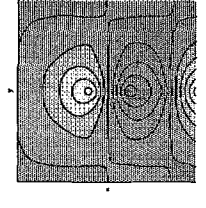
Bu çalışmada geliştirilen teorinin serbest titreşim problemlerine de uygulanabilirliğini göstermek üzere, literatürde çözümü yapılan dairese silindirik kabuklara uygulanacaktır [53]. Şekil 6.30 da gösterilen dairese silindirik kabuğun, uzunluğu a , genişliği b ve kalınlığı h olmak üzere bir kenarı ankastre diğer kenarları serbest olarak alınmıştır.



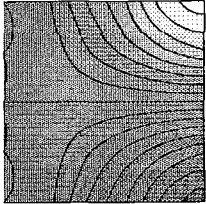
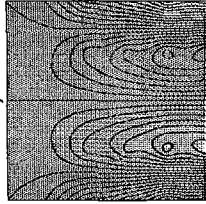
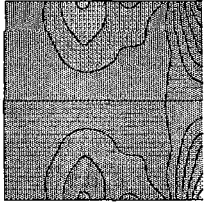
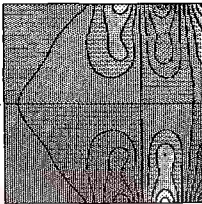
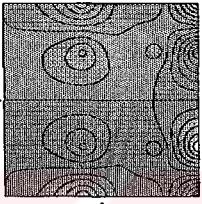
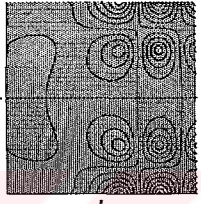
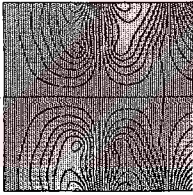
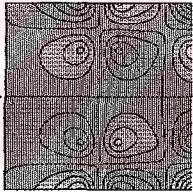
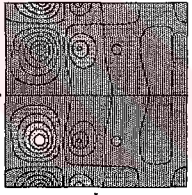
Şekil 6.30 ASSS dairese silindirik kabuk

Dairesel silindirik kabuk için ($a / b = 1$), ($b / R = 0.5$), ($a / h = 100$), ve Poisson oranı $\nu = 0.3$ alınarak çözümler yapılmıştır. Elde edilen serbest titreşim frekanslarına ait simetrik(S) ve antisimetrik(AS) mod şekilleri, sırasıyla Tablo 6.4 ve Tablo 6.5 de verilmiştir.

Tablo 6.4 ASSS dairesel silindirik kabuk için simetrik frekans parametreleri ve mod
şekilleri $\varpi_{mn} = \omega_{mn} L^2 \sqrt{\rho h/D}$

SİMETRİK		
S1	S2	S3
		
4.009	16.077	23.943
S4	S5	S6
		
29.994	31.423	38.275
S7	S8	S9
		
45.548	56.816	67.567
S10	S11	S12
		
90.970	111.41	145.28

Tablo 6.5 ASSS dairesel silindirik kabuk için antisimetrik frekans parametreleri ve mod şekilleri $\omega_{mn} = \omega_{mn} L^2 \sqrt{\rho h/D}$

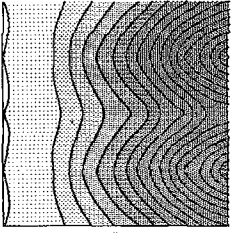
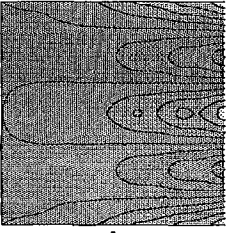
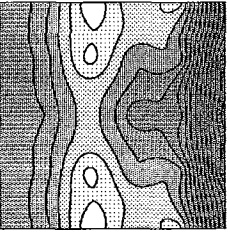
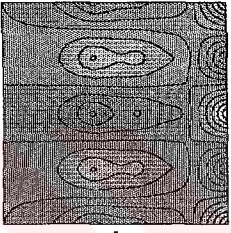
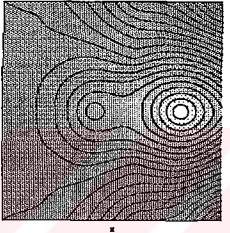
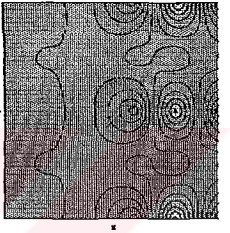
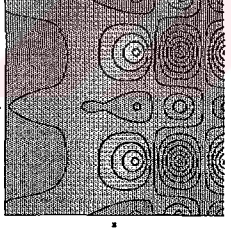
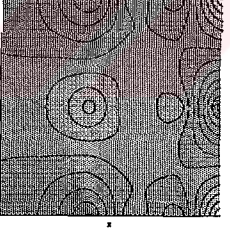
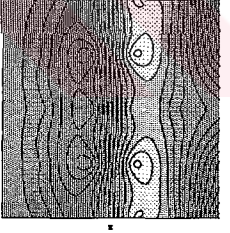
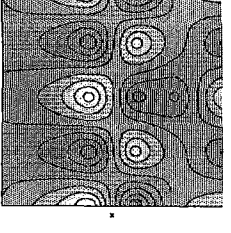
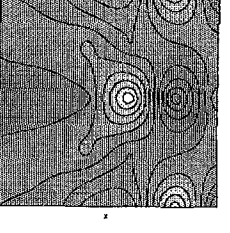
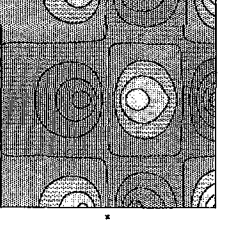
ANTİSİMETRİK		
AS1	AS2	AS3
		
