

127191

**TEK DOĞRULTUDA KUVVETLENDİRİLMİŞ KOMPOZİTLERDE
ÇATLAK ETRAFINDA YÜK AKTARIMI**

DOKTORA TEZİ
Y. Müh. Hale ERGÜN ÜNAL
(501960022012)

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 29 TEMMUZ 2002
Tezin Savunulduğu Tarih : 2 ARALIK 2002

Tez Danışmanı : Prof.Dr. Hasan BODUROĞLU
Diğer Juri Üyeleri : Prof.Dr. Ertaç ERGÜVEN (İ.T.Ü.)

Prof.Dr. Okan ADDEMİR (İ.T.Ü.)

Prof.Dr. Sabri ALTINTAŞ (B.Ü.)

Prof.Dr. Faruk YÜKSELER (Y.T.Ü.)

ARALIK 2002

127191

ÖNSÖZ

Tüm yaşamım boyunca bana her zaman destek olan annem Fatma ERGÜN ve babam Dr.Ahmet ERGÜN'e teşekkür ederim. Lisansüstü öğrenimim süresinde teşvik ve tavsiyeleri ile bana bilgi ve öngörülerini aktarmaya çalışarak yol gösteren danışmanım Prof.Dr.Hasan BODUROĞLU'na teşekkür ederim. Tez izleme jürilerimden Prof.Dr.Ertaç ERGÜVEN'e tezin geliştirilmesi için zaman ve görüşlerini paylaştığı için teşekkür ederim. Ders ve tez aşamasının ilk yıllarında bilgilerinden faydalanma fırsatı bulduğum Prof.Dr.Vural CİNEMRE'yi rahmet ve saygı ile anarım. Tez jürimde olan Prof.Dr.Okan ADDEMİR, Prof.Dr.Sabri ALTINTAŞ ve Prof.Dr.Faruk YÜKSELER'e bilgi ve görüşlerini paylaştıkları için teşekkür ederim. Tezin hazırlanması süresince bana destek veren Dr.Figen HATİPOĞLU'na, Yrd.Doç.Dr.Abdullah GEDİKLİ ve Nimet GEDİKLİ'ye, Dr.Pınar SEYMEN'e ve Prof.Dr.Oktay SEYMEN'e teşekkür ederim. Bu çalışmayı yeğenim Elif Ergün'e ithaf ediyorum.

Kasım 2002

Hale ERGÜN

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ	v
ŞEKİL LİSTESİ	vi
SEMBOL LİSTESİ	ix
ÖZET	x
SUMMARY	xii
1.GİRİŞ	1
2.MATRİSE GÖMÜLÜ EKSENEL YÜKLÜ LİF MODELİNİN ÇEŞİTLİ ANALİZLERİ VE KÖPRÜLENME İLİŞKİLERİ	7
2.1. Elastik Köprülenme	8
2.2. Sürtünmeli Köprülenme	20
2.3. Sıyrılmalı Köprülenme	41
3.KOMPOZİT MALZEMELER	45
4.KÖPRÜLENME GEÇİŞLERİ	50
4.1. Gevrek Liflerle Kuvvetlendirilmiş Kompozit Malzemeler Elastik Köprülenmeden Sürtünmeli Köprülenmeye Geçiş	53
4.2. Gevrek Liflerle Kuvvetlendirilmiş Kompozit Malzemeler için Sürtünmeli Köprülenmeden Sıyrılmalı Köprülenmeye Geçiş	54
4.3. Gevrek Liflerle Kuvvetlendirilmiş Kompozit Malzemeler için Elastik Köprülenmeden Sıyrılmalı Köprülenmeye Geçiş	56
4.4. Kayarak Pekleşen veya Zayıflayan Sonlu Uzunluklu Liflerle Kuvvetlendirilmiş Kompozit Malzemeler için Sürtünmeli Köprülenmeden Sıyrılmalı Köprülenmeye Geçiş	56
5. TEK EKSENLİ GERİLME ALTINDA KISMİ ÇATLAKLI KOMPOZİT LEVHADA GERİLMELERİN HESABI	58
6. PROBLEMİN FORMÜLASYONU	64
6.1. Gevrek Lifler	66
6.2. Kayarak Pekleşen veya Zayıflayan Lifler	67
7. PROBLEMİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ	69
7.1. Gevrek Lifler	69
7.2. Kayarak Pekleşen veya Zayıflayan Lifler	75
7.3. Problemin Birimsizleştirilmesi	78
7.3.1. Gevrek lifler	79
7.3.1. Kayarak pekleşen veya zayıflayan lifler	81

8. SONUÇLAR	84
8.1. Lif Hacim Oranının Çözümlere Etkisi	88
8.2. Çatlak Uzunluğunun Lif Çapına Oranının Çözümlere Etkisi	95
8.3. Arayüzey Pekleşme Katsayısının Çözümlere Etkisi	103
KAYNAKLAR	106
EK	114
ÖZGEÇMİŞ	118



TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 2.1. Çimento esaslı matrise gömümlü çeşitli liflerin (2.45) arayüzey ilişkisine ait sabitleri (Li ve Stang, 1997).....	24
Tablo 3.1. Polimerler, metaller ve seramiklerin kullanılabilir en büyük sıcaklık değerleri (Chawla,1993).....	45
Tablo 3.2. Bazı malzemelerin kırılma tokluk değerleri (K_{IC}) (Chawla, 1993).....	46
Tablo 3.3. Kompozit bileşenlerinin mekanik sabitleri (Hsueh ve Becher, 1996), (Brandt,1995), (Lin ve Li 1997), (Betterman ve diğ., 1994).....	49
Tablo 8.1. Örnek malzeme olarak kullanılacak kompozitlere ait (7.20) ifadeleri ile verilen oranlar.....	85
Tablo 8.2. Köprülenme tiplerine göre sınır ve geçiş şartları.....	87

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 2.1.	:Matrise kısmen gömülü, eksenel yüklü lif modeli.....	7
Şekil 2.2.	:(a) Hsueh (1988) in kullandığı tek lif modelinin koordinat takımını gösteren çizim, (b) modelin ℓ uzunluklu parçası ve bu sınırdaki sabit olduğu kabul edilen lif ve matris gerilmeleri, (c) modelin $(\ell-z)$ uzunluklu parçası (d) dz uzunluklu lif parçası, (e) dz uzunluklu ve r dış ve a iç yarıçaplı matris parçası.....	9
Şekil 2.3.	:(a) Marshall ve diğ. (1985) tarafından kullanılan life gömülü eksenel yüklü tek lif modeli, (b) h kayma mesafesi uzunluklu model parçası, (c)(h-z) uzunluklu lif parçası, (d) (h-z) uzunluklu (b-a) genişlikli matris parçası.....	20
Şekil 2.4.	:(a) Lin ve Li (1997) çalışmalarında kullandığı model ve koordinat takımı, (b) h kayma uzunluklu lif parçası, (c) h kayma uzunluklu matris parçası, (d) dz uzunluklu lif parçası, (e) dz uzunluklu matris parçası.....	26
Şekil 2.5.	:Matrise gömülü life uygulanan gerilme altında yer değiştirmesini gösteren şematik grafik (Hsueh, 1990).....	32
Şekil 2.6.	:(a) Hsueh (1990)'in sürtünmeli köprülenme analizi için kullandığı koordinat takımı, (b) (h-z) uzunluklu model parçası, (c) dz uzunluklu lif parçası, (d) dz uzunluklu ve (r-a) genişlikli matris parçası.....	33
Şekil 2.7.	:(a) Thouless ve Evans (1988) in sıyrılmalı köprülenme analizi için kullandıkları model, (b) dz uzunluklu lif parçası, (c) (p-2v) uzunluklu lif parçası.....	41
Şekil 2.8.	:Lin ve Li (1997)'nin (a) sürtünmeli köprülenme analizi için kullandıkları model, (b) tüm gömülü lif uzunluğu kaymaya başladığı anı gösteren çizim, (c) tek taraflı sıyrılan lif analizi için kullandıkları model.....	43
Şekil 3.1.	:(a) Karbon, (b) cam, (c) Silisyum Karbit ve (d) Aramid liflerinin çekme altında koptuktan sonra elektron mikroskop resimleri (Hull ve Clyne, 1996).....	47
Şekil 3.2.	:Cam lifler içeren enjeksiyonla şekil verilmiş polipropilenin çatlak yüzeylerinin elektron mikroskobu resimleri, (c) ve (d) lif-matris arayüzey kavrama özelliği iyileştirilmiş numune, (a) ve (b) bu işlem yapılmamış numune (Hull ve Clyne, 1996)	48
Şekil 4.1.	: Matris-lif arayüzeylerinin ayrılması ve lif kırılması için elastik köprülenme esnasında sağlanması gereken koşullar.....	50
Şekil 4.2.	: $\sigma_0 / \tau_0 - V_f$ grafiği.....	51

Şekil 4.3.	:Lif hacim oranına göre elastik köprülenmeden sürtünmeli köprülenmeye geçiş için gerekli yarı çatlak açıklığı değişimi. (SiC lifle kuvvetlendirilmiş Al_2O_3 seramik kompozit malzemesi için).....	52
Şekil 4.4.	:Lif hacim oranına göre sürtünmeli köprülenmeden sıyrılma köprülenmesine geçiş için gerekli yarı çatlak açıklığı değişimi ($SiC-Al_2O_3$).....	53
Şekil 4.5.	:Lif hacim oranına geçiş yarı çatlak açıklığı oranları merteye artışını gösteren grafik. ($SiC-Al_2O_3$ kompozit malzemesi için)...	54
Şekil 4.6.	:Lif hacim oranına göre sürtünmeli köprülenmeden sıyrılma köprülenmesine geçiş için gerekli yarı çatlak açıklığı değişimi grafiği. (SiC/Al_2O_3).....	55
Şekil 4.7.	:Lif hacim oranına geçiş yarı çatlak açıklığı oranları merteye artışını gösteren grafik. (SiC/Al_2O_3).....	55
Şekil 6.1.	:Lif eksenine dik, merkezi çatlaklı olan, σ düzgün gerilme altında sonsuz levha.....	64
Şekil 6.2.	:Elastik köprülenmeden sürtünmeli köprülenmeye ve sıyrılma köprülenmesine geçişi gösteren şematik çizim.....	65
Şekil 7.1.	:Problemin formülasyonu için lineer olmayan denklem sisteminin düzenlenmesini gösteren çizim.....	72
Şekil 8.1.	:Sabit uzunluklu çatlakta levhaya sonsuzda uygulanan gerilme artırılırken yukarıdan aşağıya doğru aşamalı olarak beklenen köprülenme modelleri. (a) Elastik, (b) Elastik+Sürtünmeli, (c) Sürtünmeli, (d) Sürtünmeli+Sıyrılmalı, (e) Köprülenmenin sona erdiği an.....	86
Şekil 8.2.	:Tamamı elastik köprülenme ile yük aktaran çatlaklı olan levhaya sonsuzda uygulanan gerilme artışına göre, farklı lif hacim oranları için gerilme şiddeti çarpanı değerlerinin değişimi, $k_5=c/a=200$	88
Şekil 8.3.	:Uçlarında elastik köprülenme, ortasında sürtünmeli köprülenme ile yük aktaran çatlaklı olan levhaya, sonsuzda uygulanan gerilme artışına göre, farklı lif hacim oranları için gerilme şiddeti çarpanı değerlerinin değişimi, $c/a=200$	89
Şekil 8.4.	:Şekil 8.2 ve Şekil 8.3 grafiklerinin birlikte çizimi. (x işaretinin hemen sağında çatlak ortasında sürtünmeli köprülenme, çatlak uçlarında elastik köprülenmeye eşlik etmeye başlamaktadır) $c/a=200$	90
Şekil 8.5.	:Tamamı sürtünmeli köprülenme ile yük aktaran çatlaklı olan levhaya sonsuzda uygulanan gerilme artışına göre, farklı lif hacim oranları için gerilme şiddeti çarpanı değerlerinin değişimi, $c/a=200$	91
Şekil 8.6.	:Şekil 8.4 ve Şekil 8.5 grafiklerinin birlikte çizimi.....	91
Şekil 8.7.	:Uçlarında sürtünmeli köprülenme, ortasında sıyrılmalı köprülenme ile yük aktaran çatlaklı olan levhaya, sonsuzda uygulanan gerilme artışına göre, farklı lif hacim oranları için gerilme şiddeti çarpanı değerlerinin değişimi, $c/a=200$	92
Şekil 8.8.	:Şekil 8.5 ve Şekil 8.7 grafiklerinin birlikte gösterimi, $c/a=200$...	94

Şekil 8.9. :Tamamı elastik köprülenme ile yük aktaran çatlağı olan levhaya sonsuzda uygulanan gerilme artışına göre, farklı c/a oranları için gerilme şiddeti çarpanı değerlerinin değişimi, $V_f=0.1$	95
Şekil 8.10. :Uçlarında elastik köprülenme, ortasında sürtünmeli köprülenme ile yük aktaran çatlağı olan levhaya, sonsuzda uygulanan gerilme artışına göre, farklı c/a oranları için gerilme şiddeti çarpanı değerlerinin değişimi, $V_f=0.1$	96
Şekil 8.11. :Tamamı sürtünmeli köprülenme ile yük aktaran çatlağı olan levhaya sonsuzda uygulanan gerilme artışına göre, farklı c/a oranları için gerilme şiddeti çarpanı değerlerinin değişimi, $V_f=0.1$	97
Şekil 8.12. :Uçlarında sürtünmeli köprülenme, ortasında sıyrılmalı köprülenme ile yük aktaran çatlağı olan levhaya, sonsuzda uygulanan gerilme artışına göre, farklı c/a oranları için gerilme şiddeti çarpanı değerlerinin değişimi, $V_f=0.1$	98
Şekil 8.13. :Şekil 8.11 ve Şekil 8.12 grafiklerinin birlikte gösterimi, $V_f=0.1$.	99
Şekil 8.14. : $V_f = 0.3$, $k_2=140$, $k_3=1.25$, $k_4=71.43$, $k_6=4$, $v_f=0.3$, $v_m=0.25$ için elastik köprülenmesi için gerekli $\max(\sigma/\sigma_s)$ değerleri ($c/a \rightarrow \infty \Rightarrow \sigma \rightarrow 0.013\sigma_s$).....	100
Şekil 8.15. : $V_f = 0.3$, $k_2=140$, $k_3=1.25$, $k_4=71.43$, $k_6=4$, $v_f=0.3$, $v_m=0.25$ için elastik köprülenen çatlak ucundaki normalize edilmiş gerilme şiddeti çarpanı değişimi.....	100
Şekil 8.16. : $V_f = 0.3$, $k_2=140$, $k_3=1.25$, $k_4=71.43$, $k_6=4$, $v_f=0.3$, $v_m=0.25$ malzemesinde tümü sürtünmeli köprülenme ile yük aktaran çatlağın alabileceği en büyük k_1 değerleri. ($c/a \rightarrow \infty \Rightarrow \sigma \rightarrow 0.31\sigma_s$).....	101
Şekil 8.17. : $V_f = 0.3$, $k_2=140$, $k_3=1.25$, $k_4=71.43$, $k_6=4$, $v_f=0.3$, $v_m=0.25$ malzemesinde tümü sürtünmeli köprülenme ile yük aktaran çatlağın alabileceği $\max(K/K_0)$ değerleri ($c/a \rightarrow \infty \Rightarrow K/K_0 \rightarrow 0$).....	101
Şekil 8.18. : $V_f = 0.3$, $k_2=140$, $k_3=1.25$, $k_4=71.43$, $k_6=4$, $v_f=0.3$, $v_m=0.25$ malzemesinde tümü sıyrılmalı köprülenme ile yük aktaran çatlağın alabileceği $\max(\sigma/\sigma_s)$ değerleri.....	102
Şekil 8.19. : $V_f = 0.3$, $k_2=140$, $k_3=1.25$, $k_4=71.43$, $k_6=4$, $v_f=0.3$, $v_m=0.25$ malzemesinde tümü sıyrılmalı köprülenme ile yük aktaran çatlağın alabileceği $\max(K/K_0)$ değerleri.....	102
Şekil 8.20. :Sürtünmeli köprülenme ile yük aktaran farklı β değerlerine sahip Polipropilen lifleri ile kuvvetlendirilmiş çimento esaslı kompozit malzeme için K/K_0 değerlerinin değişimi. ($V_f=0.3$, $c/a=200$).....	103
Şekil 8.21. :Sürtünmeli+Sıyrılmalı $\beta=0.0128$, $V_f=0.3$, $c/a=200$	104
Şekil 8.22. :Sürtünmeli+Sıyrılmalı $\beta=0.1$, $V_f=0.3$, $c/a=200$	105

SEMBOL LİSTESİ

ν	:Poisson oranı
τ, τ_s	:Sürtünmeli köprülenmede sabit alınan sürtünme gerilmesi, lif ile matris yüzeyleri arasındaki kayma gerilmesi dayanımı
τ_0	:Lif ile matris yüzeyleri arasında oluşan en büyük kayma gerilmesi
σ_0	:Lifte oluşan en büyük normal gerilme
σ_s	:Lifin normal gerilme dayanımı
σ	:Levhaya sonsuzda lif doğrultusunda uygulanan normal gerilme
β	:Lif-matris arayüzey pekleşme katsayısı
ℓ	:Lif uzunluğu
h	:Kayma uzunluğu
a	:Lif yarıçapı
b	:İzole edilmiş modelde matris yarıçapı
c	:Çatlak Yarı uzunluğu
E	:Elastisite modülü
e, f, p	:Elastik, sürtünmeli ve sıyrılmalı köprülenmelere ait büyüklüklerle kullanılan indisler
f, m, c	:Lif , matris ve kompozite ait büyüklüklerle kullanılan indisler
G	:Kayma Modülü
K_I	:Ortotrop malzemeye ait gerilme şiddeti çarpanı (mod I)
K_0	:İzotrop malzemeye ait gerilme şiddeti çarpanı (mod I)
P	:Köprülenme gerilmesi
p	:Lifin sıyrılmaya uzunluğu
R	: σ_s/τ_s oranı
s	:Lifin matrise göre eksenel yer değiştirmesi
v	:Çatlak yarı açıklığı
V	:Hacim oranı

TEK DOĞRULTUDA KUVVETLENDİRİLMİŞ KOMPOZİTLERDE ÇATLAK ETRAFINDA YÜK AKTARIMI

ÖZET

Bu çalışmada, tek gerilme eksenli altında, merkezi bir çatlağı olan, çatlak eksenine dik lifler ile kuvvetlendirilmiş sonsuz kompozit levha gözönüne alınmıştır. Literatürde yer alan çatlak boyunca lifteki gerilme ve çatlak açılması ilişkisini ifade eden köprülenme bağıntıları elastik, sürtünmeli ve sıyrılmalı olmak üzere üç grup halinde sunulmuştur. Problemin formülasyonunda kullanmak üzere, sonsuz uzun gevrek lif içeren kompozitlerin davranışına uygun olarak Hsueh (1988)'in kullandığı elastik köprülenme bağıntısı, Marshall ve diğ. (1985)'in kullandığı sürtünmeli köprülenme bağıntısı ve Thouless ve Evans (1988)'in kullandığı sıyrılmalı köprülenme bağıntısı seçilmiştir. Yeterince uzun, kaydıkça pekleşen arayüzeyli lif içeren kompozitlerin davranışına uygun olarak Lin ve Li (1997)'nin kullandığı sürtünmeli ve sıyrılmalı köprülenme bağıntıları alınmıştır.

Düzlem gerilme altında, merkezi çatlağı olan ortotrop levhaya ait Airy gerilme fonksiyonlarını içeren diferansiyel denklem, Fourier dönüşümü yöntemi ile çözülerek düzlemdeki gerilmeler çatlak yüzeyi eğimi cinsinden elde edilmiştir. Çatlak ekseninde herhangi bir noktada denge yazılmış ve tekil integral denklem elde edilmiştir. Kökleri çatlak uçlarında sıklaşan Chebyshev polinomları yardımı ile bu integral denklemin çözümü, lineer olmayan bir denklem sisteminin çözümüne indirgenmiştir. Fortran dilinde yazılan programlar ile çatlak ucundaki gerilme şiddeti çarpanı değerleri, çatlak açılması ve öngörülen köprülenme tiplerinin çatlak eksenindeki geçiş yerleri hesaplanabilmektedir.

Gevrek lifler ile kuvvetlendirilmiş kompozitlere örnek malzeme olarak $\text{SiC}/\text{Al}_2\text{O}_3$ seçilmiş ve lif hacim oranı ve çatlak uzunluğunun değişimine göre çözümler incelenmiştir. Kayarak pekleşen liflerle kuvvetlendirilmiş kompozitlere örnek olarak Polipropilen lif/çimento esaslı kompozit seçilmiş ve pekleşme katsayısı olan β 'nın problemin çözümüne etkisi incelenmiştir.

Bütün çözümlerde elastik köprülenmenin diğer iki köprülenmenin yanında çok küçük bir gerilme aralığında olduğu ve teorik olarak çatlak ucunda varolmasına rağmen gerilme artırıldıkça sistemin çözümünü etkilemediği görülmüştür. Gevrek lifler için tüm köprülenme tiplerine ait grafiklerde, lif hacim oranı arttıkça çatlak ucundaki gerilme şiddeti çarpanı değerleri azalmaktadır. Tamamı sadece elastik köprülenme veya sadece sürtünmeli köprülenme ile yük aktaran bir çatlakta lif hacim oranı arttıkça, bu köprülenme tipinin oluşabileceği gerilme aralığı artmaktadır. Çatlak ucunda elastik ve ortasında sürtünmeli köprülenme olacak şekilde yük aktaran bir çatlakta lif hacim oranı arttıkça, bu köprülenme tipinin oluşabileceği gerilme aralığı azalmaktadır. Sürtünmeli köprülenmeden, çatlak ucunda sürtünmeli ve ortasında sıyrılmalı olmak üzere ikili köprülenmeye geçişin ani olduğu çözümlerde görülmüştür. Sürtünmeli köprülenmenin sona erme şartı sağlandıktan hemen sonra, çatlağın ortasında ve önemli bir kısmında aniden sıyrılmalı köprülenme

oluşmaktadır. Lif hacim oranı arttıkça bu ikili köprülenmenin oluşabileceği gerilme aralığının daraldığı hesaplanmıştır.

Çatlak uzunluğu arttıkça tüm köprülenme tiplerinin oluşabileceği gerilme aralığının azaldığı hesaplanmıştır. Sadece elastik, sadece sürtünmeli ve bunların oluşturduğu ikili köprülenme ile yük aktaran çatlak için yapılan çözümlerde çatlak uzunluğu arttıkça gerilme şiddeti çarpanı değerleri azalmaktadır. Fakat, çatlak ucunda sürtünmeli ve ortasında sıyrılmalı köprülenme durumunda çatlak uzadıkça gerilme şiddeti çarpanı değerinin arttığı hesaplanmıştır.

Kayarak pekleşen lif içeren kompozite ait çözümlerde, pekleşme katsayısı olan β arttıkça çatlak ucundaki gerilme şiddeti çarpanı değeri azalmaktadır. Çatlak sadece sürtünmeli köprülenme ile yük aktarırken, bu köprülenmenin tek başına oluşabileceği gerilme değeri en erken $\beta=0.03$ için elde edilen çözümde hesaplanmıştır. Pekleşme katsayısı azaldıkça ikili köprülenmeye geçiş daha ani olmaktadır.



LOAD TRANSFER AROUND A CRACK IN UNIDIRECTIONAL REINFORCED COMPOSITES

SUMMARY

In this study, a fiber reinforced infinite composite plate under uniaxial stress which has a central through crack is considered. The bridging relations which express the relation between the stress in the fiber and the crack opening displacement along the crack axis found in the literature are proposed with three grouped cases as elastic, frictional and pullout bridging.

To be utilized in the formulation of the problem, elastic bridging relation used by Hsueh (1988), frictional bridging relation used by Marshall et al. (1985) and pullout bridging relation used by Thouless and Evans (1988) which are appropriate with the behavior of infinite brittle fiber reinforced composites are chosen. Frictional and pullout bridging relations used by Lin and Li (1997) consistent with the slip hardening fiber reinforced composite behavior are taken.

The differential equation which contains Airy stress functions of a centrally cracked orthotropic plate under plane stress is solved through Fourier transform techniques and the stresses in plane are obtained in terms of the crack surface derivative. The equilibrium of stresses at any point of the crack axis yielded a singular integral equation. The solution of this integral equation is turned out to the solution of a non-linear equation system by the help of Chebyshev polynomials which have closer roots near to crack tips. Crack tip stress intensity factor, crack opening displacement and the point where the considered bridging type changes on the crack axis can be calculated via the programs written in Fortran language.

SiC/Al₂O₃ is chosen as an example material of brittle fiber reinforced composite and the effect of the variations of the fiber volume ratio and the crack length on the solutions are inspected. Polypropylene /mortar is considered as an example material of slip hardening fiber reinforced composite and the influence of variation of the hardening constant referred as β on the solutions is studied.

In all solutions, the elastic bridging takes place under small stresses with respect to the others and loses its effect on the solution of the system as stress increases, although it is always theoretically valid at the crack tip. For brittle fiber reinforced materials, in the graphics of all bridging considerations, the stress intensity factor values decrease as the fiber volume ratio increases. If the load along the crack is bridged only by elastic or frictional types, the possible stress range for the presence of these increases when the fiber volume ratio increases. At the cracks where the load is bridged both by elastic bridging at the tip and frictional bridging at the center of the crack, the possible stress range decreases as the fiber volume ratio increases. It is seen from the solutions that the transfer from the frictional bridging to the coupled bridging of both frictional and pullout is abrupt. After the supplement of the frictional bridging final condition, pullout bridging appears promptly at the center

and a large portion of the crack length. The possible stress range of this coupling bridging case decreases as the fiber volume ratio increases.

It is calculated that the possible stress range of all bridging phenomena decreases as crack extends. If only elastic or only frictional or these both takes place along a crack, the stress intensity factor values decrease as crack length increases. On the contrary, if the load is bridged by frictional bridging at the tip, and pullout at the center of the crack, the stress intensity factor increases as crack extends.

As the hardening constant β increases, crack tip stress intensity factor values decreases in the slip-hardening fiber reinforced composite solutions. If only frictional bridging takes place along a crack, the smallest stress range is obtained from the solution for $\beta=0.03$. When the hardening constant decreases, transfer to couple bridging case takes place more abrupt.



1. GİRİŞ

Malzemelerin, ideal kusursuz kristal yapıda olduğu düşünülerek yapılan hesaplamalar sonucu elde edilen teorik mukavemetleri, deneylerle gözlenen mukavemetlerinin en az iki mertebe üzerindedir. Teorik ve gözlenen dayanımlar arasındaki bu fark, gerçek mühendislik malzemelerinde yerel gerilmeleri artıran süreksizliklerle açıklanabilir. Aynı zamanda matematiksel keskin çatlak içeren yük altındaki bir levhanın Elastisite teorisi yöntemleri yardımı ile gerilme ifadeleri elde edilerek bunların çatlak uçlarında sonsuz değer aldıkları görülmüştür. Mühendislik malzemeleri ne teorik mukavemetleri kadar dayanıklı ne de matematiksel keskin çatlakta görülen durum kadar zayıftırlar. Keskin bir süreksizliğin uç noktasında tekil olan bu gerilme ifadelerinin bütün yükleme ve geometri durumlarında aynı formu koruduğu fakat sadece tekil terimin payının değiştiği görülmüştür. Bu değer gerilmenin hangi hızla sonsuza gittiğini ifade eder ve bundan dolayı buna gerilme şiddeti çarpanı adı verilir ve kırılma mekanizmasının esasını teşkil eder.

Kompozit elemaların yük taşıma kapasitesi, üretim sırasında oluşan çatlak türünde kusurlarla veya kullanımı gereği içerdiği süreksizliklerle önemli ölçüde azalır. Normal çalışma koşulları altında bu çatlaklar büyüyerek önemli hasarlara yol açarlar.

Seramikler, sert ve gevreklerdir. Yüksek sıcaklığa dayanıklıdırlar. Yüksek ısılarda erirler, oksidasyon ve korozyona karşı dayanıklıdırlar. Bu özelliklerdeki malzemeler, özellikle yüksek sıcaklık ve zor çevre koşulları için tercih edilirler. Bununla beraber, metallere göre seramikler düşük esnekliğe ve düşük kırılma tokluğuna sahiptirler. Bu yüzden seramiklerin kırılma tokluğunu iyileştirmek üzere çok sayıda çalışmalar yapılmıştır. Bunun için seramik matris, tek doğrultulu sürekli lifler (Marshall ve diğ., 1985), (Marshall ve Cox, 1987), (Hsueh ve diğ., 1993), (Jones ve James), (Hutchinson ve Jensen, 1990), (Budiansky ve diğ., 1986, 1995), (Danchaivijit ve Shetty, 1993), (McCartney, 1989), (Chiang, 2001), (Thouless ve Evans, 1988), (Evans ve McMeeking, 1986), kısa lifler (Hsueh ve Becher, 1998), (Hsueh ve diğ., 1997), (Lin ve Li, 1997), (Honda ve diğ., 1997, 1998), (Hsueh, 1990, 1991a, 1991b),

(Fu ve diğ., 1999), (Wang ve diğ., 1988) veya parçacıklar ile kuvvetlendirilerek tokluk davranışı incelenmiştir. Yapılan birçok teorik ve deneysel (Becher ve Wei, 1984), (Rühle ve diğ., 1987), (Becher ve diğ., 1988), (Krause ve diğ., 1990), (Singh, 1990), (Grimes ve diğ., 1990), (Wu ve diğ., 1997), (Hsueh ve diğ., 1997), (Sun ve Singh, 1998) çalışmalardan başka bir malzeme ile güçlendirme işleminin matrisin kırılma tokluğunu iyileştirdiği anlaşılmıştır.

Liflerle kuvvetlendirilmiş kompozit malzemelerde, çatlak uzunluğu boyunca, tamamen göçmeyen lifler yük aktarmaya devam ederler. Karşılıklı çatlak yüzeyleri arasında bağlı kalan lifler, yükün aktarılmasında köprü vazifesi gördüğünden bu olaya lif köprülenmesi denir. Literatürde, liflerle kuvvetlendirilmiş kompozit bir levhanın merkezinde bulunan çatlakta en azından üç tip lif köprülenmesinin varlığından bahsedilir (Hsueh ve Becher, 1996). Gevrek bir malzeme olan matrisin çatlamasıyla lifler zarar görmez ve lif-matris birleşimi bağlı kalırsa çatlak elastik gerilen lifler tarafından taşınır. Bu durumda lifler matrise yük aktararak elastik köprülenmeyi sağlarlar (Hsueh, 1988). Eğer lif-matris arayüzeyi boyunca kayma gerilmesi kayma dayanımını geçerse sürtünmeli kayma başlar. Lif-matris arayüzeyi boyunca lifin matrise göre yer değiştirmesi sözkonusu olur (Marshall ve diğ., 1985), (Evans ve McMeeking, 1986), (Marshall ve Cox, 1987), (Kumaria ve diğ., 1997), (Xu ve diğ., 1998), (Wang ve diğ., 1988), (Lin ve Li, 1997), (Marshall ve diğ., 1985), (Budiansky ve diğ., 1986), (Danchaivijit ve Shetty, 1993). Bu durumda sürtünmeli köprülenmeden bahsedilir. Eğer gerilme altındaki lifler matris içinde kırılırsa kırık yüzeyi matristen sıyrılan lifler tarafından köprülenir. Ve sıyrılmaya köprülenmesi oluşur (Thouless ve Evans, 1988), (Hsueh ve Becher, 1996), (Lin ve Li, 1997), (İsmar ve Reinert, 1997).

Yukarıda bahsi geçen literatürün hemen hepsinde, köprülenme mekanizmasının anlaşılabilmesi için eksenel yüklü, matrise gömülü tek liften oluşan bir model kullanılmıştır. Modelde, tek eksenli gerilme altındaki lifin matrise yük aktarımı analiz edilmiş ve lifteki normal gerilme ve lif-matris arayüzeyinde oluşan kayma gerilmesi ifadesi malzemelerin özellikleri cinsinden ifade edilmiştir. Lif-matris arayüzey özelliklerinin kompozitin davranışına etkisini anlamak için çok sayıda çalışma yapılmıştır. Lifin matrise göre yer değiştirmeye başlaması ile birlikte daralmasının arayüzeyde basınç gerilmesi ve dolayısıyla arayüzey sürtünme

gerilmesi doğurduğu ifade edilmiş ve bu durum Coulomb sürtünmesi ile modellenmiştir (Honda ve diğ., 1998), (Hsueh, 1990, 1991), (Chiang, 2001), (Nayfeh ve Abdelrahman, 1998), (Chai ve Mai, 2001), (Steif, 1984). Bu durumda lif uzunluğu boyunca kayan bölgenin uzunluğu, lif ve matrisin yerdeğiştirmeleri analiz edilmiştir. Lif-matris arayüzeyinin ayrılmaya başlaması için ve lifi matristen sıyırmak için gerekli gerilme ifadeleri gömülü lif uzunluğunun fonksiyonu olarak sunulmuştur (Hsueh, 1990). Lifi elastisite modülünün matrisin elastisite modülüne oranı azaldıkça liften matrise yük aktarımının daha etkili olduğu gösterilmiştir. Matrisin poisson oranı artarken yük aktarımının azaldığı, lifin kayma uzunluğunun ve lifin yerdeğiştirmesinin arttığı ifade edilmiştir (Hsueh, 1988, 1990). Bu çalışmalar lif yüzeylerinin başka malzemelerle kaplanmasının veya pürüzlü üretilmesinin sıyrılma davranışına etkisini anlamak için kullanılmıştır. Marshall ve Oliver (1987) çalışmalarında lif-matris arayüzey kayma dayanımını bir malzeme sabiti olarak düşünüp deneysel olarak ölçmenin yolunu sunmuşlardır.

Matriste bulunan çatlağın ilerleme şeklinin önceden belirlenebilmesi için yine tek lif içeren ve lif doğrultusuna dik düzlemde çatlaklı matris modeli üzerinde deneyler yapılmıştır. Enerji yaklaşımı ile, matristeki çatlağın lif içerisine doğru ilerlemeden lifin etrafından dolaşarak, köprülenmeye izin verebilmesi için gereken koşul, her iki malzemenin enerji boşaltma hızları olan G 'ler cinsinden ortaya konmuştur (Ahn ve diğ., 1998), (Liu ve diğ., 1998), (Nayfeh ve Abdelrahman, 1998).

Tek eksenli yükleme altındaki levhadaki çatlağın ilerlemesi için gerekli gerilme değeri malzeme özellikleri cinsinden ifade edilmiştir.

Matrise gömülü tek lif modeli zorlama arttıkça aşamalı olarak köprülenme tiplerinin gözlenmesine olanak vermektedir. Çatlak ilerledikçe her lif bu aşamalardan geçmektedir. Çatlak yüzeyi boyunca yük aktaran liflerle karşılaştırdığımızda, modelde life uygulanan gerilme, köprülenme gerilmesine; lif yerdeğiştirmesi ise yarı çatlak açıklığına karşı gelmektedir. Bu anlamda lif-matris arayüzey gerilmesi ve lifteki gerilme ifadelerinin herbirine karşı gelen dayanımı geçmesi halinde köprülenme tipleri sınıflandırılabilir ve çatlak boyunca hangi aralıkta oluşacağı hesaplanabilir.

Matrise gömülü tek lif modeli yerine, lifle kuvvetlendirilmiş seramik matrisli kompozit numuneler üzerinde yapılan deneysel çalışmalarda matriste ilk çatlağın görülmesi ve lifin matris içinde kaymaya başlaması için gerekli en küçük gerilme değerleri elde edilmiştir (Singh, 1990), (Kumaria ve diğ., 1997), (Sun ve Singh, 1998). Lif hacim oranı arttıkça ilk matris kırılmasını sağlayan gerilme değerinin arttığı gösterilmiştir (Singh, 1990).

Seramik kompozitlerin sıcaklık değişimine göre tokluk davranışı deneylerle incelenmiştir (Grimes ve diğ., 1990).

Yapılan deneysel çalışmalarda önceden çatlağı bulunan kompozitler kullanılarak üç nokta yük altında zorlanarak çatlak açılması cinsinden kırılma tokluğu değerlerini gösteren grafikler çizilmiştir. R-eğrisi ismi verilen bu grafikler malzemenin kırılmaya karşı direncinin değişimini ifade eder (Jenkins, 1987), (Hsueh ve Becher, 1988), (Wu ve diğ., 1997).

Silisyum Karbit lifleri ile kuvvetlendirilmiş Alumina matrisli kompozit malzemenin yapılmış çatlağı olan numunenin üç nokta yük altında eğilme deneylerinden yük-çatlak açılması eğrisi elde edilmiş ve bu malzemenin çatlak ilerlemesini durdurabilme kabiliyeti olduğu ve çatlak uzunluğu arttıkça kırılmaya karşı direncinin artarak tipik bir R-eğrisi davranışı sergilediği gösterilmiştir (Jenkins ve diğ., 1987). Farklı boşluk hacim oranlarına sahip bu kompozit için R-eğrileri çizilmiştir (Krause ve diğ., 1990).

Çatlaklı kompozit malzemenin köprülenme analizi için yapılan birçok teorik çalışmalarda yük aktaran lifler, çatlak boyunca düzgün yayılı yaylar olarak modellenmiştir. Çatlak eksenine boyunca liflerin taşıdığı köprülenme gerilmesi σ_0 ve çatlak açıklığı v arasındaki ilişkinin $\sigma_0 = Kv$ şeklinde olduğu kabul edilerek elastisite problemi sayısal yöntemlerle çözülmüştür. K 'ya çatlak eksenine değişkeni cinsinden fonksiyonlar atanmıştır (Watson ve Weitsman, 1984). Deneylerle elde edilmiş olan R-eğrilerinden faydalanarak çatlak eksenine boyunca köprülenme gerilmesi grafiği elde edilmiştir (Hsueh ve Becher, 1988). Birçok çalışmada ise matrise gömülü tek lif modelinin analizi ile elde edilmiş olan σ_0-v ilişkileri kullanılmıştır (Watson ve Weitsman, 1984), (Delale, 1985), (Marshall ve Cox, 1987).

Liflerle kuvvetlendirilen seramik kompozitlerin dayanımını iyileştirmeden sorumlu olan ana mekanizmanın sürtünmeli çatlak köprülenmesi olduğu kabul edilmektedir. Seramik kompozitlerdeki liflerin varlığı çatlak açılması, lif-matris arayüzeyinin kayması, sıyrılma gibi enerji sarfedilmesini sağlayan olayları da birlikte getirmekte ve bileşenlerine göre kompozitin tokluğunu artırmaktadır. Optimum tokluk değerini elde edebilmek için matris kırılması esnasında sürtünmeli kayabilen lif-matris arayüzeyinin zayıf bağlı olması gerektiği ortaya konmuştur (Evans ve McMeeking, 1986), (Becher ve diğ., 1988), (Wu ve diğ., 1997).

Gevrek matris-gevrek lif kompozitleri dikkatle tasarlanmalıdır. Kompozitin dayanımı, bileşenlerinin ve lif-matris içyüzeyi özelliklerine bağlıdır. Malzeme özellikleri doğru seçilmediği takdirde, tokluğu matrise göre düşük olan kompozitle sonuçlanabilir.

Bu çalışmada tek eksenli gerilme altında, tek doğrultuda lifler ile kuvvetlendirilmiş, merkezi çatlağı olan sonsuz kompozit levha gözönüne alınmıştır.

İkinci bölümde, matrise gömülü eksenel yüklü tek lif modeli üzerinde literatürde yapılmış olan çalışmalar sunulmuştur. Çatlak etrafında yük aktarımını sağlayan köprülenmenin tarifi yapılarak bu çalışmalar elastik, sürtünmeli ve sıyrılmalı olarak üç gruba ayrılmıştır. Problemin formülasyonu için gerekli köprülenme ilişkileri seçilmiştir.

Üçüncü bölümde, özellikle bu çalışmada örnek olarak kullanılacak olanlarla birlikte kompozit malzemeler hakkında genel bilgi verilmiştir.

Dördüncü bölümde, çatlak eksenli boyunca köprülenme tipi geçişleri için gerekli şartlar ortaya konmuştur.

Beşinci ve altıncı bölümlerde, gevrek lifler ve kayarak pekleşen veya zayıflayan lifler için ayrı ayrı problem formüle edilerek herbiri için lineer olmayan bir integral denklem takımı elde edilmiştir.

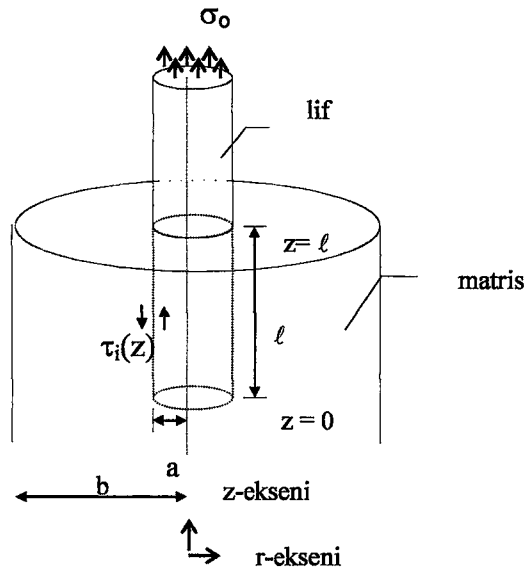
Yedinci bölümde, elde edilen integral denklem sistemindeki tüm katsayılar malzeme özelliklerinin uygun oranları ile düzenlenerek birimsizleştirilmiş ve integral denklem takımının çözümünde kullanılan sayısal yöntem anlatılmıştır.

