

**ELASTİK ZEMİNE OTURAN KİRİŞLERİN VE
PALPLANŞ PERDELERİN SONLU FARKLAR
METODU İLE ANALİZİ**

101070

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnş. Müh. Muhammet Ali KARAMAHMUTOĞLU

501970019011

101070

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 5 Haziran 2000

Tezin Savunulduğu Tarih : 17 Haziran 2000

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet Bakioğlu

Diğer Jüri Üyeleri Prof. Dr. Mehmet Omurtag

Prof. Dr. Faruk Yükseler

M. Bakioğlu
M. Omurtag
F. Yükseler

HAZİRAN 2000

ÖNSÖZ

Çalışmalarım sırasında kendisinden yararlandığım, bilgi ve tecrübelerini esirgemeyen ve çalışmamı destekleyen sayın hocam Prof. Dr. Mehmet Bakioğlu'na en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Bilim alanında ilerlemem için her zaman bana destek olan maddi manevi hiçbir fedakarlıktan kaçınmayan, bu yolda belki beni en çok teşvik eden babam Murat Karamahmutoğlu ve ailemin tüm fertlerine ayrı ayrı teşekkürü borç bilirim.

Aynı zamanda çalışmalarım sırasında fikir ve tecrübeleriyle bana yardımcı olan azmi ve şevkiyle hep örnek olmuş sayın hocalarım Prof. Dr. Nafiz Çamlıbel, Prof. Dr. Görün Özşen ve yine fikir ve ilgilerini esirgemeyen asistan arkadaşlarım, Timurhan Timur ve S. Emre Pusat'a da sonsuz teşekkür ederim.

Muhammet Ali Karamahmutoğlu

05.06.2000

İÇİNDEKİLER

Sayfa No:

ŞEKİL LİSTESİ	V
SEMBOL LİSTESİ	VII
ÖZET	VIII
SUMMARY	XI
1. GİRİŞ	1
2. BASİT EĞİLME TEORİSİ	2
3. SONLU FARKLAR MATEMATİĞİ	5
3.1 Sembolik Operatörler	5
3.2. Merkezi Fark Operatörü	7
3.3. Merkezi Farklar Denklemlerindeki Hata Miktarı	10
4. UYGULAMA KUVVETİ DAVRANIŞI	16
4.1 Giriş	16
4.2. Eşdeğer Düğüm Noktası Yükleri	18
4.2.1. Tekil Yükler	18
4.2.2. Düzgün Yayılı Ve Düzgün Değişen Yük	18
4.2.3. Kuvvet Çiftleri (moment)	21
4.3. Zemin Reaksiyonu	22
5. SONLU FARKLAR TEORİSİ	25
5.1. Uygulama Kuvveti ve Düşey Yerdeğiştirmeler Arasındaki İlişki	25
5.2. Sınır Koşulları	28
5.2.1. Serbest Uç	28
5.2.2 Basit Mesnetli Uç	31
5.2.3 Ankastre Mesnetli Uç	32
5.3 İçte Mesnet Olması Hali	35
5.3.1 Basit Mesnet	35
5.3.2 Ankastre Mesnet	36
5.4. Eğilme Momentleri	38
5.4.1. Sınırdaki Düğüm Noktaları Üzerinde Moment Olması Durumu	38
5.4.2. İçteki Düğüm Noktalarında Eğilme Momenti Olması Durumu	39
5.5. Kesme Kuvvetleri	41
5.5.1. Sınırdaki Düğüm Noktalarında Kesme Kuvveti Olması Durumu	41
5.5.2. İç Düğüm Noktalarında Kesme Kuvveti Olması Durumu	45
5.6. Düşey Reaksiyonlar	49

5.6.1. Sınır Dügüm Noktalarında Mesnet Bulunması Hali	49
6. YATAY YÜKLÜ KAZIKLAR	51
6.1. Giriş	51
6.2. Palplanş Perdeler	51
7. UYGULAMALAR	60
7.1. Giriş	60
7.2. Elastik Zemine Oturan Kirişler	62
7.3. Palplanş Perdeler	72
8. SONUÇLAR VE TARTIŞMA	94
KAYNAKLAR	96
ÖZGEÇMİŞ	98



ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1 : Elastik zemin üzerine oturan yüklü kiriş.....	2
Şekil 2.2 : Kısa uzunluktaki kirişin dengesi.....	3
Şekil 2.3 : İşaret yönleri : (a) şekil değiştirme; (b) kayma kuvveti; (c) eğilme momenti.....	4
Şekil 3.1 : Merkezi, ileri ve geri farları kullanarak bulunan dy/dx yaklaşık ifadesi.....	7
Şekil 4.1 : Sürekli değişen yükle yüklü bir kiriş.....	17
Şekil 4.2 : Noktasal yük.....	18
Şekil 4.3 : Düzgün değişen yayılı yük.....	20
Şekil 4.4 : Süreksiz düzgün değişen yük.....	20
Şekil 4.5 : Düğüm noktaları arasında uygulanan pozitif moment.....	21
Şekil 4.6 : Her iki uç noktada pozitif moment.....	22
Şekil 4.7 : Bir iç düğüm noktasına etki eden pozitif moment.....	23
Şekil 4.8 : Herhangi bir noktada ani kiriş genişliği değişimi.....	24
Şekil 4.9 : Zemin reaksiyon modülündeki ani değişim: (a) herhangi bir noktada (b) düğüm noktaları arasında.....	26
Şekil 5.1 : Elastik zemine oturan non-prizmatik yüklü kiriş.....	29
Şekil 5.2 : Serbest uç, uç düğüm noktaları: (a) kirişin sol ucu (b) kirişin sağ ucu.....	30
Şekil 5.3 : Serbest uç, uçların yanlarındaki düğüm noktaları: (a) sol uç (b) sağ uç.....	31
Şekil 5.4 : Basit mesnetli uç düğüm noktaları: (a) sol uç (b) sağ uç.....	32
Şekil 5.5 : Ankastre uç düğüm noktaları: (a) sol uç (b) sağ uç.....	34
Şekil 5.6 : Ankastre uçlar, uçlardan bir önceki düğüm noktaları: (a) sol uç (b) sağ uç.....	36
Şekil 5.7 : Basit mesnet.....	37
Şekil 5.8 : Ankastre Mesnetler.....	40
Şekil 5.9 : Moment uygulanan serbest bir iç düğüm noktasında eğilme momenti.....	40
Şekil 5.10 : Ankastre mesnetli bir iç düğüm noktasında eğilme momentleri.....	42
Şekil 5.11 : Düğüm noktaları arasındaki kesme kuvvetleri sabittir.....	43
Şekil 5.12 : Sınır koşullarındaki düğüm noktaları; (a) sol uç (b) sağ uç.....	44
Şekil 5.13 : Sınırdaki uçlardan bir önceki düğüm noktaları: (a) sol uç; (b) sağ uç.....	47
Şekil 5.14 : Bir iç düğüm noktasında dış kuvvet ve eşdeğer noktasal yük.....	48
Şekil 5.15 : Mesnetli bir iç düğüm noktası.....	50
Şekil 5.16 : Sınır düğüm noktalarında basit mesnetler: (a) sol uç (b) sağ uç...	50
Şekil 5.17 : Sınır düğüm noktalarında ankastre mesnetler: (a) sol uç (b) sağ uç.....	52
Şekil 6.1 : Palplanş perde: (a) konsol çalışan (b) ankre edilmiş.....	52

Şekil 6.2	: Palplanş perde analizi.....	53
Şekil 6.3	: Konsol palplanş perdenin dönmesi.....	53
Şekil 6.4	: Konsol çalışan palplanş perdeye etki eden basınçlar.....	54
Şekil 6.5	: Ankastre bağlı palplanş perdeye etki eden basınçlar.....	56
Şekil 6.6	: Yatay yerdeğiştirmenin zemin gerilmesiyle değişmesi.....	57



SEMBOL LİSTESİ

b	: Palplanş perde veya kirişin genişliği
D	: Gömme derinliği
d	: Palplanş perde toprak içi derinliği
E	: Young Modülü
EI	: Eğilme rijitliği
γ	: Yoğunluk
γ_s	: Zemin yoğunluğu
h	: Kol yüksekliği veya seviyesi
H	: Duvar yüksekliği
i	: Düğüm noktası referansı
I	: Atalet momenti
k	: Zemin yay modülü
K	: Eğilme rijitliği veya zemin gerilmesi sabiti
l_h	: Destekli palplanş perdenin yatay zemin reaksiyonu
L	: Kiriş boyu
m_h	: Palplanş perdenin yatay zemin reaksiyonu yükselme oranı
M	: Eğilme momenti veya kuvvet çifti
n	: Toplam düğüm noktası sayısı veya no referansı
P	: Eşdeğer düğüm noktası noktasal yük değeri veya aktif/pasif zemin itkisi
p	: Üniform gerilme
q	: Düzgün yayılı yük birimsiz bileşeni
t	: Kalınlık
V	: Kesme kuvveti
w	: Düzgün yayılı veya üniform değişen yük yoğunluğu
W	: Noktasal yük
x	: Kirişin sol ucundan yatay uzaklık
y	: Düşey uzaklık veya düşey yerdeğiştirme değeri

ELASTİK ZEMİNE OTURAN KİRİŞLERİN VE PALPLANŞ PERDELERİN SONLU FARKLAR METODU İLE ANALİZİ

ÖZET

Zeminin davranışının tahmin edilmesi bilindiği gibi oldukça zordur. Bu çalışmada Winkler zemin modeli ele alınarak elastik zemine oturan kirişler ve palplanş perdelerin davranışları incelenmiştir. Bu elemanların davranışlarını analiz edebilmek için literatürde değişik matematiksel modeller kullanılır. Çalışmamızda bu metotlardan biri olan sonlu farklar metodu uygulanmıştır. Bu metot temel olarak aşağıdaki örnekte de görüldüğü üzere, diferansiyel denklemlerle sonlu fark denklemlerinin yer değiştirmesine dayanır.

$$\begin{aligned} & \frac{dy}{dx} \Big|_{x \rightarrow 0} \quad \text{ile} \quad \Delta y = \text{sonlu değer} \\ \text{ve} \\ & \frac{dx}{dy} \Big|_{y \rightarrow 0} \quad \text{ile} \quad \Delta x = \text{sonlu değer} \end{aligned}$$

Son yıllardaki bilgisayar teknolojisinin çok hızlı gelişiminin etkisiyle, kompleks kiriş problemlerin çözümünde analitik ve nümerik metotların kullanımı en çok tercih edilen yöntem oldu. Bu gelişmeden önce, bu sayısal çözüm metotları el ile çözüm için hiç pratik değildi. Zor kiriş problemlerinin çözümünde, özellikle rijitlik, mesnet koşulları ve uygulanan kuvvetin süreksiz olması durumunda, sayısal çözüm metotları kullanılarak, problemlerin bilgisayar yardımıyla çözümleri bize büyük bir esneklik sağlar ve çok güçlüdür.

Sonlu farklar metodu ile çözüm elde edilirken, bir elastik zemin; kiriş boyunca sürekli veya süreksiz yayılı bir mesnet gibi farz edilir. Bu mesnetlenme ayrı yaylardan oluşmuş bir seriye karşılık gelecek şekilde karakterize edilir. Her bir yaydaki kuvvet, kiriş boyunca o noktadaki yayın düşey yerdeğiştirmesiyle doğru orantılıdır. Açıkça anlaşılacağı gibi bu matematiksel metot diğer süreklilik teorileri kadar karışık değildir. Bununla beraber daha kolay uygulanabilir ve güçlüdür. İkinci bölümde basit eğilme teorisine bir giriş yapılarak kısaca anlatıldı ve temel denklemler elde edildi.

Daha sonra üçüncü bölümde ise sonlu farklar sayısal çözüm metoduna bir giriş yapılmış, kısaca sembolik operatörler tanıtılarak böylece sonlu farklar matematiği anlatılmıştır. Buradan hareketle merkezi farklar için, belirli bir hata payı ile, diferansiyel denklemler elde edilmiştir.

Tablo 1. Sonlu farklar türev ifadeleri ((h^2) mertebesinde hata ile, $\Delta L = h$)

Merkezi farklar

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2(\Delta L)}$$

$$y''_i = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}}{2(\Delta L)^3}$$

$$y''_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta L)^2}$$

$$y'''_i = \frac{y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} - y_{i-2}}{(\Delta L)^4}$$

Dördüncü bölümde ise çeşitli yük durumları incelenerek uygulama kuvvetleri bir eşdeğer sistem ile düğüm noktası kuvvetlerine dönüştürülerek analizin çözülmesi mümkün hale getirildi. Bu yük durumları tekil yük, düzgün ve değişken yayılı yük, moment yükü, ve zemin etkisi şeklinde isimlendirilebilir.

Elastik bir zemine oturan kirişin analizi en iyi şekilde, bilinmeyen düğüm noktaları düşey yerdeğiştirmelerinin uygulanan kuvvet ile ilişkilendirilip, sonra oluşan denklemlerden bu bilinmeyen yerdeğiştirmelerin hesaplanması yoluyla yürütülerek yapılır. Böylece beşinci bölümde uygulama kuvvetleri ve yerdeğiştirmeler arasındaki bağıntı ile genel bir denklem elde edilmiştir. Daha sonra sınır koşulları ayrı olarak göz önünde bulundurularak uç noktalar ve hemen yanındaki düğüm noktaları için özel çözümler elde edilmiştir.

Altıncı bölümde palplanş perdeler tanıtılarak yapılan kabuller anlatılmıştır. Momentler ve kesme kuvvetlerinin kabul edilebilir değerlerini elde etmek için yatay yüklü kirişler kolayca modellenebilir ve analiz edilebilir. Winkler zemin modeli kullanılarak elastik zemine oturan kirişlerde uygulanan metot burada da geçerli olur. bu metot bir ön dizayn için gerçekten kullanışlı bir metottur. Zemin kendi özelliğinden dolayı çok değişken bir malzemedir. Bu aynı yer veya derinlikte bile geçerli olabilir. Bu yüzden zeminin, analitik analiz için deformasyon özelliğini tahmin ederken pratik bir bakış açısıyla olaya bakılmalıdır. Aynı zamanda geçerli bir

matematiksel model formülasyonunun elde edilmesine dikkat edilmelidir. Zemin ve palplanş perde arasındaki karışık ilişkiyi tanımlamak zordur. Burada net zemin gerilmeleri için Winkler zemin modeli kullanıldı. Genelde bu metotla elde edilen maksimum eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri kabul edilebilir. Palplanş perdenin analizinde yalnızca toprak altında kalan kısımda gerilmenin sıfır olduğu noktanın altında kalan bölüm için elastik zemine oturan kiriş gibi düşünülerek Winkler zemin modeli uygulanabilir.

Son olarak çalışmamızda Microsoft excel tabloları yardımıyla değişik problemler için ayrı ayrı programlama yapılmış ve denklem takımları çözülmüştür. Yedinci bölüm bu problemlerin çözümünü içerir.



THE ANALYSIS OF BEAMS ON ELASTIC FOUNDATION AND SHEET PILING BY FINITE DIFFERENCE METHOD

SUMMARY

Considerable effort has been made and is being made in formulating mathematical models to define the response of soil to loads and the interaction of the interface elements of structures with loaded soil mass. The mathematical model which has had the most success in recent years has been made finite-difference method. Basically this method replaces differential equations with difference equations, i.e., replacing the differential

$$dy_{\lim \rightarrow 0} \quad \text{with} \quad \Delta y = \text{finite value}$$

and

$$dx_{\lim \rightarrow 0} \quad \text{with} \quad \Delta x = \text{finite value}$$

Numerical analytical methods of solving complex beam problems have gained much favor over the past few years owing to the rapid development and increase in micro-computing power. Prior to this technological development, many of these methods were impractical to apply by hand. Computerized versions of these methods now offer powerful means for and flexibility in analyzing difficult beam problems, particularly those with discontinuities and/or variations in flexural rigidities, support conditions and intensities of the applied loadings.

This thesis applies the finite difference method of numerical analysis to various beam problems in which beams are each supported on an elastic foundation. In this context, an elastic foundation is defined as a support medium which is continuously or discontinuously distributed along the length of the beam and characterized by responses similar to those of a series of discrete springs. The force in each spring is directly proportional to the deflection of that spring at that point along the beam. The implication is, of course, that no shear transfer occurs within the

support medium. Obviously, this mathematical model is not as sophisticated as the alternative continuum theories but is much easier to apply and can be just as powerful.

The concept of a beam on elastic foundation was first evolved by E. Winkler in 1876. It has since been applied by Terzaghi and many others to geotechnical problems in which the ground or subgrade is the support medium. Examples of the types of problem featured in the thesis are

- (a) continuous foundation beams and footings
- (b) sheet piling

The common difficulty inherent in these geotechnical problems is the practical determination of the ground stiffness to be used in the analysis. Fortunately, the magnitudes of resulting forces in the beams are not particularly sensitive to wide variations in the values of the ground stiffnesses. It is, however, recommended that sensitivity analyses be carried out in every case.

Henteyi dealt with many of these applications using classical mathematical theories. The obvious limitations of his treatments have now been largely overcome by present day computing power as demonstrated by the worked examples in the thesis.

In the second chapter, the theory of bending is explained. Then by third chapter, the finite difference equations are obtained for the derivatives.

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2(\Delta L)}$$

$$y''_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta L)^2}$$

$$y'''_i = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}}{2(\Delta L)^3}$$

$$y''''_i = \frac{y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}}{(\Delta L)^4}$$

The application of the simple theory of bending results in direct relationship between deflection, slope, bending moment, shear force and loading in terms of derivatives dy/dx , d^2x/dy^2 , d^3x/dy^3 , d^4x/dy^4 of the deflection y at distance x from the left-hand end of the beam. Finite difference theory offers a means of deriving approximations to these derivatives, at selected points along the beam, in terms of the unknown deflections at these and adjacent points.

In the fourth chapter the treatment of applied load is studied. The applied loading is replaced by an equivalent system of nodal point loads for the purposes of analysis. The equivalent system of nodal point loads is calculated on the basis of

their being equal and opposite to the total reactions at each node had the beam consisted of a series of simply supported beams spanning between nodes. The formula is obtained for each, point loads, uniformly distributed and uniformly varying loads, applied couples and subgrade reaction.

The analysis of a beam on elastic foundation is best carried out by relating the unknown nodal deflections to the applied loading and then solving the resulting system of simultaneous equations for the unknown deflections. These deflections then can be used to calculate the bending moments, shear forces, and reactions. Such calculations are greatly simplified by basing them on finite difference theory as this can readily account for sudden or gradual variations in the flexural rigidity of the beam, subgrade reaction and/or applied loading. Moreover, finite difference theory also enables various support conditions to be easily modeled, thereby allowing almost any combination of loading and support conditions to be investigated.

In the fifth chapter relationship between deflections and applied loading is established. Then the generalized central difference equation relating loading to deflections is obtained which is given above.

$$\frac{EI}{(\Delta L)^3} [y_{i-2} - 4y_{i-1} + (6 + k_i(\Delta L)^4 / EI)y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}] \equiv P_i$$

By dealing with boundary conditions, the end nodes and those immediately next to them all require special consideration. So for the end nodes and those immediately next to them, the generalized equation become different. Then three conditions, free ends, simply supported ends and encastre ends are being carried out.

By the sixth chapter it is given information about sheet piling and mechanics of sheet piling. Then the seventh chapter includes many practical application for both continuous foundation beams footing and sheet piling. When analyzing sheet piling as a beam on elastic foundation, it is reasonable to consider the Winkler soil model operating only in the embedment zone below the point at which the net pressure becomes zero.

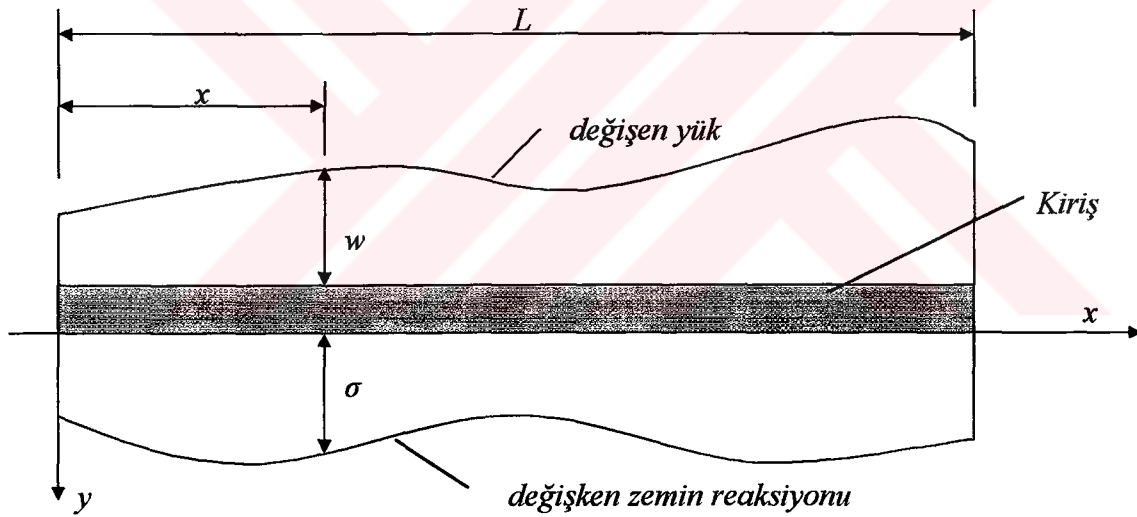
1. GİRİŞ

Son yıllardaki bilgisayar teknolojisinin çok hızlı gelişiminin etkisiyle, kompleks kiriş problemlerin çözümünde analitik ve nümerik metotların kullanımı en çok tercih edilen yöntem oldu. Bu gelişmeden önce, bu sayısal çözüm metotları el ile çözüm için hiç pratik değildi. Zor kiriş problemlerinin çözümünde, özellikle rijitlik, mesnet koşulları ve uygulanan kuvvetin süreksiz olması durumunda, sayısal çözüm metotları kullanılarak, problemlerin bilgisayar yardımıyla çözümleri bize büyük bir esneklik sağlar ve çok güçlüdür.

Bu tezde elastik zemin ile mesnetlenmiş değişik kiriş problemlerinde, sayısal analiz metotlarından sonlu farklar metodu ile çözüm elde edeceğiz. Bu bağlamda bir elastik zemin; kiriş boyunca sürekli veya süreksiz yayılı bir mesnet gibi farz edilir. Bu mesnetlenme ayrı yaylardan oluşmuş bir seriye karşılık gelecek şekilde karakterize edilir. Her bir yaydaki kuvvet, kiriş boyunca o noktadaki yayın düşey yerdeğiştirmesiyle doğru orantılıdır. Açıkça anlaşılabacağı gibi bu matematiksel metot diğer süreklilik teorileri kadar karışık değildir. Bununla beraber çok daha kolay uygulanabilir ve güçlüdür. Tezde elastik zemine oturan kiriş ve palplanş perde üzerinde bu metot kullanılarak analiz yapıldı. Genel olarak geoteknik problemlerinde olduğu gibi analizde kullanılacak zemin rijitliğinin pratik olarak hesap edilmesi güçlük çıkarır. Microsoft excel tablolar yardımıyla değişik problemler kolayca çözüldü. Uygulamaları ilerdeki bölümlerde göreceksiniz.

2. BASİT EĞİLME TEORİSİ

Üzerinde yük bulunan, birim genişlikte, L uzunluğunda elastik zemine oturan bir kirişi ele alalım (Şekil 2.1). Kirişin oturduğu zemin elastik olduğu sürece, x uzaklığı kirişin sol ucundan olmak üzere, kiriş boyunca herhangi bir noktada zemin tepki kuvveti (σ) doğrudan doğruya kirişin herhangi bir noktasındaki şekil değiştirmesiyle doğru orantılıdır.



Şekil 2.1. Elastik zemin üzerine oturan yüklü kiriş

Böylece

$$\sigma = k \cdot y$$

yazabiliriz. k denklemdaki orantı sabiti (kN/m^2), y düşey yerdeğiştirme (m) ve σ zemin tepkisidir (kN/m^2).

Δx birim uzunluğunda ve x uzaklığındaki bir kirişin dengesini ele aldığımızda (Şekil 2.2) (V kesme kuvveti, M eğilme momenti olsun)

$$V - (V + \Delta V) + ky\Delta x - w\Delta x = 0$$

şeklinde yazabiliriz. Böylece

$$\left(\frac{\Delta V}{\Delta x}\right) = ky - w$$

olur. Limit koşullarda,

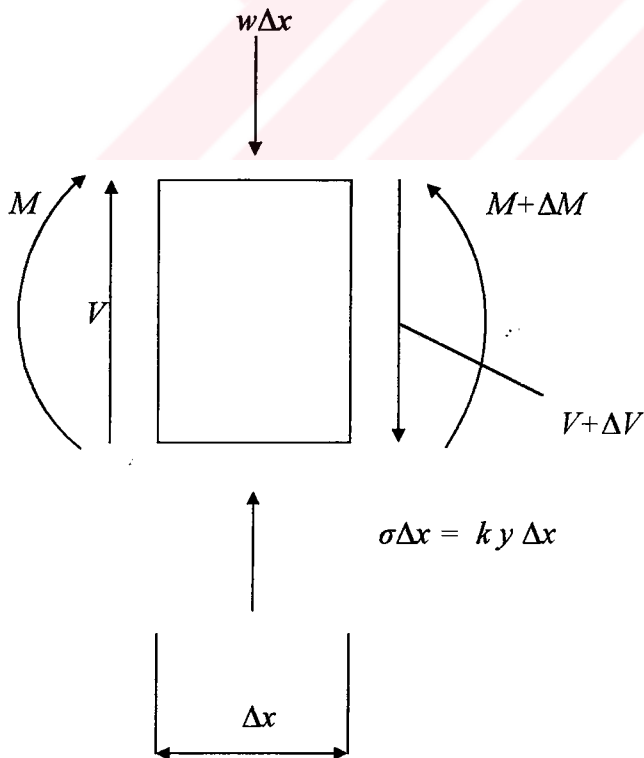
$$\left(\frac{dV}{dx}\right) = ky - w$$

$$V = \left(\frac{dM}{dx}\right)$$

olduğundan hareketle

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = ky - w$$

şeklindedir.



Şekil 2.2. Kısa uzunluktaki kirişin dengesi

Eğilmeye çalışan bir kirişteki diferansiyel denklemi yerine koyarak,

$$EI\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) = -M$$

buradan

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 y}{dx^2}\right)\right] = w - ky$$

ve sonuç olarak

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = w - ky$$

denklemini elde ederiz. Bu denklem elastik bir zemine oturan kirişte bilinen ve yaygın olarak kullanılan bir denklemdir. Eğer zeminin birim oturma meydana getiren basınç gerilmesi k_s olarak ölçülür ise

$$k = k_s b$$

denklemini elde ederiz. b bu denklemde kiriş genişliğini ifade eder. k_s sabiti zemin reaksiyon modülü olarak da adlandırılmaktadır. Açıkça görüldüğü gibi k ve k_s , birim genişlikteki bir kirişte sayısal değer olarak eşittir.

3. SONLU FARKLAR MATEMATİĞİ

3.1. Sembolik Operatörler

Diferansiyel hesaplarda türev aşağıdaki gibi tarif edilir.

$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} = f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (3.1)$$

Sonlu farklar hesabında ise $x - x_0$ değerinin sonsuzda sıfır olmadığı farzedilir. Sonlu küçük bir değer olarak kabul edilir ve bu değer h olarak ifade edilir.

$$h = x - x_0 \quad (3.2)$$

şeklindedir. Böylece türevi aşağıdaki gibi yaklaşık olarak ifade edebiliriz.

$$f'(x_0) \cong \frac{f(x) - f(x_0)}{h} \quad (3.3)$$

(a,b) aralığında bir ξ noktası için türev (3.3) denkleminde hesap edilebilir.

Diferansiyel problemlerde bu teoreme gerçek değer teoremi denilir.

3.1.1. Gerçek-Değer Teoremi :

$f(x)$; $a \leq x \leq b$ için sürekli ve $a < x < b$ için türevli olsun. Böylece (a,b) aralığında türevli en az bir ξ değeri vardır. Aşağıdaki gibidir.

$$f'(\xi) \cong \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (3.4)$$

Bu teorem diferansiyel ve sonlu farklar hesabı için temel bir teoremdir.

$[x, x_0]$ aralığında sürekli ve türevli bir $f(x)$ fonksiyonu Taylor serisi olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2 f''(x_0)}{2!} + \frac{(x - x_0)^3 f'''(x_0)}{3!} + \dots + \frac{(x - x_0)^n f^n(x_0)}{n!} + R_n(x) \quad (3.5)$$

Bu denklemde R_n ifadesi *artan* terim olarak adlandırılır. R_n , $(n+1)$ den sonsuza kadar olan tüm terimleri içine alır. Bu yüzden kısaltma hatası olarak adlandırılır ve fonksiyonun kesildiği yer itibarıyla n . dereceden olarak ifade edilir.

Gerçek değer teoremi (x_0, x) aralığında bir ξ değeri olduğunu gösteriyordu. Böylece *artan* terim aşağıdaki gibi yazılır.

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1} f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \quad (3.6)$$

Sonlu farklar hesabı ayrık değerlerden oluşan bir seri ile birlikte kullanılır. Bu seri aşağıdaki gibi bir deneyin sonuçları olabilir,

$$y_{i-3} \quad y_{i-2} \quad y_{i-1} \quad y_i \quad y_{i+1} \quad y_{i+2} \quad y_{i+3}$$

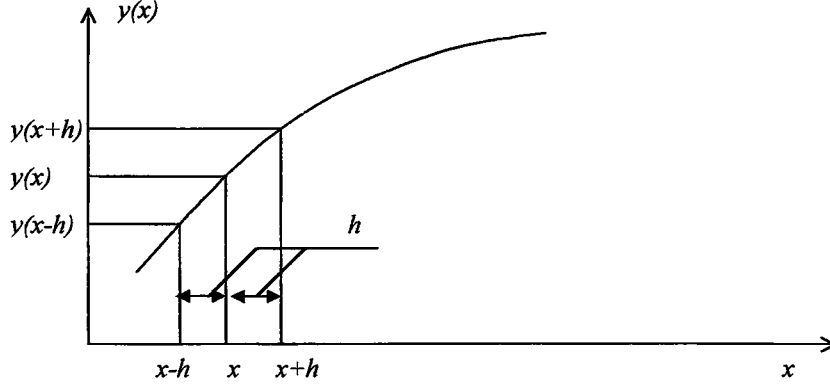
veya sürekli bir fonksiyonun farklı değerleri olabilir, $y(x)$:

$$y(x-3h) \quad y(x-2h) \quad y(x-h) \quad y(x) \quad y(x+h) \quad y(x+2h) \\ y(x+3h)$$

veya aynı şekilde bir fonksiyonun değerleri olabilir, $f(x)$:

$$f(x-3h) \quad f(x-2h) \quad f(x-h) \quad f(x) \quad f(x+h) \quad f(x+2h) \\ f(x+3h)$$

Yukarıdaki tüm durumlarda y veya f değerleri bir değişkene bağlıdır. Bu değerlerin hepsi x değişkenine eşit aralıklarla uzaklaşan değişkenlere bağlıdır. Bu durum şekil 3.1 de gösterilmiştir.



Şekil 3.1

Yukarıdaki işlemlere karşılık gelecek şekilde bir lineer sembolik operatör grubu tanımlayalım. Bu lineer sembolik operatörler aşağıdaki gibidir.