8.236	14.495	28.989
AS4	AS5	AS6
		
36.907	44.925	53.048
AS7	AS8	AS9
		
59.551	79.409	1145.7

6.2.4 Parabolik silindir kabuğun serbest titreşim analizi

Yapılan literatür araştırmasında parabolik silindir kabuğun serbest titreşimlerini inceleyen çalışmalara rastlanmamıştır. Şekil 6.30 daki çözümü yapılan kabuğun geometrisi kullanılarak PRSH52 kabuk elemanı ile değişik $m = f/\ell$ basıklık oranları için çözümler yapılmıştır. Önce $f = 0.01m$ için CFFF kare plâga ait serbest titreşim frekansları hesaplanarak simetrik ve antisimetrik mod şekilleri Tablo 6.6 ve Tablo 6.7 de verilmiştir.

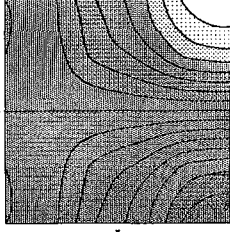
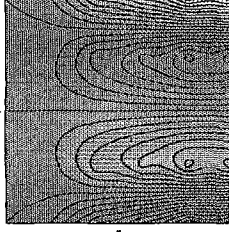
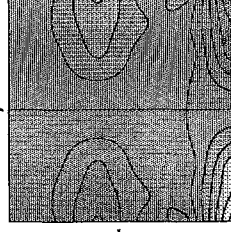
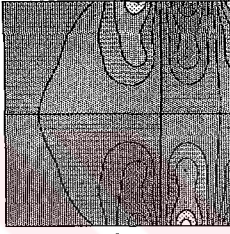
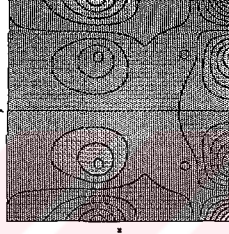
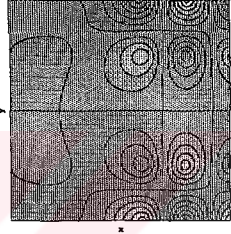
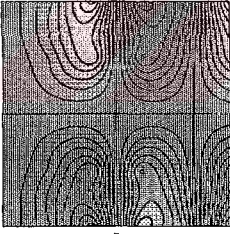
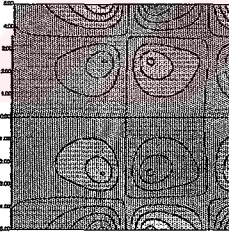
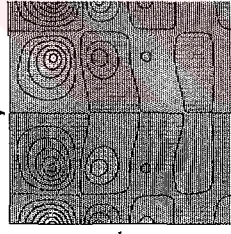
Tablo 6.6 ASSS plak için simetrik frekans parametreleri ve mod şekilleri