Sekizinci bölümde, ilk olarak Silisyum Karbit lifleri ile kuvvetlendirilmiş Alumina seramik kompozit malzemesinden oluşan çatlaklı levha gözönüne alınarak, çatlak eksenini boyunca, elastik, sürtünmeli ve sıyrılmalı köprülenme ile yük aktarıldığı kabul edilerek, çeşitli lif hacim oranları için çatlak ucunda gerilme şiddeti çarpanları grafiklerle gösterilmiştir. İkinci kısımda aynı malzeme için çatlak uzunluğu değişimine göre çözümler incelenmiştir. Bu bölümün son kısmında ise kayarak pekleşen arayüzeyine sahip Polipropilen lifleri ile kuvvetlendirilmiş çimento esaslı matristen oluşan kompozit gözönüne alınarak, pekleşme katsayısının etkisi incelenmiştir.



2. MATRİSE GÖMÜLÜ EKSENEL YÜKLÜ LİF MODELİNİN ÇEŞİTLİ ANALİZLERİ VE KÖPRÜLENME İLİŞKİLERİ

Bu çalışmada uzun ve tek doğrultulu liflerin ekseninin çatlak eksenine dik olduğu kompozit levha gözönüne alınmıştır. Liflerle kuvvetlendirilmiş kompozit malzemelerde, çatlak uzunluğu boyunca, tamamen göçmeyen liflerin yük aktarmaya devam ettiği ve karşılıklı çatlak yüzeyleri arasında bağlı kalan liflerin, yükün aktarılması esnasında köprü vazifesi gördüğünden tezin giriş kısmında bahsedilmiştir. Köprülenme ilişkisini tanımlayan, çatlak boyunca lifteki gerilme değerinin, lifin matrise göre yer değiştirmesi, lif ve matrisin malzeme sabitleri, lif-matris arayüzey özellikleri cinsinden ifadeleri literatürde yer almıştır. Köprülenme tiplerinin belirlenebilmesi için matrise gömülü tek lifli model üzerinde deneyler yapılmış ve bu deneylere uygun sonuçlar elde edilebilecek şekilde köprülenme bağıntıları ortaya konmuştur. Literatürün hemen hepsinde gerilme analizini basitleştirmek için Şekil 2.1'deki etrafından izole edilmiş kompozit silindir model kullanılmıştır.



Şekil 2.1. Matrise kısmen gömülü, eksenel yüklü lif modeli.

Bu çalışmada, f , m ve c indisleri sırasıyla lif, matris ve kompozit için kullanılmıştır. E , Young modülü; ν , poisson oranı; a , lif yarıçapı; ℓ , lifin matris içine gömülü kısmının uzunluğu; V ise sahip olduğu indisi işaret eden malzemenin kompozit malzemedeki hacim oranıdır. Ayrıca burada $E_c = V_f E_f + V_m E_m$ kompozit malzemenin lif eksenine doğrultusundaki elastisite modülüdür. Tek doğrultuda liflerle kuvvetlendirilmiş kompozit malzemelerde, lif hacim oranı, lif eksenine dik düzlem içindeki liflerin alanının tüm kesit alanına oranı olarak alınmıştır ($V_f = a^2/b^2$). Bu model ile eksenel yüklü lif ekseninin çatlak yüzeyine dik olduğunun kabul edildiği görülmektedir. Lif ve matrisin birlikte elastik davranış gösterdiği, matrisin iç yüzey gerilmesinin life $\tau_i(z)$ kayma gerilmesi ile aktarıldığı, kırık yüzeyinin lif eksenine dik olduğu varsayımı yapılmıştır.

Bu bölümde literatürde var olan köprülenme tipini belirleyen bazı köprülenme gerilmesi ve çatlak açıklığı ifadeleri sunulacaktır. Köprülenme esnasında lif-matris arayüzeyinin tümüyle bağlı kaldığı kabul ediliyorsa elastik köprülenme, lif-matris arayüzeyinde kayma var ise sürtünmeli köprülenme, matris içerisinde lif kopmuş ise sıyrılmalı köprülenme başlıkları altında yer almıştır. Literatürde bulunan köprülenme gerilmesi-çatlak açıklığı ifadelerinin elde edilebilmesi için matrise gömülü eksenel yüklü tek lif modeli kullanılmıştır. Lifin matrise girdiği yerdeki gerilme ve lifin matrise göre yer değiştirmesi sırasıyla σ_0 ve v , lifin matrise gömülü uzunluğu ℓ , lifin-matris arayüzeyi boyunca kayma uzunluğu h , lif-matris arayüzeyinde oluşan kayma gerilmesi $\tau_i(z)$ ile gösterilmiştir. Kullanılan eksen takımları ise ilgili şekillerde görüldüğü gibidir.

2.1. Elastik Köprülenme

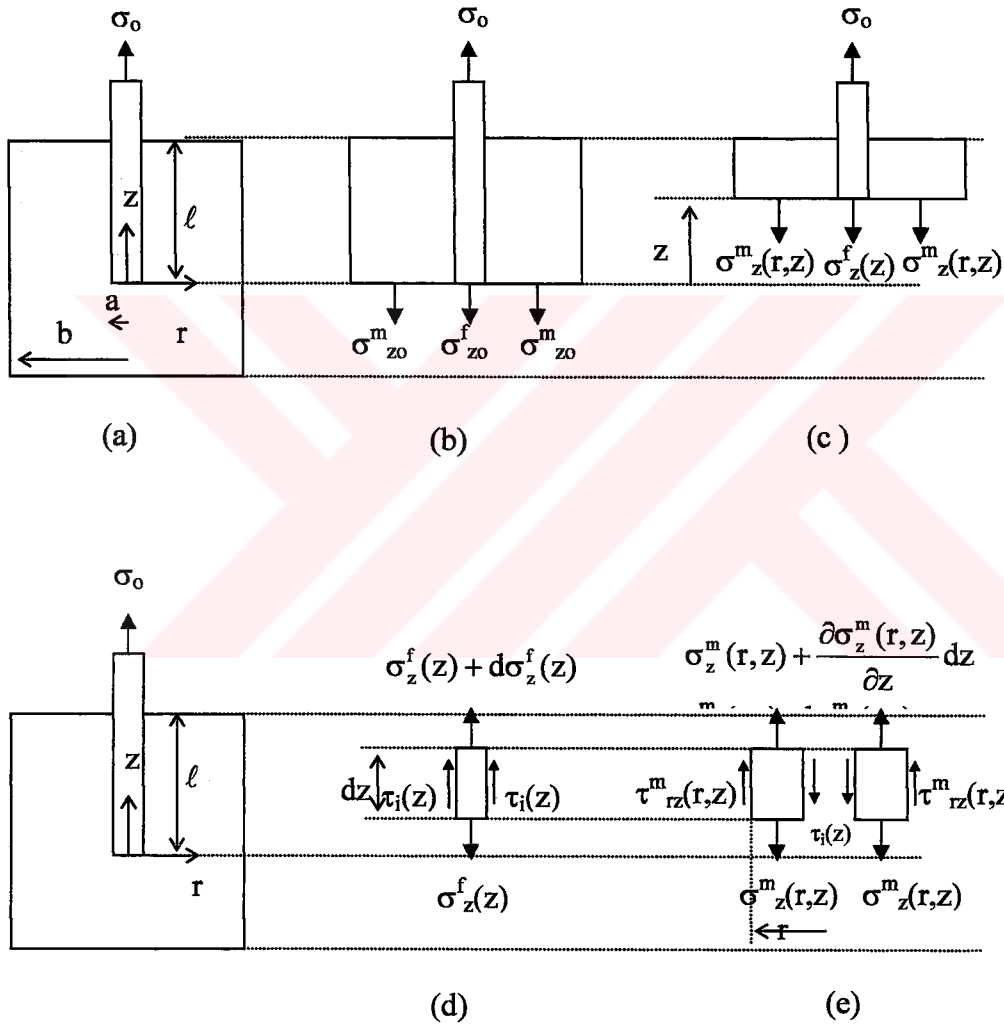
Hsueh (1988)'in çalışmasında, liften matrise yük aktarımı analizi yapılırken Şekil-2.2(a)'daki model kullanılarak, problemi basitleştirmek için aşağıdaki kabuller yapılmıştır.

Matristeki $\tau_{rz}^m(r,z)$ kayma gerilmesi radyal ve eksenel doğrultularda değişmektedir ve radyal doğrultuda matrisin yer değiştirmesi v_r^m lif eksenine boyunca sabit, yani z 'den bağımsızdır. Bu durumda

$$\tau_{rz}^m(r, z) = G_m \left(\frac{\partial v_z^m(r, z)}{\partial r} + \frac{\partial v_r^m(r, z)}{\partial z} \right)$$

genel ifadesi, $v_r^m(r)$ olduğu kabul edildiğinden, aşağıdaki basit hale getirilmiş olur.

$$\tau_{rz}^m(r, z) = \frac{E_m}{2(1+\nu_m)} \frac{dv_z^m(r, z)}{dr} \quad (2.1)$$



Şekil 2.2. (a) Hsueh (1988) in kullandığı tek lif modelinin koordinat takımını gösteren çizim, (b) modelin ℓ uzunluklu parçası ve bu sınırdaki kabul edilen lif ve matris gerilmeleri, (c) modelin $(\ell - z)$ uzunluklu parçası, (d) dz uzunluklu lif parçası, (e) dz uzunluklu, r dış ve a iç yarıçaplı matris parçası.

Matristeki $\sigma_z^m(r,z)$ aksenal gerilmesi ve $\tau_{rz}^m(r,z)$ kayma gerilmesi radyal ve aksenal doğrultularda değişmektedir.

$$\sigma_z^m(r,z) = E_m \frac{dv_z^m(r,z)}{dz} \quad (2.2)$$

Lifteki $\sigma_z^f(z)$ aksenal gerilme ve lif-matris arayüzeyindeki $\tau_i(z)$ kayma gerilmesi lif uzunluğu boyunca değişmektedir.

$$\sigma_z^f(z) = E_f \frac{dv_z^f(z)}{dz} \quad (2.3)$$

Lif ve matristeki aksenal normal gerilme ifadelerinin lifin matris içindeki ucunda ($z=0$ 'da) sırası ile $\sigma_z^f(z=0) = \sigma_{zo}^f$ ve $\sigma_z^m(r,z=0) = \sigma_z^m(z=0) = \sigma_{zo}^m$ olmak üzere sabit değer aldığı kabul edilmiştir (Şekil 2.2b).

Lif ve matrisin aksenal şekil değiştirmelerinin, lifin matris içindeki ucunda ($z=0$ 'da) eşit olduğu kabul edilmiştir. Bu ve bir önceki kabul gözönüne alınarak aşağıdaki ifadeyi yazmak mümkündür.

$$\varepsilon_z^f(z=0) = \varepsilon_z^m(z=0)$$

$$\frac{\sigma_{zo}^f}{E_f} = \frac{\sigma_{zo}^m}{E_m} \quad (2.4)$$

Lif ve matrisin aksenal yer değiştirmelerinin lif eksenine boyunca, lif-matris arayüzeyinde ($r=a$ boyunca) eşit olduğu kabul edilmiştir.

$$v_z^f(z) = v_z^m(r=a, z) = v_{za}^m(z) \quad (2.5)$$

Bu kabulün yapılmış olması lif-matris arayüzeyinin köprülenme esnasında tam bağlı kaldığını ifade etmektedir. Bu çalışma, elastik köprülenme tarifine uymaktadır.

Ayrıca,

$$\sigma_z^f(z = \ell) = \sigma_o \quad (2.6)$$

sınır koşulu Şekil 2.2 den açıkça görülmektedir.

Şekil 2.2 (c)'deki parça üzerinde z doğrultusunda kuvvet dengesi yazılırsa (2.7) ifadesi elde edilir.

$$\pi a^2 \sigma_o = \pi a^2 \sigma_z^f(z) + \int_a^b \sigma_z^m(r, z) 2\pi r dr$$
$$\sigma_o = \sigma_z^f(z) + \frac{2}{a^2} \int_a^b \sigma_z^m(r, z) r dr \quad (2.7)$$

Şekil 2.2 (b)'deki parça üzerinde z doğrultusunda kuvvet dengesi yazılırsa (2.8) ifadesi elde edilir.

$$\pi a^2 \sigma_o = \pi a^2 \sigma_{zo}^f + \pi(b^2 - a^2) \sigma_{zo}^m$$
$$V_f \sigma_o = V_f \sigma_{zo}^f + V_m \sigma_{zo}^m \quad (2.8)$$

(2.4) ve (2.8) denklemleri birlikte çözülerek σ_{zo}^f ve σ_{zo}^m ifadeleri aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$\sigma_{zo}^f = \frac{V_f E_f}{E_c} \sigma_o \quad (2.9)$$

$$\sigma_{zo}^m = \frac{V_f E_m}{E_c} \sigma_o \quad (2.10)$$

Şekil 2.2 (d)'deki dz uzunluklu lif parçası üzerinde z doğrultusunda kuvvet dengesi yazılarak aşağıdaki (2.11) ifadesi bulunabilir.

$$\pi a^2 d\sigma_z^f(z) + 2\pi a \tau_i(z) dz = 0$$

$$\frac{d\sigma_z^f(z)}{dz} = -\frac{2}{a} \tau_i(z) \quad (2.11)$$

Şekil 2.2 (e)'deki dz uzunluklu ve $(r-a)$ genişlikli silindirik matris parçasının z doğrultusundaki kuvvet dengesini yazılırsa,

$$2\pi r \tau_{rz}^m(r, z) dz - 2\pi a \tau_i(z) dz + \int_{r=a}^r \frac{\partial \sigma_z^m(r, z)}{\partial z} dz 2\pi r dr = 0$$

ifadesi bulunur. Fakat, Hsueh (1988) yukarıdaki denge denklemindeki üçüncü terimi ihmal ederek (2.12)'de verilen şekli ile basitleştirmiştir.

$$\tau_{rz}^m(r, z) = \frac{a}{r} \tau_i(z) \quad (2.12)$$

Yukarıda sunulan kabuller, sınır koşulları ve model parçaları yardımıyla Hsueh (1988) aşağıdaki şekilde köprülenme gerilmesi- yarım çatlak açıklığı ifadesini (σ_o-v) elde etmiştir.

(2.1) ve (2.12) ifadeleri eşitlenir ve $r=a$ 'dan $r=b$ 'ye integrali alınır.

$$\tau_{rz}^m(r, z) = \frac{E_m}{2(1+\nu_m)} \frac{dv_z^m(r, z)}{dr} = \frac{a}{r} \tau_i(z)$$

$$\frac{E_m}{2(1+\nu_m)} \int_{v_{za}(z)}^{v_{zb}(z)} dv_z^m(r, z) = a \tau_i(z) \int_a^b \frac{dr}{r}$$

$$\frac{E_m}{2(1+\nu_m)} (v_{zb}^m(z) - v_{za}^m(z)) = a \tau_i(z) \ln(b/a)$$

$$\tau_i(z) = \frac{E_m (v_{zb}^m(z) - v_{za}^m(z))}{2a(1+\nu_m) \ln(b/a)} \quad (2.13)$$

Burada $v_z^m(r=a, z) = v_{za}^m(z)$, $v_z^m(r=b, z) = v_{zb}^m(z)$ ve $v_z^f(z) = v_{za}^f(z)$ tanımları kullanılmıştır.

(2.12) denkleminde (2.13) ifadesi ile bulunan $\tau_i(z)$ yerine yerleştirilirse,

$$\tau_i(z) = \frac{E_m(v_{zb}^m(z) - v_{za}^m(z))}{2a(1 + v_m) \ln(b/a)} = \tau_{rz}^m(r, z) \frac{r}{a}$$

$$\tau_{rz}^m(r, z) = \frac{E_m(v_{zb}^m(z) - v_{za}^m(z))}{2r(1 + v_m) \ln(b/a)} \quad (2.14)$$

bulunur. (2.1) ve (2.14) ifadeleri eşitlenir ve $r=a$ 'dan r 'ye kadar integrali alınırsa (2.15) ifadesi elde edilir.

$$\tau_{rz}^m(r, z) = \frac{E_m}{2(1 + v_m)} \frac{dv_z^m(r, z)}{dr} = \frac{E_m(v_{zb}^m(z) - v_{za}^m(z))}{2r(1 + v_m) \ln(b/a)}$$

$$\frac{dv_z^m(r, z)}{dr} = \frac{(v_{zb}^m(z) - v_{za}^m(z))}{r \ln(b/a)}$$

$$\int_{v_{za}^m(z)}^{v_z^m(r, z)} dv_z^m(r, z) = \frac{(v_{zb}^m(z) - v_{za}^m(z))}{\ln(b/a)} \int_a^r \frac{dr}{r}$$

$$v_z^m(r, z) - v_{za}^m(z) = \frac{(v_{zb}^m(z) - v_{za}^m(z))}{\ln(b/a)} \ln(r/a)$$

$$v_z^m(r, z) = v_{za}^m(z) + \frac{(v_{zb}^m(z) - v_{za}^m(z))}{\ln(b/a)} \ln(r/a) \quad (2.15)$$

(2.2) denkleminde (2.15) denklemi ile bulunan $v_z^m(r, z)$ ifadesi yerleştirilir.

$$\sigma_z^m(r, z) = E_m \frac{d}{dz} \left[v_{za}^m(z) + \frac{(v_{zb}^m(z) - v_{za}^m(z))}{\ln(b/a)} \ln(r/a) \right]$$

$$\sigma_z^m(r, z) = E_m \frac{dv_{zb}^m(z)}{dz} \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)} - \frac{dv_{za}^m(z)}{dz} \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)} + E_m \frac{dv_{za}^m(z)}{dz} \quad (2.16)$$

$$\sigma_{zb}^m(r = b, z) = \sigma_{zb}^m(z) = E_m \frac{dv_{zb}^m(z)}{dz} \quad (2.17)$$

ve (2.5) tanımını kullanılarak,

$$\sigma_{za}^m(r = a, z) = \sigma_{za}^m(z) = E_m \frac{dv_{za}^m(z)}{dz} = E_m \frac{dv_z^f(z)}{dz} = \frac{E_m}{E_f} \sigma_z^f(z) \quad (2.18)$$

elde edilir. (2.17) ve (2.18) ifadeleri kullanılarak (2.16) ifadesi tekrar düzenlenirse,

$$\sigma_z^m(r, z) = \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)} \left(\sigma_{zb}^m(z) - \frac{E_m}{E_f} \sigma_z^f(z) \right) + \frac{E_m}{E_f} \sigma_z^f(z) \quad (2.19)$$

bulunur. (2.7) denkleminde (2.19) ile bulunan $\sigma_z^m(r, z)$ değeri yerleştirilirse,

$$\sigma_z^f(z) + \frac{2}{a^2} \int_a^b \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)} \left(\sigma_{zb}^m(z) - \frac{E_m}{E_f} \sigma_z^f(z) \right) + \frac{E_m}{E_f} \sigma_z^f(z) r dr = \sigma_o$$

$$\sigma_z^f(z) + \frac{2}{a^2 \ln(b/a)} \left[\sigma_{zb}^m(z) - \frac{E_m}{E_f} \sigma_z^f(z) \right] \int_a^b \ln(r/a) r dr + \frac{2}{a^2} \frac{E_m}{E_f} \sigma_z^f(z) \int_a^b r dr = \sigma_o$$

$$\begin{aligned} \sigma_z^f(z) + \frac{2}{a^2 \ln(b/a)} \left[\sigma_{zb}^m(z) - \frac{E_m}{E_f} \sigma_z^f(z) \right] \left[\frac{2b^2 \ln(b/a) + a^2 - b^2}{4} \right] \\ + \frac{2}{a^2} \frac{E_m}{E_f} \sigma_z^f(z) \left[\frac{b^2 - a^2}{2} \right] = \sigma_o \end{aligned}$$

$$\sigma_z^f(z) + \frac{2b^2 \ln(b/a) + a^2 - b^2}{2a^2 \ln(b/a)} \left(\sigma_{zb}^m(z) - \frac{E_m}{E_f} \sigma_z^f(z) \right) + \frac{E_m}{E_f} \frac{b^2 - a^2}{a^2} \sigma_z^f(z) = \sigma_o$$

$$\sigma_z^f(z) \left[1 + \frac{E_m}{E_f} \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2} - \frac{2b^2 \ln(b/a) + a^2 - b^2}{2a^2 \ln(b/a)} \right) \right] + \frac{2b^2 \ln(b/a) + a^2 - b^2}{2a^2 \ln(b/a)} \sigma_{zb}^m(z) = \sigma_o$$

$$\sigma_z^f(z) \left[1 + \frac{E_m}{E_f} \frac{b^2 - a^2}{a^2} - \frac{E_m}{E_f} \frac{2b^2 \ln(b/a) + a^2 - b^2}{2a^2 \ln(b/a)} \right] + \frac{2b^2 \ln(b/a) + a^2 - b^2}{2a^2 \ln(b/a)} \sigma_{zb}^m(z) = \sigma_o$$

$$\sigma_z^f(z) \left[1 + \frac{V_m E_m}{V_f E_f} - \frac{E_m}{E_f} \frac{\ln(V_f) + V_m}{V_f \ln(V_f)} \right] + \frac{\ln(V_f) + V_m}{V_f \ln(V_f)} \sigma_{zb}^m(z) = \sigma_o$$

$$\sigma_z^f(z) \left[\frac{E_c}{V_f E_f} - \frac{E_m}{V_f E_f} \frac{\ln(V_f) + V_m}{\ln(V_f)} \right] + \frac{\ln(V_f) + V_m}{V_f \ln(V_f)} \sigma_{zb}^m(z) = \sigma_o$$

bulunur. Buradan $\sigma_{zb}^m(z)$ çekilir.

$$\sigma_{zb}^m(z) = \frac{V_f \ln(V_f)}{\ln(V_f) + V_m} \sigma_o + \left[\frac{E_m}{E_f} - \frac{E_c}{E_f} \frac{\ln(V_f)}{\ln(V_f) + V_m} \right] \sigma_z^f(z) \quad (2.20)$$

(2.11) denkleminde (2.13) ile bulunan $\tau_i(z)$ değeri yerleştirilirse,

$$\frac{d\sigma_z^f(z)}{dz} = -\frac{2}{a} \tau_i(z) \quad (2.11)$$

$$\tau_i(z) = \frac{E_m (v_{zb}^m(z) - v_{za}^m(z))}{2a(1 + v_m) \ln(b/a)} \quad (2.13)$$

$$\frac{d\sigma_z^f(z)}{dz} = -\frac{E_m}{a^2} \frac{(v_{zb}^m(z) - v_{za}^m(z))}{(1 + v_m) \ln(b/a)}$$

$$\frac{d\sigma_z^f(z)}{dz} = \frac{2E_m}{a^2} \frac{(v_{zb}^m(z) - v_{za}^m(z))}{(1 + v_m) \ln(V_f)}$$

ve z değişkenine göre türevi alınırsa,

$$\frac{d^2\sigma_z^f(z)}{dz^2} = -\frac{E_m}{a^2(1 + v_m) \ln(b/a)} \left(\frac{dv_{zb}^m(z)}{dz} - \frac{dv_{za}^m(z)}{dz} \right) \quad (2.21)$$

bulunur. (2.5) kabulü ve (2.3), (2.2) denklemlerinden faydalanılarak aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$\frac{dv_{za}^m(z)}{dz} = \frac{dv_z^f(z)}{dz} = \frac{\sigma_z^f(z)}{E_f} \quad \text{ve} \quad \frac{dv_{zb}^m(z)}{dz} = \frac{\sigma_{zb}^m(z)}{E_m}$$

Bu ifadeler (22) denkleminde yerleştirilirse

$$\frac{d^2\sigma_z^f(z)}{dz^2} = -\frac{E_m}{a^2(1 + v_m) \ln(b/a)} \left(\frac{\sigma_{zb}^m(z)}{E_m} - \frac{\sigma_z^f(z)}{E_f} \right)$$

ve (2.20) denklemindeki $\sigma_{zb}^m(z)$ ifadesi yukarıda yerine yerleştirilirse,

$$\sigma_{zb}^m(z) = \frac{V_f \ln(V_f)}{\ln(V_f) + V_m} \sigma_o + \left[\frac{E_m}{E_f} - \frac{E_c}{E_f} \frac{\ln(V_f)}{(\ln(V_f) + V_m)} \right] \sigma_z^f(z) \quad (2.20)$$

$$\frac{d^2\sigma_z^f(z)}{dz^2} = \frac{E_m \sigma_z^f(z)}{a^2 E_f (1 + v_m) \ln(b/a)} - \frac{1}{a^2 (1 + v_m) \ln(b/a)} \left[\frac{V_f \ln(V_f)}{\ln(V_f) + V_m} \sigma_o + \frac{E_m}{E_f} \sigma_z^f(z) - \frac{E_c}{E_f} \frac{\ln(V_f)}{(\ln(V_f) + V_m)} \sigma_z^f(z) \right]$$

$$\frac{d^2\sigma_z^f(z)}{dz^2} = -\frac{2E_c}{a^2 E_f (1 + v_m) (\ln(V_f) + V_m)} \sigma_z^f(z) + \frac{2V_f}{a^2 (1 + v_m) (\ln(V_f) + V_m)} \sigma_o$$

$$\frac{d^2\sigma_z^f(z)}{dz^2} = -\frac{2E_c}{E_f (1 + v_m) a^2 (\ln(V_f) + V_m)} \left(\sigma_z^f(z) - \frac{V_f E_f}{E_c} \sigma_o \right) \quad (2.22)$$

bulunur. Burada,

$$n^2 = \frac{1 + \frac{E_m}{E_f} \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right)}{(1 + v_m) \left(b^2 \ln(b/a) - \frac{b^2 - a^2}{2} \right)} = - \frac{2E_c}{E_f (1 + v_m) a^2 (\ln(V_f) + V_m)} \quad (2.23)$$

tanımı yapılır ve (2.22) ifadesi tekrar düzenlenirse,

$$\frac{d^2 \sigma_z^f(z)}{dz^2} - n^2 \sigma_z^f(z) = - \frac{n^2}{1 + \frac{E_m}{E_f} \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right)} \sigma_o \quad (2.24)$$

$$\frac{d^2 \sigma_z^f(z)}{dz^2} - n^2 \sigma_z^f(z) = - \frac{E_f V_f n^2}{E_c} \sigma_o$$

ikinci mertebeden diferensiyel denklemi elde edilir. Bu diferensiyel denklemin çözümü için gerekli iki tane sınır koşulu olarak (2.6) ve (2.9) ifadeleri kullanılmış ve aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$\sigma_z^f(z) = \frac{\frac{E_m}{E_f} \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right) \frac{\sinh(nz)}{\sinh(n\ell)} + 1}{1 + \frac{E_m}{E_f} \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right)} \sigma_o \quad (2.25)$$

$$\sigma_z^f(z) = \frac{\sigma_o}{E_c} \left[E_m V_m \frac{\sinh(nz)}{\sinh(n\ell)} + E_f V_f \right]$$

(2.25) denklemi z değişkenine göre türetilirse

$$\frac{d\sigma_z^f(z)}{dz} = \frac{n E_m V_m \cosh(nz)}{E_c \sinh(n\ell)} \sigma_o \quad (2.26)$$

ve (2.11) denklemi ile eşitlenirse

$$\tau_i(z) = -\frac{naE_m V_m}{2E_c} \frac{\cosh(nz)}{\sinh(n\ell)} \sigma_o$$

bulunur. Bu ifadede (2.23) ile verilen n degeri yerine konursa $\tau_i(z)$ ifadesi bulunur.

$$\tau_i(z) = -E_m V_m \sqrt{-\frac{1}{2E_c E_f (1+v_m)(\ln(V_f) + V_m)}} \frac{\cosh(nz)}{\sinh(n\ell)} \sigma_o \quad (2.27)$$

(2.27) bağıntısı ile lif-matris arayüzeyindeki kayma gerilmesi ifadesi bulunmuş olur.

(2.3) bağıntısı yardımıyla lifteki toplam uzama hesaplanabilir.

$$v_z^f = \int_0^\ell \frac{\sigma_z^f(z)}{E_f} dz = \int_0^\ell \frac{\sigma_o}{E_f E_c} \left[E_m V_m \frac{\sinh(nz)}{\sinh(n\ell)} + E_f V_f \right] dz$$

$$v_z^f = \frac{\sigma_o}{E_c} \left[\frac{E_m V_m}{nE_f} \frac{\cosh(n\ell) - 1}{\sinh(n\ell)} + V_f \ell \right] \quad (2.28)$$

Liften uzakta matristeki gerilmenin σ_{zo}^m olduğunu kabul edip (2.2) ve (2.10) bağıntılarından faydalananarak, matristeki toplam yer değiştirme bulunabilir.

$$v_z^m = \int_0^\ell \frac{\sigma_{zo}^m}{E_m} dz = \int_0^\ell \frac{1}{E_m} \frac{V_f E_m}{E_c} \sigma_o dz = \frac{V_f \ell}{E_c} \sigma_o \quad (2.29)$$

(2.28) ve (2.29) denklemlerinden faydalananarak v yarım çatlak açıklığı hesaplanabilir.

$$v = v_z^f - v_z^m = \frac{\sigma_o}{E_c} \left[\frac{E_m V_m}{nE_f} \frac{\cosh(n\ell) - 1}{\sinh(n\ell)} + V_f \ell \right] - \frac{V_f \ell \sigma_o}{E_c}$$

$$v = \frac{E_m V_m}{nE_c E_f} \frac{(\cosh(n\ell) - 1)}{\sinh(n\ell)} \sigma_o \quad (2.30)$$

$\frac{(\cosh(n\ell)-1)}{\sinh(n\ell)} = \frac{e^{n\ell}-1}{e^{n\ell}+1} \cong 1$ olarak alınırsa (2.30) bağıntısı basitleşmiş olur. Ayrıca

(2.23) ile verilen n değeri yerine yerleştirilirse,

$$v = \frac{aE_m V_m}{E_c} \sqrt{-\frac{(1+v_m)(\ln(V_f)+V_m)}{2E_c E_f}} \sigma_o \quad (2.31)$$

bulunur. Buradan σ_o çekilirse,

$$\sigma_o = \frac{E_c v}{aE_m V_m} \sqrt{-\frac{2E_c E_f}{(1+v_m)(\ln(V_f)+V_m)}} \quad (2.32)$$

bulunur. Hsueh (1988) , (2.32) köprülenme ifadesini, çatlak boyunca sadece matrisin göçtüğü, lif-matris arayüzeyinin tam bağlı kaldığı yani kayma olmadığı durumda, liflerle kuvvetlendirilmiş seramik kompozitlerin yük aktarımı analizi için ortaya koymuştur.

Yukarıdaki tek lif modelinin analizinin aynısı uygulanarak, fakat (2.9) sınır koşulu yerine $\sigma_z^f(z=0)=\sigma_{zo}^f=0$ sınır koşulu kullanılarak lifteki eksenel normal gerilme ve lif-matris arayüzey kayma gerilmesi ifadesi başka bir çalışmada elde edilmiştir (Hsueh, 1990). Elde edilen ifadeler aşağıdaki gibidir.

$$\sigma_z^f(z) = \frac{\sigma_o}{E_c} \left[E_m V_m \frac{\sinh(nz)}{\sinh(n\ell)} + E_f V_f - E_f V_f \frac{\sinh(n(\ell-z))}{\sinh(n\ell)} \right] \quad (2.33)$$

$$\tau_i(z) = -\frac{na}{2} \frac{\sigma_o}{E_c} \left[E_m V_m \frac{\cosh(nz)}{\sinh(n\ell)} + E_f V_f \frac{\cosh(n(\ell-z))}{\sinh(n\ell)} \right] \quad (2.34)$$

Fakat bu sınır koşulu sürekli veya yeterince uzun liflerle kuvvetlendirilmiş matrisli kompozit malzemenin davranışını temsil etmez. Kısa liflerin bulunduğu ortam için kullanılabilir.

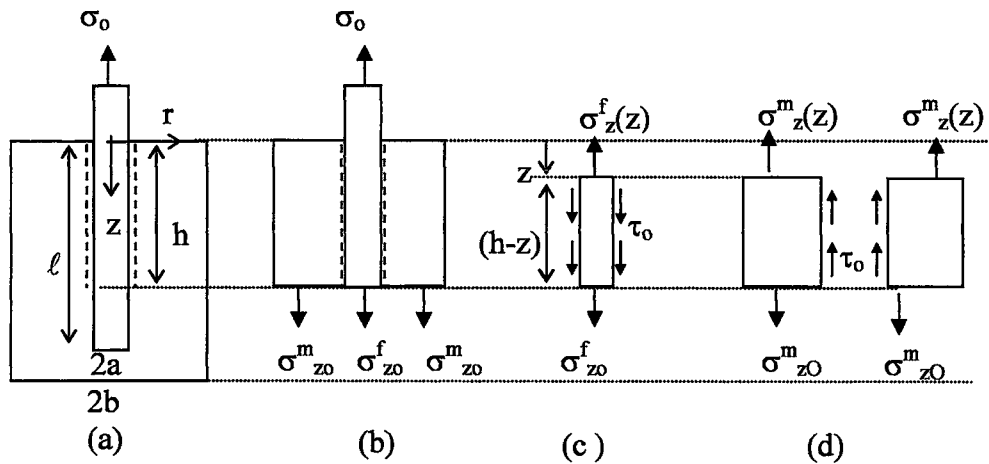
2.2. Sürtünmeli Köprülenme

Life uygulanan gerilmenin artması ile lif-matris arayüzeyindeki kayma gerilmesi artar ve lif matrise göre yer değiştirmeye başlayarak arayüzey boyunca sürtünmeli kayma meydana gelir. Bu konuda literatürde çok sayıda çalışma mevcuttur.

Marshall ve diğ. (1985) çalışmalarında, lif-matris arayüzeyinde kayma uzunluğu boyunca sabit kayma gerilmesi (sabit τ_i modeli) olduğunu kabul ederek köprülenme ilişkisini elde etmişlerdir.

Marshall ve diğ. (1985), aşağıdaki kabulleri, sınır koşullarını ve yolu kullanarak yaptıkları çalışmanın ek kısmında sundukları sabit- τ_o modelini esas alan sürtünmeli köprülenme ilişkisini elde etmişlerdir. Marshall ve diğ. (1985), bu çalışmada Şekil 2.2(a) 'daki modeli, koordinat takımını ve parçalarını kullanmıştır. Lif-matris arayüzeyinde kesikli çizgi ile gösterilen h uzunluğu lifin matrise göre yer değiştirdiği kayma uzunluğudur. Bu uzunluk boyunca lif-matris arayüzeyinin bir malzeme özelliği olan τ_s kayma dayanımı aşılmıştır.

Lif ve matristeki eksenel normal gerilmesin sadece z 'nin fonksiyonu olduğu kabul edilmiştir. $z=h$ 'da bu gerilmelerin sabit değer aldığı kabul edilmiştir.



Şekil 2.3. (a) Marshall ve diğ. (1985) tarafından kullanılan life gömülü eksenel yüklü tek lif modeli, (b) h kayma mesafesi uzunluklu model parçası, (c) $(h-z)$ uzunluklu lif parçası, (d) $(h-z)$ uzunluklu, (b-a) genişlikli matris parçası.

Şekil 2.3'te $z=h$ 'da lif ve matrisin eksenel şekil değiştirmelerinin eşit olduğu kabul edilmiştir.

$$\varepsilon_z^f(z=h) = \varepsilon_z^m(z=h) \quad (2.35)$$

$z>h$ bölgesinde lif ve matrisin rölatif elastik yer değiştirmenin varlığı ihmal edilerek, bu bölgede lif ve matrisin eksenel normal gerilmeleri, çatlak yüzeyinden uzaktaki gerilme değerlerine eşit olduğu kabul edilmiştir.

$$\frac{\sigma_{zo}^f}{E_f} = \frac{\sigma_{zo}^m}{E_m} \quad (2.4)$$

Şekil 2.3 (b) 'deki model parçası üzerinde z doğrultusunda kuvvet dengesi yazılırsa (2.8) denklemi elde edilir.

$$\pi a^2 \sigma_o = \pi a^2 \sigma_{zo}^f + \pi(b^2 - a^2) \sigma_{zo}^m \quad (2.8)$$

(2.4) ve (2.8) bağıntılarından σ_{zo}^f ve σ_{zo}^m ifadeleri elastik köprülenme analizindeki gibi (2.9) ve (2.10) bağıntıları ile tekrar bulunur.

(2.9) ifadesinden faydalananarak Şekil 2.3 (c)'deki lif parçası üzerinde z doğrultusunda kuvvet dengesi yazılırsa,

$$\sigma_{zo}^f \pi a^2 + \tau_o 2\pi a(h-z) = \sigma_z^f(z) \pi a^2$$

$$\sigma_z^f(z) = \frac{V_f E_m}{E_c} \sigma_o + \frac{2\tau_o}{a} (h-z) \quad (2.36)$$

bulunur. (2.10) nolu denklemden faydalananarak Şekil 2.3 (d) 'deki matris parçasının z doğrultusunda kuvvet dengesi yazılırsa,

$$\sigma_{zo}^m \pi(b^2 - a^2) = \tau_o 2\pi a(h-z) + \sigma_z^m(z) \pi(b^2 - a^2)$$

$$\sigma_z^m(z) = \frac{V_f E_m}{E_c} \sigma_o - \frac{2\tau_o V_f}{a V_m} (h-z) \quad (2.37)$$

bulunur. Lifin matrise göre yer değiştirmesini hesaplamak için her birinin ayrı ayrı şekil değiştirmeleri hesaplanmalıdır.

$$\frac{\sigma_z^f(z)}{E_f} = \frac{dv_z^f(z)}{dz} = \epsilon_z^f(z) \quad (2.38)$$

$$\frac{\sigma_z^m(z)}{E_m} = \frac{dv_z^m(z)}{dz} = \epsilon_z^m(z) \quad (2.39)$$

Ayrıca,

$$\sigma_z^f(z=0) = \sigma_o \quad (2.40)$$

sınır koşulu şekil 2.3'ten kolayca yazılabilir.

(2.40) ile verilen sınır koşulu (2.36) denkleminde kullanılırsa h kayma uzunluğu bulunabilir.

$$\sigma_z^f(z=0) = \frac{V_f E_m}{E_c} \sigma_o + \frac{2\tau_o}{a} h = \sigma_o$$

$$h = \frac{a}{2\tau_o} \frac{V_m E_m}{E_c} \sigma_o \quad (2.41)$$

(2.36) ve (2.37) ifadelerinde, (2.41) ile bulunan h değerini yerine yerleştirilirse,

$$\sigma_z^f(z) = \sigma_o - \frac{2\tau_o}{a} z \quad (2.42)$$

$$\sigma_z^m(z) = \frac{2\tau_o V_f}{a V_m} z \quad (2.43)$$

bulunur. (2.38) ve (2.42) denkleminden faydalanılarak lifin matrise girdiği noktadaki toplam yer değiştirme hesaplanabilir.

$$v_z^f = \int_0^h \epsilon_z^f(z) dz = \int_0^h \frac{\sigma_z^f(z)}{E_f} dz = \int_0^h \frac{1}{E_f} \left(\sigma_o - \frac{2\tau_o}{a} z \right) dz$$

$$v_z^f = \frac{1}{E_f} \left(\sigma_o h - \frac{\tau_o}{a} h^2 \right) \quad (2.44)$$

(2.39) ve (2.43) denklemlerinden faydalanılarak matristeki toplam yer değıştirme hesaplanabilir.

$$v_z^m = \int_0^h \epsilon_z^m(z) dz = \int_0^h \frac{\sigma_z^m(z)}{E_m} dz = \int_0^h \frac{2V_f \tau_o}{aV_m E_m} z dz$$

$$v_z^m = \frac{V_f \tau_o h^2}{aV_m E_m} \quad (2.45)$$

Lifin toplam yer değıştirmesi ve matrisin toplam yer değıştirmesi arasındaki fark yarım çatlak açıklığına karşı gelir. (2.44) ve (2.45) denklemlerinden faydalanarak v yarım çatlak açıklığı hesaplanabilir.

$$v = v_z^f - v_z^m = \frac{1}{E_f} \left(\sigma_o h - \frac{\tau_o}{a} h^2 \right) - \frac{V_f \tau_o}{aV_m E_m} h^2$$

Burada (2.41) ile bulunan h değeri yerine yerleştirilirse σ_o -v köprülenme ilişkisi bulunabilir.

$$v = \frac{aV_m E_m}{4\tau_o E_f E_c} \sigma_o^2$$

$$\sigma_o = \sqrt{\frac{4\tau_o E_f E_c}{aV_m E_m} v} \quad (2.46)$$

Marshall ve diğ. (1985), bu modeli gevrek matrisli lifli kompozitlerin, uzun (karalı) ve kısa (kararsız) çatlakların ilerlemesi için gerekli tek eksenli yüklü levhadaki gerilmenin hesabı için kullanmışlardır. Karbon, Silisyum Karbit (SiC) lifleri ile kuvvetlendirilmiş cam, seramik gibi gevrek kompozitler bu modele uygun davranmaktadırlar (Marshall ve Cox, 1987). Marshall ve Oliver (1987), sabit- τ_o

modelini kullanarak, SiC lifleri ile kuvvetlendirilmiş Lityum AluminoSilikat cam-seramik matrisli kompozit için elde ettikleri yük-yer değiştirme deney sonuçlarını analiz etmişlerdir. Bu çalışma ile liflerle kuvvetlendirilmiş seramik kompozitlerin arayüzey mekanik özelliklerinin belirlenmesi için yol göstermişlerdir.

