

**YAPILARIN VE KONTROL SİSTEMLERİNİN
BİRLEŞİK OPTİMUM TASARIMI**

DOKTORA TEZİ

Y. Müh. Mehmet BOZCA

(Enstitü No: 503992008)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 13 Ekim 2004

Tezin Savunulduğu Tarih: 30 Mart 2005

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ata MUĞAN



Diğer Jüri Üyeleri: Doç. Dr. Hakan TEMELTAŞ (İ.T.Ü.)



Doç. Dr. İsmail YÜKSEK (Y.T.Ü.)



Yrd. Doç. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ (İ.T.Ü.)



Yrd. Doç. Dr. Serhat YEŞİLYURT (SABANCI Ü.)



MART 2005

ÖNSÖZ

Bu doktora tezinde “Yapıların ve Kontrol Sistemlerinin Birleşik Optimum Tasarımı” konusu incelenmiştir. Yapı ve kontrolcülerin tasarım optimizasyonu hem eş zamanlı olarak hem de ardışık olarak gerçekleştirilmiştir. Yapılar sonlu eleman metodları ile modellenmiş, kontrol sistemleri H_2 , H_∞ dayanıklı kontrol formülasyonları ve LQR formülasyonları kullanılarak tasarlanmıştır. Elde edilen sonuçlar birbirleri ile mukayase edilmiştir. LQR ve pasif temelli kontrol arasındaki ilişkiler ispatlanmıştır.

Doktora tez çalışmam esnasında, yardımlarından dolayı Doktora tez danışmanım Doç. Dr. Ata Muğan’a, Doktora tez izleme komitesi üyeleri Doç. Dr. Hakan Temeltaş ve Yrd. Doç. Dr. Ekrem Tüfekçi’ye ve aileme teşekkür ederim.

Ayrıca, arkadaşlarım Dr. Müh. Ersun Yalçın’ a, Dr. Müh. İlyas İstif ’e, Dr. Müh. Övün Işın’a, Yük. Müh. Gökçe Sevim Domaç’a, Yük. Müh. Hamza Kemal Akyıldız’a ve Yük. Müh. Yusuf Cunedioğlu’ na teşekkür ederim.

Maddi katkılarından dolayı İstanbul Teknik Üniversitesi Araştırma Etkinlikleri Sekreterliği’ne de teşekkür ederim.

Mart 2005

Mehmet Bozca

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR	vi
TABLO LİSTESİ	vii
ŞEKİL LİSTESİ	viii
ÖZET	xii
SUMMARY	xiii
1. GİRİŞ	1
1.1. Amaç	2
1.2. Literatür Özeti	4
2. SONLU ELEMANLAR METODU	7
2.1. Sonlu Eleman Yapı Denklemleri	7
2.2. Eleman Analizi	7
2.1.2. Kiriş eleman katılık matrisi	8
2.1.2. Kafes eleman katılık matrisi	10
2.1.3. Kiriş ve kafes eleman katılık matrislerinin özellikleri	10
2.1.4. Kiriş ve kafes eleman kütle matrisleri	11
2.1.5. Global katılık ve kütle matrisleri	12
2.1.6. Yerel koordinatlardan global koordinatlara dönüşüm	12
2.1.7. Genelleştirilmiş global katılık matrisi	13
2.1.8. İndirgenmiş global katılık matrisi	14
2.1.9. Genelleştirilmiş global kütle matrisi	14
2.1.10. İndirgenmiş global kütle matrisi	15
2.3. Yapının Dinamik Cevabı	15
2.3.1. Serbest titreşim	15
2.3.2. Zorlanmış titreşim	16
3. DAYANIKLI KONTROL	17
3.1. Dayanıklılık Analizi-Modern Yaklaşım	18
3.2. Kararlılık ve Geri Besleme Sistemlerinin Davranışı	18
3.2.1. Geri besleme özellikleri	18
3.3 Model Belirsizliği ve Dayanıklılığı	22
3.3.1. Model belirsizliği	22

3.4. Küçük Kazanç Teoremi (Small Gain Theorem)	22
3.5. Yapılandırılmış Tekil Değer	24
3.5.1 Sistem dayanıklılığı için genel yapı	24
3.5.2 Temel kavram	25
3.6. Yapılandırılmış Dayanıklı Kararlılık ve Davranışı	26
3.6.1. Dayanıklı kararlılık	26
3.6.2. Dayanıklılık davranışı	26
3.7. H_2 Optimal Kontrol	27
3.7.1. Regülatör problemine giriş	27
3.7.2. Standart LQR problemi	28
3.7.3. Genişletilmiş LQR problemi	29
3.7.4. Standart H_2 problemi	29
3.7.5. H_∞ Kontrol	31
3.7.5.1. Problem formülasyonu	31
3.7.5.2. Suboptimal H_∞ kontrolcüler	32
3.7.5.3. Tam enformasyon kontrol (TE)	33
3.7.5.4. Tam kontrol (TK)	34
3.7.5.5. Bozucu ileri besleme kontrol (Bİ)	34
3.7.5.6. Çıkış kestirimi ile kontrol (ÇK)	35
4. SAYISAL OPTİMİZASYON METODLARI	36
4.1 Optimizasyon Probleminin Genel İfadesi	37
4.2 İteratif Optimizasyon İşlemi	38
4.3. Optimum Bir Çözümün Oluşumu ve Tekilliği	39
4.3.1. Kısıtsız problemler	39
4.3.2. Kısıtlı problemler	41
4.3.3. Kuhn-Tucker koşulları	42
4.4. N Değişkenli Kısıtlı Fonksiyonu: Doğrudan Metod	43
4.4.1. Rastgele arama	43
4.4.2. Ardışık doğrusal programlama (ADP)	43
4.4.3. Uygun doğrultuların metodu	44
4.4.4. Genelleştirilmiş indirgenmiş gradyan metodu	45
4.4.5. Bir dayanıklı uygun doğrultu metodu	46
4.4.6. Ardışık quadratik programlama metodu (AQP)	47
4.6. Çok Amaçlı Optimizasyon	51
4.6.1. Ağırlıklı toplam metodu	53

5. YAPI VE H_2 / H_∞ DAYANIKLI KONTROL SİSTEMİNİN BİRLEŞİK OPTİMUM TASARIMI	55
5.1. Tekil Değer Ayrıklaştırmasının Yapılara Uygulanması	56
5.2. Yapısal Optimizasyon Problemleri	58
5.2.1. Sonlu eleman eşitlikleri	59
5.2.2. Kısıtlı yapısal optimizasyon problemleri	59
5.2.3. Gerilme analizi	60
5.3. Kontrolcü Tasarım Metodları	61
5.3.1. H_2 kontrolcü tasarım metodu	62
5.3.1.1. Algoritma	62
5.3.1.2 Sınırlamalar	63
5.3.2. H_∞ kontrolcü tasarım metodu	63
5.3.2.1. Algoritma	63
5.3.2.2. Sınırlamalar	64
5.4. Kontrol Edilmiş Yapının Optimum Tasarımı	64
5.4.1. Yapıların ve kontrolcünün eşzamanlı optimizasyonu	64
5.4.2. Yapının ve H_∞ kontrolcüsünün ardışık optimizasyonu	66
5.4.3. Yapının ve H_2 kontrolcünün ardışık optimizasyonu	71
5.5. Uygulama	73
6. YAPI VE LQR KONTROL SİSTEMİNİN BİRLEŞİK OPTİMUM TASARIMI	80
6.2. LQR Tasarım Metodu	81
6.3. Kontrol Edilmiş Yapıların Optimum Tasarımı	82
6.3.1 Yapıların ve LQR tasarım probleminin ardışık optimizasyonu	82
6.3.2 Enerji şekillendirme ve tekil değer şekillendirme arasındaki bağıntı	88
6.3.4 Tasarım duyarlılık analizi	92
6.4. Uygulama	92
7. SONUÇLAR ve TARTIŞMA	95
KAYNAKLAR	98
EK A	101
EK B	109
ÖZGEÇMİŞ	122

KISALTMALAR

SEM	: Sonlu Elemanlar Metodu
LQR	: Linear Quadratic Regulator
TE	: Tam enformasyon
TK	: Tam kontrol
Bİ	: Bozucu ileri besleme
ÇK	: Çıkış kestirimi
ADP	: Ardışık Doğrusal Programlama
AQP	: Ardışık Quadratik Programlama
TDA	: Tekil Değer Ayrıklaştırması
PTK	: Pasif Temelli Kontrol



TABLO LİSTESİ

	Sayfa No
Tablo A.1. Eş zamanlı H_∞ optimizasyon problemi ile elde edilen çözümler...	100
Tablo A.2. Eş zamanlı H_2 optimizasyon problemi ile elde edilen çözümler...	101
Tablo A.3. Yapının (5.55) ile verilen amaç fonksiyonu ile optimize edildiği ardışık optimizasyon problemi ile elde edilen çözümler.....	102
Tablo A.4. Yapının (5.56) ile verilen amaç fonksiyonu ile optimize edildiği ardışık optimizasyon problemi ile elde edilen çözümler.....	103
Tablo A.5. Yapının (5.57) ile verilen amaç fonksiyonu ile optimize edildiği ardışık optimizasyon problemi ile elde edilen çözümler.....	104
Tablo A.6. Eş zamanlı LQR optimizasyon yaklaşımı ile elde edilen çözümler.	105
Tablo A.7. Ardışık LQR optimizasyon yaklaşımı ile elde edilen çözümler....	106
Tablo A.8. P ve G transfer matrisleri için tekil değerlerin Gateaux türevlerinin maksimumu.....	107

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa No
Şekil 2.1 : Düzlemsel giriş eleman.....	8
Şekil 3.1 : Standart geri besleme Konfigürasyonu.....	19
Şekil 3.2 : Küçük Kazanç Teoremi.....	23
Şekil 3.3 : Dayanımlı kararlılığı.....	26
Şekil 3.4 : Sistem blok diyagramı.....	31
Şekil 3.5 : BI ve ÇK için sistem blok diyagramı.....	34
Şekil 4.1 : S doğrultusunda arama.....	38
Şekil 4.2 : Bir kısıtsız fonksiyonun izafi optimumu.....	40
Şekil 4.3 : Kullanılabilir-uygun arama doğrultusu.....	41
Şekil 4.4 : Doğrusallaştırılmış problem.....	44
Şekil 4.5 : Faydalı-uygun arama yönü.....	45
Şekil 4.6 : Arama doğrultusu.....	47
Şekil 4.7 : Parametre uzayından amaç fonksiyonu uzayına gidiş.....	52
Şekil 4.8 : Uygun çözüm grupları.....	53
Şekil 4.9 : Ağırlaştırılmış toplam metodunun geometrik gösterimi.....	54
Şekil 4.10 : Dış bükey olmayan çözüm sınırı.....	54
Şekil 5.1 : Bir sistemin standart blok diyagramı.....	62
Şekil 5.2 : Yapının ve kontrolcünün eş zamanlı optimum tasarımı akış diyagramı	65
Şekil 5.3 : Seri ve paralel optimizasyon yaklaşımları.....	66
Şekil 5.4 : Bir sistemin blok diyagramı.....	67
Şekil 5.5 : Kontrol edilmiş anten yapısı.....	73
Şekil 5.6 : Kafes sistem.....	74
Şekil B.1 : 2000 serbestlik derecesine sahip bir kafes-giriş yapının Bode kazanç eğrisi.....	108
Şekil B.2 : Sabit $h_{initial}=1.5 \text{ cm}^2$ için açık-çevrim yapı sisteminin tekil değerleri.....	109
Şekil B.3 : Eşzamanlı H_{∞} optimum kontrolcünün optimum çözümleri için duyarlılık fonksiyonlarının tekil değerleri.....	110
Şekil B.4 : Eşzamanlı H_2 optimum kontrolcünün optimum çözümleri için duyarlılık fonksiyonlarının tekil değerleri.....	111
Şekil B.5 : Amaç fonksiyonu (5.55) ile verilen kontrol edilmiş yapının ve açık-çevrimli yapının ardışık optimizasyonunun tekil değerleri....	112
Şekil B.6 : Amaç fonksiyonu (5.56) ile verilen kontrol edilmiş yapının ve açık-çevrimli yapının ardışık optimizasyonunun tekil değerleri....	113
Şekil B.7 : Amaç fonksiyonu (5.57) ile verilen kontrol edilmiş yapının ve açık- çevrimli yapının ardışık optimizasyonunun tekil değerleri...	114
Şekil B.8 : Kafes-giriş sistemin eşzamanlı optimum tasarımı için toplam kesit alanı değiştiğinde H_{∞} dayanıklı kontrolcü için minimum γ ...	115
Şekil B.9 : (5.55) amaç fonksiyonunun kullanımı ile ardışık optimum	

	tasarım için toplam kesit alanı değiştiğinde H_∞ ve H_2 normu ve (5.55) tekil değerlerinin oranı.....	116
Şekil B.10	: (5.56) amaç fonksiyonunun kullanımı ile ardışık optimum tasarım için toplam kesit alanı değiştiğinde H_∞ ve H_2 normu ve (5.56) tekil değerlerinin oranı.....	117
Şekil B.11	: (5.57) amaç fonksiyonunun kullanımı ile ardışık optimum tasarım için toplam kesit alanı değiştiğinde H_∞ ve H_2 normu ve (5.57) tekil değerlerinin oranı.....	118
Şekil B.12	: (5.51) amaç fonksiyonunun kullanımı ile, kafes sistemin eşzamanlı optimum tasarımı için toplam kesit alanı değiştiğinde J maliyet fonksiyonu, H_2 normu ve tekil değerlerin terslerinin toplamı.....	119
Şekil B.13	: (5.51) amaç fonksiyonunun kullanımı ile, kafes sistemin ardışık optimum tasarımı için toplam kesit alanı değiştiğinde J maliyet fonksiyonu, H_2 normu ve tekil değerlerin terslerinin toplamı.....	120



SEMBOL LİSTESİ

B_1	: Bozucu etki girişi matrisi
B_2	: Kontrol girişi matrisi
B^*	: Broydon-Fletcher-Shanno-Goldfarb güncelleme değeri
C_1	: Hata matrisi
C_2	: Çıkış ölçümü matrisi
C	: Viskoz sönüm matrisi
C_{ijkl}	: Şekil değiştirme tansörü
d	: Bozucu etki
E	: Elastiklik modülü
F	: Dış kuvvet
$F(s)$	: Kontrolcü
$F(X)$	: Amaç fonksiyonu
$G(s)$	: Transfer fonksiyonu
$g_j(X)$	: Kısıt fonksiyonu
H	: Hessian matris
H_2	: H_2 normu
H_∞	: H_∞ normu
h	: Kiriş kesit alanı
$h_k(X)$	: Kısıt fonksiyonu
k_B	: Kiriş (beam) elemanın katılık matrisi
k_T	: Kafes-kiriş (truss) elemanın katılık matrisi
K_g	: Genelleştirilmiş global katılık matrisi
I	: Kirişin merkezine göre kesit alanının atalet momenti
J_{LOG}	: Linear-Quadratik Gaussian optimal kontrol problemi maliyet fonksiyonu
KE	: Kiriş elemanın kinetik enerjisi
l	: Kiriş elemanın boyu
L_i	: Giriş çevrim transfer fonksiyonu
L_0	: Çıkış çevrim transfer fonksiyonu
m_B	: Kiriş (beam) elemanın kütle matrisi
m_T	: Kafes-kiriş (truss) elemanın kütle matrisi
M_g	: Genelleştirilmiş global kütle matrisi
n	: Gürültü girişi
$P(s)$	: Kontrol edilmiş sistem transfer matrisi
SE	: Kirişin şekil değiştirme enerjisi
$s(x)$	: Kiriş üzerindeki çekme gerilmesi
Q	: x durum değişkeni için ceza matrisi
$q_1, \dots, q_6$	: Kiriş üzerindeki yerdeğiştirmeler
R	: u girişi için ceza matrisi
r	: Referans girişi
SE	: Kirişin şekil değiştirme enerjisi
$s(x)$	: Kiriş üzerindeki çekme gerilmesi

S^i	: Rotasyon matrisi
S_i	: Giriş duyarlılık matrisi
S_0	: Çıkış duyarlılık matrisi
S	: Tasarım uzayı vektör arama doğrultusu
$SMSVO$	: Bir periyod için m-sürekli-durum çıkışı y_{ss} ' in karesinin ortalama değerinin toplamı
$SMSVI$	: Bir periyod için girişin karesinin ortalama değerinin toplamı
SOP	: Bir periyod için sürekli durumda gücün toplamı
T_i	: Giriş tamamlayıcı duyarlılık matrisi
T_0	: Çıkış tamamlayıcı duyarlılık matrisi
T_{y1u1}	: Kapalı-çevrim transfer fonksiyonu
T	: Kinetik enerji
U	: Şekil değiştirme enerjisi
u_p	: Sistemin girişi
u_i	: i. sol tekil vektör
v_i	: i. sağ tekil vektör
X	: Tasarım değişkenleri
X_0	: Tasarım değişkenleri başlangıç değerleri
x	: Durum değişkeni
W_s	: Durum ağırlık matrisi
$w(x)$	: Kirişin yanal yer değiştirmesi
w_i	: Ağırlaştırma çarpanları
y	: Sistemin çıkışı
y_d	: Bozucu etki girişi d' den kaynaklanan çıkış
y_r	: Referans girişi r' den kaynaklanan çıkış
y_n	: Gürültü girişi n' den kaynaklanan çıkış
y_{ss}	: Sürekli-durum çıkışı
α^*	: S doğrultusunda adım
β^i	: Boolean transformasyon matrisi
γ	: H_∞ normu için parametre
ε_{kl}	: Şekil değiştirme tansörü
ε	: Ortalama şekil değiştirme
Δ	: Belirsizlik
Δl	: Uzama miktarı
δ_{ij}	: Kronecker delta fonksiyonu
ν	: Poisson oranı
Ω	: Parametre uzayında uygun bölge
ω	: Frekans
σ_i	: i. tekil değer
$\bar{\sigma}(A)$	: A matrisinin en büyük tekil değeri
$\underline{\sigma}(A)$	: A matrisinin en küçük tekil değeri
ρ	: Kiriş elemanın yoğunluğu
Λ	: Amaç fonksiyonu uzayı
τ	: Ortalama gerilme
τ_{ij}	: Gerilme tansörü
$(\tau_{ij})_{\max}$	: Maksimum gerilme
$\tau_{emniyet}$	: Emniyet gerilmesi

YAPILARIN VE KONTROL SİSTEMLERİNİN BİRLEŞİK OPTİMUM TASARIMI

ÖZET

Bu çalışmada, yapıların ve kontrol sistemlerinin birleşik optimum tasarımı dayanıklı kontrol formülasyonları kullanılarak yapılmıştır. Yapı sonlu elemanlar metodu kullanılarak modellenmiş ve kontrolcü H_2 , H_∞ ve LQR formülasyonları kullanılarak tasarlanmıştır. Yapı ve kontrolcü eşzamanlı ve ardışık olarak optimize edilmiştir. H_2 , H_∞ ve LQR formülasyonları kullanılarak yapının ve kontrolcünün eş zamanlı olarak yapısal tekil değerlerin şekillendirilmesi ile optimize edilebileceği gösterilmiştir. Eş zamanlı optimizasyonun bir ayrık optimizasyon problemine dönüştürülebileceği gösterilmiştir. Sadece dayanıklı kontrol kurallarının sakıncalarından kaçınırken, yapının ve kontrolcünün ardışık optimizasyonunun genellikle eğer bilinen yapının serbestlik derecesi büyük ise belirli üstünlüklere sahip olduğu; yapısal tekil değer şekillendirmesi ile dayanıklı kontrol edilmiş yapıların tasarımını mümkün kıldığı gösterilmiştir. Ayrıca, son zamanlarda ileri sürülen pasif temelli kontrolcü, veya enerji şekillendirme yaklaşımı diye adlandırılan yaklaşımın, bir tekil değer şekillendirmesi problemine de eşdeğer olduğu gösterilmiştir. Daha sonra, H_2 , H_∞ ve dayanıklı kontrol formülasyonları ile LQR bir kafes yapının ve kontrolcüsünün optimum tasarımına eş zamanlı ve ardışık olarak uygulanmıştır. Sonuçlar birbiriyle karşılaştırılmıştır. Birleşik yapı ve kontrolcü tasarım problemi için ardışık optimizasyon yaklaşımının global minimumu eş zamanlı optimizasyon yaklaşımından daha hızlı bulduğu sonucuna varılmıştır.