D = diferansiyel operatörü

I = integral operatörü

E = yer değiştirme operatörü

Δ = ileriye doğru fark operatörü

∇ = geriye doğru fark operatörü

δ = merkezi fark operatörü

μ = ortalama operatörü

İlk operatör diferansiyel operatörüdür ve bir fonksiyona uygulandığında aşağıdaki gibi sonuç verir.

$$Dy(x) = \frac{dy(x)}{dx} = y'(x) \quad (3.7)$$

İntegral operatörü de aşağıdaki şekildedir.

$$Iy(x) = \int_x^{x+h} y(x)dx \quad (3.8)$$

İntegral operatörü diferansiyel operatörün inversine eşittir.

$$I = D^{-1} \quad (3.9)$$

Yerdeğiştirme operatörü fonksiyonun bir sonraki değişken için değerini verir.

$$Ey(x) = y(x+h) \quad (3.10)$$

Bu operatörün inversini aldığımızda ise fonksiyonun bir önceki değişken için değerini verir.

$$E^{-1}y(x) = y(x-h) \quad (3.11)$$

Daha yüksek kuvvetleri için operatör aşağıdaki şekildedir.

$$E^n y(x) = y(x+nh) \quad (3.12)$$

Yerdeğiştirme operatörü diferansiyel operatör cinsinden yazılabilir. $y(x+h)$ değerini taylor serisi şeklinde yazar isek,

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{1!} y'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + \frac{h^3}{3!} y'''(x) + \dots \quad (3.13)$$

şeklindeyir. y' 'nin türevlerini belirtmek için D operatörünü kullanarak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{1!} Dy(x) + \frac{h^2}{2!} D^2 y(x) + \frac{h^3}{3!} D^3 y(x) + \dots \quad (3.14)$$

$$y(x+h) = \left(1 + \frac{h}{1!} D + \frac{h^2}{2!} D^2 + \frac{h^3}{3!} D^3 + \dots \right) y(x) \quad (3.15)$$

Parantez içindeki terim aşağıdaki ifadeye eşittir.

$$e^{hD} = 1 + \frac{hD}{1!} + \frac{h^2 D^2}{2!} + \frac{h^2 D^2}{2!} + \dots \quad (3.16)$$

Bu yüzden (3.15) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$y(x+h) = e^{hD} y(x) \quad (3.17)$$

(3.10) ve (3.17) denklemlerini karşılaştırarak yerdeğiştirme operatörünü diferansiyel operatör cinsinden elde etmiş oluruz.

$$E = e^{hD} \quad (3.18)$$

Benzer işlemleri yerdeğiştirme operatörünün inversi içinde uygularız.

$$y(x-h) = y(x) - \frac{h}{1!} y'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) - \frac{h^3}{3!} y'''(x) + \dots \quad (3.19)$$

$$y(x-h) = \left(1 - \frac{h}{1!} D + \frac{h^2}{2!} D^2 - \frac{h^3}{3!} D^3 + \dots \right) y(x) \quad (3.20)$$

$$e^{-hD} = 1 - \frac{hD}{1!} + \frac{h^2 D^2}{2!} - \frac{h^2 D^2}{2!} + \dots \quad (3.21)$$

$$y(x-h) = e^{-hD} y(x) \quad (3.22)$$

Böylece (3.11) ve (3.22) denklemlerinden aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$E^{-1} = e^{-hD} \quad (3.23)$$

Bu giriş kavramlarından sonra geri fark, ileri fark ve merkezi fark operatörleri ve bu operatörler ile diferansiyel operatörü arasındaki ilişkiyi elde edilebilir. Burada sadece merkezi fark operatörü incelendi. Bu operatör uygulamada en iyi sonucu veren operatördür.

3.2. Merkezi Fark Operatörü

Aşağıdaki gibi değerler serisini gözönüne alalım.

$$y_{i-2} \quad y_{i-1\frac{1}{2}} \quad y_{i-1} \quad y_{i-1/2} \quad y_i \quad y_{i+1/2} \quad y_{i+1} \quad y_{i+1\frac{1}{2}} \quad y_{i+2}$$

Bu seri eşdeğer olarak

$$\begin{array}{ccccccc} y(x-2h) & y(x-1\frac{1}{2}h) & y(x-h) & y(x-\frac{1}{2}h) & y(x) & y(x+\frac{1}{2}h) \\ y(x+h) & y(x+1\frac{1}{2}h) & y(x+2h) & & & \end{array}$$

şeklinde de yazılabilir.

y nin i noktası için birinci mertebeden merkezi fark değeri aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\delta y_i = y_{i+1/2} - y_{i-1/2}$$

veya

$$\delta y(x) = y(x + \frac{1}{2}h) - y(x - \frac{1}{2}h) \quad (3.24)$$

İkinci mertebeden merkezi fark değeri

$$\delta^2 y_i = \delta(\delta y_i) = \delta(y_{i+1/2} - y_{i-1/2}) = \delta y_{i+1/2} - \delta y_{i-1/2} = (y_{i+1} - y_i) - (y_i - y_{i-1})$$

$$\delta^2 y_i = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}$$

veya

$$\delta^2 y(x) = y(x+h) - 2y(x) + y(x-h) \quad (3.25)$$

şeklindedir.

Üçüncü mertebeden merkezi fark ise benzer şekilde aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned} \delta^3 y_i &= \delta(\delta^2 y_i) = \delta(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) = \delta y_{i+1} - 2\delta y_i + \delta y_{i-1} \\ &= (y_{i+1\frac{1}{2}} - y_{i+1/2}) - 2(y_{i+1/2} - y_{i-1/2}) + (y_{i-1/2} - y_{i-1\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

$$\delta^3 y_i = y_{i+1\frac{1}{2}} - 3y_{i+1/2} + 3y_{i-1/2} - y_{i-1\frac{1}{2}} \quad (3.26)$$

Daha yüksek dereceden merkezi fark ifadeleri de benzer şekillerde elde edilebilir.

$$\delta^4 = y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2} \quad (3.27)$$

$$\delta^5 = y_{i+2\frac{1}{2}} - 5y_{i+1\frac{1}{2}} + 10y_{i+1/2} - 10y_{i-1/2} + 5y_{i-1\frac{1}{2}} - y_{i-2\frac{1}{2}} \quad (3.28)$$

Tüm sonlu fark ifadelerinde olduğu gibi, burada da sabit terimler $(a-b)^n$ açılımındaki sabit terimler ile aynıdır. Şimdi merkezi farkları kolaylaştırmak için bir ortalama operatörü tanımlayalım.

$$\mu = \frac{1}{2} [E^{1/2} + E^{-1/2}] \quad (3.29)$$

Ortalama operatörünü, merkezi fark ile beraber uyguladığımızda sonuç aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned} \mu \delta y_i &= \frac{1}{2} (E^{1/2} \delta y_i + E^{-1/2} \delta y_i) \\ &= \frac{1}{2} (\delta y_{i+1/2} + \delta y_{i-1/2}) \\ &= \frac{1}{2} [(y_{i+1} - y_i) + (y_i - y_{i-1})] \\ &= \frac{1}{2} (y_{i+1} - y_{i-1}) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Üçüncü dereceden ortalama merkezi fark ise

$$\begin{aligned} \mu \delta^3 y_i &= \frac{1}{2} (E^{1/2} \delta^3 y_i + E^{-1/2} \delta^3 y_i) \\ &= \frac{1}{2} (\delta^3 y_{i+1/2} + \delta^3 y_{i-1/2}) \\ &= \frac{1}{2} [(y_{i+2} - 3y_{i+1} + 3y_i - y_{i-1}) + (y_{i+1} - 3y_i + 3y_{i-1} - y_{i-2})] \\ &= \frac{1}{2} (y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}) \end{aligned} \quad (3.31)$$

şeklinde olur.

Beklenildiği gibi ortalama operatörü y fonksiyonunun i nolu orta terimini kaldırmaktadır. Merkezi fark operatörü sonlu farklar metodu ile türevlerin elde edilmesinde en uygun yöntemdir. İleriki bölümlerde de görüleceği gibi denklem takımlarının elde edilmesinde bu yöntem kullanılmıştır.

Elde ettiğimiz bu denklemler yardımıyla artık merkezi fark operatörü ve diferansiyel operatörü arasında bir ilişki kurabiliriz. (3.30) denklemi (3.17) ve (3.22) denklemleriyle birlikte düşünülürse,

$$\mu\delta y(x) = \frac{1}{2}[y(x+h) - y(x-h)] = \frac{1}{2}[e^{hD}y(x) - e^{-hD}y(x)] = \frac{1}{2}(e^{hD} - e^{-hD})y(x) \quad (3.32)$$

elde edilmiş olur. Böylece aşağıdaki birinci dereceden merkezi ortalama fark operatörü ifadesini yazabiliriz.

$$\mu\delta = \frac{1}{2}(e^{hD} - e^{-hD}) = \sinh hD \quad (3.33)$$

Görüldüğü gibi bu değer eşdeğer olarak hiperbolik bir sinüs eğrisine denk gelmektedir. Bu serinin açılımını aşağıdaki gibidir.

$$\sinh hD = hD + \frac{(hD)^3}{3!} + \frac{(hD)^5}{5!} + \frac{(hD)^7}{7!} + \dots \quad (3.34)$$

Böylece (3.33) denklemi

$$\mu\delta = hD + \frac{(hD)^3}{3!} + \frac{(hD)^5}{5!} + \frac{(hD)^7}{7!} + \dots \quad (3.35)$$

haline gelir.

Benzer şekilde (3.25) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned} \delta^2 y_i &= y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} \\ &= e^{hD}y_i - 2y_i + e^{-hD}y_i = (e^{hD} - 2 + e^{-hD})y_i \end{aligned} \quad (3.36)$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\delta^2 = e^{hD} - 2 + e^{-hD} = E - 2 + E^{-1} \quad (3.37)$$

Yukarıdaki denklemde e değerleri sonsuz seriler haline getirilip gruplanırsa aşağıdaki sonuca varılır.

$$\delta^2 = h^2 D^2 + \frac{h^4 D^4}{12} + \frac{h^6 D^6}{360} + \frac{h^8 D^8}{20160} + \dots \quad (3.38)$$

Daha yüksek dereceden operatörler (3.30) ve (3.33) denklemlerinden elde edilebilir. Üçüncü ve dördüncü mertebeden merkezi farklar açılımı aşağıdaki gibidir.

$$\mu\delta^3 = h^3 D^3 + \frac{h^5 D^5}{4} + \frac{h^7 D^7}{40} + \dots \quad (3.39)$$

$$\delta^4 = h^4 D^4 + \frac{h^6 D^6}{6} + \frac{h^8 D^8}{80} + \dots \quad (3.40)$$

Şimdi bu denklemler yardımıyla y fonksiyonu için türevleri belli bir hata derecesi ile elde edelim. y nin birinci mertebeden türevini, h^2 mertebesinden bir hata ile merkezi fark operatörü cinsinden aşağıdaki şekilde elde edebiliriz.

(3.35) denklemini, D nin çözümü olarak tekrar düzenleyelim.

$$D = \frac{1}{h} \mu\delta - \frac{h^2 D^3}{3!} - \frac{h^4 D^5}{5!} - \frac{h^6 D^7}{7!} - \dots$$

Bu operatörü y fonksiyonuna i teriminde uygularsak ifade,

$$Dy_i = \frac{1}{h} \mu\delta y_i - \frac{h^2 D^3 y_i}{3!} - \frac{h^4 D^5 y_i}{5!} - \frac{h^6 D^7 y_i}{7!} - \dots$$

şeklinde olur. Seri olan kısmı ihmal edip kısaltır isek h^2 mertebesinden hata ile ifadeyi elde etmiş oluruz.

$$Dy_i = \frac{1}{h} \mu\delta y_i + O(h^2)$$

Bu ifadeyi ortalama merkezi fark ve diferansiyel operatörlerinin kendi tanımları şeklinde tekrar yazarsak aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{dy_i}{dx} = \frac{1}{2h} (y_{i+1} - y_{i-1}) + O(h^2) \quad (3.41)$$

Aynı şekilde y fonksiyonunun ikinci mertebeden türev ifadesini merkezi fark ile yazabiliriz. (3.38) denklemini düzenleyerek aşağıdaki şekilde yazalım.

$$D^2 = \frac{1}{h^2} \delta^2 - \frac{h^3 D^4}{12} - \frac{h^5 D^6}{360} - \frac{h^7 D^8}{20160} - \dots$$

Bu operatörü y fonksiyonuna i teriminde uyguluyor isek,

$$D^2 y_i = \frac{1}{h^2} \delta^2 y_i - \frac{h^3 D^4 y_i}{12} - \frac{h^5 D^6 y_i}{360} - \frac{h^7 D^8 y_i}{20160} - \dots$$

şeklinde olur. Seri olan kısmı ihmal edip kısaltır isek h^2 mertebesinde bir hata ile ifadeyi elde etmiş oluruz.

$$D^2 y_i = \frac{1}{h^2} \delta^2 y_i + O(h)^2$$

Bu ifadeyi ortalama merkezi fark ve diferansiyel operatörlerinin kendi tanımları şeklinde tekrar yazarsak aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{d^2 y_i}{dx^2} = \frac{1}{h^2} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) + O(h^2) \quad (3.42)$$

Aynı şekilde tüm türevler elde edilebilir. Bu türevlerin hata oranı h^2 mertebesinde olacak şekilde değerleri, ileri fark, geri fark ve merkezi farklar türünden (3.1) tablosunda verilmiştir. Merkezi farklar ifadeleri ileriki bölümlerde kullanılacaktır.

Tablo 3.1. Sonlu farklar türev ifadeleri ((h^2) mertebesinde hata ile, $\Delta L = h$)

Merkezi farklar

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2(\Delta L)}$$

$$y''_i = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}}{2(\Delta L)^3}$$

$$y''_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta L)^2}$$

$$y'''_i = \frac{y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} - y_{i-2}}{(\Delta L)^4}$$

İleri farklar

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{(\Delta L)}$$

$$y'''_i = \frac{y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i}{2(\Delta L)^3}$$

$$y''_i = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{(\Delta L)^2}$$

$$y''''_i = \frac{y_{i+4} - 4y_{i+3} + 6y_{i+2} - 4y_{i+1} - y_i}{(\Delta L)^4}$$

Geri farklar

$$y'_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{(\Delta L)}$$

$$y'''_i = \frac{y_i - 3y_{i-1} + 3y_{i-2} - y_{i-3}}{2(\Delta L)^3}$$

$$y''_i = \frac{y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}}{(\Delta L)^2}$$

$$y''''_i = \frac{y_i - 4y_{i-1} + 6y_{i-2} - 4y_{i-3} - y_{i-4}}{(\Delta L)^4}$$

4. UYGULAMA KUVVETİ DAVRANIŞI

4.1 Giriş

Sonlu farklar teorisi denklemlerindeki bilinmeyen düğüm noktası sehimleri uygulanan kuvvet ile yakından ilişkilidir. Bu nedenle uygulama kuvvetleri bir eşdeğer sistem ile düğüm noktası kuvvetlerine dönüştürülerek analizin çözülmesi mümkün hale getirilir. Elastik zemin üzerine oturan bir kiriş için eşdeğer düğüm noktası yükü değerini hesap etmek için, ΔL açıklığındaki $i-1$, i ve $i+1$ düğüm noktaları arasındaki yüklü kiriş parçaları göz önüne alınmalıdır. Kirişin, sol ucundan x uzaklığında büyüklüğü w_x (kN/m) olan sürekli ve değişken bir yük ile yüklendiğini farz edelim (Şekil 4.1). Eşdeğer düğüm noktası yüklerinin hesap edilmesi için, bu yüklerin düğüm noktaları arasında bulunan basit mesnetli bir çok kirişten oluşan kirişin her düğüm noktasındaki tepki kuvvetlerinin toplamına eşit ve zıt yönlü olduğu kabul edilir. Bu yaklaşık yol bir çok pratik amaç için yeterli derecede doğrudur.

Bu yolla, düğüm noktasındaki yükün büyüklüğü

$$P_i = \frac{1}{\Delta L} \int_{x_{i-1}}^{x_i} w_x (x - x_{i-1}) dx + \frac{1}{\Delta L} \int_{x_i}^{x_{i+1}} w_x (x_{i+1} - x) dx \quad (4.1)$$

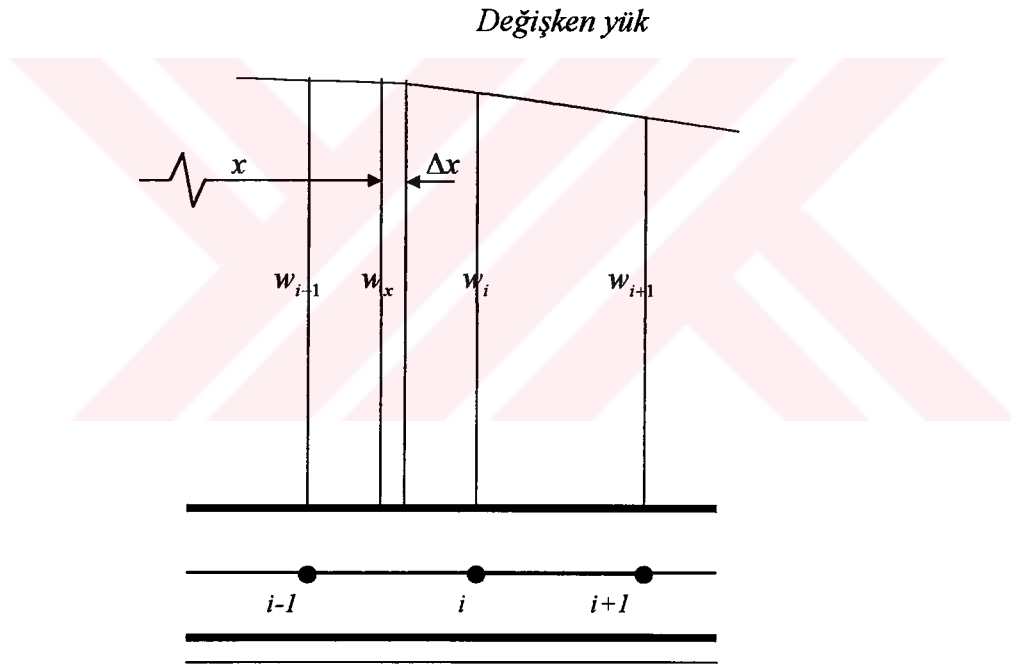
şeklinde olur.

Basit olarak düzgün yayılı sürekli ve şiddeti w olan bir yük durumunda bir önceki ifade kısılır ve

$$P_i = w \cdot \Delta L \quad (4.2)$$

halini alır.

Zemin tepkisi içinde benzer bir yol yukarı doğru uygulanır. Bu durumla beraber eşdeğer düğüm noktası yükleri bu düğüm noktasındaki düşey yerdeğiştirmeler ile doğru orantılıdır. Yine kirişin düğüm noktaları arasında uzanan basit mesnetli kiriş parçalarından oluşan bir seri olduğu düşünüldüğünde tekil yükler ve eğilme momenti de yukarıdaki benzer yöntemle uygulanabilir. Kirişe etki eden eşdeğer noktasal yük sistemi meydana gelen düğüm noktası reaksiyonlarına karşı eşit ve ters yönlü alınır.



Şekil 4.1. Sürekli değişen yükle yüklü bir kiriş

Her bir yük sisteminin (tekil yükler, düzgün yayılı yük, düzgün değişen yük ve kuvvet çiftleri) noktasal yük sistemine çevrilip, türev ifadelerinin elde edilebilmesi için, ayrı ele alınması gerekir. Bununla beraber aşağıya doğru etki eden yükler pozitif diğer yöndeki yükler ise negatif işaretli olarak kabul edilmiştir.

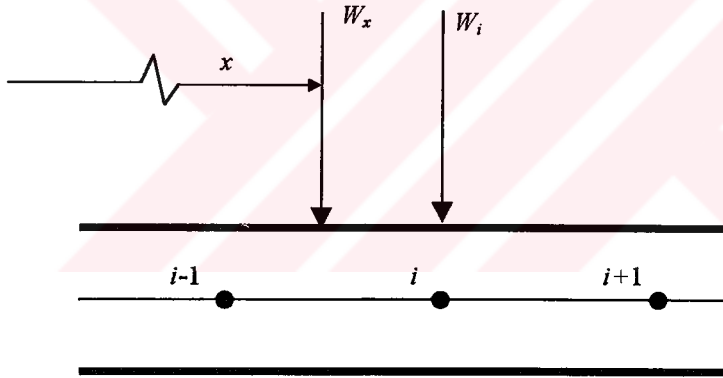
4.2. Eşdeğer Düğüm Noktası Yükleri

4.2.1. Tekil Yükler

Düğüm noktaları arasında $(i-1, i+1)$, sol uçtan x uzaklığında bir w_x tekil yükü etki eden bir kiriş parçası düşünelim (Şekil 4.2). Bu kirişte i düğüm noktasına gelen eşdeğer tekil yük aşağıdaki ifade ile hesap edilebilir.

$$P_i = \frac{1}{\Delta L} \sum_{x=x_{i-1}}^{x=x_i} W_x (x - x_{i-1}) + \frac{1}{\Delta L} \sum_{x=x_{i+1}}^{x=x_{i+1}} W_x (x_{i+1} - x) + \sum W_i \quad (4.3)$$

Bu ifade ile i düğüm noktasına denk gelen olası uygulama kuvvetini ifade eder. Uygulanan yüklerin düğüm noktalarına denk gelmesine oldukça dikkat edilmelidir. Böylece çözümün doğruluğu mümkün olduğunca optimize edilmiş ve hatalardan sakınılmış olur.



Şekil 4.2. Noktasal yük

4.2.2. Düzgün Yayılı ve Düzgün Değişen Yük

Düzgün yayılı bir yükü, düzgün değişen yükün özel bir hali olarak düşünebiliriz. Bu yüzden tüm düzgün yükler için genel bir ifade elde edilebilir. düzgün değişen yük ile yüklü $x = x_1, x=x_2$ aralığında bir kiriş parçasını düşünelim. x uzaklığı kirişin sol ucundan ölçülen bir uzaklıktır (Şekil 4.3).

$$x_{i-1} \leq x_1 \leq x_i$$

$$x_{m-1} \leq x_2 \leq x_m$$

düzgün değişen yükün sabit değişim oranı

$$w' = \frac{(w_2 - w_1)}{(x_2 - x_1)}$$

olur. Buradan

$$P_{i-1} = \frac{(x_i - x_1)^2}{6\Delta L} [3w_1 + w'(x_i - x_1)] \quad (4.4)$$

böylece

$$P_i = w_1(x_i - x_1) + 0,5w'(x_i - x_1)^2 - P_{i-1} + \frac{\Delta L}{6} [3w_1 + w'(3x_i - 3x_1 + \Delta L)] \quad (4.5)$$

şeklinde olur.

(4.1) denklemi aradaki bir düğüm noktasına uygulandığında eşdeğer noktasal P_j yükü aşağıdaki gibi olur.

$$P_j = [w_i + w'(x_j - x_1)]\Delta L \quad (4.6)$$

m düğüm noktasındaki eşdeğer noktasal yük olan P_m terimine karşılık gelen ifade

$$P_m = \frac{(x_2 - x_{m-1})^2}{6\Delta L} [3w_1 + w'(x_{m-1} - 3x_1 + 2x_2)] \quad (4.7)$$

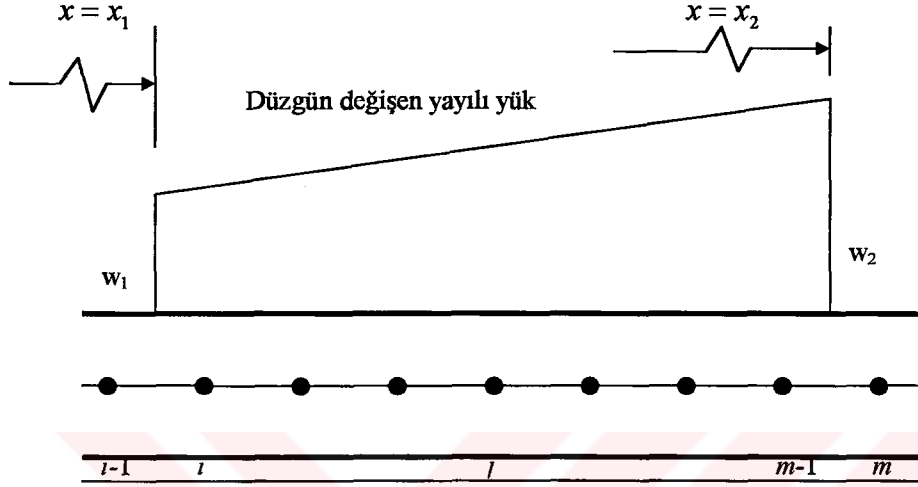
olur ve

$$P_{m-1} = [w_2 - 0,5w'(x_2 - x_{m-1})](x_2 - x_{m-1}) - P_m + \frac{\Delta L}{6} [3w_1 + w'(3x_{m-2} - 3x_1 + 2\Delta L)] \quad (4.8)$$

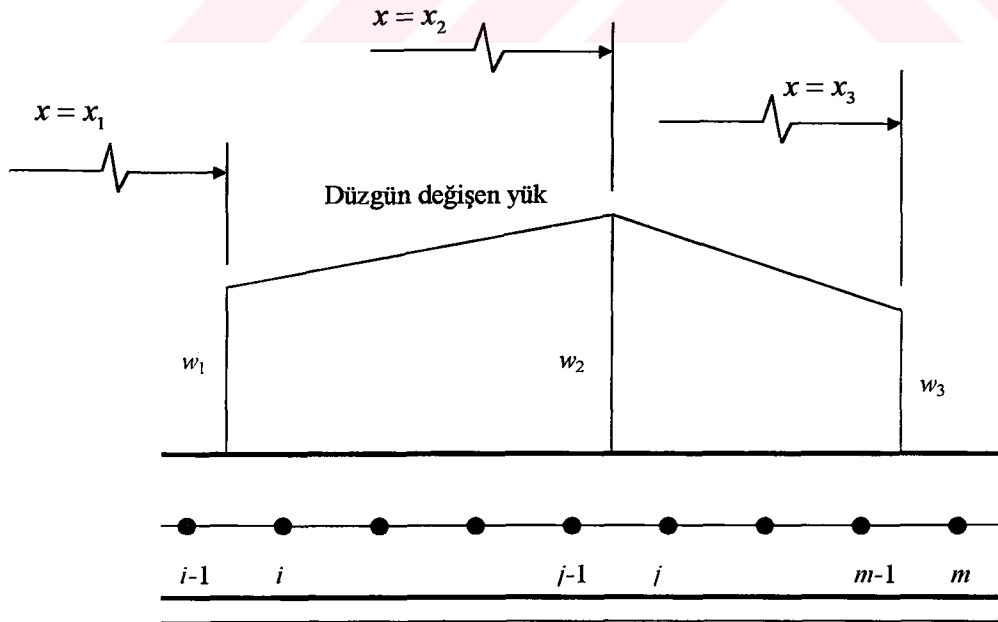
halini alır.

$j-1$ ve j düğüm noktaları arasında düzgün değişen yükte süreksizlikler olduğunda, eşdeğer düğüm noktası yükü, düzgün değişen yük iki parça olarak düşünülerek hesap edilir. her bir düğüm noktasındaki eşdeğer noktasal yükü bulmak için (4.4)-(4.8) denklemleri her bir düzgün değişen yük parçası için uygulanır. $j-1$ ve

j düğüm noktalarında düzgün değişen yükün iki parçasında meydana gelen yüklerin toplamının alınmasına dikkat edilmelidir(Şekil 4.4).



Şekil 4.3. Düzgün değişen yayılı yük



Şekil 4.4. Süreksiz düzgün değişen yük

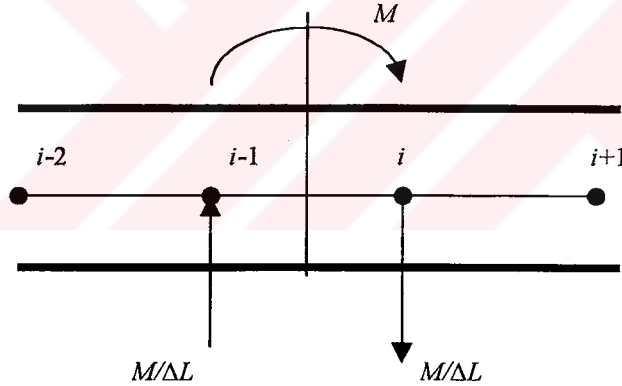
4.2.3. Kuvvet Çiftleri (moment)

Kuvvet çiftleri düğüm noktası üzerinde veya iki nokta arasında olabilir. Tekil yüklerde olduğu gibi düğüm noktalarının kuvvet çiftleri ile aynı nokta üzerine denk gelmesine çok dikkat edilmelidir. Böylece sonuçlarda hataların minimum düzeye inmesi sağlanmış olur. Bir kuvvet çifti için saat yönünü pozitif diğer yönü ise negatif kabul ediyoruz. Pozitif bir M kuvvet çifti $i-1$ ve i düğüm noktaları arasında uygulandığında (Şekil 4.5) $i-1$ ve i düğüm noktalarındaki eşdeğer noktasal yük

$$P_{i-1} = \frac{-M}{\Delta L} \quad (4.9)$$

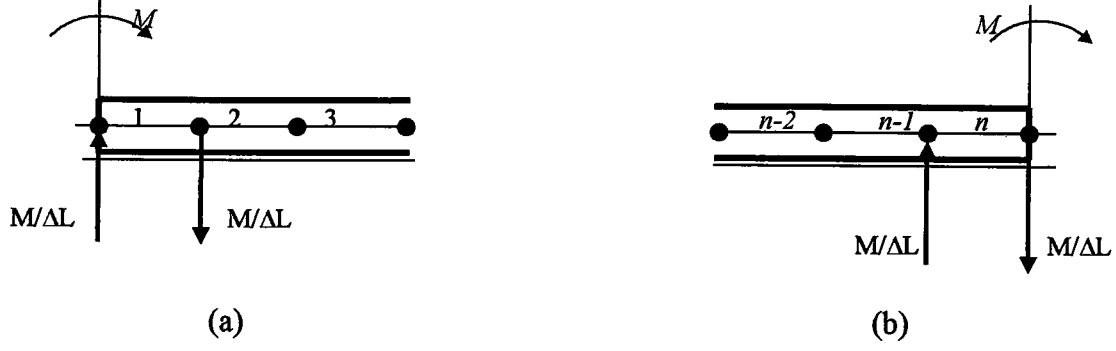
$$P_i = \frac{M}{\Delta L} \quad (4.10)$$

şeklinde olur.



Şekil 4.5. Düğüm noktaları arasında uygulanan pozitif moment

Pozitif kuvvet çifti M Şekil 4.6 (a) ve (b)'de gösterildiği gibi kirişin her iki uç noktasında da etki edebilir. Bu durumda i ve $i-1$ veya $n-1$ ve n düğüm noktalarındaki eşdeğer noktasal yük (4.9) ve (4.10) eşitliğinde verildiği gibidir.

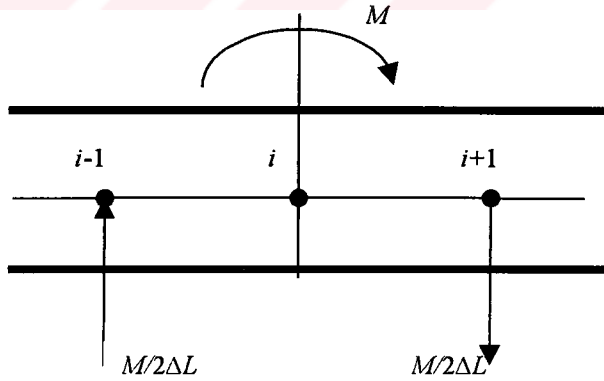


Şekil 4.6. Her iki uç noktada pozitif moment

Pozitif bir moment içeride herhangi bir düğüm noktasına etki ettiğinde bu moment $i-1$ ve $i+1$ düğüm noktalarına etki eden eşdeğer yüke çevrilir. Böylece aşağıdaki gibi ifade edilir (Şekil 4.7).

$$P_{i-1} = \frac{-M}{2\Delta L} \quad (4.11)$$

$$P_{i+1} = \frac{M}{2\Delta L} \quad (4.12)$$



Şekil 4.7. Bir iç düğüm noktasına etki eden pozitif moment

4.3. Zemin Reaksiyonu

Winkler zemin modelinde zemin tepkisi her bir düğüm noktasında bulunan ayrıık yayların oluşturduğu bir seri olarak düşünülür. Bu reaksiyonlar karşılık gelen

düğüm noktalarındaki yerdeğıştirmeler ile doğru orantılıdır. Normalde bu reaksiyonlar pozitif iken (yukarı doğru) kiriş ile zemin arasındaki gerilmenin durumuna göre negatif (aşağı doğru) de olabilir.