Gevrek lifler için geçerli olan sabit- τ_0 modeli, çelik, polipropilen ve naylon gibi gevrek olmayan liflerle kuvvetlendirilmiş çimento esaslı matrisli kompozitlerin deney sonuçlarını açıklamak için yeterli olmadığı birçok çalışmada ortaya konmuştur (Wang ve diğ.,1988), (Lin ve Li, 1997), (Li ve Stang, 1997). Bu eksikliği giderebilmek için arayüzey kayma gerilmesinin , lifin matrise göre yerdeğiştirmesi cinsinden ifadesi

$$\tau_i(s)=\tau_0+a_1s+a_2s^2 \quad (2.47)$$

şeklinde önerilmiştir (Wang ve diğ., 1988). Burada s, z'nin fonksiyonudur ve lif eksenini boyunca lifin matrise göre yer değiştirmesini ifade eder $(s(z)=v_z^f(r=a, z)-v_z^m(r=a, z))$. Çatlak yüzeyindeki s'nin değeri yarım çatlak açıklığına eşittir. Lifin dış yüzey özelliğini, lif ve matrisin mekanik özelliklerini karakterize eden (2.47) ifadesinde bulunan τ_0 , a_1 ve a_2 sabitleri iki şekilde bulunabilir. Ya tek lif modelinin yük-yer değiştirme eğrisine eğri uydurulmalı, ya da Shao ve diğ. (1993)'nin yaptığı gibi Moire interferometre kullanarak direk ölçülebilir. Shao ve diğ. (1993) Moire interferometre kullanarak çelik lifle kuvvetlendirilmiş çimento esaslı kompozite ait τ -s grafiğini sunmuştur. Bu şekilde gevrek olmayan liflere ait (2.45) ilişkisindeki sabitler Tablo 2.1'de Li ve Stang, (1997)'in çalışmalarında sunulmuştur.

Tablo 2.1. Çimento esaslı matrise gömülü çeşitli liflerin (2.45) ifadesinde yer alan sabitleri (Li ve Stang, 1997).

Lif	τ_0 (MPa)	a_1 (MPa/mm)	a_2 (MPa/mm ²)
Naylon	0.05	0.001	0.0002
Polypropylene	0.1	0.0005	0.0003
Düz çelik	2.35	-0.35	0.014

Naaman ve Shah (1976), çimento esaslı matrise gömülü uzunluğu 0.5 in=12.7mm, çapı 0.01 in=0.254mm olan pirinç kaplı çelik lif modeline ait yük-yer değiştirme grafiğini bu çalışmasında sunmuşlardır. Wang ve diğ. (1988), çelik liflerin davranışını analiz etmek için Naaman ve Shah (1976) 'ın bu çalışmasından faydalanmışlardır.

Lif-matris arayüzey ifadeleri, Tablo 2.1'den de görüldüğü gibi naylon ve polipropilen gibi sentetik lifler için kayarken pekleşen, çelik lifler için ise kayarken zayıflayan türde bir davranış göstermektedirler.

Lin ve Li (1997), (2.45) ifadesindeki ilk iki terimin pratik olarak yeterli olduğunu kabul ederek a_2 terimini dikkate almamışlardır ve lineer pekleşen $\tau(s)$ modeli kullanarak polypropylene lifleri ile kuvvetlendirilmiş çimento esaslı kompozit malzeme için yük yer değiştirme eğrisini analiz etmişlerdir. Kullandıkları ifade aşağıdaki gibidir.

$$\tau(s) = \tau_0 \left(1 + \frac{\beta}{2a} s \right) \quad (2.48)$$

Burada a , lif yarıçapıdır. Lin ve Li (1997), bu çalışmasında sürtünmeli köprülenme gerilmesi ve çatlak açıklığı ifadesini çıkarırken aşağıdaki kabulleri, sınır koşullarını ve yolu izlemişlerdir.

Şekil 2.3'te Lin ve Li (1997)'nin kullandıkları model verilmiştir. Bu çalışmada lif ve matristeki eksenel normal gerilme sadece z 'nin fonksiyonu olarak alınmıştır. $z=0$ 'da bu gerilmelerin sabit değer aldığı kabul edilmiştir. Lif ve matrisin $z=0$ 'da şekil değiştirmelerinin eşit olduğu kabul edilerek (2.4) bağıntısı bu durum için tekrar elde edilmiştir.

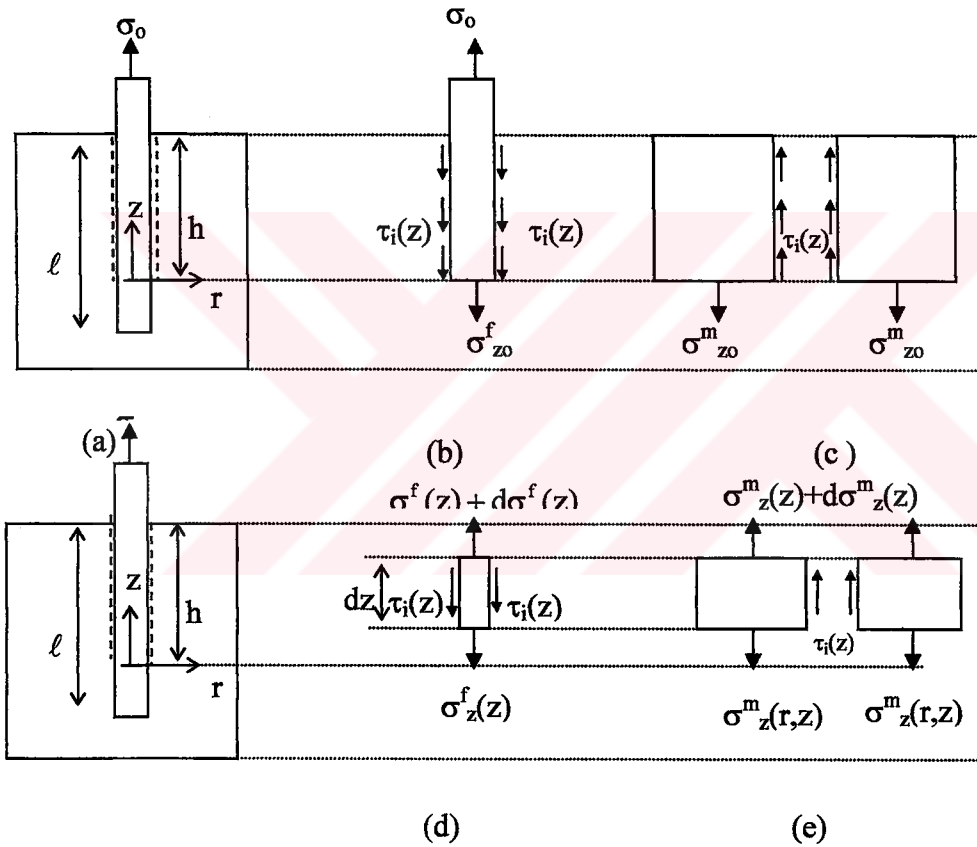
$$\epsilon_z^f(z=0) = \epsilon_z^m(z=0)$$

$$\frac{\sigma_{z0}^f}{E_f} = \frac{\sigma_{z0}^m}{E_m} \quad (2.4)$$

Yukarıdaki köprülenme bağıntıları çıkarılırken izlenen yoldan farklı olarak, matrise göre lifin gömülü ucundaki eksenel yer değiştirmenin ve türevinin sıfır olması sınır koşulları kullanılmıştır.

$$s(z=0) = 0 \quad (2.49)$$

$$\left. \frac{ds}{dz} \right|_{z=0} = 0 \quad (2.50)$$



Şekil 2.4. (a) Lin ve Li (1997) çalışmalarında kullandığı model ve koordinat takımı, (b) h kayma uzunluklu lif parçası, (c) h kayma uzunluklu matris parçası, (d) dz uzunluklu lif parçası, (e) dz uzunluklu matris parçası.

Şekil 2.3 (b)'deki z doğrultusunda kuvvet dengesi yazılırsa,

$$\pi a^2 \sigma_0 = \pi a^2 \sigma_{z_0}^f + \int_0^h \tau_i(z) 2\pi a dz$$

$$\sigma_{zo}^f = \sigma_o - \frac{2}{a} \int_0^h \tau_i(z) dz \quad (2.51)$$

bulunur. Şekil 2.4(c)'de matris parçası üzerinde z doğrultusunda kuvvet dengesi yazılırsa,

$$\pi(b^2 - a^2) \sigma_{zo}^m = \int_0^h \tau_i(z) 2\pi a dz$$

$$\sigma_{zo}^m = \frac{2V_f}{aV_m} \int_0^h \tau_i(z) dz \quad (2.52)$$

bulunur. (2.49) ve (2.50) ile bulunan ifadeler (2.4) denkleminde yerine yerleştirilir.

$$\frac{1}{E_f} \left(\sigma_o - \frac{2}{a} \int_0^h \tau_i(z) dz \right) = \frac{1}{E_m} \frac{2V_f}{aV_m} \int_0^h \tau_i(z) dz$$

Buradan σ_o çekilebilir.

$$\sigma_o = \frac{2}{a} \frac{E_c}{V_m E_m} \int_0^h \tau_i(z) dz \quad (2.53)$$

Şekil 2.4 (d) 'deki dz uzunluklu lif parçasında z doğrultusunda kuvvet dengesini yazılırsa,

$$\pi a^2 d\sigma_z^f(z) - 2\pi a \tau_i(z) dz = 0$$

$$\frac{d\sigma_z^f(z)}{dz} = \frac{2}{a} \tau_i(z) \quad (2.54)$$

bulunur. Şekil 2.4 (e)'deki dz uzunluklu silindir parçasının z doğrultusundaki kuvvet dengesi yazılırsa,

$$2\pi a \tau_i(z) dz + d\sigma_z^m(z) \pi(b^2 - a^2) = 0$$

$$\frac{d\sigma_z^m(z)}{dz} = -\frac{2}{a} \frac{V_f}{V_m} \tau_i(z) \quad (2.55)$$

bulunur. Lif ve matrisin tüm çalışmalarda olduğu gibi elastik davrandığı kabul edildiğinden (2.2) ve (2.3) bağıntıları bu çalışmada da kullanılmıştır.

s, lif ve matris arasında $r=a$ 'daki rölatif yer değiştirme olduğundan,

$$s(z) = v_z^f(z) - v_z^m(z)$$

yazılabilir. Bu ifadenin z 'ye göre türevi alınıp, (2.2) ve (2.3) teki türevleri yerlerine yerleştirilir.

$$\frac{ds(z)}{dz} = \frac{dv_z^f(z)}{dz} - \frac{dv_z^m(z)}{dz} = \varepsilon_z^f(z) - \varepsilon_z^m(z)$$

$$\frac{ds(z)}{dz} = \frac{\sigma_z^f(z)}{E_f} - \frac{\sigma_z^m(z)}{E_m}$$

ve bir kez daha z 'ye göre türevi alınır,

$$\frac{d^2s(z)}{dz^2} = \frac{1}{E_f} \frac{d\sigma_z^f(z)}{dz} - \frac{1}{E_m} \frac{d\sigma_z^m(z)}{dz}$$

bulunur. (2.54) ve (2.55) ile bulunan $\frac{d\sigma_z^f(z)}{dz}$ ve $\frac{d\sigma_z^m(z)}{dz}$ ifadeleri bu denklemde yerlerine yerleştirilir.

$$\frac{d^2s(z)}{dz^2} = \frac{2}{a} \frac{E_c}{V_m E_f E_m} \tau_i(v) \quad (2.56)$$

(2.48) ile verilen arayüzey bünye ifadesi (2.56) denkleminde yerleştirilirse,

$$\frac{d^2s(z)}{dz^2} = \frac{2}{a} \frac{E_c \tau_o}{V_m E_f E_m} \left(1 + \frac{\beta}{2a} s \right)$$

$$\frac{d^2s(z)}{dz^2} - \left(\frac{\omega_o}{2a} \right)^2 s = \frac{\omega_o^2}{2a\beta} \quad (2.57)$$

bulunur. Burada,

$$\omega_o^2 = \frac{4E_c \tau_o \beta}{V_m E_f E_m} \quad (2.58)$$

olarak alınmıştır. (2.57) adi diferansiyel denkleminin çözümü (2.49) ve (2.50) sınır şartları ile aşağıdaki gibidir.

$$s(z) = \frac{2a}{\beta} \left[\cosh\left(\frac{\omega_o}{2a} z\right) - 1 \right] \quad (2.59)$$

Bulunan bu çözümü (2.46) da yerleştirilirse,

$$\tau_i(z) = \tau_o \cosh\left(\frac{\omega_o}{2a} z\right) \quad (2.60)$$

bulunur. $\tau_i(z)$ ifadesi (2.53)'de yerine yerleştirilir.

$$\begin{aligned} \sigma_o &= \frac{2}{a} \frac{E_c \tau_o}{V_m E_m} \int_0^h \cosh\left(\frac{\omega_o}{2a} z\right) dz \\ \sigma_o &= \frac{4}{\omega_o} \frac{E_c \tau_o}{V_m E_m} \sinh\left(\frac{\omega_o}{2a} h\right) \end{aligned} \quad (2.61)$$

(2.59) denkleminde $v=s(z=h)$ ifadesi ile yarım çatlak açıklığı bulunabilir.

$$v = \frac{2a}{\beta} \left[\cosh\left(\frac{\omega_o}{2a} h\right) - 1 \right] \quad (2.62)$$

(2.61) ve (2.62) denklemleri arasında h yok edilirse σ_o - v köprülenme ilişkisi bulunur.

$$\cosh\left(\frac{\omega_o}{2a} h\right) = 1 + \frac{\beta}{2a} v$$

$$\sinh\left(\frac{\omega_o}{2a} h\right) = \frac{\omega_o V_m E_m}{4E_c \tau_o} \sigma_o$$

$$\left(1 + \frac{\beta}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\omega_o V_m E_m}{4E_c \tau_o} \sigma_o\right)^2 = 1$$

$$\sigma_o = \frac{4\tau_o E_c}{\omega_o V_m E_m} \sqrt{\left(\beta \frac{v}{2a} + 1\right)^2 - 1}$$

Bu ifadede (2.58) ile tanımlanan ω_o değeri yerine yerleştirilirse,

$$\sigma_o = \sqrt{\frac{4\tau_o E_f E_c}{\beta V_m E_m} \left[\left(\beta \frac{v}{2a} + 1\right)^2 - 1 \right]} \quad (2.63)$$

bulunur. Lin ve Li (1997)'nin (2.63) ile sundukları σ_o -v ilişkisinde karekök içerisindeki ifade düzenlendikten sonra $\beta=0$ konursa Marshall ve diğ. (1985)'nin sundukları (2.46) ifadesi elde edilebilir.

Literatürde, sürtünmeli kayma esnasında arayüzey kayma gerilmesi ifadesini Coulomb sürtünmesi kanununa uyacak şekilde modelleyerek veya bu modeli kullanarak birçok çalışma yapılmıştır. (Hsueh, 1990, 1991,1993), (Hsueh ve diğ, 1993, 1997), (Hutchinson ve Jensen, 1990), (Chai ve Mai, 2001), (Chiang, 2001), (Steif, 1984), (McMartney, 1989), (Nayfeh ve Abdelrahman, 1998), (Honda ve diğ, 1998), (Budiansky ve diğ., 1986), (Fu ve diğ., 2000). Genel olarak bu çalışmalarda kullanılan lif-matris arayüzey kayma gerilmesi ifadesi (2.62)'de verildiği gibidir.

$$\tau_i(z) = \tau_{rz}(z) = \mu q(z) \quad (2.64)$$

Burada μ , arayüzey sürtünme katsayısıdır. (2.32) ifadesindeki $q(z)$ terimi, sürtünmeli kayma esnasında, lif-matris arayüzeyinde lif eksenine dik, radyal doğrultuda karşılıklı lif ve matris yüzeylerine etkiyen gerilmedir ve içeriği problemin tipini belirler. $q(z)$ ifadesi için, Hsueh (1990, 1991, 1993), Hsueh ve diğ. (1993), Chiang (2001) çalışmalarında aşağıdaki ifadeyi kullanılmışlardır.

$$q(z) = \sigma_c + \sigma_p(z) \quad (2.65)$$

Burada, σ_c , lif ve matrisin ısı genleşme katsayılarının farklı olmasından dolayı, üretimin soğutulma aşamasında termomekanik uyumsuzluk sonucunda oluşan radyal

doğrultudaki ilkel gerilmedir. $\sigma_p(z)$ ise life uygulanan eksenel gerilmeden kaynaklanan radyal doğrultudaki gerilmedir. . Lif uzunluğu boyunca değişir ve lifteki $\sigma_f(z)$ gerilmesi ile orantılıdır. Literatürde, (2.65) ifadesindeki $\sigma_p(z)$ terimi Poisson etkisi diye adlandırılmıştır (Chiang, 2001). $q(z)=\tau_0$ sabit alınırsa, Marshall ve diğ. (1985) 'nin çalışmaları ile aynı noktaya varılır.

Honda ve diğ. (1998), lifin matrise göre yer değiştirmesinin sürtünmeli köprülenmeye etkisini araştırmak için yaptıkları bu çalışmanın bir bölümünde, lif yüzeyinin pürüzlülüğünün etkisini ifade etmek için, (2.64) denklemini $q(z)=\tau_0 + \alpha v$ ifadesi ile kullanmışlardır. Honda ve diğ. (1998) ve Lin ve Li (1997)'nin çalışmaları önerdikleri ilişki açısından bizi aynı sonuca götürür.

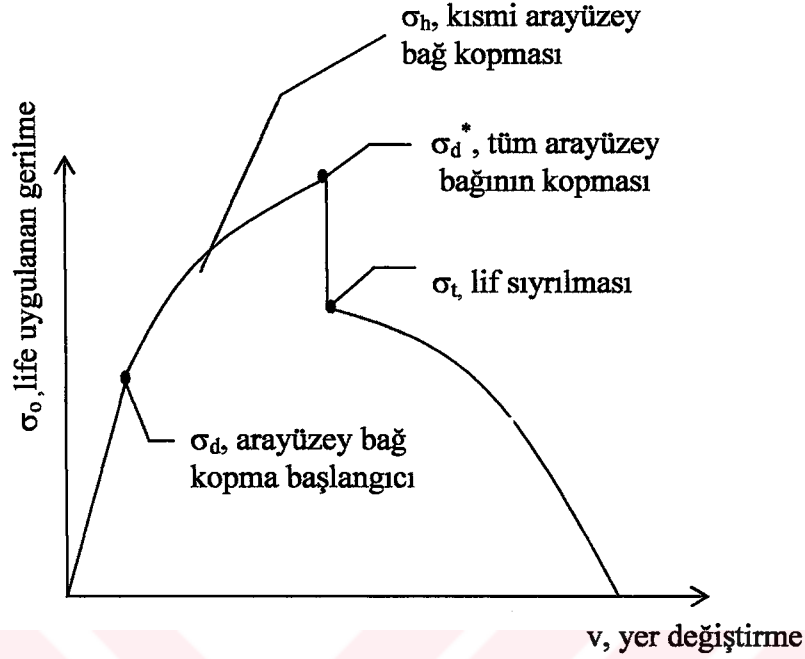
Burada, Poisson etkisi gözönüne alınarak yapılan çalışmalardan ikisi sunulacaktır (Hsueh,1990), (Chiang, (2001)).

Hsueh (1990), bu çalışmasında Şekil 2.4'te verilen şematik test eğrisini üç bölgeye ayırarak bir anlamda köprülenme tiplerini bir kez daha tanımlama fırsatı vermiştir. Grafikteki geçiş gerilme değerlerinden σ_d , lif-matris arayüzeyindeki bağın kopmaya başlaması yani sürtünmeli kaymanın başlaması için gerekli life uygulanan gerilme değeridir. σ_d^* ise h kayma uzunluğunun tüm lif-matris arayüzeyine yani lif uzunluğuna ulaşması için life uygulanan gerekli gerilme değeridir. σ_t ise lifin matris içerisinden sıyrılıp çıkması için gerekli en küçük gerilme değeridir. Hsueh (1990), sürtünmeli köprülenme tanımına karşı gelen $\sigma_d < \sigma_0 < \sigma_d^*$ aralığında lif-matris arayüzeyindeki kayma gerilmesini Coulomb sürtünme yasasına uyacak şekilde problemi ele almıştır.

Hsueh (1990)'in bu çalışmasında kullanılan koordinat takımı Şekil 2.5'te verilmiştir. Bu çalışmada matristeki eksenel gerilme $\sigma_z^m(r,z)$, eksenel ve radyal doğrultuda değiştiği kabul edilmiştir. Lifteki eksenel gerilme $\sigma_z^f(z)$, eksenel doğrultuda değişmektedir.

Lif-matris arayüzeyinde z ve r eksenlerine dik teğet doğrultuda lif ve matrisin şekil değiştirmelerinin eşit olduğu kabul edilmiştir.

$$\epsilon_0^f(r=a) = \epsilon_0^m(r=a) \quad (2.66)$$



Şekil 2.5. Matrise gömülü lif uygulanan gerilme altında yer değiştirme sini gösteren şematik grafik (Hsueh, 1990).

Aralarında radyal basınç olan lif ve matris modelinde Poisson etkisini analiz etmek için elastisite teorisinde ilkel gerilmeye maruz içiçe geçmiş halka probleminin çözümü kullanılmıştır. Bu çözüm aşağıdaki gibi uygulanmıştır (Timoshenko ve Goodier, 1970).

Dönel simetri halinde $\sigma_r(r=a) = -p_i$ iç ve $\sigma_r(r=b) = -p_o$ dış radyal basınca maruz içi boş silindire ait gerilme ifadeleri aşağıdaki gibidir.

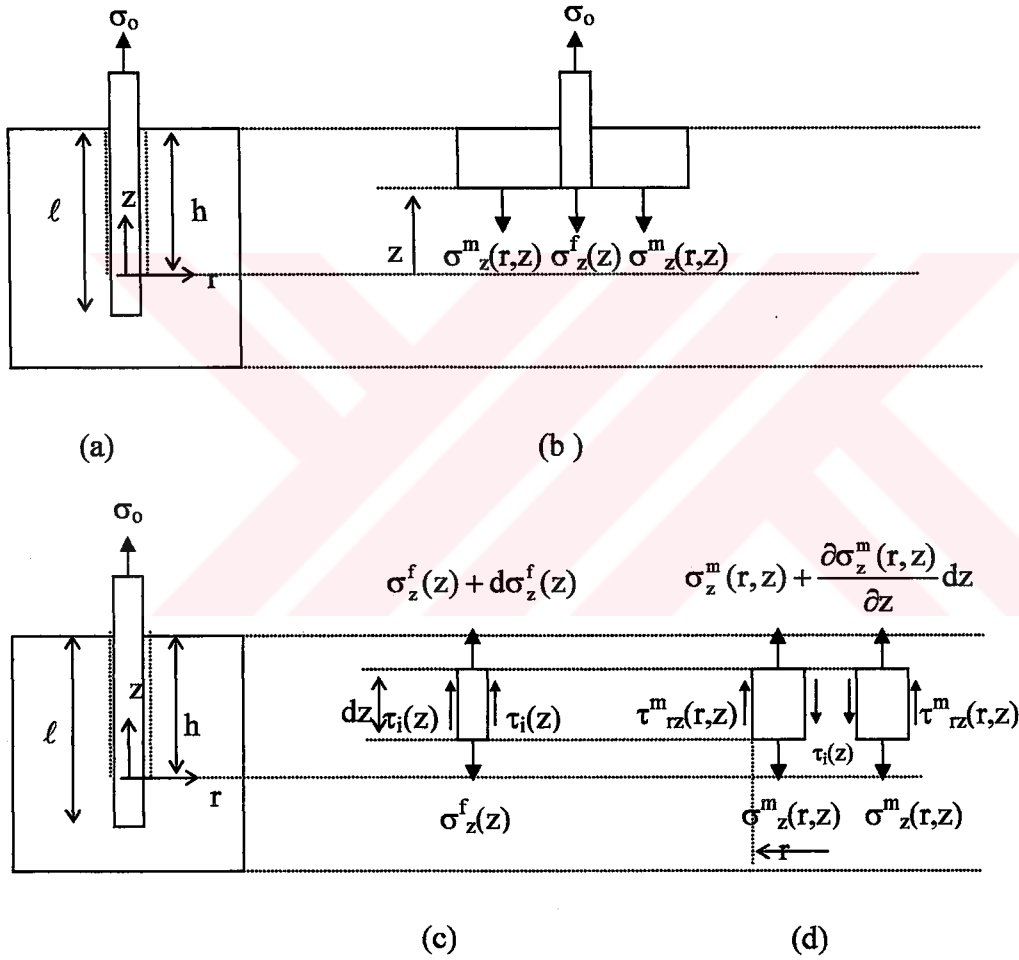
$$\sigma_\theta = \frac{a^2(b^2 + r^2)p_i - b^2(r^2 + a^2)p_o}{r^2(b^2 - a^2)} \quad (2.67)$$

$$\sigma_r = -\frac{a^2(b^2 - r^2)p_i + b^2(r^2 - a^2)p_o}{r^2(b^2 - a^2)} \quad (2.68)$$

$\sigma_r(r=a) = -p_o$ dış radyal basınca maruz silindire ait gerilme ifadeleri ise sabit değerler alır (Timoshenko ve Goodier,1970).

$$\sigma_\theta = \sigma_r = -p_o \quad (2.69)$$

Hsueh(1990), bu çalışmasında kaymanın olmadığı lif-matris arayüzeyi olan $r=a$ 'da, $(\ell-h)$ uzunluğu boyunca lif ve matristeki aksenal normal gerilmenin sabit olduğunu kabul etmiştir ve yine bu bölgede liften matrise elastik yük aktarımını ihmal etmiştir.



Şekil 2.6. (a) Hsueh (1990)'in sürtünmeli köprülenme analizi için kullandığı koordinat takımı, (b) $(h-z)$ uzunluklu model parçası, (c) dz uzunluklu lif parçası, (d) dz uzunluklu ve $(r-a)$ genişlikli matris parçası.

Yapılan kabuller doğrultusunda bu çalışma için de (2.1), (2.2) ve (2.3) bağıntıları aynen geçerlidir ve kullanılacaktır.

Şekil 2.6 (b)'deki model parçası üzerinde z doğrultusunda kuvvet dengesi yazılırsa, (2.7) bağıntısı bu çalışma için tekrar elde edilir.

Şekil 2.6 (c)'deki dz uzunluklu lif parçası üzerinde z doğrultusunda kuvvet dengesi yazılırsa, (2.11) bağıntısı bu çalışma için tekrar elde edilir.

Şekil 2.6(d)'deki dz uzunluklu ve (r-a) genişlikli silindir parçasının z doğrultusundaki kuvvet dengesi yazılırsa, (2.12) bağıntısı bu çalışma için tekrar elde edilir.

Bu çalışma için elastik köprülenme için yapılan aynı işlemler yapılarak (2.13-17) bağıntıları elde edilmiştir. Fakat bundan sonraki işlemlerde arayüzeyde kayma olduğundan, $r=a$ 'da lif ve matristeki eksenel gerilme değerleri eşit alınmamıştır.

$$\sigma_{za}^m(r=a, z) = \sigma_{za}^m(z) = E_m \frac{dv_{za}^m(z)}{dz} \quad (2.70)$$

(2.17) ve (2.69) ifadelerini kullanılarak (2.16) ifadesi tekrar düzenlenirse,

$$\sigma_z^m(r, z) = \sigma_{za}^m(z) + \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)} (\sigma_{zb}^m(z) - \sigma_{za}^m(z)) \quad (2.71)$$

$$\sigma_z^m(r, z) = \sigma_{za}^m(z) + \frac{2 \ln(r/a)}{\ln(V_f)} (\sigma_{za}^m(z) - \sigma_{zb}^m(z))$$

bulunur. (2.7) denkleminde (2.71) ile bulunan $\sigma_z^m(r, z)$ değeri yerleştirilirse,

$$\sigma_z^f(z) + \frac{2}{a^2} \int_a^b \sigma_z^m(r, z) r dr = \sigma_o \quad (2.7)$$

$$\sigma_z^f(z) + \frac{2}{a^2} \int_a^b \left[\sigma_{za}^m(z) + \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)} (\sigma_{zb}^m(z) - \sigma_{za}^m(z)) \right] r dr = \sigma_o$$

$$\sigma_z^f(z) + \frac{2[\sigma_{zb}^m(z) - \sigma_{za}^m(z)]}{a^2 \ln(b/a)} \int_a^b \ln(r/a) r dr + \frac{2\sigma_{za}^m(z)}{a^2} \int_a^b r dr = \sigma_o$$

$$\sigma_z^f(z) + \frac{2[\sigma_{zb}^m(z) - \sigma_{za}^m(z)]}{a^2 \ln(b/a)} \left[-\frac{b^2 ((\ln(V_f)) + V_m)}{4} \right] + \frac{2\sigma_{za}^m(z)}{a^2} \left[\frac{b^2 V_m}{2} \right] = \sigma_o$$

$$\sigma_z^f(z) + \frac{((\ln(V_f)) + V_m)}{V_f \ln(V_f)} [\sigma_{zb}^m(z) - \sigma_{za}^m(z)] + \frac{V_m}{V_f} \sigma_{za}^m(z) = \sigma_o$$

bulunur. Buradan $\sigma_{zb}^m(z)$ ifadesi çekilirse,

$$\sigma_{zb}^m(z) = \frac{(V_f \ln(V_f) + V_m) \sigma_{za}^m(z) + V_f \ln(V_f) (\sigma_o - \sigma_z^f(z))}{\ln(V_f) + V_m} \quad (2.72)$$

bulunur. (2.11) denkleminde (2.13) ile bulunan $\tau_i(z)$ değeri yerleştirilir.

$$\frac{d\sigma_z^f(z)}{dz} = -\frac{2}{a} \tau_i(z) \quad (2.11)$$

$$\tau_i(z) = \frac{E_m (v_{zb}^m(z) - v_{za}^m(z))}{2a(1+v_m) \ln(b/a)} = -\frac{E_m (v_{zb}^m(z) - v_{za}^m(z))}{2a(1+v_m) \ln(V_f)} \quad (2.13)$$

$$\frac{d\sigma_z^f(z)}{dz} = \frac{2E_m (v_{zb}^m(z) - v_{za}^m(z))}{a^2 (1+v_m) \ln(V_f)}$$

ve z değişkenine göre türevi alınır,

$$\frac{d^2\sigma_z^f(z)}{dz^2} = \frac{2E_m}{a^2 (1+v_m) \ln(V_f)} \left(\frac{dv_{zb}^m(z)}{dz} - \frac{dv_{za}^m(z)}{dz} \right) \quad (2.73)$$

bulunur. (2.2) ve (2.3) denklemlerinden faydalanılarak aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$\sigma_{za}^m(z) = E_m \frac{dv_{za}^m(z)}{dz} \quad \text{ve} \quad \sigma_{zb}^m(z) = E_m \frac{dv_{zb}^m(z)}{dz}$$

Bu ifadeler (2.73)'te yerleştirilirse,

$$\frac{d^2\sigma_z^f(z)}{dz^2} = \frac{2(\sigma_{zb}^m(z) - \sigma_{za}^m(z))}{a^2 (1+v_m) \ln(V_f)}$$

bulunur. (2.72) ile bulunan $\sigma_{zb}^m(z)$ bu denklemde yerleştirilirse,

$$\frac{d^2\sigma_z^f(z)}{dz^2} = \frac{2}{a^2 (1+v_m) (\ln(V_f) + V_m)} [V_f (\sigma_o - \sigma_z^f(z)) - V_m \sigma_{za}^m(z)] \quad (2.74)$$

bulunur. Kayan arayüzey boyunca lif ve matris yüzeyleri temas halindedir ve $r=a$ 'da lif ve matrisin teğet doğrultudaki şekil değiştirmelerinin eşit olması gerekir. (2.66) ile verilen sınır koşulu sağlatılmalıdır.

$$\epsilon_{\theta}^f(r=a) = \epsilon_{\theta}^m(r=a).$$

$$\frac{1}{E_f} [\sigma_{\theta}^f - \nu_f (\sigma_r^f + \sigma_z^f)] = \frac{1}{E_m} [\sigma_{\theta}^m - \nu_m (\sigma_r^m + \sigma_z^m)] \quad (2.75)$$

Matriste $r = a$ 'da radyal, teğetsel ve eksenel doğrultudaki gerilme bileşenleri (2.67) ve (2.68) ifadelerinden faydalananarak, sırasıyla

$$\sigma_r^m = \sigma_p, \quad \sigma_{\theta}^m = -\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} \sigma_p = -\frac{1 + V_f}{V_m} \sigma_p \quad \text{ve} \quad \sigma_z^m = \sigma_{za}^m$$

olarak alınabilir. Lifteki radyal, teğetsel ve eksenel doğrultudaki gerilme bileşenleri, (2.69) ifadesinden faydalananarak, sırasıyla $\sigma_r^f = \sigma_p$, $\sigma_{\theta}^f = \sigma_p$ ve σ_z^f olarak alınabilir.

Bulunan bu gerilme ifadeleri (2.75) eşitliğinde yerleştirilirse,

$$\frac{1}{E_f} [\sigma_p - \nu_f (\sigma_p + \sigma_z^f)] = \frac{1}{E_m} \left[-\frac{1 + V_f}{V_m} \sigma_p - \nu_m (\sigma_p + \sigma_{za}^m) \right]$$

bulunur. Buradan σ_{za}^m gerilmesi çekilirse,

$$\sigma_{za}^m = \frac{1}{\nu_m} \left[\frac{\nu_f E_m}{E_f} \sigma_z^f - D \sigma_p \right] \quad (2.76)$$

bulunur. Burada,

$$D = \frac{1 + V_f}{V_m} + \nu_m + \frac{E_m}{E_f} (1 - \nu_f) \quad (2.77)$$

olarak alınmıştır. (2.11) denge denkleminde (2.64) ile verilen $\tau_i(z)$ ifadesi yerleştirilirse,

$$\frac{d\sigma_z^f(z)}{dz} = -\frac{2\mu}{a}(\sigma_c + \sigma_p)$$

bulunur. Buradan σ_p çekilirse,

$$\sigma_p = -\left(\sigma_c + \frac{a}{2\mu} \frac{d\sigma_z^f(z)}{dz}\right) \quad (2.78)$$

bulunur. (2.74) denkleminde σ_p yerine yerleştirilirse,

$$\sigma_{za}^m = \frac{1}{v_m} \left[\frac{v_f E_m}{E_f} \sigma_z^f + D \left(\sigma_c + \frac{a}{2\mu} \frac{d\sigma_z^f(z)}{dz} \right) \right] \quad (2.79)$$

bulunur. (2.76) denkleminde (2.79) ile bulunan σ_{za}^m ifadesini yerine yerleştirilirse,

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma_z^f(z)}{dz^2} &= \frac{2}{a^2(1+v_m)(\ln(V_f)+V_m)} \left[V_f(\sigma_o - \sigma_z^f(z)) - \frac{V_m}{v_m} \left[\frac{v_f E_m}{E_f} \sigma_z^f + D \left(\sigma_c + \frac{a}{2\mu} \frac{d\sigma_z^f(z)}{dz} \right) \right] \right] \\ \frac{d^2\sigma_z^f(z)}{dz^2} &= \frac{2}{a^2(1+v_m)(\ln(V_f)+V_m)} \left[V_f\sigma_o - V_f\sigma_z^f(z) - \frac{V_m}{v_m} \frac{v_f E_m}{E_f} \sigma_z^f - \frac{V_m D}{v_m} \sigma_c - \frac{V_m D}{v_m} \frac{a}{2\mu} \frac{d\sigma_z^f(z)}{dz} \right] \\ \frac{d^2\sigma_z^f(z)}{dz^2} &+ \left[\frac{2}{a^2(1+v_m)(\ln(V_f)+V_m)} \left(\frac{V_m D}{v_m} \frac{a}{2\mu} \right) \right] \frac{d\sigma_z^f(z)}{dz} \\ &+ \left[\frac{2}{a^2(1+v_m)(\ln(V_f)+V_m)} \left(V_f + \frac{V_m}{v_m} \frac{v_f E_m}{E_f} \right) \right] \sigma_z^f(z) = \frac{2}{a^2(1+v_m)(\ln(V_f)+V_m)} \left[V_f\sigma_o - \frac{V_m D}{v_m} \sigma_c \right] \\ \frac{d^2\sigma_z^f(z)}{dz^2} &+ A_1 \frac{d\sigma_z^f(z)}{dz} + A_2 \sigma_z^f(z) = A_3 \end{aligned} \quad (2.80)$$

adi diferansiyel denklemi elde edilir. Burada,

$$A_1 = \frac{V_m D}{a\mu v_m(1+v_m)(\ln(V_f)+V_m)} \quad (2.81)$$

$$A_2 = \frac{2}{a^2(1+\nu_m)(\ln(V_f) + V_m)} \left[V_f + V_m \frac{\nu_f}{\nu_m} \frac{E_m}{E_f} \right] \quad (2.82)$$

$$A_3 = \frac{2}{a^2(1+\nu_m)(\ln(V_f) + V_m)} \left[V_f \sigma_o - \frac{V_m D}{\nu_m} \sigma_c \right] \quad (2.83)$$

olarak alınmıştır. (2.80) diferansiyel denklemini çözmek için gerekli sınır koşulları;

$$\sigma_z^f(z=0) = \sigma_d \quad (2.84)$$

$$\sigma_z^f(z=h) = \sigma_o \quad (2.85)$$

olarak alınmıştır. (2.84) sınır koşulunda kullanılan σ_d değerini hesaplamak için (2.34) ile verilen $\tau_i(z)$ ifadesinden faydalanılmıştır. Arayüzey gerilmesinin maksimum değeri $z=\ell$ 'de yani lifin matrise girdiği yerde oluşur. Bu noktada oluşan kayma gerilmesi değeri, τ_s lif-matris arayüzeyinin kayma dayanımına ulaştığında kayma başlar. İlk kaymayı başlatacak life uygulanan gerilme değeri olan σ_d değerini bulabilmek için (2.34) ifadesinde $\sigma_o = \sigma_d$ ve $\tau_i(z=\ell) = \tau_s$ yerleştirilmelidir.

$$\tau_s = - \sqrt{\frac{1}{2(1+\nu_m)E_c E_f (-\ln(V_f) - V_m)}} \left[E_m V_m \frac{\cosh(n\ell)}{\sinh(n\ell)} + \frac{E_f V_f}{\sinh(n\ell)} \right] \sigma_d$$

buradan σ_d çekilirse;

$$\sigma_d = - \frac{\sqrt{2(1+\nu_m)E_c E_f (-\ln(V_f) - V_m)}}{E_m V_m \coth(n\ell) + \frac{E_f V_f}{\sinh(n\ell)}} \tau_s \quad (2.86)$$

bulunur. (2.82) ve (2.83) sınır koşulları altında, (2.78) denkleminin çözümü

$$\sigma_z^f = \frac{A_3}{A_2} \{1 - \exp(m_2 z)\} + B \{\exp(m_1 z) - \exp(m_2 z)\} + \sigma_d \exp(m_2 z) \quad (2.87)$$

olarak bulunur. Burada,

$$m_1 = -\frac{A_1 + \sqrt{A_1^2 - 4A_2}}{2} \quad (2.88)$$

$$m_2 = -\frac{A_1 - \sqrt{A_1^2 - 4A_2}}{2} \quad (2.89)$$

$$B = \frac{\sigma_o - \sigma_d \exp(m_2 h) - (A_3/A_2)(1 - \exp(m_2 h))}{\exp(m_1 h) - \exp(m_2 h)} \quad (2.90)$$

olarak verilmiştir. (2.11) ifadesinden faydalanarak $\tau_i(z)$ ifadesi bulunabilir. Bunun için (2.87) ile bulunan $\sigma_z^f(z)$ nin türevi alınıp yerine konulur.

$$\tau_i(z) = -\frac{a}{2} \left\{ -\frac{A_3}{A_2} m_2 \exp(m_2 z) + B(m_1 \exp(m_1 z) - m_2 \exp(m_2 z)) + \sigma_d m_2 \exp(m_2 z) \right\} \quad (2.91)$$

(2.87) ve (2.91) ifadelerinden h değeri elde edilebilir. Bunun için, ($r=a$, $z=h$) çevresinde $\sigma_{zz}^m(z=h) = 0$ serbest yüzey koşulu ve $\sigma_z^f(z=h) = \sigma_o$ koşulu ile (2.66) sınır koşulu tekrar yazılmalıdır.

$$\frac{1}{E_f} [\sigma_p - \nu_f (\sigma_p + \sigma_o)] = \frac{1}{E_m} \left[-\frac{1 + \nu_f}{\nu_m} \sigma_p - \nu_m (\sigma_p + 0) \right]$$

Buradan $\sigma_p(z=h)$ gerilmesi çekilirse,

$$\sigma_p(z=h) = \frac{\nu_f E_m}{DE_f} \sigma_o \quad (2.92)$$

bulunur ve bu radyal doğrultudaki gerilme değeri (2.64) denkleminde yerine yerleştirilirse,

$$\tau_i(z=h) = \mu \left(\sigma_o + \frac{\nu_f E_m}{DE_f} \sigma_o \right) \quad (2.93)$$

bulunur. Aynı zamanda (2.91) denkleminde $\tau_i(z=h)$ değeri elde edilebilir. Bu iki ifade eşitlenirse h ile σ_o arasındaki lineer olmayan ilişki aşağıdaki denklem ile bulunabilir.

$$\frac{a}{2} \left\{ \frac{A_3}{A_2} m_2 \exp(m_2 h) - B \{ m_1 \exp(m_1 h) - m_2 \exp(m_2 h) \} - \sigma_d m_2 \exp(m_2 h) \right\} = \mu \left(\sigma_c + \frac{v_f E_m}{D E_f} \sigma_o \right) \quad (2.94)$$

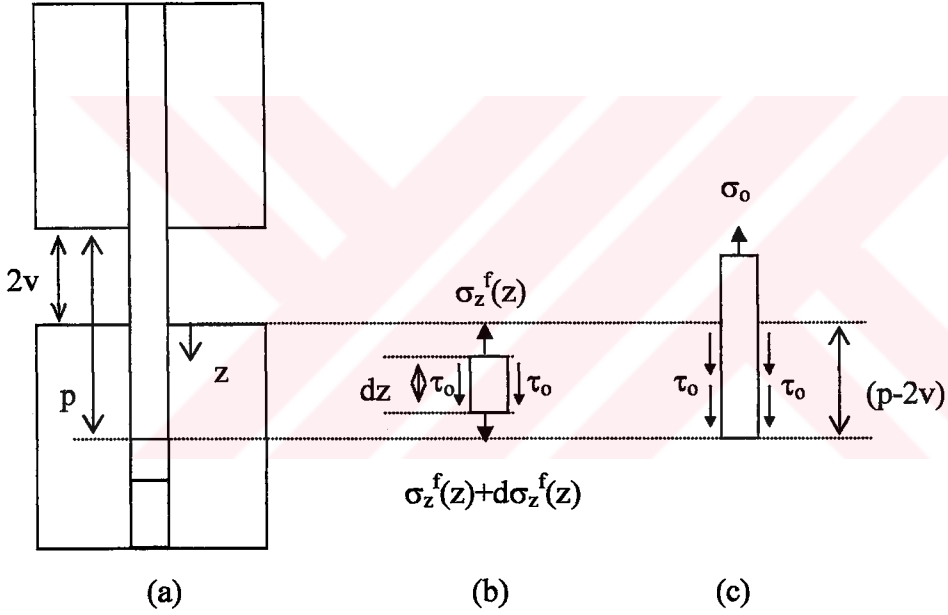
Bu denklem ile her σ_o değerine karşı gelen h kayma uzunluğu hesaplanabilir. Kayma uzunluğu ℓ toplam lif uzunluğuna ulaştığında lif matristen sıyrılıp çıkmaya başlayacaktır. Lifin sıyrılması için gerekli gerilme değeri σ_d^* ile tanımlanacak olursa, ℓ ile arasındaki ilişki (2.94) denkleminde $h=\ell$ ve $\sigma_o = \sigma_d^*$ yerleştirilerek bulunabilir.