INTEGRATED OPTIMUM DESIGN OF STRUCTURES AND CONTROL SYSTEMS

SUMMARY

In this study, integrated optimum design of structures and control systems is studied by using robust control formulations. The structures are modeled by the use of finite element methods, and the controllers are designed by the use of H_2 , H_∞ and LQR formulations. The structures and controllers are optimized simultaneously and successively. It is shown that simultaneous optimization of structures and controllers by using H_2 and H_∞ robust control formulations and LQR can be achieved approximately by a decoupled optimization problem in which structures are optimized by shaping the structural singular values, and succeeding any control law of interest can be designed. It is shown that while avoiding the drawbacks of pure robust control laws, successive optimization of structures and controllers has certain advantages, especially if the degree of freedom (DOF) of the associated structure is large; it enables one to design robust controlled structures by shaping the structural singular values. Furthermore, it is shown that recently proposed passivity based controller, or so-called energy shaping approach, is equivalent to a singular value shaping problem as well. H_2 , H_∞ robust control formulations and LQR are applied to simultaneous and decoupled optimum design of a truss structure and its controller. The results are compared with each other; thereof, it is concluded that successive optimization approach to robust integrated structure and controller design problem yields the global minimum much faster than the simultaneous optimization approach.

1. GİRİŞ

Son yirmi yılda, yapısal optimizasyon konusundaki çalışmalar bilgisayar-destekli-tasarım araçlarının gelişimi ile hızlanmıştır. Bu çalışmaların önemli bir kısmı robot kolları, uçak ve uydu yapıları, titreşim kontrol problemleri, antenler ve akıllı (smart) yapılar gibi kontrol edilmiş yapıların optimizasyonudur. Bu çalışmalarda amaç, bir yapının davranışının aktif kontrol kullanımı ile iyileştirilebileceği; kontrol edilmiş yapıların kontrol edilmemiş duruma göre daha az malzeme kullanılarak istenen cevaba ulaşabileceğidir [26].

Bu gerçeklerle hareket ederek, birleşik yapı ve kontrol tasarım probleminin dayanıklılık karakteristikleri üzerinde çalışılmıştır. Yapı yapısal tekil değerlerinin şekillendirilmesiyle optimize edildiğinde, dayanıklı ve LQR kontrol formülasyonlarının bir yapı ve kontrolcüsü için bir ayrık optimizasyon problemine dönüşebileceği ve daha sonra kontrolcünün herhangi bir istenen yolla tasarlanabileceği gösterilmiştir. Bu yaklaşım sade H_2 ve H_∞ dayanıklı kontrol kuralı ile LQR formülasyonlarının sakıncalarının ortadan kaldırılması, izafi olarak daha az CPU zamanında daha iyi optimize edilmiş yapıların elde edilmesi, yapı ve kontrolcüsünün ayrık tasarımına izin vermesi, kontrolcünün tasarımı için model derecesi düşürme tekniklerinin uygulanması sonucu oluşan modelleme hatalarının ortadan kaldırılması ve çok serbestlik derecesine sahip yapılar için uygun olması gibi üstünlüklere sahiptir. Böylece, kontrol edilmiş bir yapının dayanıklılık karakteristikleri ile H_2 optimal kontrol kuralının maliyeti ve enerji şekillendirme yaklaşımı arasındaki bağlantılar bilinen yapının tekil değerlerinin kullanımı ile türetilmiştir. Çalışmanın amacı, yapısal tekil değer şekillendirmesi temeline dayalı kontrol edilmiş yapının optimum tasarımı için yeni bir yaklaşım geliştirmektir, fakat bir yapıyı kontrol etmek için tasarlanmış farklı kontrolcülerin davranışını değerlendirmek değildir. Son olarak, sistemi tahrik eden elemanların (actuator) dinamiği ihmal edilmiştir ve farklı kontrolcüler için kontrol sinyalinin genliği bir kriter olarak gözönüne alınmamıştır. Buna ilaveten, “full kontrol” ve “full

information” kontrol durumu, tüm kontrolcü tasarım çalışmalarında basitlik için gözönüne alınmıştır.

Yapıların ve kontrol sistemlerinin birleşik optimum tasarımı için Bölüm 5’ de bir özet bilgi verilmiştir. Bölüm 6’ da “linear quadratic regülatör (LQR)” formülasyonu anlatılmıştır. Bölüm 5’ de üzerinde çalışılan H_2 ve H_∞ formülasyonlarına benzer olarak, eğer uygulamada yapılar için serbestlik derecesi çok büyük ise, CPU zamanını arttıran ve modelleme hataları içeren model derecesi düşürme tekniklerinin birleşik optimum tasarım yaklaşımlarında bir kontrol kuralını tasarlayabilmek için optimizasyon esnasında her LQR tasarım adımında kullanılmaları gerekecektir. LQR formülasyonlarının yapının yapısal tekil değerlerinin şekillendirilmesi ile optimize edildiği, ve sonra kontrolcünün istenen herhangi bir yolla tasarlanabileceği bir yapı ve kontrolcüsü için bir ayrık optimizasyon problemine dönüşebileceği gösterilmiştir; bu yaklaşım optimize edilmiş yapıları daha hızlı elde etme, yapının ve kontrolcüsünün ayrık tasarımına müsaade etme, kontrolcülerini tasarlamak için model derecesi düşürme tekniklerinin kullanımı ile oluşan modelleme hatalarını ortadan kaldırma, ve çok serbestlik derecesine sahip yapılar için uygun olma gibi üstünlüklere sahiptir. LQR formülasyonu ve yapının toplam şekil değiştirme ve kinetik enerjisi arasındaki bağıntı, yapısal tekil değer şekillendirme problemi ile bağlantılı olarak elde edilmiştir.

Çalışmanın içeriği aşağıdaki gibidir: Sonlu elemanlar metodlarının bazı özellikleri Bölüm 2’ de gözden geçirilmiştir. Dayanıklı kontrol ve LQR kontrol formülasyonları Bölüm 3’ de özetlenmiştir. Yapısal ve kontrol optimizasyonunda kullanılan sayısal optimizasyon metodları Bölüm 4’ de verilmektedir. Kontrol edilmiş yapının optimum tasarımı için tekil değer şekillendirmesi ve H_2 ve H_∞ kontrol formülasyonları arasındaki ilişkiler Bölüm 5’ de sunulmuştur. Bölüm 6’ da, LQR formülasyonları, pasif temelli kontrolcü ve yapısal tekil değer şekillendirmesi ile aralarındaki bağlantılar çıkarılmıştır. Sonuçlar Bölüm 7’ de özetlenmiştir.

1.1. Amaç

Yapı optimizasyonu, mühendislikte çok önemli konulardan biridir ve bilgisayar destekli tasarımda (CAD) önemli bir konu olmuştur. Karmaşık başlangıç tasarımı,

yapılar için ön işlem ve çok fazla tasarım zamanı gerektirir. Buna ilaveten, yapının farklı şekil/topology için uygun geometrik modellenmesi her adımda zorunludur.

Yapısal optimizasyonda amaç, yapının performansını aktif kontrol kullanımı ile iyileştirmek, kontrol edilen yapı tasarımının kontrol edilmeyen tasarımdan daha az malzeme kullanılarak istenen cevaba ulaşacağını göstermektir. Bu çalışmanın amacı, hem yapı tasarımında, hem de kontrolcü tasarımında optimizasyonu birleşik olarak gerçekleştirmek suretiyle, en az malzeme ve istenen dayanımda yapı elde ederken, en uygun kontrolcü tasarımını aynı anda yaparak maliyetleri ve tasarım zamanını en aza indirmektir.

Yapısal tasarımın optimizasyonunda yapısal parametrelerin (E , ρ , ν , kalınlık, kesit alanı v.s.); kontrolcü tasarımında ise, kontrolcünün kendisinin optimizasyonu yapılmaktadır. Bu çalışmada, bu iki optimizasyon işlemi dayanıklı ve LQR sistemlerinin tasarımında kullanılan araçlar kullanılarak birleşik olarak yapılmıştır. Optimizasyon sayesinde hafif yapı elde edilerek hem malzemeden tasarruf sağlanmakta hem de daha az enerji ile sistem kontrol edilebilmektedir. Yapı optimizasyonu, genellikle bazı belirlenmiş mukavemet gereksinimlerini elde etmek için yapının maliyetinin en aza indirilmesi veya malzemeyi uygun olarak dağıtarak yapının katılığını büyütmek formülü esasına göre yapılır. Bunun aksine, kontrolcü tasarımı, yapı mühendisleri tarafından önerilen yapıya göre kontrol mühendisleri tarafından gerçekleştirilir.

Mühendislikte pekçok uygulamalara sahip olan yapı titreşim kontrolü dinamik sistemlerin tasarımında önemli bir konudur. Klasik, modern ve optimal kontrol teorileri, yapıların titreşimini azaltmak için önerilmektedir. Bununla beraber, son zamanlarda cevap iyileştirmesi kadar maliyet iyileştirmesinin de yapının ve kontrolün eş zamanlı olarak tasarlanması ile gerçekleştirilebileceğine ait çalışmalar vardır [29].

Milman [29] birleşik yapı kontrolünün geleneksel ardışık optimizasyon ile karşılaştırıldığında, en iyi değerlendirme olduğunu belirtmiştir. Ardışık optimizasyonda, yapı tasarım değişkenleri bazı davranışsal zorlamalara ($h(\alpha) \geq 0$) göre yapının amacını minimuma indirmek için seçilir. Bu problem için formülasyon,

$$\text{Min}_{\alpha} J_s(\alpha) \quad h(\alpha) \geq 0 \quad (1.1)$$

şeklinde. Tamamen belirlenmiş optimal yapı tasarım değişkeni α ' yı içeren kontrol optimizasyonu α sabiti ile gerçekleştirilir. Yapı tasarımının bitiminden sonra, kontrol problemi;

$$\text{Min}_c J_c(\alpha, c) \quad (1.2)$$

şeklini alır. Burada J_c , kontrol kriterini temsil eder ve c , kontrol tasarım değişkenidir. Diğer yandan, birleşik optimizasyon formülü;

$$\text{Min}_{\alpha, c} \beta J_s(\alpha, c) + \gamma J_c(\alpha, c) \quad (1.3)$$

şeklinde formüle edilir.

Bu çalışmada, dayanıklı ve doğrusal optimal sistem tasarımında kullanılan araçlarla bu optimizasyon işlemi yapılmıştır. Kontrol sistemi kullanımının esas amacı belirsizliklerin etkilerini azaltmak ve sistem performansını iyileştirmektir. Bazı belirsizlikler hem sistemin çevresinde, hem de sistemin kendi davranışında her zaman mevcuttur; önceden sistemin hangi bozucu ve gürültü sinyali ile maruz kalacağı tam olarak bilinmez. Modellerin kusursuz olmadığı ve sistemin davranışının tahmin edilemeyen bir şekilde değişebileceği bilinir. Bunun dışında geri besleme sistemi kullanımının amacı, kararsız bir sistemi kararlı yapmaktır. Bir kontrol sisteminin bir referans girişi takip edebilme kabiliyeti genellikle onun performansının önemli bir parçası olarak gözönüne alınır.

1.2. Literatür Özeti

Bir bozucu etki fonksiyonunun H_2 performans indeksi ve H_∞ normu, yapının titreşimlerini azaltmak için dayanıklı kontrol kuralını ve bir minimum ağırlıklı yapıyı tasarlamak için eş zamanlı olarak [17]' de minimize edilmiştir. Benzer bir çalışma, karışık H_2 ve H_∞ kompensator ve bir minimum ağırlıklı yapı problemi için eş zamanlı çözümü için [18]' de sunulmuştur. Yine bir minimum ağırlıklı yapı tasarlamak için [19]'da bir optimizasyon çalışması yapılmış ve yapılandırılmış belirsizlikler altında kararlılığı devam ettirmek için kısıtlar sönümlleme parametreleri, ve kontrol sisteminin dayanıklılık sınırı üzerine uygulanmıştır. LQR ve bilinen

parametrik yapısal optimizasyon problemi çözülmüş ve dinamik cevabı iyileştirmek için dayanıklılık ölçümüne ilave olarak kısıtların sönümlenme parametreleri üzerine uygulanması zorunluluğu gösterilmiştir [19]. H_∞ kontrol problemi için çözüm tekil olmadığı için, çözüm optimal olmayacaktır [21]. Bu sonuç için, kontrolcü tasarım problemi için, karışık (mixed) H_2/H_∞ kontrolcü formülasyonları entropi minimizasyonu ve süper-optimal problemlerin çözümü gibi çeşitli teknikler bu sakıncaları yenmek için önerilmiştir [21]. Öz değer temelli analizler bir yapının titreşim modları ve rezonans frekansları hakkında bilgi verirken, yapının tekil değerlerinin zorlanmış cevap karakteristikleri ile ilgili olduğu ve frekans uzayında dinamik davranışı verdiği [24]' de belirtilmiştir. Literatürde boyut ve parametrik optimizasyon birçok çalışmanın konusu iken, birleşik kontrolcü ve yapısal şekil optimizasyon problemi [30]' de çözülmüştür. Bir yapı ve bir H_∞ kontrolcü yapısal kütlelerin kısıt altında eşzamanlı olarak tasarımı [33] çalışmasında incelenmiştir. Referans [36]'de, bir yapı ve kontrolcünün eşzamanlı optimizasyonu [21]'de vurgulandığı gibi tekil H_2 ve H_∞ normlarının sakıncalarını önleyen çıkış transfer matrisi için bozucu etkinin H_2 ve H_∞ normlarının karışımının kullanımı ile [13]'da vurgulandığı gibi gerçekleştirilmiştir. Model derecesi düşürülmüş sistem için karışık (mixed) H_2/H_∞ kontrolcü tasarımı [4]' de tanımlanmıştır. Kontrolcü tasarımı için küçük-kazancı garanti edilmiş maliyet sınırının uygulanabilirliği [16]' da incelenmiştir.

Pasif temelli kontrolün hareketin fiziksel sistemler için dayanıklı kontrolcülerini tasarlamak için güçlü bir teknik olduğu [26], [27] ve [28]' de belirtilmiştir. Pasif temelli kontrolde ana amaç kararlılığın enerji dengesi yolu ile sağlanmasıdır [27].

Yukarıda özetlendiği gibi, H_2 ve H_∞ dayanıklı kontrol formülasyonları çok sayıda birleşik yapı ve kontrol tasarım problemlerinde kullanılmıştır. Bununla beraber, bu formülasyonlar şu sakıncalara sahiptirler: Uygulamada yapılar için serbestlik derecesi çok büyük olduğundan dolayı, model derecesi düşürme teknikleri (örneğin, bkz. [33] ve [36]) birleşik optimizasyon yaklaşımlarında bir kontrol kuralı tasarımını yapabilmek için optimizasyon esnasında her kontrolcü tasarım adımında kullanılmalıdır. Bu zorunluluk CPU zamanını artırır ve modelleme hataları içerir, (bkz. [10] ve [11]). Ayrıca yapının sadece ağırlığının amaç fonksiyonu olarak

alınması yapının hafif yapı prensibine göre tasarlanması için gerekli olmakla beraber, yapının dış kuvetlere karşı mukavemetli olması için yeterli değildir. Bu amaçla bu çalışmada yapısal optimizasyonda gerilme kısıtı esas alınmıştır. Bundan başka, son zamanlarda ileri sürülen pasif temelli kontrolcü, veya enerji şekillendirme yaklaşımı diye adlandırılan yaklaşımın (bkz. [26], [27] ve [28]) de çalışılan bir yapısal tekil değer şekillendirmesi problemine de eşdeğer olduğu gösterilmiştir.



2. SONLU ELEMENLAR METODU (SEM)

Sonlu elemanlar metodu mühendislik problemlerinin geniş bir kısmında sayısal çözümleri elde etmek için güçlü bir araç olmuştur. Uygulama alanları otomotiv, uzay araçları, bina ve köprü yapılarından ısı akışı, akışkanlar mekaniği, magnetik alanlar ve akustik problemlerine kadar geniş bir alanı kapsar. Bilgisayar teknolojisindeki ve bilgisayar destekli tasarım sistemlerindeki üstünlükler ile karmaşık problemler daha kolay modellenebilir. Çeşitli alternatif konfigürasyonlar ilk prototip yapılmadan önce bilgisayarda test edilebilir. SEM ile analizde, sürekli olarak tanımlanan bir bölge sonlu elemanlar olarak isimlendirilen basit geometrik şekillere bölünürler. Malzeme özellikleri (malzeme yoğunluğu, elastisite modülü, Poisson oranı v.s.) ve gerekli bağıntılar bu elemanlar üzerinde göz önüne alınır ve eleman uç noktalarında bilinmeyen değerlere göre açıklanırlar. Elemanların montaj (assembly) işlemi, uygun şekilde yüklemenin göz önüne alınması ve kısıtlar, bir grup eşitlikle sonuçlanır. Bu eşitliklerin çözümü sürekli cismin davranışını verir [3].

2.1 Sonlu Eleman Yapı Denklemleri

Sonlu elemanlar metodu ile yapısal analiz yaklaşımı, model olarak kiriş (beam) ve kafes (truss) elemanlar kullanılarak bu bölümde tanıtılmıştır.

2.1.1 Eleman analizi

SEM ile yapısal analiz, yapıdaki her bir elemanın davranışının bilinmesini gerektirir. İlk önce bir eleman tanımlanır, bütün yapı için alan denklemleri türetilebilir. SEM denklemlerini elde etmek için 3 yaklaşım vardır:

- a) Doğrudan metod
- b) Enerji metodu
- c) Galerkin metodu

Aşağıda enerji metodu [13] ile kiriş ve kafes sistemler için SEM denklemleri çıkarılmıştır. Bir yapının SEM analizi için enerji teoremlerini uygulamak için şekil değiştirme enerjisi, kinetik enerji ve dış kuvvetlerden dolayı yapılan iş tanımlanmak zorundadır. Temel amaç, eleman şekil değiştirme fonksiyonlarını seçmektir, yani yapısal deformasyon formu önceden tahmin edilir ve elemanın düğüm noktalarındaki yer değiştirmeler bilindiği zaman deformasyonlar hesaplanabilir [13].

2.1.2. Kiriş eleman katılık matrisi

Şekil 2.1' de tipik bir düzlemsel kiriş-eleman, yer değiştirmelerinin yönleriyle beraber toplu olarak gösterilmiştir. Bu yer değiştirme koordinatları q_1, q_2, q_4 ve q_5 uç noktası yer değişiminin bileşenleridir, ve q_3 ve q_6 uç noktası dönmeleridir [13].

Kiriş üzerinde bir x noktasının boylamasına yer değiştirmesi ($0 \leq x \leq l$)

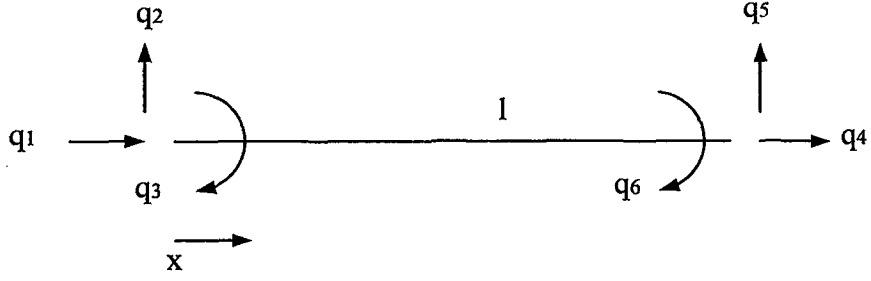
$$s(x) = -q_1 \frac{(x-l)}{l} + q_4 \frac{x}{l} \quad (2.1)$$

denklemleri ile bulunabilir. Bu denklem eleman içinde doğrusal yer değiştirme kabulüne dayanmaktadır. Bu denklem, sabit kesitli ve eksenel yayılı yükü olmayan bir kiriş eleman için doğrudur. Boylamasına yer değiştirme $s(x)$ 'in sadece kirişteki boylamasına gerilme nedeniyle olduğu, yanal yer değiştirme $w(x)$ 'in boylamasına deformasyona sebep olmadığı kabul edildiği belirtilmelidir [13].

Kirişin bir x noktasındaki yanal yer değiştirme $w(x)$ ile gösterilirse

$$w(x) = \frac{q_2}{l^3} (2x^3 - 3lx^2 + l^3) - \frac{q_5}{l^3} (2x^3 - 3lx^2) + \frac{q_3}{l^2} (x^3 - 2lx^2 + l^2x) + \frac{q_6}{l^2} (x^3 - lx^2) \quad (2.2)$$

Bu denklem sabit kesitli ve üzerinde yanal yayılı yük olmayan kiriş eleman için doğrudur.



Şekil 2.1 Düzlemsel kiriş eleman.

Kirişin deformasyonu nedeniyle oluşan şekil değiştirme enerjisi SE ' dir.

$$SE = \frac{1}{2} \int_0^l hE \left(\frac{ds}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l hE \left(\frac{q_1}{l} - \frac{q_4}{l} \right)^2 dx +$$

$$\frac{1}{2} \int_0^l EI \left[\frac{q_2}{l^3} (12x - 6l) - \frac{q_5}{l^3} (12x - 6l) + \frac{q_3}{l^2} (6x - 4l) + \frac{q_6}{l^2} (6x - 2l) \right]^2 dx \quad (2.3)$$

Burada h kirişin kesit alanı, I kirişin merkezine göre kesit alanının atalet momenti, E malzemenin elastisite modülüdür.

Eşitlik (2.3)'ün integrali gerçekleştirilerek sonuç düzenlenirse

$$SE = \frac{1}{2} q^T k_B q \quad (2.4)$$

elde edilir.