Düğüm noktalarındaki yay tepkileri :

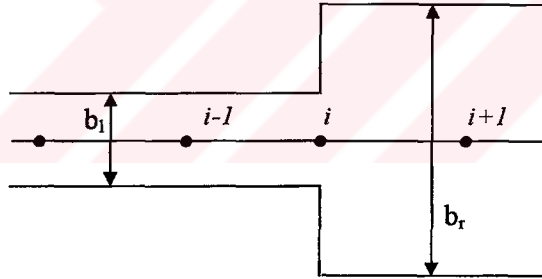
İlk düğüm noktasında (1 nolu) : $0,5k_1y_1\Delta L$

İçerideki herhangi bir i ($1 < i < n$) düğüm noktasında : $k_iy_i\Delta L$

Sağ uçtaki düğüm noktasında (n nolu) : $0,5k_ny_n\Delta L$

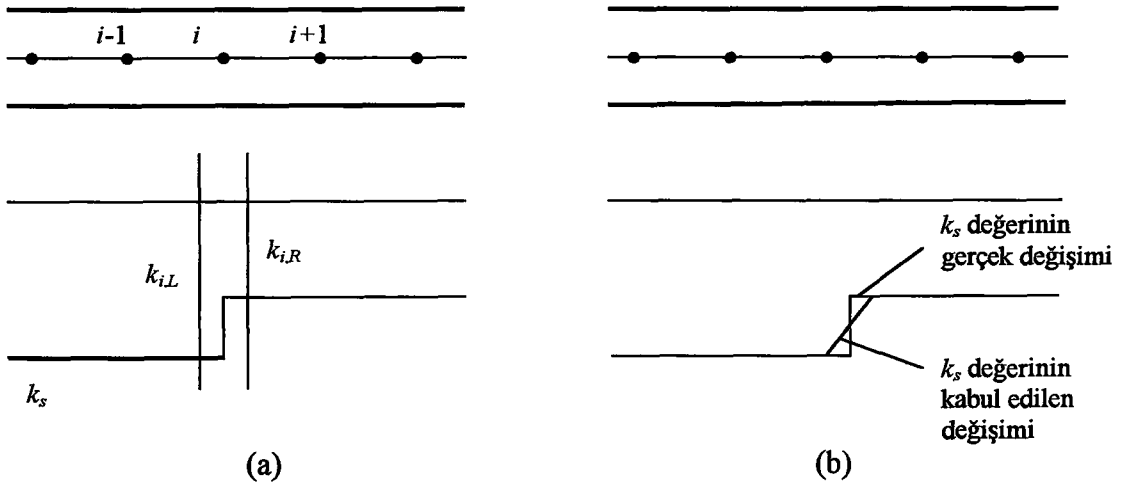
şeklinde ifade edilir.

k değerleri burada kN/m^2 alınır. ikinci bölümdeki (2.5) eşitliğinden bildiğimiz gibi i düğüm noktasında $k_i = k_{si}b_i$ dir. Burada k_{si} zemin reaksiyon modülü ve b_i ise o noktadaki kirişin genişliğidir. Eğer i düğüm noktasında kirişin genişliği aniden değışirse bu noktada pratik çözüm için b_i $0,5(b_l + b_r)$ alınır (Şekil 4.8).



Şekil 4.8. Herhangi bir noktada ani kiriş genişliği değışimi

k_s 'deki ani değışim şekil (4.9)'da gösterilmiştir. Eğer bu değışiklik i düğüm noktası üzerinde olur ise (Şekil 4.9(a)) k_s $0,5(k_{i,l} + k_{i,r})$ alınır. Ancak bu değışiklik düğüm noktaları arasında bir yerde olursa o zaman ihmal edilebilecek bir hata oluşur.



Şekil 4.9. Zemin reaksiyon modülündeki ani değişim: (a) herhangi bir noktada (b) düğüm noktaları arasında

5. SONLU FARKLAR TEORİSİNİN ELASTİK ZEMİNE OTURAN KİRİŞTE UYGULANMASI

5.1. Uygulama Kuvveti ve Düşey Yerdeğiştirmeler Arasındaki İlişki

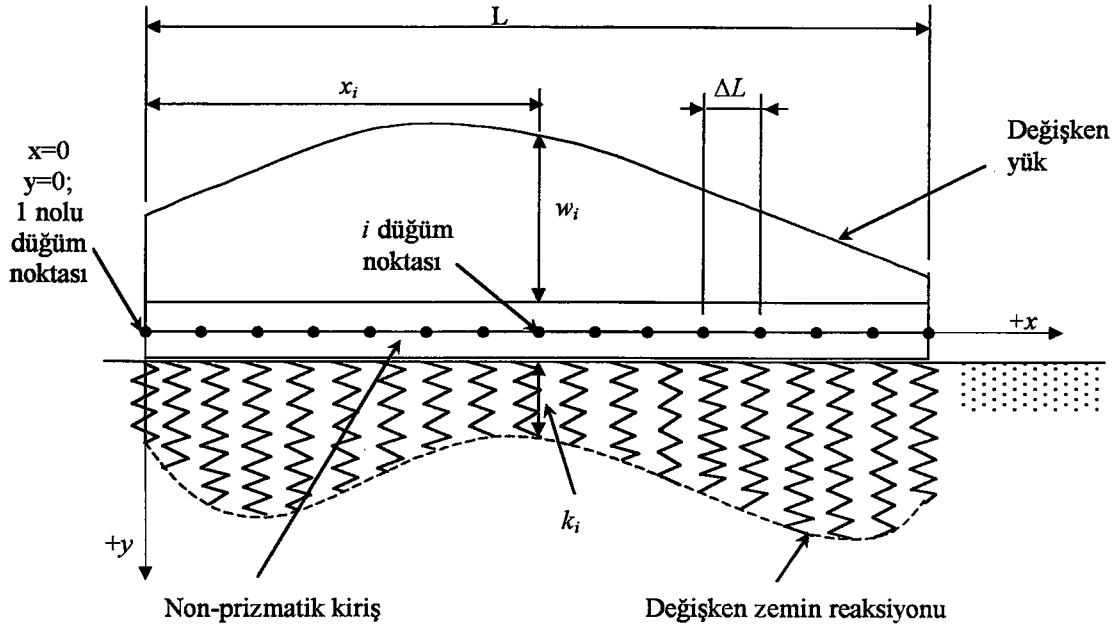
Elastik bir zemine oturan kirişin analizi en iyi şekilde, bilinmeyen düğüm noktaları düşey yerdeğiştirmelerinin uygulanan kuvvet ile ilişkilendirilip, sonra oluşan denklemlerden bu bilinmeyen yerdeğiştirmelerin hesaplanması yoluyla yürütölerek yapılır. Daha sonra bu yerdeğiştirmeler yardımı ile eğilme momenti, kesme kuvveti ve tepki kuvvetleri bulunabilir. Uygulama kuvveti, zemin tepkisi ve kirişin eğilme rijitliğindeki ani değışmeler de dahil bu tür hesaplar sonlu farklar teorisi ile çözüldüğünde oldukça basit bir hale gelir. Bununla beraber, sonlu farklar teorisi değışik mesnet koşullarının modellenmesine uygundur. Bu suretle değışik yük ve mesnet koşullarının araştırılmasına izin verir.

Genel halde yüklü elastik zemine oturmuş prizmatik olmayan bir kirişi göz önüne alalım (şekil 5.1). kirişin toplam uzunluğu L ve düğüm noktaları arasındaki uzaklık ΔL 'dir. Birinci bölümde elde edilen aşağıdaki eşitliğı yazabiliriz.

$$\frac{d^2}{dx^2}(EI \frac{d^2 y}{dx^2}) = w - ky \quad (5.1)$$

burada $k = k_s b$ (kN/m^2), k_s ($kN/m^2/mm$) zemin tepkisi modölü ve b (mm) kirişin genişliğıdir.

$$i \text{ düğüm noktasında, } EI_i (\frac{d^2 y}{dx^2})_i = -M_i \quad (5.2)$$



Kirişin i düğüm noktasındaki eğilme rijitliği $= EI_i$

Şekil 5.1. Elastik zemine oturan non-prizmatik yüklü kiriş

(5.2) denkleminde

$$\left(\frac{d^2 M}{dx^2}\right)_i = -w_i - k_i y_i \quad (5.3)$$

olur. Bu denklemde $k_i = k_{s,i} b_i$ dir. $k_{s,i}$ i ($kN/m^2/mm$) düğüm noktasındaki zemin reaksiyon modülüdür. b_i (mm) yine i düğüm noktasındaki kirişin genişliğidir. Merkezi farklar ifadesi ile $(d^2 y/dx^2)_i$ değerini (3.42) denklemindeki şekliyle (5.2) denkleminde yerine koyarak,

$$M_i \cong \frac{EI_i (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}))}{\Delta L^2} \quad (5.4)$$

elde edilmiş olur. Benzer yolla,

$$M_{i-1} \cong \frac{EI_{i-1} (y_{i-2} - 2y_{i-1} + y_i))}{(\Delta L)^2} \quad (5.5)$$

$$M_{i+1} \cong \frac{EI_{i+1} (y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}))}{(\Delta L)^2} \quad (5.6)$$

daha sonra temel bir denklem olan (3.42) denklemini eğilme momenti ilişkisini veren (5.3) denklemine uyguladığımızda sonuç

$$-\frac{(M_{i-1} - 2M_i + M_{i+1}))}{(\Delta L)^2} = w_i - k_i y_i$$

şeklinde olur. $w_i \Delta L$ ifadesini noktasal yük P_i ile Bölüm 4 de anlatıldığı şekilde değiştirirsek,

$$-\frac{(M_{i-1} - 2M_i + M_{i+1}))}{(\Delta L)} = P_i - k_i y_i \Delta L \quad (5.7)$$

sonucunu buluruz. M_{i-1}, M_i, M_{i+1} değerlerini (5.4), (5.5), (5.6) denklemlerinde verildiği şekilde değiştirip

$$\begin{aligned} \frac{E}{(\Delta L)^3} [I_{i-1} y_{i-2} - 2(I_{i-1} - I_i) y_{i-1} + (I_{i-1} + 4I_i + I_{i+1}) y_i \\ - 2(I_i + I_{i+1}) y_{i+1} + I_{i+1} y_{i+2}] \cong P_i - k_i y_i \Delta L \end{aligned}$$

elde edilir. Sonra bu denklemi düzenlediğimizde aşağıdaki sonuca varılır.

$$\begin{aligned} \frac{E}{(\Delta L)^3} [I_{i-1} y_{i-2} - 2(I_{i-1} - I_i) y_{i-1} + (I_{i-1} + 4I_i + I_{i+1} + k_i (\Delta L)^4 / E) y_i \\ - 2(I_i + I_{i+1}) y_{i+1} + I_{i+1} y_{i+2}] \cong P_i \end{aligned} \quad (5.8)$$

Eğer kiriş üniform bir kesit alanı ve eğilme rijitliğine sahip ise denklem daha basit bir hale gelir.

$$\frac{EI}{(\Delta L)^3} [y_{i-2} - 4y_{i-1} + (6 + k_i (\Delta L)^4 / EI) y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}] \cong P_i \quad (5.9)$$

(5.8) eşitliği tüm problemler için genelleştirilmiş merkezi fark ifadesidir. Bu denklem tüm düğüm noktaları için geçerlidir. Yalnız iki sınır düğüm noktası ve eğer bulunuyorsa içte mesnet olan düğüm noktalarında düzenlemeye gidilir.

5.2. Sınır Koşulları

Yüklü bir kirişin analizinde sonlu farklar metodunun uygulanırken sınır şartları oldukça önemlidir. İki uç düğüm noktası ve yanındaki noktalar özel olarak düşünülmelidir. Düğüm noktası i olarak nitelendirilip bu düğüm noktası için yük-sehim denklemi elde edildikten sonra gerçek değer verilmesi analiz için en uygun yöntemdir. i düğüm noktası için 1, 2,...,n-1, n değerleri verilir. n burada analizde kullanılan toplam düğüm noktası sayısıdır.

(5.8) denklemi kirişin uç noktalarına uygulanıp sınır koşuluna göre düzenlenir. Bu uygulama esnasında yine sınır koşuluna göre uçtaki düğüm noktası dışında hayali bir sınır noktası düşünülebilir. Sınır koşulları serbest, ankastre mesnetli veya basit mesnetli olabilir. Her bir durumda kiriş ucunun belli bir miktarda veya serbest sehim yapmasına izin verilebilir. Tabiki bu sehim miktarı sıfırda olabilir. Bu bölümde sınırdaki düğüm noktalarının serbest yerdeğiştirme yapabileceği farzedilerek, sınır koşulları için yük-sehim denklemleri geliştirilecek.

5.2.1. Serbest Uç

Serbest uç olan sol uçtaki düğüm noktasının i olduğunu düşünelim (Şekil 5.2(a)). Bu durumda i noktasındaki eğilme momenti sıfır olur ($M_i=0$). i düğüm noktasındaki eşdeğer noktasal yük ve zemin tepkisine bağlı olarak, $i+1$ noktasındaki eğilme momenti

$$M_{i+1} = -P_i \Delta L + 0,5k_i y_i (\Delta L)^2$$

şeklindedir. (5.6) denkleminde M_{i+1} 'in değeri, y_i , y_{i+1} , y_{i+2} sehimleri cinsinden verilmiştir. Buradan

$$\frac{EI_{i+1}(y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2})}{(\Delta L)^3} \cong P_i - 0,5k_i y_i (\Delta L)$$

denklemi elde edilmiş olur. Bu denklem düzenlenerek

$$\frac{E}{(\Delta L)^3} \left[(I_{i+1} + 0,5k_i (\Delta L)^4 / E) y_i - 2I_{i+1} y_{i+1} + I_{i+1} y_{i+2} \right] \cong P_i \quad (5.10a)$$

ifadesi bulunur. Burada $i=1$ verilerek, kirişin sol ucundaki düğüm noktası için

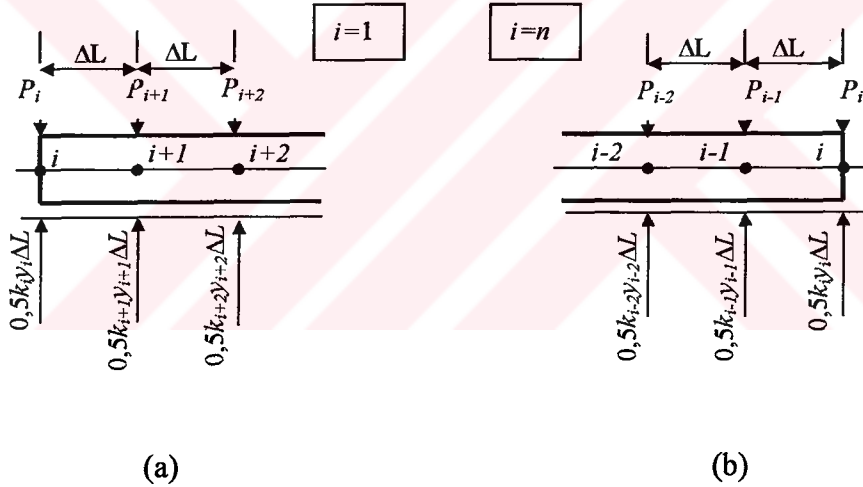
$$\frac{E}{(\Delta L)^3} \left[(I_2 + 0,5k_1(\Delta L)^4/E)y_1 - 2I_2y_2 + I_2y_3 \right] \cong P_1 \quad (5.10b)$$

şeklinde olur. i düğüm noktası kirişin sağ ucunda olduğu düşünülürse (Şekil 5.2(b)) yine benzer şekilde

$$\frac{E}{(\Delta L)^3} \left[I_{i-1}y_{i-2} - 2I_{i-1}y_{i-1} + (I_{i-1} + 0,5k_i(\Delta L)^4/E)y_i \right] \cong P_i \quad (5.11a)$$

ifadesi yazılabilir. Burada $i=n$ aldığımızda aşağıdaki denklem elde edilir (n toplam düğüm noktası sayısıdır).

$$\frac{E}{(\Delta L)^3} \left[I_{n-1}y_{n-2} - 2I_{n-1}y_{n-1} + (I_{n-1} + 0,5k_n(\Delta L)^4/E)y_n \right] \cong P_n \quad (5.11b)$$



Şekil 5.2. Serbest uç, uç düğüm noktaları: (a) kirişin sol ucu (b) kirişin sağ ucu

Sol uçtaki düğüm noktasından bir sonraki düğüm noktasını i olarak düşündüğümüzde (Şekil 5.3(a)) $M_{i-1}=0$ dır.

(5.7) denkleminde $M_{i-1}=0$ değerini yerine koyar isek;

$$\frac{-(-2M_i + M_{i+1})}{\Delta L} \cong P_i - k_i y_i \Delta L$$

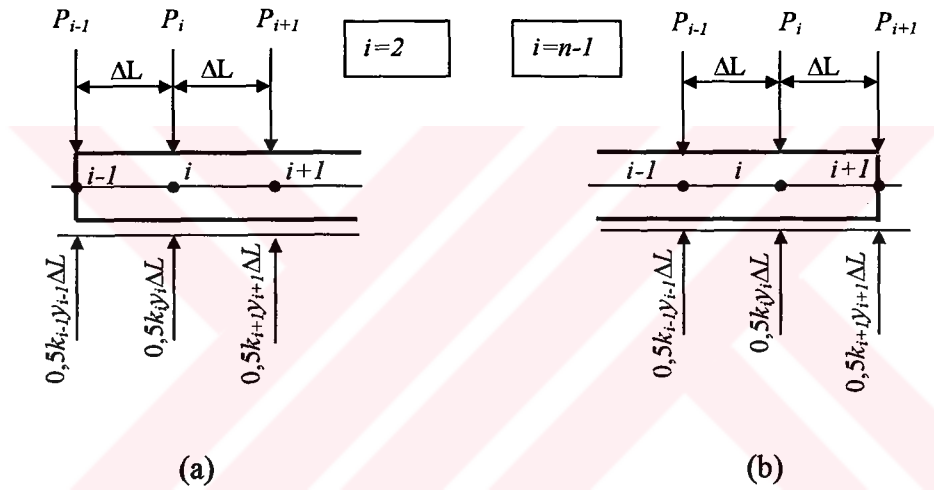
olur. Bu denklemde M_i ve M_{i+1} terimlerini (5.4) ve (5.6) denklemlerinde verildiği gibi bilinmeyen sehimler türünden yazıp aşağıdaki sonuca varırız.

$$\frac{E}{(\Delta L)^3} \left[-2I_i y_{i-1} + (4I_i + I_{i+1} + k_i (\Delta L)^4 / E) y_i - 2(I_i + I_{i+1}) y_{i+1} + I_{i+1} y_{i+2} \right] \cong P_i \quad (5.12a)$$

bu ifadeye $i=2$ değerini verip (sol uçtan bir sonraki düğüm noktasının değeri)

$$\frac{E}{(\Delta L)^3} \left[-2I_2 y_1 + (4I_2 + I_3 + k_2 (\Delta L)^4 / E) y_2 - 2(I_2 + I_3) y_3 + I_3 y_4 \right] \cong P_2 \quad (5.12b)$$

sonucuna varmış oluruz..



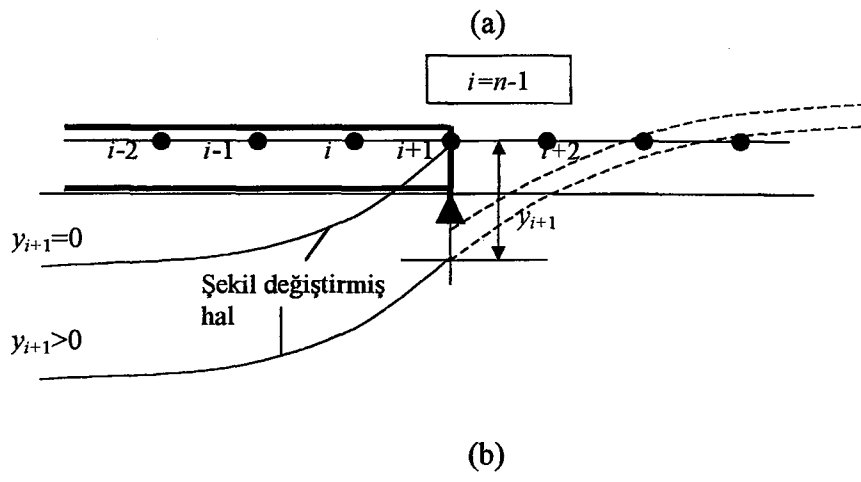
Şekil 5.3. Serbest uç, uçların yanlarındaki düğüm noktaları: (a) sol uç (b) sağ uç

Benzer ifade sağ uçtan bir önceki düğüm noktası i olarak düşündüğümüzde bulunur (Şekil 5.3b).

$$\frac{E}{(\Delta L)^3} \left[I_{i-1} y_{i-2} - 2(I_{i-1} + I_i) y_{i-1} + (I_{i-1} + 4I_i + k_i (\Delta L)^4 / E) y_i - 2I_i y_{i+1} \right] \cong P_i \quad (5.13a)$$

yine burada $i=n-1$ değeri yerine konulur ve

$$\frac{E}{(\Delta L)^3} \left[I_{n-2} y_{n-3} - 2(I_{n-2} + I_{n-1}) y_{n-2} + (I_{n-2} + 4I_{n-1} + k_{n-1} (\Delta L)^4 / E) y_{n-1} - 2I_{n-1} y_n \right] \cong P_{n-1} \quad (5.13b)$$



Şekil 5.4. Basit mesnetli uç düğüm noktaları: (a) sol uç (b) sağ uç

Kirişin uç noktasında bitmeyip hayalen devam ettiği düşünülür. Bu durumda $i-1$ (uç) düğüm noktasının diğer tarafta (hayali olarak düşünülen taraf) oluşan sehimler düşey ve yatayda simetrik olarak farzedilir (Şekil 5.4(a)).

(5.4) denkleminde $M_{i-1}=0$ sınır koşulu yerine konulursa

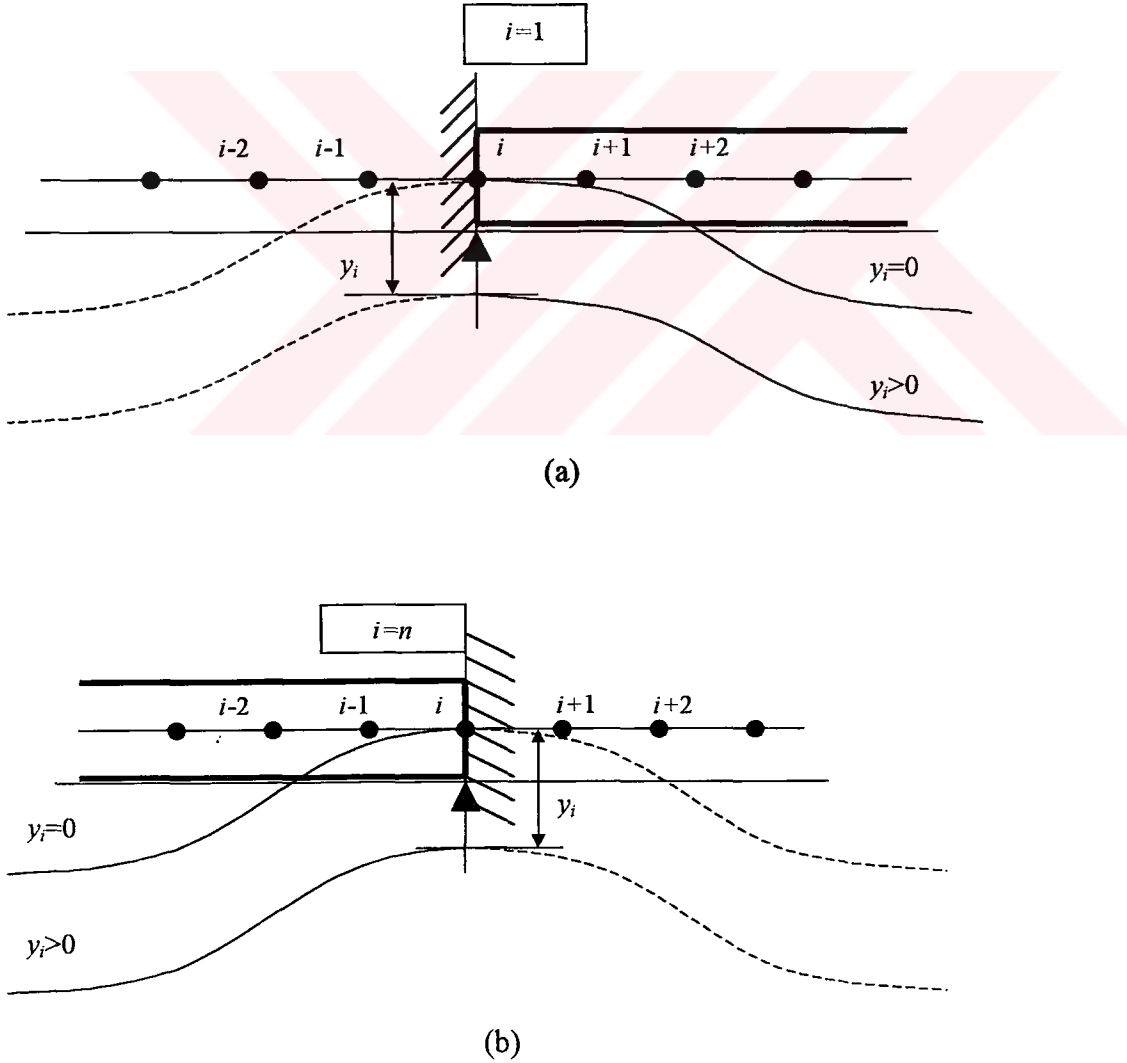
$$y_{i-1} = 2y_{i-1} - y_i$$

sonucuna varılır. Bu denklem (5.8) genel denkleminde yerine konulduğunda i düğüm noktası için serbest uçlu kirişle tamamen aynı sonuçtur. Böylece (5.10), (5.11),

(5.12), (5.13) denklemleri aynen basit mesnetli kirişte de uygulanabilir. Bu durum uç noktanın sehim yapmasına izin verildiği durumdur. Eğer uçta sıfır olursa bu durumda uç düğüm noktasına i değeri verilip $y_i=0$ alınır.

5.2.3 Ankastre Mesnetli Uç

Kirişin ucunda dönmeye karşı mesnetlenme olduğu durumda bu uç düğüm noktası (i) denklemlerini elde edebilmek için kirişin hayalen devam ettiği düşünülür. Uçtan sonraki bölümde kirişin mesnet, yük koşulu ve eğilme rijitliği düşey doğrultuda simetriği alınarak düşünülür (Şekil 5.5). Bu durumda i düğüm noktasında sınır koşulları $i=0$ ve $y_i \geq 0$ şeklindedir. y_i sehim serbest veya tutulmuş olabilir.



Şekil 5.5. Ankastre uç düğüm noktaları: (a) sol uç (b) sağ uç

Kirişin sol ucunu düşünelim,

$$y_{i-1}=y_{i+1}, y_{i-2}=y_{i+2}, I_{i-1}=I_{i+1}, I_{i-2}=I_{i+2}$$

olur. Bu değerleri (5.8) genel denkleminde yerine koyduğumuzda

$$\frac{E}{(\Delta L)^3} \left[(2I_i + I_{i+1} + 0,5k_i(\Delta L)^4 / E)y_i - 2(I_i + I_{i+1})y_{i+1} + I_{i+1}y_{i+2} \right] = P_i \quad (5.14a)$$

denklemini elde ederiz. Daha sonra $i=1$ değerini verdiğimizde aşağıdaki sonuca varılır.

$$\frac{E}{(\Delta L)^3} \left[(2I_1 + I_2 + 0,5k_1(\Delta L)^4 / E)y_1 - 2(I_1 + I_2)y_2 + I_2y_3 \right] = P_1 \quad (5.14b)$$

i sağ uçtaki düğüm noktası olur ise

$$\frac{E}{(\Delta L)^3} \left[(I_{i-1} + 2I_i + 0,5k_i(\Delta L)^4 / E)y_i - 2(I_{i-1} + I_i)y_{i-1} + I_{i-1}y_{i-2} \right] = P_i \quad (5.15a)$$

denklemini yazabiliriz. Daha sonra yine $i=n$ değerini verdiğimizde aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$\frac{E}{(\Delta L)^3} \left[(I_{n-1} + 2I_n + 0,5k_n(\Delta L)^4 / E)y_n - 2(I_{n-1} + I_n)y_{n-1} + I_{n-1}y_{n-2} \right] = P_n \quad (5.15b)$$

i düğüm noktasında sehim olmadığı durumda, yük-sehim denklemi basitçe $y_i=0$ şeklinde olur ($i=1$ veya $i=n$). Diğer sınır koşullarında olduğu gibi uç düğüm noktalarının bir yanındaki düğüm noktaları da düşünülmelidir (2 ve $n-1$ numaralı düğüm noktaları).

Sol uçtan bir sonraki düğüm noktasını i olarak varsayalım.

$$y_{i-2}=y_i, I_{i-2}=I_i$$

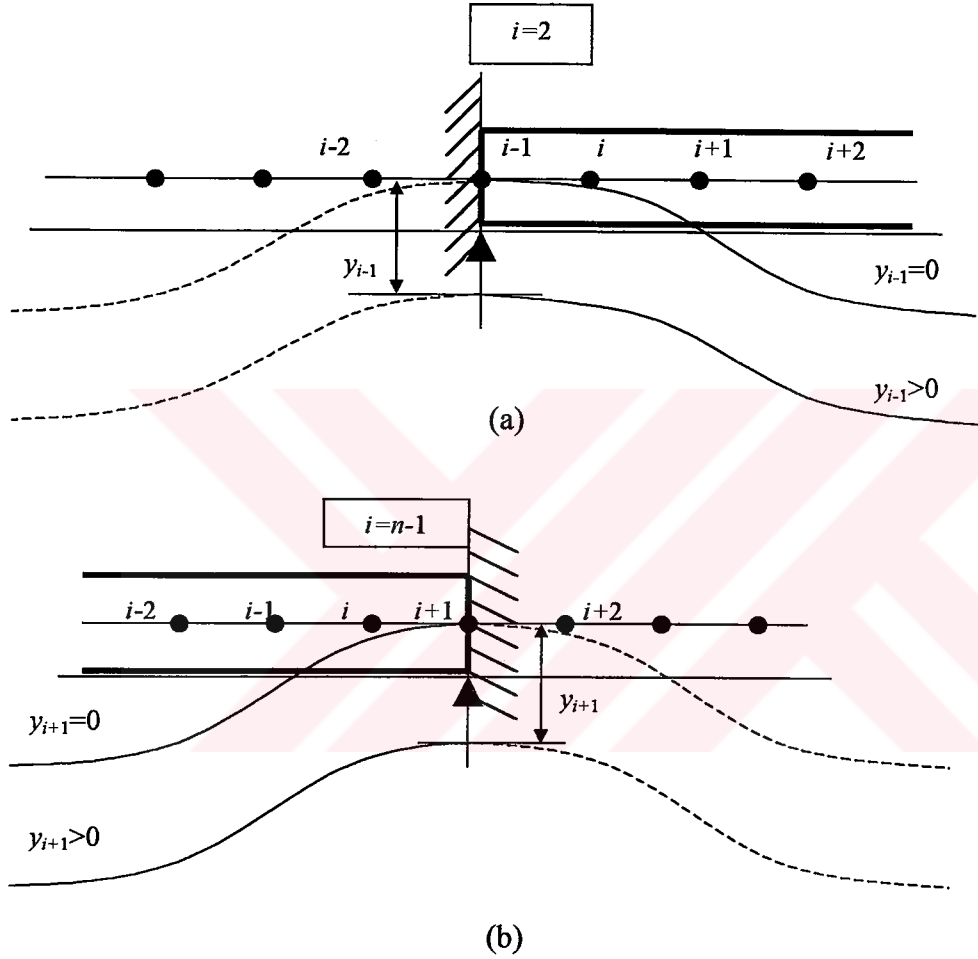
Bu değerleri (5.8) denkleminde yerine koyduğumuzda aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\frac{E}{(\Delta L)^3} \left[-2(I_{i-1} + I_i)y_{i-1} + (2I_{i-1} + 4I_i + I_{i+1} + k_i(\Delta L)^4 / E)y_i - 2(I_i + I_{i+1})y_{i+1} + I_{i+1}y_{i+2} \right] \equiv P_i \quad (5.16a)$$

$i=2$ olduğuna göre denklem

$$\frac{E}{(\Delta L)^3} \left[-2(I_1 + I_2)y_1 + (2I_1 + 4I_2 + I_3 + k_2(\Delta L)^4 / E)y_2 - 2(I_2 + I_3)y_3 + I_3y_4 \right] \cong P_2 \quad (5.16b)$$

şeklinde olur.