Tamamen kayma oluştuktan sonra $z=0$ da $\sigma_d = 0$ olur. (2.94) denkleminde $\sigma_d = 0$ ve $\sigma_o = \sigma_t$ yerleştirilecek olursa sıyrılmanın başlaması için gerekli σ_t gerilmesinin değeri de bulunmuş olur.

Chiang (2001)'ın, sürtünmeli kayma esnasında, lif-matris arayüzeyi boyunca kaymayan uzunluk ($\ell-h$) için de ayrıca elastik yük aktarımını ve kayan uzunluk için Poisson etkisini gözönünde bulundurarak daha detaylı çalışması da literatürde mevcuttur.

2.3. Sıyrılmalı Köprülenme

Lif-matris arayüzeyinde kayma devam ederken, lifteki gerilme değeri lifin kopma dayanımına ulaştığında lifler matrisin içinde kırılırlar ve sıyrılmaya başlarlar. Bu durumda, sıyrılmaya uzunluğu tamamen sıyrılıp çıkana dek, çatlak bir yüzeyinden diğerine lifler yük aktarmaya devam ederler. Sıyrılmaya uzunluğu boyunca, sabit τ_0 sürtünme gerilmesi olduğu kabul edilerek, çatlak boyunca gerilme ve çatlak açıklığı arasındaki bağıntıyı Thouless ve Evans (1988), Şekil 2.7'deki modeli ve koordinat takımını kullanarak elde etmişlerdir. Lifin matris içerisinde koptuktan sonra dışarıda kalan uzunluğu p ile gösterilmiş ve bir malzeme sabiti olduğu kabul edilmiştir.



Şekil 2.7. (a) Thouless ve Evans (1988)'ın sıyrılmalı köprülenme analizi için kullandıkları model, (b) dz uzunluklu lif parçası, (c) $(p-2v)$ uzunluklu lif parçası.

Şekil 2.7(b)'deki dz uzunluklu lif parçası üzerinde z doğrultusunda kuvvet dengesi yazılırsa,

$$d\sigma_z^f(z)\pi a^2 + 2\pi a\tau_0 dz = 0$$

$$\frac{d\sigma_z^f(z)}{dz} = -\frac{2\tau_0}{a}$$

bulunur. Şekil 2.7 'de görülen $\sigma_z^f(z=0) = \sigma_o$ sınır koşulu ile birlikte yukarıdaki adi diferansiyel denklemin çözümü

$$\sigma_z^f(z) = \sigma_o - \frac{2\tau_o}{a} z \quad (2.95)$$

olarak bulunmuştur. Şekil 2.7 (c)' deki lif parçası üzerinde kuvvet dengesi yazılarak, basitçe sıyrılmalı köprülenme bağıntısı elde edilmiştir.

$$\sigma_o \pi a^2 - 2\pi a \tau_o (p - 2v) = 0$$

$$\sigma_o = \frac{2\tau_o}{a} (p - 2v) \quad (2.96)$$

Lin ve Li (1997), matrise gömülü uzunluğu ℓ olan sonlu liflerin kopmadan sıyrıldığı durumu gözönüne alarak sıyrılmalı köprülenme bağıntısını elde etmişlerdir. Bu çalışmada sürtünmeli kayan lifin, kayma uzunluğu tüm gömülü lif uzunluğuna ulaştığı andaki (yani sıyrılmaya başladığı andaki) lifin matrise göre yer değiştirmesi (yani yarım çatlak açıklığı) olan v_{fp} değerini hesaplamak için, (2.62) ifadesinde $h=\ell$ yerleştirmiştir.

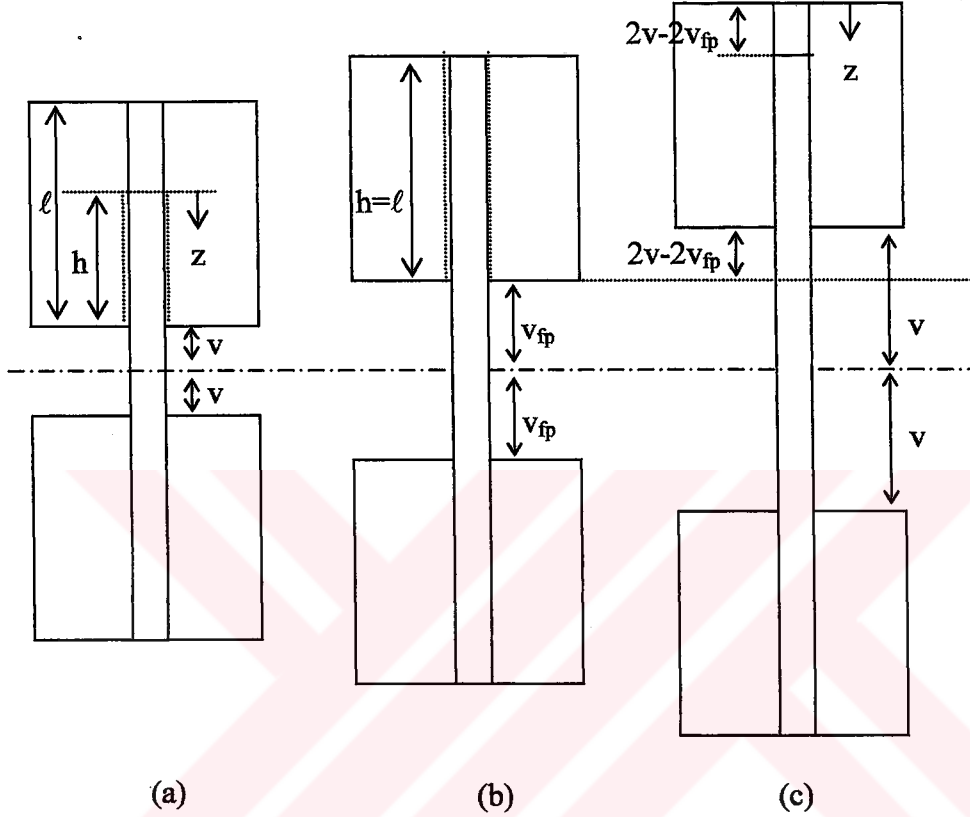
$$v_{fp} = \frac{2a}{\beta} \left[\cosh\left(\frac{\omega_o}{2a} \ell\right) - 1 \right] \quad (2.97)$$

Lin ve Li (1997), analiz yaparken Şekil 2.7(c) 'deki tek taraflı sıyrılmama modelini kullanmışlardır. Burada kullanılan v , lifin matrise göre eksenel yer değiştirmesinin, çatlak yüzeyindeki değeridir. Başka bir deyişle yarım çatlak açıklığıdır.

Şekil 2.7(c) 'de sıyrılmalı köprülenme esnasında lifin matrise göre elastik uzaması ihmal edilerek, aşağıdaki yazılabilir.

$$s(z) = \frac{2a}{\beta} \left[\cosh\left(\frac{\omega_o}{2a} z\right) - 1 \right] + 2(v - v_{fp}) \quad 2(v - v_{fp}) < z < \ell \quad (2.98)$$

Bu ifadedeki ilk terim, lifin matris içerisinde sürtünmeli kayarak çıkmasından dolayı sürtünmenin etkisini ((2.62) denkleminde gelen ifade), ikinci terim ise rijit lifin düzgün kaymasını ifade etmektedir.



Şekil 2.8. Lin ve Li (1997)'nin (a) sürtünmeli köprülenme analizi için kullandıkları model, (b) tüm gömülü lif uzunluğu kaymaya başladığı anı gösteren çizim, (c) tek taraflı sıyrılan lif analizi için kullandıkları model.

Lin ve Li (1997), rölatif yer değiştirme olarak (2.98) ifadesini kullanmak üzere, sürtünmeli köprülenmenin analizi için kullandıkları ifadeleri almışlardır. Yani sırasıyla (2.51), (2.52) ve (2.4) ifadelerinden faydalanarak (2.53) ifadesi tekrar bulunmuştur. (2.53) ifadesinde (2.48) ile bulunmuş olan $\tau_i(s)$ ifadesi yerleştirilmiştir. Bu ifadede s yerine sıyrılmalı köprülenme için (2.98) ile verilen ifade yerleştirilerek integral sınırlarına geçerli olduğu aralık değerleri yerleştirilmiştir.

$$\sigma_o = \frac{2}{a} \frac{E_c}{V_m E_m} \int \tau_i dz \quad (2.53)$$

$$\sigma_o = \frac{2}{a} \frac{E_c \tau_o}{V_m E_m} \int_{2(v-v_{fp})}^{\ell} \left[\cosh \left(\frac{\omega_o z}{2a} + \frac{\beta}{a} (v - v_{fp}) \right) \right] dz$$

bu ifadenin integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} \sigma_o = \frac{4}{\omega_o} \frac{E_c \tau_o}{V_m E_m} & \left[\sinh \left(\frac{\omega_o \ell}{2a} \right) - \sinh \left(\frac{\omega_o (v - v_{fp})}{a} \right) \right] \\ & + \frac{2\beta E_c \tau_o}{a^2 V_m E_m} (v - v_{fp}) (\ell - 2(v - v_{fp})) \end{aligned} \quad (2.99)$$

bulunur. Lin ve Li (1997), sıyrılmalı köprülenme olarak elde ettikleri bu ifadeyi kullanarak, çimento esaslı matrise gömülü polietilen lifli modele ait deney sonuçları ile üstüste düşmesi için gerekli τ_o ve β değerlerini belirlemişlerdir.

3. KOMPOZİT MALZEMELER

Farklı kimyasal ve/veya fiziksel özelliğe sahip en az iki bileşenden oluşturulan malzemelere kompozit denir. Her bir bileşenin iyi özelliklerinden faydalanmak için oluşturulan kompozit malzemelerin üretimi malzeme tasarımı konusunda çalışmayı gerektirir. Matris fazı sürekli bir ortamdır. Matrisi kuvvetlendirmek için içine dağılmış faz ise kısa veya uzun lif, parçacık ve tabaka şeklinde olabilir. Kompozit tipleri genellikle matris malzemesine göre polimer, metal ve seramik matris kompozitler şeklinde sınıflandırılırlar. Herhangibir matrisin kuvvetlendirildiği malzeme polimer, metal veya seramik olabilir (Chawla, 1993), (Hull ve Clyne, 1996).

Bazı önemli polimer, metal ve seramik çeşitlerinin, yapı bileşenleri olarak servis verebilecekleri en büyük sıcaklık değerleri Tablo 3.1’de verilmiştir.

Tablo 3.1. Polimerler, metaller ve seramiklerin kullanılabilir en büyük sıcaklık değerleri (Chawla,1993).

	Malzeme	En büyük servis sıcaklığı(°C)
Polimer	Termoset	250
	Termoplastik	375
Metal	Alüminyum	250
	Paslanmaz çelik	750
	Süper alaşım	1050
Seramik	Silisyum Nitrit	1350
	Silisyum Karbit	1350
	Alumina	1550

Bu tablodan çok yüksek sıcaklıklarda kullanılabilen tek malzeme sınıfının seramikler olduğu açıkça görülmektedir. Seramiklerin, metallere ve polimerlere göre sertliği,

dayanımı, elastisite modülü daha yüksek; yoğunluğu, sıcaklık genleşme katsayısı, ısı iletkenliği ,elektriksel iletkenliği daha düşüktür. Özellikle yoğunluğunun ve sıcaklık genleşme katsayısının düşük olması nedeniyle, roket ağız, otomobil motorları, kesme aletleri gibi çevre koşulları zor olan uygulamalarda tercih edilmektedirler.

Seramikler, metal ve ametal elemanlardan oluşan inorganik bileşiklerdir. Bunlar doğada kayaların dış etkilerle parçalanması sonucu meydana gelen kil, kaolen ve benzeri maddeleri yüksek sıcaklıkta pişirilmesiyle elde edilirler. Uygulamada çok kullanılan cam, tuğla, kiremit, taş, beton, aşındırma tozları, porselen ve refrakter malzemeler bu sınıfa girer.

Tablo 3.2. Bazı malzemelerin kırılma tokluk değerleri (K_{Ic}) (Chawla, 1993).

	Malzeme	$K_{Ic}(MPa\sqrt{m})$
Polimer	Polietilen	1-2
	Naylon	3
	Epoksi, Polyester	0.5
Metal	Saf metaller (Bakır, Nikel, Alüminyum)	100-300
	Alüminyum alaşımları	20-50
	Titanyum alaşımları	50-100
	Düşük Karbonlu Çelik	50
	Dökme Demir	4-10
Seramik	Sodalime cam	0.5-1
	Magnezyum Oksit (MgO)	3
	Alümina (Al_2O_3)	1-3
	Silisyum Karbit (SiC)	2.2-3.4
	Silisyum Nitrit (Si_3N_4)	3-5

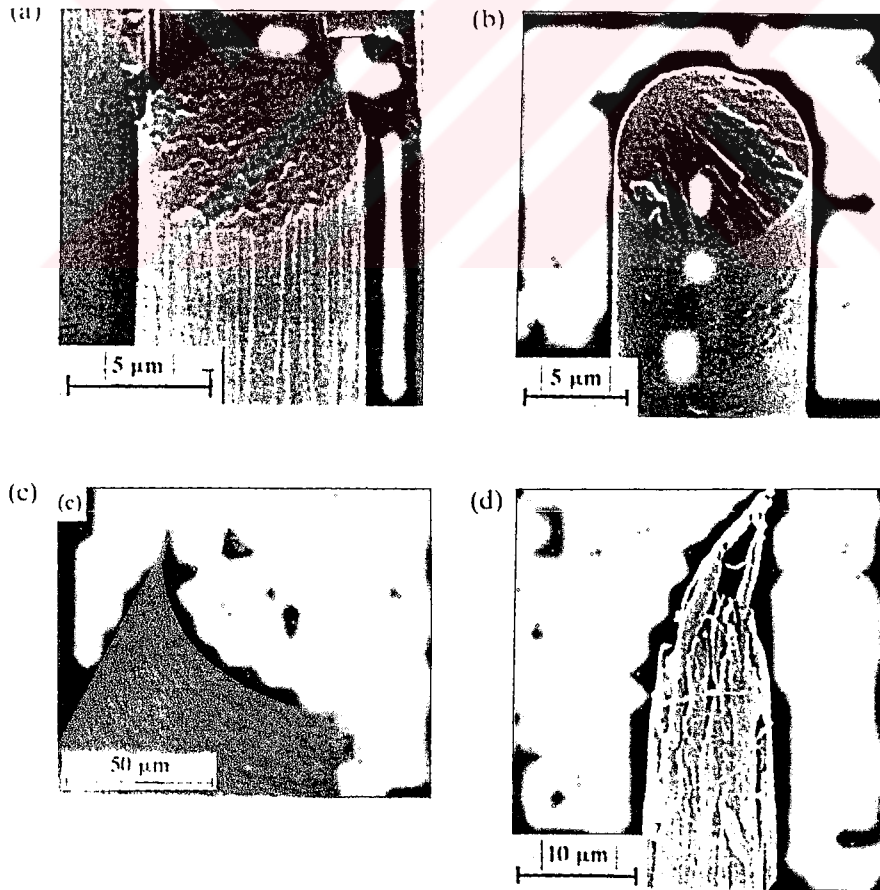
Seramiklerin en büyük dezavantajı, diğer malzemelere göre düşük kırılma tokluğuna (K_{Ic}) sahip olmalarıdır. Seramiklerin mukavemetleri, çatlak, boşluk gibi içerdikleri süreksizliklerin varlığı ve boyutuna karşı yüksek derecede hassasiyete sahiptirler. Bu, seramiklerin kusurlara karşı toleransının çok az olduğu anlamına gelir. Tablo 3.2’de bazı malzemelerin kırılma tokluğu değerleri verilmektedir.

Seramik malzeme sınıfına ait kırılma tokluğu değerleri aralığının düşük olduğu görülmektedir. Diğer iyi özelliklerinden faydalanılabilmesi için tokluklarının artırılması gerekmektedir. Bu amaca ulaşmak için, sürekli lifler, kıllar veya

parçacıklar gibi kuvvetlendirici malzemeler içeren seramik kompozitleri tasarlamak önemli yollardan biridir. Kuvvetlendiricilerin varlığı, lif-matris arayüzeyi ayrışması, çatlak açılması, lif köprülenmesi ve lif sıyrılması gibi enerjiyi yutan olayları da birlikte getirmesi ile malzemenin tokluğunun artmasını sağlar.

Alumina'nın yoğunluğu 3.9gr/cm^3 , ergime sıcaklığı 2050°C olup, Silisyum Karbit'in yoğunluğu 3.2gr/cm^3 tür. Silikon Karbit, 1960'lı yıllardan bu yana lif olarak kullanılabilir. Silikon Karbit ve Alumina çok sert ve aşındırıcı malzemelerdir. Aşınma ve kimyasal etkilerin bulunduğu çevre koşullarına karşı mükemmel dirence sahiptirler. Silisyum ve Karbon dünya üzerinde en bol rastlanan elementlerden ikisi olmasına rağmen, Silisyum Karbit tabiatta bulunmaz. Çeşitli yöntemlerle üretilirler.

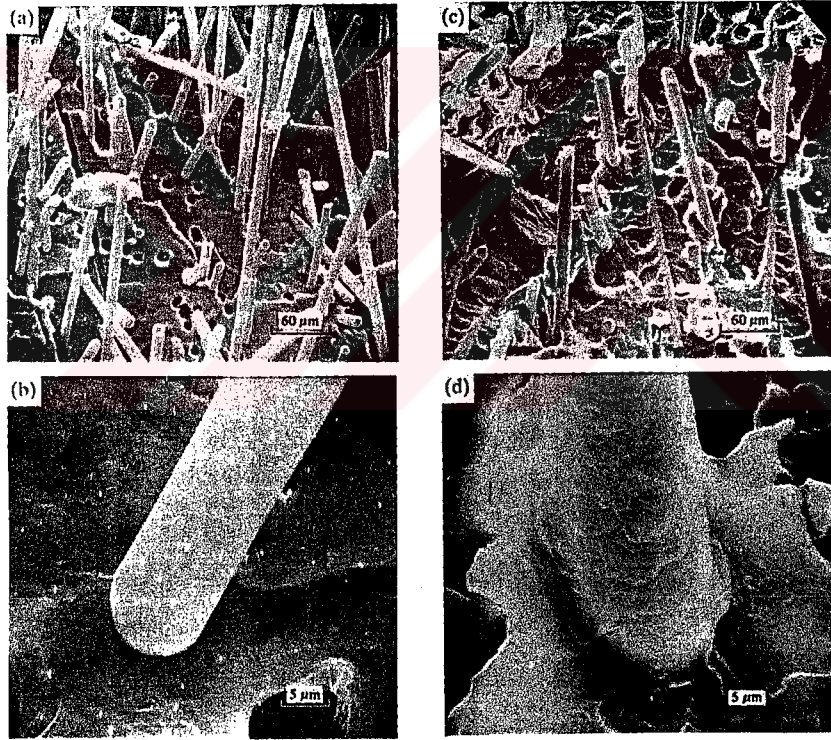
Lifler çatlak etrafında yük aktarırken malzeme özelliklerine göre farklı davranış gösterirler. Şekil 3.1'de karbon, cam, SiC ve aramid liflerinin aksenal yükleme altında koptuktan sonraki resimleri görülmektedir.



Şekil 3.1. (a) Karbon, (b) cam, (c) Silisyum Karbit ve (d) Aramid liflerinin çekme altında koptuktan sonra elektron mikroskop resimleri (Hull ve Clyne, 1996).

Matris içerisinde sıyrılmaya başlayan lifler malzeme tipine, şekline veya kaplamasına göre kompozitin iyileşmesini sağlayan farklı enerji sarfeden davranışlar gösterirler. Örneğin polipropilen lifler sıyrılırken lifciklere ayrılarak sıyrılırlar. Arayüzey bağına sağlamlaştırmak için çeşitli lifler plazma ile kaplanmakta, dalgalı üretilmekte veya uçları kanca yapılmaktadır.

Lif-matris arayüzey özelliğinin etkisinin görülmesi için Şekil 3.2’de kısa cam lifler içeren enjeksiyonla şekil verilmiş polipropilenin çatlak yüzeylerinin elektron mikroskobu resimleri verilmiştir. Şekil 3.2(c-d)’de arayüzey bağı kuvvetlendirilmiş, Şekil 3.2(a-b) ’de ise bu işlem yapılmamış kompozit malzemeye aittir (Hull ve Clyne, 1996).



Şekil 3.2. Cam lifler içeren enjeksiyonla şekil verilmiş polipropilenin çatlak yüzeylerinin elektron mikroskobu resimleri, (c) ve (d) lif-matris arayüzey kavrama özelliği iyileştirilmiş numune, (a) ve (b) bu işlem yapılmamış numune (Hull ve Clyne, 1996) .

Bağ kuvvetli olduğunda matrisin plastik deformasyona uğradığı ve lif kopma uzunluklarının kısaldığı açıkça görülmektedir.

Tablo 3.3 ile bu çalışmada örnek malzeme olarak kullanılan kompozitlerin bileşenlerine ait gerekli mekanik sabitler ve özellikler verilmiştir. Seramik lif-seramik matrise örnek olarak sonsuz uzunluklu Silisyum Karbit (SiC) lif ve Alumina (Al_2O_3) veya Aliminyum Oksit matrisli kompozit seramik alınmıştır. Bu lifler p sıyrılma uzunluğu kadar matris içerisinde koptuktan sonra sıyrılıp çıkmaktadırlar (Hsueh ve Becher, 1996), (Rödel ve diğ., 1991). Matris içinde kayarken pekleşen lif-gevrek matrise örnek olarak yeterince uzun polipropilen lifler ile kuvvetlendirilmiş çimento esaslı kompozit malzeme alınmıştır. Ayrıca, matris içinde kayarken zayıflayan lif/ gevrek matrise örnek olarak yeterince uzun çelik lifler ile kuvvetlendirilmiş çimento esaslı kompozit malzeme özelliklerine de bu tabloda yer verilmiştir.

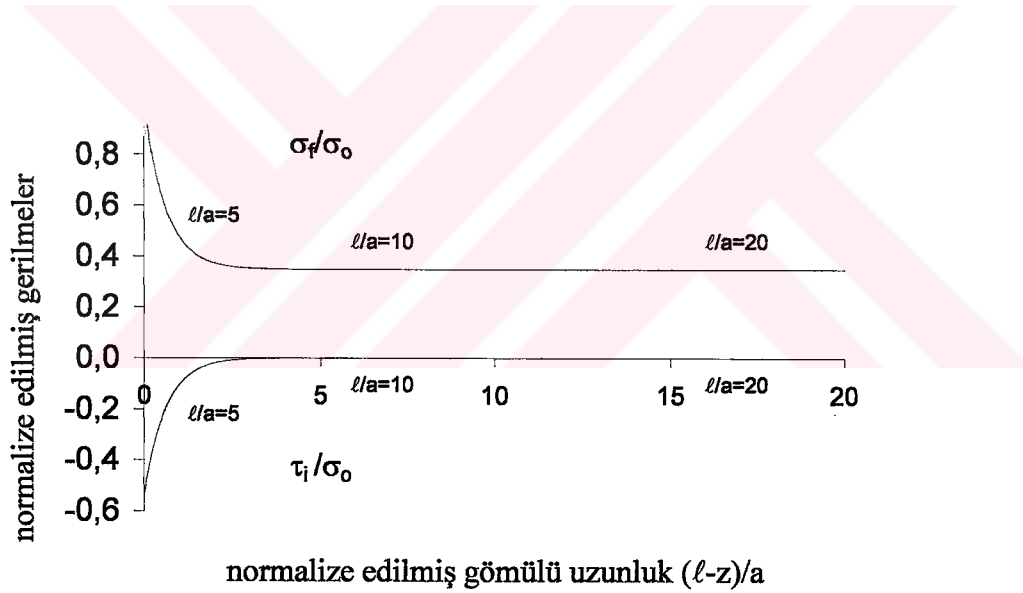
Tablo 3.3. Kompozit bileşenlerinin mekanik sabitleri (Hsueh ve Becher,1996), (Brandt,1995), (Lin ve Li 1997), (Betterman ve diğ., 1994).

	E (GPa)	ν	a (μm)	p (μm)	L (mm)	β	σ_s (GPa)	τ_s (MPa)
SiC seramik lif	500	0.3	0.5	1.2	∞	-	5	50
Al_2O_3 seramik matris	400	0.25	-	-	-	-	-	
Polipropilen lif	117	0.4	20	-	12	0.0128	0.6	0.805
Çimento esaslı matris	0.25	0.25	-	-	-	-	-	
Çelik lif	210	0.3	250	-	12	-0.075	4	2.35

4. KÖPRÜLENME GEÇİŞLERİ

Hsueh (1988), çalışmasında (2.25), (2.23) ve (2.27) ile verilen matrise gömülü uzunluğu ℓ olan life ait eksenel normal gerilme ve lif-matris arayüzey gerilmesi ifadelerinin, lifler yeterince uzun oldukları durumda, sonsuz uzun lifler için de kullanılabileceğini aşağıdaki şekilde göstermiştir.

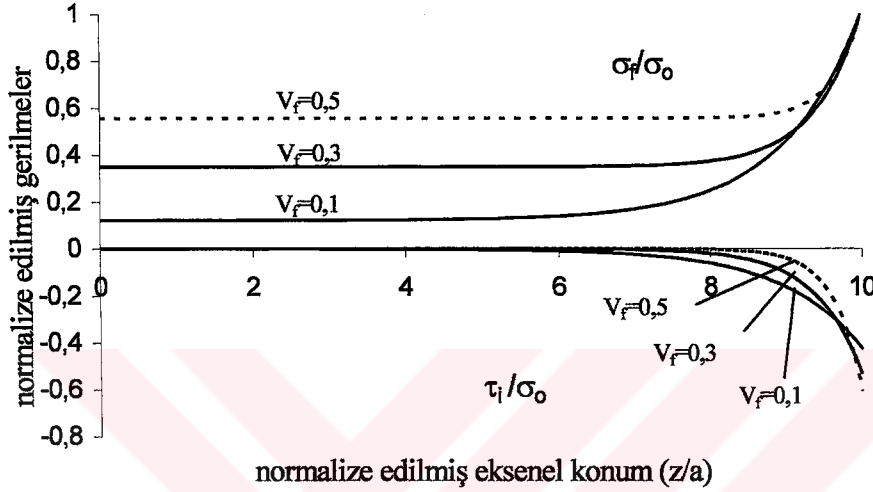
Şekil 2.1’de verilmiş olan modelde lif-matris arayüzeyinde en büyük kayma gerilmesi $z=\ell$ ’de oluşur. Bu gerilme lif-matris arayüzey kayma dayanımını geçerse lifin matrise girdiği bölgede arayüzeyin kaymaya başlaması beklenir.



Şekil 4.1. Normalize edilmiş lifteki normal gerilme ve lif-matris arayüzeyinde normalize edilmiş kayma gerilmesi çözümlerinin gömülü uzunluğa göre SiC lifleriyle kuvvetlendirilmiş Al_2O_3 kompozit malzemesi için grafiği. ($E_f/E_m=1.25$, $V_f=0.3$, $v_m=0.25$, $\ell/a = 5, 10, 20$) (Hsueh,1988) .

Lifteki normal gerilme, lifin gömülü uzunluğu ($\ell-z$) azaldıkça artar ve aynı noktada en büyük değerini alır. Bu, gerilmelerin matristen life arayüzey kayma gerilmeleri ile aktarıldığını gösterir. Ayrıca, gerilme çözümlerinin ℓ/a arttıkça bu orana hassas olmadığı ve hatta $\ell/a>5$ için bağımsız olduğu görülmüştür (Şekil 4.1) (Hsueh, 1988).

Şekil 4.1’de Silisyum karbit lifleriyle kuvvetlendirilmiş Alüminyum oksit kompozit malzemesi için farklı gömülü uzunluklar için gerilme çözümlerinin grafikleri $V_f=0,3$ için çizilmiştir. Şekilden görüldüğü gibi çözümler ℓ/a oranından bağımsız olup tamamen üstüste düşmektedir. V_f lif hacim oranı azaltıldığında çözümler $\ell/a < 5$ için farklılaşmakta ve diğer bölgelerde yine üstüste düşmektedir.



Şekil 4.2. Normalize edilmiş lifteki normal gerilme ve lif-matris arayüzeyinde normalize edilmiş kayma gerilmesi çözümlerinin aksel konuma göre SiC lifleri ile kuvvetlendirilmiş Al_2O_3 kompozit malzemesi için grafiği. ($E_f/E_m=1.25$, $\ell/a = 10$, $v_m=0.25$, $V_f=0.5, 0.3, 0.1$) (Hsueh,1988) .

Kompozit malzemede lif hacim oranı arttığında lifin matrise girdiği bölgede kayma gerilmesi ve lifin ucunda ($z=0$ 'da) normal gerilme artmaktadır (Şekil 4.2).

Ayrıca, E_f/E_m oranı azaldıkça, liften matrise yük aktarımının daha etkili sağlandığı, kayma gerilmelerinin arttığı gösterilmiştir (Hsueh,1988).

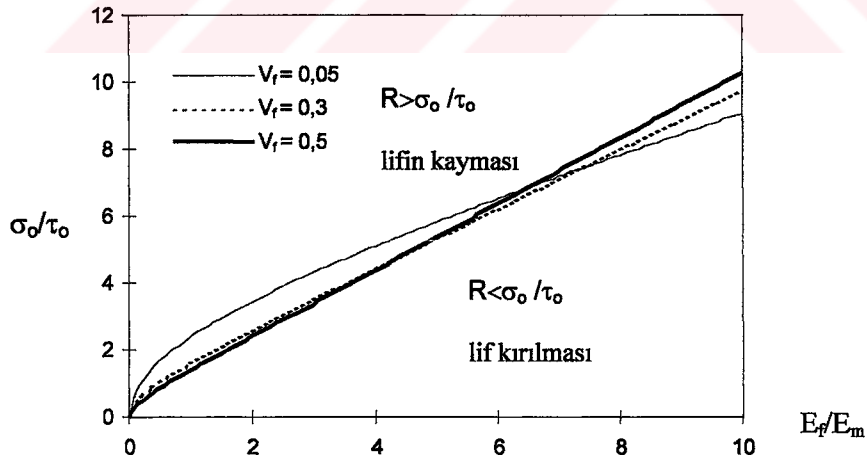
Elastik köprülenmede lifteki normal gerilme dağılımı ve matrisle temas ettiği dış yüzeyindeki kayma gerilmesi ifadeleri sırasıyla (2.25) ve (2.27) ifadeleri ile verilmişti. Bu gerilmeler $z=\ell$ 'de yani çatlak eksenini üzerinde en büyük değerlerini alırlar. Lifin kırılma dayanımı σ_s 'nin, lif -matris arayüzeyinin ayrılma dayanımı τ_s 'ya oranı, kompozite ait bir malzeme özelliğini ifade eder ($R = \sigma_s / \tau_s$). Elastik köprülenme esnasında lif eksenini boyunca en büyük gerilmeler $z=\ell$ 'de yani çatlak

ekseni üzerinde oluşur. En büyük normal gerilme σ_o ve en büyük kayma gerilmesi τ_o arasındaki ilişki (2.27) ifadesinin $z=\ell$ için değeri ile aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\tau_o = \frac{aV_m n E_m}{2E_c} \sigma_o \quad (4.1)$$

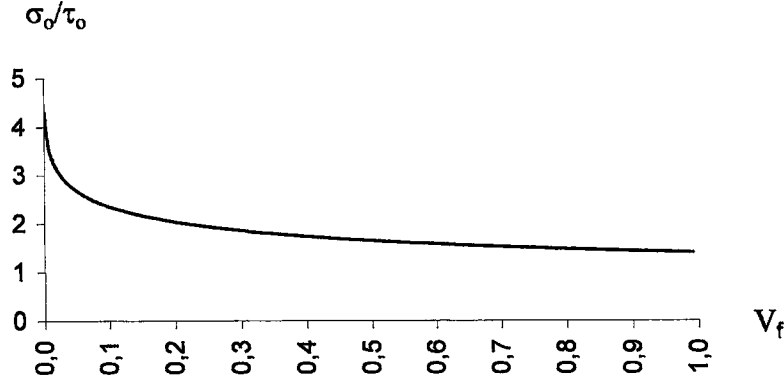
Eğer $R > \sigma_o / \tau_o$ ise arayüzey ayrılması ve eğer $R < \sigma_o / \tau_o$ ise lif kırılması bekleriz. Başka bir deyişle sırasıyla elastik köprülenmeden sürtünmeli köprülenmeye ve elastik köprülenmeden sıyrılma köprülenmesine geçmeyi bekleriz. Elastik köprülenme esnasında liflerin kırılması minimum çatlak dayanımı ile sonuçlanır. Sürtünmeli köprülenmenin oluşmasını sağlamak liflerin kırılmasını geciktirir. Bunun sağlanması için $R > \sigma_o / \tau_o$ olacak şekilde malzemenin tasarlanması gerekir. Bu çalışmanın örneğini oluşturacak kompozit malzeme bu kuralı sağlayacak şekilde seçilecektir. (4.1) denklemi ile verilen σ_o / τ_o oranının E_f / E_m oranına göre grafiği farklı lif hacim oranları ve $v_m=0,25$ alınarak Şekil 4.3'te çizilmiştir.

$$\frac{\sigma_o}{\tau_o} = \frac{2E_c}{aV_m n E_m} = \frac{1}{V_m} \sqrt{2 \left(V_f \frac{E_f}{E_m} + V_m \right) \frac{E_f}{E_m} (1 + v_m) (-V_m - \ln V_f)} \quad (4.2)$$



Şekil 4.3. Matris-lif arayüzeylerinin ayrılması ve lif kırılması için elastik köprülenme esnasında sağlanması gereken koşullar.

Yukarıdaki grafikte farklı malzemeler için gerekli koşullar görülmektedir. SiC/Al₂O₃ seramik kompozit için lif hacim oranına göre σ_o / τ_o değişimi Şekil 4.4'te görülmektedir.



Şekil 4.4. σ_o / τ_o - V_f grafiği.

Yine bu malzeme için $R = \sigma_s / \tau_s$ değerlerini hesaplanırsa, $R = \frac{\sigma_s}{\tau_s} = \frac{7 \times 10^9}{50 \times 10^6} = 140$

bulunur. Grafikten görüldüğü gibi mümkün olan tüm lif hacim oranı aralığı için $R = 140 > \sigma_o / \tau_o$ olduğundan sürtünmeli köprülenmenin oluşması için gerekli şart fazlasıyla sağlanmıştır.

4.1. Gevrek Liflerle Kuvvetlendirilmiş Kompozit Malzemeler için Elastik Köprülenmeden Sürtünmeli Köprülenmeye Geçiş

Elastik yük aktaran bir lifte en büyük τ_o kayma gerilmesi τ_s olduğu anda lif-matris arayüzeyi ayrılmaya başlar. Bunun için (2.27) denklemi ile ifade edilen lif-matris arayüzeyindeki kayma gerilmesinin çatlak yüzeyindeki σ_o cinsinden değerinin τ_s kayma dayanımı değerine ulaşmış olmalıdır.

$$\tau_o = \frac{V_m n E_m}{2 E_c} \sigma_o \geq \tau_s \quad (4.3)$$

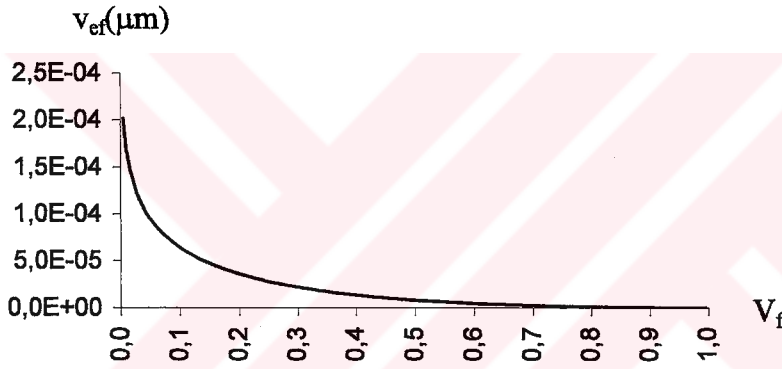
Lif ile matris arasında kayma oluşmadan hemen önce yük elastik köprülenme ile aktarıldığından yukarıdaki ifadede σ_o yerine (2.32) ile verilen değeri yerleştirilmelidir.

$$\tau_o = \frac{E_c}{(1 + \nu_m)(-\ln V_f - V_m)} \frac{v(x)}{a} \geq \tau_s \quad (4.4)$$

Elastik köprülenmeden sürtünmeli köprülenmeye geçiş için gerekli şart yukarıdaki ifade ile bulunmuş olur. Yukarıdaki ifadenin eşit olduğu durumda,

$$v_{ef} = \frac{2\tau_s}{n} \sqrt{\frac{(1 + \nu_m)(-\ln V_f - V_m)}{2E_f E_c}} = \frac{a\tau_s}{E_c} (1 + \nu_m)(-\ln V_f - V_m) \quad (4.5)$$

elastik köprülenmeden sürtünmeli köprülenmeye geçmek için gerekli v_{ef} lif uzaması bulunmuş olur. Lif hacim oranının artışına göre elastik köprülenmeden sürtünmeli köprülenmeye geçiş için gerekli yarı çatlak açıklığı değişimi grafiği, SiC lifleri ile kuvvetlendirilmiş Al_2O_3 seramik kompozit malzemesi için Şekil 4.5'te çizilmiştir.



Şekil 4.5. Lif hacim oranına göre elastik köprülenmeden sürtünmeli köprülenmeye geçiş için gerekli yarı çatlak açıklığı değişimi grafiği (SiC/ Al_2O_3).

4.2. Gevrek Liflerle Kuvvetlendirilmiş Kompozit Malzemeler için Sürtünmeli Köprülenmeden Sıyrılmalı Köprülenmeye Geçiş

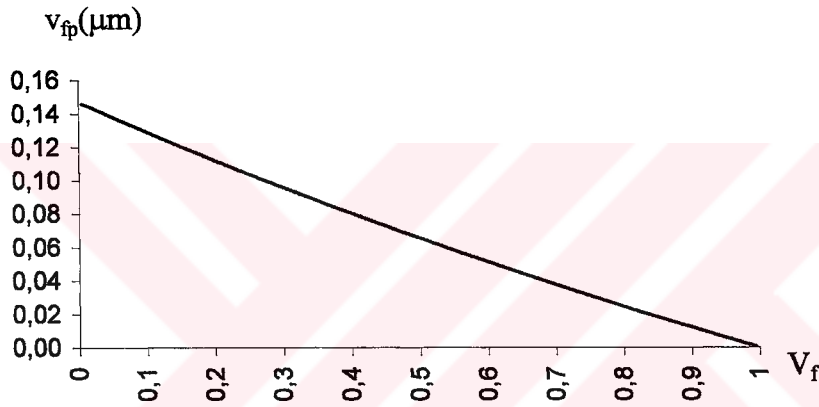
Lif-matris arayüzeyi ayrılmış lifteki en büyük σ_o gerilmesi σ_s olduğu anda lif kırılır. Sıyrılmalı köprülenmeye geçmeden hemen önce yük sürtünmeli köprülenme ile aktarıldığından buna karşı gelen lifteki normal gerilme (2.46) denklemi ile verilmiş idi. Bu ifadenin lifin kopma dayanımı olan σ_s değerine ulaşması ile sürtünmeli köprülenmeden sıyrılma köprülenmesine geçiş için gerekli şart aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\sigma_o = \sqrt{4 \frac{E_f E_c \tau_o v}{V_m E_m a}} \geq \sigma_s \quad (4.6)$$

Yukarıdaki ifadenin eşit olduğu durumda yarım çatlak açıklığı çekilirse,

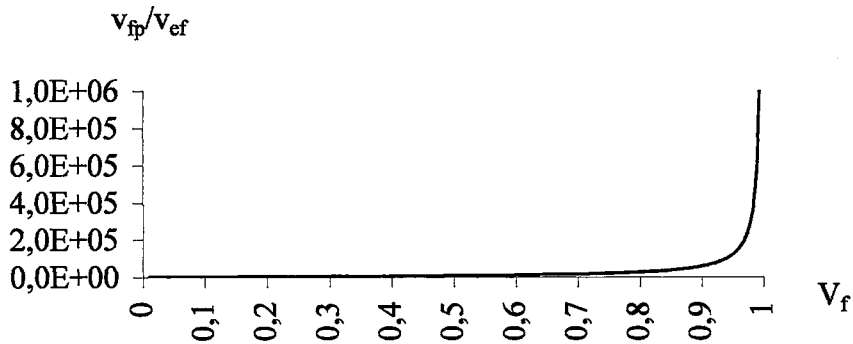
$$v_{fp} = \frac{a V_m E_m \sigma_s^2}{4 E_f E_c \tau_o} \quad (4.7)$$

sürtünmeli köprülenmeden sıyrılmalı köprülenmeye geçtiği noktadaki yarım çatlak açıklığı bir malzeme özelliği olarak bulunmuş olur.