$$\omega_{mn} = \omega_{mn} L^2 \sqrt{\rho h/D}, m = 0.001$$

SİMETRİK		
S1	S2	S3
		
3.478	3.823	19.677
S4	S5	S6
		
22.682	25.212	30.773
S7	S8	S9
		
31.420	45.992	51.689
S10	S11	S12
		
54.189	55.551	80.234

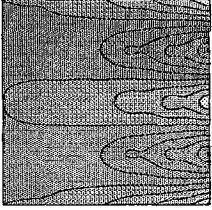
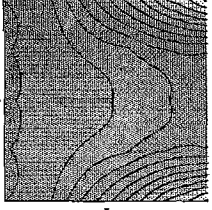
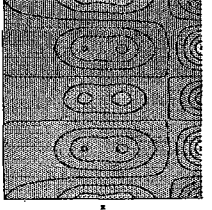
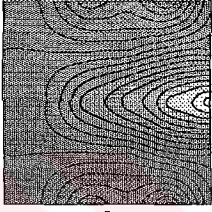
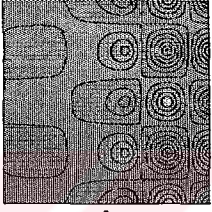
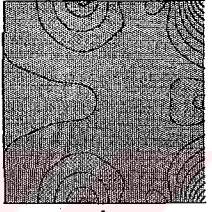
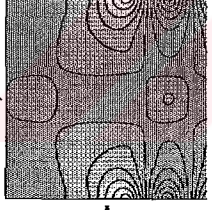
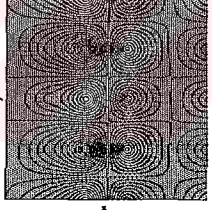
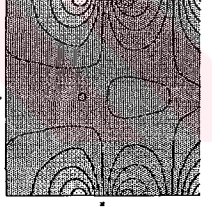
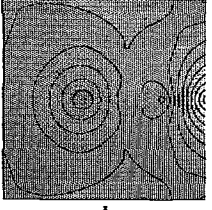
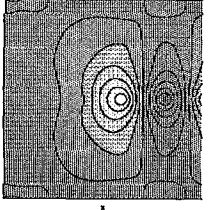
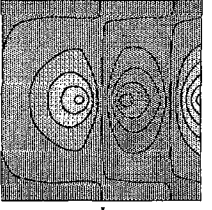
Tablo 6.7 ASSS plak için antisimetrik frekans parametreleri ve mod şekilleri

$$\omega_{mn} = \omega_{mn} L^2 \sqrt{\rho h/D} , m = 0.001$$

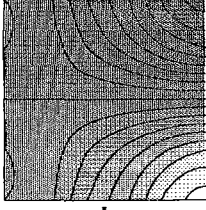
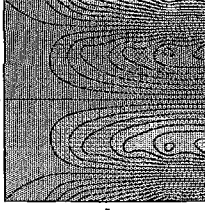
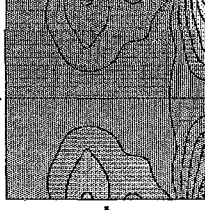
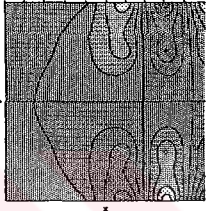
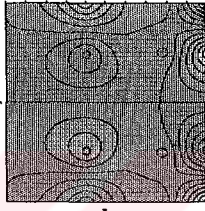
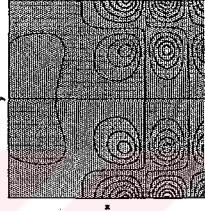
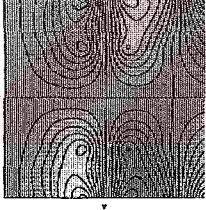
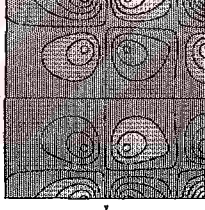
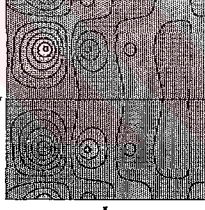
ANTİSİMETRİK		
AS1	AS2	AS3
		
7.825	14.615	27.216
AS4	AS5	AS6
		
36.962	45.064	53.504
AS7	AS8	AS9
		
57.822	79.702	1143.6

$f = 0.635m$ alınarak bölüm 6.2.3 de çözümü yapılan dairesel silindirik kabuğa eşdeğer parabolik silindir kabuğun serbest titreşim çözümü yapılmıştır. Elde edilen titreşim frekanslarına ait simetrik ve antisimetrik mod çizgileri sırasıyla Tablo 6.8 ve Tablo 6.9 da verilmiştir.