Şekil 5.6. Ankastre uçlar, uçlardan bir önceki düğüm noktaları: (a) sol uç (b) sağ uç

Uç düğüm noktasında sehim sıfır olursa ($y_1=0$) denklem aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{E}{(\Delta L)^3} \left[(2I_1 + 4I_2 + I_3 + k_2(\Delta L)^4 / E)y_2 - 2(I_2 + I_3)y_3 + I_3y_4 \right] \cong P_2 \quad (5.16c)$$

i düğüm noktası sağ uçtaki düğüm noktası olduğu ve $y_i \geq 0$ olduğu zaman denklem aşağıdaki şekli alır.

$$\frac{E}{(\Delta L)^3} \left[-2(I_i + I_{i+1})y_{i+1} + (2I_{i+1} + 4I_i + I_{i-1} + k_i(\Delta L)^4 / E)y_i - 2(I_{i-1} + I_i)y_{i-1} + I_{i-1}y_{i-2} \right] \cong P_i \quad (5.17a)$$

$i=n-1$ değerini yerine koyduğumuzda denklem

$$\frac{E}{(\Delta L)^3} \left[-2(I_{n-1} + I_n)y_n + (2I_n + 4I_{n-1} + I_{n-2} + k_{n-1}(\Delta L)^4 / E)y_{n-1} - 2(I_{n-2} + I_{n-1})y_{n-2} + I_{n-2}y_{n-3} \right] \cong P_{n-1} \quad (5.17b)$$

şeklinde olur. Son olarak sağ uçta sehim sıfır olur ise ($y_n=0$), (5.17b) denklemi aşağıdaki gibi kısalır.

$$\frac{E}{(\Delta L)^3} \left[(2I_n + 4I_{n-1} + I_{n-2} + k_{n-1}(\Delta L)^4 / E)y_{n-1} - 2(I_{n-2} + I_{n-1})y_{n-2} + I_{n-2}y_{n-3} \right] \cong P_{n-1} \quad (5.17c)$$

5.3 İçte Mesnet Olması Hali

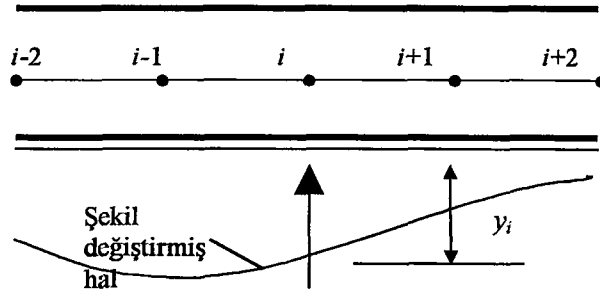
Bu kısımda iki değişik iç mesnetlenme koşulunu inceleyeceğiz.

- a) Basit mesnet
- b) Ankastre mesnet

Bu mesnetlerdeki düşey yerdeğiştirmeler serbest veya izin verilen bir miktarda olabilir. Bu miktar sıfırda olabilir. Bu mesnetlerin tam olarak düğüm noktası üzerinde olması en uygun durumdur.

5.3.1 Basit Mesnet

i düğüm noktasında basit mesnetli, yüklü elastik zemine oturan bir kiriş ele alalım (Şekil 5.7). Denklem (5.8) 'i $i-1$ ve $i+1$ düğüm noktalarında uygulanır. Bununla birlikte i düğüm noktasında eğer düşey yerdeğiştirmeye izin verilmiş ise diğer düğüm noktalarından farklı bir yönü olmaz ve aynı denklemler uygulanır.



Şekil 5.7. Basit mesnet

5.3.2 Ankastre Mesnet

Bu durumda ankastre mesnetin bulunduğu i düğüm noktası ve yanındaki noktalarda ayrı ayrı ele alınmalıdır. Şekil 5.8(a) i iç düğüm noktasından ankastre mesnetli ve yüklü bir kirişi gösterir. Burada i düğüm noktasında $(dy/dx)=0$ olur. (5.8) denklemi yine mesnet noktası için uygulanabilir. Fakat i düğüm noktası mesnetlenmenin sağında veya solunda olduğu zaman bu denklemde düzeltmeler gerekir (Şekil 5.8(b) ve (c)). i düğüm noktasının mesnetlenme olan noktanın bir solunda olduğunu düşünelim (Şekil 5.8(b)). Mesnetlenme olan noktanın hemen sağ ve solundaki eğilme momentleri M_L ve M_R (5.4) aşağıdaki gibi elde edilir.

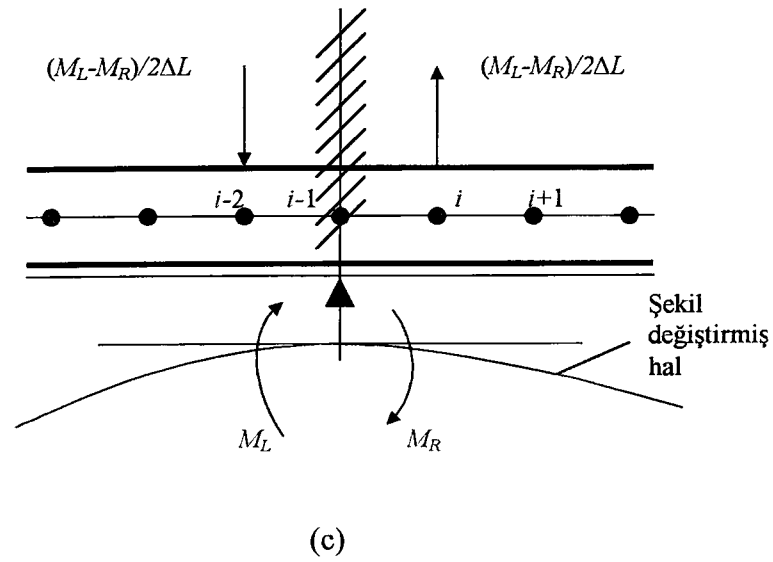
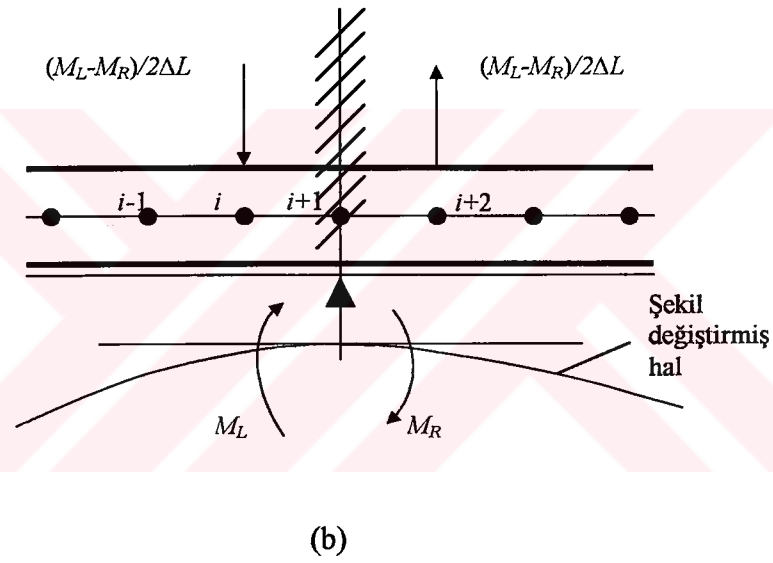
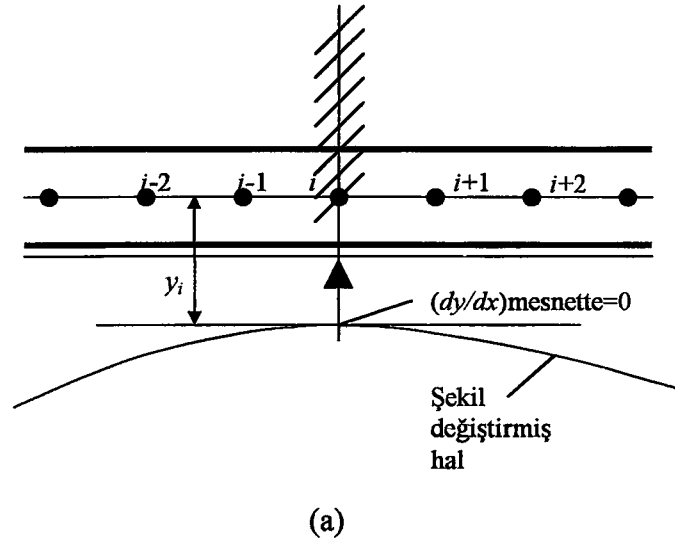
$$M_L = -2EI_{i+1}(y_i - y_{i+1})/(\Delta L)^2; M_R = -2EI_{i+1}(y_{i+2} - y_{i+1})/(\Delta L)^2$$

Sonuç olarak eğilme momentlerinin farkı şu şekildedir.

$$M_L - M_R = -2EI_{i+1}(y_i - y_{i+2})/(\Delta L)^2 \quad (5.18)$$

Eğilme momentleri arasındaki bu fark, mesnetin sağ ve solundaki noktalara etki eden eşdeğer noktasal bir kuvvet çiftine dönüştürülebilir (Şekil 5.8(b) ve (c)). Bu noktasal kuvvetlerin herbiri $EI_{i+1}(y_i - y_{i+2})/(\Delta L)^3$ değerine eşit olur. Böylece ankastre mesnetli noktanın hemen solundaki i düğüm noktası için yük-yer değiştirme denklemi aşağıdaki gibi olur (Şekil 5.8(b)).

$$\frac{E}{(\Delta L)^3} [I_{i-1}y_{i-2} - 2(I_{i-1} + I_i)y_{i-1} + (I_{i-1} + 4I_i + I_{i+1} + k_i(\Delta L)^4/E)y_i - 2(I_i + I_{i+1})y_{i+1} + I_{i+1}y_{i+2}] \equiv P_i - \frac{EI_{i+1}(y_i - y_{i+2})}{(\Delta L)^3}$$



Şekil 5.8. Ankastre Mesnetler

Bu denklemi düzenlediğimizde aşağıdaki sonuca varırız.

$$\frac{E}{(\Delta L)^3} [I_{i-1}y_{i-2} - 2(I_{i-1} + I_i)y_{i-1} + (I_{i-1} + 4I_i + 2I_{i+1} + k_i(\Delta L)^4/E)y_i - 2(I_i + I_{i+1})y_{i+1}] \cong P_i \quad (5.19)$$

Mesnetli düğüm noktasının sağ tarafı i düğüm noktası olduğu durumda yine aynı şekilde elde edilebilir.

$$\frac{E}{(\Delta L)^3} [-2(I_{i-1} + I_i)y_{i-1} + (2I_{i-1} + 4I_i + I_{i+1} + k_i(\Delta L)^4/E)y_i - 2(I_i + I_{i+1})y_{i+1} + I_{i+1}y_{i+2}] \cong P_i \quad (5.20)$$

5.4. Eğilme Momentleri

Şu ana kadar sadece düğüm noktaları üzerine etki eden momentler için denklemler elde edildi. Eğilme momentlerinin düğüm noktaları arasında lineer olarak değiştiği farz edilir. Bununla beraber analizde büyük miktarda düğüm noktası kullanıldığında hata oranı oldukça düşük olur ve bir çok mühendislik problemi için bu hata oranı ihmal edilebilir.

5.4.1. Sınırdaki Düğüm Noktaları Üzerinde Moment Olması Durumu

Eğer bir dış moment uygulanmadıysa serbest veya basit mesnetli kirişte uçta moment sıfır olur. Sol uçta ankastre mesnet olması durumunda (Şekil 5.5(a)), 1 nolu düğüm noktasındaki eğilme momenti (5.4) denkleminde hesap edilir. Sonuç aşağıdaki şekilde olur.

$$M_1 = -\frac{2EI_1(y_2 - y_1)}{(\Delta L)^2} \quad (5.21a)$$

Eğer $y_1=0$ olur ise denklem

$$M_1 = -\frac{2EI_1y_2}{(\Delta L)^2} \quad (5.21b)$$

şeklindedir.

Kirişin sağ ucunda n düğüm noktası için denklem (n : düğüm noktası sayısı)

$$M_n = -\frac{2EI_n(y_{n-1} - y_n)}{(\Delta L)^2} \quad (5.22a)$$

şeklindedir ve eğer $y_n=0$ olur ise denklem aşağıdaki basit hale gelir.

$$M_n = -\frac{2EI_n y_{n-1}}{(\Delta L)^2} \quad (5.22b)$$

5.4.2. İçteki Düğüm Noktalarında Eğilme Momenti Olması Durumu

Bu bölümde her hangi bir iç düğüm noktası i ($2 < i < n-1$) sınırları arasındadır. Burada n toplam düğüm noktası sayısıdır. Herhangi bir serbest uçtaki eğilme momenti (5.4) denklemi kullanılarak hesap edilir ki denklem

$$M_i \cong -\frac{EI_i(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}))}{(\Delta L)^2}$$

şeklindedir. Bu denklemi bir iç düğüm noktasında uygulayabiliriz. Aşağıdaki durumlarda ise düzenlemelere gidilmelidir.

- a) serbest bir uç düğüm noktasında bir M momenti uygulandığında
- b) ankastre bir iç mesnet olması durumunda (düşey yerdeğiştirme olduğu veya olmadığı her iki durum içinde)

(a) da belirtilen durumda (Şekil 5.9), i düğüm noktasındaki sonuç momentleri

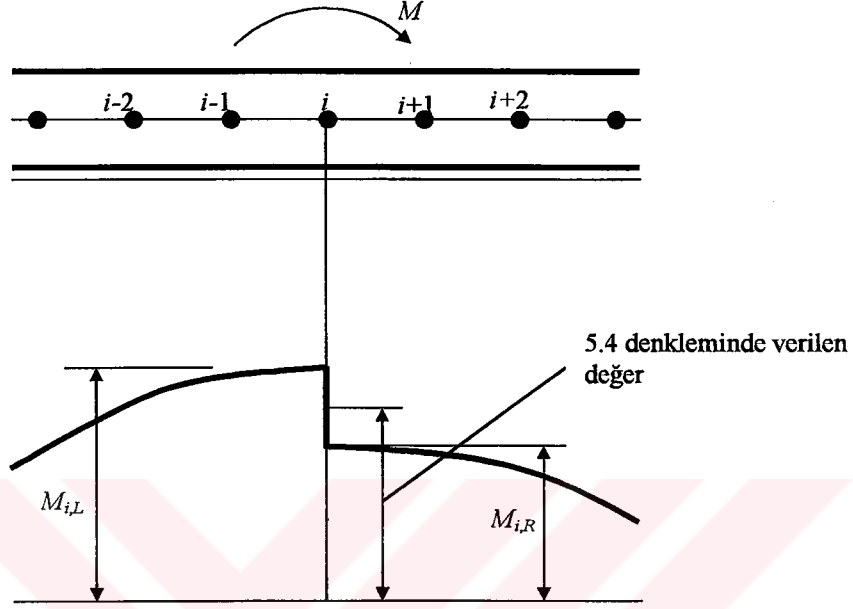
$$M_{i,L} \cong -\frac{EI_i(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}))}{(\Delta L)^2} - 0,5M \quad (5.23)$$

ve

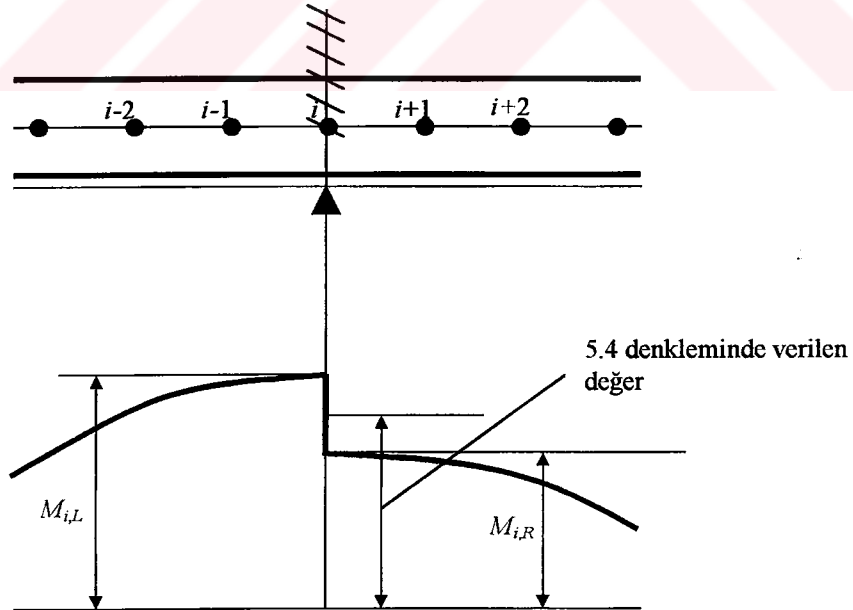
$$M_{i,R} \cong -\frac{EI_i(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}))}{(\Delta L)^2} + 0,5M \quad (5.24)$$

şeklinde olur. Burada $M_{i,L}$ ve $M_{i,R}$ momentleri i düğüm noktasının hemen sağ ver sol yanındaki eğilme momentleridir.

Momentin iki düğüm noktası arasına uygulandığı durumda ise (Şekil 4.5), iki yandaki düğüm noktalarında eğilme momenti, (5.4) denklemini hiçbir düzenlenmeye gidilmeden aynen kullanılarak hesap edilir. Bu durumda muhakkak hata oluşacaktır. En ideal durum momentin bir düğüm noktası üzerine uygulandığı durumdur.



Şekil 5.9. Moment uygulanan serbest bir iç düğüm noktasında eğilme momenti



Şekil 5.10. Ankastre mesnetli bir iç düğüm noktasında eğilme momentleri

(b) durumunda (Şekil 5.10) ankastre mesnet olan i düğüm noktasının her iki yanındaki düğüm noktalarında oluşan eğilme momentleri $M_{i,L}$ ve $M_{i,R}$ (5.4) denkleminde hesap edildiği gibi

$$M_{i,L} \cong -\frac{2EI_i(y_{i-1} - y_i)}{(\Delta L)^2} \quad (5.25a)$$

ve

$$M_{i,R} \cong -\frac{2EI_i(y_{i+1} - y_i)}{(\Delta L)^2} \quad (5.25b)$$

şeklindedir. $y_i=0$ olduğunda denklemler daha basit bir hale gelir.

$$M_{i,L} \cong -\frac{2EI_i y_{i-1}}{(\Delta L)^2} \quad (5.26a)$$

$$M_{i,R} \cong -\frac{2EI_i y_{i+1}}{(\Delta L)^2} \quad (5.26b)$$

5.5. Kesme Kuvvetleri

Sonlu farklar metodu ile yalnızca kiriş boyunca düğüm noktaları üzerindeki eğilme momentleri analiz edilir. İki düğüm noktası arasındaki eğilme momentinin düzgün yayıldığı varsayılır. Sonuç olarak düğüm noktaları arasındaki parçalarda kesme kuvvetleri sabit olur. Böylece kesme kuvveti diyagramı bu düğüm noktaları arasındaki değerlerin birleştirilmesi ile elde edilir (Şekil 5.11). Düğüm noktalarında düzenleme gerektiren durumlar üzerinde tekil yük, kuvvet çifti ve mesnet kuvveti bulunan durumlardır. $V_{i,L}$, i düğüm noktasının hemen solundaki, $V_{i,R}$, i düğüm noktasının hemen sağındaki ve V_i , i düğüm noktasındaki ortalama kesme kuvvetidir.

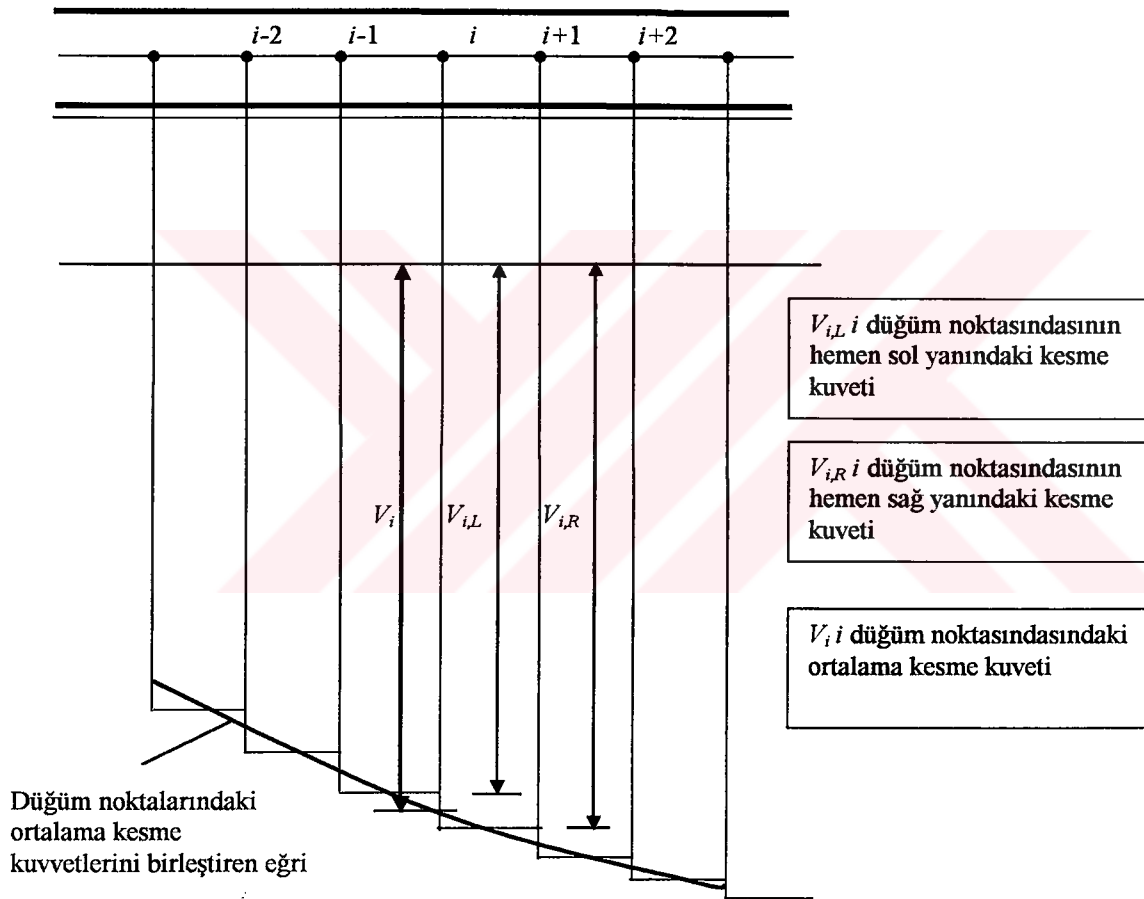
5.5.1. Sınırdaki Düğüm Noktalarında Kesme Kuvveti Olması Durumu

Genel durumdaki 1 ve n olarak numaralanmış düğüm noktalarını düşünelim (Şekil 5.12). Basit mesnetli veya ankastre mesnetli kirişte R_1 ve R_n reaksiyonları oluşur. Bilindiği üzere eğer uçlar serbest ise bu reaksiyonlar sıfır olur. Sonuç olarak 1

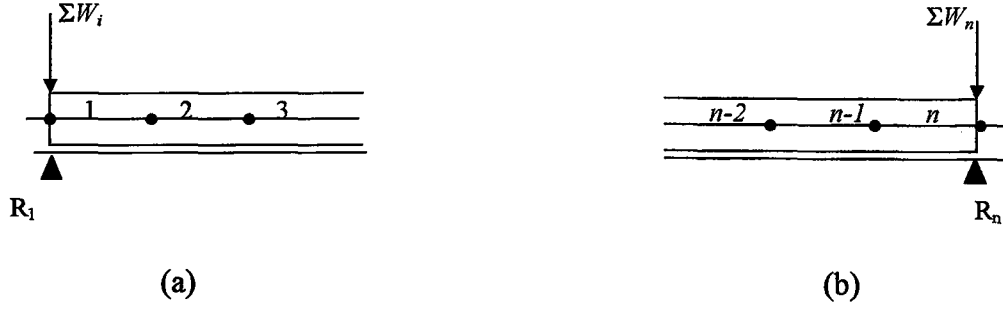
nolu düğüm noktasındaki (kirişin sol ucu) kesme kuvveti V_1 aşağıdaki denklemle ifade edilir.

$$V_1 = R_1 - \sum W_1 \quad (5.27)$$

Denklemde R_1 1 numaralı düğüm noktasındaki mesnet tepkisi, W_1 ise yine 1 numaralı düğüm noktasına etki eden düşey yüklerin toplamıdır.



Şekil 5.11. Düğüm noktaları arasındaki kesme kuvvetleri sabittir.



Şekil 5.12. Sınır koşullarındaki düğüm noktaları; (a) sol uç (b) sağ uç

Aynı şekilde sağ uçtaki n düğüm noktasında kesme kuvveti V_n aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$V_n = -R_n + \sum W_n \quad (5.28)$$

Bu ifadede R_n n numaralı düğüm noktasındaki mesnet tepkisi, W_n ise yine n numaralı düğüm noktasına etki eden düşey yüklerin toplamıdır. R_1 ve R_n bölüm 5.6 da verilen ifadelerdir.

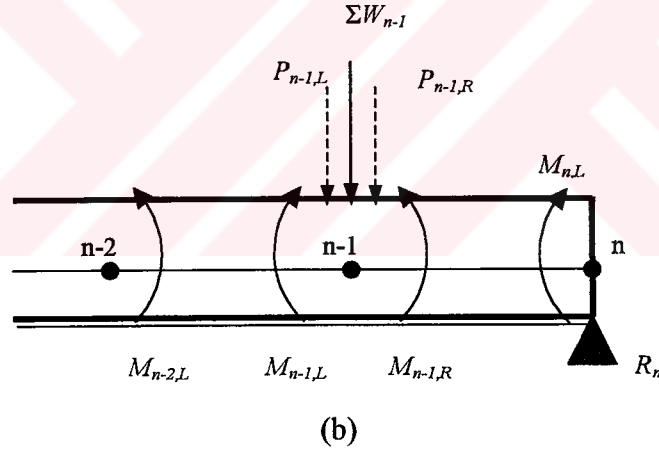
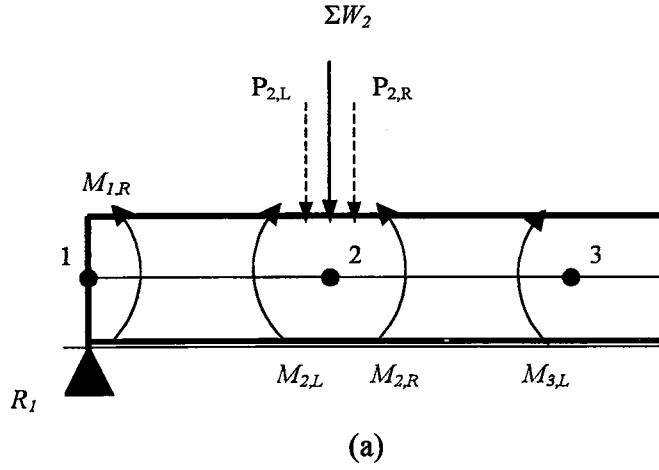
Kiriş uçlarındaki düğüm noktalarının yanındaki, 2 ve $n-1$ olarak numaralanmış olan noktaların (Şekil 5.13) hemen sağ ve sol tarafında kesme kuvvetleri ise aşağıdaki şekilde hesap edilir.

2 numaralı düğüm noktası sol taraftaki kesme kuvveti aşağıdaki gibidir.

$$V_{2,L} = \frac{(-M_{1,R} + M_{2,L} - M_{2,R}M_{3,L})}{2\Delta L} - 0,5(P_{2,L} + P_{2,R} - \sum W_2) \quad (5.29)$$

Bu denklemde $M_{1,R}$, 1 numaralı düğüm noktasının hemen sağ tarafındaki eğilme momenti, $M_{2,L}$ 2 numaralı düğüm noktasının hemen sol tarafına etki eden eğilme momenti, $M_{2,R}$ 2 numaralı düğüm noktasının hemen sağ tarafına etki eden eğilme momenti, $M_{3,L}$ 3 numaralı düğüm noktasının hemen sol tarafına etki eden eğilme momenti, $P_{2,L}$ 2 numaralı düğüm noktasının sol tarafına etki eden noktasal yük veya kuvvet çiftinden elde edilen 2 numaralı düğüm noktasındaki eşdeğer düğüm noktası yükü, $P_{2,R}$ 2 numaralı düğüm noktasının sağ tarafına etki eden noktasal yük veya kuvvet çiftinden elde edilen 2 numaralı düğüm noktasındaki

eşdeğer düğüm noktası yükü ve son olarak ΣW_2 ise 2 numaralı düğüm noktasına etki eden toplam düşey noktasal kuvvettir.



Şekil 5.13. Sınırdaki uçlardan bir önceki düğüm noktaları: (a) sol uç; (b) sağ uç

2 numaralı düğüm noktasının sağ taraftaki kesme kuvveti aşağıdaki gibidir.

$$V_{2,R} = V_{2,L} - \Sigma W_2 \quad (5.30)$$

Benzer şekilde sağ uçtan bir önceki düğüm noktasında $(n-1)$ denklemler şu şekildedir.

2 numaralı düğüm noktası sol tarafı için kesme kuvveti

$$V_{n-1,L} = \frac{(-M_{n,L} + M_{n-1,R} - M_{n-1,L}M_{n-2,R})}{2\Delta L} - 0,5(P_{n-1,L} + P_{n-1,R} - \sum W_{n-1}) \quad (5.31)$$

şeklindedir. Burada $M_{n,L}$, n düğüm noktasının sol tarafına etki eden eğilme momenti, $M_{n-1,R}$, $n-1$ düğüm noktasının hemen sağ tarafına etki eden eğilme momenti, $M_{n-1,L}$, $n-1$ düğüm noktasının hemen sol tarafına etki eden eğilme momenti, $M_{n-2,R}$ $n-2$ numaralı düğüm noktasının hemen sağ tarafındaki eğilme momenti, $P_{n-1,L}$, $n-1$ düğüm noktasının sol tarafına etki eden tüm kuvvetlerden elde edilen, $n-1$ düğüm noktasına etki eden eşdeğer noktasal kuvvet, $P_{n-1,R}$, $n-1$ düğüm noktasının sağ tarafına etki eden tüm kuvvetlerden elde edilen, $n-1$ düğüm noktasına etki eden eşdeğer noktasal kuvvet, $\sum W_{n-1}$ ise $n-1$ düğüm noktasına etki eden düşey noktasal kuvvetlerin toplamıdır.

$n-1$ düğüm noktasının sol tarafı için kesme kuvveti aşağıdaki gibi olur.

$$V_{n-1,R} = V_{n-1,L} - \sum W_{n-1} \quad (5.32)$$

5.5.2. İç Düğüm Noktalarında Kesme Kuvveti Olması Durumu

Elastik zemine oturmuş bir kirişte üzerinde herhangi bir mesnetlenme olmayan bir iç düğüm noktasını (i) ele alalım. i ve $i-1$ düğüm noktaları arasındaki sabit kesme kuvveti ($V_{i,L}$) aşağıdaki şekilde verilir.

$$V_{i,L} = (M_i - M_{i-1}) / \Delta L$$

(5.4) ve (5.5) denklemlerinde verildiği şekilde M_i ve M_{i-1} momentlerinin değerlerini yerlerine koyduğumuzda denklem aşağıdaki gibi olur.

$$V_{i,L} = -\frac{E}{(\Delta L)^3} \left[-I_{i-1}y_{i-2} + (2I_{i-1} + I_i)y_{i-1} - (I_{i-1} + 2I_i)y_i + I_i y_{i+1} \right] \quad (5.33)$$

Benzer şekilde i ve $i+1$ düğüm noktaları arasındaki kesme kuvveti aşağıdaki şekildedir.

$$V_{i,R} = (M_{i+1} - M_i) / \Delta L$$

Yine (5.4) ve (5.6) denklemlerinde verildiği şekilde M_i ve M_{i+1} momentlerinin değerlerini yerlerine koyduğumuzda aşağıdaki sonuca varırız.

$$V_{i,R} = -\frac{E}{(\Delta L)^3} [-I_i y_{i-1} + (2I_i + I_{i+1})y_i - (I_i + 2I_{i+1})y_{i+1} + I_{i+1}y_{i+2}] \quad (5.34)$$

Bu durumda i düğüm noktasındaki ortalama kesme kuvveti

$$V_i = 0,5(V_{i,L} + V_{i,R})$$

şeklindedir. $V_{i,L}$ ve $V_{i,R}$ değerlerini yerlerine koyduğumuzda i düğüm noktası için ortalama kesme kuvvetinin genel denklemini elde etmiş oluruz.

$$V_i = \frac{E}{2(\Delta L)^3} [I_{i-1}y_{i-2} - 2I_{i-1}y_{i-1} - (I_{i+1} + I_{i-1})y_i + I_{i+1}y_{i+1} - I_{i+1}y_{i+2}] \quad (5.35)$$

Eğer kiriş prizmatik ve eğilme rijitliği sabit (EI) ise (5.35) denklemi daha kısa bir hale gelir.