Şekil 4.6. Lif hacim oranına göre sürtünmeli köprülenmeden sıyrılma köprülenmesine geçiş için gerekli yarı çatlak açıklığı değişimi grafiği. (SiC/Al₂O₃)

Yukarıda Şekil 4.5 ve Şekil 4.6 ile verilen geçiş yarı çatlak açıklıkları v_{ef} ve v_{fp} nin aynı lif hacim oranına göre büyük mertebe farkı olduğu görülmektedir.



Şekil 4.7. Lif hacim oranına geçiş yarı çatlak açıklığı oranları mertebe artışı gösteren grafik. (SiC/Al₂O₃)

Bununla ilgili olarak Şekil 4.7 te v_{fp}/v_{ef} oranının lif hacim oranı arttıkça 1×10^2 mertebesinden 1×10^6 mertebesine kadar yükseldiği görülmektedir. Bu, ancak çok küçük lif hacim oranları için üç tip içeren köprülenme olayının gerçekleşebileceğinin ipucunu vermektedir.

4.3. Gevrek Liflerle Kuvvetlendirilmiş Kompozit Malzemeler için Elastik Köprülenmeden Sıyrılmalı Köprülenmeye Geçiş

Elastik yük aktaran lifte σ_0 gerilmesi σ_s olduğu anda lif matris içinde kırılır ve matristen sıyrılmaya başlar. Bunun için gerekli şart (2.27) denkleminde σ_0 değerinin σ_s kopma dayanımını aşması ile oluşur.

$$\sigma_0 = \frac{E_c}{V_m E_m} \sqrt{\frac{2E_f E_c}{(1 + v_m)(-\ln V_f - V_m)}} \frac{v(x)}{a} \geq \sigma_s \quad (4.8)$$

Geçiş anındaki yarım çatlak açıklığı aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$v_{ep} = \frac{a V_m E_m \sigma_s}{E_c} \sqrt{\frac{(1 + v_m)(-\ln V_f - V_m)}{2E_f E_c}} \quad (4.9)$$

Bu bölümün giriş kısmında anlatıldığı üzere bu geçiş şekli arzu edilmemekle birlikte ayrıca bu malzeme türü için de oluşması mümkün değildir. Bu tezde değinilmekle beraber problemin çözümünde yukarıdaki yarım çatlak açıklığı kullanılmayacaktır.

4.4. Kayarak Pekleşen veya Zayıflayan Sonlu Uzunluklu Liflerle Kuvvetlendirilmiş Kompozit Malzemeler için Sürtünmeli Köprülenmeden Sıyrılmalı Köprülenmeye Geçiş

Gevrek olmayan lifler için, Lin ve Li (1997) 'nin çalışmalarında sundukları sürtünmeli ve sıyrılmalı köprülenme bağıntıları kullanılacaktır. Bu model için (2.63) ile verilen Lin ve Li (1997) 'nin çalışmaları kullanılacaktır. Sürtünmeli köprülenmeden sıyrılmalı köprülenmeye geçiş şartı (2.62) denkleminde h kayma uzunluğu cinsinden verilen yarım çatlak açıklığı ifadesinden faydalanmışlardır. Bu ifadede h kayma uzunluğu lifin gömülü uzunluğuna ulaştığında lif matris içinden

sıyrılmaya başlar ve sürtünmeli köprülenmeden sıyrılmalı köprülenmeye geçiş şartı aşağıdaki şekilde elde edilmiş olur.

$$v_{\text{fp}} = v(h = \ell) = \frac{2a}{\beta} \left[\cosh\left(\frac{\omega_o}{2a} \ell\right) - 1 \right]$$

Bu tezin formülasyonuna uyarlamak için yeterince uzun lifler kullanılacak ve ℓ lif gömülü uzunluğu yerine $\ell=L/2$ olmak üzere lif boyunun yarısı alınarak liflerin çatlağa dik doğrultuda yönlendiği kabul edilecektir.

$$v_{\text{fp}} = \frac{2a}{\beta} \left[\cosh\left(\frac{\omega_o L}{4a}\right) - 1 \right] \quad (4.10)$$

5. TEK EKSENLİ GERİLME ALTINDA KİSMİ ÇATLAKLI KOMPOZİT LEVHADA GERİLMELERİN HESABI

Ortotrop malzemelerin birbirine dik üç simetri düzlemi bulunur. Bağımsız elastik sabitleri 3 elastisite modülü, 3 kayma modülü ve 3 Poisson oranı olmak üzere 9 tanedir. Tek doğrultulu liflerle kuvvetlendirilmiş kompozit malzeme ortotrop tiptedir. Ortotrop bir malzemenin şekil değiştirme-gerilme bağıntıları aşağıdaki gibidir.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & -\frac{\nu_{xz}}{E_x} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{zx}}{E_z} & -\frac{\nu_{zy}}{E_z} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{zx}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

(5.1)

(5.1)'de görülen katsayılar matrisine, ortotrop malzemenin esneklik matrisi adı verilir.

Bu çalışmada, kompozit levhanın çatlak analizi yapılırken matrisin homojen, izotropik yapıda olup doğrusal elastik davranış gösterdiği, liflerin homojen, izotropik yapıda olup doğrusal elastik davranış gösterdiği, yapı içerisinde düzenli bir dağılım ve kusursuz bir yönelmeye sahip olduğu ve kompozit levhanın ortotropik karakterli olup doğrusal elastik davranış gösterdiği kabul edilmiştir. Problem, düzlem gerilme hali için çözülecektir.

Ortotropik levhanın kullanılacak olan mekanik sabitleri, bileşenlerinin hacim oranları ve mekanik özellikleri cinsinden aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$E_x = \frac{E_f E_m}{E_f V_m + E_m V_f}, E_y = E_f V_f + E_m V_m \quad (5.2)$$

$$v_{xy} = v_m V_m + v_f V_f, G_{xy} = \frac{G_f G_m}{G_f V_m + G_m V_f}$$

Burada E_y , kompozitin y-ekseni doğrultusundaki Young modülü; E_x , kompozitin x-ekseni doğrultusundaki Young modülü; E_m , matrisin Young modülü; E_f , lifin Young modülü; v_m , matrisin Poisson oranı; v_f , lifin Poisson oranı; G_m , matrisin kayma sabiti; G_f , lifin kayma sabitidir.

-c < x < c aralığında çatlağı olan orthotropik levhanın Airy gerilme fonksiyonu,

$$a_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + (2a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + a_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (5.3)$$

kısmi diferansiyel denklemini sağlamalıdır. Burada kullanılan a_{ij} sabitleri (5.1) ile verilen ortotropik levhanın esneklik matrisinin elemanlarıdır.

$$\frac{1}{E_x} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + \frac{1}{E_y} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \left(\frac{1}{G_{xy}} - \frac{2v_{xy}}{E_x} \right) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} = 0 \quad (5.4)$$

$$\beta_1 = \frac{a_{11}}{a_{22}} = \frac{E_y}{E_x}, \quad \beta_2 = \frac{2a_{12} + a_{66}}{a_{22}} = E_y \left(\frac{1}{G_{xy}} - \frac{2v_{xy}}{E_x} \right) \quad (5.5)$$

olarak tanımlanmıştır.

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \beta_2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \beta_1 \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (5.6)$$

Birinci sınır koşulu,

$$\tau_{xy} = 0 \quad y = 0 \quad (5.7)$$

y=0 boyunca çatlak yüzeyinin eğimi f(x) fonksiyonu olarak alınacak olursa ikinci sınır koşulu,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial v}{\partial x} = f(x) \quad , -c < x < c \quad (5.8)$$

olarak yazılabilir.

(5.6) nolu kısmi diferansiyel denklemi çözmek için x değişkeni üzerinden Fourier dönüşümü uygulanır. F(x,y) Airy gerilme fonksiyonunun Fourier dönüşümü G(α,y) fonksiyonu olsun.

$$G(\alpha, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, y) e^{-i\alpha x} dx \quad (5.9)$$

Fourier dönüşümü uygulanan (5.6) kısmi diferansiyel denklemi aşağıda (5.10) ile verilen adi diferansiyel denkleme indirgenmiş olur.

$$\beta_1 \frac{\partial^4 G}{\partial y^4} - \beta_2 \alpha^2 \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \alpha^4 G = 0 \quad (5.10)$$

Bu diferansiyel denklemin çözümü,

$$G(\alpha, y) = A(\alpha)e^{-w_1 \alpha y} + B(\alpha)e^{-w_2 \alpha y} + C(\alpha)e^{w_1 \alpha y} + D(\alpha)e^{w_2 \alpha y} \quad (5.11)$$

şeklinde dir. Burada w_1, w_2 ; $\beta_1 w^4 - \beta_2 w^2 + 1 = 0$ denkleminin kökleridir. $y \rightarrow \infty$ için G(α,y) fonksiyonun üçüncü ve dördüncü terimleri ile çözüm sonsuz değer almaktadır. Bu durumu ortadan kaldırmak için C=D=0 alınır. Sadece y>0 yarım düzlemi için çözümü gözönünde bulundurulacak olursa, çözümün sonlu olması için α dönüşüm parametresinin mutlak değer içine alınması gerekir. (5.11) denklemi düzenlenerek aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$G(\alpha, y) = A(\alpha)e^{-w_1|\alpha|y} + B(\alpha)e^{-w_2|\alpha|y} \quad , y > 0 \quad (5.12)$$

$F(x, y)$ Airy gerilme fonksiyonu, $G(\alpha, y)$ 'nin ters Fourier dönüşmüşüdür.

$$F(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\alpha, y) e^{i\alpha x} d\alpha \quad (5.13)$$

(5.13) denkleminde, (5.12) ifadesi yerleştirilirse,

$$F(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [A(\alpha)e^{-w_1|\alpha|y} + B(\alpha)e^{-w_2|\alpha|y}] e^{i\alpha x} d\alpha \quad , y > 0 \quad (5.14)$$

bulunur. Ayrıca Airy gerilme fonksiyonu ve gerilmeler arasındaki ilişki,

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad ; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad ; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (5.15)$$

ifadeleri ile verilmektedir. (5.7) ile verilen birinci sınır koşulunu kullanmak üzere τ_{xy} ifadesi elde edilir. Bunun için (5.14) ifadesi ve (5.15) denklemlerinden sonuncusu kullanılmıştır.

$$\tau_{xy} = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (w_1 A e^{-w_1|\alpha|y} + w_2 B e^{-w_2|\alpha|y}) \alpha |\alpha| e^{i\alpha x} d\alpha \quad (5.16)$$

Yukarıda bulunan τ_{xy} ifadesi ile (5.7) ile verilen birinci sınır koşulu kullanıldığında

$$B = -\frac{w_1}{w_2} A \quad (5.17)$$

bulunur. σ_x ve σ_y gerilme ifadelerini elde etmek için benzer şekilde (5.14) ve (5.15) denklemleri kullanılır ve (5.17) bağıntısı bulunan tüm gerilme ifadelerinde yerine yerleştirilirse aşağıdakiler elde edilir.

$$\sigma_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A w_1 (w_1 e^{-w_1|\alpha|y} - w_2 e^{-w_2|\alpha|y}) \alpha^2 e^{i\alpha x} d\alpha \quad (5.18a)$$

$$\sigma_y = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A (e^{-w_1|\alpha|y} - \frac{w_1}{w_2} e^{-w_2|\alpha|y}) \alpha^2 e^{i\alpha x} d\alpha \quad (5.18b)$$

$$\tau_{xy} = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A w_1 (e^{-w_1|\alpha|y} - e^{-w_2|\alpha|y}) \alpha |\alpha| e^{i\alpha x} d\alpha \quad (5.18c)$$

Çatlak problemini formüle etmek için, çatlak yüzeyinin eğimini bilinmeyen $f(x)$ fonksiyonu olarak alarak ikinci sınır koşulu uygulanır. Bunun için düzlem gerilme haline karşı gelen aşağıdaki gerilme-şekil değiştirme bağıntısı kullanılır.

$$\varepsilon_y = a_{12} \sigma_x + a_{22} \sigma_y \quad (5.19)$$

Yukarıdaki ifadede (5.18a) ve (5.18b) denklemleri ile birlikte kullanılırsa,

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A \left[\left(a_{12} w_1^2 - a_{22} \right) e^{-w_1|\alpha|y} - \left(a_{12} w_1 w_2 - a_{22} \frac{w_1}{w_2} \right) e^{-w_2|\alpha|y} \right] \alpha^2 e^{i\alpha x} d\alpha \quad (5.20)$$

bulunur. (5.20) denkleminin önce y 'ye göre integrali alınırsa,

$$v = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A \left[\frac{(a_{12} w_1^2 - a_{22})}{w_1} e^{-w_1|\alpha|y} - \left(\frac{a_{12} w_1 w_2 - a_{22} \frac{w_1}{w_2}}{w_2} \right) e^{-w_2|\alpha|y} \right] |\alpha| e^{i\alpha x} d\alpha$$

ve x 'e göre türevi alınırsa,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A \left[\frac{(a_{12} w_1^2 - a_{22})}{w_1} e^{-w_1 |\alpha| y} - \left(\frac{a_{12} w_1 w_2 - a_{22} \frac{w_1}{w_2}}{w_2} \right) e^{-w_2 |\alpha| y} \right] \alpha |\alpha| e^{i\alpha x} d\alpha$$

bulunur. (5.8) ile verilen ikinci sınır koşulu uygulanırsa,

$$f(x) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A |\alpha| a_{22} \frac{w_1^2 - w_2^2}{w_1 w_2^2} e^{i\alpha x} d\alpha \quad (5.21)$$

elde edilir. (5.21) denkleminde parantez içindeki ifadenin $f(x)$ fonksiyonunun ters Fourier dönüşümü olduğu görülmektedir. Bu ifadenin her iki tarafının Fourier dönüşümü alalım ve $A(\alpha)$ çekilirse,

$$A(\alpha) = -\frac{1}{i |\alpha| a_{22} (w_1^2 - w_2^2)} \int_{-c}^c f(t) e^{-i\alpha t} dt \quad (5.22)$$

bulunur. Sonuç olarak, (5.18a-c) denklemlerinde $A(\alpha)$ yerleştirilir ve α 'ya göre integrali alınır, $f(t)$ bilinmeyen fonksiyon cinsinden gerilmeler yazılabilir.

$$\sigma_x = \frac{1}{\pi a_{22} (w_1^2 - w_2^2)} \int_{-c}^c \left(\frac{w_1(t-x)}{w_1^2 y^2 + (t-x)^2} - \frac{w_2(t-x)}{w_2^2 y^2 + (t-x)^2} \right) f(t) dt \quad (5.23a)$$

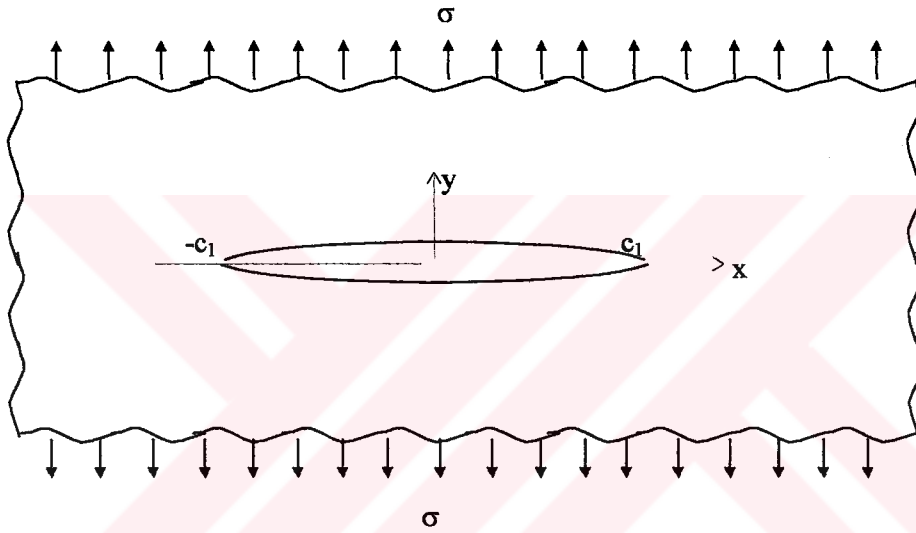
$$\sigma_y = -\frac{1}{\pi a_{22} (w_1^2 - w_2^2)} \int_{-c}^c \left(\frac{w_2(t-x)}{w_1^2 y^2 + (t-x)^2} - \frac{w_1(t-x)}{w_2^2 y^2 + (t-x)^2} \right) f(t) dt \quad (5.23b)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{1}{\pi a_{22} (w_1^2 - w_2^2)} \int_{-c}^c \left(-\frac{w_1 y}{w_1^2 y^2 + (t-x)^2} + \frac{w_2 y}{w_2^2 y^2 + (t-x)^2} \right) f(t) dt \quad (5.23c)$$

(5.23a-c) denklemlerindeki ifadeler, düzlemde $f(t)$ bilinmeyeni cinsinden herhangi bir noktadaki gerilmeyi verirler (Delale, 1985).

6. PROBLEMİN FORMÜLASYONU

Levha üzerindeki çatlak uzunluğu, levha boyutlarına göre çok küçük olduğundan, lif eksenini doğrultusunda x-çatlak eksenine dik uygulanan σ gerilmesinin sonsuzda olduğu kabul edilmiştir.



Şekil 6.1. Lif eksenine dik, merkezi çatlağı olan, σ düzgün gerilme altında sonsuz levha.

Bu çalışmada, Şekil 6.1'deki çatlak, lifler tarafından yukarıda anlatıldığı gibi simetrik olarak çatlak ucundan başlayarak elastik, sürtünmeli ve sıyrılmalı olacak şekilde köprülendiği kabul edilecektir (Şekil 6.2).

(5.15b) denklemi düzlem gerilme halinde, $-c_1$ 'den c_1 'ye kadar çatlağı olan ortotropik levhada, $f(t)$ bilinmeyen cinsinden herhangi noktadaki gerilmeyi verir. Sonsuzdaki σ gerilmesini de çatlak sınırına taşırsak, levhada $y=0$ boyunca herhangi noktadaki gerilmenin denge denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir. Çatlak boyunca $P(x)$ köprülenme gerilmeleri, V_f lif hacim oranı ile life uygulanan σ_0 gerilmelerinin çarpılmasıyla elde edilir.

$$-c_3 > x > -c_2 \quad \sigma_y(x,0) = P_2(x) - \sigma \quad (6.3d)$$

$$-c_2 > x > -c_1 \quad \sigma_y(x,0) = P_1(x) - \sigma \quad (6.3e)$$

Yukarıdaki denklemlerde ilgili köprülenme tipleri için $P(x)$ ifadeleri $v(x)$ çatlak açıklığı cinsinden bulunmuştur. Bunları $f(t)$ cinsinden ifade etmek için (5.10) denklemi integre edilir.

$$v(x) = - \int_x^c f(t) dt \quad (6.4)$$

6.1. Gevrek Lifler

$c_1 > x > c_2$ ve $-c_2 > x > -c_1$ aralıkları için (2.32), (6.2) ve (6.4) ifadelerinden faydalanarak (6.3a) ve (6.3e) denklemleri yeniden yazılır.

$$\sigma_y(x,0) = P_1(x) - \sigma$$

$$\frac{1}{\pi} \frac{E_c w_1 w_2}{(w_1 + w_2)} \int_{-c_1}^{c_1} \frac{f(t)}{(t-x)} dt + \frac{V_f E_c}{a V_m E_m} \sqrt{\frac{-2E_f E_c}{(1 + v_m)(\ln V_f + V_m)}} \int_x^{c_1} f(t) dt = -\sigma \quad (6.5a,e)$$

$c_2 > x > c_3$ ve $-c_3 > x > -c_2$ aralıkları için (2.46), (6.2) ve (6.4) ifadelerinden faydalanarak (6.3b) ve (6.3d) denklemleri yeniden yazılır.

$$\sigma_y(x,0) = P_2(x) - \sigma$$

$$\frac{1}{\pi} \frac{E_c w_1 w_2}{(w_1 + w_2)} \int_{-c_1}^{c_1} \frac{f(t)}{(t-x)} dt - \sqrt{\frac{4V_f^2 E_f E_c \tau_o}{a V_m E_m}} \int_x^{c_1} f(t) dt = -\sigma \quad (6.5b,d)$$

$c_3 > x > -c_3$ aralığı için (2.96), (6.2) ve (6.4) ifadelerinden faydalanarak (6.3c) denklemi yeniden yazılır.

$$\sigma_y(x,0) = P_3(x) - \sigma$$

$$\frac{1}{\pi} \frac{E_c w_1 w_2}{(w_1 + w_2)} \int_{-c_1}^{c_1} \frac{f(t)}{(t-x)} dt - \frac{4V_f \tau_o}{a} \int_x^{c_1} f(t) dt = -\sigma + \frac{2V_f \tau_o p}{a} \quad (6.5c)$$

Problemın formülasyonunu tamamlamak için yerdeğiştirmenin tek değerkilik koşulu

$$\int_{-c_1}^{c_1} f(t) dt = 0 \quad (6.6)$$

olarak yazılır. Yukarıdaki integral denklemlerin geçerli olduğu aralıkların sınırlarını bulabilmek için (6.4) açılımı yardımı ile (4.4) ve (4.5) geğiş şartları aşağıdaki gibi yeniden düzenlenebilir.

Elastik köprülenmeden Sürtünmeli köprülenmeye geğiş şartı aşağıdaki gibidir.

$$\tau_o = -\frac{E_c}{a(1 + v_m)(-\ln V_f - V_m)} \int_x^{c_1} f(t) dt \geq \tau_s \quad (6.7)$$

Sürtünmeli köprülenmeden Sıyrılmalı köprülenmeye geğiş şartı aşağıdaki gibidir.

$$\sigma_o = \sqrt{-4 \frac{E_f E_c \tau_o}{V_m E_m a} \int_x^{c_1} f(t) dt} \geq \sigma_s \quad (6.8)$$

Çatlağın ortasında yük aktarımının sonlanması için gerekli koşul aşağıdaki gibidir.

$$v_{\max} \geq p/2 \quad \Rightarrow \quad - \int_0^{c_1} f(t) dt \geq p/2 \quad (6.9)$$

6.2. Kayarak Pekleşen veya Zayıflayan Lifler

Elastik köprülenmeye karşı gelen $c_1 > x > c_2$ ve $-c_2 > x > -c_1$ aralıkları için (6.5a, e) denklemleri kullanılacaktır. Sürtünmeli köprülenmeye karşı gelen $c_2 > x > c_3$ ve $-c_3 >$

$x > -c_2$ aralıkları için (2.32), (6.1), (6.2), ve (6.4) ifadelerinden faydalanarak (6.3b) ve (6.3d) denklemleri yeniden yazılır.

$$\sigma_y(x,0) = P_2(x) - \sigma$$

$$\frac{1}{\pi} \frac{E_c w_1 w_2}{(w_1 + w_2)} \int_{-c_1}^{c_1} \frac{f(t)}{(t-x)} dt - \sqrt{\frac{4\tau_o V_f^2 E_f E_c}{\beta V_m E_m} \left[\left(1 - \frac{\beta}{2a} \int_x^{c_1} f(t) dt \right)^2 - 1 \right]} = -\sigma \quad (6.10)$$

Sürtünmeli köprülenmeden Sıyrılmalı köprülenmeye geçiş şartı (4.10) ile verilmiştir.

$$v = - \int_{\bar{x}}^{c_1} f(t) dt \leq v_{fp} = \frac{2a}{\beta} \left[\cosh\left(\frac{\omega_o L}{4a}\right) - 1 \right] \quad (6.11)$$

Sıyrılmalı köprülenmeye karşı gelen $c_3 > x > -c_3$ aralığı için (3.96), (6.1), (6.2) ve (6.4) ifadelerinden faydalanılarak denge denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\sigma_y(x,0) = P_3(x) - \sigma$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \frac{E_c w_1 w_2}{(w_1 + w_2)} \int_{-c_1}^{c_1} \frac{f(t)}{(t-x)} dt - \frac{4V_f}{\omega_o} \frac{E_c \tau_o}{V_m E_m} \left[\sinh\left(\frac{\omega_o L}{4a}\right) - \sinh\left(\frac{\omega_o (v - v_{fp})}{a}\right) \right] \\ - \frac{2\beta V_f E_c \tau_o}{a^2 V_m E_m} (v - v_{fp}) \left(\frac{L}{2} - 2(v - v_{fp}) \right) = -\sigma \end{aligned} \quad (6.12)$$

Bu malzemede sıyrılmalı köprülenmenin sona ermesi için tüm yarı lif boyu kadar çatlağın yarım açılması gerekir.

$$v_{max} \geq \frac{L}{2} \quad \Rightarrow \quad - \int_0^{c_1} f(t) dt \geq \frac{L}{2} \quad (6.13)$$

7. PROBLEMİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Problemın sayısal çözümünde Chebyshev polinomlarından faydalanabilmek için integral sınırları $(-1,1)$ olacak şekilde normalize etmek üzere her aralıkta

$$-c < x, t < c \quad x = c\bar{x} \quad , \quad t = c\bar{t}$$

$$-1 < \bar{x}, \bar{t} < 1 \quad (7.1)$$

değişken dönüşümleri uygulanır ve her iki sınır ucunda tekil olan bilinmeyen $f(t)$ fonksiyonu için,

$$f(t) = f^*(\bar{t}) = \frac{F(\bar{t})}{\sqrt{1-\bar{t}^2}} \quad (7.2)$$

ifadesi yazılabilir. $F(\bar{t})$ fonksiyonu $[-1,1]$ kapalı aralığında sınırlıdır.

7.1. Gevrek Lifler

Yukarıda verilenlere göre $c_2 < x < c_1$ ve $-c_1 < x < -c_2$ aralıkları için Elastik köprülenmeyi içeren (6.5a,e) denklemini yeniden düzenleyelim.

$$\frac{1}{\pi} \frac{E_c w_1 w_2}{\sigma(w_1 + w_2)} \int_{-1}^1 \frac{f^*(\bar{t})}{(\bar{t} - \bar{x})} d\bar{t} + \frac{c}{a} \frac{V_f E_c}{V_m E_m \sigma} \sqrt{\frac{-2E_f E_c}{(1 + \nu_m)(\ln V_f + V_m)}} \int_{\bar{x}}^1 f^*(\bar{t}) d\bar{t} = -1$$

$$\frac{1}{\pi} \frac{E_c}{\sigma} \frac{w_1 w_2}{(w_1 + w_2)} \int_{-1}^1 \frac{F(\bar{t}) d\bar{t}}{(\bar{t} - \bar{x}) \sqrt{1 - \bar{t}^2}} + \frac{c}{a} \frac{V_f E_c}{V_m E_m \sigma} \sqrt{\frac{-2E_f E_c}{(1 + \nu_m)(\ln V_f + V_m)}} \int_{\bar{x}}^1 \frac{F(\bar{t}) d\bar{t}}{\sqrt{1 - \bar{t}^2}} = -1 \quad (7.3a)$$

$c_3 < x < c_2$ ve $-c_2 < x < -c_3$ aralıkları için Sürtünmeli köprülenmeyi içeren (6.5b,d) denklemi yeniden düzenlenir.

$$\frac{1}{\pi} \frac{E_c}{\sigma} \frac{w_1 w_2}{(w_1 + w_2)} \int_{-1}^1 \frac{f^*(\bar{t})}{(\bar{t} - \bar{x})} d\bar{t} - \sqrt{-\frac{4cV_f^2 E_f E_c \tau_o}{aV_m E_m \sigma^2} \int_{\bar{x}}^1 f^*(\bar{t}) d\bar{t}} = -1$$

$$\frac{1}{\pi} \frac{E_c}{\sigma} \frac{w_1 w_2}{(w_1 + w_2)} \int_{-1}^1 \frac{F(\bar{t}) d\bar{t}}{(\bar{t} - \bar{x}) \sqrt{1 - \bar{t}^2}} - \sqrt{-\frac{4cV_f^2 E_f E_c \tau_o}{aV_m E_m \sigma^2} \int_{\bar{x}}^1 \frac{F(\bar{t}) d\bar{t}}{\sqrt{1 - \bar{t}^2}}} = -1 \quad (7.3b)$$

-c₃ < x < c₃ aralığı için Sıyrılmalı köprülenmeyi içeren (6.5c) denklemini yeniden düzenleyelim.

$$\frac{1}{\pi} \frac{E_c a}{(\sigma a - 2V_f \tau_o p)} \frac{w_1 w_2}{(w_1 + w_2)} \int_{-1}^1 \frac{f^*(\bar{t}) d\bar{t}}{(\bar{t} - \bar{x})} - \frac{4V_f \tau_o c}{(\sigma a - 2V_f \tau_o p)} \int_{\bar{x}}^1 f^*(\bar{t}) d\bar{t} = -1$$

$$\frac{1}{\pi} \frac{E_c a}{(\sigma a - 2V_f \tau_o p)} \frac{w_1 w_2}{(w_1 + w_2)} \int_{-1}^1 \frac{F(\bar{t}) d\bar{t}}{(\bar{t} - \bar{x}) \sqrt{1 - \bar{t}^2}} - \frac{4V_f \tau_o c}{(\sigma a - 2V_f \tau_o p)} \int_{\bar{x}}^1 \frac{F(\bar{t}) d\bar{t}}{\sqrt{1 - \bar{t}^2}} = -1 \quad (7.3c)$$

Ayrıca ek koşul için düzenleme aşağıdaki sonucu verir.

$$\int_{-1}^1 f^*(\bar{t}) d\bar{t} = 0 \Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{F(\bar{t})}{\sqrt{1 - \bar{t}^2}} d\bar{t} = 0 \quad (7.3d)$$

Böylece denklemler normalize edilmiş olur. (7.2) denklemini ile verilen $\frac{1}{\sqrt{1 - \bar{t}^2}}$

ifadesi 1.tip Chebyshev polinomlarının ağırlık fonksiyonudur. (7.3a-d) denklem sisteminin çözümü için Gauss-Chebyshev sayısal integrasyon yöntemi kullanılmıştır.

Sayısal çözüm yönteminde kullanılan ω_j , 1.tip Chebyshev Polinomlarının ağırlık fonksiyonu; x_i , 2.tip Chebyshev Polinomlarının kökleri; t_j , ise 1.tip Chebyshev Polinomlarının kökleridir.

$$\omega_j = \frac{\pi}{N-1} \quad j = 2, \dots, N-1$$

$$\omega_1 = \omega_N = \frac{\pi}{2(N-1)}$$

$$t_j = \cos\left(\pi \frac{j-1}{N-1}\right) \quad j = 1, \dots, N \quad (7.4)$$

$$x_i = \cos\left(\pi \frac{2i-1}{2N-2}\right) \quad i = 1, \dots, N-1$$

Böylece sırasıyla (7.3a-d) denklemleri yerine, ayrıklaştırılmış aşağıdaki (7.5a-d) denklemleri elde edilir.

$$\frac{1}{\pi} \frac{E_c}{\sigma} \frac{w_1 w_2}{(w_1 + w_2)} \sum_{j=1}^N \frac{F(\bar{t}_j) \omega_j}{(\bar{t}_j - \bar{x}_i)} + \frac{c}{a} \frac{V_f}{V_m} \frac{E_c}{E_m} \sqrt{\frac{-2E_f E_c}{\sigma^2 (1 + v_m)(\ln V_f + V_m)}} \sum_{j=1}^i F(\bar{t}_j) \omega_j + 1 = 0$$

$i = 1, \dots, n_e$

$i = n_e + 2n_f + 2n_p + 1, \dots, N-1 \quad (7.5a)$

$$\frac{1}{\pi} \frac{E_c}{\sigma} \frac{w_1 w_2}{(w_1 + w_2)} \sum_{j=1}^N \frac{F(\bar{t}_j) \omega_j}{(\bar{t}_j - \bar{x}_i)} - \sqrt{-4 \frac{c}{a} \frac{V_f^2}{V_m} \frac{E_f}{E_m} \frac{E_c}{\sigma} \frac{\tau_o}{\sigma}} \sum_{j=1}^i F(\bar{t}_j) \omega_j + 1 = 0$$

$i = n_e + 1, \dots, n_e + n_f$

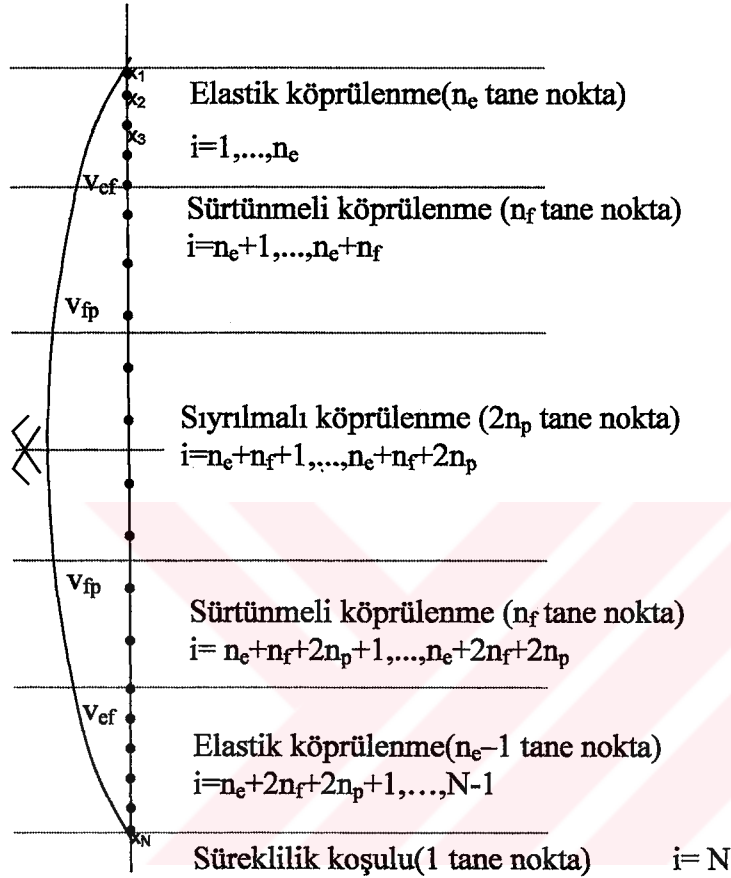
$i = n_e + n_f + 2n_p + 1, \dots, n_e + 2n_f + 2n_p \quad (7.5b)$

$$\frac{1}{\pi} \frac{w_1 w_2}{(w_1 + w_2)} \frac{E_c a}{(\sigma a - 2V_f \tau_o p)} \sum_{j=1}^N \frac{F(\bar{t}_j) \omega_j}{(\bar{t}_j - \bar{x}_i)} - \frac{4V_f \tau_o c}{(\sigma a - 2V_f \tau_o p)} \sum_{j=1}^i F(\bar{t}_j) \omega_j + 1 = 0$$

$i = n_e + n_f + 1, \dots, n_e + n_f + 2n_p \quad (7.5c)$

$$\sum_{j=1}^n F(\bar{t}_j) \omega_j = 0 \quad i = N \quad (7.5d)$$

Chebyshev polinomlarının kökleri indisi artarken çatlak sağ ucundan başlayarak sola doğru sıralanmaktadır. Çatlak uçlarında daha sık aralıklarla ve çatlak ortasında daha seyrek aralıklarla yer almaktadır. Burada n_e , n_f ve n_p ile çatlak yarısında ilgili köprülenme tipi görülen bölgedeki kök sayılarını ifade etmektedir (Şekil 7.1).



Şekil 7.1. Problemin formülasyonu için lineer olmayan denklem sisteminin düzenlenmesini gösteren çizim.

Çatlak açıklığı, $v(x)$, $F(\bar{t})$ bilinmeyen cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$v(x) = -c \int_x^1 \frac{F(\bar{t})}{\sqrt{1-\bar{t}^2}} d\bar{t}$$

Gauss-Chebyshev sayısal integrasyon yöntemi uygulanarak, çatlak eksenini boyunca çatlak açıklığını veren aşağıdaki ifade bulunur.

$$v(x) = -c \sum_{j=1}^n F(\bar{t}_j) \omega_j \quad (7.6)$$

Yukarıda (7.5a-d) denklemlerinin Şekil 7.1 ile verilen şekilde düzenlenmesi ile lineer olmayan denklem takımı kurulmuş olur. Problemin tüm bilinmeyenlerinin bulunabilmesi için geçiş şartları olan σ_o ve τ_i değerleri, her n_e , n_f ve n_p kombinasyonu için kontrol edilmektedir. (4.4) ve (4.5) denklemleri ile verilen geçiş şartları (7.6) ifadesi ile ayrıklaştırılırsa,

$$\tau_o(x_{i=n_e}) = -\frac{E_c}{(1+v_m)(-\ln V_f - V_m)} \frac{c}{a} \sum_{j=1}^{n_e} F(\bar{t}_j) \omega_j = \tau_s \quad (7.7a)$$

$$\sigma_o(x_{i=n_e+n_f}) = \sqrt{-4 \frac{E_f E_c \tau_o}{V_m E_m} \frac{c}{a} \sum_{j=1}^{n_e+n_f} F(\bar{t}_j) \omega_j} = \sigma_s \quad (7.7b)$$

$$v(x_{i=N/2}) = -c \sum_{j=1}^{N/2} F(\bar{t}_j) \omega_j = \frac{p}{2} \quad (7.7c)$$

bulunur. Yukarıdaki ilk iki denklem geçiş noktaları olan c_2 ve c_3 mesafelerinin bulunması için kullanılmıştır. Son ifade ise köprülenmenin sona ermesi için gerekli şarttır. Bu koşula ulaşıldığında çözüm aranmaya devam edilmemiştir. (7.5a-d) lineer olmayan cebrik denklem sistemi Ek'te verilen programla Newton-Raphson-Kantorovich veya kısaca Newton yöntemi kullanılarak olası bütün n_e , n_f ve n_p sayıları için çözdürülmüş ve (7.7a) ve (7.7b) şartlarını sağlayanlar çözüm olarak alınmıştır.

Çatlağın uç noktalarındaki gerilme şiddeti çarpanı aşağıdaki şekilde tanımlanır (Sneddon ve Lowengrub,1969).

$$K_I(c) = \lim_{x \rightarrow c} \sqrt{2(x-c)} \sigma_y(x,0) \quad (7.8)$$

Gerilme şiddeti çarpanı bilinmeyen $F(t)$ fonksiyonu cinsinden aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$K_I = -\sqrt{c} \frac{w_1 w_2}{a_{22}(w_1 + w_2)} F(1) = -E_y \sqrt{c} \frac{w_1 w_2}{(w_1 + w_2)} F(1) \quad (7.9)$$

Sayısal çözümü kolaylaştırmak için (7.5d) denkleminden

$$F(\bar{t}_1) = -F(\bar{t}_N), F(\bar{t}_2) = -F(\bar{t}_{N-1}), F(\bar{t}_3) = -F(\bar{t}_{N-2}), \dots, F(\bar{t}_{N/2}) = -F(\bar{t}_{(N/2)+1})$$

ve (7.4) denklemlerinden elde edilen ağağıdaki

$$\bar{t}_1 = -\bar{t}_N, \bar{t}_2 = -\bar{t}_{N-1}, \bar{t}_3 = -\bar{t}_{N-2}, \dots, \bar{t}_{N/2} = -\bar{t}_{(N/2)+1}$$

$$\omega_1 = \omega_N, \omega_2 = \omega_{N-1}, \omega_3 = \omega_{N-2}, \dots, \omega_{N/2} = \omega_{(N/2)+1}$$

ifadelerinden faydalanarak problem çeyrek düzleme indirgenebilir.

$$\frac{2 E_c}{\pi \sigma} \frac{w_1 w_2}{(w_1 + w_2)} \sum_{j=1}^{N/2} \frac{F(\bar{t}_j) \omega_j \bar{t}_j}{(\bar{t}_j)^2 - (\bar{x}_i)^2} + \frac{c V_f E_c}{a V_m E_m} \sqrt{\frac{2 E_f E_c}{\sigma^2 (1 + \nu_m) (-\ln V_f - V_m)}} \sum_{j=1}^i F(\bar{t}_j) \omega_j + 1 = 0$$

$$i=1, \dots, n_e \quad (7.10a)$$

$$\frac{2 E_c}{\pi \sigma} \frac{w_1 w_2}{(w_1 + w_2)} \sum_{j=1}^{N/2} \frac{F(\bar{t}_j) \omega_j \bar{t}_j}{(\bar{t}_j)^2 - (\bar{x}_i)^2} - \sqrt{-4 \frac{c V_f^2 E_f E_c \tau_o}{a V_m E_m \sigma}} \sum_{j=1}^i F(\bar{t}_j) \omega_j + 1 = 0$$

$$i=n_e+1, \dots, n_e+n_f \quad (7.10b)$$

$$\frac{2 E_c a}{\pi (\sigma a - 2 V_f \tau_o p)} \frac{w_1 w_2}{(w_1 + w_2)} \sum_{j=1}^{N/2} \frac{F(\bar{t}_j) \omega_j \bar{t}_j}{(\bar{t}_j)^2 - (\bar{x}_i)^2} - \frac{4 V_f \tau_o c}{(\sigma a - 2 V_f \tau_o p)} \sum_{j=1}^i F(\bar{t}_j) \omega_j + 1 = 0$$

$$i=n_e+n_f+1, \dots, N/2 \quad (7.10c)$$

Yukarıda görüldüğü gibi (7.10a-c) denklemleri ile elde edilmiş olan çeyrek düzlemin çözümünde indirgenme işleminde zaten kullanıldığından süreklilik koşulu yer almamaktadır.