Burada k_B kiriş (beam) eleman katılık matrisidir.

$$k_B = \frac{E}{l^3} \begin{bmatrix} hl^2 & 0 & 0 & hl^2 & 0 & 0 \\ & 12I & 6I & 0 & -12I & 6I \\ & & 4l^2 I & 0 & -6I & 2l^2 I \\ & & & hl^2 & 0 & 0 \\ & & & & 12I & -6I \\ & & & & & 4l^2 I \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

simetrik

2.1.2. Kafes eleman katılık matrisi

Eğer eğilme etkisi ihmal edilirse, şekil değiştirme enerjisi ifadesinde Şekil 2.1’de gösterilen deformasyonlardan sadece q_1 ve q_4 koordinatları için bir kafes eleman elde edilir. Bu durumda şekil değiştirme enerjisi Eşitlik 2.4’ de verildiği gibidir ve kafes eleman katılık matrisi k_T dir [13].

$$k_T = \frac{Eh}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ \text{simetrik} & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Sadece q_1 ve q_4 kafes eleman şekil değiştirme enerjisinde etkiye sahiptir. q_2 ve q_5 değişkenleri analizde gözönünde tutulurken, kafes eleman eğilmediği için, $q_3 = q_6 = (q_5 - q_2)/l$ dir ve bu dönme değişkenleri denklemlerde yerlerine konabilir [13].

2.1.3. Kiriş ve kafes eleman katılık matrislerinin özellikleri

Eşitlik (2.5)’ deki kiriş (beam) eleman katılık matrisi kiriş elemanın l boyuna, h kesit alanına ve I kesit alanının atalet momentine bağlıdır.

Eğer kiriş elemanın kesit boyutları tasarım değişkenleri olarak gözönüne alınırsa, yapı-eleman boyutları tasarım değişkenleri olarak gözönüne alındığında, eleman katılık matrisi tasarım değişkenlerine bağlı olur.

Hesaplar Eşitlik (2.5)’ in eleman katılık matrisinin pozitif yarı belirli (semidefinite) ve rankının 3 olduğunu gösterecektir. Matrisin rankı Şekil 2.1’ de gösterilen elemanın üç rijit cisim serbestlik derecesi olduğunu gösterir. Yani, deformasyonsuz ve böylece şekil değiştirme enerjisiz kabul ederek elemanı düzlemde üç kinematik serbestlik derecesi ile hareket ettirmek mümkündür [13].

Diğer taraftan, eğer Şekil 2.1' de gösterilen kiriş elemanın sol ucu sabitlenirse ($q_1 = q_2 = q_3 = 0$), bu halde Eşitlik (2.4) ile hesaplanan şekil değiştirme enerjisi q_4, q_5 ve q_6 değişkenleri cinsinden pozitif belirli (definite) olacaktır [13].

2.1.4. Kiriş ve kafes eleman kütle matrisleri

Kirişin kesitinin dönme momentini ihmal ederek, kiriş elemanın kinetik enerjisi KE şu şekildedir:

$$KE = \frac{1}{2} \int_0^l \rho h \left[\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^l \rho h \left[-\dot{q}_1 \left(\frac{x-l}{l} \right) + \dot{q}_4 \frac{x}{l} \right]^2 + \frac{1}{2} \int_0^l \rho h \left[\left[\frac{\dot{q}_2}{l^3} (2x^3 - 3lx^2 + l^3) + \frac{\dot{q}_5}{l^3} (2x^3 - 3lx^2) + \frac{\dot{q}_3}{l^2} (x^3 - 2lx^2 + lx) + \frac{\dot{q}_6}{l^2} (x^3 - lx^2) \right]^2 \right] dx \quad (2.7)$$

Burada ρ kiriş malzemesinin yoğunluğudur. İntegral işlemi gerçekleştirilerek KE bulunursa

$$KE = \frac{1}{2} \dot{q}^T m_B \dot{q} \quad (2.8)$$

Burada m_B kiriş eleman kütle matrisidir.

$$m_B = \frac{\rho h l}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ & 156 & 22l & 0 & 54 & -13l \\ & & 4l^2 & 0 & 13l & -3l^2 \\ & & & 140 & 0 & 0 \\ & & & & 156 & -22l \\ & & & & & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

simetrik

Eğer her $\dot{q}_i \neq 0$ ise kiriş elemanın kinetik enerjisi pozitif olduğundan, m_B 'nin pozitif belirli olduğu ve böylece tekil olmadığı bulunur.

Bir kafes elemanı elde etmek için eğilme ihmal edilir ve $w(x) = q_2 + (q_5 - q_2)x/l$ olur.

Eşitlik (2.7)' nin integrali Eşitlik (2.8)' deki gibi bir quadratik formu verir fakat kafes eleman kütle matrisi m_T aşağıdaki gibidir.

$$m_T = \frac{\rho h l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2 & 0 & 0 \\ & & & & 2 & 0 \\ \text{simetrik} & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Kinetik enerji açıklamasında $\dot{q}_3$ ve $\dot{q}_6$ kaldırılır ve kafes sistemlerin analizinde ihtiyaç duyulmaz.

Bununla beraber $\dot{q}_2$ ve $\dot{q}_5$ hızları önemli bir rol oynar. m_T ' nin üçüncü ve altıncı kolonları sıfır olduğundan dolayı matris tekildir. Gerçekten m_T 'nin rankı 4 dür. Hatta şekil değiştirme enerjisi h alanı ve l uzunluğu tasarım değişkenlerine bağlıdır [13].

2.1.5. Global katılık ve kütle matrisleri

Bir yapının toplam şekil değiştirme ve kinetik enerjileri yapıyı oluşturan tüm elemanların şekil değiştirme ve kinetik enerjilerinin toplanmasıyla elde edilebilir.

Sistemin toplam şekil değiştirme ve kinetik enerjileri için anlamlı bir ifade yazılabilmemesinden önce yapıdaki bütün düğüm noktalarındaki sistemin global yer değişimlerinin bir global koordinat sistemine göre ilk önce tanımlanması gereklidir. $z_g \in R^n$ bu global yerdeğiştirme vektörünü gösterir [13].

2.1.6. Yerel koordinatlardan global koordinatlara dönüşüm

Yapının tek elemanları Şekil 2.1' de olduğu gibi kendilerinin bir gövdeye bağlı koordinat sistemine göre yer değiştirme koordinatlarına sahip olduklarından dolayı, yer değiştirmeler ilk önce elemanların gövdeye bağlı koordinat sisteminden global koordinatlara paralel bir koordinat sistemine dönüştürülmelidirler [13].

q^i 'nin i . elemanın kendi gövdesine bağlı koordinat sisteminde düğüm yer değiştirme koordinatlarının vektörünü gösterdiğini kabul edelim. Bir rotasyon matrisi S^i global koordinatlara göre bu yerel yer değiştirme koordinatlarını belirlemek için tanımlanabilir:

$$q^i = S^i \hat{q}^i \quad (2.11)$$

Dönüştürülmüş eleman yer değiştirmeleri bu durumda global yer değiştirme vektörü z_g 'nin bileşenleri ile çıkarılır. Bu yüzden, bir β^i Boolean transformasyon matrisi sadece sıfırlar ve birlerden oluşarak tanımlanabilir, bu aşağıdaki bağıntıyı verir.

$$\hat{q}^i = \beta^i z_g \quad (2.12)$$

Eğer $\hat{q}^i$ bir r -vektör ve z_g bir n vektör ise ($n > r$), bu durumda β^i sadece r ' in birlerinden ve geri kalanlarının sıfırlarından oluşan bir rxn matristir.

2.1.7. Genelleştirilmiş global katılık matrisi

i . elemanın katılık matrisi k^i olarak gösterilerek, i . elemanın şekil değiştirme enerjisi:

$$SE^i = \frac{1}{2} q^{iT} k^i q^i \quad (2.13)$$

olarak yazılabilir.

Eşitlik (2.11) ve (2.12) ' yi yerine koyarak SE^i elde edilirse

$$SE^i = \frac{1}{2} \hat{q}^{iT} S^{iT} k^i S^i \hat{q}^i = \frac{1}{2} z_g^T \beta^{iT} S^{iT} k^i S^i \beta^i z_g \quad (2.14)$$

Tüm yapının şekil değiştirme enerjisi yapıdaki tüm elemanların şekil değiştirme enerjilerinin toplanmasıyla elde edilir.

$$SE = \frac{1}{2} z_g^T \left[\sum_{i=0}^{NE} \beta^{iT} S^{iT} k^i S^i \beta^i \right] z_g \equiv \frac{1}{2} z_g^T K_g z_g \quad (2.15)$$

Burada, K_g genelleştirilmiş global katılık matrisidir.

$$K_g = \sum_{i=1}^{NE} \beta^{iT} S^{iT} k^i S^i \beta^i \quad (2.16)$$

2.1.8. İndirgenmiş global katılık matrisi

Eğer yapıya ait bütün sınır şartları uygulanırsa, hiç rijit cisim serbestlik derecesi ortaya çıkmaz. Bu durumda genelleştirilmiş global katılık matrisi K_g pozitif belirlidir ve kısaca K ile gösterilir ve “indirgenmiş global katılık matrisi” olarak adlandırılır. Bununla beraber, eğer genelleştirilmiş global katılık matrisi sınır şartları gözönüne alınmadan kullanılırsa, K genellikle pozitif belirli olmayacaktır [13].

2.1.9. Genelleştirilmiş global kütle matrisi

Şekil değiştirme enerjisi ifadesinde olduğu gibi, i . elemanın kinetik enerjisi genelleştirilmiş hızlara göre yazılabilir. S^i ve β^i matrisleri genelleştirilmiş koordinatlara bağlı olmadığından dolayı,

$$\dot{q} = S^i \dot{\hat{q}}^i \quad (2.17)$$

$$\dot{\hat{q}} = \beta^i \dot{z}_g \quad (2.18)$$

Bu bağıntıları kullanarak, i . elemanın kinetik enerjisi

$$KE^i = \frac{1}{2} \dot{q}^{iT} m^i \dot{q}^i = \frac{1}{2} \dot{\hat{q}}^{iT} S^{iT} m^i S^i \dot{\hat{q}}^i = \frac{1}{2} \dot{z}_g^T \beta^{iT} S^{iT} m^i S^i \beta^i \dot{z}_g \quad (2.19)$$

şeklinde yazılabilir.

Tüm elemanların kinetik enerjisini toplayarak, sistem için toplam kinetik enerji KE dir.

$$KE = \frac{1}{2} \dot{z}_g^T \left[\sum_{i=1}^{NE} \beta^{iT} S^{iT} m^i S^i \beta^i \right] \dot{z}_g \equiv \frac{1}{2} \dot{z}_g^T M_g \dot{z}_g \quad (2.20)$$

Burada M_g genelleştirilmiş global kütle matrisidir.

$$M_g = \sum_{i=1}^{NE} \beta^{iT} S^{iT} m^i S^i \beta^i \quad (2.21)$$

Yapının tüm elemanlarının kütleye sahip olduklarını düşünerek, bir sonlu miktarda kinetik enerjiyi araştırmadan sıfırdan farklı bir hızı elde etmek imkansızdır. Bu yüzden, bir global sistem kütle matrisi her zaman pozitif belirli (definite) olacaktır [13].

2.1.10. İndirgenmiş global kütle matrisi

Eğer sınır şartları global yer değiştirme vektörü belirlenmeden önce gözönüne alınırsa, indirgenmiş global kütle matrisi M ile gösterilecektir.

Parça boyutu ile ilgili tasarım değişkenleri ve geometrik tasarım değişkenleri S^i rotasyon matrislerinde ortaya çıktığı durumlarda, global katılık ve kütle matrisleri eleman katılık ve kütle matrislerinde ortaya çıkan tasarım değişkenlerine bağlıdır. Global katılık ve kütle matrislerinin geometrik değişkenlere bağlılığı, parça boyutu ile ilgili tasarım değişkenlerine bağlılığından çok daha karmaşıktır [13].

2.3. Yapının Dinamik Cevabı

Bir yapının sınır şartları veya karşılıklı etkileşim şartları olmaksızın, yani bağımsız genelleştirilmiş koordinatlar ile dinamik cevabını durumunu gözönüne alalım. Bu durumda Lagrange eşitlikleri kullanılarak $F=F_g$, $M=M_g$ ve $K=K_g$ ile gösterildiğinde titreşim hareketi matris formunda yazılabilir.

$$M\ddot{z} + Kz - F = 0 \quad (2.22)$$

2.3.1. Serbest titreşim

Bir yapının serbest titreşimi yük uygulanmadan yapının harmonik hareketi olarak tanımlanır ($F=0$). Bu durumda titreşim hareketinin denklemi aşağıdaki gibi olur.

$$M\ddot{z} + Kz = 0 \quad (2.23)$$

2.3.2. Zorlanmış titreşim

Herhangi bir dış kuvvetin sistemi titreştirmek üzere etki etmesi halinde oluşan titreşimlere zorlanmış titreşimler denir ($F = F_0 \sin(\omega t + \phi)$). Bu durumda titreşim hareketinin denklemi aşağıdaki gibi olur.

$$M\ddot{z} + Kz = F_0 \sin(\omega t + \phi) \quad (2.24)$$

3. DAYANIKLI KONTROL

Son yirmi yıl içerisinde dayanıklı olarak belirsizlik-toleranslı çok değişkenli geri besleme kontrol sistemlerinin tasarımı için teoride büyük ilerlemeler sağlanmıştır. En azından kısmen, kararlılık sınırı, duyarlılık, bozucu etkisinin zayıflatılması v.s. gibi bazı geri besleme sorunları kontrol tasarımcıları (kuramcıları) için kaygı verici olmasına rağmen, 1970'lerin yeniden çözölen kontrol problemlerinin uygulanması ile teori arasında cevapsız olan birçok soru ortaya konmuştur [22].

Bu kaygıların ardından, tekil değeri Bode grafiğı çok değerişkenli geri besleme sisteminin bir karakteristiğı olarak ortaya çıkmıştır. Tekil değeri böylece baskın kutup yerleri (dominant pole locations) geçiş sıfırları (transmission zeros) ve kontrol sinyallerinin RMS hatası olarak öncelikle çok değerişkenli geri besleme sistemlerinin davranışının ölçümünde kullanılır [22].

Dayanıklı çok değerişkenli geri besleme kontrol sistemi tasarımında gerçeri problem, sistem üzerindeki belirsizliğı etkilerine rağmen önceden belirlenmiş toleranslar civarında sistem cevabı ve hata sinyallerini devam ettiren bir kontrol kuralını sentez etmektir. Belirsizlik birçok şekil alır fakat bunların arasındaki en önemli olanları güröltü ve bozucu etki sinyalleri ve transfer fonksiyonu modelleme hatalarıdır. Belirsizliğı diğeri kaynağı modellenmemiş doğrusal olmayan distorsiyondur [22].

Genel dayanıklı kontrol problemi matematiksel olarak aşağıdaki gibi tanımlanır [22].
“Verilen bir çok değerişkenli $P(s)$ sistemi için T_{y1u1} kapalı-çevrim transfer fonksiyonu

$$\frac{1}{K_M(T_{y1u1}(j\omega))} < 1 \quad (3.1)$$

denklemini sağlayacak şekilde bir kararlı $F(s)$ kontrolcüsünü bulmaktır.”

3.1 Dayanıklılık Analizi-Modern Yaklaşım

Standart bir Tekil-Değer Kararlılık Dayanıklılığı Teoremi, Sandberg-Zames'in Küçük Kazanç Teoremine dayanılarak oluşturulmuştur [22].

$M - \Delta$ sistemi her kararlı $\Delta(s)$ için

$$\sigma(\Delta(j\omega)) < \frac{1}{\sigma[M(j\omega)]} \quad (3.2)$$

Her $\omega \in R$ (veya $\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{\|M\|_\infty}$)' u sağlayacak şekilde kararlıdır.

Teoremin uygulamasındaki birkaç önemli pratik husus aşağıdadır:

1- Δ 'daki küçük bir değişim asla $\bar{\sigma}(\Delta)$ 'da büyük bir değişim oluşturmaz veya bunun tersi geçerlidir (örneğin, tekil değerler dayanıklılık analizi için özdeğerlerden daha iyidir).

2- Teorem, dayanıklılık kararlılığı için sadece, yeter koşulu vermesine rağmen, bu koşullar aynı zamanda zayıf duyarlılıkta kararlılık için gereklidir ki $\|\Delta\|_\infty = 1/\|M\|_\infty$ ile bazı Δ 'lar oluşur ve kapalı-çevrim sistem asimptotik olarak kararlı değildir.

3.2 Kararlılık ve Geri Besleme Sistemlerinin Davranışı

3.2.1 Geri besleme özellikleri

Giriş çevrim transfer matrisi L_i ve çıkış çevrim transfer matrisi L_o sırasıyla aşağıdaki gibidir [35].

$$L_i = KP \quad (3.3)$$

$$L_o = PK \quad (3.4)$$

Burada L_i sistemin u girişinde çevrimin iki kısma ayrılmasıyla elde edilir, bu esnada L_o sistemin y çıkışında çevrimin kesilmesiyle elde edilir.

S_i "Giriş duyarlılık matrisi" d_i 'den u_p 'ye transfer matrisi olarak aşağıdaki gibi tanımlanır:

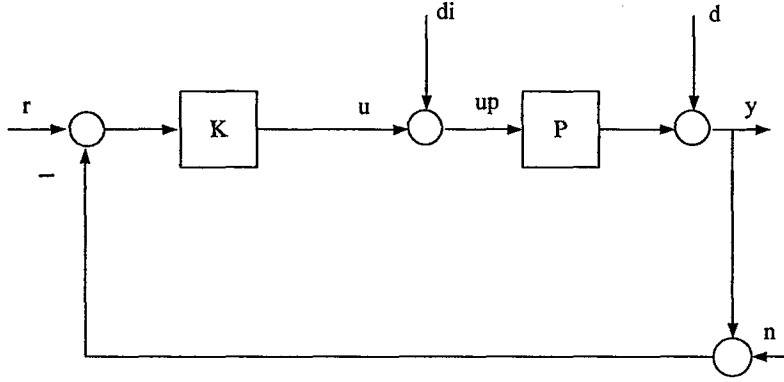
$$S_i = (I + L_i)^{-1} \quad (3.5)$$

$$u_p = S_i d_i \quad (3.6)$$

S_0 “Çıkış duyarlılık matsisi” d 'den y 'ye transfer matrisi olarak şu şekilde tanımlanır:

$$S_0 = (I + L_0)^{-1} \quad (3.7)$$

$$y = S_0 d \quad (3.8)$$



Şekil 3.1 Standart geri besleme konfigürasyonu.

“Giriş ve çıkış tamamlayıcı duyarlılık matrisleri” sırasıyla,

$$T_i = I - S_i = L_i (I + L_i)^{-1} \quad (3.9)$$

$$T_0 = I - S_0 = L_0 (I + L_0)^{-1} \quad (3.10)$$

olarak tanımlanırlar.

$I + L_i$ matrisi “giriş geri dönüş fark matrisi” ve $I + L_0$ matrisi “çıkış geri dönüş fark matrisi” olarak tanımlanır. Kapalı-çevrim sistemin eğer içten kararlı ise aşağıdaki eşitlikleri sağlayacağını görmek kolaydır [35].

$$y = T_0(r - n) + S_0 P d_i + S_0 d \quad (3.11)$$

$$r - y = S_0(r - d) + T_0 n - S_0 P d_i \quad (3.12)$$

$$u = K S_0(r - n) - K S_0 d - T_i d_i \quad (3.13)$$

$$u_p = K S_0(r - n) - K S_0 d + S_i d_i \quad (3.14)$$

Eşitlik (3.11) göstermektedir ki sistemin çıkışındaki d bozucusunun (disturbances) etkisi çıkış duyarlılık fonksiyonu S_0 ’ın küçültülmesiyle azaltılabilir [35].

Benzer şekilde eşitlik (3.14) göstermektedir ki sistemin girişindeki d_i düzensizliğinin etkisi giriş duyarlılık fonksiyonu S_i 'nin küçültülmesiyle azaltılabilir [35].

Sistemin çıkışı y değişkeninde bozucunun iyi bir şekilde bertaraf edilmesi demek

$$\bar{\sigma}(S_0) = \bar{\sigma}(I + PK)^{-1} = \frac{1}{\underline{\sigma}(I + PK)} \quad (3.15)$$

(3.15) ile verilen tekil değerin küçük olmasını ve sistemin girişindeki bozucu için

$$\bar{\sigma}(S_0 P) = \bar{\sigma}((I + PK)^{-1} P) = \bar{\sigma}(P S_i) \quad (3.16)$$

küçük olmasını gerektirecektir.