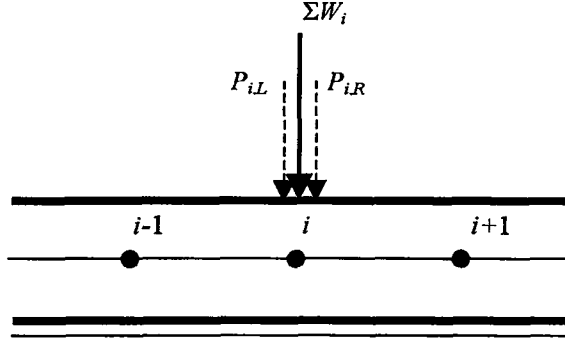
$$V_i = \frac{EI}{2(\Delta L)^3} [y_{i-2} - 2y_{i-1} + 2y_{i+1} - y_{i+2}] \quad (5.36)$$

Bir kirişte içte bir i düğüm noktasını düşünelim (Şekil 5.14). Bu i düğüm noktası üzerinde toplam bir dış noktasal kuvvet gelmektedir. Bununla birlikte, $i-1$ ve $i+1$ düğüm noktalarının arasındaki noktasal yüklerden dolayı meydana gelen eşdeğer noktasal yükleri $P_{i,L}$ ve $P_{i,R}$ etki etmektedir. i düğüm noktasındaki bu yüklerden dolayı meydana gelen kesme kuvvetleri $V_{i,L}$ ve $V_{i,R}$ aşağıdaki gibi olur.

$$V_i = \frac{E}{2(\Delta L)^3} [I_{i-1}y_{i-2} - 2I_{i-1}y_{i-1} - (I_{i+1} + I_{i-1})y_i + I_{i+1}y_{i+1} - I_{i+1}y_{i+2}] - 0,5(P_{i,L} - P_{i,R} - \sum W_i) \quad (5.37)$$

ve

$$V_{i,R} = V_{i,L} - \sum W_i \quad (5.38)$$



Şekil 5.14. Bir iç düğüm noktasında dış kuvvet ve eşdeğer noktasal yük

Düğüm noktaları üzerinde veya arasında dış yük olarak bir kuvvet çifti bulunuyorsa (moment), bu durumda o bölgedeki düşey yerdeğiştirme ve kesme kuvvetleri haliyle etkilenecektir. O bölgede uygulanan her bir dış kuvvet çifti etkisi için kesme kuvvetini ifade eden (5.35) denklemini düzenlenmelidir.

i düğüm noktasına bir M momentinin etkidiğini düşünelim (Şekil 4.7). Bu durumda $i-1$, i ve $i+1$ düğüm noktaları için (V) kesme kuvveti ifadesi aşağıdaki gibi olur.

$$V_{i-1} = \frac{E}{2(\Delta L)^3} [I_{i-1}y_{i-2} - 2I_{i-1}y_{i-1} - (I_{i+1} + I_{i-1})y_i + 2I_{i+1}y_{i+1} - I_{i+1}y_{i+2}] - \frac{M}{4(\Delta L)} \quad (5.39)$$

$$V_i = \frac{E}{2(\Delta L)^3} [I_{i-1}y_{i-2} - 2I_{i-1}y_{i-1} - (I_{i+1} + I_{i-1})y_i + 2I_{i+1}y_{i+1} - I_{i+1}y_{i+2}] - \frac{M}{2(\Delta L)} \quad (5.40)$$

$$V_{i+1} = \frac{E}{2(\Delta L)^3} [I_{i-1}y_{i-2} - 2I_{i-1}y_{i-1} - (I_{i+1} + I_{i-1})y_i + 2I_{i+1}y_{i+1} - I_{i+1}y_{i+2}] - \frac{M}{4(\Delta L)} \quad (5.41)$$

Eğer bu momentler arka arkaya etki ediyor iseler bu durumda bu denklemler kullanılarak kümülatif etki hesap edilmelidir. Eğer moment $i-1$ ve i düğüm noktaları

arasında etki ediyorsa bu durum o düğüm noktalarındaki kesme kuvveti değerlerini etkileyecektir. $i-1$ ve i düğüm noktalarındaki kesme kuvveti değerleri aşağıdaki gibidir.

$$V_{i-1} = \frac{E}{2(\Delta L)^3} [I_{i-1}y_{i-2} - 2I_{i-1}y_{i-1} - (I_{i+1} + I_{i-1})y_i + 2I_{i+1}y_{i+1} - I_{i+1}y_{i+2}] - \frac{M}{2(\Delta L)} \quad (5.42)$$

$$V_i = \frac{E}{2(\Delta L)^3} [I_{i-1}y_{i-2} - 2I_{i-1}y_{i-1} - (I_{i+1} + I_{i-1})y_i + 2I_{i+1}y_{i+1} - I_{i+1}y_{i+2}] - \frac{M}{2(\Delta L)} \quad (5.43)$$

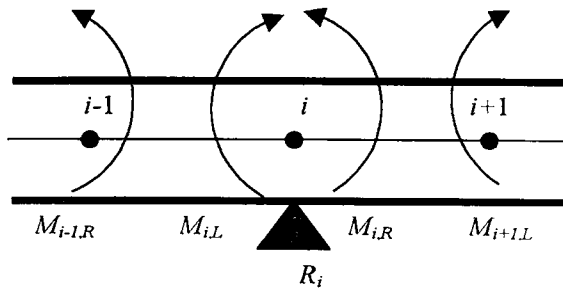
Son olarak, kiriş için deki bir i düğüm noktasından basit veya ankastre mesnetlenmiş olduğunu düşünelim (Şekil 5.15). Mesnet tepkisinin R_i alalım. i düğüm noktasında y_i düşey yerdeğiştirmesi sıfır, izin verildiği miktarda veya tamamen serbest olabilir. Serbest olduğu durumda $R_i = 0$ olacaktır. Yukarıdaki sınır koşullarında genel denklemler aşağıdaki gibi olur.

$$V_{i,L} = \frac{(-M_{i-1,R} + M_{i,L} - M_{i,R} + M_{i+1,L})}{2(\Delta L)} - R_i \quad (5.44)$$

ve

$$V_{i,R} = V_{i,L} + R_i \quad (5.45)$$

R_i değerinin diğer sınır koşullarındaki değeri bir sonraki başlıkta anlatılacak.



Şekil 5.15 Mesnetli bir iç düğüm noktası

5.6. Düşey Reaksiyonlar

Sınırdaki veya herhangi bir içerdeki düğüm noktasında mesnet olması durumu için düşey reaksiyonlar aşağıda çözülmüştür. Her durumda da mesnette düşey yerdeğiştirme sıfır, izin verilen bir miktarda veya serbest olabilir. Serbest olması durumunda mesnet reaksiyonu haliyle sıfır olacaktır.

5.6.1. Sınır Düğüm Noktalarında Mesnet Bulunması Hali

Basit mesnet hali; Sınırdaki iki düğüm noktasından basit mesnetle mesnetlenmiş bir kirişte (Şekil 5.16), bu düğüm noktalarında dış noktasal P yükü olması dahil, mesnet reaksiyonları aşağıdaki şekilde yazılır.

$$R_1 = P_1 - \frac{E}{(\Delta L)^3} \left[(I_2 + 0,5k_1(\Delta L)^4 / E)y_1 - 2I_2y_2 + I_2y_3 \right] \quad (5.46a)$$

Eğer $y_1=0$ ise, ifade aşağıdaki gibi kısalır.

$$R_1 = P_1 - \frac{EI_2}{(\Delta L)^3} (-2y_2 + y_3) \quad (5.46b)$$

$$R_n = P_n - \frac{E}{(\Delta L)^3} \left[I_{n-1}y_{n-2} - 2I_{n-1}y_{n-1} + (I_{n-1} + 0,5k_n(\Delta L)^4 / E)y_n \right] \quad (5.47a)$$

Yine $y_n=0$ ise, ifade aşağıdaki gibi kısalır.

$$R_n = P_n - \frac{EI_{n-1}}{(\Delta L)^3} (y_{n-2} - 2y_{n-1}) \quad (5.47b)$$

Ankastre mesnet olması hali; sınırdaki mesnetler ankastre (Şekil 5.17) ise aynı denklemler aşağıdaki gibi olur.

$$R_1 = P_1 - \frac{E}{(\Delta L)^3} \left[(2I_1 + I_2 + 0,5k_1(\Delta L)^4 / E)y_1 - 2(I_1 + I_2)y_2 + I_2y_3 \right] \quad (5.48a)$$

Eğer $y_1 = 0$ ise denklem kısalır ve aşağıdaki hali alır.

$$R_1 = P_1 - \frac{E}{(\Delta L)^3} \left[-2(I_1 + I_2)y_2 + I_2y_3 \right] \quad (5.48b)$$

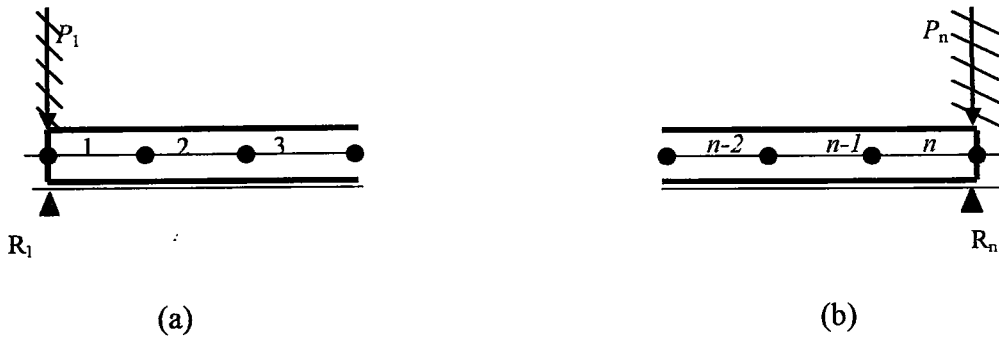
$$R_n = P_n - \frac{E}{(\Delta L)^3} \left[(I_{n-1} + 2I_n + 0,5k_n(\Delta L)^4 / E) y_n - 2(I_{n-1} + I_n) y_{n-1} + I_{n-1} y_{n-2} \right] \quad (5.49a)$$

Yine $y_n = 0$ olur ise denklem aşağıdaki gibi olur.

$$R_n = P_n - \frac{E}{(\Delta L)^3} \left[-2(I_{n-1} + I_n) y_{n-1} + I_{n-1} y_{n-2} \right] \quad (5.49b)$$



Şekil 5.16. Sınır düğüm noktalarında basit mesnetler: (a) sol uç (b) sağ uç



Şekil 5.17. Sınır düğüm noktalarında ankastre mesnetler: (a) sol uç (b) sağ uç

6. YATAY YÜKLÜ KAZIKLAR

6.1. Giriş

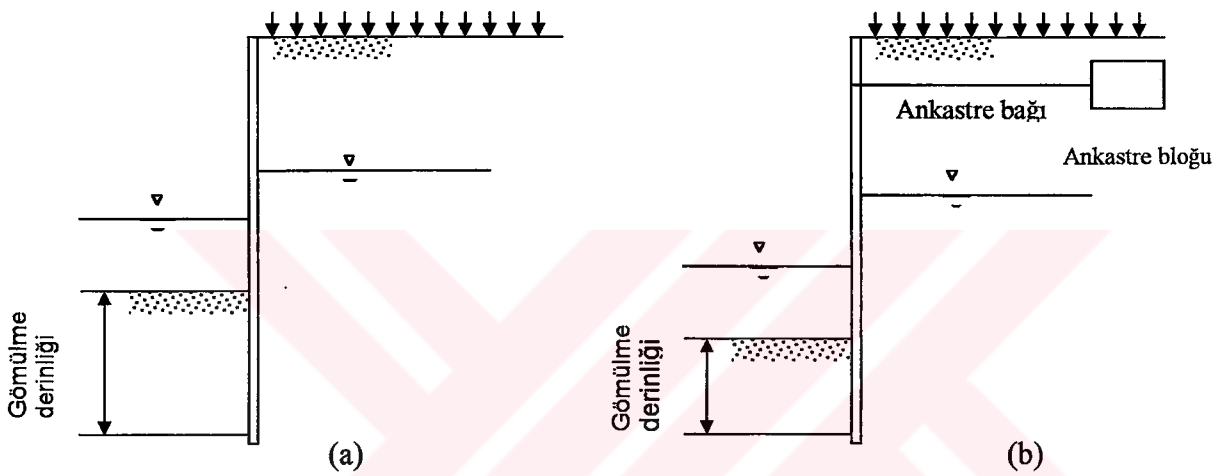
Momentler ve kesme kuvvetlerinin kabul edilebilir değerlerini elde etmek için yatay yüklü kirişler kolayca modellenebilir ve analiz edilebilir. Winkler zemin modeli kullanılarak elastik zemine oturan kirişlerde uygulanan metot burada da geçerli olur. bu metot bir ön dizayn için gerçekten kullanışlı bir metottur. Zemin kendi özelliğinden dolayı çok değişken bir malzemedir. Bu aynı yer veya derinlikte bile geçerli olabilir. Bu yüzden zeminin, analitik analiz için deformasyon özelliğini tahmin ederken pratik bir bakış açısıyla olaya bakılmalıdır. Aynı zamanda geçerli bir matematiksel model formülasyonunun elde edilmesine dikkat edilmelidir. Bu bağlamda Winkler zemin modelinin zeminin deformasyon karakteristiğini tamamen gerçek olarak yansıtmadığı açıktır. Analizin önemli bir parametresi olan düşey zemin reaksiyon modülünün k_h hassasiyeti genellikle çok büyük değildir. Bu değer daima kabul edilebilir seviyededir. Bununla birlikte çok hassas bir analiz için k_h değeri aralığı geniş tutulmalıdır.

k_h değerini diğer zemin rijitliği parametreleri ile ilişkilendirip elde etmek de mümkündür. Alternatif olarak ampirik formüllerde kullanılabilir.

6.2. Palplanş Perdeler

Palplanş perdeler toprak tutma işlerinde yaygın olarak kullanılır. Bu geçici veya sürekli bir iş de olabilir. Perdenin büyük bir kısmı kazı yüksekliğinin altında gömülüdür. Bu seviyenin üzerinde perde tarafından tutulan toprak yatay gerilmeler oluşturur ve bu gerilmeler gömülü olan kısım tarafından karşılanır. Gömülü kısmın

iki tarafında da toprak itkisinden dolayı gerilmeler vardır. Çok büyük kazılarda ise ek olarak perdenin üst kısmına yakın bir yerde ankraj kullanılır. Konsol palplanş perdeler genelde geçici işlerde ankrajlı perdeler ise sürekli işlerde kullanılır. Şekil 6.1 bu iki çeşit palplanş perde formunu da göstermektedir. Açık olarak, konsol palplanş perdenin (Şekil 6.1a) stabilitesi sadece toprağa gömülü kısım (d) tarafından sağlanır. Diğer taraftan ankrajlı perdenin (Şekil 6.1b) stabilitesi hem toprağa gömülü kısım hem de ankraj tarafından sağlanmaktadır.

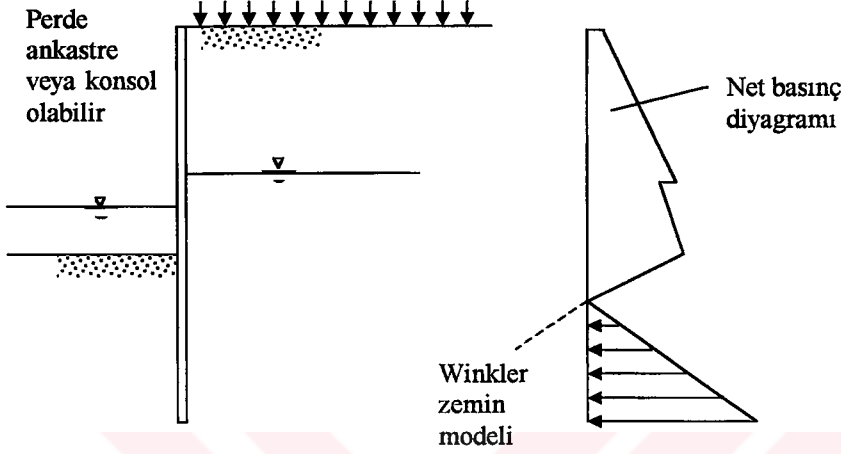


Şekil 6.1. Palplanş perde: (a) konsol çalışan (b) ankre edilmiş

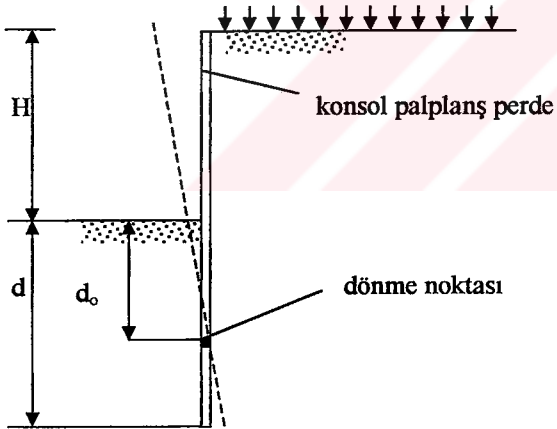
Konsol palplanş perdeler daha düşük yükseklikler için kullanılır ve ankrajlı perdeye göre daha ağır malzemeden oluşur. Kohezyonlu zeminde, perdenin servis süresi boyunca kılcal gerilme değişimleri olacağı da hesaba katılmalıdır. Bu değişiklikler zeminin dayanım parametrelerinde zararlı etkiler oluşturabilir.

Zemin ve palplanş perde arasındaki karışık ilişkiyi tanımlamak zordur. Burada net zemin gerilmeleri için Winkler zemin modeli kullanıldı. Genelde bu metotla elde edilen maksimum eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri kabul edilebilir. Fakat bu sonuçlar zemin hareketlerini tahmin etmek için kullanılamaz. Palplanş perdenin analizinde yalnızca toprak altında kalan kısımda gerilmenin sıfır olduğu noktanın altında kalan bölüm için elastik zemine oturan kiriş gibi düşünülerek Winkler zemin modeli uygulanabilir (Şekil 6.2).

Konsol çalışacak olan palplanş perdenin belli bir derinlikte toprağa gömülmesi lazımdır ki stabil olabilsin. Bu sistemin stabilitesi hesap edilirken perdenin alt kısmına yakın bir yerde dönme olacağı düşünülür (Şekil 6.3). Maksimum eğilme momenti hesaplanırken ilk adım gerekli gömme derinliğinin bulunmasıdır.



Şekil 6.2. Palplanş perde analizi

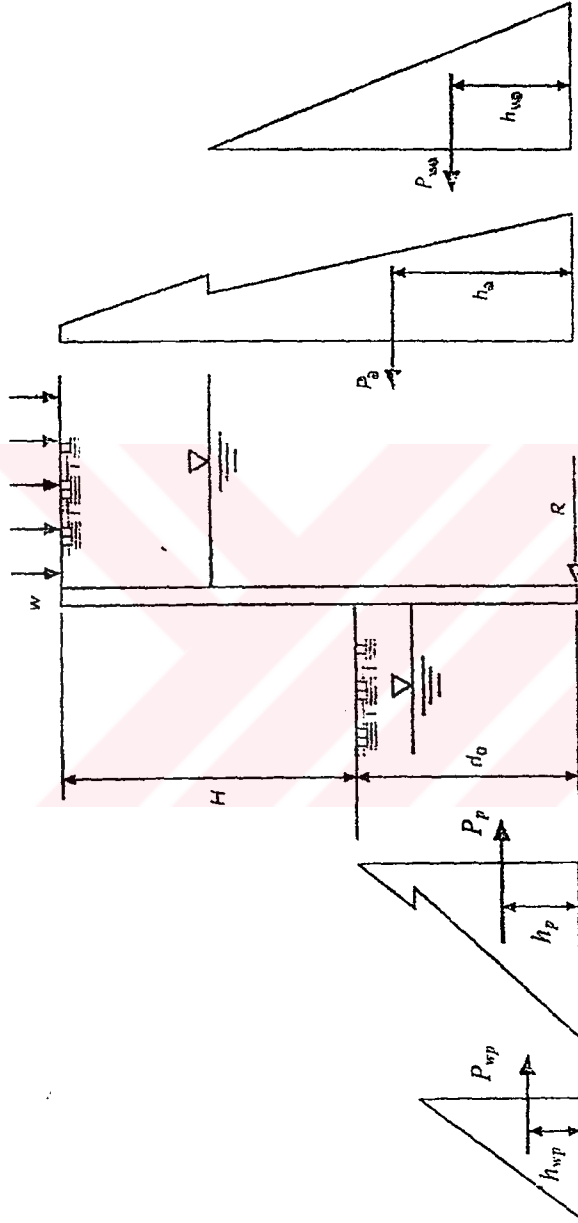


Şekil 6.3. Konsol palplanş perdenin dönmesi

Konsol çalışan bir palplanş perde (Şekil 6.4) durumunda, perdenin alt kısmına bir bileşke kuvvet etkidiği düşünülür. Bu kuvvet perdenin arkasından bir pasif kuvvet tarafından karşılanır. Bu durumda aşağıdaki denge denklemini yazabiliriz.

$$P_p h_p + P_{wp} h_{wp} = P_a h_a + P_{wa} h_{wa} \quad (6.1)$$

Bu denklemde P_p pasif toprak itkisi, P_{wp} duvarın önündeki su basıncı, P_a aktif toprak itkisi, P_{wa} duvarın arkasındaki su basıncı, h ise kuvvet koludur (değişik alt indislerle).



Şekil 6.4. Konsol çalışan palplanş perdeye etki eden basınçlar

Denklem bilinmeyen d_0 derinliği için kolayca çözülür. Eğer zemin üniform ve su basıncı sıfır ise bu durumda d_0 derinliği aşağıdaki kübik denklemin çözülmesiyle bulunabilir.

$$\begin{aligned} &\gamma_s(K_p - K_a)d_0^3 - 3K_a(\gamma_s H + w)d_0^2 \\ &- 3K_a(\gamma_s H^2 + 2w)d_0 - K_a H^2(\gamma_s H + 3w) = 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Bu denklemde ise K_p pasif itki katsayısı, K_a aktif itki katsayısı, γ_s zemin yoğunluğu, H dışarıda kalan palplanş yüksekliği ve w toprak üstündeki ekstra yükür. Bu ekstra yük $w=0$ olursa d_0 direk olarak aşağıdaki denklem ile hesap edilebilir.

$$d_0 = \frac{H}{\left(\frac{K_p}{K_a}\right)^{1/3} - 1} \quad (6.3)$$

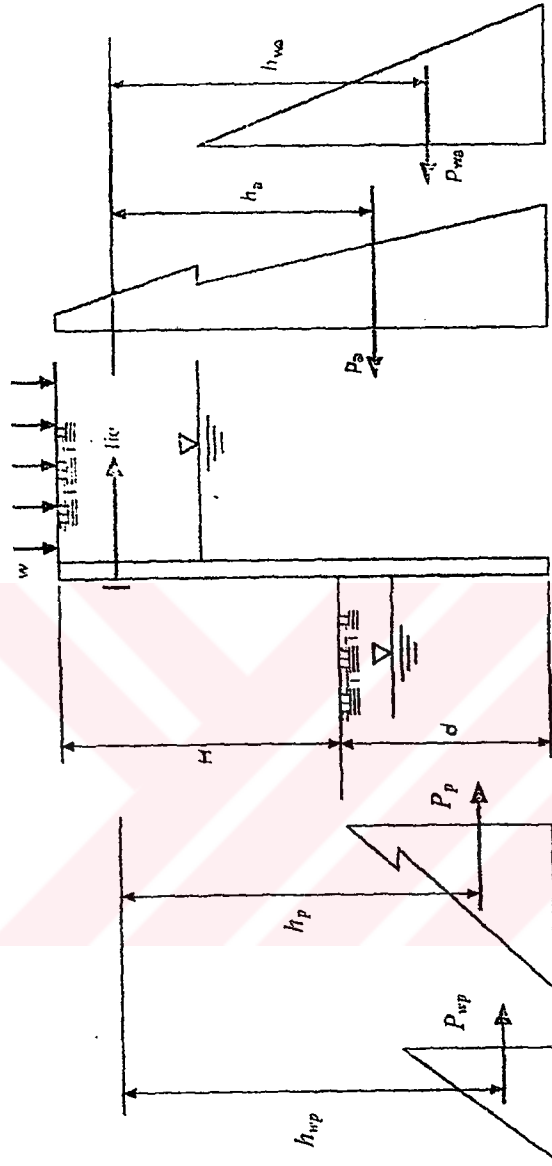
genellikle bu değer servis durumu göz önüne alınıp 1,2 veya 1,6 katı kadar artırılır.

Ankre edilmiş bir palplanş perdenin (Şekil 6.5) çözümü ankre edilmiş kısımdaki momentlerin büyük tutulmasıyla elde edilir. 6.1 denklemini halen geçerlidir. Bu defa kuvvet kolu ankraj kısımdan itibaren ölçülür. Derinliğin (d) hesap edilmesinden sonra basınç diyagramını elde etmek çok kolaydır (Şekil 6.2).

Çözülmesi gereken bir diğer problemde yatay zemin gerilme modülünün (k_h) bulunmasıdır. Sürekli bir palplanş perdenin davranışı bir kazık davranışına göre temelinden farklıdır. Aynı zamanda konsol çalışan veya ankre edilmiş palplanş perdeler dahi önemli bir fark vardır. Sonuç olarak bu değişikliklerin karşılanması için farklı yatay zemin reaksiyon modülleri kullanılır.

Kohezyonsuz zeminlerde palplanş perdenin davranışı iki düz çizgi (Şekil 6.3) ile modellenir. Bu iki çizgiye m_h ve l_h değerleri karşılık gelir. m_h sabiti konsol palplanş perdeye uygulanır ve bu değer zemin gerilmesini (K_o) veri olarak kullanır. l_h değeri ise ankre edilmiş palplanş perdeye uygulanır ki bu değerde $0,0002d$ yatay yerdeğiştirmeye karşılık gelen zemin gerilme sabitini (K_o') kullanır (Şekil 6.3).

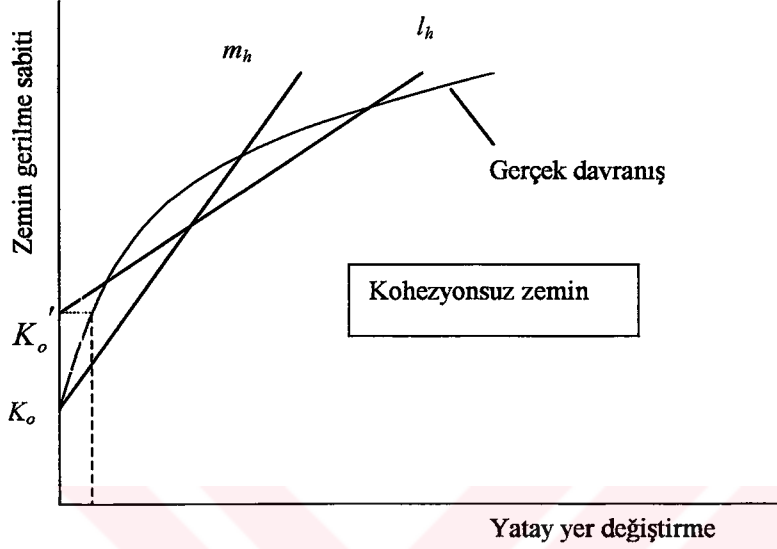
Böylece, konsol çalışan palplanş perde ve diğer kohezyonsuz zeminde bulunan diğer tüm perde duvarlar için geçerli olan aşağıdaki ifade yazılır.



Şekil 6.5. Ankastre bağlı palplanş perdeye etki eden basınçlar

$$k_h = m_h (z/d) \quad (6.4)$$

Bu denklemde m_h yatay zemin reaksiyon sabitidir. Birimi $\text{kN/m}^2/\text{mm}$ dir. z kazı derinliğidir. d ise gömülen kısmın derinliğidir.



Şekil 6.6. Yatay yerdeğiştirmenin zemin gerilmesiyle değişmesi

Tablo 9.7 de Row tarafından kumlu zeminler için m_h değerleri verilmiştir. Pun ve Pang bu değerlerin sınırlı bir gözlem sonucu elde edildiğini ve büyük yerdeğiştirmeler için uygun olmayacağını söylemiştir. Aynı zamanda m_h için ampirik formüller geliştirmişlerdir.

Gevşek kum için:

$$\frac{m_h}{K_p \gamma_s} = \frac{0,00064}{\gamma/d + 0,017} \quad (6.5)$$

Sıkı kumlar için:

$$\frac{m_h}{K_p \gamma_s} = \frac{0,00109}{\gamma/d + 0,011} \quad (6.6)$$

m_h ($\text{kN/m}^2/\text{mm}$) zemin reaksiyon sabiti, K_p pasif zemin itkisi sabiti, γ_s (kN/m^3) zemin yoğunluğu, y (mm) gömülme derinliğinin yarısındaki yatay yerdeğiştirme, d (mm) ise gömülme derinliğidir.

Bu ilişkiyi kullanırken iteratif işlemler gerekir. Doğru yatay yerdeğiştirme (d) değerine karşılık gelen doğru m_h bulunana kadar işlem sürdürülür.

Kohezyonsuz zeminde ankre edilmiş palplanş perde durumunda yatay zemin gerilmesi modülü (k_h), Terzaghi tarafından verildiği gibi

$$k_h = I_h (z/d) \quad (6.7)$$

şeklindedir. Bu denklemde I_h yatay zemin gerilmesi sabiti (kN/m/mm), z kazı derinliği ve d gömülme derinliğidir.

Önemli bir konuya daha işaret etmek gerekirse, I_h değerinin ilişkili olduğu zemin gerilmesi sabiti (K_o') Terzaghi tarafından tanımlanmıştır. Gömülü kısımdaki palplanş perdenin $0,0002d'$ lik kısmına denk gelen birim yatay yerdeğiştirmeye karşılık gelen zemin gerilme sabitidir (K_o') (Şekil 6.6). K_o' değerini pratik olarak tanımlamak oldukça zordur. Terzaghi'nin I_h ve K_o' için tavsiye ettiği değerler tablo 9.8'dedir.

Sonuç olarak palplanş perdenin analizi, elastik zemin üzerine oturan kiriş benzeri yapılırken hassaslık son derece önemlidir. Değişik k_h değerlerinin kullanılması ve gerçekçi ve güvenli değer bulunması için gereklidir. Bununla beraber örneklerde de görüleceği gibi k_h değerindeki büyük değişikliklere rağmen momentler üzerinde önemli bir değişiklik olmamaktadır.

Tablo 6.1. Row'un m_h değerleri (kN/m²/mm)

	Rölatif kum yoğunluğu		
	gevşek	orta sıkı	Sıkı
Yoğunluk (kN/m ³)	14,5	-	17,3
m_h (sünek perdeler)	8,8	31,4	125
m_h (pek perdeler)	2,4	-	63

Tablo 6.2. Kumlar için $l_h(kN/m^2/mm)$ ve K_o ' değerleri(Terzaghi)

Rölatif yoğunluk	gevşek	orta sıkı	Sıkı
STP N değerleri	4-10	10-30	30-50
l_h (kuru kum)	0,8	2,5	6,3
l_h (sulu kum)	0,5	1,6	4,1
K_o '	0,4	0,8	1,2

7. UYGULAMALAR

7.1. Giriş

Bu bölümde, önceki bölümlerde geliştirilen formüller kullanılarak elastik zemine oturan kiriş ve palplanş perdeye ait problemler çözülmüştür. Problemler excel tablolar yardımı ile bir programlama yapılarak çözüldü. Ekler kısmında bu programlama diskette sunulmuştur.

Aşağıdaki genel denklem düzenlenerek(5.9),

$$\frac{EI}{(\Delta L)^3} [y_{i-2} - 4y_{i-1} + (6 + k_i(\Delta L)^4 / EI)y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}] \cong P_i$$
$$y_i \cong \frac{\left[\frac{P_i(\Delta L)^3}{EI} + (4y_{i+1} + 4y_{i-1}) - (y_{i+2} + y_{i-2}) \right]}{(6 + k_i(\Delta L)^4 / EI)}$$

denklemini yazabiliriz. Bu denklem excel tablolarında kullandığımız yer değiştirme ifadesi denklemdir.

Sınır şartlarında bu denklemde değişiklikler olur.