Elde edilen denklem sisteminin çözümü için ekte verilen Fortran bilgisayar programlama dilinde yazılmış olan program, ana program ve beş tane alt programdan oluşmaktadır. İşlevleri aşağıdaki gibidir.

Matinv(A,B) alt programı, verilen A matrisinin, pivotlama yöntemi ile tersini alarak B matrisi olarak çıkarmaktadır.

Matep(F,R,COB,A,B) alt programı, elastik ve sıyrılmalı köprülenme için (7.5a) ve (7.5c) denklemlerinden, girilen F vektörü için, satır değerlerini R vektörü ve Jacobian matrisini ise COB matrisi olarak hesaplar. A ve B her iki tür için kullanılan sabitlerdir.

Matf(F,R,COB) alt programı, sürtünmeli köprülenme için (7.5b) denkleminde, girilen F vektörü için, satır değerlerini R vektörü ve Jacobian matrisini COB matrisi olarak hesaplar.

Genmat(F0,R,COB,NE,NF,NP) alt programı, Matep ve Matf alt programlarını çağırarak F0 vektörü için herbirine ait R vektörlerini ve COB matrislerini hesaplatır ve her köprülenme tipinin oluşabileceği nokta sayılarını veren n_e , n_f ve n_p nokta sayılarına göre genel R vektörünü ve COB matrisini düzenler.

Newton(F0,F1,NE,NF,NP) alt programı, Genmat alt programını çağırarak genel R vektörü ve COB Jacobian matrisini hesaplatır. Matinv alt programını çağırarak COB matrisinin tersi olan COBINV matrisini hesaplatır. Verilen F0 başlangıç vektörü ile $F_{k+1}=F_k-COBINV \cdot R$ ifadesini kullanarak ardışık tekrar yaparak yaklaşık F1 vektörünü hesaplar.

7.2. Kayarak Pekleşen veya Zayıflayan Lifler

Gevrek lifler için yukarıda yapılan işlemlerin sürtünmeli köprülenme tipine ait olan aralık için işlemler tekrarlanmıştır.(6.10) denklemini (7.1) ifadesi ile normalize edilip, (7.2) ifadesi ile düzenlenirse,

$$\frac{1}{\pi} \frac{E_c}{\sigma} \frac{w_1 w_2}{(w_1 + w_2)} \int_{-1}^1 \frac{f^*(\bar{t})}{(\bar{t} - \bar{x})} d\bar{t} - \sqrt{\frac{4\tau_o V_f^2 E_f E_c}{\beta V_m E_m \sigma^2} \left[\left(1 - \frac{\beta c}{2a} \int_{\bar{x}}^1 f^*(\bar{t}) d\bar{t} \right)^2 - 1 \right]} = -1$$

$$\frac{1}{\pi} \frac{E_c}{\sigma} \frac{w_1 w_2}{(w_1 + w_2)} \int_{-1}^1 \frac{F(\bar{t}) d\bar{t}}{(\bar{t} - \bar{x}) \sqrt{1 - \bar{t}^2}} - \sqrt{\frac{4\tau_o V_f^2 E_f E_c}{\beta V_m E_m \sigma^2} \left[\left(1 - \frac{\beta c}{2a} \int_{\bar{x}}^1 \frac{F(\bar{t}) d\bar{t}}{\sqrt{1 - \bar{t}^2}} \right)^2 - 1 \right]} = -1$$

(7.11)

bulunur. (7.4) ile verilen ifadeler ile (7.11) denklemini ayrılaştırlırsa,

$$\frac{1}{\pi} \frac{E_c}{\sigma} \frac{w_1 w_2}{(w_1 + w_2)} \sum_{j=1}^N \frac{F(\bar{t}_j) \omega_j}{(\bar{t}_j - \bar{x}_i)} - \sqrt{\frac{4\tau_o V_f^2 E_f E_c}{\beta V_m E_m \sigma^2} \left[\left(1 - \frac{\beta c}{2a} \sum_{j=1}^i F(\bar{t}_j) \omega_j \right)^2 - 1 \right]} + 1 = 0$$

$$i = n_e + 1, \dots, n_e + n_f$$

$$i = n_e + n_f + 2n_p + 1, \dots, n_e + 2n_f + 2n_p \quad (7.12)$$

bulunur. Çözümü kolaylaştırmak için (7.4) ve (7.5d) denklemlerinden faydalanarak çeyrek düzleme indirgenebilir.

$$\frac{2}{\pi} \frac{E_c}{\sigma} \frac{w_1 w_2}{(w_1 + w_2)} \sum_{j=1}^{N/2} \frac{F(\bar{t}_j) \omega_j \bar{t}_j}{(\bar{t}_j)^2 - (\bar{x}_j)^2} - \sqrt{\frac{4\tau_o V_f^2 E_f E_c}{\beta V_m E_m \sigma^2} \left[\left(1 - \frac{\beta c}{2a} \sum_{j=1}^i F(\bar{t}_j) \omega_j \right)^2 - 1 \right]} + 1 = 0$$

$$i = n_e + 1, \dots, n_e + n_f \quad (7.13)$$

(6.11) ile verilen sürtünmeli köprülenmeden sıyrılmalı köprülenmeye geçiş şartına da aynı işlemleri uygulanırsa,

$$\int_{\bar{x}}^1 F(\bar{t}_j) \omega_j = -\frac{2}{\beta} \frac{a}{c} \left[\cosh\left(\frac{\omega L}{4a}\right) - 1 \right] \quad (7.14)$$

bulunur. Gevrek lifler için yukarıda yapılan işlemlerin sıyrılmalı köprülenme tipine ait olan aralık için işlemler tekrarlanacaktır. Sıyrılmalı köprülenmeyi içeren (6.12) denklemi (7.1) ifadesi ile normalize edilip, (7.2) ifadesi ile düzenlenirse,

$$\frac{1}{\pi} \frac{E_c}{\sigma} \frac{w_1 w_2}{(w_1 + w_2)} \int_{-c_1}^{c_1} \frac{f(t)}{(t - x)} dt - \frac{4V_f}{V_m} \frac{E_c}{E_m} \frac{\tau_o}{\sigma} \left\{ \frac{1}{\omega} \left[\sinh\left(\frac{\omega L}{4a}\right) - \sinh\left(\frac{\omega}{a}(v - v_{fp})\right) \right] + \beta \frac{1}{a^2} (v - v_{fp}) \left(\frac{L}{4} - (v - v_{fp}) \right) \right\} = -1 \quad (7.15)$$

bulunur. (4.11) denkleminde faydalanarak v_{fp} yerine yerleştirilirse,

$$\frac{1}{\pi} \frac{E_c}{\sigma} \frac{w_1 w_2}{(w_1 + w_2)} \int_{-c_1}^{c_1} \frac{f(t)}{(t-x)} dt -$$

$$4 \frac{V_f}{V_m} \frac{E_c}{E_m} \frac{\tau_o}{\sigma} \left\{ \frac{1}{\omega} \left[\sinh\left(\frac{\omega L}{4a}\right) - \sinh\left(\frac{\omega}{a} v - \frac{2\omega}{\beta} \left(\cosh\left(\frac{\omega L}{4a}\right) - 1 \right) \right) \right] \right.$$

$$\left. + \beta \frac{1}{a^2} \left(v - \frac{2a}{\beta} \left(\cosh\left(\frac{\omega L}{4a}\right) - 1 \right) \right) \left(\frac{L}{4} - v + \frac{2a}{\beta} \left(\cosh\left(\frac{\omega L}{4a}\right) - 1 \right) \right) \right\} = -1$$

(7.16)

bulunur. (6.4) ile verilen yarım çatlak açıklığı ifadesi yerleştirilirse,

$$\frac{1}{\pi} \frac{E_c}{\sigma} \frac{w_1 w_2}{(w_1 + w_2)} \int_{-c_1}^{c_1} \frac{f(t)}{(t-x)} dt -$$

$$4 \frac{V_f}{V_m} \frac{E_c}{E_m} \frac{\tau_o}{\sigma} \left\{ \frac{1}{\omega} \left[\sinh\left(\frac{\omega L}{4a}\right) - \sinh\left(-\frac{\omega}{a} \int_x^{c_1} f(t) dt - \frac{2\omega}{\beta} \left(\cosh\left(\frac{\omega L}{4a}\right) - 1 \right) \right) \right] \right.$$

$$+ \beta \frac{1}{a^2} \left(- \int_x^{c_1} f(t) dt - \frac{2a}{\beta} \left(\cosh\left(\frac{\omega L}{4a}\right) - 1 \right) \right)$$

$$\left. \left(\frac{L}{4} + \int_x^{c_1} f(t) dt + \frac{2a}{\beta} \left(\cosh\left(\frac{\omega L}{4a}\right) - 1 \right) \right) \right\} = -1$$

(7.17)

bulunur. (7.1) ifadeleri yardımıyla değişkenler normalize edilirse,

$$\frac{1}{\pi} \frac{E_c}{\sigma} \frac{w_1 w_2}{(w_1 + w_2)} \int_{-1}^1 \frac{f^*(\bar{t})}{(\bar{t} - \bar{x})} d\bar{t} -$$

$$4 \frac{V_f}{V_m} \frac{E_c}{E_m} \frac{\tau_o}{\sigma} \left\{ \frac{1}{\omega} \left[\sinh\left(\frac{\omega L}{4a}\right) + \sinh\left(\omega \frac{c}{a} \int_{\bar{x}}^1 f^*(\bar{t}) d\bar{t} + \frac{2\omega}{\beta} \left(\cosh\left(\frac{\omega L}{4a}\right) - 1 \right) \right) \right] \right.$$

$$- \beta \left(\frac{c}{a} \int_{\bar{x}}^1 f^*(\bar{t}) d\bar{t} + \frac{2}{\beta} \left(\cosh\left(\frac{\omega L}{4a}\right) - 1 \right) \right)$$

$$\left. \left(\frac{L}{4a} + \frac{c}{a} \int_{\bar{x}}^1 f^*(\bar{t}) d\bar{t} + \frac{2}{\beta} \left(\cosh\left(\frac{\omega L}{4a}\right) - 1 \right) \right) \right\} + 1 = 0$$

(7.18)

bulunur. (7.4) ifadeleri yardımıyla denklemi ayrıklaştırılırsa, aşağıdaki ifade bulunur.

$$\frac{1}{\pi} \frac{E_c}{\sigma} \frac{w_1 w_2}{(w_1 + w_2)} \sum_{j=1}^N \frac{F(\bar{t}_j) \omega_j}{(\bar{t}_j - \bar{x}_j)} -$$

$$4 \frac{V_f}{V_m} \frac{E_c}{E_m} \frac{\tau_o}{\sigma} \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{1}{\omega_o} \left[\sinh\left(\frac{\omega_o L}{4a}\right) + \sinh\left(\omega_o \frac{c}{a} \sum_{j=1}^i F(\bar{t}_j) \omega_j + \frac{2\omega_o}{\beta} \left(\cosh\left(\frac{\omega_o L}{4a}\right) - 1 \right) \right) \right] \right] \\ & - \beta \frac{1}{a^2} \left(\frac{c}{a} \sum_{j=1}^i F(\bar{t}_j) \omega_j + \frac{2}{\beta} \left(\cosh\left(\frac{\omega_o L}{4a}\right) - 1 \right) \right) \\ & \left(\frac{L}{4a} + \frac{c}{a} \sum_{j=1}^i F(\bar{t}_j) \omega_j + \frac{2}{\beta} \left(\cosh\left(\frac{\omega_o L}{4a}\right) - 1 \right) \right) \end{aligned} \right\} + 1 = 0$$

$$i = n_c + n_f + 1, \dots, N/2 \quad (7.19)$$

7.3. Problemin Birimsizleştirilmesi

(7.10a-c), (7.13), (7.13) denklemlerinde ve (7.7a,b), (7.14) sınır koşullarında bulunan terimleri tamamen boyutsuzlaştırmak için aşağıda verilen boyutsuz malzeme sabitlerini ve değişkenleri tanımlanıp, bunlara göre ifadeler tekrar düzenlenmelidir.

$$k_1 = \frac{\sigma}{\sigma_s}, \quad k_2 = \frac{\sigma_s}{\tau_s}, \quad k_3 = \frac{E_f}{E_m}, \quad k_4 = \frac{E_f}{\sigma_s}, \quad k_5 = \frac{c}{a}, \quad k_6 = \frac{p}{a},$$

$$k_7 = \frac{K}{K_o} = \frac{K}{\sigma \sqrt{c}}, \quad k_8 = \frac{L}{a}, \quad V_f, \quad \beta, \quad v_f, \quad v_m \quad (7.20)$$

Burada verilen boyutsuz k_j terimlerinden k_1 , k_5 ve k_7 değişken; diğerleri ise malzeme sabitleridirler. Denge denklemlerinde yer alan w_1 ve w_2 sayıları da malzeme sabitleri cinsinden ifadelerdir. w_1 ve w_2 sabitleri 5. bölümde söylendiği gibi $\beta_1 w^4 + \beta_2 w^2 + 1 = 0$ denkleminin pozitif iki köküdür.

$$w_1 = \sqrt{\frac{\beta_2}{2\beta_1}} + \sqrt{\left(\frac{\beta_2}{2\beta_1}\right)^2 - \frac{1}{\beta_1}} \quad (7.21)$$

$$w_2 = \sqrt{\frac{\beta_2}{2\beta_1} - \sqrt{\left(\frac{\beta_2}{2\beta_1}\right)^2 - \frac{1}{\beta_1}}} \quad (7.22)$$

(5.5) ifadeleri ile verilmiş olan β_1 ve β_2 katsayıları (7.15) birimsiz oranlar cinsinden ifade edilirse,

$$\beta_1 = \frac{E_y}{E_x} = \frac{[V_f(k_3 - 1) + 1][V_f(1 - k_3) + k_3]}{k_3} \quad (7.23)$$

$$\frac{\beta_2}{2\beta_1} = \frac{E_x}{2G_{xy}} - \nu_{xy} = \frac{V_f(1 + \nu_f) + k_3(1 - V_f)(1 + \nu_m)}{V_f(1 - k_3) + k_3} - (V_f\nu_f + V_m\nu_m) \quad (7.24)$$

bulunur. (7.9) denklemi ile verilen gerilme şiddeti çarpanını, yarım uzunluğu c olan merkezi çatlak içeren, σ tek eksenli gerilmeye maruz izotrop sonsuz levhada çatlak ucundaki gerilme şiddeti çarpanı değeri olan $\sigma\sqrt{c}$ ile bölerek boyutsuzlaştırılabilir.

$$k_7 = \frac{K_I(c)}{\sigma\sqrt{c}} = \frac{E_y\sqrt{c}}{\sigma\sqrt{c}} \frac{w_1 w_2}{(w_1 + w_2)} F(1) = \frac{E_y}{\sigma} \frac{w_1 w_2}{(w_1 + w_2)} F(1) \quad (7.25)$$

(7.20) ifadelerini kullanarak boyutsuz gerilme şiddeti çarpanı olan k_7 aşağıdaki gibi tekrar düzenlenebilir.

$$k_7 = -\frac{k_4[V_f(k_3 - 1) + 1]}{k_1 k_3} \frac{w_1 w_2}{(w_1 + w_2)} F(1) \quad (7.26)$$

7.3.1. Gevrek lifler

Elastik köprülenmenin yer aldığı (7.10a) denklemi tekrar düzenlenirse,

$$\frac{2k_4}{\pi k_1 k_3} [V_f(k_3 - 1) + 1] \frac{w_1 w_2}{(w_1 + w_2)} \sum_{j=1}^{N/2} \frac{F(\bar{t}_j) \omega_j \bar{t}_j}{(\bar{t}_j)^2 - (\bar{x}_i)^2} + \frac{k_4 k_5 V_f [(k_3 - 1)V_f + 1]}{k_1 (1 - V_f)} \sqrt{\frac{-2[V_f(k_3 - 1) + 1]}{k_3(1 + \nu_m)(1 - V_f + \ln V_f)}} \sum_{j=1}^i F(\bar{t}_j) \omega_j + 1 = 0$$

$$i=1, \dots, n_e \quad (7.27)$$

bulunur. Sürtünmeli köprülenmenin yer aldığı (7.10b) denklemi düzenlenirse,

$$\frac{2k_4}{\pi k_1 k_3} [V_f(k_3 - 1) + 1] \frac{w_1 w_2}{(w_1 + w_2)} \sum_{j=1}^{N/2} \frac{F(\bar{t}_j) \omega_j \bar{t}_j}{(\bar{t}_j)^2 - (\bar{x}_i)^2} -$$

$$\sqrt{-\frac{4k_4 k_5 V_f^2 [V_f(k_3 - 1) + 1]}{k_1^2 k_2 (1 - V_f)}} \sum_{j=1}^i F(\bar{t}_j) \omega_j + 1 = 0$$

$$i = n_e + 1, \dots, n_e + n_f \quad (7.28)$$

bulunur. Sıyrılmalı köprülenmenin yer aldığı (7.10c) denklemi düzenlenirse,

$$\frac{2}{\pi} \frac{w_1 w_2}{(w_1 + w_2)} \frac{k_2 k_4 [V_f(k_3 - 1) + 1]}{k_3 [k_1 k_2 - 2V_f k_6]} \sum_{j=1}^{N/2} \frac{F(\bar{t}_j) \omega_j \bar{t}_j}{(\bar{t}_j)^2 - (\bar{x}_i)^2}$$

$$- \frac{4V_f k_5}{[k_1 k_2 - 2V_f k_6]} \sum_{j=1}^i F(\bar{t}_j) \omega_j + 1 = 0$$

$$i = n_e + n_f + 1, \dots, N/2 \quad (7.29)$$

bulunur. Elastikten sürtünmeli köprülenmeye geçiş şartı olan (7.7a) sınır koşulu tekrar düzenlenirse,

$$\frac{k_2 k_4 k_5}{k_3} \frac{[V_f(k_3 - 1) + 1]}{(1 + v_m)(1 - V_f + \ln(V_f))} \sum_{j=1}^{n_e} F(\bar{t}_j) \omega_j = 1$$

$$\sum_{j=1}^{n_e} F(\bar{t}_j) \omega_j = \frac{k_3}{k_2 k_4 k_5} \frac{(1 + v_m)(1 - V_f + \ln(V_f))}{[V_f(k_3 - 1) + 1]} \quad i = n_e \quad (7.30a)$$

bulunur. Sürtünmeliden sıyrılmalı köprülenmeye geçiş şartı olan (7.7b) sınır koşulu tekrar düzenlenirse,

$$\frac{4k_4 k_5}{k_2} \frac{[(k_3 - 1)V_f + 1]}{(1 - V_f)} \sum_{j=1}^{n_e + n_f} F(\bar{t}_j) \omega_j = -1$$

$$\sum_{j=1}^{n_e+n_f} F(\bar{t}_j) \omega_j = -\frac{k_2}{4k_4 k_5} \frac{(1-V_f)}{[(k_3-1)V_f+1]} \quad i=n_e+n_f \quad (7.30b)$$

bulunur. Köprülenmenin sona ermesi şartı olan (7.7c) sınır koşulu düzenlenirse aşağıdaki ifade bulunur.

$$\sum_{j=1}^{N/2} F(\bar{t}_j) \omega_j = -\frac{k_6}{2k_5} \quad i=N/2 \quad (7.30c)$$

7.3.2. Kayarak pekleşen veya zayıflayan lifler

Sürtünlmeli köprülenmeyi içeren (7.19) denklemi, (7.20) birimsiz ifadeleri ile tekrar düzenlenirse,

$$\frac{2k_4}{\pi k_1 k_3} [V_f(k_3-1)+1] \frac{w_1 w_2}{(w_1 + w_2)} \sum_{j=1}^{N/2} \frac{F(\bar{t}_j) \omega_j \bar{t}_j}{(\bar{t}_j)^2 - (\bar{x}_i)^2} -$$

$$\sqrt{\frac{4k_4 V_f^2 [V_f(k_3-1)+1]}{\beta k_1^2 k_2 (1-V_f)}} \left[\left(1 - \frac{\beta k_5}{2} \sum_{j=1}^i F(\bar{t}_j) \omega_j \right)^2 - 1 \right] + 1 = 0$$

$$i=n_e+1, \dots, n_e+n_f$$

bulunur. Yukarıdaki denklem tekrar düzenlenirse,

$$\frac{2k_4}{\pi k_1 k_3} [V_f(k_3-1)+1] \frac{w_1 w_2}{(w_1 + w_2)} \sum_{j=1}^{N/2} \frac{F(\bar{t}_j) \omega_j \bar{t}_j}{(\bar{t}_j)^2 - (\bar{x}_i)^2} -$$

$$\sqrt{\frac{k_4 k_5 V_f^2 [V_f(k_3-1)+1]}{k_1^2 k_2 (1-V_f)}} \left[\beta k_5 \left(\sum_{j=1}^i F(\bar{t}_j) \omega_j \right)^2 - 4 \sum_{j=1}^i F(\bar{t}_j) \omega_j \right] + 1 = 0$$

$$i=n_e+1, \dots, n_e+n_f \quad (7.31)$$

bulunur. Sıyrılmalı köprülenmeyi içeren (7.19) denklemi, (7.20) boyutsuz ifadeleri ile tekrar düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\pi} \frac{k_4}{k_1 k_3} [V_f(k_3 - 1) + 1] \frac{w_1 w_2}{(w_1 + w_2)} \sum_{j=1}^N \frac{F(\bar{t}_j) \omega_j}{(\bar{t}_j - \bar{x}_j)} - 4 \frac{V_f}{(1 - V_f)} \frac{1}{k_1 k_2} [V_f(k_3 - 1) + 1] \\
& \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\omega_o} \left[\sinh\left(\frac{\omega_o k_8}{4}\right) + \sinh\left(\omega_o \left(k_5 \sum_{j=1}^i F(\bar{t}_j) \omega_j + \frac{2}{\beta} \left(\cosh\left(\frac{\omega_o k_8}{4}\right) - 1 \right) \right) \right) \right] \\ & - \beta \left(k_5 \sum_{j=1}^i F(\bar{t}_j) \omega_j + \frac{2}{\beta} \left(\cosh\left(\frac{\omega_o k_8}{4}\right) - 1 \right) \right) \\ & \left(\frac{k_8}{4} + k_5 \sum_{j=1}^i F(\bar{t}_j) \omega_j + \frac{2}{\beta} \left(\cosh\left(\frac{\omega_o k_8}{4}\right) - 1 \right) \right) \end{aligned} \right\} + 1 = 0
\end{aligned}
\tag{7.32}$$

bulunur. Bu denklem, (7.4) ve (7.5d) ifadeleri yardımıyla çeyrek düzleme indirgenirse,

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{\pi} \frac{k_4}{k_1 k_3} [V_f(k_3 - 1) + 1] \frac{w_1 w_2}{(w_1 + w_2)} \sum_{j=1}^N \frac{F(\bar{t}_j) \omega_j \bar{t}_j}{(\bar{t}_j)^2 - (\bar{x}_j)^2} - 4 \frac{V_f}{(1 - V_f)} \frac{1}{k_1 k_2} [V_f(k_3 - 1) + 1] \\
& \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\omega_o} \left[\sinh\left(\frac{\omega_o k_8}{4}\right) + \sinh\left(\omega_o \left(k_5 \sum_{j=1}^i F(\bar{t}_j) \omega_j + \frac{2}{\beta} \left(\cosh\left(\frac{\omega_o k_8}{4}\right) - 1 \right) \right) \right) \right] \\ & - \beta \left(k_5 \sum_{j=1}^i F(\bar{t}_j) \omega_j + \frac{2}{\beta} \left(\cosh\left(\frac{\omega_o k_8}{4}\right) - 1 \right) \right) \\ & \left(\frac{k_8}{4} + k_5 \sum_{j=1}^i F(\bar{t}_j) \omega_j + \frac{2}{\beta} \left(\cosh\left(\frac{\omega_o k_8}{4}\right) - 1 \right) \right) \end{aligned} \right\} + 1 = 0
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ifade tekrar düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
& \frac{2w_1 w_2}{\pi(w_1 + w_2)} \frac{k_4 [V_f(k_3 - 1) + 1]}{k_1 k_3} \sum_{j=1}^N \frac{F(\bar{t}_j) \omega_j \bar{t}_j}{(\bar{t}_j)^2 - (\bar{x}_j)^2} - \frac{4}{\omega_o} \frac{V_f}{(1 - V_f)} \frac{1}{k_1 k_2} [V_f(k_3 - 1) + 1] \\
& \left\{ \left[\sinh\left(\frac{\omega_o k_8}{4}\right) + \sinh\left(\omega_o k_5 \left(\sum_{j=1}^i F(\bar{t}_j) \omega_j + \frac{2}{\beta k_5} \left(\cosh\left(\frac{\omega_o k_8}{4}\right) - 1 \right) \right) \right) \right] \right. \\
& \left. - \beta \omega_o k_5^2 \left(\sum_{j=1}^i F(\bar{t}_j) \omega_j + \frac{2}{\beta k_5} \left(\cosh\left(\frac{\omega_o k_8}{4}\right) - 1 \right) \right) \right. \\
& \left. \left(\frac{k_8}{4k_5} + \sum_{j=1}^i F(\bar{t}_j) \omega_j + \frac{2}{\beta k_5} \left(\cosh\left(\frac{\omega_o k_8}{4}\right) - 1 \right) \right) \right\} + 1 = 0 \\
& i = n_e + n_f + 1, \dots, N/2 \quad (7.33)
\end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki denklemlerde kullanılan ω_o katsayısı 3.bölümde (3.56) ifadesi ile verilmişti. (7.20) ifadeleri ile bu katsayı yeniden düzenlenirse,

$$\omega_o = \sqrt{\frac{4\beta}{V_m} \frac{E_c}{E_m} \frac{\tau_o}{E_f}} = \sqrt{\frac{4\beta}{k_2 k_4} \frac{[V_f(k_3 - 1) + 1]}{(1 - V_f)}} \quad (7.34)$$

bulunur. (7.14) ile verilen sürtünmeli köprülenmeden sıyrılmalı köprülenmeye geçiş şartına da aynı işlemler uygulanırsa,

$$\sum_{j=1}^{n_e + n_f} F(\bar{t}_j) \omega_j = -\frac{2}{\beta k_5} \left[\cosh\left(\frac{\omega_o k_8}{4}\right) - 1 \right] \quad i = n_e + n_f \quad (7.35a)$$

bulunur. Köprülenmenin tamamen sona ermesi için gerekli olan (6.13) şartı düzenlenirse,

$$\sum_{j=1}^{N/2} F(\bar{t}) \omega_j = -\frac{L}{2c}$$

$$\sum_{j=1}^{N/2} F(\bar{t}) \omega_j = -\frac{k_8}{2k_5} \quad i = N/2 \quad (7.35b)$$

bulunur.

8. SONUÇLAR

Bu problemde, levhaya sonsuzda uygulanan gerilme σ ve çatlak uzunluğu c dışındaki tüm değişkenler malzeme özellikleridir. Problemin çözümünden elde edilen sonuçlar bu bölümde üç alt başlık halinde sunulmuştur. İlk olarak sonsuz uzunluklu gevrek SiC lifleri ile kuvvetlendirilmiş Al_2O_3 seramik kompozit malzeme örnek alınıp lif hacim oranı V_f 'nin çözümlere etkisi incelenmiştir. İkinci olarak yine aynı malzeme örnek alınarak farklı c/a oranları için çözümler sunulmuştur. Üçüncü ve son olarak sonlu uzunluklu kayarak pekleşen polipropilen lifleri ile kuvvetlendirilmiş çimento esaslı matris kompozit malzemesi örnek alınarak lif-matris arayüzeyinde lifin kayarken davranışını karakterize eden β 'nin çözümler üzerinde etkisi incelenecektir.

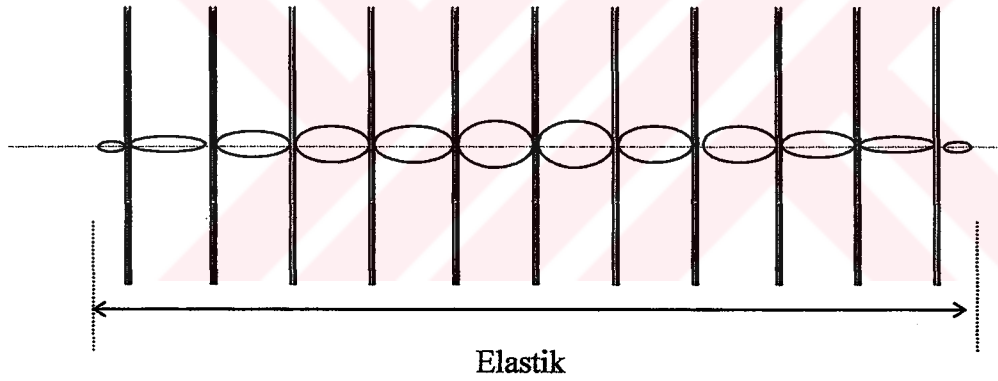
Lif içermeyen levha için gerilme şiddeti çarpanı olan $K_0 = \sigma\sqrt{c}$ değerleri ile grafiklerin düşey eksenleri olan K değerleri normalize edildiğinde, K/K_0 oranı bize liflerin varlığının etkisi hakkında bilgi verir. Çözümlerin doğruluğunu kontrol etmek için, bu bölümdeki bütün grafiklerde bu işlem yapıldığında, bu oranın her zaman 1'den küçük olduğu hesaplanarak grafiklerde gösterilmiştir. Yani liflerin varlığı levhadaki çatlakın uç noktalarındaki gerilme şiddeti çarpanı değerlerini düşürmekte ve malzemeyi iyileştirmektedir.

SiC / Al_2O_3 seramik kompozit malzeme (Becher ve Wei, 1984), (Jenkins ve diğ., 1987), (Rühle ve diğ., 1987), (Hsueh, 1988, 1990), (Hsueh ve Becher, 1988, 1996), (Krause ve diğ., 1990), (Rödel ve diğ., 1991), (Xu ve diğ., 1998), (Brandt, 1995), (Chawla, 1993), Polipropilen veya çelik lifler ile kuvvetlendirilmiş çimento esaslı matrisli kompozit malzeme ((Betterman ve diğ., 1994), (Lin ve Li, 1997), (Wang ve diğ., 1988), (Li ve Stang, 1997), (Chawla, 1993) daha önce yapılan birçok çalışmaya örnek oluşturmuştur. Bu çalışmada kullanılan seramik kompozit bileşenlerine ait malzeme sabitleri Tablo 8.1'de verilmiştir.

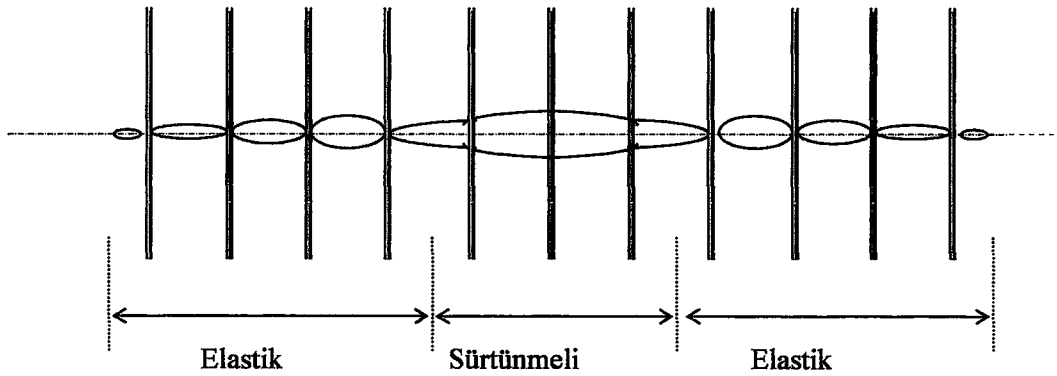
Tablo 8.1. Örnek malzeme olarak kullanılacak kompozitlere ait (7.20) ifadeleri ile verilen oranlar.

	k_2 (σ_s/τ_s)	k_3 (E_f/E_m)	k_4 (E_f/σ_s)	k_6 (p/a)	k_8 (L/a)	β	v_f/v_m
SiC/ Al ₂ O ₃	100	1.25	100	2.4	-	0	0.3/0.25
Polipropilen lif / Çimento esashlı matris	$\cong 745$	468	195	-	600	0.0128	0.4/0.25
Çelik lif / Çimento esashlı matris	$\cong 1702$	840	$\cong 53$	-	48	-0.075	0.3/0.25

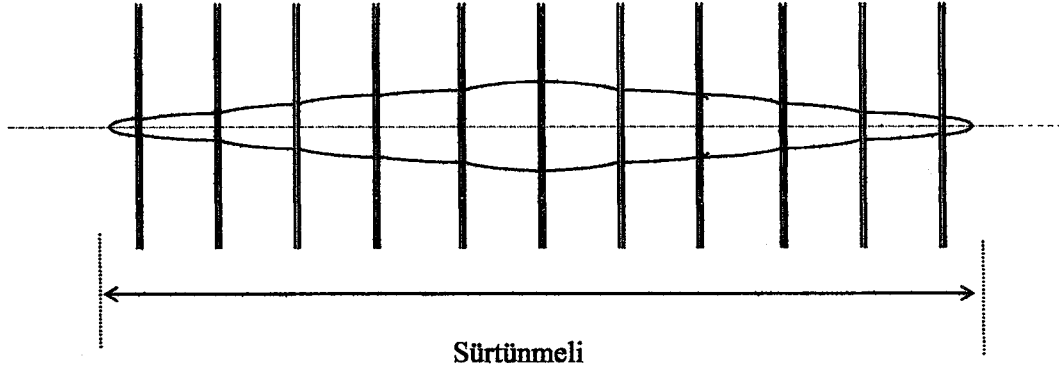
Levhaya uygulanan sonsuzdaki gerilme artırılırken çatlakta beklenen köprülenme tipi sıralaması şekil 8.1(a-d) de sırasıyla çizilmiştir. Şekil 8.1(e) de ise çatlak ortasındaki lifin matris içerisinden tamamen sıyrılıp çıktığı yani köprülenmenin sona erdiği an çizilmiştir.



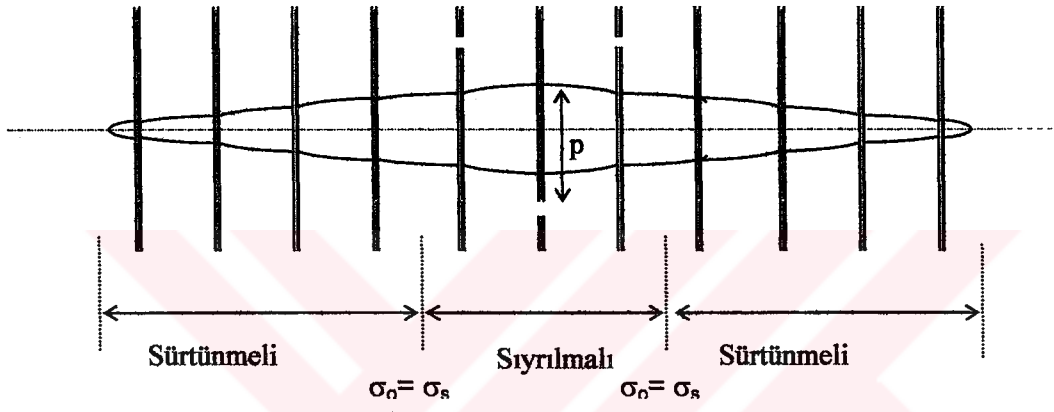
(a)



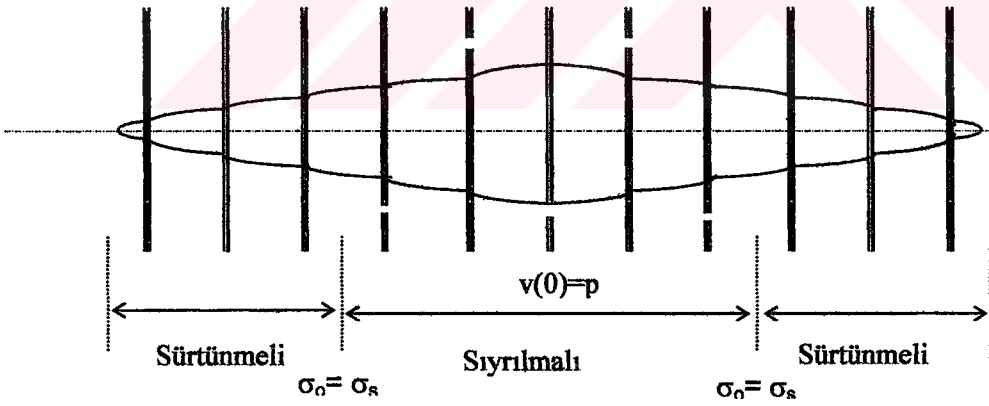
(b)



(c)



(d)



(e)

Şekil 8.1. Sabit uzunluklu çatlakta levhaya sonsuzda uygulanan gerilme arttırılırken yukarıdan aşağıya doğru aşamalı olarak beklenen köprülenme modelleri. (a) Elastik, (b) Elastik+Sürtünmeli, (c) Sürtünmeli, (d) Sürtünmeli+Sıyrılmalı, (e) Köprülenmenin sona erdiği an.

Yapılan hesaplarda varsayılan köprülenme tiplerine göre çözüm aralıkları Tablo 8.2 de verilen sınır ve geçiş şartları ile belirlenmiştir. Burada alt sınırlar çatlak ucundaki

ilk lifin sağlaması gereken koşul, üst sınırlar çatlak ortasındaki lifin ve geçiş şart ise köprülenme tipinin değiştiği noktadaki sağlanması gereken koşuldur.

Çatlağın tamamının elastik köprülenmesi durumuna ait grafiklerde verilen tablodaki üst sınırlar lif-matris arayüzeyindeki kayma gerilmesinin kayma dayanımını aşmasını ifade eden (7.30a) şartı ile belirlenmiştir.

Çatlağın tamamının sürtünmeli köprülenmesi durumuna ait grafiklerde verilen alt sınırlar, çatlak uzunluğu boyunca tüm ayrıklaştırılmış noktaların (7.30a) şartını sağlaması ile belirlenmiştir, üst sınırlar ise lifteki eksenel gerilmenin kopma dayanımını aşmasını ifade eden (7.30b) şartı ile belirlenmiştir.

Çatlağın tamamının sıyrılmalı köprülenmesi durumuna ait grafiklerde verilen tabloda çatlak uzunluğu boyunca tüm ayrıklaştırılmış noktaların (7.30b) şartını sağlaması ile; üst sınırlar ise çatlak açılmasının lif sıyrılma uzunluğuna ulaşmasını ifade eden (7.30c) şartı ile belirlenmiştir.

Tablo 8.2. Köprülenme tiplerine göre sınır ve geçiş şartları.

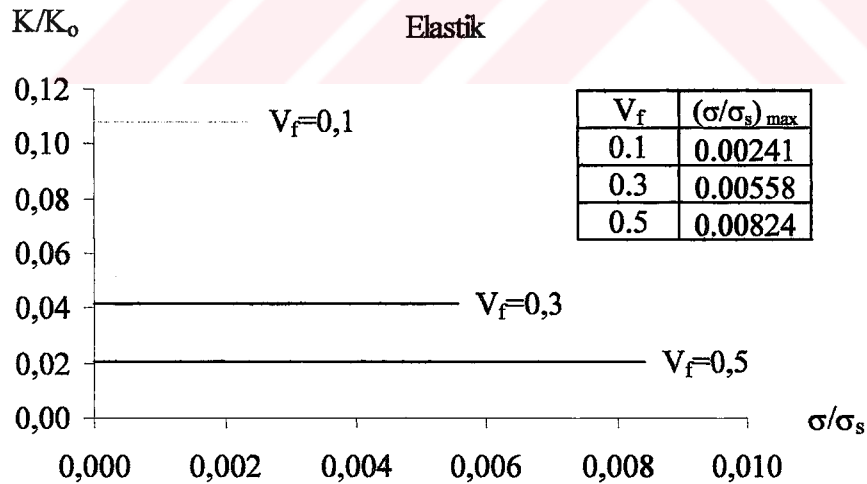
	Köprülenme tipi	Alt sınır	Geçiş şartı	Üst sınır
Gevrek, sonsuz uzun lif	E	-	-	$\tau_o \leq \tau_s$
	E+F	-	$\tau_o = \tau_s$	$\sigma_o \leq \sigma_s$
	F	$\tau_o \geq \tau_s$	-	$\sigma_o \leq \sigma_s$
	F+P	$\tau_o \geq \tau_s$	$\sigma_o = \sigma_s$	$v \leq p/2$
	P	$\sigma_o \geq \sigma_s$	-	$v \leq p/2$
Kayarak peklesen, sonlu uzunluklu lif	F	$\tau_o \geq \tau_s$	-	$h \leq L/2$
	F+P	$\tau_o \geq \tau_s$	$h = L/2$	$v \leq L/2$
	P	$h \geq L/2$	-	$v \leq L/2$

Çatlak ucundan itibaren sırasıyla elastik+sürtünmeli köprülenme olduğu kabul edilerek elde edilen grafiklerde, köprülenme tipi geçiş noktalarında (7.30a) şartı ($\tau_o = \tau_s$) sağlatılmış ve üst sınırlar (7.30b) şartı ($\sigma_o \leq \sigma_s$) ile belirlenmiştir.