Sistemin girişi u_p değişkeninde bozucunun iyi bir şekilde bertaraf edilmesi demek

$$\bar{\sigma}(S_i) = \bar{\sigma}((I + KP)^{-1}) = \frac{1}{\underline{\sigma}(I + KP)} \quad (3.17)$$

ve sistemin çıkışındaki bozucu için

$$\bar{\sigma}(S_i K) = \bar{\sigma}(K(I + PK)^{-1}) = \bar{\sigma}(K S_0) \quad (3.18)$$

(3.18)' deki tekil değerin özellikle düşük frekans aralığında küçük olmasını gerektirir.

$$\bar{\sigma}(PK) - 1 \leq \underline{\sigma}(I + PK) \leq \underline{\sigma}(PK) + 1 \quad (3.19)$$

$$\underline{\sigma}(KP) - 1 \leq \underline{\sigma}(I + KP) \leq \underline{\sigma}(KP) + 1 \quad (3.20)$$

Sonuç olarak,

$$\frac{1}{\underline{\sigma}(PK) + 1} \leq \bar{\sigma}(S_0) \leq \frac{1}{\underline{\sigma}(PK) - 1} \quad \text{eğer } \underline{\sigma}(PK) > 1 \text{ ise} \quad (3.21)$$

ve

$$\frac{1}{\underline{\sigma}(KP) + 1} \leq \bar{\sigma}(S_i) \leq \frac{1}{\underline{\sigma}(KP) - 1} \quad \text{eğer } \underline{\sigma}(KP) > 1 \text{ ise} \quad (3.22)$$

Bu eşitlikler aşağıdaki anlama gelir:

$$\bar{\sigma}(S_0) \ll 1 \Leftrightarrow \underline{\sigma}(PK) \gg 1 \quad (3.23)$$

$$\bar{\sigma}(S_i) \ll 1 \Leftrightarrow \underline{\sigma}(KP) \gg 1 \quad (3.24)$$

P ve K nın tersinin alınabildiğini varsayalım. Bu takdirde,

$$\underline{\sigma}(PK) \gg 1 \text{ veya } \underline{\sigma}(KP) \gg 1 \Leftrightarrow \bar{\sigma}(S_0 P) = \bar{\sigma}((I + PK)^{-1} P) \approx \bar{\sigma}(K)^{-1} = \frac{1}{\underline{\sigma}(K)} \quad (3.25)$$

$$\underline{\sigma}(PK) \gg 1 \text{ veya } \underline{\sigma}(KP) \gg 1 \Leftrightarrow \bar{\sigma}(KS_0) = \bar{\sigma}(K(I + PK)^{-1}) \approx \bar{\sigma}(P)^{-1} = \frac{1}{\underline{\sigma}(P)} \quad (3.26)$$

Böylece sistem çıkışı y değişkeninde iyi bir performans, d_i ' nin duyarsızlaşması için d_i ' nin şiddetinin büyük olduğu frekans aralığında yeteri kadar büyük kontrolcü kazancı $\underline{\sigma}(K) \gg 1$ ve d ' nin duyarsızlaşması için d ' nin şiddetinin önemli olduğu frekans aralığında genellikle büyük çevrim çıkış kazancı $\underline{\sigma}(L_0) = \underline{\sigma}(PK) \gg 1$ olmasını gerektirir [35].

Benzer olarak, sistem girişi u_p ' de iyi bir performans, d ' nin duyarsızlaşması için kontrolcü tasarımı tarafından değiştirilemeyen d ' nin şiddetinin büyük olduğu frekans aralığında yeteri kadar büyük sistem kazancı $\underline{\sigma}(P) \gg 1$ ve d_i ' nin duyarsızlaşması için d_i ' nin şiddetinin büyük olduğu frekans aralığında genellikle büyük giriş çevrim kazancı $\underline{\sigma}(L_i) = \underline{\sigma}(KP) \gg 1$ olmasını gerektirir [35]. Böylece iyi bir çok değişkenli geri besleme çevrimi tasarımı, istenen frekans aralığında yüksek çevrim kazançlarını başarmaktan daha fazlası değildir.

Sistem modelinin Δ kararlılığı ile $(I + \Delta)P$ ' ye perturbasyona uğradığını varsayalım ve sistemin normal olarak kararlı olduğunu, yani kapalı-çevrim sistemin $\Delta = 0$ ile kararlı olduğunu varsayalım. Bu durumda, eğer

$$\det(I + (I + \Delta)PK) = \det(I + PK) \det(I + \Delta T_0) \quad (3.27)$$

kompleks sağ yarı düzlemde sifıra sahip değilse, perturbasyona uğramış kapalı-çevrim sistem kararlıdır. Δ ' nın önemli olduğu bu yüksek frekansta, $\|\Delta T_0\|$ küçük veya $\bar{\sigma}(T_0)$ küçük olması gerekir. Yüksek frekans aralığında çevrim kazancı, $\bar{\sigma}(L_0)$ küçük olmalıdır.

3.3 Model Belirsizliği ve Dayanıklılık

3.3.1 Model belirsizliği

Çoğu kontrol tasarımları, bir tasarım modelinin kullanımı temeline dayanır. Modeller ve gerçek arasındaki ilişkide belirsizlikler, anlaşılması zor ilişkileri ve karmaşıklığı açıklarlar. Bir matematik model girişlerden cevaplara doğru bir yol sağlar. Bir modelin kalitesi, modelin cevabının gerçek sistemin cevabına ne kadar yakın olduğuna bağlıdır. İyi bir model, tasarımı kolaylaştırmak için yeteri kadar basit, ancak gerçek sistemde çalışacak tasarımların mühendis güvenini vermesi için de yeteri kadar karmaşık olmalıdır [35].

“Belirsizlik” (uncertainty) terimi modeller ve gerçek arasındaki farklılıkları ve hataları ifade eder, ve herhangi bir ifade bu hataları açıklamak için kullanılırsa bu “belirsizliğin ifadesi” diye adlandırılacaktır. Belirsizliğin faydalı bir ölçüsü, çıktının nominal cevabından sapmasının güç dağılımında bir sınırlama sağlamasıdır. En basit durumda, bu güç dağılımı girişten bağımsız olarak düşünülür. Bu, belirsizliğin sınırlı güç dağılımı ile bir ilave gürültü sinyali tarafından üretildiği; belirsizliğin ilave gürültü olarak belirtildiği düşüncesine eşdeğerdir.

Genellikle, gerçek çıktının güç dağılımının nominalden sapması önemli bir şekilde girişe bağlı olacaktır. Örneğin, fiziksel sistemlerin malzeme özelliklerindeki değişimlerden kaynaklanan belirsizliğin yakalanması için bir ilave gürültü modeli uygun değildir [35]. Genellikle, sadece tek bir parametrelili modelleri değil, fakat model yapısında açıkça belirtilmeyen sistem dinamiklerini de hesaba katan model gruplarını kullanma gereği duyulur.

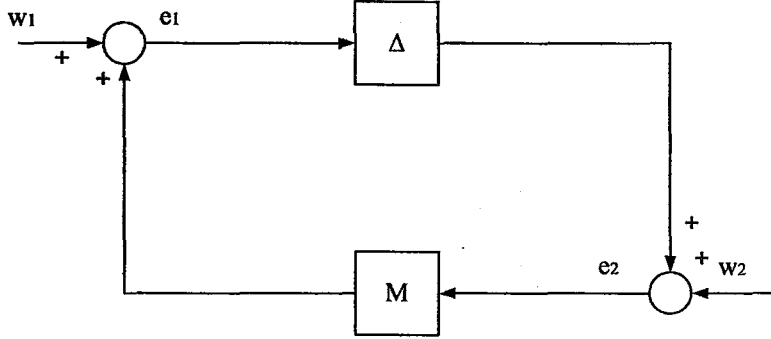
3.4. Küçük Kazanç Teoremi

Robust kararlılık kriteri için çıkarılan temel denklem “küçük kazanç teoremi” olarak adlandırılır [35]. Şekil 3.2 de gösterilen $M(s)$ kararlı bir pxq transfer matrisi ile temsil edilen sistemi gözönüne alalım.

Teorem

$M \in RH_\infty$ ve $\gamma > 0$ olduğunu varsayalım. Şekil.3.2' de gösterilen sistem her $\Delta(s) \in RH_\infty$ için iyi-halli (well-posed) ve kendi içinde kararlıdır. Bu durumda,

- a) $\|\Delta\|_\infty \leq 1/\gamma$ için gerek ve yeter koşul $\|M(s)\|_\infty < \gamma$ dır.
- b) $\|\Delta\|_\infty < 1/\gamma$ için gerek ve yeter koşul $\|M(s)\|_\infty \leq \gamma$ dır.



Şekil 3.2 Küçük Kazanç Teoremi

Yeter koşul ispatı

$M(s)\Delta(s)$ 'in kararlı olduğu hem $M(s)$ ' in hemde $\Delta(s)$ ' in kararlı olmasından dolayı açıktır. Eğer $\det(I - M\Delta)$ her $\Delta \in RH_\infty$ ve $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ için kapalı sağ-yarı düzlemde sifira sahip değilse kapalı-çevrim sistem kararlıdır. Eşdeğer olarak eğer,

$$\inf_{s \in \bar{C}_+} \underline{\sigma}(I - M(s)\Delta(s)) \neq 0 \quad (3.28)$$

ise kapalı-çevrim sistem kararlıdır [35].

Gerek koşul ispatı

$\|M\|_\infty \geq 1$ olduğunu varsayalım.

$\det(I - M(s)\Delta(s)) = 0$ denkleminin imajiner ekseninde bir sifira sahip olduğu $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ ile bir $\Delta \in RH_\infty$ ortaya çıkacağını göreceğiz, öyleki sistem kararsız olacaktır. $\omega_0 \in R_+ \cup \{\infty\}$ olduğunu yani $\bar{\sigma}(M(j\omega_0)) \geq 1$ olduğunu varsayalım. $M(j\omega_0)$ bir tekil değer ayrıklaştırmasına sahiptir [35] ($M = U\Sigma V^*$)

$$U(j\omega_0) = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_p \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$V(j\omega_0) = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_q] \quad (3.30)$$

$$\Sigma(j\omega_0) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

$$\|M\|_\infty = \overline{\sigma}(M(j\omega_0)) = \sigma_1 \quad (3.32)$$

$$\Delta(j\omega_0) = \frac{1}{\sigma_1} v_1 u_1^* \quad (3.33)$$

$$\det(I - M(j\omega_0)\Delta(j\omega_0)) = \det(I - U\Sigma V^* v_1 u_1^* / \sigma_1) = 1 - u_1^* U \Sigma V^* v_1 / \sigma_1 = 0 \quad (3.34)$$

böylece kapalı-çevrim sistem hem iyi-halli değildir hemde kararsızdır. İki farklı durum vardır [35]:

1) $\omega_0 = 0$ veya ∞

$$\Delta = \frac{1}{\sigma_1} v_1 u_1^* \in R^{qp} \quad (3.35)$$

2) $0 < \omega_0 < \infty$

$$u_1^* = [u_{11} e^{j\theta_1} \quad u_{12} e^{j\theta_2} \quad \dots \quad u_{1p} e^{j\theta_p}] \quad (3.36)$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} v_{11} e^{j\phi_1} \\ v_{12} e^{j\phi_2} \\ \vdots \\ v_{1q} e^{j\phi_q} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Burada $u_{1i} \in R$ ve $v_{1j} \in R$ olarak seçilir, öyleki her i, j için $\theta_i, \phi_j \in [-\pi, 0)$ [35] dır.

3.5 Yapılandırılmış Tekil Değer

3.5.1 Sistem dayanıklılığı için genel yapı

Belirsizlik, hem dış girdiler olarak hem de nominal modelden perturbasyon olarak iki yolla modellenebilir. Bir sistemin davranışı, çıktıların veya hataların davranışına göre ölçülür. Eğer bir sistem kendiliğinden belirsiz olan bileşenlerden kurulmuşsa, bu

durumda genellikle sistem seviyesindeki belirsizlik tipik olarak gerçek parametreleri kapsayarak oluşturulur [35].

3.5.2 Temel kavram

Eğer bazı $s \in \overline{C}_+$ için $\det(I - M(s)\Delta(s)) = 0$ ise, $\det(I - M\Delta)$ ile verilen kapalı-çevrim kutuplarından dolayı geri besleme sistemi kararsız olur. Şimdi $\alpha > 0$ olacak şekilde yeteri kadar küçük bir sayı alalım öyleki her kararlı $\|\Delta\|_\infty < \alpha$ için kapalı çevrim sistem kararlı olsun. Daha sonra α değişkenini α_{maks} değerine kadar arttıralım, öyleki kapalı-çevrim sistem kararsız hale gelsin. Bu durumda α_{maks} dayanıklı kararlılık sınırıdır. Küçük kazanç teoremi ile, eğer Δ yapılandırılmamışsa, α_{maks} aşağıdaki gibi yazılır [35].

$$\frac{1}{\alpha_{maks}} = \|M\|_\infty := \sup_{s \in \overline{C}_+} \overline{\sigma}(M(s)) = \sup_{\omega} \overline{\sigma}(M(j\omega)) \quad (3.38)$$

Herhangi sabit $s \in \overline{C}_+$ için, $\overline{\sigma}(M(s))$ Δ yapılandırılmamışsa aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\overline{\sigma}(M(s)) = \frac{1}{\min\{\overline{\sigma}(\Delta) : \det(I - M(s)\Delta) = 0\}} \quad (3.39)$$

M transfer matrisinin en büyük tekil değerinin karşısı geri besleme sisteminin kararsızlığına sebep olan en küçük yapılandırılmamış Δ nın bir ölçüsüdür. Δ yapılandırılmışsa

$$\mu_\Delta(M(s)) = \frac{1}{\min\{\overline{\sigma}(\Delta) : \det(I - M(s)\Delta) = 0\}} \quad (3.40)$$

Yukarıdaki tanım yapılandırılmış kompleks Δ ya göre $M(s)$ ' in en büyük yapılandırılmış tekil değeridir. Bu durumda yapılandırılmış kompleks Δ belirsizliği ile geri besleme sisteminin dayanıklı kararlılık sınırı

$$\frac{1}{\alpha_{maks}} = \sup_{s \in \overline{C}_+} \mu_\Delta(M(s)) = \sup_{\omega} \mu_\Delta(M(j\omega)) \quad (3.41)$$

ifadesi ile belirlidir.

3.6 Yapılandırılmış Dayanıklı Kararlılık ve Davranışı

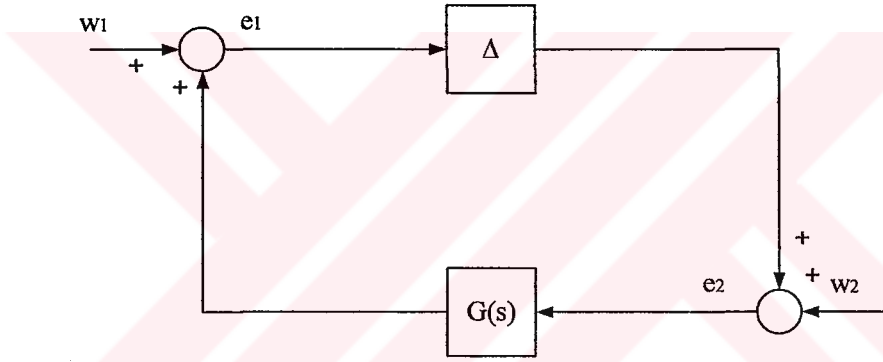
3.6.1 Dayanıklı kararlılık

μ' nün bir dayanıklılık analizi aracı olarak en yaygın ve iyi-bilinen kullanımı frekans uzayındadır. $G(s)$ ' in bir kararlı, gerçek-rasyonel, çok-giriş-çok-çıkışlı bir doğrusal sistemin transfer fonksiyonu olduğunu kabul edelim.

Teorem

$\beta > 0$ olsun. Aşağıda gösterilen çevrimin, $\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{\beta}$ ile bütün $\Delta(\cdot) \in M(\Delta)$ için iyi-halli ve içten kararlı olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki gibi ifade edilir [35].

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \mu_\Delta(G(j\omega)) \leq \beta \quad (3.42)$$



Şekil 3.3 Dayanıklı kararlılık

3.6.2 Dayanıklı davranışı

Genellikle, kararlılık, perturbasyonlar için dayanıklı olması gereken bir kapalı-çevrim sisteminin tek bir özelliği değildir. Tipik olarak, regülasyon hataları ve takip etme hatalarına sebep olan sistem üzerinde etkili dış bozucu etkiler (rüzgarlar, sensör gürültüsü v.s.) mevcuttur. Perturbasyonlar altında, hata sinyalleri üzerinde olan bu bozucu etkilerin etkisi büyük ölçüde artabilir.

Birçok durumda, kararsızlığın oluşumundan çok önce, kapalı çevrim davranışı öyleki bir “dayanıklılık davranışı” testine ihtiyaç duyulan kabul edilemezlik noktasına düşecektir [35].

Böyle bir test, verilen perturbasyon seviyesi ile birleşik olarak davranışdaki bozulmanın en kötü durum seviyesini gösterecektir.

3.7 H₂ Optimal Kontrol

3.7.1 Regülatör problemine giriş

Aşağıdaki dinamik sistemi gözönüne alalım.

$$\dot{x} = Ax + B_2 u, \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.43)$$

burada x_0 keyfi başlangıç şartı olarak verilmiştir. Bizim amacımız $x(t)$ durumunun bir fonksiyonu olabilen $[t_0, T]$ aralığında tanımlı $u(t)$ kontrol fonksiyonu bulmaktır, öyleki $x(t)$ durumu T anında orijinin yakınına gider. Bu "Regülatör Problemi" olarak adlandırılır [35].

Söylenebilecek bir şey bu regülatör probleminin eğer sistem kontrol edilebilir ise her $T > t_0$ için kolayca çözülebileceğidir. Gerçekten bu durum eğer kontrolcü keyfi olarak büyük miktarda enerji sağlayabilirse, kontrol edilebilirlik tanımı ile, bu durumu orijine götürecek keyfi bir kontrol fonksiyonu kısa zamanda oluşturulabilir.

Bu pratik değildir, çünkü her fiziksel sistem enerji limitlerine sahiptir ve tahrik edici elemanlar en sonunda doymuş hale gelecektir. Büyük kontrol hareketi, sistemi verilen doğrusal modelin geçerli olduğu bölgenin dışına kolayca götürebilir. Belirli limitler pratik mühendislik uygulamalarında kontrole konulmalıdır.

Kontrol üzerindeki u etkisi birçok farklı yöntemlerle ölçülebilir.

$$L_1 - \text{normuna göre} \quad \int_{t_0}^T \|u\| dt$$

$$L_2 - \text{normuna göre} \quad \int_{t_0}^T \|u\|^2 dt$$

$$L_\infty - \text{normuna göre} \quad \sup_{t \in [t_0, T]} \|u\|$$

veya daha genel olarak, bazı sabit W_u ağırlık matrisi için

$$\text{Ağırlaştırılmış } L_1 - \text{normu} \quad \int_{t_0}^T \|W_u u\| dt$$

Ağırlaştırılmış L_2 -normu $\int_{t_0}^T \|W_u u\|^2 dt$

Ağırlaştırılmış L_∞ -normu $\sup_{t \in [t_0, T]} \|W_u u\|$

Regülatör problemi belirli birleşik maliyet fonksiyonu ile u ve x üzerine bir optimal kontrol problemi olarak gösterilebilir.

Biz sonsuz zaman regülatör problemi üzerinde yoğunlaşacağız ($T \rightarrow \infty$) ve genelliği bozmayarak $t_0 = 0$ olarak gözönüne alacağız. Bu durumda bizim problemimiz aşağıdaki gibidir:

Problem tanımı $x(t)$ durumunu $t \rightarrow \infty$ 'a giderken orijine götüren ve aşağıdaki maliyet fonksiyonunu minimum yapan $[0, \infty]$ aralığında tanımlı $u(t)$ kontrolunu bulalım:

$$\min_u \int_0^\infty \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} Q & S \\ S^* & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt \quad (3.44)$$

Bu problem geleneksel olarak bir "Linear Quadratik Regülatör" problemi veya kısaca LQR problemi olarak adlandırılır.

3.7.2 Standart LQR problemi

$$\dot{x} = Ax + B_2 u, \quad x(0) = x(t_0) = x_0 \text{ verilmiş fakat keyfi} \quad (3.43)$$

$$z = C_1 x + D_{12} u, \quad (3.45)$$

ile tanımlanmış bir dinamik sistem alalım ve sistem parametre matrislerinin aşağıdaki kabulleri sağladığını düşünelim.

(A1) (A, B_2) kararlı yapılabilir;

(A2) D_{12} matrisinin rankı $[D_{12} \ D_1]$ birim matrisinin sütun sayısına eşittir.

(A3) (C_1, A) bulunabilir.

(A4) $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ her ω için rankı sütun sayısına eşittir.

Problem tanımı: Standart LQR problemi $\|z\|_2^2$ performans kriterini minimum yapan $u \in L_2[0, \infty]$ olacak şekilde bir optimal u kuralı bulmaktır.