Serbest uç için(5.10a);

$$\frac{E}{(\Delta L)^3} [(I_2 + 0,5k_1(\Delta L)^4 / E)y_1 - 2I_2y_2 + I_2y_3] \cong P_1$$

$$\frac{E}{(\Delta L)^3} [-2I_2y_1 + (4I_2 + I_3 + k_2(\Delta L)^4 / E)y_2 - 2(I_2 + I_3)y_3 + I_3y_4] \cong P_2$$

$$\frac{E}{(\Delta L)^3} [I_{n-2}y_{n-3} - 2(I_{n-2} + I_{n-1})y_{n-2} + (I_{n-2} + 4I_{n-1} + k_{n-1}(\Delta L)^4/E)y_{n-1} - 2I_{n-1}y_n] \cong P_{n-1}$$

$$\frac{E}{(\Delta L)^3} [I_{n-1}y_{n-2} - 2I_{n-1}y_{n-1} + (I_{n-1} + 0,5k_n(\Delta L)^4/E)y_n] \cong P_n$$

Denklemleri kullanılır(Sınır koşulları 5.2). Bu denklemleri düzenleyerek;

$$y_1 \cong \frac{\left[\frac{P_1(\Delta L)^3}{EI} + 2y_2 - y_3 \right]}{(1 + 0,5k_1(\Delta L)^4/EI)}$$

$$y_2 \cong \frac{\left[\frac{P_2(\Delta L)^3}{EI} + 2y_3 - y_4 + 2y_1 \right]}{(5 + k_2(\Delta L)^4/EI)}$$

$$y_{n-1} \cong \frac{\left[\frac{P_{n-1}(\Delta L)^3}{EI} + 2y_n - y_{n-3} + 2y_{n-2} \right]}{(5 + k_{n-1}(\Delta L)^4/EI)}$$

$$y_n \cong \frac{\left[\frac{P_n(\Delta L)^3}{EI} - y_{n-2} + 2y_{n-1} \right]}{(1 + 0,5k_n(\Delta L)^4/EI)}$$

denklemlerini elde ederiz. Bu denklemler serbest uç sınır koşulları için kullanılacak olan genel yer değiştirme denklemleridir. Diğer yönden aynı şekilde basit mesnet ve ankastre mesnet halleri için sınır koşulları denklemleri bir önceki bölümde elde edilmiştir. Problemlerimizde palplanş perdeler serbest uç halindedir. Bu yüzden sınır koşulu olarak bu denklemleri kullanabiliriz. Dört sınır koşulu ile problem çözülebilir hale gelir. Böylece yatay yer değiştirmeler elde edilmiş olur. Daha sonra bu yatay yer değiştirmeler yardımı ile momentleri elde edebiliriz.

$$M_i \cong \frac{EI_i(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}))}{\Delta L^2}$$

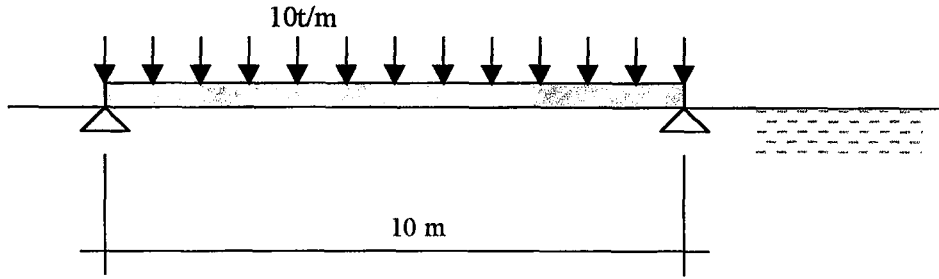
moment denklemdir. Bilinen yer değiştirmeleri bu denklemde yerine koyarak momentler elde edilir. Ayrıca kolaylık olması için problemde iki sabit sayı belirlenmiştir. Bu sayılar aşağıdaki gibidir.

$$A_1 = \frac{P_i \Delta L^3}{EI} ; A_2 = \frac{k_i \Delta L^2}{EI}$$

7.2. Elastik Zemine Oturan Kirişler

7.2.1.

Şekilde görülen elastik zemine oturan basit mesnetli yayılı yükle yüklü bir kirişte düşey yer değiştirme değerlerinin bulunması.



Kirişin mekanik özellikleri;

$$EI = 1,89 \cdot 10^6 \text{ kNm}^2$$

$$b = 1,73 \text{ m}$$

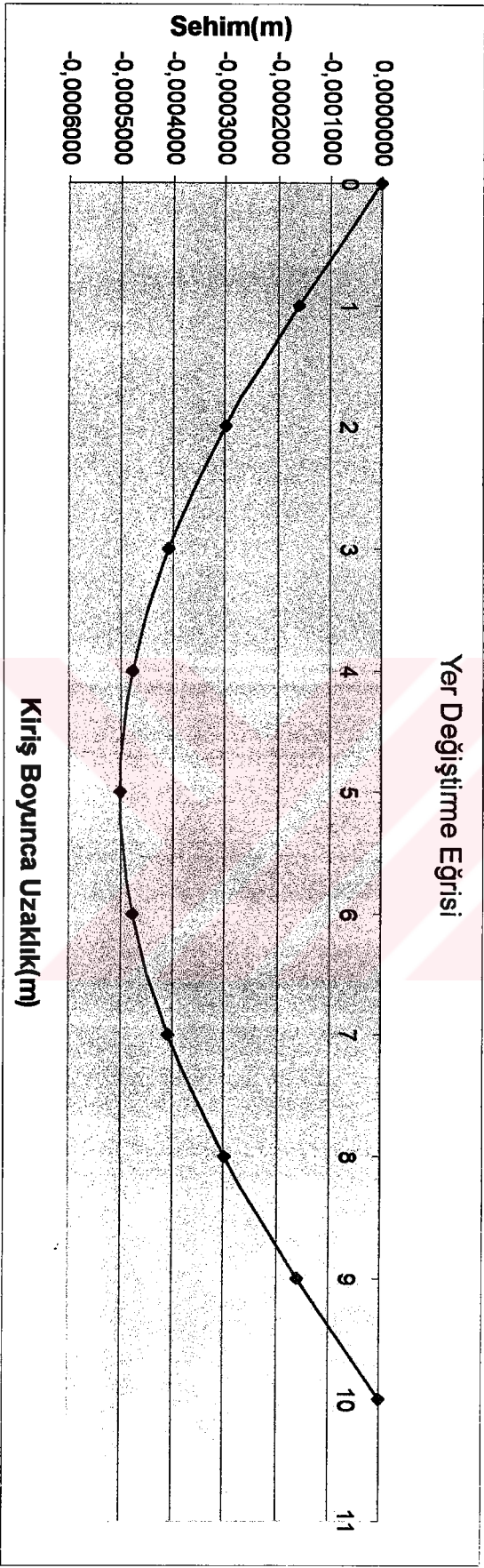
$$k = 6,92 \cdot 10^3 \text{ t/m}^2$$

Excel tabloları iterasyon işlemi kullanılarak sonlu farklardan elde edilen denklem takımları çözülür. Programlama yapılırken özellikle sınır koşulları önem arz eder. Kiriş basit kiriş olduğu için basit kiriş sınır koşulları kullanılarak denklem takımları ve bilinmeyen sayısı eşit olur. Böylece düşey yer değiştirme, moment ve kesme kuvveti değerleri her bir düğüm noktası için hesap edilebilir. Aşağıdaki grafik bu problem için her bir değeri göstermektedir. Bu problemde çözüm elde edilip “*Cisimlerin Mukavemeti II (S.Timoshenko)*” kitabındaki elastik eğri denklemi ile karşılaştırıldığında aradaki farkın makul düzeyde olduğu görürüz.

KARŞILAŞTIRMA

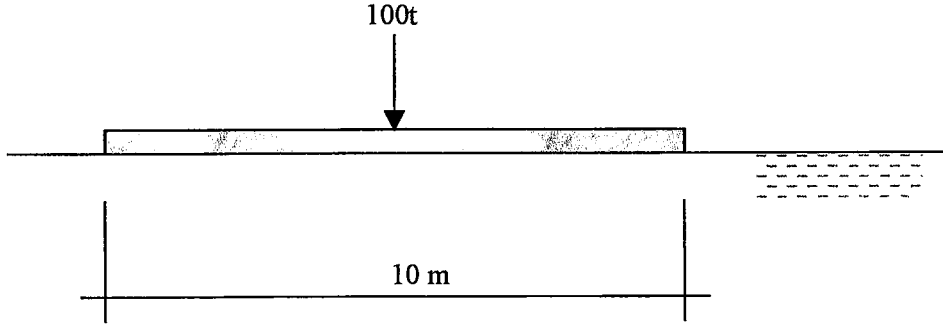
$Y_{\max}(\text{TİMOSHENKO})$	0,000500522048847
$Y_{\max}(\text{SONLU FARK})$	0,000501683170627
FARK%	2,002319821440130

P(t)	0	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10	0	
A ₂	0,00000000	0,0036614	0,0036614	0,0036614	0,0036614	0,0036614	0,0036614	0,0036614	0,0036614	0,0036614	0,00000000		
A ₁	0,00000000	-0,00000053	-0,00000053	-0,00000053	-0,00000053	-0,00000053	-0,00000053	-0,00000053	-0,00000053	-0,00000053	0,00000000		
Y(m)	0,0001587	0,00000000	-0,0001587	-0,0002994	-0,0004088	-0,0004780	-0,0005017	-0,0004780	-0,0004088	-0,0002994	-0,0001587	0,0001587	
X(m)	-1,00	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	9,00	10,00	11,00



7.2.2.

Şekilde görülen elastik zemine oturan mesnetlenmemiş (serbest) orta noktasından tekil bir yükü yüklü bir kirişte düşey yer değiştirme değerlerinin bulunması.



Kirişin mekanik özellikleri;

$$EI = 1,89 \cdot 10^6 \text{ kNm}^2$$

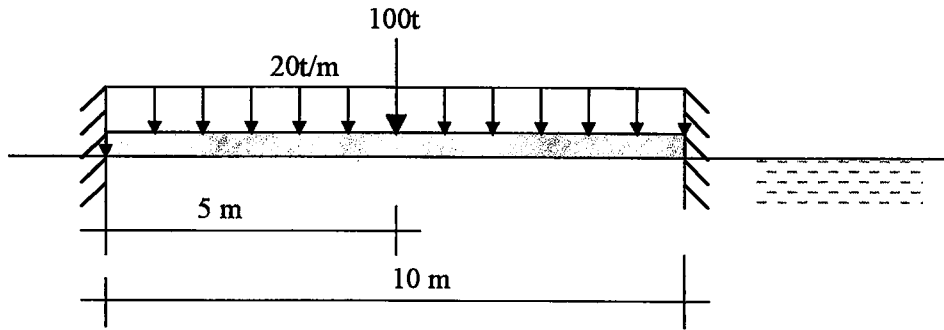
$$b = 1,73 \text{ m}$$

$$k = 6,92 \cdot 10^3 \text{ t/m}^2$$

Kiriş ucu mesnetlenmemiş bir kiriştir. Bu yüzden serbest uç sınır koşulları kullanılarak çözüm yapılır. Böylece denklem takımları ve bilinmeyen sayısı eşit olur. Daha sonra düşey yer değiştirme, moment ve kesme kuvveti değerleri her bir düğüm noktası için hesap edilebilir. Aşağıdaki grafik bu problem için düşey yer değiştirme değerlerini göstermektedir.

7.2.3.

Şekilde görülen elastik zemine oturan ankastre mesnetli yayılı yükle ve ortasından tekil bir yükle yüklü bir kirişte düşey yer değiştirme ve moment değerlerinin bulunması.



Kirişin mekanik özellikleri;

$$EI = 1,89 \cdot 10^6 \text{ kNm}^2$$

$$b = 1,73 \text{ m}$$

$$k = 6,92 \cdot 10^3 \text{ t/m}^2$$

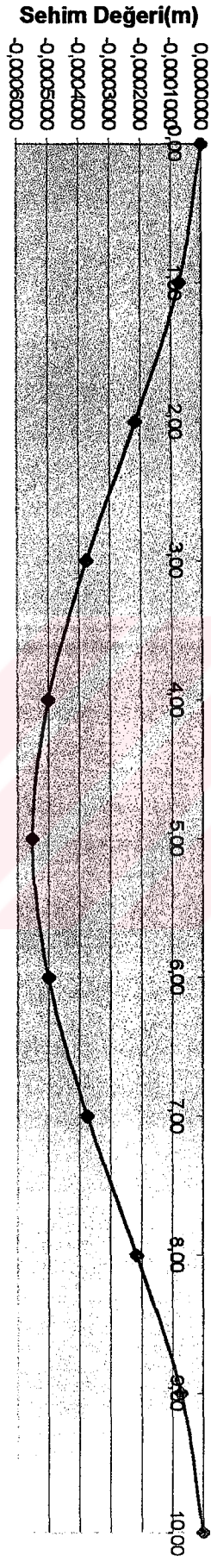
Ankastre kiriş olduğu için ankastre kiriş sınır koşulları kullanılır. Böylece denklem takımları ve bilinmeyen sayısı eşit olur. Aşağıdaki grafikler bu problem için yer değiştirme ve moment değerlerini göstermektedir. Bu problemde çözüm elde edilip “*Cisimlerin Mukavemeti II(S.Timoshenko)*” kitabındaki uç moment formülüne göre değeri hesap edilip karşılaştırıldı. Sayısal çözümün oldukça iyi sonuç verdiği görüldü.

KARŞILAŞTIRMA

TİMOSHENKO Muç(tm)	-271,863
SONLU FARK Muç(tm)	-268,643
YÜZDE FARK(%)	1,184211

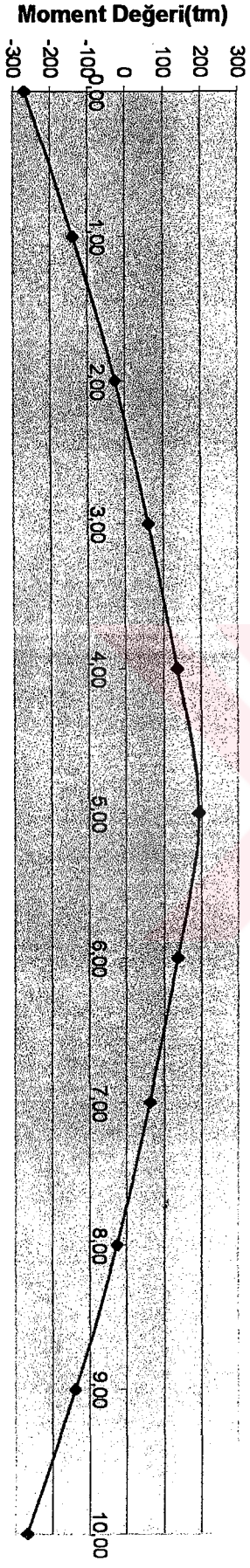
P(°)	-20	-20	-20	-20	-20	-120	-20	-20	-20	-20	-20	
A ₂	0,0036614	0,0036614	0,0036614	0,0036614	0,0036614	0,000635	0,0000106	0,0000106	0,0000106	0,0000106	0,0000106	
A ₁	-0,0000106	-0,0000106	-0,0000106	-0,0000106	-0,0000106	-0,000635	-0,0000106	-0,0000106	-0,0000106	-0,0000106	-0,0000106	
Y _i (m)	-0,0000711	0,0000000	-0,0000711	-0,0002155	-0,0003747	-0,0005001	-0,0005521	-0,0005001	-0,0003747	-0,0002155	-0,0000711	-0,0000711
X _i (m)	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	9,00	10,00	
M _i (tm)	-268,6432	-138,5909	-28,04681	63,98857	138,61721	196,70679	138,61738	63,98819	-28,04663	-138,591	-268,6436	

Yer Değiştirme Eğrisi



Kiriş Boyunca Uzaklık(m)

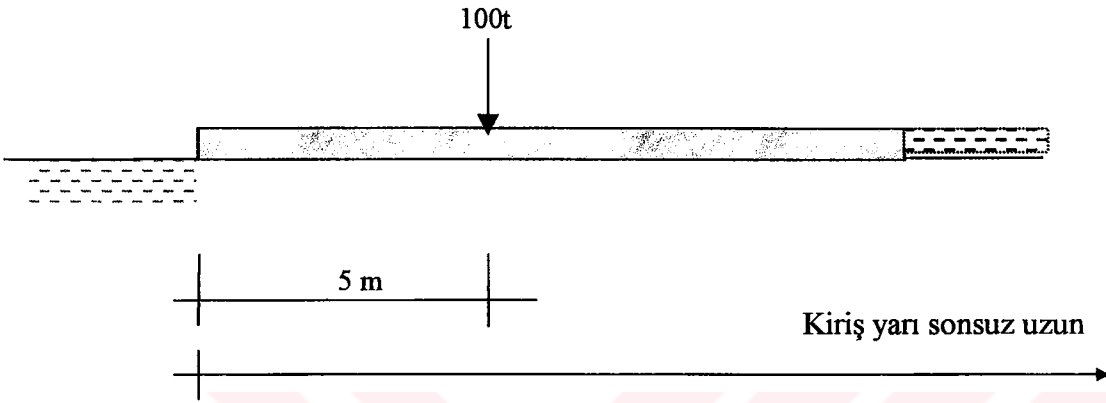
Moment Eğrisi



Kiriş Boyunca Uzaklık(m)

7.2.4.

Şekilde görülen elastik zemine oturan serbest uçlu yarı sonsuz uzun bir kirişin düşey yer değiştirme değerlerinin bulunması.



Kirişin mekanik özellikleri;

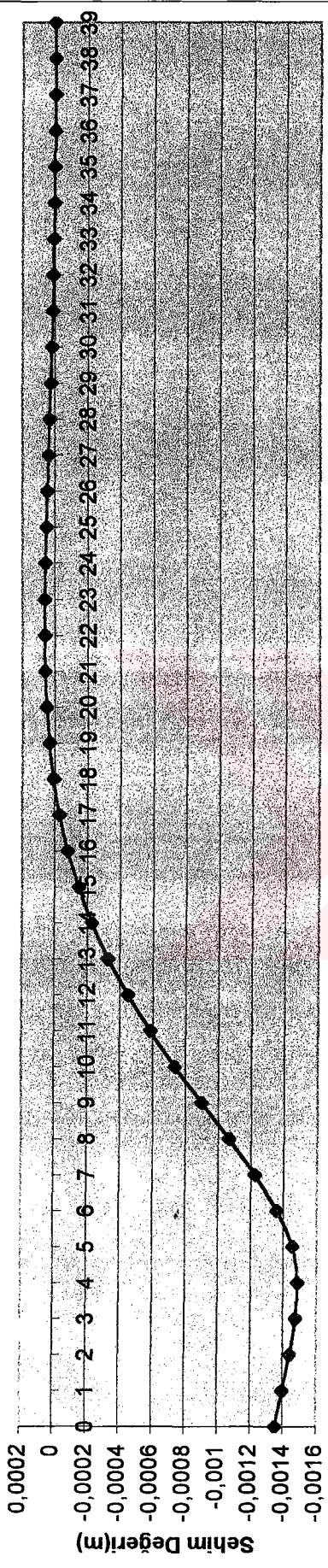
$$EI = 1,89 \cdot 10^6 \text{ kNm}^2$$

$$b = 1,73 \text{ m}$$

$$k = 6,92 \cdot 10^3 \text{ t/m}^2$$

Serbest uçlu kiriş sınır koşulları kullanılarak bilinmeyen sayısına eşit denklem elde edilir. Bu kiriş için sayısal çözüm elde ederken makul bir uzunluğa kadar hesap yapılmıştır. Kiriş belli bir noktadan sonra şekil değiştirmez. Yine “*Cisimlerin Mukavemeti II (S.Timoshenko)*” kitabındaki elastik eğri denklemi ile çözüm elde edilerek sayısal çözüm ile karşılaştırıldığında farkın kabul edilebilir düzeyde olduğu görüldü.

Yer Değiştirme Eğrisi



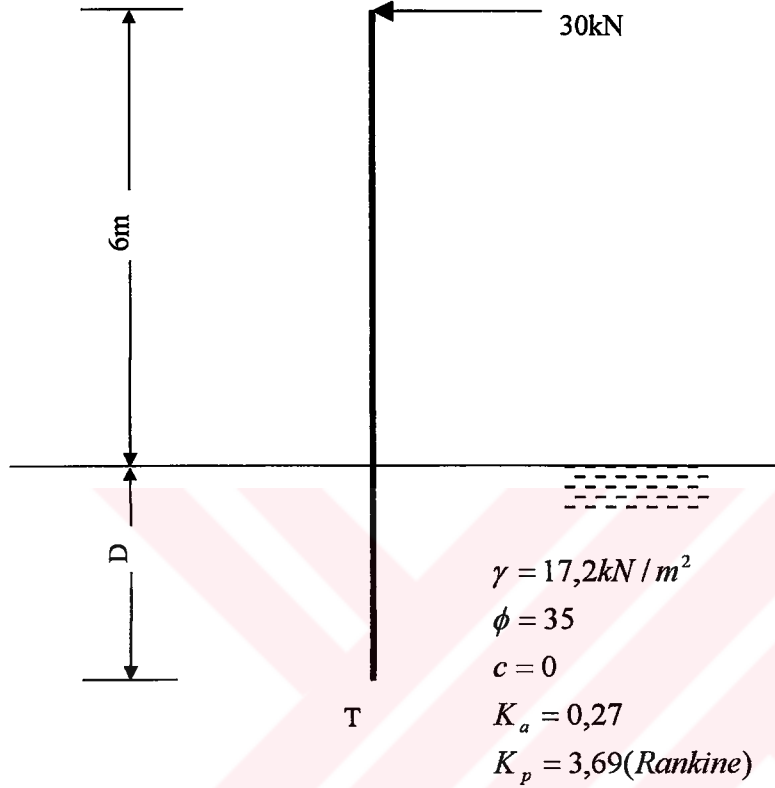
Kiriş Boyunca Uzaklık(m)

Görüldüğü gibi belli bir uzaklıktan sonra sehimler sıfıra doğru gitmekte böylece 39. metrede işlem durduruldu. Aşağıdaki tabloda elastik eğri denklemi ve sonlu farklar ile çözümün ne kadar birbirine yakın olduğu görülmektedir.

Y_i	Sonlu Fark	Timoshenko	Yüzde Fark(%)
Y_1	-0,001349316	-0,001358563	0,68065
Y_2	-0,001395261	-0,001402163	0,49226
Y_3	-0,001438736	-0,001442818	0,28292
Y_4	-0,001472161	-0,001472856	0,04718
Y_5	-0,001482691	-0,001479325	-0,22753
Y_6	-0,001452089	-0,001443885	-0,56815
Y_7	-0,001356688	-0,001351629	-0,37428
Y_8	-0,001220417	-0,001217714	-0,22197
Y_9	-0,001062235	-0,001061197	-0,09782
Y_{10}	-0,000896634	-0,000896685	0,00567
Y_{11}	-0,000734216	-0,000734898	0,09285
Y_{12}	-0,0005823	-0,000583268	0,16606
Y_{13}	-0,000445515	-0,000446524	0,22610
Y_{14}	-0,00032636	-0,00032725	0,27194
Y_{15}	-0,000225701	-0,000226379	0,29940
Y_{16}	-0,00014321	-0,000143636	0,29617
Y_{17}	-7,77319E-05	-7,79025E-05	0,21898
Y_{18}	-2,75857E-05	-2,75244E-05	-0,22262
Y_{19}	9,19301E-06	9,44796E-06	2,69850
Y_{20}	3,46704E-05	3,50734E-05	1,14915
Y_{21}	5,0879E-05	5,13829E-05	0,98060
Y_{22}	5,97251E-05	6,02846E-05	0,92810
Y_{23}	6,29284E-05	6,35026E-05	0,90432
Y_{24}	6,19904E-05	6,25438E-05	0,88477
Y_{25}	5,81825E-05	5,86844E-05	0,85532
Y_{26}	5,25489E-05	5,29733E-05	0,80113
Y_{27}	4,59214E-05	4,62454E-05	0,70048
Y_{28}	3,89392E-05	3,91417E-05	0,51739
Y_{29}	3,20735E-05	3,21342E-05	0,18889

7.3. Palplanş Perdeler

7.3.1.



Şekildeki palplanş perdede ilk önce güvenli D gömme derinliğini bulup daha sonra perdede oluşan moment ve yerdeğiştirme değerlerini elde edeceğiz. T noktasına göre moment alarak D gömme derinliğini elde edebiliriz.

$$9,804D^3 - 30(D + 6) = 0$$

Denklemini çözerek

$D=3,02\text{m}$ buluruz. Daha sonra 1,15~1,5 güvenlik katsayısı ile güvenli gömme derinliğini elde ederiz.

$$D_{em}=3,5\text{m}$$

Gömme noktasından itibaren perdenin elastik zemine oturan kiriş gibi davrandığını kabul ediyoruz. Bunun için zemin yay katsayısını (K_h) buluruz.

$$K_h=m_h(z/D)$$

$$m_h = 0,00109 * 3,69 * 17,2 / 0,011 = 6,289 \text{ kN/m}^2/\text{mm} = 6289 \text{ kN/m}^3$$

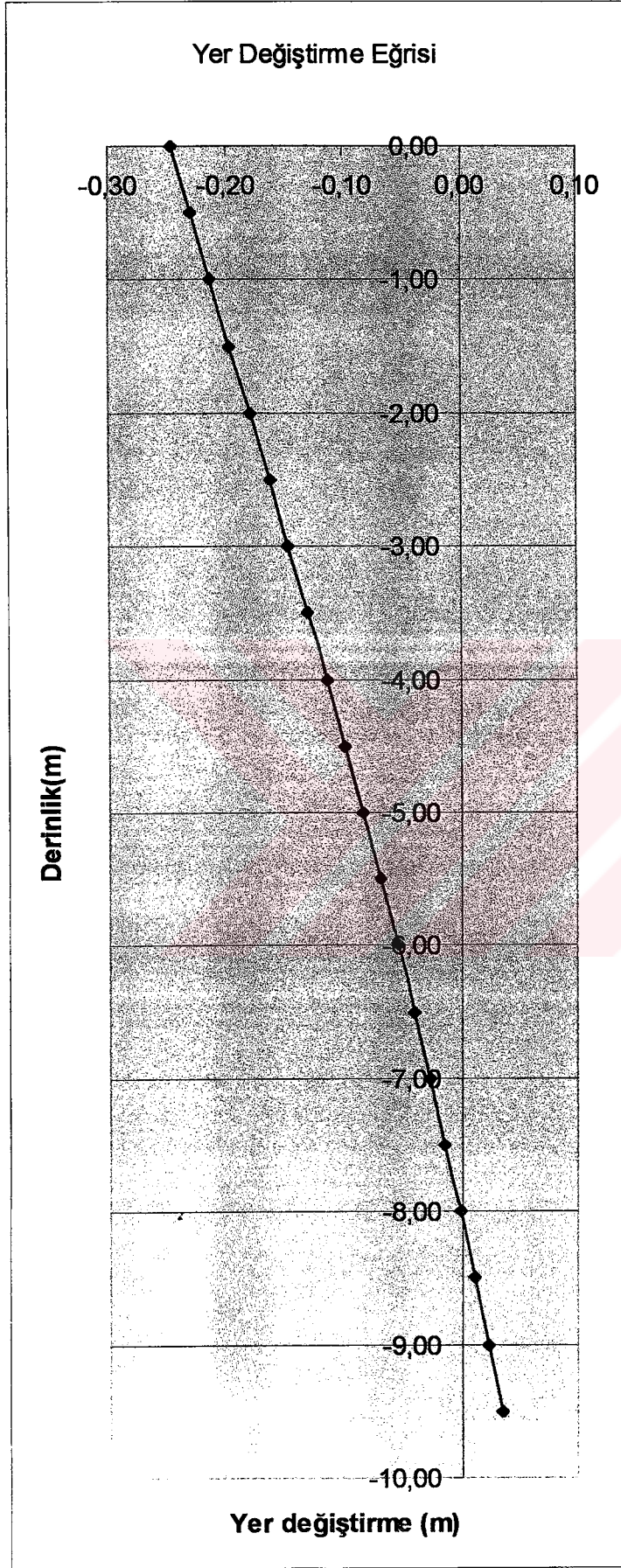
Bu aşamadan sonra excel tabloları yardımıyla hazırladığımız programı kullanarak moment ve yer değiştirme değerlerini elde edebiliriz.