Tablo 6.8 ASSS parabolik silindir kabuk için simetrik frekans parametreleri ve mod şekilleri $\varpi_{mn} = \omega_{mn} L^2 \sqrt{\rho h/D}$, $m = 0.0635$

SİMETRİK		
S1	S2	S3
		
4.119	16.165	24.773
S4	S5	S6
		
30.309	31.799	38.597
S7	S8	S9
		
45.934	58.815	68.081
S10	S11	S12
		
91.776	112.6	146.6

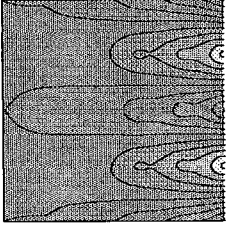
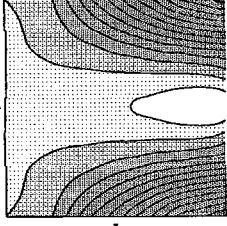
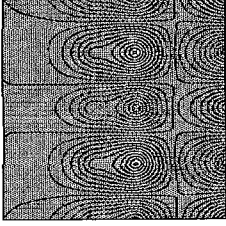
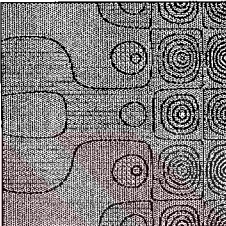
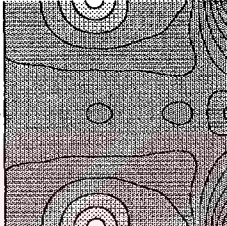
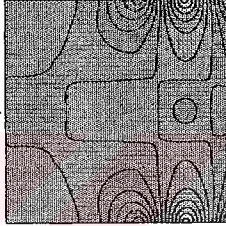
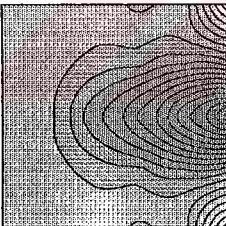
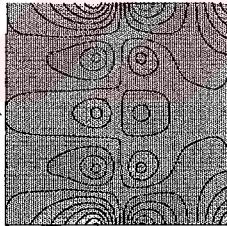
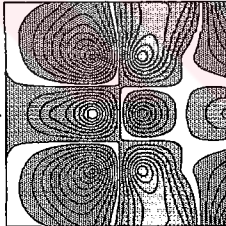
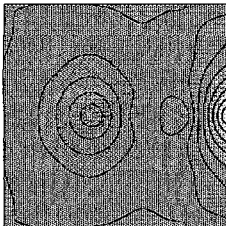
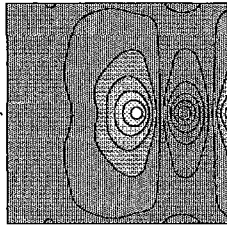
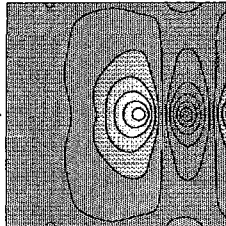
Tablo 6.9 ASSS parabolik silindir kabuk için antisimetrik frekans parametreleri ve mod şekilleri $\omega_{mn} = \omega_{mn} L^2 \sqrt{\rho h/D}$, $m = 0.0635$

ANTİSİMETRİK		
AS1	AS2	AS3
		
8.261	14.841	29.050
AS4	AS5	AS6
		
37.281	46.100	53.630
AS7	AS8	AS9
		
59.793	80.591	1146.9

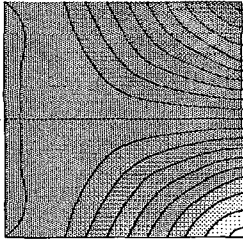
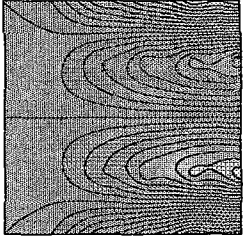
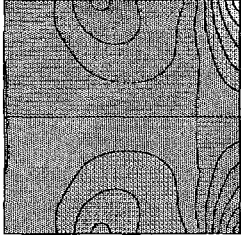
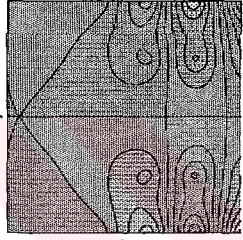
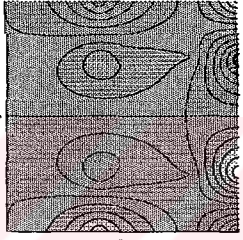
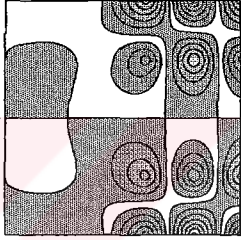
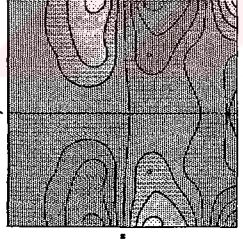
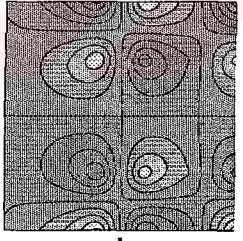
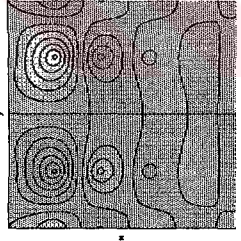
Tablo (6.4-6.5) ve Tablo (6.8-6.9) da verilen dairesel silindirik ve parabolik silindir kabukların simetrik ve antisimetrik modlarındaki benzerlik dikkat çekicidir. Tamamen farklı formülasyonlarla birbirine yakın geometrilerde benzer mod ve birbirine yakın frekans değerleri üretilmiştir.