Sistem (6.3) ve (6.4) için $u=Fx$ kontrol girişi uygulandığını gözönüne alalım. Kontrol edilmiş sistem,

$$\dot{x} = A x, \quad x(0)=x_0 \quad (3.46)$$

$$z = Cx, \quad (3.47)$$

veya eşdeğeri

$$\dot{x} = Ax + x_0 \delta(t), \quad x(0) = 0 \quad (3.48)$$

$$z = Cx \quad (3.49)$$

şeklinde ifade edilir.

3.7.3 Genişletilmiş LQR problemi

$$\dot{x} = Ax + B_2 u, \quad x(0) = x(t_0) = x_0 \text{ verilmiş fakat keyfi} \quad (3.43)$$

$$z = C_1 x + D_{12} u \quad (3.45)$$

ile verilen bir dinamik sistemi aşağıdaki kabuller ile ele alalım.

(A1) (A, B_2) kararlı yapılabilir;

(A2) D_{12} matrisinin rankı $[D_{12} \ D_1]$ birim matrisinin sütun sayısına eşittir.

(A3) $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ her ω için rankı sütun sayısına eşittir.

Problem tanımı: Genişletilmiş LQR problemi: $\|z\|_2^2$ performans kriterini minimum yapan ve $x \in L_2(0, \infty)$ aralığında sistemi içten kararlı yapan $u \in L_2(0, \infty)$ olacak şekilde bir optimal u kuralı bulmaktır.

3.7.4 Standart H_2 problemi

Aşağıdaki ilave kabuller çıkış geri besleme H_2 problemi içindir.

- (i) (A, B_2) kararlı yapılabilir ve (C_2, A) bulunabilir.
- (ii) D_{12} matrisinin rankı $[D_{12} \ D_1]$ birim matrisinin sütun sayısına eşittir ve D_{21} matrisinin rankı sütun sayısına eşittir.
- (iii) $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ her ω için rankı sütun sayısına eşittir.
- (iv) $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ her ω için rankı sütun sayısına eşittir.

Problem tanımı: H_2 kontrol problemi sistem açık çevrim transfer matrisi G 'yi içten kararlı yapacak ve w 'den z 'ye T_{zw} transfer matrisinin H_2 normunu minimum yapacak uygun bir gerçek-rasyonel K kontrolcüsünü bulmaktır.

Teorem

Burada tek bir optimal kontrolcü mevcuttur [35].

$$(i) K_{opt}(s) = \begin{bmatrix} \hat{A}_2 & -L_2 \\ F_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

$$(ii) \min \|T_{zw}\|_2^2 = \|G_c B_1\|_2^2 + \|F_2 G_f\|_2^2 = \|G_c L_2\|_2^2 + \|C_1 G_f\|_2^2 \quad (3.51)$$

Burada $\hat{A}_2$, L_2 , F_2 , Y_2 , X_2 aşağıdaki şekilde ifade edilir [35].

$$\hat{A}_2 = A + B_2 F_2 + L_2 C_2 \quad (3.52)$$

$$L_2 = -(Y_2 C_2^* + B_1 D_{21}^*) \quad (3.53)$$

$$F_2 = -(B_2^* X_2 + D_{12}^* C_1) \quad (3.54)$$

$$Y_2 = Ric(J_2) \geq 0 \quad (3.55)$$

$$X_2 = Ric(H_2) \geq 0 \quad (3.56)$$

Hamiltonian matrisleri H_2 ve J_2 aşağıdaki şekilde ifade edilir [35].

$$H_2 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C_1^* C_1 & -A^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_2 \\ -C_1^* D_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{12}^* & B_2^* \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} A^* & 0 \\ -B_1 B_1^* & -A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_2^* \\ -B_1 D_{12}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{21}^* B_1^* & C_2 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

$$G_c(s) = \begin{bmatrix} A_{F2} & I \\ C_{1F2} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

$$G_f(s) = \begin{bmatrix} A_{L2} & B_{1L2} \\ I & 0 \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

$$A_{F2} = A + B_2 F_2 \quad (3.61)$$

$$C_{1F2} = C_1 + D_{12} F_2 \quad (3.62)$$

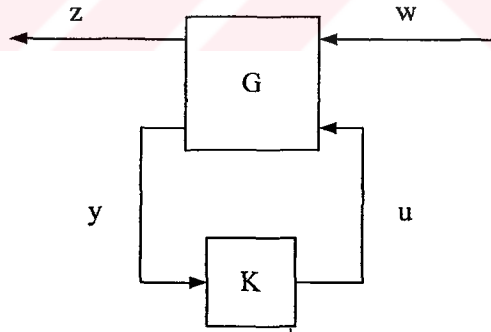
$$A_{L2} = A + L_2 C_2 \quad (3.63)$$

$$B_{1L2} = B_1 + L_2 D_{21} \quad (3.64)$$

3.7.5. H_∞ kontrol

3.7.5.1 Problem formülasyonu

Şekil 3.4’de blok diyagram ile tanımlanan sistemi göz önüne alalım.



Şekil 3.4 Sistem blok diyagramı.

Burada G sistemi ve K kontrolcüsü gerçek-rasyonel ve uygun olarak kabul edilir. G ve K 'nin durum-uzay modelinin mevcut ve onların gerçekleştirmelerinin kararlı yapılabilir (stabilizable) ve bulunabilir (detectable) olduğunun kabul edileceği düşünülür. Kararlılık bir pratik sistemin çalışması için en temel gerekliliktir.

Problem tanımı: Optimal H_∞ kontrol, $\|T_{zw}\|_\infty$ normunu minimum yapan tüm kabul edilebilir (admissible) $K(s)$ kontrolcülerini bulmaktır.

Optimal H_∞ kontrolcüler genellikle çok-girişli-çok-çıkışlı sistemler için tek değildir. Bir optimal H_∞ kontrolcüsünü bulmak sıklıkla hem sayısal olarak hemde teorik olarak karmaşıktır. Ulaşılabılır minimum H_∞ normunun bilinmesi teorik olarak faydalı olabilir, çünkü biz neye ulaşabilirsek oraya bir limit oluştururuz.

Problem tanımı: Suboptimal H_∞ kontrol, eğer $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ yapacak herhangi biri varsa, verilen $\gamma > 0$ için, bütün kabul edilebilir (admissible) $K(s)$ kontrolcülerini bulmaktır.

3.7.5.2 Suboptimum H_∞ kontrolcüler:

Verilen bir γ için $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ olacak şekilde bir kabul edilebilir $K(s)$ kontrolcülerinin mevcudiyeti için gerek ve yeter koşulları aşağıdaki gibidir. Eğer gerek ve yeter koşullar sağlanırsa, biz norm koşullarını sağlayan bütün kabul edilebilir kontrolcülerini karakterize ederiz.

$\gamma_{opt} := \min \{ \|T_{zw}\|_\infty : K(s) \text{ kabul edilebilir} \}$ değerini optimal seviye olarak alalım.

Bu durumda, suboptimum H_∞ kontrolcülerin mevcut olması için γ 'nın γ_{opt} 'dan büyük olmak zorunda olduğu açıktır. Optimum H_∞ kontrolcünün karakterize edilmesi suboptimumun karakterize edilmesinden daha zordur, ve bu H_∞ ve H_2 sonuçları arasındaki büyük bir farktır.

H_∞ çözümü aşağıdaki iki Hamiltonian matrisini içerir.

$$H_\infty := \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2} B_1 B_1^* - B_2 B_2^* \\ -C_1^* C_1 & -A^* \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

$$J_\infty := \begin{bmatrix} A^* & \gamma^{-2} C_1^* C_1 - C_2^* C_2 \\ -B_1 B_1^* & -A \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

Burada H_2 probleminden önemli farklılık, (1, 2) bloklarının işaret tanımlı (sign-definite) olmamasıdır. Eğer γ sonsuza yaklaşırsa, bu durumda bu iki Hamiltonian matrisi H_2 kontrol Hamiltonian matrislerine tekabül eden hale gelir.

Teorem

Eğer aşağıdaki üç koşul sağlanırsa, $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ olacak şekilde bir kabul edilebilir kontrolcü mevcuttur [35].

i) $H_\infty \in \text{dom}(\text{Ric})$ ve $X_\infty := \text{Ric}(H_\infty) \geq 0$;

ii) $J_\infty \in \text{dom}(\text{Ric})$ ve $Y_\infty := \text{Ric}(J_\infty) \geq 0$;

iii) $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$

Ayrıca bu koşullar sağlandığı zaman böyle bir kontrolcü,

$$K_{sub}(s) := \begin{bmatrix} \hat{A}_\infty & -Z_\infty L_\infty \\ F_\infty & 0 \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

Burada

$$\hat{A}_\infty := A + \gamma^{-2} B_1 B_1^* X_\infty + B_2 F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2 \quad (3.68)$$

$$F_\infty := B_2^* X_\infty \quad (3.69)$$

$$L_\infty := -Y_\infty C_2^* \quad (3.70)$$

$$Z_\infty := (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1} \quad (3.71)$$

şeklinde ifade edilir.

3.7.5.3 Tam enformasyon kontrol (TE) (Full information control (FI))

Teorem

$\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ olacak şekilde bir TE problem için bir kabul edilebilir $K(s)$ kontrolcüsünün mevcut olması için gerek ve yeter koşul $H_\infty \in \text{dom}(\text{Ric})$ ve $X_\infty := \text{Ric}(H_\infty) \geq 0$ olmasıdır. Ayrıca, eğer bu koşullar sağlanırsa, $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ şartını sağlayan bir grup kabul edilebilir kontrolcü aşağıdaki gibi parametrik olarak ifade edilebilir [35].

$$K(s) = \begin{bmatrix} F_\infty - \gamma^{-2} Q(s) B_1^* X_\infty & Q(s) \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Burada $Q \in RH_\infty$, $\|Q\|_\infty < \gamma$ sağlanır.

H_2 ve H_∞ kontrolcileri arasındaki başlıca fark, H_∞ kontrolcü B_1 bozucu etkisine tamamen bağlıdır, halbuki H_2 kontrolcü bağlı değildir.

3.7.5.4 Tam kontrol (TK) (Full control (FC))

Teorem

$\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ olacak şekilde bir TK problem için bir kabul edilebilir $K(s)$ kontrolcüsünün mevcut olması için gerek ve yeter koşul $J_\infty \in \text{dom}(\text{Ric})$ ve $Y_\infty = \text{Ric}(J_\infty) \geq 0$ olmasıdır. Ayrıca, eğer bu koşullar sağlanırsa, $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ şartını sağlayan bir grup kabul edilebilir kontrolcü aşağıdaki gibi parametrik olarak ifade edilebilir [35].

$$K(s) = \begin{bmatrix} L_\infty - \gamma^{-2} Y_\infty C_1^* Q(s) \\ Q(s) \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

Burada $Q \in RH_\infty$, $\|Q\|_\infty < \gamma$ sağlanır.

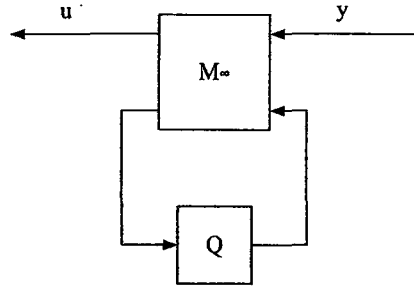
3.7.5.5 Bozucu ileri besleme (BI) (Disturbance feedforward kontrol (DF))

Teorem

$\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ olacak şekilde bir BI problem için bir kabul edilebilir kontrolcünün mevcut olması için gerek ve yeter koşul $H_\infty \in \text{dom}(\text{Ric})$ ve $X_\infty = \text{Ric}(H_\infty) \geq 0$ olmasıdır. Ayrıca, eğer bu koşullar sağlanırsa, $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ şartını sağlayan bütün kabul edilebilir kontrolcüler y den u ya bütün transfer matrislerinin bir grubu olarak aşağıdaki gibi parametrik olarak ifade edilebilirler [35].

$$M_\infty = \begin{bmatrix} A + B_2 F_\infty - B_1 C_2 & B_1 & B_2 \\ F_\infty & 0 & I \\ -C_2 - \gamma^{-2} B_1^* X_\infty & I & 0 \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

Burada $Q \in RH_\infty$, $\|Q\|_\infty < \gamma$ sağlanır.



Şekil 3.5 BI ve ÇK için sistem blok diyagramı

3.7.5.6 Çıkış kestirim kontrolü (ÇK) (Output estimation kontrol (OE))

$\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ olacak şekilde ÇK problem için bir kabul edilebilir kontrolcünün mevcut olması için gerek ve yeter koşul $J_\infty \in \text{dom}(\text{Ric})$ ve $\text{Ric}(J_\infty) \geq 0$ olmasıdır. Ayrıca eğer bu koşullar sağlanırsa, $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ şartını sağlayan bütün kabul edilebilir kontrolcüler y den u ya bütün transfer matrislerinin bir grubu olarak aşağıdaki gibi parametrik olarak ifade edilebilirler [35].

$$M_\infty(s) = \begin{bmatrix} A + L_\infty C_2 - B_2 C_1 & L_\infty & -B_2 - \gamma^{-2} Y_\infty C_1^* \\ C_1 & 0 & I \\ C_2 & I & 0 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

Burada $Q \in RH_\infty$, $\|Q\|_\infty < \gamma$ sağlanır.

4. SAYISAL OPTİMİZASYON METODLARI

Mühendislikte, mevcut kaynaklar ile mümkün olan “en iyi, kaliteli ürünü” üretmek istenir. Böylece yeni ürünlerin tasarımında, tam vaktinde ve ekonomik biçimde istenen sonuçları sağlayan tasarım araçlarının kullanılması zorunludur. Sayısal optimizasyon bu amaçla kullanılan araçlardan biridir.

Tasarım optimizasyonu çalışmasında, tasarım ve analiz arasındaki farkı ayırtetmek önemlidir. Analiz belirli bir sistemin onun çevresine vereceği cevabın belirlenmesi işlemidir. Diğer taraftan, tasarım, sistemin tanımlanmasının gerçek işlemini ifade etmek için kullanılır. Açıkça, analiz tasarım işleminin de bir alt problemidir, çünkü bu tasarımın yeterliliğinin nasıl değerlendirileceği işlemidir [34].

Mühendislikte tasarım hedeflerinin çoğu, sayılabilir olduklarından, alternatif tasarımları hızlı bir şekilde analiz etmek için bilgisayarlar kullanılır. Sayısal optimizasyonun amacı, tasarım gereksinimlerini karşılamak için gerçekçi olarak en iyi tasarımı aramada tasarımcıya yardımcı olmaktır.

Tasarım, amaç fonksiyonu diye isimlendirilebilen bazı parametrelerin minimum veya maksimumunun bulunması işlemi olarak tanımlanabilir. Tasarımın kabul edilebilir olması için, kısıtlar olarak isimlendirilen belirlenmiş gereksinimlerin belirli bir grubunun da sağlanması zorunludur [34].

Sayısal optimizasyon teknikleri, tasarım otomasyonu için mantıksal bir yaklaşım sunar, ve son yıllarda sayısal optimizasyon için birçok algoritma ileri sürülmüştür. Bu tekniklerin bazıları, doğrusal, quadratik, dinamik ve geometrik programlama algoritmaları gibi optimizasyon problemlerinin belirli bir sınıfı ile beraber çalışmak için geliştirilmiştir. Genel optimizasyon problemlerinin çözümü için geliştirilen algoritma doğrusal olmayan programlama olarak isimlendirilen algoritmaların en genel bir sınıfıdır.

Mühendislik tasarımında bu tekniklerin kullanımı 1960' larda önem kazanmıştır. Smith [34] doğrusal olmayan optimizasyon tekniklerini yapısal tasarıma uygulamış ve “yapısal sentez” deyimini kullanmıştır. Sayısal optimizasyonun amacı, bu hedefte tasarımcıya yardım etmek için bir bilgisayar aracı sağlamaktır.

4.1. Optimizasyon Probleminin Genel İfadesi

Doğrusal olmayan kısıtlı optimizasyon problemi matematiksel olarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$F(X) \quad \text{amaç fonksiyonunu aşağıdaki kısıtlara göre minimize et} \quad (4.1)$$

$$g_j(X) \leq 0 \quad j=1, \dots, m \text{ eşitsizlik kısıtları} \quad (4.2)$$

$$h_k(X) = 0 \quad k=1, \dots, l \text{ eşitlik kısıtları} \quad (4.3)$$

$$X_i^l \leq X_i \leq X_i^u \quad i=1, \dots, n \text{ parametre sınırlamaları} \quad (4.4)$$

Burada

$$X = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

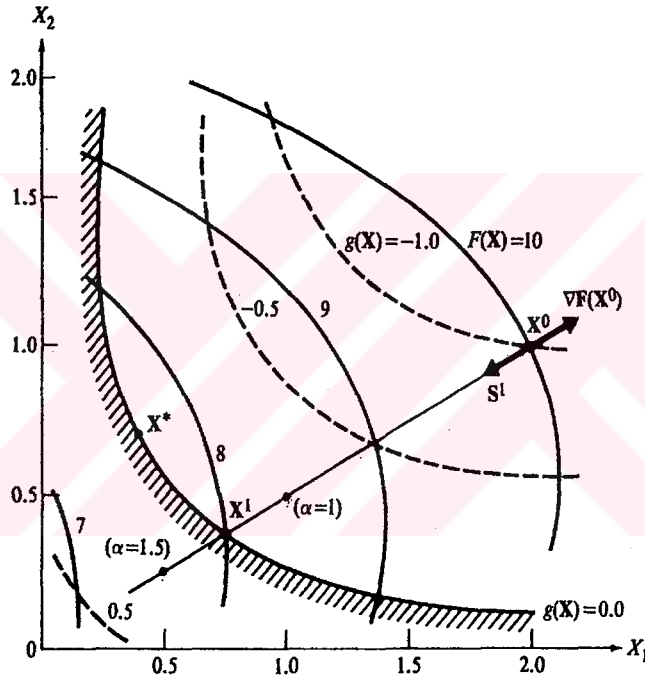
X vektörü tasarım değişkenleri vektörü olarak isimlendirilir. Eşitlik (4.1) ile verilen $F(X)$ amaç fonksiyonu Eşitlik (4.2) ve (4.3) ile tanımlanan kısıt fonksiyonları gibi tasarım değişkenleri X ' in doğrusal veya doğrusal olmayan fonksiyonları olabilir. Bu fonksiyonlar X cinsinden açık veya kapalı olabilirler ve herhangi bir analitik veya sayısal tekniklerle değerlendirilebilirler. Bununla beraber, optimizasyon problemlerinin özel sınıflarının dışında, bu fonksiyonların sürekli olması ve X 'e göre birinci türevlerinin sürekli olması önemlidir [34].

4.2.İteratif Optimizasyon İşlemi

Optimizasyon algoritmalarının çoğu, tasarım değişkenlerinin bir X^0 başlangıç grubunun belirlenmesini gerektirir. Bu başlangıç noktasından başlayarak, tasarım iteratif olarak güncelleştirilir. Bu iterasyon işleminin en yaygın formu

$$X^q = X^{q-1} + \alpha^* S^q \quad (4.6)$$

ile verilir. Burada q iterasyon sayısı ve S Şekil 4.1 de gösterildiği gibi tasarım uzayında bir vektör arama doğrultusudur. α^* skaler değeri S doğrultusunda hareket etmek istediğimiz aralığı (adımı) tanımlar [34].



Şekil 4.1 S doğrultusunda arama.

Doğrusal olmayan optimizasyon algoritmaları iki temel kısma ayrılabilir. Birincisi, kısıtlara göre amaç fonksiyonunu iyileştirecek olan bir S arama yönünün belirlenmesidir. İkincisi, S doğrultusundaki hareketin aralığını (adımını) belirleyen α^* skaler parametresinin belirlenmesidir. Bu bileşenlerin her biri verilen bir optimizasyon algoritmasının verimliliğinde ve güvenilirliğinde temel bir rol oynar [34].