(Perde için $I = 4,394 * 10^{-4}$, $E = 200\,000 \text{ MPa}$)

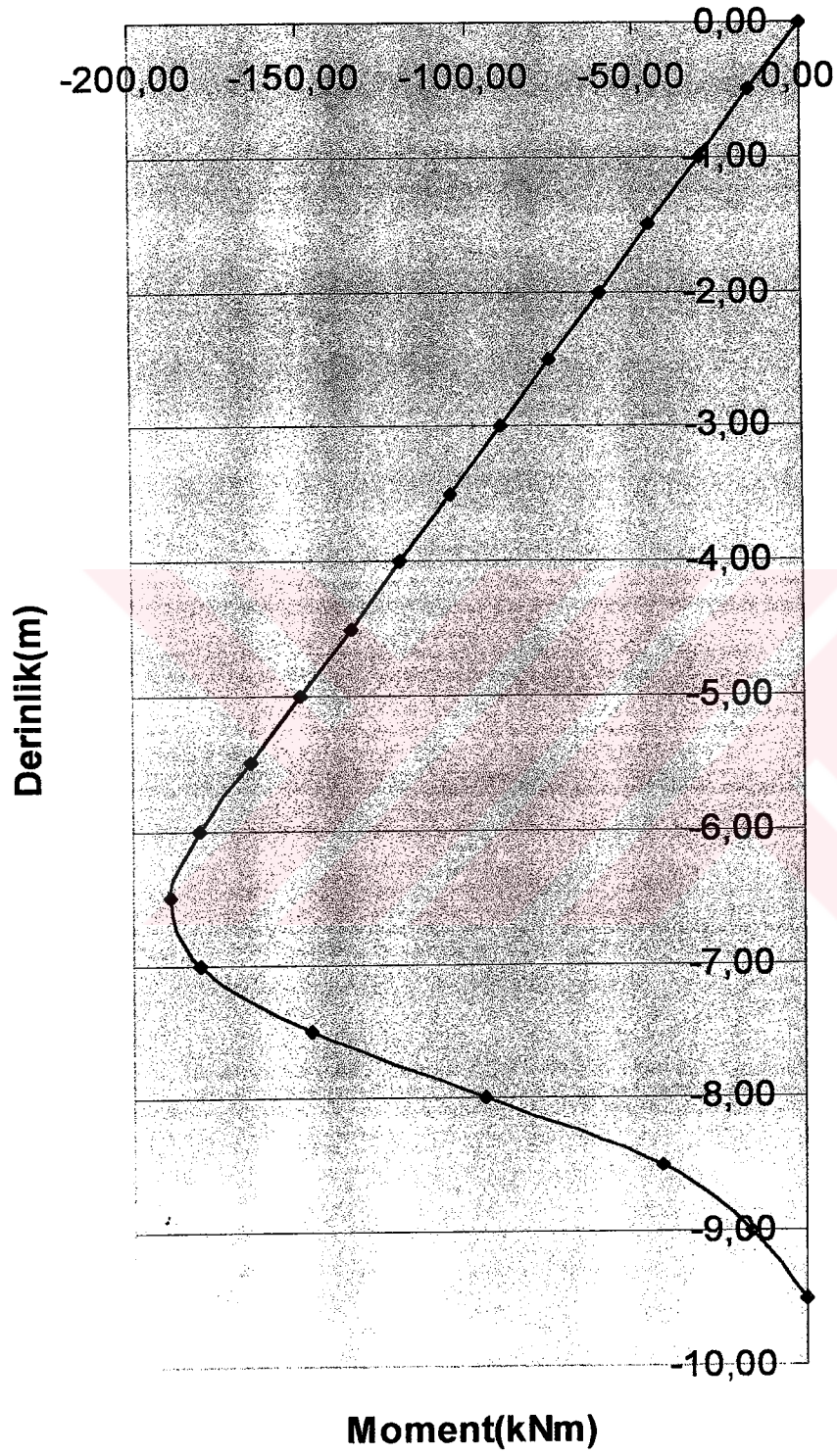


Düğüm Noktası	Derinlik	Gömme Derinliği	Sonlu Fark Aralığı	Noktasal Yük	Atalet momenti	Elastisite modülü	Zemin Yay Katsayısı	Noktasal Zemin Yay Gerilmesi	A ₁	A ₂
Nod(i)	Y _i	D(m)	ΔL(m)	P _i (kN/m)	I(m ⁴ /m)	E(kN/m ²)	K _h (kN/m ³)	K _i (kN/m)	A ₁	A ₂
1	0,00	0,00	0,50	-30,00	4,93E-04	2,00E+08	0,000000	0,000000	-0,000038	0,000000
2	-0,50	0,00	0,50	0,00	4,93E-04	2,00E+08	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
3	-1,00	0,00	0,50	0,00	4,93E-04	2,00E+08	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
4	-1,50	0,00	0,50	0,00	4,93E-04	2,00E+08	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
5	-2,00	0,00	0,50	0,00	4,93E-04	2,00E+08	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
6	-2,50	0,00	0,50	0,00	4,93E-04	2,00E+08	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
7	-3,00	0,00	0,50	0,00	4,93E-04	2,00E+08	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
8	-3,50	0,00	0,50	0,00	4,93E-04	2,00E+08	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
9	-4,00	0,00	0,50	0,00	4,93E-04	2,00E+08	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
10	-4,50	0,00	0,50	0,00	4,93E-04	2,00E+08	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
11	-5,00	0,00	0,50	0,00	4,93E-04	2,00E+08	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
12	-5,50	0,00	0,50	0,00	4,93E-04	2,00E+08	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
13	-6,00	0,00	0,50	0,00	4,93E-04	2,00E+08	0,000000	112,303571	0,000000	0,000285
14	-6,50	0,50	0,50	0,00	4,93E-04	2,00E+08	898,428571	449,214286	0,000000	0,001138
15	-7,00	1,00	0,50	0,00	4,93E-04	2,00E+08	1796,857143	898,428571	0,000000	0,002276
16	-7,50	1,50	0,50	0,00	4,93E-04	2,00E+08	2695,285714	1347,642857	0,000000	0,003414
17	-8,00	2,00	0,50	0,00	4,93E-04	2,00E+08	3593,714286	1796,857143	0,000000	0,004552
18	-8,50	2,50	0,50	0,00	4,93E-04	2,00E+08	4492,142857	2246,071429	0,000000	0,005690
19	-9,00	3,00	0,50	0,00	4,93E-04	2,00E+08	5390,571429	2695,285714	0,000000	0,006828
20	-9,50	3,50	0,50	0,00	4,93E-04	2,00E+08	6289,000000	1459,946429	0,000000	0,003699

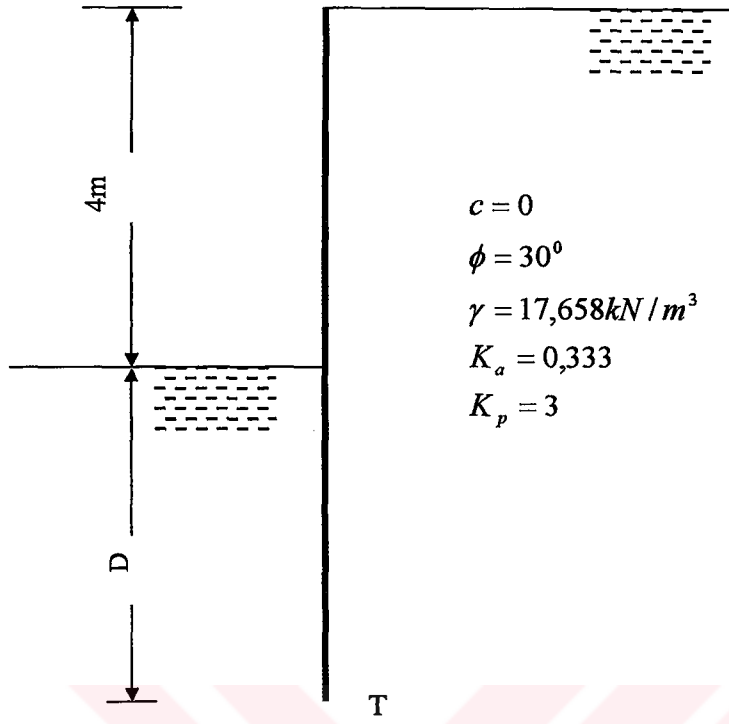
Yerdeğiştirme	Moment
X _i (m)	M _i (kNm)
-0,2461460	0,0000000
-0,2292272	-15,0002007
-0,2123464	-30,0005879
-0,1955416	-45,0012407
-0,1788508	-60,0021379
-0,1623120	-75,0032583
-0,1459633	-90,0045808
-0,1298425	-105,0060845
-0,1139878	-120,0077486
-0,0984371	-135,0095527
-0,0832285	-150,0114765
-0,0683999	-165,0135001
-0,0539894	-180,0156042
-0,0400349	-188,9545699
-0,0265591	-179,9093310
-0,0135391	-147,0026429
-0,0008916	-95,8500406
0,0115132	-43,0953958
0,0238087	-16,2000971
0,0360632	0,0000000



Moment Eğrisi



7.3.2



Şekildeki palplanş perde de emniyetli gömme derinliğini elde edip yerdeğiştirme ve moment değerlerini bulalım (Palplanş perde için $I = 2,394 \cdot 10^{-4}$, $E = 200000 \text{ Mpa}$). Yine T noktasına göre aktif ve pasif toprak itkilerinin momentlerini alarak derinliği buluruz.

$$8,829D^3 - 2,943(4 + D)^3 = 0$$

$$D_{em} = 1,2 \times D = 3,7 \times 1,2 = 4,5 \text{ m}$$

Basıncı (toprak itkisi) değerinin sıfır olduğu noktanın alt kısmında perdenin elastik zemine oturan kiriş gibi davrandığını kabul ediyoruz.

Bunun için zemin yay katsayısını (K_h) buluruz.

$$K_h = m_h(z/D)$$

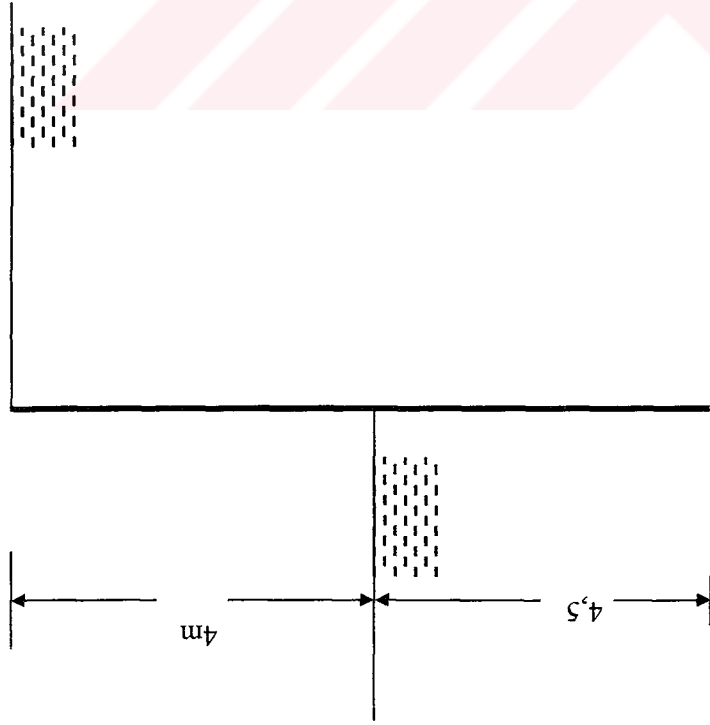
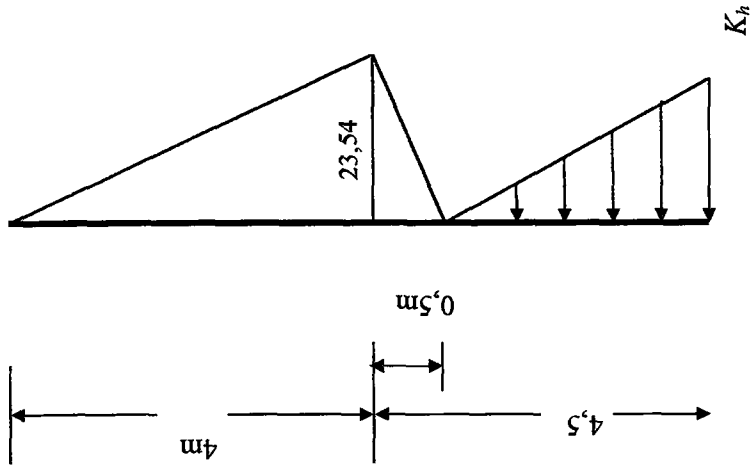
$$m_h = 0,00109 \cdot 3 \cdot 17,658 / 0,011 = 5,249 \text{ kN/m}^2/\text{mm} = 5249 \text{ kN/m}^3$$

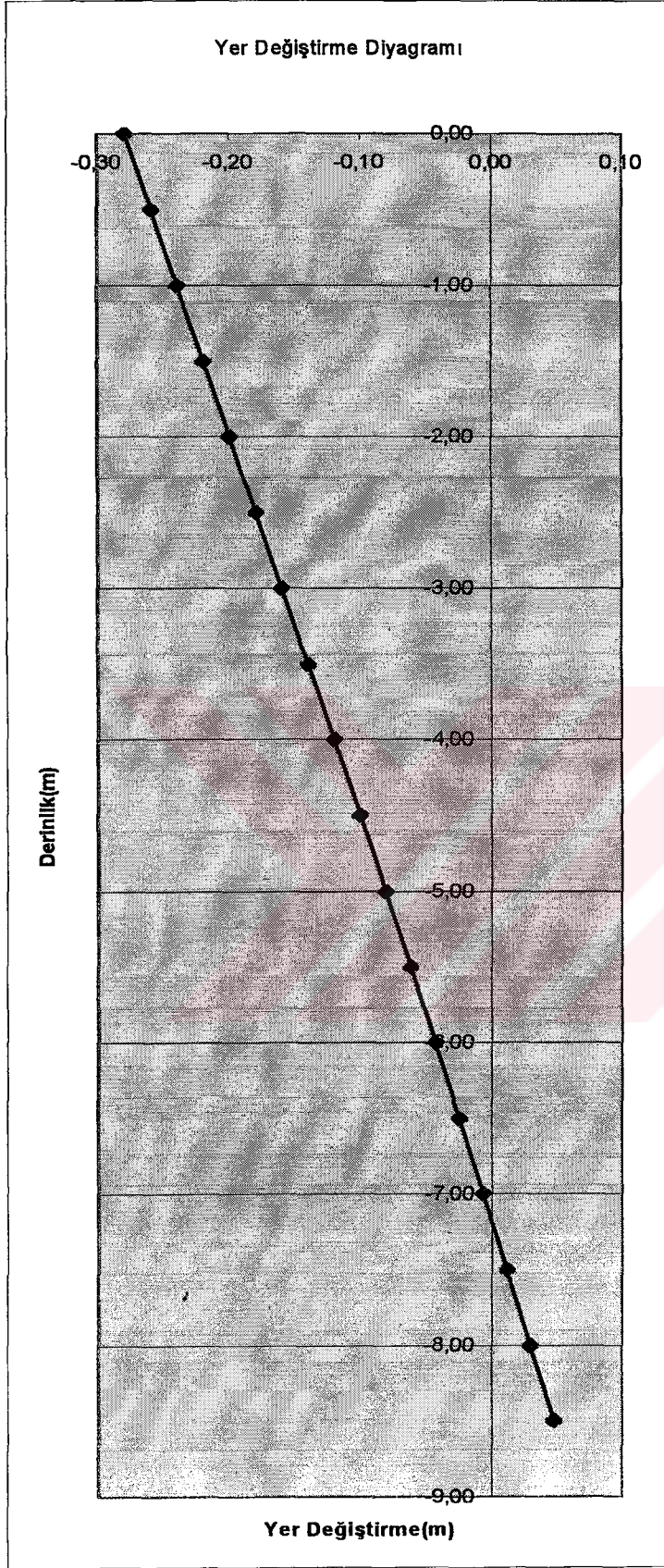
Bu aşamadan sonra excel tabloları yardımıyla hazırladığımız programı kullanarak moment ve yer değiştirme değerlerini elde edebiliriz.

Yerdeğiştirme	Moment
$X_i(m)$	$M_i(kNm)$
-0,27883	0,00000
-0,25889	-0,12266
-0,23894	-1,04241
-0,21900	-3,43371
-0,19906	-8,03230
-0,17915	-15,57392
-0,15927	-26,79433
-0,13947	-42,42927
-0,11977	-63,21448
-0,10023	-89,22755
-0,08091	-108,30585
-0,06188	-115,58636
-0,04313	-109,33410
-0,02466	-90,50464
-0,00642	-62,68583
0,01166	-32,05809
0,02966	-7,38024
0,04764	0,00000

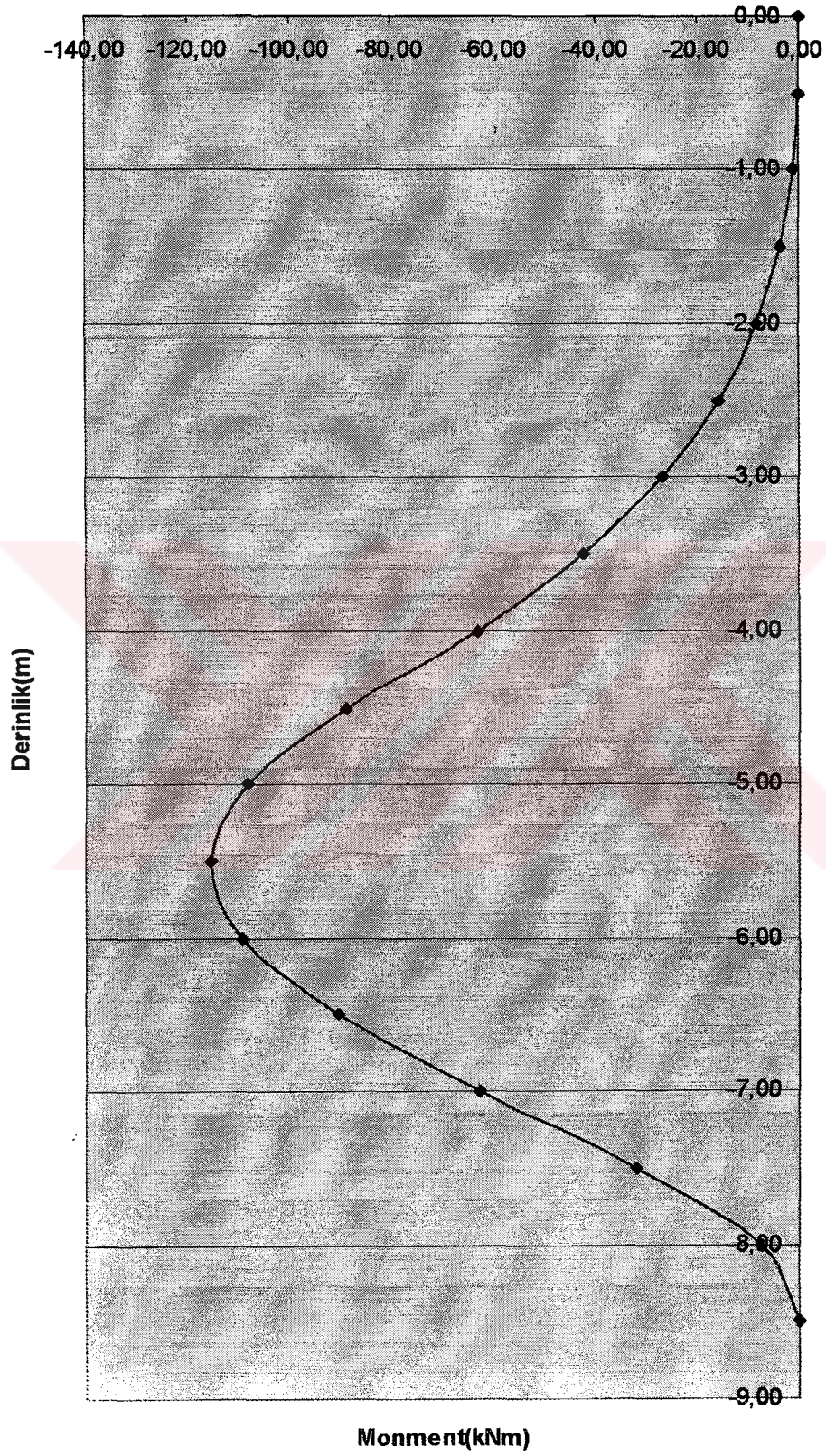
Düğüm Noktası	Gömme Derinliği	Sonlu Fark Aralığı	Toprak İtkisi	Noktasal Yük	Atalet momenti	Elastisite modülü	Zemin Yay Katsayısı	Noktasal Zemin Yay Gerilmesi	A_1	A_2
Nod(i)	Y_i	$D(m)$	$\sigma(kN/m^2)$	$P(kN/m)$	$I(m^4/m)$	$E(kN/m^2)$	$K_n(kN/m^3)$	$k(kN/m)$		
1	0,00	0,00	0,00	-0,25	0,0004934	2,00E+08	0,00	0,00	-0,000000311	0,00000
2	-0,50	0,00	-2,94	-1,59	0,0004934	2,00E+08	0,00	0,00	-0,0000002019	0,00000
3	-1,00	0,00	-5,89	-2,94	0,0004934	2,00E+08	0,00	0,00	-0,0000003728	0,00000
4	-1,50	0,00	-8,83	-4,41	0,0004934	2,00E+08	0,00	0,00	-0,0000005592	0,00000
5	-2,00	0,00	-11,77	-5,89	0,0004934	2,00E+08	0,00	0,00	-0,0000007456	0,00000
6	-2,50	0,00	-14,72	-7,36	0,0004934	2,00E+08	0,00	0,00	-0,0000009320	0,00000
7	-3,00	0,00	-17,66	-8,83	0,0004934	2,00E+08	0,00	0,00	-0,0000011184	0,00000
8	-3,50	0,00	-20,60	-10,30	0,0004934	2,00E+08	0,00	0,00	-0,0000013048	0,00000
9	-4,00	0,00	-23,54	-13,37	0,0004934	2,00E+08	0,00	48,60	-0,0000016931	0,00003
10	-4,50	0,50	0,00	-1,96	0,0004934	2,00E+08	583,22	315,91	-0,0000002485	0,00020
11	-5,00	1,00	0,00	0,00	0,0004934	2,00E+08	1166,44	583,22	0,0000000000	0,00037
12	-5,50	1,50	0,00	0,00	0,0004934	2,00E+08	1749,67	874,83	0,0000000000	0,00055
13	-6,00	2,00	0,00	0,00	0,0004934	2,00E+08	2332,89	1166,44	0,0000000000	0,00074
14	-6,50	2,50	0,00	0,00	0,0004934	2,00E+08	2916,11	1458,06	0,0000000000	0,00092
15	-7,00	3,00	0,00	0,00	0,0004934	2,00E+08	3499,33	1749,67	0,0000000000	0,00111
16	-7,50	3,50	0,00	0,00	0,0004934	2,00E+08	4082,56	2041,28	0,0000000000	0,00129
17	-8,00	4,00	0,00	0,00	0,0004934	2,00E+08	4665,78	2332,89	0,0000000000	0,00148
18	-8,50	4,50	0,00	0,00	0,0004934	2,00E+08	5249,00	1239,35	0,0000000000	0,00078

Basınç(σ) diagramı (kN/m^2)

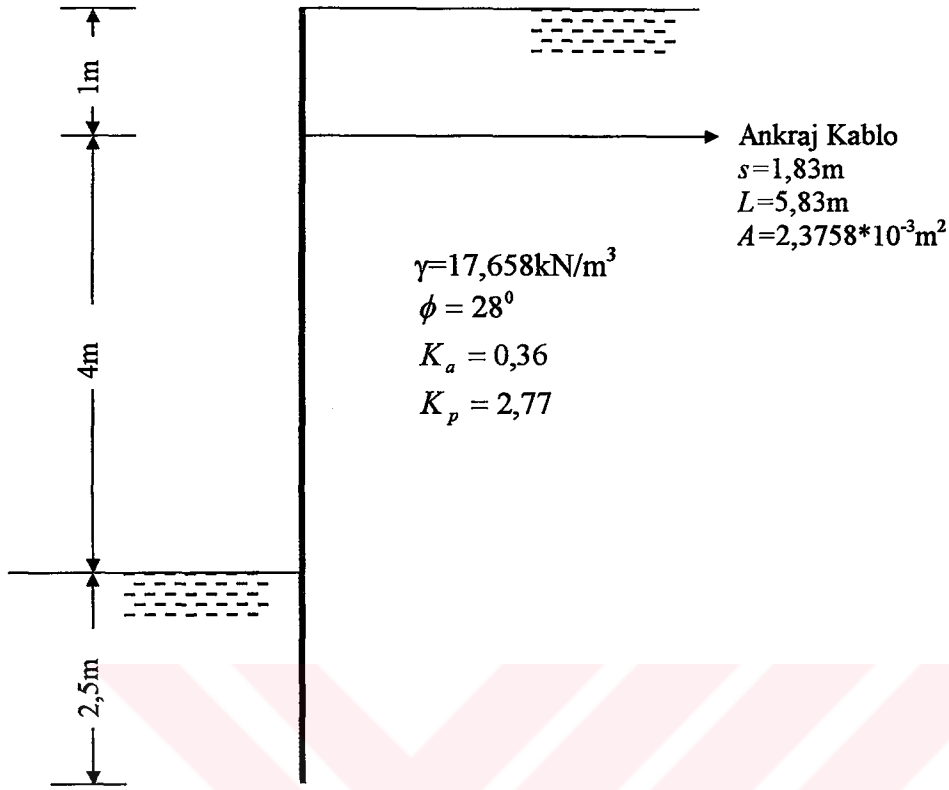




Moment Diyagramı



7.3.3.



Şekildeki palplanş perde de yerdeğiştirme ve moment değerlerini bulalım (Palplanş perde için $I = 2,394 \times 10^{-4}$, $E = 200000 \text{ Mpa}$). Basınç (toprak itkisi) değerinin sıfır olduğu noktanın alt kısmında perdenin elastik zemine oturan kiriş gibi davrandığını kabul ediyoruz.

Bunun için yine zemin yay katsayısını (K_h) buluruz.

$$K_h = m_h(z/D)$$

$$m_h = 0,00109 \times 2,77 \times 17,658 / 0,011 = 4,840 \text{ kN/m}^2/\text{mm} = 4840 \text{ kN/m}^3$$

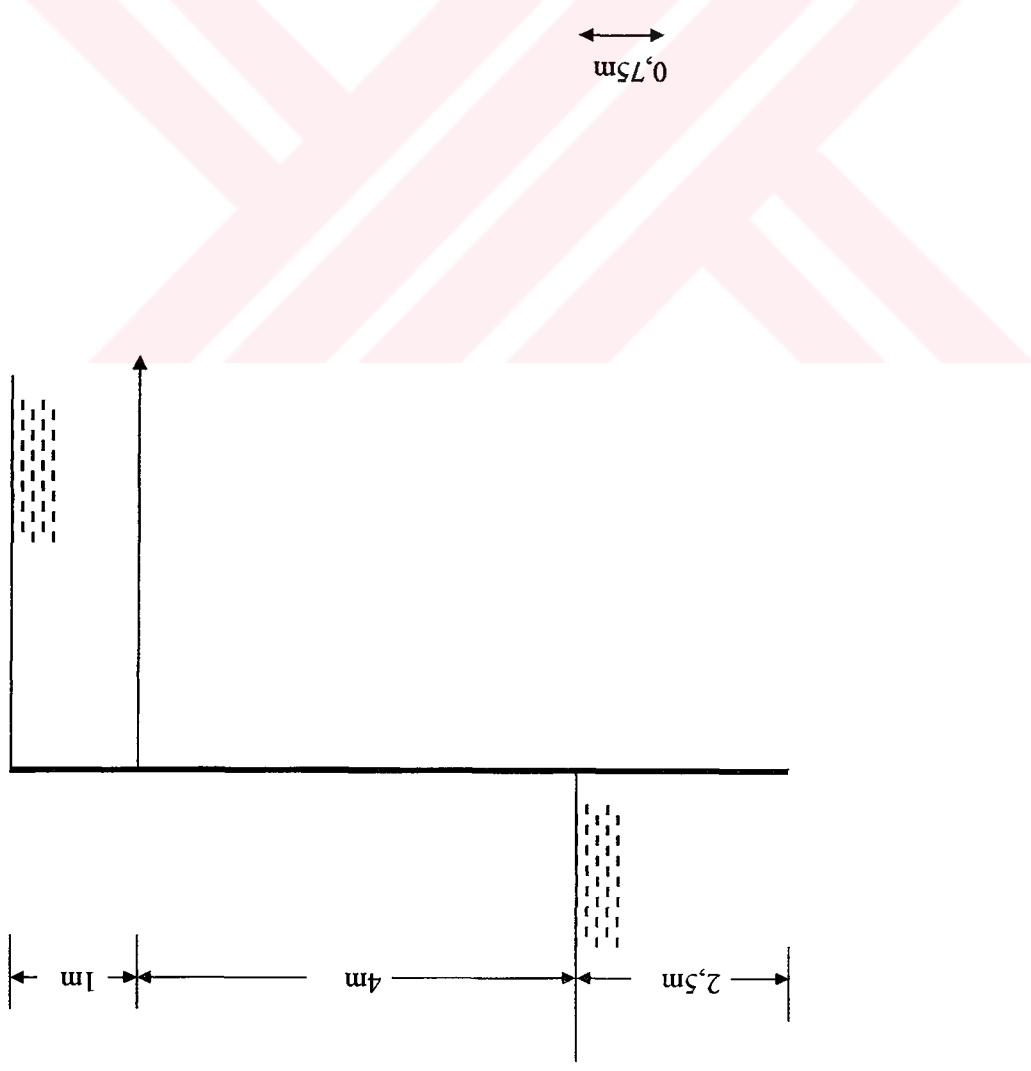
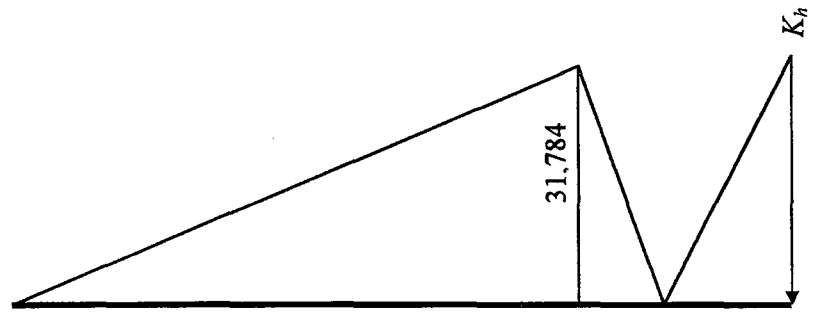
Burada farklı olarak zemine ankre edilmiş bir kablo var. Bu kablo içinde bir yay kuvveti buluruz.

$$K_{yay} = K_{yay} = \frac{A.E}{s.L} = \frac{2,3758 \times 10^{-3} \times 2000000000}{1,83 \times 5,83} = 44587,48 \text{ kN / m}$$

Bu aşamadan sonra excel tabloları yardımıyla hazırladığımız programı kullanarak moment ve yer değıştirme değerlerini elde edebiliriz.

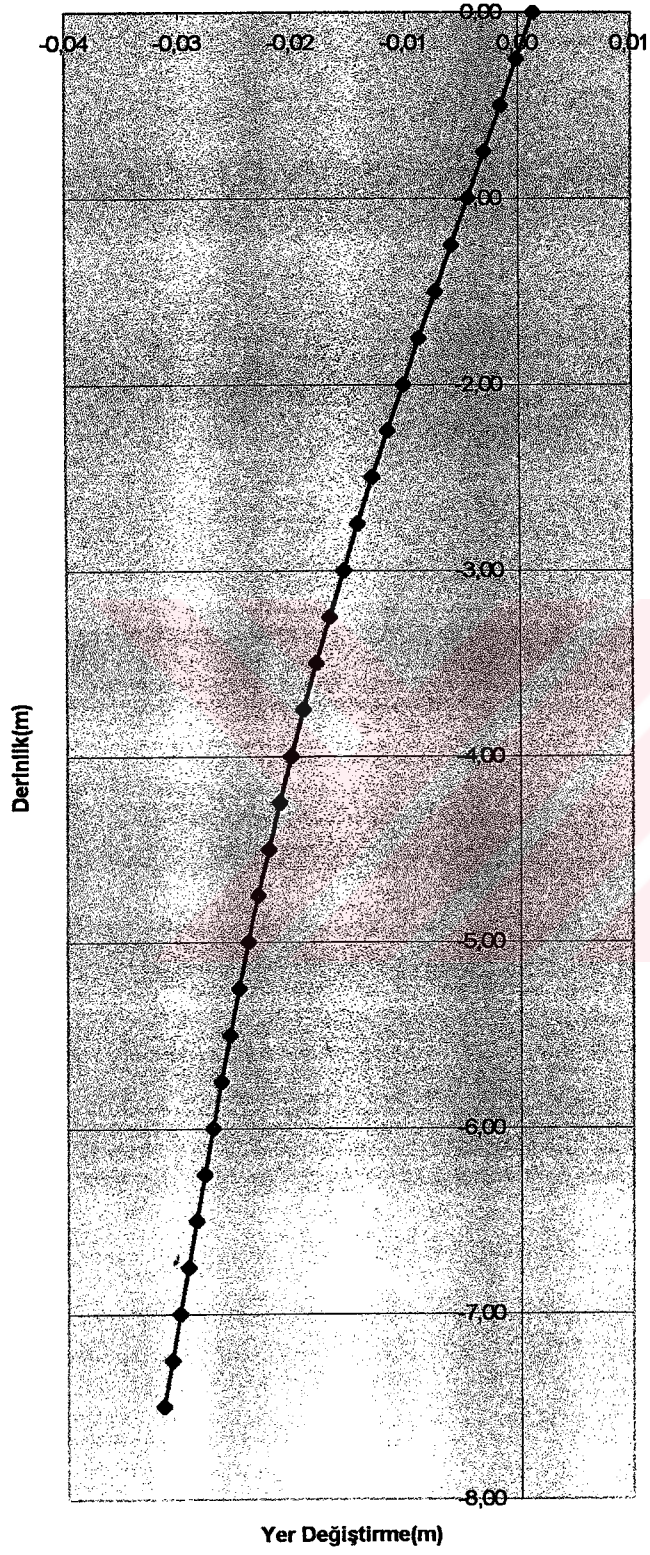


Basınç(σ) diagramı (kN/m^2)