Son olarak parabolik silindir kabuğun basıklık oranı artırıldığı zaman serbest titreşim frekanslarının nasıl değiştiği gözlenmek istenmiştir. Bunun için $f = 1.27m$ alınarak çözümler yapılmıştır. Elde edilen frekans ve mod şekilleri sırasıyla simetrik ve antisimetrik olarak Tablo 6.10 ve Tablo 6.11 de verilmiştir.

Tablo 6.10 ASSS parabolik silindir kabuk için simetrik frekans parametreleri ve mod
şekilleri $\omega_{mn} = \omega_{mn} L^2 \sqrt{\rho h/D}$, $m = 0.127$

SİMETRİK		
S1	S2	S3
		
4.459	19.067	27.345
S4	S5	S6
		
32.994	39.929	46.878
S7	S8	S9
		
52.265	69.379	72.852
S10	S11	S12
		
174.80	212.89	268.34

Tablo 6.11 ASSS parabolik silindir kabuk için antisimetrik frekans parametreleri ve mod şekilleri $\omega_{mn} = \omega_{mn} L^2 \sqrt{\rho h/D}$, $m = 0.127$

ANTİSİMETRİK		
AS1	AS2	AS3
		
8.793	15.203	32.058
AS4	AS5	AS6
		
38.155	48.093	53.997
AS7	AS8	AS9
		
65.295	83.423	1154.1

Parabolik silindir kabukların, $m = f/\ell$ basıklık oranını değiştirilmesi halinde serbest titreşim frekanslarının nasıl değiştiği gözlenmiştir. Elde edilen sonuçlar Tablo 6.12 ve Tablo 6.13 de verilmiştir.

Tablo 6.12 $m = f / \ell$ basıklık oranı için simetrik frekans parametreleri

$m = f / L$	0.01	0.0635	0.127
S1	3.478	4.119	4.459
S2	3.823	16.165	19.067
S3	19.677	24.773	27.345
S4	22.682	30.309	32.994
S5	25.212	31.799	46.878
S6	30.773	38.597	39.929
S7	31.420	45.934	52.265
S8	45.992	58.815	69.379
S9	51.689	68.081	72.852
S10	54.189	91.776	174.80
S11	55.551	112.60	212.89
S12	80.234	146.6	268.340

Tablo 6.13 $m = f / \ell$ basıklık oranı için antisimetrik frekans parametreleri

$m = f / L$	0.01	0.0635	0.127
AS1	7.825	8.261	8.793
AS2	14.615	14.841	15.203
AS3	27.216	29.050	32.058
AS4	36.962	37.281	38.155
AS5	45.064	46.100	48.093
AS6	53.504	53.630	53.997
AS7	57.822	59.793	65.295
AS8	79.702	80.591	83.423
AS9	1143.6	1146.9	1154.1

7. SONUÇLAR

Bu çalışmada, kayma etkilerini de gözönüne alan keyfi geometriye sahip kabuklar için yüksek mertebeden kabuk teorisi önerilmiştir. Bu teori, orta yüzeye göre kesitin dönmesine ve yüzeyin düzlem olmayan çarpılmasına izin verir. Bu yaklaşım serbest yüzeydeki kayma sınır koşullarını otomatik olarak sağlamaktadır.

Bu yeni teori ile, keyfi geometriye sahip kabuklar için alan denklemleri üretilmiştir. Bu alan denklemleri kullanılarak Gâteaux diferansiyel yöntemi kullanılarak keyfi geometriye sahip kabuklar için sistematik bir yolla elde edilen geometrik ve dinamik sınır koşullarını da içerecek şekilde fonksiyonel elde edilmiştir.

Keyfi geometriye sahip kabuklar için elde edilen fonksiyonele uygulama olmak üzere parabolik silindir kabuk ve dairesel silindirik kabuklar için u , v , w yerdeğiştirme, Ω_1 , Ω_2 dönmeleri, P , N , L , S , Q iç kuvvetleri, K , M , T eğilme ve burulma momentleri olmak üzere dört düğüm noktalı 52 serbestlik dereceli **PRSH52** ve **CRSH52** sonlu eleman formülasyonu elde edilmiştir.