Çatlak ucundan itibaren sırasıyla sürtünmeli+sıyrılmalı köprülenme olduğu kabul edilerek elde edilen grafiklerde, köprülenme tipi geçiş noktalarında (7.30b) şartı ($\sigma_o = \sigma_s$) sağlatılmıştır ve üst sınırlar, çatlağın ortasındaki açıklığının sıyrılma uzunluğuna ulaşması (7.30c) şartı ($v_{max} \leq p/2$) ile belirlenmiştir.

8.1. Lif Hacim Oranının Çözümlere Etkisi

İlk olarak, gevrek liflere örnek olarak seramik bir kompozit malzeme olan SiC/Al₂O₃ alınmıştır. Rödel ve diğ. (1991) bu malzemede oluşan köprülenme olayını elektron mikroskobu ile incelemişlerdir. Yarıçapı 0.5µm olan SiC liflerinin kullanıldığı bu incelemede numune zorlandıkça çatlak ucundan daima 100µm mesafede elastik köprülenmenin gözlemlendiği ortaya konmuştur. Yine bu çalışmada yarım çatlak boyu 1mm'ye ulaşınca kadar köprülenme olayının gözlenebildiği belirtilmiştir. Bu deneysel gözlemlere dayanarak c/a oranı 200 olacak şekilde çatlağa sahip kompozit malzemede gerilme şiddeti çarpanı, ilgili köprülenmenin oluşmasını sağlayan gerilme aralıkları ve köprülenme geçiş noktaları $V_f=0.1$, 0.3 ve 0.5 lif hacim oranları için incelenmiştir. Şekil 8.2'de çatlağın tamamının elastik köprülendiği durum gösterilmiştir.

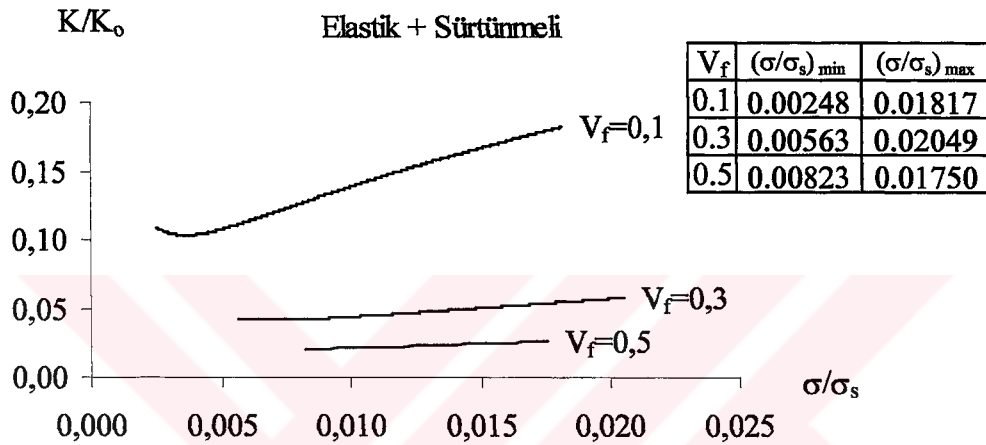


Şekil 8.2. Tamamı elastik köprülenme ile yük aktaran çatlağı olan levhaya sonsuzda uygulanan gerilme artışına göre, farklı lif hacim oranları için gerilme şiddeti çarpanı değerlerinin değişimi, $k_s=c/a=200$.

Bu grafiğe ait K/K_0 oranı, her lif hacim oranı ve çatlak açıklığı için levhaya sonsuzda uygulanan gerilmeden bağımsız olarak sabit kalmaktadır. Ayrıca, lif hacim oranı arttıkça elastik köprülenmenin gerçekleştiği gerilme aralığı da artmaktadır. Başka bir

deyişle, çatlak elastik köprülendiğinde, lif hacim oranı arttıkça, lif-matris arayüzeylerinin bağlı kalması ve sürtünmeli kaymanın başlangıcı daha büyük gerilme değerlerine ötelenerek, sürtünmeli köprülenmeye geçiş gecikmektedir.

Elastik köprülenen bir çatlak, geçiş şartını sağladığında, çatlağın ortasında, zorlamanın artması ile sürtünmeli köprülenme oluşmaya başlar. Şekil 8.3 de çatlak uçlarında elastik ve ortasında sürtünmeli köprülenme olduğu kabul edilerek çözümler elde edilmiştir. Bu anlamda, Şekil 8.3 grafiği Şekil 8.2 grafiğinin devamıdır.



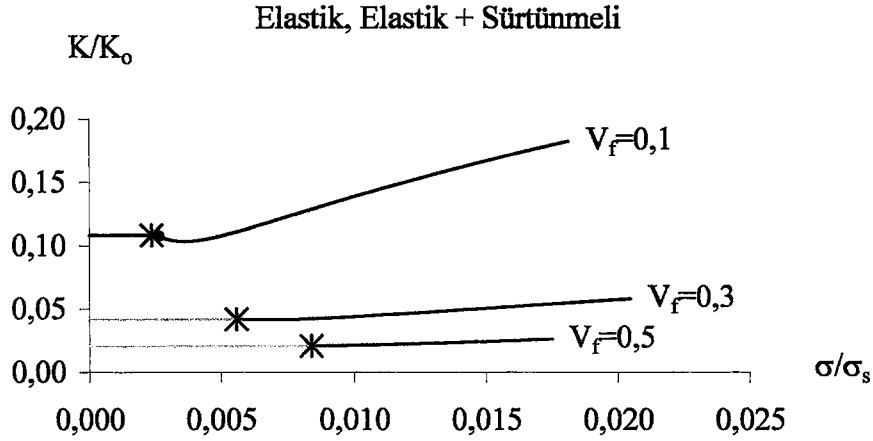
Şekil 8.3. Uçlarında elastik köprülenme, ortasında sürtünmeli köprülenme ile yük aktaran çatlağı olan levhaya, sonsuzda uygulanan gerilme artışına göre, farklı lif hacim oranları için gerilme şiddeti çarpanı değerlerinin değişimi, $c/a=200$.

Şekil 8.3'te görüldüğü gibi, bir çatlakta elastik+sürtünmeli köprülenme aynı anda oluştuğunda, sıyrılmalı köprülenmeye geçme şartını sağlayan en büyük gerilme , lif hacim oranı $V_f = 0.3$ için bulunmuştur. Diğer lif hacim oranlarında, daha küçük gerilme aralıklarında elastik+sürtünmeli köprülenme ile yük aktarabildikleri hesaplanmıştır.

Elastik köprülenme durumuna ait Şekil 8.2 deki $\max(\sigma/\sigma_s)$ değeri, Elastik+Sürtünmeli köprülenme durumuna ait Şekil 8.3 deki $\min(\sigma/\sigma_s)$ değeri ve bunlara karşı gelen gerilme şiddeti çarpanı değerleri üstüste düşmektedir. Şekil 8.2 ve Şekil 8.3 grafikleri, bir grafikte Şekil 8.4'te çizilmiştir.

İki tip eğrilerin buluşma noktaları Şekil 8.4'te x işareti ile gösterilmiştir. Buluşma noktalarının hemen sol tarafında çatlağın tamamı elastik köprülenirken, hemen sağ tarafında çatlak ucunda elastik ve orta kısımda sürtünmeli köprülenme oluşmaya

başlamaktadır ve gerilme arttıkça sürtünmeli köprülenmenin olduğu bölge çatlak ucuna kadar büyüterek ulaşmaktadır.

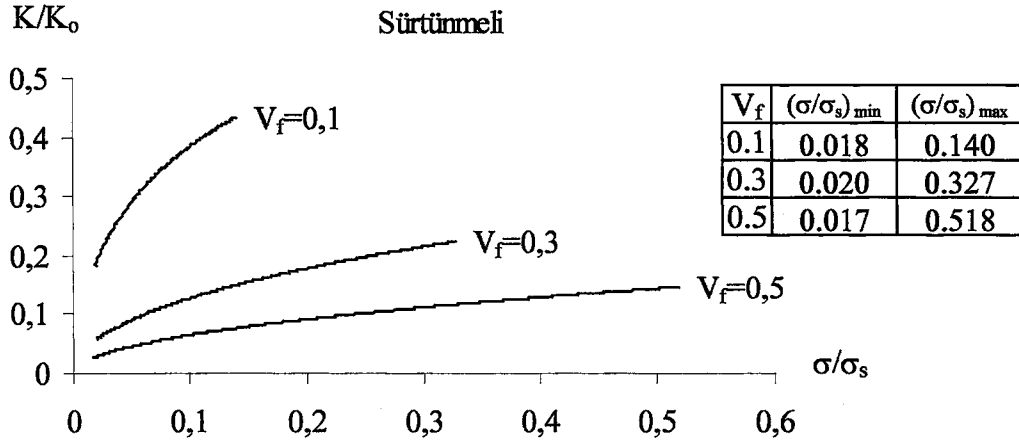


Şekil 8.4. Şekil 8.2 ve Şekil 8.3 grafiklerinin birlikte çizimi. (x işaretinin hemen sağında çatlak ortasında sürtünmeli köprülenme, çatlak uçlarında elastik köprülenmeye eşlik etmeye başlamaktadır) $c/a=200$.

Bu grafikte, farklı lif hacim oranlarına ait eğrilerde, sürtünmeli köprülenmenin olduğu bölge uzunluğunun, elastik+sürtünmeli köprülenme için çözümün bulunduğu $\min(\sigma/\sigma_s)$ - $\max(\sigma/\sigma_s)$ aralığında gerilme arttırıldıkça, herbiri için belirli x_{ef} değerlerinin sıfırdan başlayarak $c = 200a$ 'ya kadar ilerlediği görülmüştür. Grafikte görüldüğü gibi, bu gerilme değerlerinde, çatlak tamamının elastik köprülendiği ve x_{ef} kadar uzunluğun sürtünmeli ve geri kalan kısmın ise elastik köprülenmesi durumlarına ait gerilme şiddeti çarpanları eşit bulunmuştur.

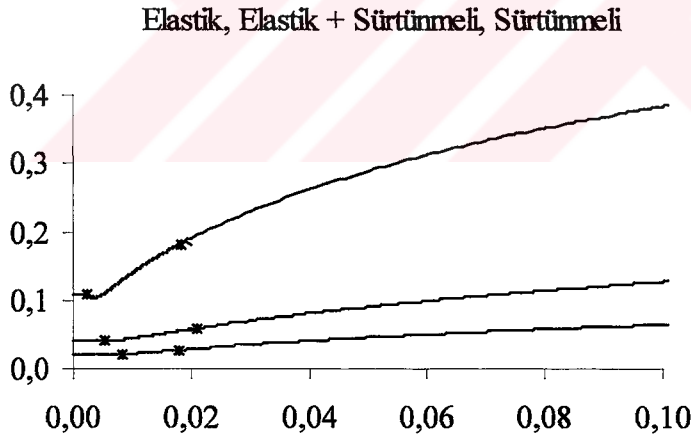
Bütün çatlak açıklığı boyunca sürtünmeli köprülenme ile yük aktarıldığı durumlarda, lif hacim oranı arttıkça, sıyrılmalı köprülenmeye geçiş gecikmektedir (Şekil 8.5).

Sürtünmeli köprülenmenin olduğu gerilme aralığı, elastik köprülenmenin olduğu gerilme aralığının $V_f=0.1$ için 50.6 katı, $V_f=0.3$ için 55.0 katı, $V_f=0.5$ için 60.8 katı kadardır. Sürtünmeli köprülenmenin olduğu gerilme aralığı, elastik ve sürtünmeli köprülenmenin olduğu gerilme aralığının $V_f=0.1$ için 6.5 katı, $V_f=0.3$ için 2.5 katı, $V_f=0.5$ için 1.1 katı kadardır. Elastik köprülenmenin teorik olarak çatlak uç kısmında hep var olacağını fakat, lif hacim oranı arttıkça artan bu mertebe farkına dayanarak, diğer köprülenme tiplerine göre çatlak çok küçük bir uzunluğu boyunca gerçekleştiğini ve sistem üzerindeki etkisini kaybettiği söylenebilir.



Şekil 8.5. Tamamı sürtünmeli köprülenme ile yük aktaran çatlağı olan levhaya sonsuzda uygulanan gerilme artışına göre, farklı lif hacim oranları için gerilme şiddeti çarpanı değerlerinin değişimi, $c/a=200$.

Şekil 8.6'da elastik, elastik+sürtünmeli, sürtünmeli köprülenme durumlarına ait çözümler birlikte görülmektedir. Fakat sürtünmeli köprülenme, diğer iki duruma göre daha büyük aralıkta oluştuğundan grafikte görülebilmesi için, sürtünmeli köprülenmenin sadece alt kısmı alınarak çizilmiştir.



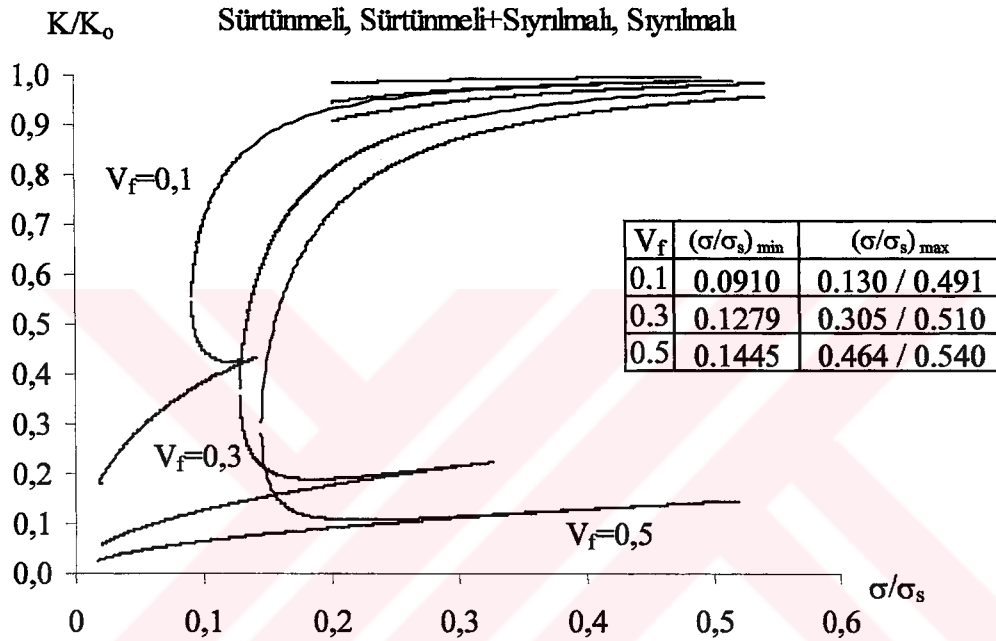
Şekil 8.6. Şekil 8.4 ve Şekil 8.5 grafiklerinin birlikte çizimi.

Şekil 8.5'te görüldüğü gibi elastik köprülenmenin varlığı belirli gerilme değerinden sonra hesaplarda sistemi etkilememektedir. Lif hacim oranı arttıkça ikili köprülenmelerin oluşmasının zorlaştığı söylenebilir.

Seçilen sabit c/a ve σ/σ_s değerlerine göre, sürtünmeli+sıyrılmalı köprülenme durumunda iki çözüm bulunabilmektedir. Bu durum sürtünmeli köprülenmedeki

lineer olmayan köprülenme gerilmesi-çatlak açıklığı ifadesinin varlığından kaynaklanmaktadır.

Bütün çatlak açıklığı sürtünmeli+sıyrılmalı köprülenme ile yük aktardığı durumlarda, lif hacim oranı arttıkça, köprülenme olayının tamamen sona ermesi daha büyük gerilme değerlerine ertelenmektedir. Ayrıca, levhaya sonsuzda uygulanan gerilmenin şiddeti artırıldıkça, tüm lif hacim oranlarına ait doğrular birbirlerine ve $K=K_0$ doğrusuna yaklaşılmaktadır.



Şekil 8.7. Uçlarında sürtünmeli köprülenme, ortasında sıyrılmalı köprülenme ile yük aktaran çatlaklı olan levhaya, sonsuzda uygulanan gerilme artışına göre, farklı lif hacim oranları için gerilme şiddeti çarpanı değerlerinin değişimi, $c/a=200$.

Sürtünmeli köprülenen bir çatlak, geçiş şartını sağladığında, çatlakın ortasında zorlamanın artması ile sıyrılmalı köprülenme oluşmaya başlar. Çatlak ucundan itibaren sürtünmeli ve sıyrılmalı köprülenmenin birlikte bulunduğu duruma ait çözümleri veren grafik Şekil 8.7’de verilmiştir. Görüldüğü gibi bu durumda bazı gerilme değerleri için iki çözüm bulunmuştur. Bu grafiğe, birbirlerine göre durumlarının gözlenebilmesi için, sürtünmeli ve sıyrılmalı köprülenme çözümleri eklenmiştir.

Çatlakın tamamında sıyrılmalı köprülenme olduğu kabul edilerek çizilen grafik, Şekil 8.7’de verilmiştir. Çatlak tamamen sürtünmeli köprülendiği durumda hemen çatlak ucundaki ayırık noktada $\tau > \tau_s$ olması şartı ile alt sınırlar bulunabildiği halde,

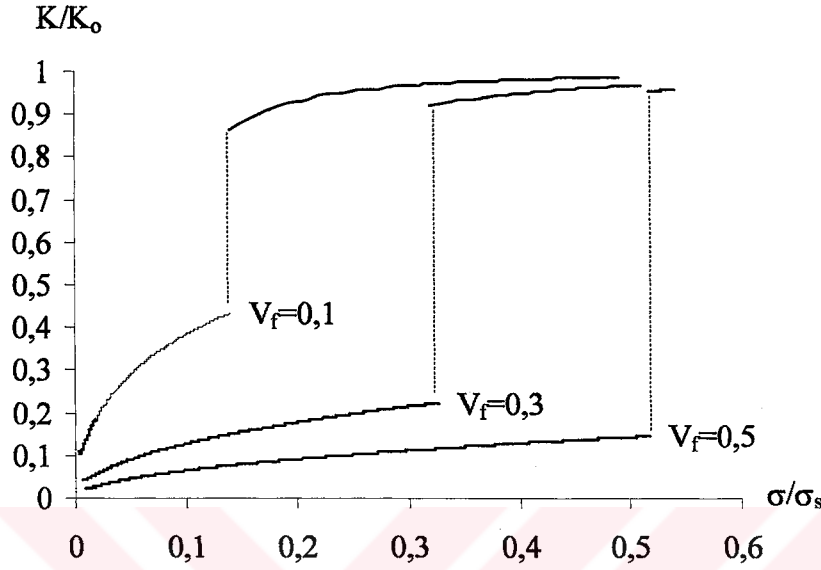
çatlak tamamen sıyrılmalı köprülendiği durumda aynı noktada $\sigma > \sigma_s$ olması şartı ile bir alt sınır bulunamamıştır. Bu çözüme, sadece sürtünmeli ve sıyrılmalı ikili köprülenmesi için bir asimptot oluşturması açısından yer verilmiştir, fiziksel olarak tek başına tüm çatlak boyunca sıyrılmalı köprülenme oluşması mümkün değildir. Bir alt sınırın bulunamaması, sıyrılmalı köprülenme esnasında çatlak ucunda sürtünmeli köprülenmenin ihmal edilemeyecek kadar bir aralıkta var olduğunu ve köprülenme olayı sona erene dek sıyrılmalı köprülenmeye eşlik ettiğini ortaya koymaktadır.

Sürtünmeli köprülenmenin üst sınırı, aynı zamanda sürtünmeli+sıyrılmalı ikili köprülenmenin alt sınırıdır. Çözümler bu şekilde bulunmasına rağmen, eğrinin davranışını görmek açısından önceki gerilme değerlerine ait ikili köprülenme değerleri bulunarak grafikte gösterilmiştir.

Bu grafikte, alt kısımda kalan, sadece sürtünmeli köprülenmeye ait sürtünmeli köprülenmeden sıyrılmalı köprülenmeye geçiş için $\sigma_o > \sigma_s$ şartı daha sağlanamadan, $\min(\sigma/\sigma_s)$ değerlerinde sürtünmeli+sıyrılmalı köprülenme çözümlerin bulunduğu görülmektedir. $V_f=0.1$ lif hacim oranı için $0.091 < \sigma/\sigma_s < 0.13$ GPa; $V_f=0.3$ lif hacim oranı için $0.1279 < \sigma/\sigma_s < 0.305$; $V_f=0.5$ lif hacim oranı için $0.1445 < \sigma < 0.540$ aralığında gerilme şiddeti çarpanı değerleri çift değerlidir.

Şekil 8.7’de görüldüğü gibi, bu duruma ait çözümünlerin alt kolu sürtünmeli köprülenme eğrisine, üst kolu ise sıyrılmalı köprülenme eğrisine teğet olmaktadır. Üstteki sıyrılmalı köprülenme eğrisinin ve üst kolun $\max(\sigma/\sigma_s)$ değerlerinin aynı çıkmış olması çözümü doğrular niteliktedir. Levhaya sonsuzda uygulanan gerilme arttıkça, sıyrılmalı köprülenmenin oluştuğu çatlak eksenini üzerindeki aralık, her çözüm eğrisinin üst kolunda çatlak ucuna doğru genişlemekte, alt kolunda ise çatlak ortasına doğru daralmaktadır. Alt kollara ait bu durum olayın fiziğine aykırıdır. O halde ikili köprülenmenin çözümlerinden biri olan alt kol, fiziksel olarak anlamsız olduğu ve problemin kuruluşuna uymadığı için gözönüne alınmayabilir. Bu durumda çözüm Şekil 8.8’deki gibidir.

Elastik, Elastik+Sürtünmeli, Sürtünmeli,
Sürtünmeli+ Sıyrılmalı



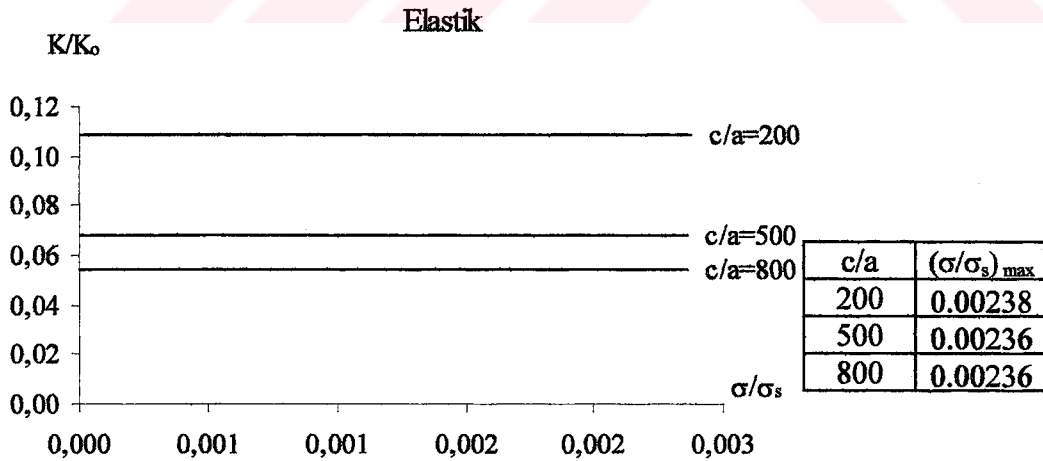
Şekil 8.8. Şekil 8.5 ve Şekil 8.7 grafiklerinin birlikte gösterimi, $c/a=200$.

İkili sürtünmeli+sıyrılmalı köprülenmesine ait çözümlerin bulunabildiği en küçük gerilme değerleri, lif hacim oranı arttıkça artmaktadır. Şekil 8.7'deki çözümün bulunduğu ilk gerilme değerleri tamamen sürtünmeli köprülenme olmayıp, birdenbire sıyrılmalı köprülenmenin c çatlak uzunluğunun $V_f=0.1$ için %59'unda, $V_f=0.3$ için %80'inde ve $V_f=0.5$ için %89'unda olacak şekilde meydana çıktığı ve gerilme arttırıldıkça çatlak ucuna doğru genişlediği hesaplanmıştır. Fakat Şekil 8.8'deki çözümün ilk değerlerinde c çatlak uzunluğunun $V_f=0.1$ için %91'inde, $V_f=0.3$ için %99'unda ve $V_f=0.5$ için %99'unda olacak şekilde meydana çıktığı hesaplanmıştır. Lif hacim oranı arttıkça bu sıçrama büyümektedir.

Tüm grafiklerde, kompozitin lif hacim oranı arttırıldığında, çatlak ucundaki gerilmenin şiddetini karakterize eden gerilme şiddeti çarpanı değerinin azaldığı görülmektedir.

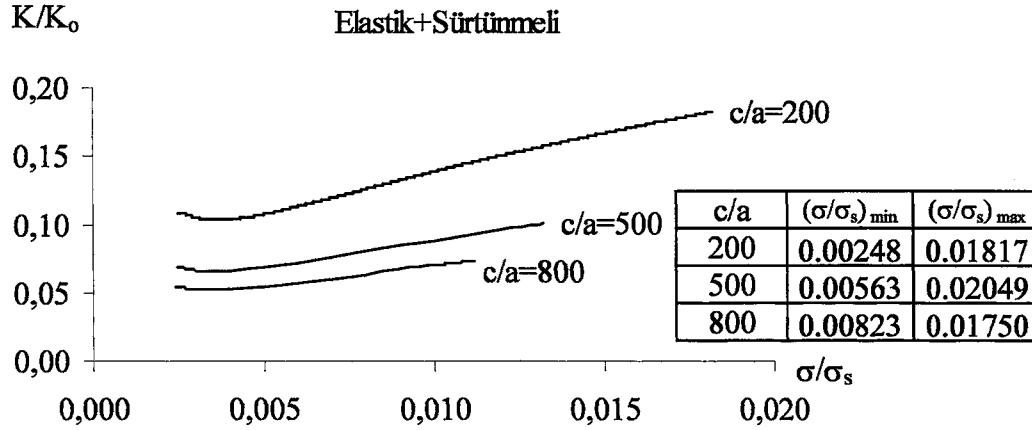
8.2. Çatlak Uzunluğunun Lif Çapına Oranının Çözümlere Etkisi

SiC/Al₂O₃ kompozit malzemesi bu bölümde de örnek malzeme olarak gözönüne alınmıştır. Yapılan çözümlerde lif hacim oranı arttıkça ikili köprülenmelerin oluştuğu gerilme aralığının azaldığı önceki bölümde görülmektedir. Aynı zamanda c/a oranına göre ikili köprülenmelerin davranışlarını incelemek için öncelikle çözüm bulunabilen en büyük c/a değerleri belirlenmiştir. c/a oranı arttıkça elastik+sürtünmeli köprülenmenin oluştuğu gerilme aralığı kısalmakta, fakat c/a=2000 değerlerine kadar küçük de olsa varlığı devam etmektedir. Sürtünmeli+sıyrılmalı ikili köprülenme oluşma aralığı c/a'nın çok daha erken değerlerinde sonlanmaktadır. $V_f=0.1$ için c/a=915, $V_f=0.3$ için c/a=326 ve $V_f=0.5$ için c/a=209'den büyük oranlarda bu ikili köprülenme için çözüm bulunamamaktadır. Başka bir deyişle tüm çatlak boyunca sürtünmeli köprülenme ile yük aktarılıyor iken, çatlak ortasındaki lif kopma dayanımına daha ulaşmadan, yarım çatlak açıklığı sıyrılma uzunluğunu çoktan aşmış olmaktadır. Yani köprülenme sona ermeden önceki iki geçiş şartı içiçe geçmektedir. Bu kısımda, her tip köprülenmenin gözlenebilmesi açısından $V_f=0.1$ lif hacim oranına sahip c/a=200, 500 ve 800 üç farklı oranlı çatlğa sahip kompozit malzeme incelenmiştir. Şekil 8.9'da çatlğın tamamının elastik köprülendiği durum gösterilmiştir.



Şekil 8.9. Tamamı elastik köprülenme ile yük aktaran çatlğı olan levhaya sonsuzda uygulanan gerilme artışına göre, farklı c/a oranları için gerilme şiddeti çarpanı değerlerinin değişimi, $V_f=0.1$.

Bu grafiğe ait K/K_0 oranı, her lif hacim oranı ve çatlak açıklığı için levhaya sonsuzda uygulanan gerilmeden bağımsız olarak sabit kalmaktadır.



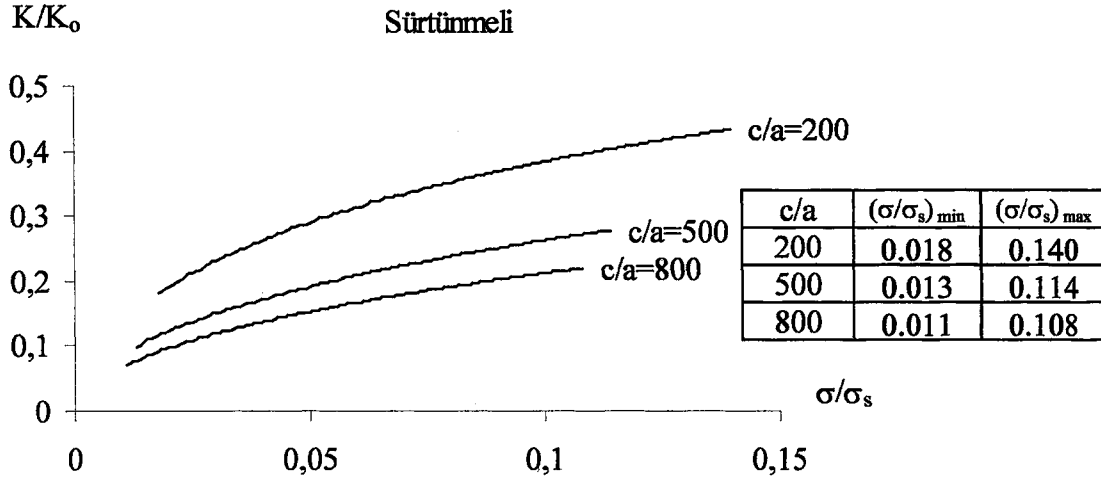
Şekil 8.10. Uçlarında elastik köprülenme, ortasında sürtünmeli köprülenme ile yük aktaran çatlaklı olan levhaya, sonsuzda uygulanan gerilme artışına göre, farklı c/a oranları için gerilme şiddeti çarpanı değerlerinin değişimi, $V_f=0.1$.

Elastik köprülenen bir çatlak, geçiş şartını sağladığında, çatlak ortasında zorlamanın artması ile sürtünmeli köprülenme oluşmaya başlar. Şekil 8.10’da çatlak uçlarında elastik ve ortasında sürtünmeli köprülenme olduğu kabul edilerek çözümler elde edilmiştir. Bu anlamda, Şekil 8.10 grafiği Şekil 8.9 grafiğinin devamıdır.

Şekil 8.10’da görüldüğü gibi, bir çatlakta elastik ve sürtünmeli köprülenme aynı anda oluştuğunda, sıyrılmalı köprülenmeye geçme şartını sağlayan $\max(\sigma/\sigma_s)$ değeri, c/a oranı arttıkça azalmaktadır. Ayrıca c/a oranı arttıkça gerilme şiddeti çarpanı değerleri azalmaktadır. a lif yarıçapının sabit olduğunu düşünürsek, bu grafikten çatlak boyu uzadıkça ilgili ikili köprülenmenin oluşma aralığının azaldığı söylenebilir.

Elastik köprülenme durumuna ait Şekil 8.9’deki $\max(\sigma/\sigma_s)$ değeri, Elastik+Sürtünmeli köprülenme durumuna ait Şekil 8.10’deki $\min(\sigma/\sigma_s)$ değeri ve bunlara karşı gelen gerilme şiddeti çarpanı değerleri üstüste düşmektedir.

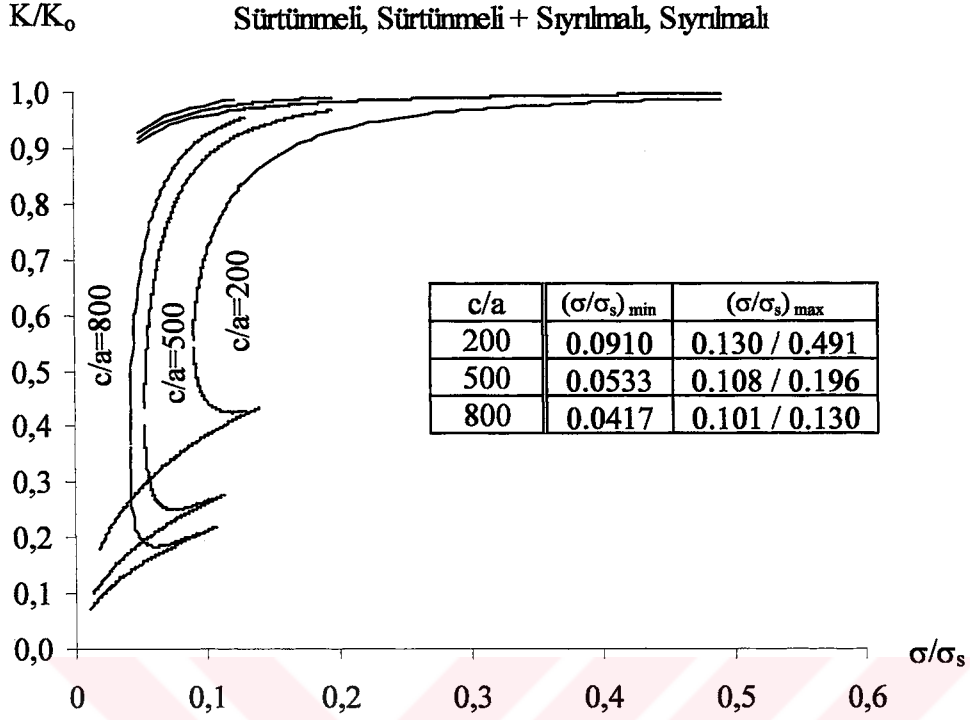
Elastik ve elastik+sürtünmeli köprülenme eğrilerinin buluşma noktalarının hemen sol tarafında çatlak tamamı elastik köprülenirken, hemen sağ tarafında çatlak ucunda elastik köprülenme orta kısımdaki sürtünmeli köprülenmeye eşlik etmektedir. Gerilme arttıkça sürtünmeli köprülenmenin oluştuğu bölge çatlak ucuna kadar büyüyerek ulaşmaktadır.



Şekil 8.11. Tamamı sürtünmeli köprülenme ile yük aktaran çatlağı olan levhaya sonsuzda uygulanan gerilme artışına göre, farklı c/a oranları için gerilme şiddeti çarpanı değerlerinin değişimi, $V_f=0.1$.

Bütün çatlak boyunca sürtünmeli köprülenme ile yük aktarıldığı durumda, c/a oranı azaldıkça, sıyrılmalı köprülenmeye geçiş gecikmektedir (Şekil 8.11). Sürtünmeli köprülenmenin olduğu gerilme aralığı, elastik köprülenmenin olduğu gerilme aralığının c/a=200 için 51.3 katı, c/a=500 için 42.8 katı, c/a=200 için 41.1 katı kadardır.

Sürtünmeli köprülenen çatlağın ortasındaki lif matris içerisinde koptuğunda, sıyrılmalı köprülenme oluşmaya başlayacaktır. Bu ikili köprülenme durumuna ait çözümler Şekil 8.12'deki grafik ile verilmiştir. Birbirlerine göre durumlarının gözlenebilmesi için bu grafikte sürtünmeli ve sıyrılmalı köprülenme grafikleri de birlikte çizilmiştir. Bu çözümde sürtünmeli köprülenmenin sona ermesi için gereken şart sağlanmadan önceki gerilme değerlerinde iki çözüm bulunmuştur. Çözümlerin alt kolu sürtünmeli köprülenme eğrisine, üst kolu ise sıyrılmalı köprülenme eğrisine teğet olmaktadır. Gerilme arttırıldıkça, sıyrılmalı köprülenmenin olduğu çatlak eksenini üzerindeki aralık, her çözüm eğrisinin üst kolunda çatlak ucuna doğru genişlemekte, alt kolunda ise çatlak ortasına doğru daralmaktadır. Alt kollara ait bu çözüm problemin beklenen senaryosuna aykırıdır. Kaldı ki sürtünmeli köprülenmenin üst sınırından önce bulunan ikili çözümlerde lifin kopma dayanımının aşılması gereği daha sağlanmamıştır. Bu durumda çözüm Şekil 8.13 ile tekrar çizilmiştir.

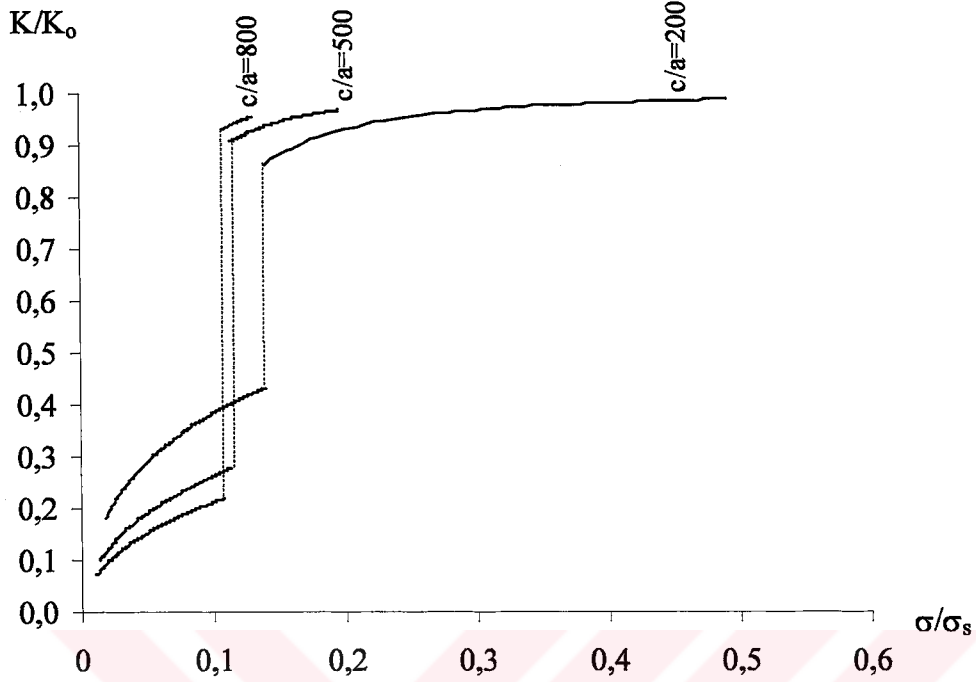


Şekil 8.12. Uçlarında sürtünmeli köprülenme, ortasında sıyrılmalı köprülenme ile yük aktaran çatlaklı olan levhaya, sonsuzda uygulanan gerilme artışına göre, farklı c/a oranları için gerilme şiddeti çarpanı değerlerinin değişimi, $V_f=0.1$.

Sadece sıyrılmalı köprülenme ile yük aktaran çatlakın çözümlerine, sürtünmeli+sıyrılmalı köprülenme çözümlerine asimptot oluşturması açısından yer verilmiştir. Bu çözümlerde gerekli alt sınır sağlanamadan üst sınırı ulaşılmakta ve çözüm sonlanmaktadır. Sürtünmeli+sıyrılmalı ve sıyrılmalı köprülenme üst sınırlarının üst üste düşmesi, sıyrılmalı köprülenme esnasında çatlak ucunda sürtünmeli köprülenmenin mutlaka var olması gerektiğini ve köprülenme sona erene dek sıyrılmalı köprülenmeye eşlik ettiğini ortaya koymaktadır.

Sürtünmeli+sıyrılmalı köprülenme ile yük aktarıldığında, c/a oranı azaldıkça, köprülenmenin tamamen sona ermesi daha büyük gerilme değerlerine ertelenmektedir. Ayrıca gerilme arttırıldıkça, tüm c/a oranlarına ait çözümler birbirlerine ve beklenen 1 değerine yaklaşmaktadırlar.

Sürtünmeli, Sürtünmeli + Sıyrılmalı, Sıyrılmalı



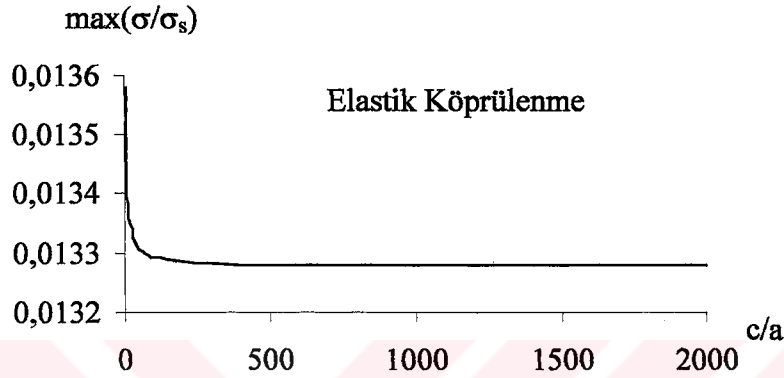
Şekil 8.13. Şekil 8.11 ve Şekil 8.12 grafiklerinin birlikte gösterimi, $V_f=0.1$.

İkili sürtünmeli+sıyrılmalı köprülenmesine ait çözümlerin bulunabildiği en küçük gerilme değerleri, lif hacim oranı arttıkça artmaktadır. Ayrıca çözümün bulunduğu ilk gerilme değerleri tamamen sürtünmeli köprülenme olmayıp, sıyrılmalı köprülenmenin c çatlak uzunluğunun $c/a=200$ için %59'unda, $c/a=500$ için %74'ünde, $c/a=800$ için %81'inde birdenbire meydana çıktığı ve gerilme arttırıldıkça çatlak ucuna doğru genişlediği hesaplanmıştır. c/a oranı arttıkça bu sıçrama büyümektedir. Fakat Şekil 8.13'te verilen çözümün bulunduğu ilk gerilme değerlerinde, sıyrılmalı köprülenmenin c çatlak uzunluğunun $c/a=200$ için %93'ünde, $c/a=500$ için %98'inde, $c/a=800$ için %99'unda birdenbire meydana çıktığı hesaplanmıştır.