4.3. Optimum Bir Çözümün Oluşumu ve Tekilliği

4.3.1. Kısıtsız problemler

İlk önce hiç kısıt konmamış, sadece $F(X)$ fonksiyonunun minimizasyonunu istediğimiz kısıtsız minimizasyon problemini göz önüne alalım. $F(X)$ ' in bir minimum olması için, $F(X)$ ' in gradyanının yok olması zorunluluğunu biliyoruz.

$$\nabla F(X) = 0 \quad (4.7)$$

Burada

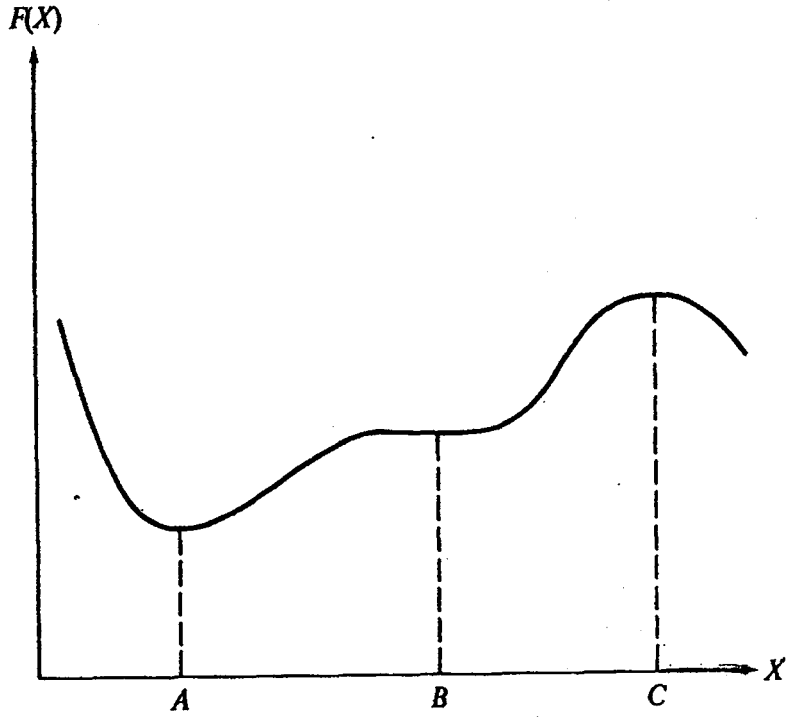
$$\nabla F(X) = \begin{Bmatrix} \partial F(X)/\partial X_1 \\ \partial F(X)/\partial X_2 \\ \vdots \\ \partial F(X)/\partial X_n \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

Bununla beraber, bu sadece gerek koşuldur ve optimumluğu sağlamak için yeter koşul değildir. Bu, bir değişkenli fonksiyon için Şekil 4.2' de kolayca görülebilir. Burada $F(X)$ ' in gradyanı X tekil değişkenine göre basitçe $F(X)$ ' in birinci türevidir.

Açıkça, $F(X)$ ' in gradyanı şekildeki A, B ve C üç noktada ortadan kaybolur. A noktası minimum ve C noktası maksimumu tanımlar. B noktası ne minimumdur ne de maksimumdur.

Bir değişkenli bir fonksiyonun minimum olması için bağımsız değişkene göre onun ikinci türevinin pozitif olması gerektiği matematikten bilinir ve bu, Şekil 4.2' de A noktasında sağlanır [34].

Genel n boyutlu durumda, bu Hessian matrisin pozitif tanımlı olması gereksinimine dönüşür. Burada Hessian matrisi, tasarım değişkenlerine göre amaç fonksiyonunun ikinci kısmi türevlerinin matrisidir [34].



Şekil 4.2 Bir kısıtsız fonksiyonun izafi optimumu.

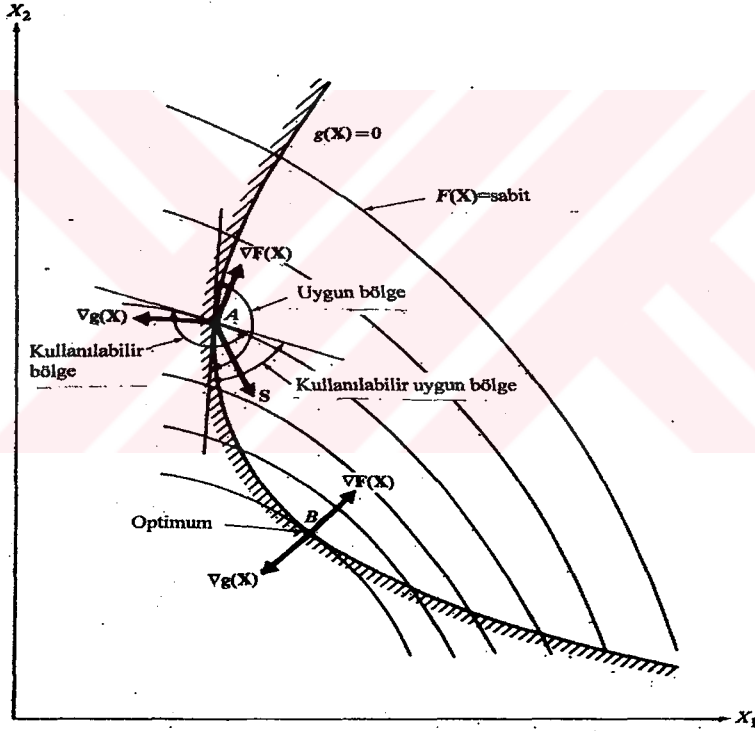
Pozitif tanımlılığın anlamı bu matrisin bütün pozitif özdeğerlere sahip olmasıdır. Eğer gradyan sıfır ise ve Hessian matrisi verilen bir X için pozitif tanımlı ise, bu tasarımın en azından bir izafi minimum olduğunu güvence altına alır, fakat yine de o tasarımın bir global minimum olduğunu güvence altına almaz.

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F(X)}{\partial X_1^2} & \frac{\partial^2 F(X)}{\partial X_1 \partial X_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F(X)}{\partial X_1 \partial X_n} \\ \frac{\partial^2 F(X)}{\partial X_2 \partial X_1} & \frac{\partial^2 F(X)}{\partial X_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 F(X)}{\partial X_2 \partial X_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F(X)}{\partial X_n \partial X_1} & \frac{\partial^2 F(X)}{\partial X_n \partial X_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F(X)}{\partial X_n^2} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Tasarım sadece eğer Hessian matris tasarım değişkenleri X ' in bütün mümkün değerleri için pozitif tanımlı ise bir global minimum olarak garanti edilir. Bu pratik tasarım uygulamalarında nadiren gösterilebilir.

4.3.2. Kısıtlı problemler

Şekil 4.3'ü referans alarak, bir kısıtlı optimum için en azından sezgisel olarak gerek koşulları tanımlanabilir. Bir tasarımın A noktasında kesinleştirildiğini düşünelim. Bu tasarımda iyileşme yapmak için, amaç fonksiyonunu azaltacak (minimize edecek) ve henüz aktif kısıtları bozmamış bir S doğrultu vektörünün belirlenmesi gerekli olacaktır. Bir kullanılabilir doğrultu olarak amaç fonksiyonunu azaltacak (minimize edecek) herhangi bir doğrultu tanımlanır. Açıkça, bu noktada amaç fonksiyonunun sabit değerlerinin bir eğrisine teğet olan doğru bütün mümkün kullanılabilir doğrultularda sınır olacaktır. Amaç fonksiyonunu azaltacak (minimize edecek) bu doğru tarafındaki herhangi bir doğrultu, bir kullanılabilir doğrultu olarak tanımlanır ve tasarım uzayının bu kısmı kullanılabilir bölge olarak isimlendirilir [34].



Şekil 4.3 Uygun arama doğrultusu.

Buradaki genel optimizasyon probleminde, verilen zamandaki tasarım işleminde bir aktif kısıttan daha fazlası olabilir. Burada eğer kısıtın değerleri sıfırın küçük bir toleransı civarında ise bir kısıt olarak göz önüne alınır. Eğer durum böyle ise, bütün aktif kısıtlara göre uygun olan bir doğrultu vektörü bulunmak zorundadır. Bir hareket doğrultusunun hem kullanılabilir hem de uygun olması gereksinimi matematiksel olarak aşağıdaki gibi gösterilir [34].

Kullanılabilir doğrultu: $\nabla F(X).S \leq 0$ (4.10)

Uygun doğrultu: $\nabla g_j(X).S \leq 0$ (4.11)

$g_j(X)=0$ olan bütün j ler için bunlar sağlanmalıdır. Bu örnek için optimum tasarım olan Şekil 4.3 deki B noktasını göz önüne alalım. Burada amaç fonksiyonunun gradyanı ve kısıt noktasının gradyanı tam olarak zıt doğrultulardadır. Bu yüzden, kullanılabilirliğin ve uygunluğun gereksinimlerini sağlayacak tek bir mümkün S vektörü kesin olarak hem kısıt sınırlarına hemde sabit amaç fonksiyonunun bir doğrusuna teğet olacak ve her iki gradyan ile 90^0 lik bir açı oluşturacaktır. Bu koşul matematiksel olarak aşağıdaki gibi gösterilir [34].

$$\nabla F(X) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla g_j(X) + \sum_{k=1}^l \lambda_{m+k} \nabla h_k(X) = 0 \quad (4.12)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad (4.13)$$

$$\lambda_{m+k} \text{ işaretten bağımsız.} \quad (4.14)$$

4.3.3 Kuhn-Tucker koşulları

Eşitlik (4.12) gerçekten kısıtlı optimum olmak için gerek koşulların bir grubunun üçüncüsüdür. Bunlar Kuhn-Tucker gerek koşulları olarak isimlendirilirler. Eğer X^* vektörü optimum tasarımı tanımlarsa, aşağıdaki üç koşulun sağlanması gerekir.

$$1. \quad X^* \text{ uygundur.} \quad (4.15)$$

$$2. \quad \lambda_j g_j(X^*) = 0 \quad j=1, m \quad \lambda_j \geq 0 \quad (4.16)$$

$$3. \quad \nabla F(X) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla g_j(X) + \sum_{k=1}^l \lambda_{m+k} \nabla h_k(X) = 0 \quad (4.12)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad (4.13)$$

$$\lambda_{m+k} \text{ işaretten bağımsızdır.} \quad (4.14)$$

4.4. N Değişkenli Kısıtlı Fonksiyonu: Doğrudan Metod

Bu bölümün amacı optimumu araştırmak için kısıtlarla doğrudan çalışan teknikleri tartışmaktır.

4.4.1. Rastgele arama

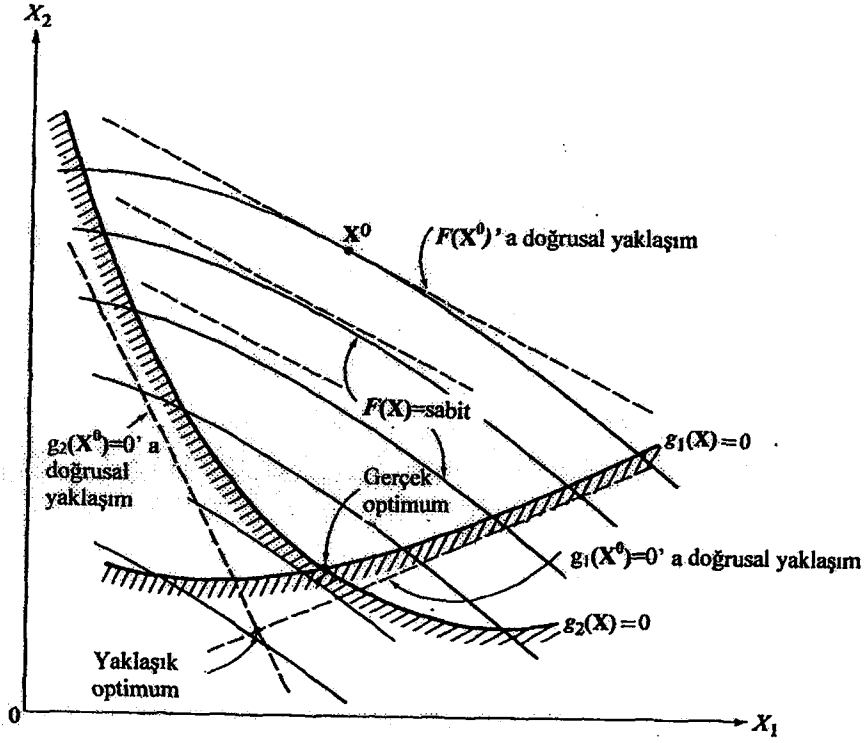
Kısıtlı minimizasyon için rastgele arama kısıtsız minimizasyon algoritmasında sadece küçük modifikasyonları gerektirir. Burada vurgulandığı gibi, bu metodlar verimli olarak gözönüne alınmazlar fakat kolayca programlanabilirler ve genellikle güvenilirlerdir. Birçok optimizasyon algoritmalarına gelince, bu metod çoğu durumlarda kullanılabilir olmasına rağmen, eşitlik kısıtları için çok uygun değildir [34].

Buradaki temel kavram, tasarım uzayı içinden tasarımları rastgele seçmek ve daha sonra elde edilen tasarımların her birini birbirleri ile mukayese etmektir. Uygulamada, tamamen rastgele tasarımlar seçilmez fakat optimizasyondaki eğilimi fark ederek işlemin ivmelenmesi için uğraşılır. Eğer minimizasyon problemi kısıtsız ise, arama işlemi basitçe onun iyileştiğini görmek için başlangıçtaki en iyi tasarım ile her bir yeni amaç fonksiyonunun değerinin mukayese edilmesini gerektirir. Kısıtlı problemler için karar verme sadece biraz karmaşıktır fakat işlem aynıdır.

4.4.2. Ardışık doğrusal programlama (ADP)

Tasarım değişkenlerinde, çoğu mühendislik analiz ve tasarım doğrusal olmamasına rağmen, bir özel problemi doğrusallaştırmak ve sonra doğrusal programlama metodlarını kullanarak Şekil 4.4 de gösterildiği gibi bu doğrusal yaklaşımlar için çözüm elde etmek mümkündür. Bu yaklaşık çözümlere sahip olarak, bu nokta etrafında doğrusallaştırma yapılabilir ve uygun çözüme ulaşıncaya kadar işlemi tekrar ederek, yeni doğrusal programlama problemi çözülebilir. Bu metod “Ardışık Doğrusal Programlama” metodu olarak isimlendirilir. Ayrıca, bu metod “Kelly Kesme Düzlemi” metodu olarak da isimlendirilir [34].

Bu doğrusal problemin optimumu, doğrusal olmayan problemin optimumunun civarında bulunur ve görülür. Bunun gibi tamamen kısıtlı problemler için bu metod çoğu kez çözüme hızlı bir şekilde yakınsar.

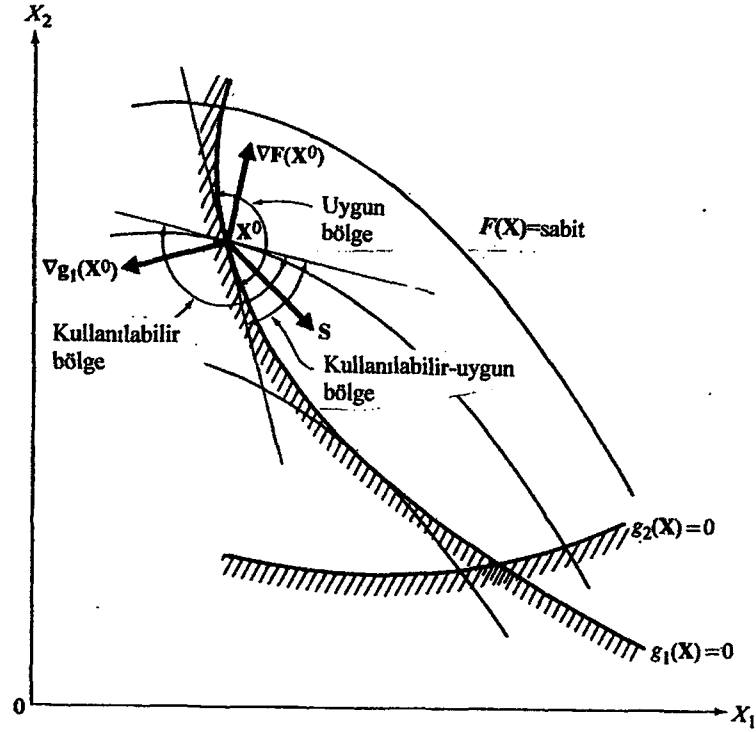


Şekil 4.4 Doğrusallaştırılmış problem

4.4.3. Uygun doğrultuların metodu

Ardışık doğrusal programlama metodlarından problemin doğrusal olmaması özelliği ile doğrudan çalışan metodlara dönelim. Burada sunulan metod, genellikle uygun-doğrultu metodu olarak isimlendirilir. Bu metodların bir alt sınıfı “gradyan izdüşümü” metodudur [34]. Bu metodlar ile, ilk önce bir arama yönü S Şekil 4.5 de gösterildiği gibi bulunacaktır ve sonra Eşitlik (4.6)’ ya göre X vektörünü güncellemek için bu doğrultuda hareket edilir ve bu şekilde her adımda tekrar edilir. Buradaki önemli nokta, bir uygun tasarımı sürdürürken amaç fonksiyonunu hızlı bir şekilde azaltacak bir arama doğrultusunun belirlenmesindedir. İlk önce amaç fonksiyonunun gradyanı ve gradyan vektör üzerindeki aktif kısıtları hesaplanır.

Hedef bazı sonlu hareketler için aktif kısıtları bozmaksızın amaç fonksiyonunu azaltacak bir S arama doğrultusunu bulmaktır. Amaç fonksiyonunu azaltacak her S vektörü bir kullanılabilir doğrultu olarak isimlendirilir [34]. Eğer bir doğrultudaki bazı küçük hareketler için aktif kısıtlar bozulmayacak ise, bu doğrultu uygun olarak tanımlanır.



Şekil 4.5 Faydalı-uygun arama yönü

4.4.4. Genelleştirilmiş indirgenmiş gradyan metodu

Burada sunulan genelleştirilmiş indirgenmiş gradyan metodunda, bir doğrultudaki bazı küçük hareketler için her aktif kısıt kesin olarak aktif kalacak şekilde, bir arama doğrultusu bulunur. Genelleştirilmiş indirgenmiş gradyan metod sadece eşitlik kısıtlı problemleri çözen, bir önceki metod olan indirgenmiş gradyan metodunun genişletilmiş halidir [34].

Eğer çok fazla sayıda eşitsizlik kısıtları varsa, bu tasarım hedefi bilgisayar depolama gereksinimlerinden dolayı aşırı bir şekilde büyük olur. Diğer taraftan, eğer sadece birkaç eşitsizlik kısıtları ve birkaç eşitlik kısıtları varsa, bu metod güçlü bir tasarım aracıdır.

Genelleştirilmiş indirgenmiş gradyan metodunun temel kavramı, her eşitlik kısıtı için bir bağımlı tasarım değişkeni tanımlanmak suretiyle bağımsız tasarım değişkenlerinin toplam sayısını azaltmaktır [34]. Kontrol teorisi ile ilişkisinden dolayı, bağımsız değişkenler sıkça karar değişkenleri ve bağımlı değişkenler sıkça durum değişkenleri olarak isimlendirilirler.

Tartışma

Eğer fonksiyon ve gradyanın değerlendirilmesi maliyetli ise, fazladan çaba ile kazanılan verimlilik yüksektir. Metod bazı sakıncalara sahiptir. Birincisi, eğer problem yüksek derecede doğrusallıktan sapıyorsa, bir-boyutlu arama esnasında uygunluğu devam ettirmek için Newton metodunun kullanımı kötü-kışullanmış olabilir ve çok küçük adımların kullanımını gerektirerek yakınsamayabilir. İkincisi, eğer çok fazla eşitsizlik kısıtları varsa, bilgisayar depolama gereksinimleri bağımsız değişkenler için alt problemlerin çözümü için büyük olur. Üçüncüsü, metod tipik olarak yakınsama için $n-1$ iterasyon gerekeceği hesaplanarak bir kısıt eğrisinden diğerine hareket etmeye meyleder. Eğer bağımsız değişkenlerin sayısı fazla ise, bu verimsiz olabilir. Bu zorluklar, buraya kadar sunulan her bir algoritma ile karşı konulamaz. Genelleştirilmiş indirgenmiş gradyan metodu pratik problemlerin büyük bir miktarını verimli bir şekilde çözeceğinden dolayı, tasarım aracı grubu içinde yer alması gerekir [34].

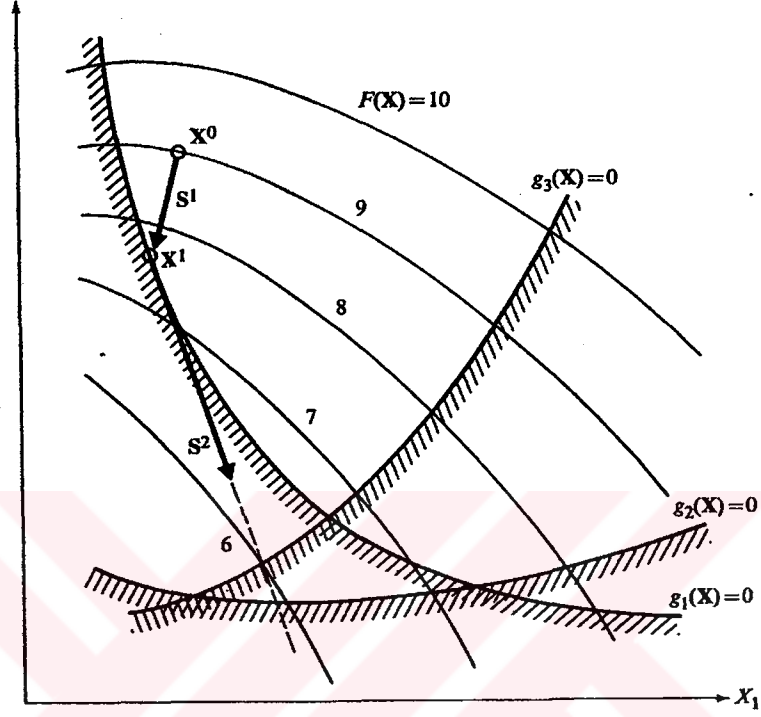
4.4.5. Bir dayanıklı uygun doğrultu metodu

Genelleştirilmiş indirgenmiş gradyan metodu, eğer kısıt yüzeyleri çok fazla doğrusallıktan sapmıyorsa, kısıt yüzeylerinin optimumu verimli bir şekilde takip etmesi gibi üstünlüklere sahiptir. Bununla beraber, metodun büyük bir sakıncası eğer eşitsizlik kısıtlarının büyük bir miktarı iterasyonlarda göz önüne alınır ise, serbest değişkenlerin ilavesi bilgisayarda büyük hafıza gereksinimlerine sebep olması ve bağımlı değişkenlerin değerlerini belirlemek için büyük bir alt problemin çözümünü gerektirmesidir.