PRSH52 kabuk elemanı için sonlu eleman çözümlerinde kullanılan eleman alt matrislerinin hesabı Mathematica 3.0 programı ile yapılmıştır.

Geliştirilen **PRSH52** kabuk elemanı ile değişik problemleri çözmek mümkündür. Parabolik bir çubuğun veya kabuğun basıklık oranı azaltılarak sırasıyla doğru eksenli bir çubuk, ve bir plak problemi çözülebilmektedir.

Yine keyfi geometriye sahip kabuklar için elde edilen fonksiyonelin performansını ve doğruluğunu kontrol etmek için **CRSH52** kabuk elemanı ile bir çok çalışmada kullanılan dairesel silindirik kabuk problemlerinin sonuçları karşılaştırılmıştır. Benzer kabuk elemanı (S13) Omurtag ve Aköz [40] tarafından geliştirilmiş olmasına rağmen ikisi arasında kinematik kabuller farklıdır.

Geliştirilen **PRSH52** ve **CRSH52** kabuk elemanları ile kalınlığı değişken problemleri de çözecek şekilde elde edilmiştir.

Geliştirilen elemanlar değişik problemlere uygulanmış ve doğru sonuçlara yaklaşımının iyi olduğu gözlenmiştir.

Kabuk problemlerinin çözümü için Fortran dilinde program yazılmıştır.

Keyfi geometriye sahip kabuklar için elde edilen fonksiyonelden elde edilen **PRSH52** ve **CRSH52** kabuk elemanı formülasyonunu özetlenirse:

- Keyfi geometriye sahip kabuklar için yüksek mertebeden kabuk teorisi üretilmiştir.
- Gâteaux diferansiyel metodu kullanılmıştır.
- Gâteaux diferansiyel metodu aşağıdaki avantajları sağlamaktadır.
 - ♦ Alan denklemleri uyumludur;
 - ♦ Sistematik bir yolla fonksiyonelde sınır koşulları terimleri kolaylıkla elde edilebilir.
- **PRSH52** ve **CRSH52** eleman denklemlerinin kapalı formda elde edilmesi hesaplama zamanında büyük ekonomi sağlamaktadır.
- Bu formülasyonda değişken kesitli problemler çözülebilir.
- Bu formülasyonda kayma kilitlenmesi gözlenmemiştir.
- Bu formülasyon titreşim problemlerine de uygundur.

KAYNAKLAR

- [1] **Goldenveizer, A.L.**, 1961. *Theory of Elastic Thin Shells*, Pergamon Press, NewYork
- [2] **Novozhilov, V.V.**,1964. *Thin Shell Theory*, P.Noordhoff LTD-Groningen.
- [3] **Rekach, V.G.**, 1978. *Static Theory of Thin Walled Space Structures*,Mir Publishers, Moscow.
- [4] **Kraus, H.**, 1967. *Thin elastic shells*,John Wiley& Sons, Inc., NewYork.
- [5] **Hughes, T.**,1987. *The Finite Element Method*, Prentice-Hall, New Jersey.
- [6] **Zienkiewicz, O.C.**, 1977. *The Finite Elements*, McGraw-Hill, London.
- [7] **Bathe, J.**,1982. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs,New Jersey.
- [8] **Reddy, J. N.**, 1985. *An Introduction to The Finite Element Method*, McGraw-Hill, International editions.
- [9] **Gallagher, R. H.**, 1975. *Finite Element Analysis Fundamentals*, Prentice- Hall, Englewood Cliffs, N.J., London.
- [10] **Zienkiewicz, O.C.,ve Cheung, Y.K.** 1967. *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*, McGraw-Hill, Publishing Co. Ltd.,London
- [11] **Przemieniecki, J.S.,Bader, R.M.,Bozich, W.F., Johnson, J.R., ve.Mykytow, W.J.**, 1965. ed., Matrix method in structural mechanics',*Proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Write Patterson Air Force Base, Oct,1965, Air Force Flight Dynamics Laboratory TR-66- 80, Dayton Ohio, Dec..*
- [12] **De Veubeke, B.F.**, (1964). ed., *Matrix Methods of Structural Analysis*, Pergamon Press, NewYork.
- [13] **Zienkiewicz, O.C., ve. Holister, G.S.**,1965. eds., *Stress Analysis*, John Wiley & Sons, London.
- [14] **Argyris, J.H.**, 1966. Matrix Displacement analysis of plates and shells, *Ingenieur -Archiv*, XXXV, pp.102-142.
- [15] **Clough, R.W., ve.Tocher, J.L.**, 1965. Finite element stiffness matrices for analysis of plate bending, *Matrix Methods in Structural Mechanics*', J.S. Przemieniecki, et.al., eds.,Air Force Flight Dynamics Laboratory,

TR-66-80, Dayton, Ohio, Dec., pp.515-546.