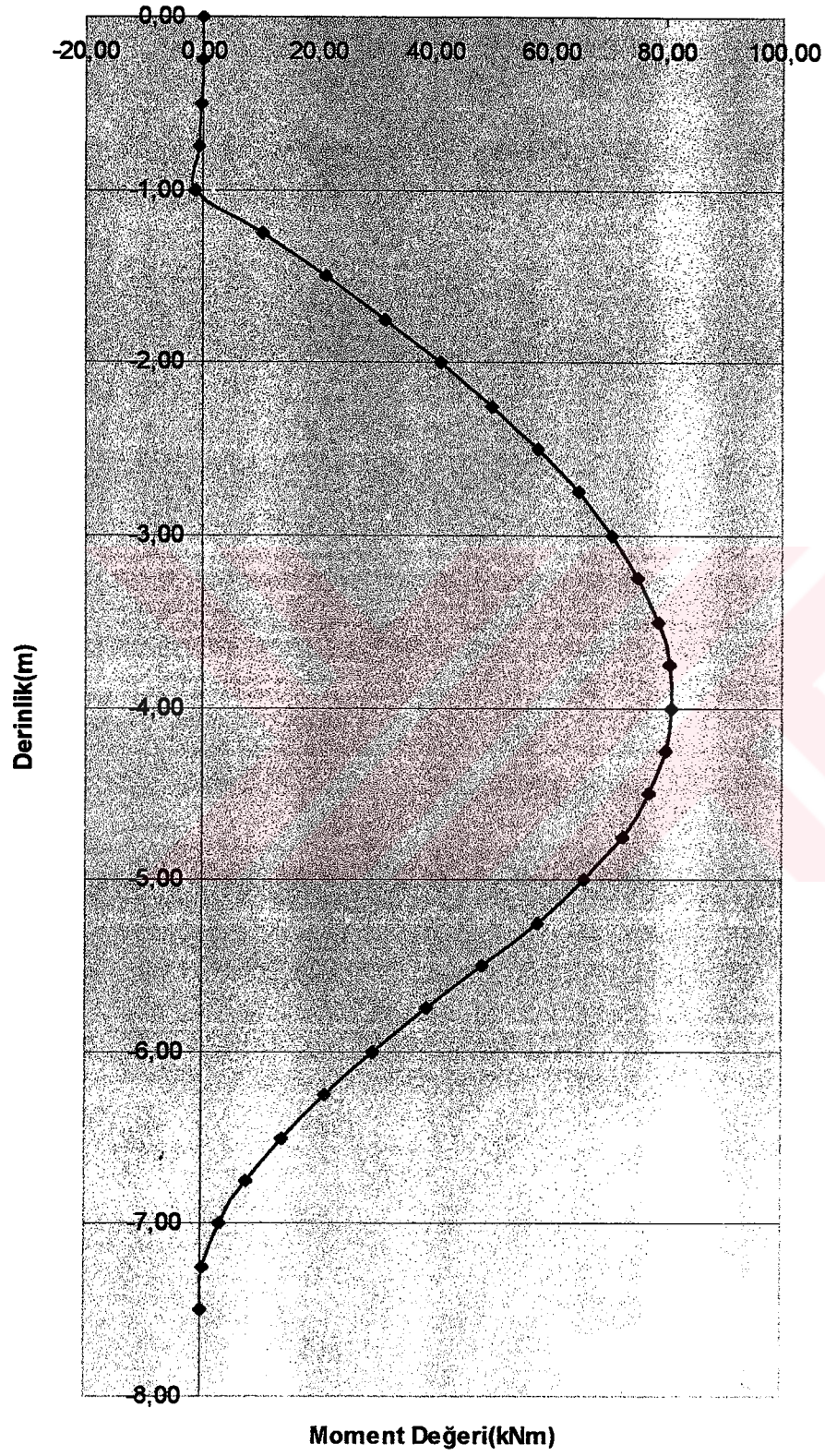


Düğüm Noktası	Derinlik	Gömme Derinliği	Sonlu Fark	Toprak İtkisi	Noktasal Yük	Atalet momenti	Elastisite modülü	Zemin Yay Katsayısı	Zemin Yay Gerilmesi /Ankraj yay	A ₁	A ₂	Verdeğiştirme	Moment
Nod(i)	Y _i	D(m)	$\Delta L(m)$	$\sigma(kN/m^2)$	$P_i(kN/m)$	$I(m^4/m)$	$E(kN/m^2)$	$K_R(kN/m^3)$	$k(kN/m)$			X _i (m)	M _i (kNm)
1	0,00	0,00	0,25	0,00	-0,07	0,0004934	2,00E+08	0,00	0,00	-0,00000001	0,00000000	0,001343	0,00000
2	-0,25	0,00	0,25	-1,59	-0,43	0,0004934	2,00E+08	0,00	0,00	-0,00000007	0,00000000	-0,000107	-0,01659
3	-0,50	0,00	0,25	-3,18	-0,79	0,0004934	2,00E+08	0,00	0,00	-0,00000013	0,00000000	-0,001557	-0,14080
4	-0,75	0,00	0,25	-4,77	-1,19	0,0004934	2,00E+08	0,00	0,00	-0,00000019	0,00000000	-0,003007	-0,46366
5	-1,00	0,00	0,25	-6,36	-1,59	0,0004934	2,00E+08	0,00	44537,48	-0,00000025	0,00176302	-0,004458	-1,08449
6	-1,25	0,00	0,25	-7,95	-1,99	0,0004934	2,00E+08	0,00	0,00	-0,00000031	0,00000000	-0,005909	10,30651
7	-1,50	0,00	0,25	-9,54	-2,38	0,0004934	2,00E+08	0,00	0,00	-0,00000038	0,00000000	-0,007354	21,20096
8	-1,75	0,00	0,25	-11,12	-2,78	0,0004934	2,00E+08	0,00	0,00	-0,00000044	0,00000000	-0,008785	31,49955
9	-2,00	0,00	0,25	-12,71	-3,18	0,0004934	2,00E+08	0,00	0,00	-0,00000050	0,00000000	-0,010196	41,10298
10	-2,25	0,00	0,25	-14,30	-3,58	0,0004934	2,00E+08	0,00	0,00	-0,00000057	0,00000000	-0,011582	49,91196
11	-2,50	0,00	0,25	-15,89	-3,97	0,0004934	2,00E+08	0,00	0,00	-0,00000063	0,00000000	-0,012935	57,82718
12	-2,75	0,00	0,25	-17,48	-4,37	0,0004934	2,00E+08	0,00	0,00	-0,00000069	0,00000000	-0,014252	64,74935
13	-3,00	0,00	0,25	-19,07	-4,77	0,0004934	2,00E+08	0,00	0,00	-0,00000075	0,00000000	-0,015528	70,57917
14	-3,25	0,00	0,25	-20,66	-5,16	0,0004934	2,00E+08	0,00	0,00	-0,00000082	0,00000000	-0,016760	75,21733
15	-3,50	0,00	0,25	-22,25	-5,56	0,0004934	2,00E+08	0,00	0,00	-0,00000088	0,00000000	-0,017943	78,56453
16	-3,75	0,00	0,25	-23,84	-5,96	0,0004934	2,00E+08	0,00	0,00	-0,00000094	0,00000000	-0,019077	80,52147
17	-4,00	0,00	0,25	-25,43	-6,36	0,0004934	2,00E+08	0,00	0,00	-0,00000101	0,00000000	-0,020160	80,98885
18	-4,25	0,00	0,25	-27,02	-6,75	0,0004934	2,00E+08	0,00	0,00	-0,00000107	0,00000000	-0,021192	79,86737
19	-4,50	0,00	0,25	-28,61	-7,15	0,0004934	2,00E+08	0,00	0,00	-0,00000113	0,00000000	-0,022173	77,05773
20	-4,75	0,00	0,25	-30,20	-7,55	0,0004934	2,00E+08	0,00	0,00	-0,00000120	0,00000000	-0,023105	72,46061
21	-5,00	0,00	0,25	-31,78	-7,18	0,0004934	2,00E+08	0,00	20,17	-0,00000114	0,00000080	-0,023992	65,97672
22	-5,25	-0,25	0,25	-21,19	-5,30	0,0004934	2,00E+08	484,00	131,08	-0,00000084	0,00000519	-0,024836	57,72736
23	-5,50	-0,50	0,25	-10,59	-2,87	0,0004934	2,00E+08	968,00	242,00	-0,00000045	0,00000958	-0,025644	48,35761
24	-5,75	-0,75	0,25	0,00	-0,44	0,0004934	2,00E+08	1452,00	363,00	-0,00000007	0,00001437	-0,026421	38,65885
25	-6,00	-1,00	0,25	0,00	0,00	0,0004934	2,00E+08	1936,00	484,00	0,00000000	0,00001916	-0,027174	29,44968
26	-6,25	-1,25	0,25	0,00	0,00	0,0004934	2,00E+08	2420,00	605,00	0,00000000	0,00002395	-0,027909	21,06307
27	-6,50	-1,50	0,25	0,00	0,00	0,0004934	2,00E+08	2904,00	726,00	0,00000000	0,00002874	-0,028629	13,73230
28	-6,75	-1,75	0,25	0,00	0,00	0,0004934	2,00E+08	3388,00	847,00	0,00000000	0,00003353	-0,029342	7,70118
29	-7,00	-2,00	0,25	0,00	0,00	0,0004934	2,00E+08	3872,00	968,00	0,00000000	0,00003832	-0,030049	3,22392
30	-7,25	-2,25	0,25	0,00	0,00	0,0004934	2,00E+08	4356,00	1089,00	0,00000000	0,00004311	-0,030754	0,56525
31	-7,50	-2,50	0,25	0,00	0,00	0,0004934	2,00E+08	4840,00	574,75	0,00000000	0,00002275	-0,031459	0,00000

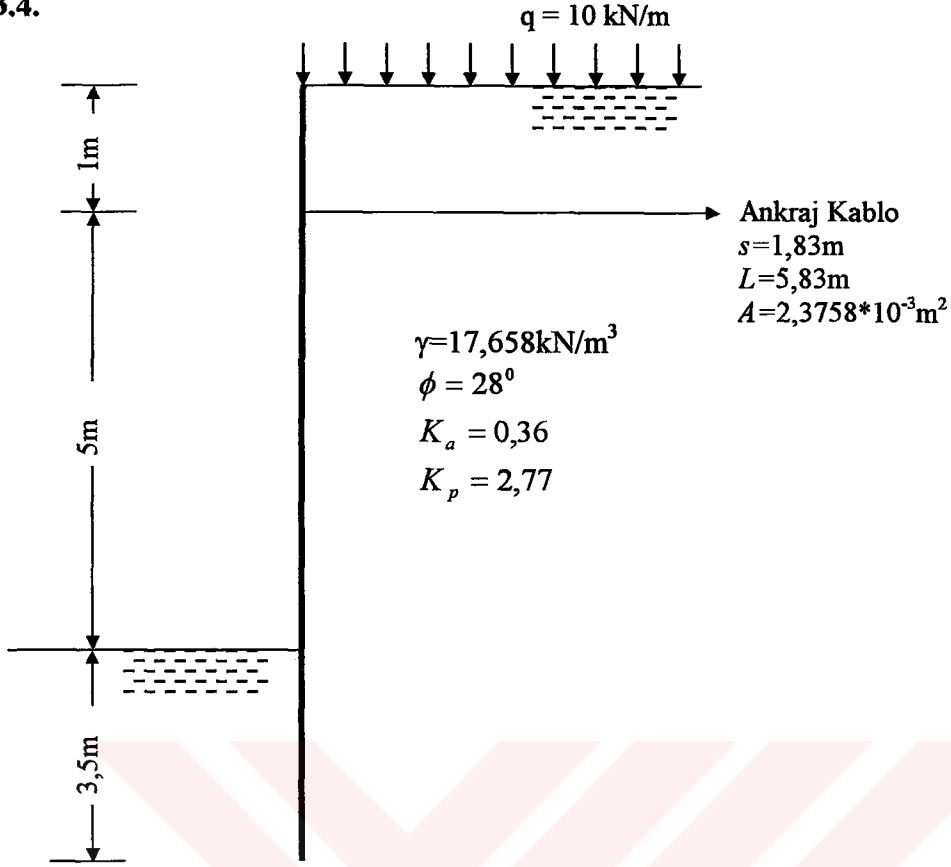
Yer Değiştirme Eğrisi



Moment Eğrisi



7.3.4.



Bir önceki uygulamadan farklı olarak burada zemin üzerinde bir yayılı yük var. Yine palplanş perde de yerdeğiştirme ve moment değerlerini bulalım (Palplanş perde için $I = 2.394 \cdot 10^{-4}$, $E = 200000 \text{ Mpa}$). Basıncı (toprak itkisi) değerinin sıfır olduğu noktanın alt kısmında perdenin elastik zemine oturan kiriş gibi davrandığını kabul ediyoruz.

Bunun için yine zemin yay katsayısını (K_h) buluruz.

$$K_h = m_h(z/D)$$

$$m_h = 0.00109 \cdot 2.77 \cdot 17.658 / 0.011 = 4.840 \text{ kN/m}^2/\text{mm} = 4840 \text{ kN/m}^3$$

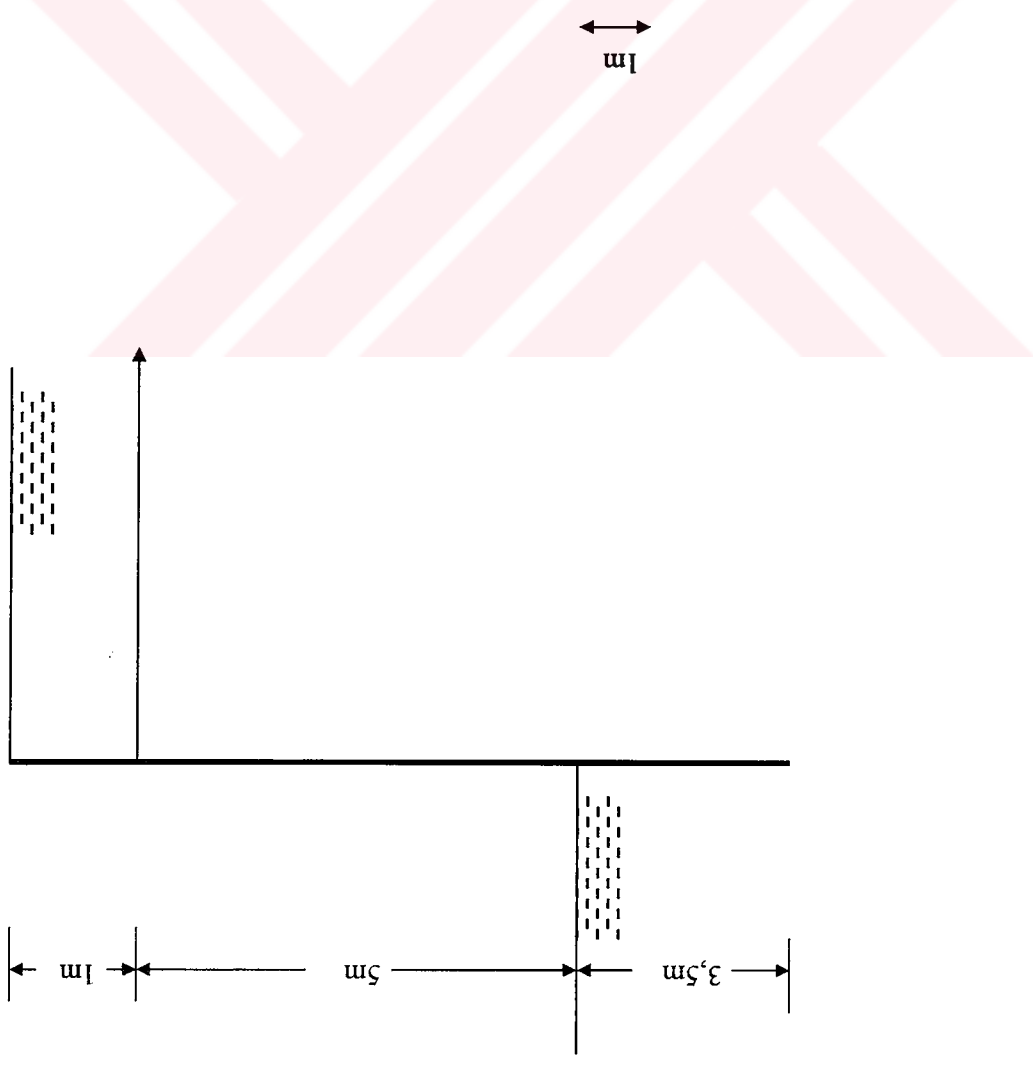
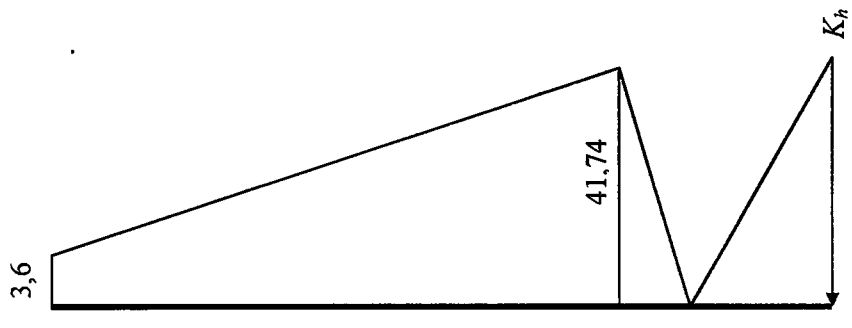
Zemine ankre edilmiş kablo için bir yay kuvveti buluruz.

$$K_{yay} = K_{yay} = \frac{A.E}{s.L} = \frac{2.3758 \times 10^{-3} \times 200000000}{1.83 \times 5.83} = 44587.48 \text{ kN / m}$$

Bu aşamadan sonra excel tabloları yardımıyla hazırladığımız programı kullanarak moment ve yer değiştirme değerlerini elde edebiliriz.

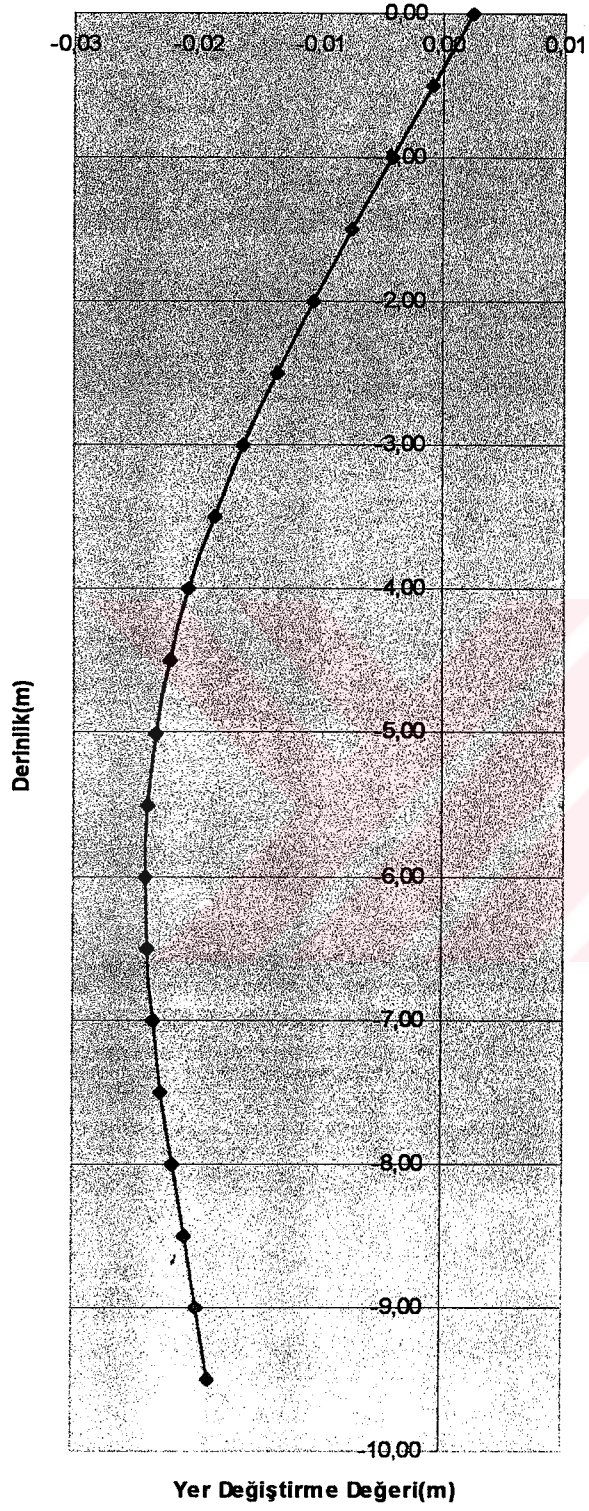


Basınç(σ) diagramı (kN/m^2)

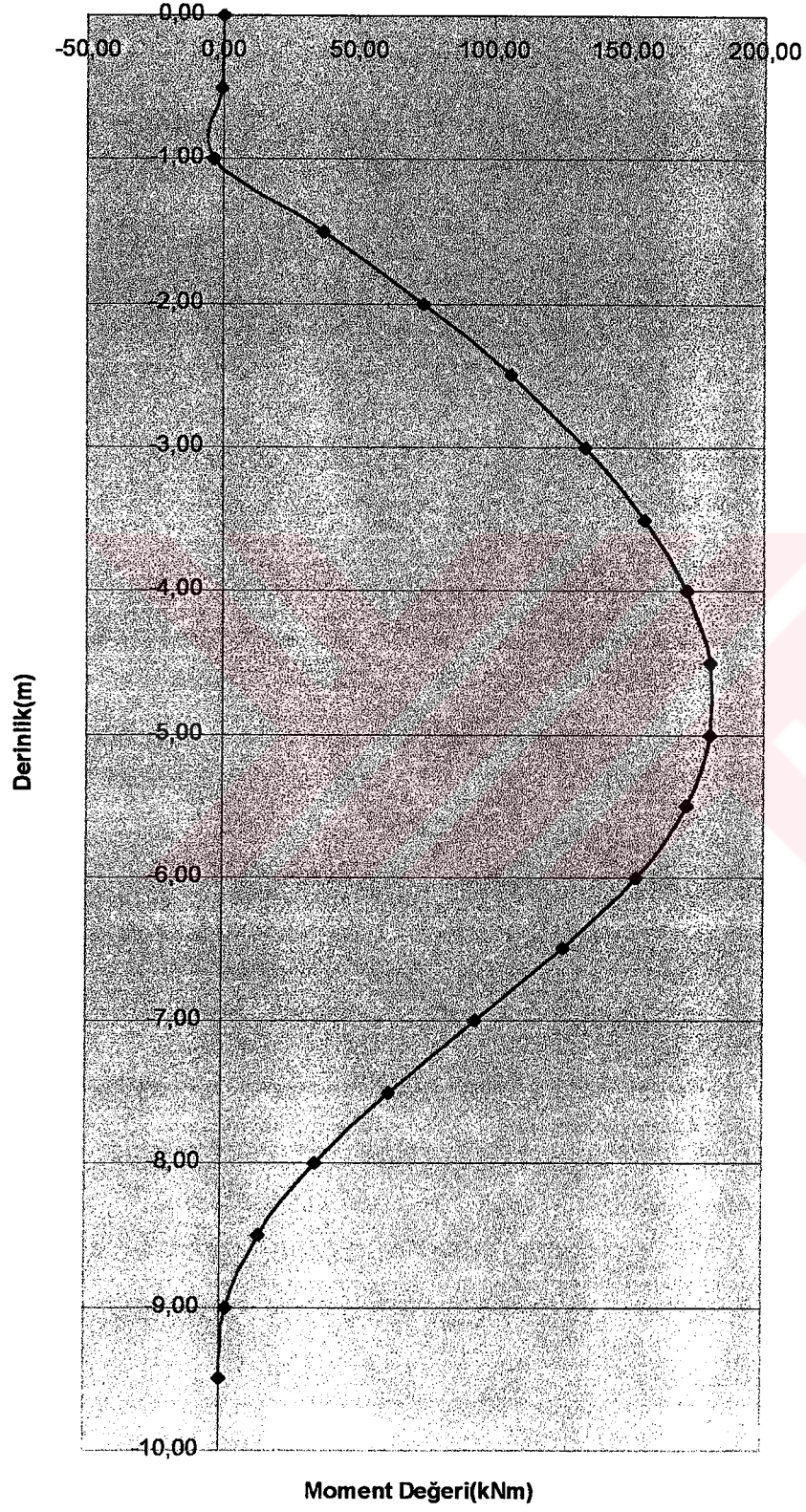


Düğüm Noktası	Derinlik	Gömme Derinliği	Sonlu Fark Aralığı	Toprak İtkisi	Noktasal Yük	Atalet momenti	Elastisite modülü	Zemin Yay Katsayısı	Noktasal Zemin Yay Gerilmesi	A ₁	A ₂	Yerdeğiştirm e	Moment
Nod(i)	Y _i	D(m)	ΔL(m)	σ(kN/m ²)	P _i (kN/m)	I(m ⁴ /m)	E(kN/m ²)	K _h (kN/m ³)	k(kN/m)	A ₁	A ₂	X _i (m)	M _i (kNm)
1	0,00	0,00	0,50	-3,60	-1,30	0,0004934	2,00E+08	0,00	0,00	-0,000001640	0,00000000	0,002517	0,000000
2	-0,50	0,00	0,50	-6,78	-3,39	0,0004934	2,00E+08	0,00	0,00	-0,000004290	0,00000000	-0,000752	-0,648653
3	-1,00	0,00	0,50	-9,96	-4,98	0,0004934	2,00E+08	0,00	44537,00	-0,000006310	0,02820797	-0,004023	-2,991915
4	-1,50	0,00	0,50	-13,14	-6,57	0,0004934	2,00E+08	0,00	0,00	-0,000008320	0,00000000	-0,007301	36,968424
5	-2,00	0,00	0,50	-16,31	-8,16	0,0004934	2,00E+08	0,00	0,00	-0,000010330	0,00000000	-0,010486	73,644933
6	-2,50	0,00	0,50	-19,49	-9,75	0,0004934	2,00E+08	0,00	0,00	-0,000012350	0,00000000	-0,013484	106,243003
7	-3,00	0,00	0,50	-22,67	-11,34	0,0004934	2,00E+08	0,00	0,00	-0,000014360	0,00000000	-0,016213	133,968023
8	-3,50	0,00	0,50	-25,85	-12,92	0,0004934	2,00E+08	0,00	0,00	-0,000016370	0,00000000	-0,018602	156,025383
9	-4,00	0,00	0,50	-29,03	-14,51	0,0004934	2,00E+08	0,00	0,00	-0,000018380	0,00000000	-0,020597	171,620474
10	-4,50	0,00	0,50	-32,21	-16,10	0,0004934	2,00E+08	0,00	0,00	-0,000020400	0,00000000	-0,022156	179,958684
11	-5,00	0,00	0,50	-35,38	-17,69	0,0004934	2,00E+08	0,00	0,00	-0,000022410	0,00000000	-0,023260	180,245405
12	-5,50	0,00	0,50	-38,56	-19,28	0,0004934	2,00E+08	0,00	0,00	-0,000024420	0,00000000	-0,023906	171,686025
13	-6,00	0,00	0,50	-41,74	-18,73	0,0004934	2,00E+08	0,00	53,33	-0,000023730	0,00003378	-0,024118	153,485936
14	-6,50	-0,50	0,50	-27,83	-13,91	0,0004934	2,00E+08	640,00	346,67	-0,000017620	0,00021956	-0,023941	126,240367
15	-7,00	-1,00	0,50	-13,91	-7,54	0,0004934	2,00E+08	1280,00	640,00	-0,000009550	0,00040535	-0,023445	94,112842
16	-7,50	-1,50	0,50	0,00	-1,16	0,0004934	2,00E+08	1920,00	960,00	-0,000001470	0,00060803	-0,022710	61,968157
17	-8,00	-2,00	0,50	0,00	0,00	0,0004934	2,00E+08	2560,00	1280,00	0,000000000	0,00081070	-0,021817	34,694015
18	-8,50	-2,50	0,50	0,00	0,00	0,0004934	2,00E+08	3200,00	1600,00	0,000000000	0,00101338	-0,020837	14,401421
19	-9,00	-3,00	0,50	0,00	0,00	0,0004934	2,00E+08	3840,00	1920,00	0,000000000	0,00121605	-0,019821	2,443737
20	-9,50	-3,50	0,50	0,00	0,00	0,0004934	2,00E+08	4480,00	1040,00	0,000000000	0,00065869	-0,018798	0,000000

Yer Değiştirme Eğrisi



Moment Eğrisi



8. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Tezimizde öncelikle elastik zemine oturan kiriş problemleri incelenmiştir. Winklerin elastik zemine oturan kirişler için geliştirdiği model kullanılarak sonlu farklar metodu ile çözüm elde edilmiştir. Sonlu farklar metodu bilindiği üzere bir sayısal analiz yöntemidir. Belli bir yaklaşımla çözüm elde edilir. Ele aldığımız kiriş problemlerinin sonuçlarını literatürdeki örnekleriyle karşılaştırdığımızda oldukça iyi sonuç verdiği görülmüştür.

Bilindiği üzere sonlu farklar metodunda, elastik eğrisini aradığımız kirişi belli sayıda elemanlara bölüyoruz. Buradan hareketle çözüm her bir düğüm noktası için elde edilir. Bu yüzden yine sayısal çözümü elde edebilmek için öncelikle kirişin üzerindeki tüm dış yüklerin eşdeğer düğüm noktası yüklerine çevrilmesi gerekir. Böylece kiriş üzerindeki herhangi yük durumları incelenerek, eşdeğer düğüm noktası yüklerine çevrim formülleri elde edilmiştir. Daha sonra ise diferansiyel denklemler sonlu farklar formülleri ile bilinmeyen yer değiştirme-kuvvet denklemlerine çevrilmiştir. Elde edilen denklem takımları henüz problemi çözmeye yeterli olmaz. Sınır koşulları da ayrı ayrı incelenmelidir. Buradan hareketle değişik sınır koşulları için sonlu farklar denklemleri elde edildi. Böylece problemler çözüldü.

Elastik zemine oturan kirişlerde doğruluk derecesi kabul edilebilir çözümler elde ettikten sonra palplanş perdelerin çözümüne geçildi. Bilindiği gibi palplanş perdeler yatay basınçlar etkisi altındadır. Bu yatay basınç etkileri (aktif ve pasif toprak itkileri) diyagramının sıfır olduğu kısmın altında, perdelerin, elastik zemine oturan kiriş gibi çalıştığı kabulü yapılarak çözüm elde edildi.

Klasik olarak da bu perdeler için elastik eğri denklemlerinin bulunması yoluyla çözüm elde edilebilmektedir. Bu çözümün sonlu farklar çözümüne göre aşağıdaki gibi dezavantajları bulunmaktadır.

1. Kirişı ağırlıksız kabul eder.
2. Zemine oturmayan bölge için zemin etkisini kaldırmak zordur.
3. Herhangi bir noktada bilinen dönme veya sehim için sınır koşullarını hesap etmek zordur.
4. Değişik yük durumlarını uygulamak zordur.
5. Elastik zemine oturan kiriş veya palplanş perde de I (atalet momenti), B (genişlik) gibi parametlerde değişiklik yapmak zordur.
6. Oturma boyunca zemin özellikleri değişimini probleme yansıtmak zordur.

Bütün bu zorluklar sonlu elemanlar çözümünde birer avantaj olarak karşımıza çıkar.

Son olarak sonlu elemanlar çözümü için her bir problemde excel tablolar yardımıyla bir program yapıldı ve çözüm elde edildi. Tablolarda bulunan iterasyon komutu kullanılarak denklem takımları kolayca çözüldü. Yine doğruluk derecesi literatürdeki örnekleriyle karşılaştırıldığında oldukça iyi sonuçlar verdiği görüldü.



KAYNAKLAR

- [1] **Jones, G.**, 1997,. Analysis of Beams on Elastic Foundations, Thomas Telford Publishing, London.
- [2] **Bowles, J. E.**, 1988, Foundation Analysis and Design, McGraw-Hill Book Company, Singapore.
- [3] **Henteyi M.**, 1946, Beams on Elastic Foundations, University of Michigan Press, Ann Arbor.
- [4] **Lee, D. H.**, 1961, An Introduction to Deep Foundations and Sheet Piling, Concrete Publications, London.
- [5] **İnan, M. ve Sönmez, F.**, 1949, Cisimlerin Mukavemeti Cilt II, Teknik Üniversite Matbaası, İstanbul.
- [6] **Timoshenko S.**, 1953 History of Streng of Materials, McGraw-Hill, New York.
- [7] **Rowe, P. W.**, 1956, Evaluation of Coefficients of Subgrade Reactions, Geotehcnique, 6,94-98.
- [8] **Holloway, R.**, 1991, Foundation and Structural Problems, Bsp Professional Books, Oxford.
- [9] **Pun W. K. ve Pang P.L.R.**, 1995, Horizontal Subgrade Reaction for Cantilevered Retaining Wall Analysis, Geotechnical Report, Geotechnical Engineering Office, Hong Kong.
- [10] **Vesic, A. B.**, 1961, Bending of Beams Resting on Isotropic Elastic Solid, J. Engng. Mech. Div., Asce, 87, EM 2, April, 33-53.
- [11] **Terzaghi, K.**, 1955, Evaluation of Coefficients of Subgrade Reaction, Geotechnique, Dec., 5(4), 297-326.
- [12] **Malter, H.**, 1960, Numerical Solutions for Beams on Elastic Foundations, Transactions, ASCE, Vol 125, pp. 757-791.
- [13] **Miranda, C. K. ve Nair, K.**, 1966, Finite Beams on Elastic Foundations, J. Struc. Div. Proceedings Asce, Vol 92, No. ST2, April, pp 131-142.
- [14] **Elmas, M.**, 1988, Elastik Zemin Oturan Sonlu Kirişlerin Deneysel İncelenmesi, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, İstanbul.

- [15] **Elson, W., K.**, 1994, Design of Laterally-Loaded Piles, CIRIA Report 103, Aug.
- [16] **McClelland, B. ve Focht, J., A.**, 1958, Soil Modules for Laterally Loaded Piles, Trans-Am. Soc. Civ. Engrs.
- [17] **Prakash, S., L. ve Saran, D.**, 1967, Behaviour of Laterally Loaded Piles in Cohesive Soil. Proc. 3rd Asian Conf. on Soil Mech., Halta, 235-238.



ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Muhammet Ali Karamahmutoglu
Unvan : İnşaat Mühendisi
Doğum Tarihi ve Yeri : 04.04.1975 – Ünye / Ordu

Eğitim

1997 - 2000 İstanbul Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İnşaat Mühendisliği Programı
Yapı Mühendisliği Anabilim Dalı
Danışman : Prof. Dr. Mehmet Bakioğlu

1993 – 1997 İstanbul Teknik Üniversitesi
Sakarya Mühendislik Fakültesi
İnşaat Mühendisliği Bölümü

1992 – 1993 İstanbul Teknik Üniversitesi
İngilizce Hazırlık Bölümü

1989 – 1992 19 Mayıs Lisesi / SAMSUN

İş Deneyimi

03 / 1998 - ... Araştırma Görevlisi **Yıldız Teknik Üniversitesi**
Mimarlık Fakültesi