Bölüm 4.4.3' deki uygun doğrultu metodu bazı sakıncalara sahiptir ki kritik kısıtlar için doğruluk genellikle genelleştirilmiş indirgenmiş gradyan metodundaki kadar büyük değildir. Fakat o büyük bir üstünlük sunar çünkü optimizasyon işleminde verilen bir noktada kritik olan sadece bu kısıtların gradyanlarının hesaplanması ve depolanması gerekir [34].

Verilen X^0 noktasındaki bir başlangıç tasarımını düşünelim. İlk önce kısıtlar hesaplanana kadar en dik eğim doğrultusunda arama yapılır. Eğer bu birden fazla iterasyon gerektirirse, işlemi hızlandırmak için kısıtsız metodlardan biri kullanılabilir. Hesaplanmış kısıt sınırlarına sahip olarak, S arama doğrultusu bütün uzaklaşma

faktörleri $\theta_j = 0$ kabulü ile bulunur. Bu genelleştirilmiş indirgenmiş gradyan metoduyla elde edilmiş arama-doğrultularına hem matematik hemde geometrik olarak eşdeğer olan Şekil 4.6' da gösterilen S^2 arama doğrultusunu verir [34].



Şekil 4.6 Arama doğrultusu

Tartışma

Bir dayanıklı uygun doğrultular metodu bir-boyutlu arama esnasında uygun olmayan tasarımlar üretir ve uygun bölgeye dönmek için Newton metodunu kullanır. Ayrıca, bu metod yüksek dereceli doğrusal olmayan fonksiyonlarla çalışırken genelleştirilmiş indirgenmiş gradyan metodu ile aynı zorluklara sahiptir. Son olarak, eğer hesaplar hata içeriyorsa, bu iki metod kısıtları kesin olarak sağlama yetersizliğinden dolayı kararsız olabilir. Bu metod birçok tasarım probleminin çözümü için güçlü bir tekniktir [34].

4.4.6. Ardışık quadratik programlama metodu (AQP)

Uygun doğrultular metodu, genelleştirilmiş indirgenmiş gradyan metodu ve dayanıklı uygun doğrultuların metodu ile ilk önce bir arama doğrultusu oluşturulmuş ve sonra bu doğrultuda mümkün olduğu kadar çok tasarımları geliştirmek için bir tek-boyutlu arama yapılmıştır. Herbir durumda, arama yönü sadece birinci derece gradyan bilgisinin kullanımı ile bulunmuştur. Bir boyutlu aramada ilk adım az çok keyfi olmasına rağmen,

gradyan bilgisinin kullanımı ile, tek-boyutlu arama problemi için bir çözüm için iyi bir ilk tahmin sağlayabilme yeteneğine sahibdik.

Burada, bir quadratik amaç ve doğrusal kısıtlar ile bir alt problemin çözümü arama doğrultusunun bulunduğu bir tekniği göz önüne alalım. Amaç fonksiyonu Lagrange çarpanları ve bir dış cezanın kullanımı ile arttırılır öyleki, tek-boyutlu araştırmanın sonucu kısıtsızdır. Ayrıca, $\alpha = 1.0$ 'ın bir başlangıç adımı bir-boyutlu araştırmada α^* için çok iyi bir tahmin sağlayacaktır.

Hesaplara istenen arama doğrultusunun belirlenmesi ile başlanır. Bu arttırılmış amaç fonksiyonu için bir quadratik yaklaşımın ve kısıtlar için bir doğrusal yaklaşımın oluşturulması ile yapılır öyleki, doğrultu-bulma problemi aşağıdaki hale gelir [34]:

$$Q(S) = F(X) + \nabla F(X) \cdot S + \frac{1}{2} S^T B S \quad (4.15)$$

$$\nabla g_j(X) \cdot S + \delta_j g_j(X) \leq 0 \quad j=1, m \quad (4.16)$$

$$\nabla h_k(X) \cdot S + \bar{\delta} h_k(X) = 0 \quad k=1, l \quad (4.17)$$

Burada tasarım değişkenleri S ' in bileşenleridir. B pozitif tanımlı, başlangıçtaki tanım matrisidir ve Lagragian'ın Hessian matrisine yaklaşmak için müteakip iterasyonlarda güncelleştirilecektir. δ_j ve $\bar{\delta}$ skaler parametreleri probleme bağlıdır ve doğrusallaştırılmış kısıtlar arasındaki çelişkileri önlemek için kullanılır. Yani, doğrusallaştırılmış kısıtların uygun bölgeyi tamamen kesmemesini güvence altına almak için kullanılır. Bu parametreler aşağıdaki gibi tanımlanır [34]:

$$\delta_j = 1 \quad \text{eğer } g_j(X) < 0 \quad (4.18)$$

$$\delta_j = \bar{\delta} \quad \text{eğer } g_j(X) \geq 0 \quad (4.19)$$

$$0 \leq \bar{\delta} \leq 1 \quad (4.20)$$

$\bar{\delta}$ parametreleri mümkün olduğu kadar 1' e yakın olarak seçilmelidir. $\bar{\delta} = 0.9 - 0.95$ arasında olması tavsiye edilir [34].

(4.17) vasıtası ile (4.15) eşitliğinin doğrultu-bulma problemi gerçekten bir quadratik programlama problemidir ve onun çözümü için özel teknikler mevcuttur [31]. Bununla beraber, bu bir iyi-halli optimizasyon problemidir ve bu bölümde önceden tartışılan metodlardan herhangi biri de kullanılabilir. Bu alt optimizasyon problemi için fonksiyonların ve türevlerinin kolayca ve verimli bir şekilde elde edilmesi önemlidir. Bu yüzden, bu alt optimizasyon işleminin verimliliği, pratik mühendislik tasarımında genellikle kritik değildir.

(4.17) vasıtası ile (4.15) eşitliğinin alt problemi esas tasarım probleminin bütün kısıtlarını içerir. Eşitsizlik kısıtlarının sayısı oldukça büyük olduğundan dolayı, burada kullanılacak çok kritik kısıtların sadece bir alt grubunu seçmek genellikle istenir. Kısıtların iptali gerekli bilgisayar depolama gereksinimlerini azaltır. Sonuçta, bir ortadan kaldırılmış kısıt yeni tasarımın analizi üzerinde bozulmuş hale gelir, bu algoritma kısıtın indirgenmesi halinde hiçbir özel zorlukla karşılaşmaz.

Bir sonraki adımda, bilinen doğrultu-bulma probleminin çözümü ile Lagrange çarpanlarına ihtiyaç duyulur. Eğer ikili programlama metodları alt problemler için kullanılırsa, bu bilgi doğrudan mevcut olabilir. Aksi halde, çarpanlar optimum tasarım duyarlılığı ile ilgili metodlar ile elde edilebilir.

Belirlenmiş arama doğrultusu S' e sahip olarak, tasarım bir tek-boyutlu arama problemi olarak, bilinen şekilde güncelleştirilir. Bunun dışında burada bir dış ceza fonksiyonu kullanılır [34].

$$\phi = F(X) + \sum_{j=1}^m u_j \{ \max[0, g_j(X)] \} + \sum_{k=1}^l u_{m+k} |h_k(X)| \quad (4.21)$$

burada

$$X = X^{q-1} + \alpha S \quad (4.22)$$

$$u_j = |\lambda_j| \quad j=1, m+l \quad \text{ilk iterasyon} \quad (4.23)$$

$$u_j = \max \left[|\lambda_j|, \frac{1}{2} (u_j' + |\lambda_j|) \right] \quad \text{müteakip iterasyon} \quad (4.24)$$

ve başlangıç iterasyonundan $u'_j = u_j$ seçilir.

Bu tek-boyutlu arama problemi iyi şartlandırılmıştır ve $\alpha = 1.0$ değeri α^* için çok iyi ilk tahmindir. Genellikle, quadratik polinom enterpolasyonu α^* değerinin çözümü için yeterlidir.

Bu noktada, arama doğrultusu tanımlanmıştır ve tasarımı güncelleştirmek için tek-boyutlu arama oluşturulmuştur. Arttırılmış tasarım hedefi için bir geliştirilmiş quadratik yaklaşımı sağlamak için B matrisinin güncellenmesi gereklidir. Powell [34], Broydon-Fletcher-Shanno-Goldfarb güncelleme formülünü tavsiye eder.

$$B^* = B - \frac{Bpp^T B}{p^T Bp} + \frac{\eta\eta^T}{p\eta} \quad (4.25)$$

Burada

$$p = X^q - X^{q-1} \quad (4.26)$$

$$\eta = \theta y + (1 - \theta)Bp \quad (4.27)$$

$$y = \nabla_x \phi(X^q, \lambda^q) - \nabla_x \phi(X^{q-1}, \lambda^{q-1}) \quad (4.28)$$

$$\phi(X, \lambda) = F(X) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(X) + \sum_{k=1}^l \lambda_{m+k} h_k(X) \quad (4.29)$$

ve

$$\theta = \begin{cases} 1.0 & (py \geq 0.2 p^T Bp) \\ \frac{0.8 p^T Bp}{p^T Bp - py} & (py < 0.2 p^T Bp) \end{cases} \quad (4.30)$$

Yukarıdaki (4.30) denklemindeki 0.2 ve 0.8 sabitleri sayısal deneyler sonucu seçilmiştir. Yeni B^* matrisi (4.15) eşitliğinde B ile yer değiştirir ve optimizasyon işlemi yakınsama için tekrar edilir [34].

Bu metod birkaç metodun en iyi özelliklerini birleştirir. Birincisi, Lagrangian' a yaklaşılr ve sonra bu yaklaşılmış fonksiyon minimize edilir. Bununla beraber, fonksiyon sadece başlangıç X değişkenlerine göre yakınsadığından dolayı, minimizasyon alt problemi kısıtlar için doğrusal yaklaşımları kullanır. Sonuç daha sonra

arttırılmış Lagrange'ı minimize etmek için bir arama doğrultusu olarak kullanılır. Metod eşitlik kısıtları ile iyi çalışır ve S için çözümlerin alt problemleri kadar uzun doğrusal eşitlik kısıtları göz önüne alınabilir. Sonuç olarak, metod uygun olmayan tasarımları ilave strateji gerektirmeden bertaraf edebilir. Bu algoritma bize çok güçlü bir optimizasyon aracı sağlar [34].

4.6. Çok Amaçlı Optimizasyon

Genel optimizasyon formülasyonu ile ortaya çıkarılan matematiksel problemin rijitliği bir pratik tasarım probleminden çoğunlukla uzaktır. Nadiren bir tek kısıt ile amaç fonksiyonu karşı karşıya olunan problemi temsil eder. Daha sıkça $F(X) = \{F_1(X), F_2(X), \dots, F_m(X)\}$ amaç fonksiyonlarının bazı yollarla işlenmiş bir amaç fonksiyonu vektörü vardır. Bu amaçların izafi önemi, genellikle sistemin en iyi performansı belirlenmeden ve amaçlar arasındaki ilişkiler tamamen anlaşılincaya kadar bilinmez. Amaçlar arttığı zaman, ilişkiler benzer şekilde karmaşıklaşır ve daha zor tanımlanabilir [23].

Çok-amaçlı optimizasyon, çok sayıdaki kısıt veya sınırlara göre bir $F(X)$ amaç fonksiyon vektörünün minimizasyonu ile ilgilidir [23].

$$\text{Minimize et } F(X) \quad X \in R^n \quad (4.31)$$

$$G_i(X) = 0 \quad i=1, \dots, m_e \quad (4.32)$$

$$G_i(X) \leq 0 \quad i=m_e+1, \dots, m \quad (4.33)$$

$$X^l \leq X \leq X^u \quad (4.34)$$

$F(X)$ bir vektör olduğundan dolayı, eğer $F(X)$ ' in bileşenlerinden herhangi biri çelişiyorsa, bu problem için bir tek çözümün olmadığı gerçeği önemlidir. Amaç fonksiyonunu karakterize etmek için alt olmayan (veya Pareto optimalliği diye isimlendirilen) kavram kullanılmak zorundadır. Bir alt olmayan çözüm, bir amaç fonksiyonunun iyileşmesi durumunda, diğerinin derecesinin düşmesini gerektiren bir çözümdür. Bu kavramı çok doğru olarak tanımlamak için, bütün kısıtları sağlayan $X \in R^n$ parametre uzayında, bir uygun Ω bölgesini gözönüne alalım [23].

$$\Omega = \{X \in R^n\} \quad (4.35)$$

$$g_i(X) = 0 \quad i=1, \dots, m_e \quad (4.36)$$

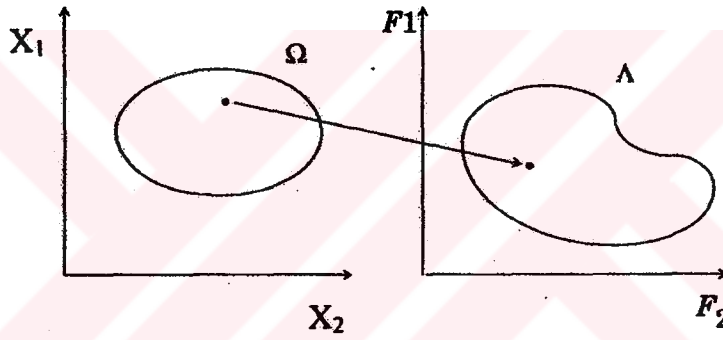
$$g_i(X) \leq 0 \quad i=m_e+1, \dots, m \quad (4.37)$$

$$X^l \leq X \leq X^u \text{ kısıtlarına göre} \quad (4.34)$$

Bu bize amaç fonksiyonu uzayı Λ için benzer uygun bölgeyi tanımlamamıza olanak verir.

$$\Lambda = \{y \in R^m\} \text{ burada } X \in \Omega \text{ için } y = F(X) \text{ dir.} \quad (4.38)$$

Performans vektörü $F(X)$, Şekil 4.7' de bir iki-boyutlu durum için gösterildiği gibi parametre uzayından amaç fonksiyonu uzayına gidiş.



Şekil 4.7 Parametre uzayından amaç fonksiyonu uzayına gidiş.

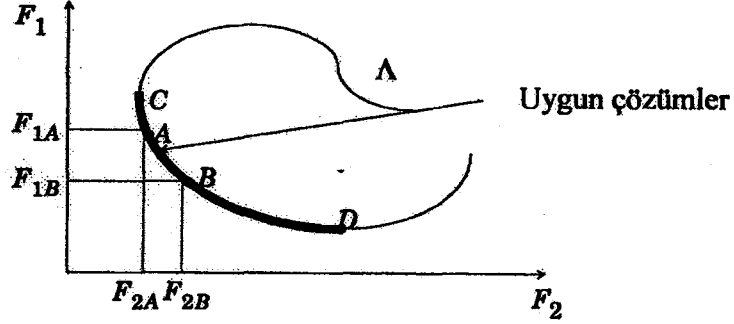
Bir uygun çözüm aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Tanım: Eğer X^* değişkeninin bazı komşuluğunda $(X^* + \Delta X) \in \Omega$ olacak şekilde bir ΔX bulunmazsa, $X^* \in \Omega$ noktası bir uygun çözümdür ve aşağıdaki koşullar geçerlidir [23].

$$F_i(X^* + \Delta X) \leq F_i(X^*) \quad i=1, \dots, m \quad (4.39)$$

$$F_j(X^* + \Delta X) < F_j(X^*) \quad \forall j \text{ için} \quad (4.40)$$

Şekil 4.8' deki iki-boyutlu gösterimde, uygun çözümlerin bir grubu C ve D arasındaki eğri üzerine düşerler. A ve B noktaları özel uygun noktaları gösterirler [23].



Şekil 4.8 Uygun çözüm grupları

Bir F_1 amacındaki iyileşme, diğer F_2 amacındaki bir derece düşmesini gerektirdiğinden, A ve B açıkça uygun çözüm noktalarıdır ve $F_{1B} < F_{1A}$, $F_{2B} > F_{2A}$ dır. Çok-amaçlı optimizasyon uygun çözüm noktalarının seçimi ve üretimi ile ilgilidir.

4.6.1. Ağırlıklı toplam metodu

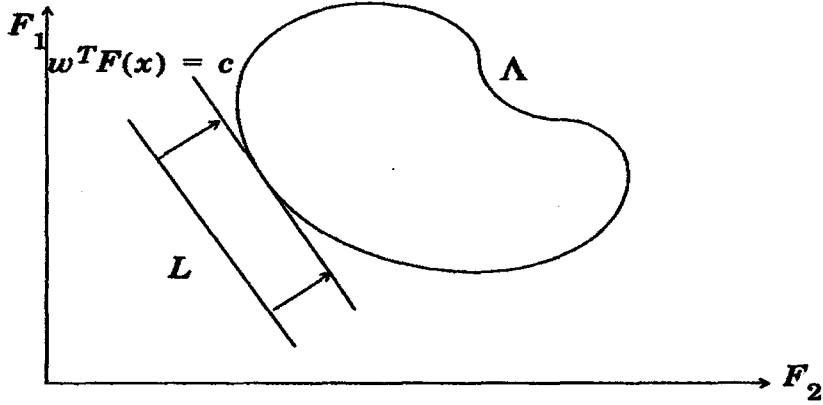
Ağırlıklı toplam metodu, $F(X)$ vektörünün çok-amaçlı minimizasyon problemini bütün amaç fonksiyonlarının bir ağırlaştırılmış toplamını oluşturacak bir skaler probleme dönüştürür [23].

$$\text{Minimize et } F(X) = \sum_{i=1}^m w_i F_i(X)^2, \quad X \in \Omega \quad (4.41)$$

Daha sonra problem bir standart kısıtsız optimizasyon algoritması kullanılarak optimize edilebilir. Burada problem, amaç fonksiyonlarının her birine bir ağırlık katsayısının ilave edilmesindedir. Ağırlık katsayıları, mutlaka amaç fonksiyonlarının izafi önemleri ile doğrudan uymak zorunda değildir ve amaç fonksiyonları arasındaki ilişkilerin açıklanmasına müsaade eder. Ayrıca, uygun çözüm sınırı aynı anda meydana gelmeyebilir ve bu yüzden belirli çözümlere ulaşamayabilinir [23].

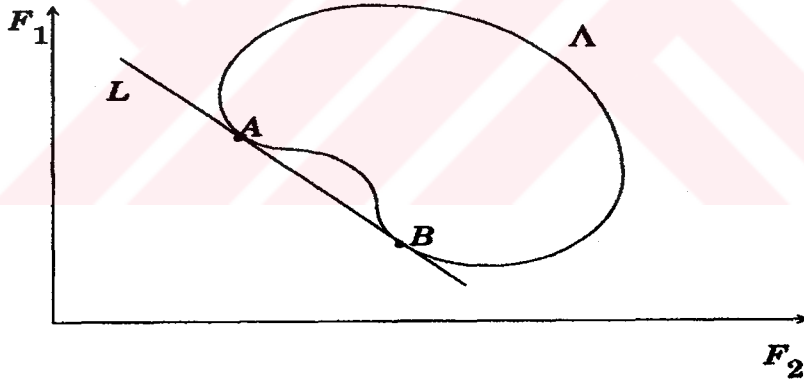
Şekil 4.9' daki iki amaç fonksiyonunun olduğu durumu göz önüne alalım. Amaç fonksiyonu uzayının bir L doğrusu, $w^T F(X) = c$ olacak şekilde çizilmiştir. Eşitlik (4.41)' in minimizasyonu L ' nin orijinden dışarıya doğru ilerlediği zaman Λ sınırına tam temas ettiği c değerinin bulunması olarak açıklanabilir. Bu yüzden w_1 ve w_2

ağırlıklarının seçimi L 'nin Λ sınırına temas ettiği yerde çözüm noktasına gitmek için yönünü değiştirdiği eğimini tanımlar [23].



Şekil 4.9 Ağırlıklı toplam metodunun geometrik gösterimi.

Evvelce söylenen dış bükeylik problemi Şekil 4.10' da gösterilen Λ 'nın alt sınırı dış bükey olmadığı zaman ortaya çıkar. Bu durumda A ve B arasındaki uygun çözüm grupları mevcut değildir [23].



Şekil 4.10 Dış bükey olmayan çözüm sınırı.