- [16] **Jones, R.E., ve Strome, D.R.**, 1965. *A Survey of Analysis of Shells by The Displacement Method*, J.S. Przemieniecki, et.al., ed., Air Force Flight Dynamics Lab., TR-66-80, Dayton, Ohio, Dec., pp.205-229.
- [17] **Reissner, E.**, 1945. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *J. Appl. Mech.* **12**, 69-76.
- [18] **Mindlin, R. D.**, 1951. Influence of rotary inertia and shear in flexural rotations of isotropic elastic plates, *J. Appl. Mech.* **18**, 1031-1036.
- [19] **Ahmad, S., Irons, B.M., ve Zienkiewicz, O.C.**, 1970. Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements *Int. J. Numer. Meth. Engng*, **2**, 419-451
- [20] **Zienkiewicz, O.C., Too J., ve Taylor, R.C.**, 1971. Reduced Integration techniques in general analysis of plates and shells *Int. J. Numer. Meth. Engng*, **3**, 275-290.
- [21] **Zienkiewicz, O.C., Baner, J., Morgan, K., ve Onate, E.**, 1977. A simple and efficient element for axisymmetric shells, *Int. J. Numer. Meth. Engng*, **11**, 1545-1558.
- [22] **Hughes, T.J.R., Taylor, R.L., ve Kanoknukulchai, W.**, 1977. A Simple and efficient finite element for plate bending, *Int. J. For Numer. Meth. in Engng*, **11**, 1529-1543.
- [23] **Pawsey, S.F ve Clough, R.L.**, 1971 Improved numerical integration of thick shell elements, *Int. J. Numer. Meth. Engng*, **3**, 575-586.
- [24] **Parish, H.A.**, 1979. Acritical survey of the 9-node degenerated shell element with special emphasis on thin shell application and reduced integration, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng*, **20**, 3 23-350.,
- [25] **Hughes, T.J.R ve Cohen, M.**, 1978. Heterosis finite element for plate bending, *Comp. & Struct.*, **9**, 445-450.
- [26] **Pugh, E.D.L., Hinton E., ve Zienkiewicz, O.C.**, 1978. A study of quadrilateral plate bending elements with Reduced integration, *Int. J. Numer. Meth. Engng*, **12**, 1059-1079.
- [27] **Belytschko, T., Tsay, C.S., ve Liu, W.K.**, 1981. A stabilization matrix for the bilinear Mindlin plate element, *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng*, **29**, 313-327.
- [28] **Batoz J.L., ve Lardeur, P.**, 1989. A discrete triangular nine d.o.f. element for the analysis of thick to very thin plate, *Int. J. Numer. Meth. Engng*, **28**, 533-560.
- [29] **Katlı, I.**, 1993 A new discrete Kirchhoff-Mindlin element based on Mindlin-Reissner plate theory and assumed shear strain fields-part I: an

extended DKT element for thick-plate bending analysis, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **36**, 1859-1883.

- [30] **Saetta, A.V., ve Vitaliani, R.V.**, 1990. A finite element formulation for shells of arbitrary geometry, *Comp. & Struc.* **37**, No.5, 781-793.
- [31] **Ziyaeifar, M., ve Elwi, A. E.**, 1996. Degenerated plate-shell elements with refined transverse shear strains, *Comp. & Struc.* **60**, No.6, 1079-1091.
- [32] **Rhiu, J.J., ve Lee, S.W.**, 1987. A new efficient mixed formulation for thin shell finite element models, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **24**, 581-604.
- [33] **Saleeb, A.F., Chang, T.Y ve Graf, W.**, 1987. A quadrilateral shell element using a mixed formulation, *Comp. & Struc.* **26**, 787-803
- [34] **Bhimaraddi, A., Carr, A.J., ve Moss, P.J.**, 1989. A shear deformable finite element for the analysis of general shells of revolution, *Comp. & Struc.* **31**, No: 3, 299-308.
- [35] **Koziey, B.L., ve Mirza, F. A.**, 1997. Consistent thick shell element, *Comp. & Struc.* **65**, No.4, 531-549.
- [36] **Kumbasar, N., ve Aksu, T.**, 1995. A finite element formulation for moderately thick shells of general shape', , *Comp. & Struc.* **54**, No.1, pp. 49-57.
- [37] **Kara, N.**, 1997. Genel biçimli kalın kabuklar için üç boyutlu bir sonlu eleman, *Doktora tezi*, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [38] **Bergman V.L., ve Mukherjee, S.** 1990. A Hybrid strain finite element for plates and shells, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **30**, 233-257.
- [39] **Tabarrok, B., ve Sodhi, D.S.**, 1994. Complementary energy formulation for thin elastic shells, *Bull. Tech. Univ.*, İstanbul, **47**, pp.187-211
- [40] **Aköz, A. Y.**, 1985. A new functional for and its applications, (In Turkish), *IV. National Mechanics Meeting*, Gebze-Turkey, pp. 100-112.
- [41] **Aköz, A. Y., Omurtag, M. H., ve Doğruoğlu, A.N.**, 1991. The mixed finite element formulation for three dimensional bars, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **28**, 225-234.
- [42] **Omurtag, M. H., ve Aköz, A.Y.**, 1992. Mixed finite element formulation of eccentrically stiffened cylindrical shells, *Comp. & Struc.* **42**, 751-768.
- [43] **Omurtag M.H., ve Aköz, A. Y.**, 1993. A compatible cylindrical shell element for stiffened cylindrical shells in a mixed finite element formulation, *Comp. & Struc.* **49**, 363-370.
- [44] **Omurtag M. H ve Aköz, A. Y.**, 1994. Hyperbolic paraboloid shell analysis via mixed finite element formulation, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **37**, 3037-3056,