Elastik, Elastik+sürtünmeli ve sürtünmeli köprülenme durumlarında çatlak boyu uzadıkça, çatlak ucundaki gerilmenin şiddetini karakterize eden gerilme şiddeti çarpanı değeri azalmaktadır. Fakat sürtünmeli+sıyrılmalı köprülenme durumunda, c/a oranı arttıkça gerilme şiddeti çarpanı değeri artmaktadır.

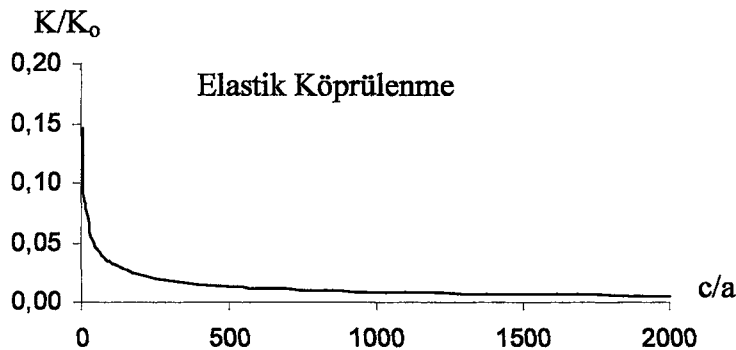
Yukarıdaki hesaplarda sadece üç c/a oranına göre çözümler sunulmuştur. Fakat c/a oranının daha geniş aralıkta değişimine göre çözümleri izleyebilmek açısından köprülenme tiplerinin en büyük gerilme oranı ve bunlara karşı gelen gerilme şiddeti çarpımı değerleri aşağıda grafiklerle sunulmuştur.

Elastik köprülenmenin sonlandığı $\max(\sigma/\sigma_s)$ değerleri ve K/K_0 değerleri Şekil 8.14 ve Şekil 8.15'te verilmiştir.



Şekil 8.14. $V_f=0.3$, $k_2=140$, $k_3=1.25$, $k_4=71.43$, $k_6=4$, $v_f=0.3$, $v_m=0.25$ için elastik köprülenmesi için gerekli $\max(\sigma/\sigma_s)$ değerleri ($c/a \rightarrow \infty \Rightarrow \sigma \rightarrow 0.013\sigma_s$).

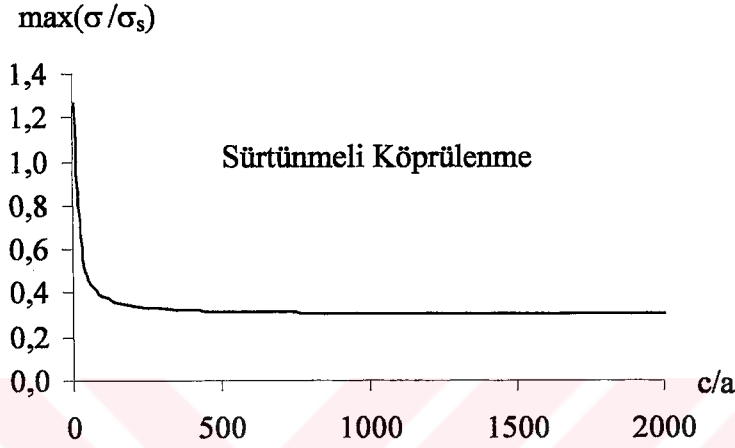
Şekil-8.14'te a lif yarıçapını sabit düşünürsek, c/a nin artması çatlak boyunun uzamasına karşı gelir. Çatlak boyu uzadıkça tüm çatlak boyunca elastik köprülenmeyi sağlayan en büyük gerilme oranı azalmakta ve bu malzeme için $\sigma/\sigma_s = 0.0133$ değerine asimptot kalmaktadır.



Şekil 8.15. $V_f=0.3$, $k_2=140$, $k_3=1.25$, $k_4=71.43$, $k_6=4$, $v_f=0.3$, $v_m=0.25$ için elastik köprülenen çatlak ucundaki normalize edilmiş gerilme şiddeti çarpımı değişimi.

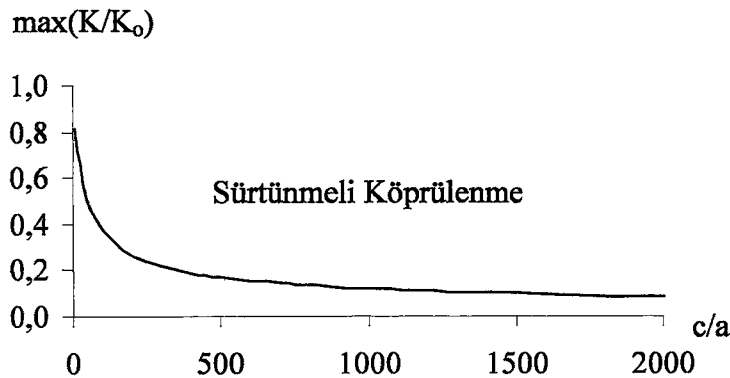
Elastik köprülenmede her c/a değeri için σ / σ_s oranından bağımsız olarak K/K_0 değerleri sabit kalmaktadır. Şekil-8.15'te c/a sonsuza gittikçe K/K_0 sıfıra yaklaşmaktadır.

Çatlağın tamamının sürtünmeli köprülenme ile yük aktarabileceği gerilme aralığının tesbiti için Şekil 8.16'daki grafik çizilmiştir.



Şekil 8.16. $V_f=0.3$, $k_2=140$, $k_3=1.25$, $k_4=71.43$, $k_6=4$, $v_f=0.3$, $v_m=0.25$ malzemesinde tümü sürtünmeli köprülenme ile yük aktaran çatlağın alabileceği en büyük k_1 değerleri. ($c/a \rightarrow \infty \Rightarrow \sigma \rightarrow 0.31\sigma_s$)

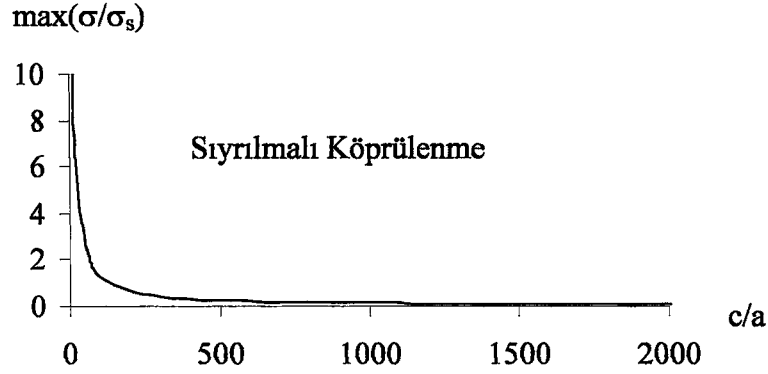
Lif yarıçapı a 'nın sabit kaldığı düşünülürse, c ne kadar artarsa artsın sürtünmeli köprülenmenin oluşabileceği gerilme aralığı $\sigma = 0.31\sigma_s$ ile sınırlanmaktadır.



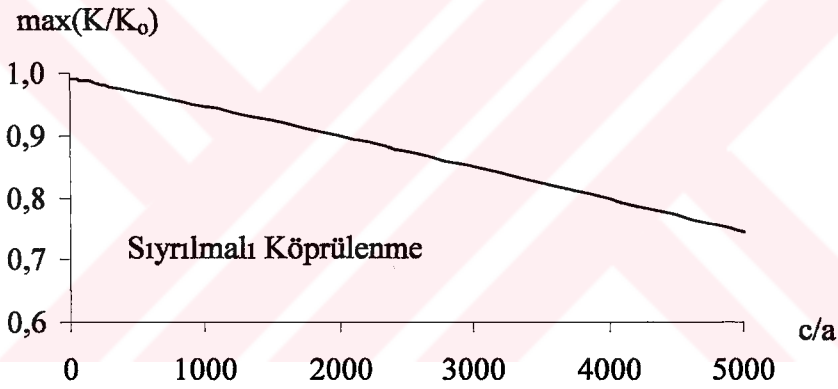
Şekil 8.17. $V_f=0.3$, $k_2=140$, $k_3=1.25$, $k_4=71.43$, $k_6=4$, $v_f=0.3$, $v_m=0.25$ malzemesinde tümü sürtünmeli köprülenme ile yük aktaran çatlağın alabileceği $\max(K/K_0)$ değerleri ($c/a \rightarrow \infty \Rightarrow K/K_0 \rightarrow 0$).

Şekil-8.17'deki grafikte sürtünmeli köprülenme halinde herbir c/a oranına ait çözüm yapılırken σ / σ_s gerilme oranı arttıkça K/K_0 oranının arttığı gözlenmiştir.

Sürtünmeli köprülenmeyi sona erdiren lifin matris içinde kopması anında elde edilen $\max(\sigma/\sigma_s)$ gerilme oranlarına karşı gelen $\max(K/K_0)$ değerleri Şekil 8.19’da grafiklerle verilmiştir.



Şekil 8.18. $V_f=0.3$, $k_2=140$, $k_3=1.25$, $k_4=71.43$, $k_6=4$, $v_f=0.3$, $v_m=0.25$ malzemesinde tümü sıyırılmalı köprülenme ile yük aktaran çatlağın alabileceği $\max(\sigma/\sigma_s)$ değerleri.

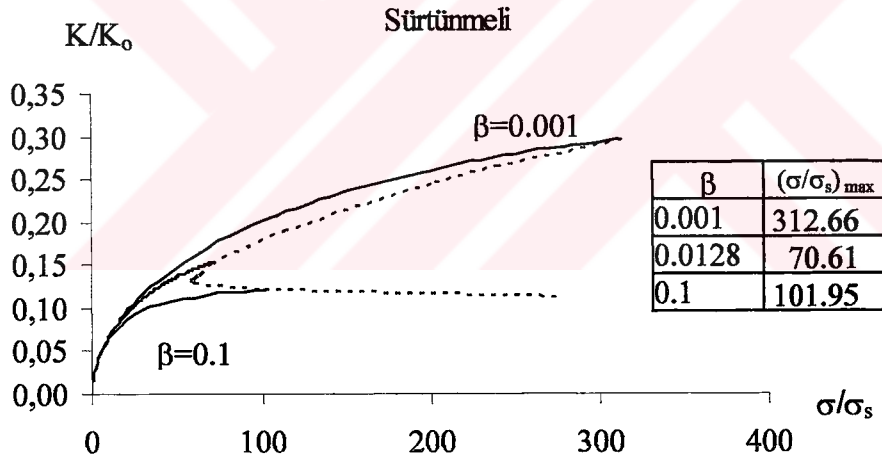


Şekil 8.19. $V_f=0.3$, $k_2=140$, $k_3=1.25$, $k_4=71.43$, $k_6=4$, $v_f=0.3$, $v_m=0.25$ malzemesinde tümü sıyırılmalı köprülenme ile yük aktaran çatlağın alabileceği $\max(K/K_0)$ değerleri.

8.3. Arayüzey Pekleşme Katsayısının Çözümlere Etkisi

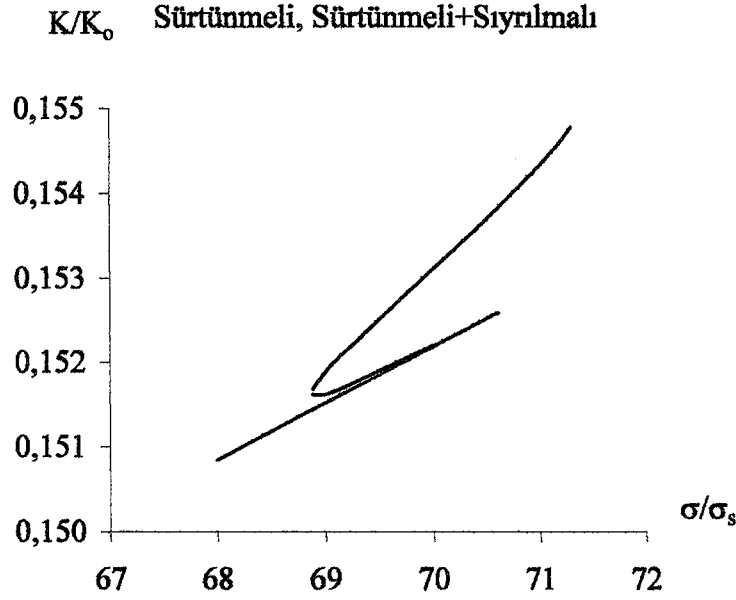
Üçüncü kısımda ise örnek malzeme olarak yeterince uzun polimer (nylon, polipropilen, vs.) veya çelik lifler ile kuvvetlendirilmiş çimento esaslı matris kullanılacaktır. Tablo 8.1 ile malzeme özellikleri verilen bu kompozite ait β katsayısının değeri 0.0128 dir. $V_f=0.3$ lif hacim oranı ve $c=200a$ uzunluklu çatlak içeren kompozitte esas olarak lifin matris içinde kayarken arayüzey davranışını karakterize eden β katsayısının etkisi incelenmiştir. Bunun için $\beta=0.001$ ve $\beta=0.1$ değerlerine karşı gelen çözümler de grafiklerde sunulmuştur. Ayrıca, bu kompozit için sadece sürtünmeli ve sürtünmeli+sıyrılmalı köprülenme çözümlerine yer verilmiştir.

Bütün çatlak açıklığı boyunca sürtünmeli köprülenme ile yük aktarıldığı duruma ait çözümler Şekil 8.20’de verilmiştir.



Şekil 8.20. Sürtünmeli köprülenme ile yük aktaran farklı β değerlerine sahip Polipropilen lifleri ile kuvvetlendirilmiş çimento esaslı kompozit malzeme için K/K_0 değerlerinin değişimi. ($V_f=0.3$, $c/a=200$)

Bu grafikte kesikli çizgi ile, değişen β değerlerine göre $\max(\sigma/\sigma_s)$ sınırı çizilmiştir. Grafikte görünmeyen $\beta=0.03$ değerine ait eğri en küçük $\max(\sigma/\sigma_s)$ değerine sahiptir.



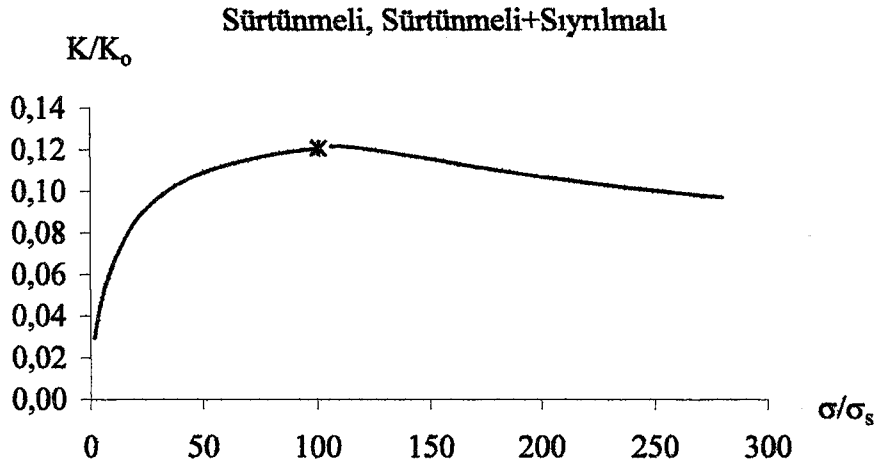
Şekil 8.21. Sürtünmeli+Sıyrılmalı $\beta=0.0128$, $V_f=0.3$, $c/a=200$.

Şekil 8.21’te $\beta=0.0128$ için Sürtünmeli+Sıyrılmalı ikili köprülenme çözümü verilmiştir. Sürtünmeli köprülenmeye göre çok küçük aralıkta yer alan bu çözümün görülebilmesi için sürtünmeli köprülenmenin sadece bir kısmına bu grafikte yer verilmiştir. Grafikte de görüldüğü gibi $\sigma/\sigma_s = 69-70$ aralığında çözümler iki tanedir. Sürtünmeli köprülenme sona ermeden önce bulunan çift çözüm eğrisinin en küçük gerilmeye karşı gelen uç noktasında c çatlak uzunluğunun %25’inde birdenbire sıyrılmalı köprülenme oluştuğu hesaplanmıştır. Sürtünmeli köprülenme sona erdikten hemen sonra sıçraması gereken noktada ise c çatlak uzunluğunun %70’inde sıyrılmalı köprülenme oluştuğu ve gerilme artırıldıkça çatlak ucuna doğru ilerlediği hesaplanmıştır. Grafikte görülen en büyük gerilme oranı olan 71.72’ye karşı gelen çözümde ise çatlak uzunluğunun %75’i sıyrılmalı köprülenmektedir. Çatlak ucuna kadar veya sıyrılmalı köprülenmenin üst sınırına kadar çözümler elde edilememiştir.

Şekil 8.22’de $\beta=0.1$ için Sürtünmeli+Sıyrılmalı ikili köprülenme çözümü verilmiştir. Bir öncekine göre farklı davranan bu çözüm $(\sigma/\sigma_s)=106-280$ aralığında bulunmuştur.

$\beta=0.0128$ için bulunan çözümlerde sürtünmeli köprülenmeye sıyrılmalı köprülenme aniden eşlik etmekte ve çatlak ortasında birdenbire oluşmaktadır. Fakat $\beta=0.1$ için bulunan ikili köprülenme çözümlerinde sıyrılmalı köprülenme grafikte sıçrama yapmadan oluşup ilerlemektedir. Ayrıca kayarak pekleşen malzeme için sıyrılmalı

köprülenme ilişkisi kullanıldığında, büyük β değerleri için K/K_0 oranının artan gerilme ile azaldığı görülmektedir.



Şekil 8.22. Sürtünmeli+Sıyrılmalı $\beta=0.1$, $V_f=0.3$, $c/a=200$.

β katsayısı büyüdükçe, çatlak ucundaki gerilme şiddeti çarpanı değerleri küçülmektedir.

KAYNAKLAR

- Ahn, B.K., Curtin, W.A., Parthasarathy, T.A. and Dutton, R.E., 1998.** Criteria for crack deflection/penetration criteria for fiber-reinforced ceramic matrix composites, *Composites Science and Technology*, **58**, 1775-1784.
- Bechel, V.T. and Sottos, N.R. , 1997.** Application of debond length measurements to examine the mechanics of fiber pushout, *J. Mech. Phys. Solids.*, **44**, 1675-1697.
- Bechel, V.T. and Sottos, N.R., 1998a.** A comparison of calculated and measured debond lengths from fiber push-out tests, *Composites Science and Technology*, **58**, 1727-1739.
- Bechel, V.T. and Sottos, N.R., 1998b.** The effect of residual stresses and sample preparation on progressive debonding during the fiber push-out test., *Composites Science and Technology*, **58**, 1741-1751.
- Becher, P.F. and Wei, G.C., 1984.** Toughening behavior in SiC-whisker-reinforced Alumina, *Communications of the American, C*, 267-269.
- Becher, P.F., Hsueh, C.H., Angelini, P. and Tiegs, T.N., 1988.** Toughening behavior in whisker-reinforced ceramic matrix composites, *J. Am. Ceram. Soc.*, **71**, 1050-1061.
- Belnap, J.D. and Shetty, D.K., 1998.** Micromechanics of crack bridging in sapphire/epoxy composites, *Composites Science and Technology*, **58**, 1763-1773.
- Brandt, A.M., 1995.** Cement based composites, E & FN Span., London.

- Budiansky, B., Evans, A.G. and Hutchinson, J.W., 1995.** Fiber-matrix debonding effects on cracking in aligned fiber ceramic composites, *Int. J. Solids Structures*, **32**, No:3/4, 315-328.
- Budiansky, B., Hutchinson, J.W. and Evans, A.G., 1986.** Matrix fracture in fiber-reinforced ceramics, *J. Mech. Phys. Solids*, **34**, 2, 167-189.
- Chai, Y.S. and Mai, Y-W., 2001.** New Analysis on the fiber push-out problem with interface roughness and thermal residual stresses, *J. Materials Science*, **36**, 2095-2104.
- Chandra, A., Huang, Y. and Hu, K.X., 1997.** Crack-size dependence of overall responses of fiber-reinforced composites with matrix cracking, *Int. J. Solids Structures*, **34**, 3837-3857.
- Chawla, K.K., 1993.** Ceramic matrix composites, Chapman&Hall.
- Chiang, Y-C, 2001.** On fiber debonding and matrix cracking in fiber-reinforced ceramics, *Composites Science and Technology*, **61**, 1743-1756.
- Cox, B.N. and Marshall, D.B., 1991a.** The determination of crack bridging forces, *International Journal of Fracture*, **49**, 159-176.
- Cox, B.N. and Marshall, D.B., 1991b.** Stable and unstable solutions for bridged cracks in various specimens, *Acta metall. mater.*, **39**, 4, 579-589.
- Danchaivijit, S. and Shetty, D.S., 1993.** Matrix cracking in ceramic-matrix composites, *Journal of the American Ceramic Society*, **76**, 2497-2504.
- Delale, F., 1985.** Fracture analysis of notched composites, *ASME Journal of Engineering Materials and Technology*, **109**, 22-35.
- Doğan, C.P. and Hawk, J.A., 2000.** Influence of whisker toughening and microstructure on the wear behavior of Si_3N_4 - and Al_2O_3 -matrix composites reinforced with SiC ., *J. Materials Science*, **35**, 5793-5807.
- Erdoğan, F. and Gupta, G.D., 1972.** On the numerical solution of singular integral equations, *Quarterly of Applied Mathematics*, **30**, 525-534.

- Erdoğan, F.**, 1969. Approximate solutions of systems of singular integral equations, *SIAM J. Appl. Math.*, **17**, 1041-1059.
- Evans, A.G. and Mcmeeking, R.M.**, 1986. On the toughening of ceramics by strong reinforcements, *Acta Metall.*, **34**, 2435-2441.
- Fu, S.Y., Yue, C-Y., Hu, X. and Mai, Y-W.**, 2000. Analyses of the micromechanics of stress transfer in single- and multi-fiber pull-out tests, *Comp. Sci. and Tech.*, **60**, 569-579.
- Grimes, R.E., Kelkar, G.P., Guazzone, L. and White, K.W.**, 1990. Elevated-temperature R-curve behavior of a Polycrystalline Alumina, *J. Am. Ceram. Soc.*, **73**, 1399-1404.
- Hillig, W.B., Raddatz, O., Schneider, G.A. and Claussen, N.**, 2001. Analysis and model of the crack bridging in a ductile fiber reinforced ceramic matrix composite, *J. Materials Science*, **36**, 1653-1663.
- Honda, K. and Kagawa, Y.**, 1996. Debonding criterion in the pushout process of fiber-reinforced ceramics, *Acta mater.*, **44**, 3267-3277.
- Honda, K., Kagawa, Y. and Mai, Y.W.**, 1998. Effects of relative sliding distance on the frictional stress transfer in fiber-reinforced ceramics, *Materials Science and Engineering*, **A252**, 53-63.
- Hsueh, C.H.**, 1988. Elastic load transfer from partially embedded axially loaded fibre to matrix, *Journal of Materials Science Letters*, **7**, 497-500.
- Hsueh, C.H.**, 1989. Analytical analyses of stress transfer in fibre-reinforced composites with bonded and debonded fibre ends, *J. Materials Science*, **24**, 4475-4482.
- Hsueh, C.H.**, 1990a. Interfacial debonding and fiber pull-out stresses of fiber-reinforced composites, *Materials and Engineering*, **A123**, 1-11.
- Hsueh, C.H.**, 1990b. Interfacial friction analysis for fibre-reinforced composites during fibre push-down (indentation), *Journal of Materials Science*, **25**, 818-828.

- Hsueh, C.H., Ferber, M.K. and Wereszczak, A.A. , 1993.** The relative residual fibre displacement after indentation loading and unloading of fibre-reinforced ceramic composites, *J. Mater. Science.*, **28**, 2227-2232.
- Hsueh, C.H., 1993.** Interfacial debonding and fiber pullout stresses of fiber-reinforced composites IX: A simple treatment of Poisson's effect for frictional interfaces, *Materials Science and Engineering*, **A161**, L1-L6.
- Hsueh, C.H., 1995.** A modified analyses of stress transfer in fibre-reinforced composites with bonded ends., *J. Materials Science*, **30**, 219-224.
- Hsueh, C.H., 1996.** Crack-wakeinterfacial debonding criteria for fiber-reinforced ceramic composites, *Acta mater.*, Vol:**44**, No:6, 2211-2216.
- Hsueh, C.H., Becher, P.F., 1996a.** Residual thermal stresses in ceramic composites, Part I: with ellipsoidal inclusions, *Materials Science and Engineering*, **A212**, 22-28.
- Hsueh, C.H., Becher, P.F., 1996b.** Residual thermal stresses in ceramic composites, Part II: with short fibers, *Materials Science and Engineering*, **A212**, 29-35.
- Hsueh, C.H. and Becher, P.F., 1996c.** Some considerations of bridging stresses for fiber-reinforced ceramics, Metals and Ceramics Division, Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge, Tennessee 37831.
- Hsueh, C.H., Young, R.J., Yang, X. and Becher, P.F. , 1997.** Stress transfer in a model composite containing a single embedded fiber, *Acta mater.*, **45**, 1469-1476.
- Hsueh, C.H. and Becher, P.F., 1998.** Interfacial shear debonding problems in fiber-reinforced ceramic composites, *Acta Mater.*, **46**, 3237-3245.
- Hsueh, C.H., 1998.** Elastic strain energy change during matrix cracking in unidirectional, fiber-reinforced ceramic composites, *Journal of Materials Science Letters*, **17**, 1421-1425.

- Hsueh, C.H. and Becher, P.F.**, 1988. Evaluation of bridging stress from R-curve behavior for nontransforming ceramics, *J. Am. Ceram. Soc.*, **71**, 234-237.
- Hutchinson, J.W. and Jensen, H.M.**, 1990. Models of fiber debonding and pullout in brittle composites with friction, *Mechanics of Materials*, **9**, 139-163.
- Jenkins, M.G., Kobayashi, A.S., White, K.W. and Bradt, R.C.**, 1987. Crack initiation and arrest in a SiC whisker/ Al_2O_3 matrix composite, *J. Am. Ceram. Soc.*, **70**, 393-395.
- Krause, R.F., Fuller, E.R. and Rhodes, J.F.**, 1990. Fracture resistance behavior of Silicon Carbide whisker-reinforced Alumina composites with different porosities, *J. Am. Ceram. Soc.*, **73**, 559-566.
- Kumaria, S., Kumar, S. and Singh, R.N.**, 1997. The first matrix cracking behavior of fiber-reinforced ceramic matrix composites, *Acta mater.*, **45**, 5177-5185.
- Lauterwasser, B.D. and Kramer, E.J.**, 1979. Microscopic mechanisms and mechanics of craze growth and fracture, *Philosophical Magazine A*, **39**, 469-495.
- Leknitskii, S.G.**, 1968. Anisotrop plates, Gordon and Breach Sic. Pub.
- Li, V.C. and Stang H.**, 1997. Interface property characterization and strengthening mechanisms in fiber reinforced cement based composites, *Advn. Cem. Bas. Mater.*, **6**, 1-20.
- Li, V.C., Lin, Z. and Matsumoto, T.**, 1998. Influence of fiber bridging on structural size-effect, *Int. J. Solids Structures*, **35**, Nos 31-32, 4223-4238.
- Lin, Z. And Li, V.C.**, 1997. Crack bridging in fiber reinforced cementitious composites with slip-hardening interfaces, *J. Mech. Phys. Solids.*, **45**, 763-787.

- Liu, Y.F., Tanaka, Y. and Masuda, C.,** 1998. Debonding mechanisms in the presence of an interphase in composites, *Acta Mater.*, **46**, 5237-5247.
- Mai, Y.W. and Lawn, B.R.,** 1987. Crack-interface grain bridging as a fracture resistance mechanism in ceramics: II, theoretical fracture mechanics model., *J. Am. Ceram. Soc.*, **70**, 289-294.
- Marshall, D.B. and Cox, B.N.,** 1987. Tensile fracture of brittle matrix composites: influence of fiber strength, *Acta Metall.*, **35**, 2607-2619.
- Marshall, D.B. and Oliver, W.C. ,** 1987. Measurement of interfacial mechanical properties in fiber-reinforced ceramic composites., *Journal of the American Ceramic Society*, **70**, 8, 542-548.
- Marshall, D.B., Cox, B.N. and Evans, A.G. ,** 1985. The mechanics of matrix cracking in brittle-matrix fiber composites, *Acta metall.*, **33**, 2013-2021.
- Mendels, D-A., Leterrier, Y. and Manson, J-A.E.,** 1999. Stress transfer model for single fibre and platelet composites., *Journal of Composite Materials*, **33**, No:16,1525-1543.
- Naaman, A.E. and Shah, S.P.,** 1976. Pull-out mechanism in steel fiber-reinforced concrete, *ASCE Journal of the Structural Division*, **102**, ST8, 1537-1548.
- Nayfeh, A.H. and Abdelrahman, W.G.,** 1998. Micromechanical modelling of load transfer in fibrous composites, *Mechanics of Materials*, **30**, 307-324.
- Oguni, K. and Ravichandran, G.,** 2001. A micromechanical failure model for unidirectional fiber reinforced composites, *International Journal of Solids and Structures*, **38**, 7215-7233.
- Piggott, M.R.,** 1980. Load bearing fibre composites, University of Toronto, Pergamon Press, Canada.

- Rödel, J., Fuller, Jr.E.R. and Lawn, B.R.**, 1991. In-situ observations of toughening processes in Alumina reinforced with Silicon Carbide whiskers, *J. Am. Ceram. Soc.*, **74**, 3154-57.
- Rühle, M., Dagleish, B.J. and Evans, A.G.**, 1987. On the toughening of ceramics by whiskers, *Scripta Metallurgica*, **21**, 681-686.
- Shao, Y., Li, Z. and Shah, S.P.**, 1993. Matrix cracking and interface debonding in fiber-reinforced cement-matrix composites., *Advanced Cement Based Mater.*, **1**, 55-66.
- Shetty, S.P. and Spearing, S.M.**, 1997. Fracture resistance of a fiber-reinforced film adhesive, *Scripta Materialia*, **37**, 787-792.
- Singh, R.N.**, 1990. Influence of interfacial shear stress on first-matrix cracking stress in ceramic-matrix composites, *J. Am. Ceram. Soc.*, **73**, 2930-2937.
- Sneddon, I.N. and Lowengrub, M.**, 1969. Crack problems in the classical theory of elasticity, John Wiley & Sons Inc., New York.
- Sun, Y. and Singh, R.N.**, 1998. The generation of multiple matrix cracking and fiber-matrix interfacial debonding in a glass composite, *Acta Mater.*, **46**, 1657-1667.
- Sun, Y. and Singh, R.N.**, 2000. Determination of fiber bridging stress profile by debond length measurement, *Acta Materialia*, **48**, 3607-3619.
- Tandon, G.P. and Pagano, N.J.**, 1998. Micromechanical analysis of the fiber push-out and re-push test., *Composites Science and Technology*, **58**, 1709-1725.
- Termonia, Y.**, 1987. Theoretical study of the stress transfer in single fibre composites, *J. Materials Science*, **22**, 504-508.
- Thouless, M.D. and Evans, A.G.**, 1988. Effects of pull-out on the mechanical properties of ceramic-matrix composites, *Acta Metall.*, **36**, 517-522.

- Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N.**, 1970. Theory of Elasticity, Mc-Graw-Hill Book Co. Inc, New York.
- Ünal, H.**, 1996. Seramik kompozitlerde yük aktarımı ve köprülenme, *Yüksek Lisans Tezi*, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Walton, J.R. and Weitsman, Y.**, 1984. Deformations and stress intensities due to a craze in an extended elastic material, *Transactions of the ASME*, **51**, 84-92.
- Wang, Y., Li, V.C. and Backer, S.**, 1988. Modelling of fibre pull-out from a cement matrix, *The International Journal of Cement Composites and Lightweight Concrete.*, **10**, 3, 143-149.
- Wei, G.C. and Becher, P.F.**, 1985. Development of SiC-whisker-reinforced ceramics, *American Ceramic Soc. Bull.*, **64**, 298-304.
- Wu, J., Jones, F.R. and James, P.F.**, 1997. Continuous fibre reinforced mullite matrix composites by sol-gel processing (part II properties and fracture behavior), *Journal of Materials Science*, **32**, 3629-3635.
- Xu, G., Bower, A.F. and Ortiz, M.**, 1998. The influence of crack trapping on the toughness of fiber reinforced composites, *J. Mech. Phys. Solids*, **46**, 1815-1833.

EK

```
MODULE TEZMAT
INTEGER,PARAMETER::N=60
REAL(8) W(N),WTX(N,N),AE,BL1,BL2,ARA1,ARA2,&
ARA3,CAT5,AF,BF,BFL
CONTAINS
SUBROUTINE NEWTON (F0,F1,NF)
REAL(8) COB(N,N),DELTA(N),R(N),F0(N),F1(N),COBINV(N,N)
MAKSIT=100;EPS=1.D-8
ITER=1;F1=0.0D0
10 CALL GENMAT(F0,R,COB,NF)
CALL MATINVE(COB,COBINV)
DELTA=-(MATMUL(COBINV,R))
DO 30 I=1,N
IF (DABS(DELTA(I))<=EPS)GOTO 30
GOTO 40
30 CONTINUE
RETURN
40 CONTINUE
IF (ITER>MAKSIT)STOP
ITER=ITER+1
F1=F0+DELTA
F0=F1
GOTO 10
END SUBROUTINE NEWTON
SUBROUTINE MATINVE(A,B)
.....
END SUBROUTINE MATINVE
SUBROUTINE GENMAT(F0,R,COB,NF)
REAL(8) COBF(N,N),COBP(N,N),RF(N),RP(N)&
,COB(N,N),R(N),F0(N)
R=0.0D0;COB=0.0D0
CALL MATFL(F0,RF,COBF)
CALL MATPL(F0,RP,COBP)
DO I=1,N
IF (I<=NF) THEN
R(I)=RF(I)
DO J=1,N;COB(I,J)=COBF(I,J);END DO
ELSE
R(I)=RP(I)
DO J=1,N;COB(I,J)=COBP(I,J);END DO
END IF
END DO
END SUBROUTINE GENMAT
```

```

SUBROUTINE MATPL(F,R,COB)
REAL(8) F(N),R(N),COB(N,N),Z1(N),Z2(N)
Z1=0.0D0; Z2=0.0D0;R=0.0D0
DO 10 I=1,N
DO 10 J=1,I
Z1(I)=Z1(I)+(F(J)*W(J))
10 CONTINUE
Z2=BL1*((ARA2+DSINH(ARA3*(Z1-CAT5)))+&
(BL2*(CAT5-Z1)*(ARA1+Z1)))
R=(AE*(MATMUL(WTX,F)))-Z2+1.0D0
COB=0.0D0;Z2=0.0D0
Z2=BL1*((ARA3*DCOSH(ARA3*(Z1-CAT5)))+(BL2*(CAT5-ARA1-2*Z1)))
DO 20 I=1,N
DO 20 J=1,I
COB(I,J)=W(J)*Z2(I)
20 CONTINUE
COB=(AE*WTX)-COB
END SUBROUTINE MATPL
SUBROUTINE MATFL(F,R,COB)
REAL(8) F(N),R(N),COB(N,N),Z(N)
R=0.0D0;COB=0.0D0;Z=0.0D0
DO 20 I=1,N
DO 20 J=1,N
IF (J>I)GOTO 10
Z(I)=Z(I)+F(J)*W(J)
10 CONTINUE
20 CONTINUE
DO 30 I=1,N
DO 30 J=1,I
COB(I,J)=BF*W(J)*(1-2*BFL*Z(I))/(2*DSQRT(BF*Z(I)*(1-BFL*Z(I))))
30 CONTINUE
COB=AF*WTX-COB
R=1-DSQRT(BF*Z*(1-BFL*Z))
R=AF*MATMUL(WTX,F)+R
END SUBROUTINE MATFL
END MODULE TEZMAT
PROGRAM CATLAK
USE TEZMAT
IMPLICIT REAL(8)(A-H,O-Z)
DIMENSION F0(N),F1(N),F2(N),X(N),T(N)
EPS=1.D-10;PI=DACOS(-1.D0)
VF=0.3D0;C2=745.0D0;C3=468.0D0;C4=195.0D0;C5=200.0D0
C8=600.0D0;UM=0.25D0;UF=0.4D0;BETA=0.001D0
C1_BAS=10.0D0;C1_SON=10000.0D0;C1_ARA=1.00D0
R1=(VF*(C3-1.0D0)+1.0D0)*(VF*(1.0D0-C3)+C3)/C3
R2=((VF*(1.0D0+UF)+C3*(1.0D0-VF)*(1.0D0+UM))/(VF*(1.0D0-C3)+C3))&
-(UF*VF+UM*(1.0D0-VF))
RR=DSQRT(R2*R2-(1.0D0/R1))
W1=DSQRT(R2+RR);W2=DSQRT(R2-RR)
CATV=VF*(C3-1.0D0)+1.0D0

```

**TC. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

```

W0=DSQRT((4.0D0*BETA/(C2*C4))*(CATV/(1.0D0-VF)))
CATW=(2.0D0*W1*W2/(PI*(W1+W2)))
CAT1=(C3/(C2*C4*C5))*(1.0D0+UM)*(1.0D0-VF+DLOG(VF))/CATV
CAT5=-(2.0D0/(BETA*C5))*DCOSH(((W0*C8)/4.0D0)-1.0D0)
CAT6=-C8/(2.0D0*C5)
ARA1=(C8/(4.0D0*C5))-CAT5;ARA2=DSINH(W0*C8/4.0D0);ARA3=W0*C5
BL2=W0*BETA*C5*C5
DO 10 J=1,N
T(J)=DCOS(PI*(J-1)/(2*N-1))
X(J)=DCOS(PI*(2*J-1)/(4*N-2))
W(J)=PI/(2*N-1)
10 CONTINUE
W(1)=PI/(4*N-2)
WTX=0.0D0
DO 20 I=1,N
DO 20 J=1,N
WTX(I,J)=(W(J)*T(J))/((T(J)*T(J))-(X(I)*X(I)))
20 CONTINUE
3 FORMAT(X,'VF=',F10.5,/,X,&
'C2=SO/TO=',F10.5,/,X,'C3=EF/EM=',F10.5,/,X,'C4=EF/SO=',F10.5,/,X,&
'C5=C/Y=',F10.5,/,X,'C6=P/Y=',F10.5)
OPEN(3,FILE="fpl.TXT")
C1=C1_BAS
F0=0.0D0
OPEN(2,FILE='basf120',STATUS='OLD')
READ(2,'(D40.20)')(F0(I),I=1,N)
CLOSE(2)
cevr1:DO WHILE (C1<=C1_SON)
C1=C1+C1_ARA
AE=CATW*CATV*(C4/(C1*C3)); AF=CATW*CATV*(C4/(C1*C3))
BL1=4.0D0*VF*CATV/(W0*C1*C2*(1.0D0-VF))
BF=(-4.0D0*C4*C5/(C1*C1*C2))*(VF*VF*CATV/(1.0D0-VF))
BFL=BETA*C5/4.0D0
H2=0.0D0
DO 100 NP=1,N-1
NF=N-NP
F2=F0
CALL NEWTON(F2,F1,NF)
SON=0.0D0
DO J=1,N;SON=SON+(F1(J)*W(J));END DO
IF(DABS(SON)>DABS(CAT6))THEN
WRITE(*,14)C1
14 FORMAT(X,'C1=',F20.10, 'da vmax>p oluyor')
GOTO 110
END IF
GECIS=0.0D0
DO J=1,NF;GECIS=GECIS+W(J)*F1(J);END DO
H1=(CAT5-GECIS)/CAT5
WRITE(*,8)NF,C1,H1
8 FORMAT(X,I5,X,F20.10,X,F20.10)

```

```

C7=-(C4/(C1*C3))*(W1*W2/(W1+W2))*CATV*F1(1)
dong1:IF((SIGN(1.0,H1)/=SIGN(1.0,H2)).AND.(H2/=0.0D0)) THEN
X0=X(NF2)+(X(NF2)-X(NF))/(H1-H2)*H2
G0=C72+(C72-C7)/(H1-H2)*H2
WRITE(3,'(3F20.10)') C1,X0,G0
WRITE(*,5)NF2,C12,C72,H2
WRITE(*,5)NF,C1,C7,H1
5 FORMAT(14,5X,F20.10,5X,F20.10,5X,F20.10)
END IF dong1
NF2=NF;C12=C1;C72=C7;H2=H1
100 CONTINUE
END DO cevr1
110 CONTINUE
CLOSE(3)
END PROGRAM CATLAK

```



ÖZGEÇMİŞ

1971 yılında Rize’de doğdu. 1986 yılında Kadıköy Anadolu Lisesinin orta kısmından mezun oldu. 1989 yılında Trabzon Anadolu Lisesinden mezun oldu ve İTÜ İnşaat Fak. İnşaat Müh. Bölümüne kayıt oldu. 1993 yılında İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Müh. Anabilim Dalı Yapı Müh. Programında yüksek lisansa başladı ve 1996 yılında mezun oldu. 1996’da yine İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsünün aynı programında doktora programına kayıt oldu. Şubat 1995’te İTÜ İnşaat Fak. Mekanik Anabilim Dalı’nda araştırma görevlisi olarak göreve atandı ve bu görevi halen devam etmektedir.