- [45] Aköz, A.Y., 1989. Functional for Kármán plates and its application, (In Turkish), *VI. National Applied Mechanics Meeting*, Kirazlıyayla-Turkey, pp.74-85.
- [46] Aköz, A.Y ve.Kadioğlu, F., 1996. The mixed finite element solution of circular beam on elastic foundation, *Comp.& Struc.* **60**, 643-651.
- [47] Erath N., ve Aköz, A.Y., 1997. The mixed finite element formulation for the thick plates on elastic foundations, *Comp.& Struc.* **65**, 515-529.
- [48] Morris, A. J.,1973. Deficiency in current finite elements for thin shell applications, *Int. J. Solids Structures*, **9**, 331-346.
- [49] Sokolnikoff, I.S. 1956. *Mathematical Theory of Elasticity*, 2 nd ed., New York, McGraw-Hill, pp 177-184
- [50] Oden J. T., ve. Reddy, J. N.,1976. *Variational Methods in Theoretical Mechanics*, Springer-Verlag.
- [51] Altman W., ve.Iguti, F., 1976. A thin cylindrical shell finite element based on a mixed formulation, *Comp.& Struc.* **6**, 149-155.
- [52] Laursen, M.E., Neilsen, M. P., ve Gellert, 1977. M., Application of a new stress finite element to analysis of shell structures, *Comp.& Struc.* **7**, 751-757.
- [53] Leissa, A.W., Lee, J.K., ve Wang, A. J., (1981). Vibrations of cantilevered shallow cylindrical shells of rectangular plan form, *J.of Sound and Vibration*, **78**(3), 311-328.
- [54] Altman, W., ve Bismarck-Nasr, M. N., (1978). Vibration of thin cylindrical shells based on a mixed finite element formulation, *Comp. & Struc.* **8**, 217-221.
- [55] Leissa, A.W., 1969.*Vibration of plates* NASA SP-160.
- [56] Omutrag, M.H., Özütok, A., Aköz, A.Y., ve Özçelikörs, Y., 1997. Free vibration analysis of Kirchhoff plates resting on elastic foundation by mixed finite element formulation based on Gâteaux differential, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **40**, 295-317,
- [57] Erath, N., ve Aköz, A.Y., 1999. Free vibration analysis of Reissner plates by mixed finite element (yayınlamak üzere gönderildi).

ÖZGEÇMİŞ

Atilla ÖZÜTOK, 1965 yılında Silifke’de doğmuş. İlk ve orta öğrenimini Silifke’de tamamlamıştır. 1983 yılında Selçuk Üniversitesi Mühendislik –Mim. Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümünde lisans öğrenimine başlamış ve 1987 yılında mezun olmuştur. Aynı yıl S.Ü. Müh. Mim Fak. İnş. Müh. Böl. Mekanik Anabilim dalında araştırma görevlisi olarak göreve başlamıştır.

1991 yılında girdiği İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yapı Müh. programındaki yüksek lisans programını 1992 yılında tamamlamıştır. Aynı yıl İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yapı Müh. Programında doktora programına başlamıştır.

1993 yılından beri İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsünde Araştırma Görevlisi kadrosunda, İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi Mekanik Anabilim dalında Araştırma Görevlisi olarak çalışmalarını sürdürmektedir.