5. YAPI VE H_2 / H_∞ DAYANIKLI KONTROL SİSTEMİNİN BİRLEŞİK OPTİMUM TASARIMI

Bu çalışmada, yapı ve kontrol sisteminin birleşik optimum tasarımı dayanıklı kontrol formülasyonları kullanılarak yapılmıştır. Yapı sonlu elemanlar metodu kullanılarak modellenmiş ve kontrolcü H_2 ve H_∞ formülasyonları kullanılarak tasarlanmıştır. Yapı ve kontrolcü eş zamanlı ve ardışık olarak optimize edilmiştir. H_2 ve H_∞ formülasyonları kullanılarak yapının ve kontrolcünün eşzamanlı olarak yapısal tekil değerlerin şekillendirilmesi ile optimize edilebileceği gösterilmiştir. Eş zamanlı optimizasyonun bir ayrı optimizasyon problemine dönüştürülebileceği gösterilmiştir. Sadece dayanıklı kontrol kurallarının sakıncalarından kaçınırken, yapının ve kontrolcünün ardışık optimizasyonunun genellikle eğer bilinen yapının serbestlik derecesi büyük ise belirli üstünlüklere sahip olduğu; yapısal tekil değer şekillendirmesi ile dayanıklı kontrol edilmiş yapıların tasarımını mümkün kıldığı gösterilmiştir. Daha sonra, H_2 ve H_∞ dayanıklı kontrol formülasyonları bir kafes yapının ve kontrolcüsünün optimum tasarımına eş zamanlı ve ardışık olarak uygulanmıştır. Sonuçlar birbiriyle karşılaştırılmıştır. Birleşik yapı ve kontrolcü tasarım problemi için, ardışık optimizasyon yaklaşımının global minimumu eş zamanlı optimizasyon yaklaşımından daha hızlı bulunduğu sonucuna varılmıştır.

Son yirmi yılda, yapısal optimizasyon bilgisayar-destekli-tasarım araçlarının gelişimi ile teşvik edilen birçok çalışmanın konusu olmuştur. Bu çalışmaların önemli bir sınıfı robot kolları, uçak ve uydu yapıları, titreşim kontrol problemleri, antenler ve akıllı (smart) yapılar gibi kontrol edilmiş yapıların optimizasyonudur. Amaç, bir yapının davranışının aktif kontrol kullanımı ile iyileştirilebileceği; kontrol edilmiş yapıların kontrol edilmemiş duruma göre daha az malzeme kullanılarak istenen cevaba ulaşabileceğidir [29].

Bu gerçeklerle hareket ederek, birleşik yapı ve kontrol tasarım probleminin dayanıklılık karakteristikleri bu çalışmada incelenmiştir. Yapı, yapısal tekil değerlerin

şekillendirilmesiyle optimize edildiğinde, dayanıklı kontrol formülasyonlarının bir yapı ve kontrolcüsü için ayrık optimizasyon problemine dönüşebileceği ve daha sonra kontrolcünün herhangi bir istenen yolla tasarlanabileceği gösterilmiştir. Bu yaklaşım sade H_2 ve H_∞ dayanıklı kontrol kuralı formülasyonlarının sakıncalarının ortadan kaldırılması, izafi olarak daha az CPU zamanında daha iyi optimize edilmiş yapılar vermesi, yapı ve kontrolcüsünün ayrık tasarımına izin vermesi, kontrolcünün tasarımı için model derecesi düşürme tekniklerinin uygulanması için modelleme hatalarının ortadan kaldırılması ve çok serbestlik derecesine sahip yapılar için uygun olması gibi üstünlüklere sahiptir. Böylece, kontrol edilmiş bir yapının dayanıklılık karakteristikleri alışlagelmiş H_2 optimum kontrol kuralının maliyeti ve enerji şekillendirme yaklaşımı arasındaki bağlantılar bilinen yapının tekil değerlerinin kullanımı ile türetilmiştir. Çalışmanın amacı, yapısal tekil değer şekillendirmesi temeline dayalı kontrol edilmiş yapının optimum tasarımı için yeni bir yaklaşım geliştirmektir ve bir yapıyı kontrol etmek için tasarlanmış farklı kontrolcülerin davranışını değerlendirmek değildir. Son olarak, tahrik edici elemanların dinamiği ihmal edilmiştir ve farklı kontrolcüler için kontrol hareketinin genliği bir kriter olarak gözönüne alınmamıştır. Buna ilaveten, “full control” ve “full information” durumu tüm kontrolcü tasarım çalışmalarında basitlik için gözönüne alınmıştır.

5.Bölüm’ ün içeriği aşağıdaki gibidir: tekil değer ayrıklaştırmasının bazı özellikleri Bölüm 5.1’ de gözden geçirilmiştir. Takiben, yapısal optimizasyon ve kontrolcü tasarım problemleri sırasıyla Bölüm 5.2 ve 5.3’ de sunulmuştur. Kontrol edilmiş yapının optimum tasarımı için tekil değer şekillendirmesi ile H_2 ve H_∞ kontrol formülasyonları arasındaki ilişkiler Bölüm 5.4’ de sunulmuştur. Sayısal örnekler Bölüm 5.5’ de verilmiştir.

5.1. Tekil Değer Ayrıklaştırmasının Yapılara Uygulanması

Tekil Değer Ayrıklaştırması (TDA) matris analizinde çok faydalı bir araçtır. TDA’nın yapısal tasarım duyarlılığı problemlerinde alışlagelmiş metodlara göre bazı üstünlüklere sahip olduğu gösterilmiştir [5] ve [24]. TDA bu çalışmada da yapısal optimizasyon için uygulanan temel araçtır. TDA’ nın bazı temel özellikleri bu bölümde gözden geçirilmiştir [9] ve [14] .

$A \in F^{m \times n}$ olsun. Burada F bir alandır (gerçek $\mathfrak{R}$ veya kompleks $\mathbb{C}$). Burada üç matris ortaya çıkar.

$$U = [u_1, u_2, \dots, u_m] \in F^{m \times m} \quad (5.1)$$

ve

$$V = [v_1, v_2, \dots, v_n] \in F^{n \times n} \quad (5.2)$$

öyleki

$$A = U \Sigma V^* \quad (5.3)$$

Burada

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

$$\Sigma_1 = \text{Diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p\} \quad (5.5)$$

ve

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \dots \geq \sigma_p \geq 0, \quad p = \min\{m, n\}. \quad (5.6)$$

Yukarıdaki eşitliklerde σ_i , A 'nın i . tekil değeridir, ve u_i ile v_j vektörleri sırasıyla, i . sol tekil vektör ve j . sağ tekil vektörlerdir. u_i ve v_i tekil vektörleri aşağıdaki özdeğer problemleri ile tanımlanırlar.

$$A v_i = \sigma_i u_i \quad (5.7)$$

$$A^* u_i = \sigma_i v_i \quad (5.8)$$

Burada (*) eşlenik transpozu gösterir. Yukarıdaki eşitlikler aşağıdaki gibi de yazılabilirler.

$$A^* A v_i = \sigma_i^2 v_i \quad (5.9)$$

$$A A^* u_i = \sigma_i^2 u_i \quad (5.10)$$

Böylece σ_i^2 , AA^* veya A^*A matrislerinin bir özdeğeridir, u_i AA^* matrisinin bir özvektörüdür ve v_i A^*A matrisinin bir özvektörüdür.

Tekil değerler için aşağıdaki notasyonlar sıkça kullanılır.

$$\bar{\sigma}(A) = \sigma_{\max}(A) = \sigma_1(A) = A \text{ matrisinin en büyük tekil değeri} \quad (5.11)$$

$$\underline{\sigma}(A) = \sigma_{\min}(A) = \sigma_p(A) = A \text{ matrisinin en küçük tekil değeri} \quad (5.12)$$

A ve Δ 'nın kare matrisler olduğunu varsayalım. Sonra, aşağıdaki eşitlikler geçerlidir [14].

$$(i) \quad \bar{\sigma}(A^{-1}) = \frac{1}{\underline{\sigma}(A)} \quad \text{eğer } A \text{ tekil değilse.} \quad (5.13)$$

$$(ii) \quad \sigma_i(A\Delta) \leq \sigma_i(A)\sigma_1(\Delta) \quad \forall i \quad (5.14)$$

$$(iii) \quad \sigma_{i+j-1}(A+\Delta) \leq \sigma_i(A) + \sigma_j(\Delta) \quad \forall i, j \quad (5.15)$$

$$(iv) \quad [1 - \sigma_1(\Delta)]\sigma_i(A) \leq \sigma_i(A(I+\Delta)) \leq [1 + \sigma_1(\Delta)]\sigma_i(A) \quad \forall i \quad (5.16)$$

İspatlar için, (5.13), (5.14) ve (5.15) için [14] s.178 ve (5.16) için [14] s.183'e bakınız.

5.2. Yapısal Optimizasyon Problemleri

Elastik yapılar için üç temel yapısal optimizasyon problemi vardır. Bunlar; boyut optimizasyonu, şekil optimizasyonu ve topoloji optimizasyonu problemleridir [29]. Boyut optimizasyonunda, yapısal elemanın boyutları veya kalınlığı optimize edilir. Topoloji optimizasyonunda, yapısal elemanın şekli belirlidir, fakat malzemenin yoğunluğu veya doluluğu optimize edilerek üzerinden bir miktar malzeme alınır; topoloji optimize edilir. Şekil optimizasyonunda, yapısal elemanın şekli bir optimizasyon algoritması ile tamamen belirlenir. Bu çalışmada da kullanılan sonlu elemanlar metodu (SEM), yapıları modellemek için yapısal optimizasyon problemlerinde yaygın olarak kullanılır ve aşağıda özetlenmiştir.

5.2.1. Sonlu eleman eşitlikleri

SEM ile elde edilen bir yapının yarı-ayrık (semi-discrete) eşitlikleri aşağıdaki formda yazılabilir.

$$M\ddot{Z} + C\dot{Z} + KZ = f \quad (5.17)$$

Burada M kütle matrisi, C viskoz sönüm matrisi, K katılık matrisi, f uygulanan kuvvet vektörüdür ve Z , $\dot{Z}$ ve $\ddot{Z}$ sırasıyla yer değiştirme, hız ve ivme vektörleridir. M , C ve K simetrik olarak alınır; M pozitif-tanımlı, ve C ve K pozitif yarı-tanımlıdır [15].

Yukarıdaki sistem sönümleme teriminin ilave edilmesinden dolayı kararlıdır. Genellikle, bir fiziksel sistem için sönümleme matrisinin tahmin edilmesi kolay değildir. Literatürdeki C sönümleme matrisinin nasıl tahmin edileceği hakkında birçok çalışmanın arasında en basit metod “oransal sönümleme” veya “Rayleigh sönümleme” diye adlandırılan model aşağıdaki forma sahiptir [20].

$$C = \alpha M + \beta K \quad (5.18)$$

Burada α ve β sabitlerdir. Diğer bir deyişle, C sönümleme matrisi kütle ve katılık matrisleri ile orantılıdır. Bu çalışmada, sayısal örnekte yapının Rayleigh sönümüne sahip olduğu basitlik için kabul edilmiştir (örneğin, bkz. Bölüm 5.5).

5.2.2. Kısıtlı yapısal optimizasyon problemleri

Yapısal optimizasyon problemlerinin çoğu tasarım değişkenleri üzerinde alt ve/veya üst sınırlar veya cebirsel bağıntılar formunda kısıtlara sahiptirler. Bu kısıtlar tasarımın fonksiyonel gereksinimleri, geometri, imkanların mevcudiyeti veya görünüm ve estetik ile ilgili olabilirler [12].

(5.17) ile verilen yarı-ayrık (semi-discrete) sonlu eleman eşitliği olan bir yapıyı gözönüne alalım. Sonra, (5.17)'nin Laplace dönüşümünü alarak ve sıfır başlangıç koşullarını kabul ederek aşağıdaki harmonik cevap elde edilir.

$$Z = (-M\omega^2 + Cj\omega + K)^{-1} f \quad (5.19)$$

Bu çalışmada, (5.19)'daki $(-M\omega^2 + Cj\omega + K)^{-1}$ transfer matrisinin tekil değerleri yapısal tekil değerler olarak isimlendirilir. Burada kompleks Laplace dönüşümü değişkeni $s = j\omega$ yerine konur, ω ikaz frekansıdır ve j imajiner birimdir. $F(X)$ minimize edilmek için amaç (veya maliyet) fonksiyonunu gösterebilir, burada X belirlenecek olan yapısal ve kontrolcü parametre vektörüdür. Sonra, çeşitli değişkenlerin bir fonksiyonunun kısıtlı minimumunu bulmak için, aşağıdaki optimizasyon problemleri çözülür.

$$\min_x F(X) \quad (5.20)$$

$$LB \leq X \leq UB \quad (5.21)$$

Burada LB ve UB , X tasarım değişkenleri üzerinde alt ve üst sınırları tanımlarlar. Çözüm $LB \leq X \leq UB$ aralığında bulunur.

Bu çalışmada kullanılan optimizasyon algoritması “Ardışık Quadratik Programlama” metodudur. Bu method, verimlilik, doğruluk ve yakınsama hızına göre doğrusal olmayan programlama metodlarının en iyisidir [32]. İterasyon X_0 başlangıç vektöründe başlar ve çözüm vektörü X , $F(X)$ fonksiyonunun doğrusal olmayan $C(X) \leq 0$ eşitsizliğine göre minimize edilmesi ile bulunur. Bu çalışmada $C(X) \leq 0$ yapısal gerilmedir. Kontrol edilmiş yapının optimum tasarım problemi maliyetlerin yapının ağırlığı ve dayanıklılık/performansın yapı ve kontrolcü için ölçüldüğü bir çok-amaçlı optimizasyon problemidir. Sayısal örneklerde, bu maliyetler arasındaki ilişkiler belirtilerek çözüm grupları bir grafik üzerinde gösterilmiştir.

5.2.3. Gerilme analizi

Bir çubukdaki ortalama gerilme τ

$$\tau = \frac{F}{h} \quad (5.22)$$

ile verilir ve bir çubuktaki ortalama şekil değiştirme ε

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (5.23)$$

ile açıklanabilir. Burada F uygulanan kuvvet, h çubuğun kesit alanı, l çubuğun boyu ve Δl uzama miktarıdır. Genellikle, elastik bölgede gerilme ve şekil değiştirme alanları “genelleştirilmiş Hooke kanunu” ile verilir.

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (5.24)$$

Burada τ_{ij} ve ε_{kl} sırası ile gerilme ve şekil değiştirme tensörü bileşenleridir ve C_{ijkl} elastiklik tensörüdür doğrusal, izotropik, elastik, homojen malzemeler için aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$C_{ijkl} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{E}{2(1+\nu)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (5.25)$$

E elastiklik modülü, ν Poisson oranı, δ_{ij} Kronecker delta fonksiyonudur ve

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad (5.26)$$

Burada u_k yer değiştirme vektörü bileşeni ve x_k malzeme koordinatıdır [2]. Bu çalışmada, optimizasyon probleminde doğrusal olmayan eşitsizlik kısıtları olarak kabul edilen gerilmeler sayısal çözüm esnasında emniyet limitlerinin altında tutulmuştur (örneğin, bkz. Bölüm 5.5).

5.3. Kontrolcü Tasarım Metodları

Literatürde çok sayıda kontrolcü tasarım metodu vardır (örneğin, bkz. [7]). Aşağıdaki doğrusal-zamanla değişmeyen (linear-time invariant) sistemi gözönüne alalım.

$$\dot{x} = Ax + B_2 u, \quad x(t_0) = x_0 \quad (5.27)$$

Burada x_0 verilmiştir ve keyfidir. Amaç $[t_0, T]$ aralığında tanımlı, T zamanında orijinin civarına götüren $x(t)$ durumunun bir fonksiyonu olan bir $u(t)$ kontrol fonksiyonu bulmaktır ki bu “regülatör problemi” olarak isimlendirilir. Bozucu etkiden-çıkışa transfer matrisinin H_2 ve H_∞ normu bozucu etki girişine göre bir sistem için iyi bir performans göstergesi olduğundan dolayı, yapı ve kontrolcünün

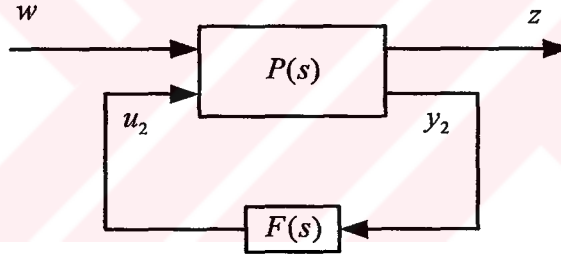
birleşik optimum tasarım problemi yaygın olarak H_2 ve/veya H_∞ dayanıklı kontrol problemi olarak formüle edilir. Aşağıda, H_2 ve H_∞ problemleri gözden geçirilmiştir.

5.3.1. H_2 kontrolcü tasarım metodu

Şekil 5.1' de blok diyagramı verilen sistemi gözönüne alalım, burada w bozucu etki girişi ve z kontrol edilmiş çıktıdır. Transfer matrisi P' nin ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$P(s) = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Burada B_1 bozucu etki girişi, B_2 kontrol girişi, C_1 küçük tutulacak olan hata, C_2 çıkış ölçümü için kontrolcü için verilen matrislerdir [22] ve [35]. H_2 probleminin uygun şekilde davranmasını garanti etmek için D_{11} ve D_{22} sıfır olarak kabul edilmiştir, öyleki $P_{22}(s) = C_2(sI - A)^{-1} B_2 + D_{22}$ sağlanır [35].



Şekil 5.1 Bir sistemin standart blok diyagramı.

Problemin tanımı: H_2 dayanıklı kontrol problemi P' yi içten kararlı yapacak uygun bir gerçek-rasyonel $F(s)$ kontrolcüsünü bulmak ve w' dan z' ye T_{zw} transfer matrisinin H_2 -normunu minimum yapmaktır ($\min \|T_{zw}\|_2$). Çözümü tek bir optimum kontrolcüdür [35].

5.3.1.1. Algoritma

H_2 -normu optimum kontrol problemi, aşağıdaki maliyet fonksiyonunu içeren alışlagelmiş “Doğrusal Quadratik Gaussian optimum kontrol” problemine eşdeğer olduğu gözlemlenerek çözülür [35].

$$\begin{aligned}
J_{LQG} &= \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T y_1^T y_1 dt \right\} = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \begin{bmatrix} x^T & u_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & N_c \\ N_c^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u_2 \end{bmatrix} dt \right\} \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \begin{bmatrix} x^T & u_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1^T \\ D_{12}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 D_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u_2 \end{bmatrix} dt \right\} \quad (5.29)
\end{aligned}$$

Bu yaklaşım, çalışmada kullanılmıştır.

5.3.1.2. Sınırlamalar

Sistem matrisleri üzerinde aşağıdaki sınırlamalar mevcuttur [35]:

- 1) (A, B_2, C_2) kararlı yapılabilir ve bulunabilir olmalıdır.
- 2) D_{11} sıfır olmalıdır, aksi halde H_2 optimum kontrol problemi kötü-hallidir.
- 3) D_{12} ve D_{21}^T matrislerinin rankı sütun sayısına eşit olmalıdır.

5.3.2. H_∞ kontrolcü tasarımı

Şekil 5.1' de gösterilen sistemi gözönüne alalım, burada P sistemi ve F kontrolcüsü gerçek-rasyonel ve uygun olarak kabul edilir. P ' nin ve F ' in durum-uzay modellerinin mevcut olduğu ve onların gerçekleştirmelerinin kararlı ve gözlemlenebilir olduğu kabul edilir.

Problem tanımı: Optimum H_∞ kontrol problemi $\|T_{zw}\|_\infty$ normunu minimize eden tüm kabul edilebilir $F(s)$ kontrolcülerini bulmaktır [35].

Önceden vurgulandığı gibi, optimum H_∞ kontrolcülerini çok-giriş-çok-çıkışlı sistemler için tek değildir. Ayrıca bir optimum H_∞ kontrolcüsünü bulmak hem numerik olarak hemde teorik olarak karmaşıktır. Ulaşmaya çalıştığımız çözüme bir sınır koyduğundan dolayı, ulaşılabilir optimum (minimum) H_∞ normunun bilinmesi, teorik olarak faydalı olabilir. Bu çalışmada birbiri ile karşılaştırılan optimum çözümler aranmıştır.

5.3.2.1. Algoritma

Kontrol kuralı, kapalı-çevrim transfer fonksiyonunun aşağıdaki sonsuz norm eşitsizliğini sağlayacak şekilde hesaplanır.

$$\|T_{zw}\|_{\infty}^{\Delta} = \sup_{\omega} \sigma_{\max}(T_{zw}(j\omega)) < \gamma \quad (5.30)$$

Burada γ başlangıç olarak verilir ve γ -iterasyonu işlemi ile minimize edilir [35].

5.3.2.2. Sınırlamalar

H_2 dayanıklı kontrol probleminin tersine, H_{∞} dayanıklı kontrol problemi için çözüm, her $P(s)$ için ortaya çıkmaz. Bilinen Riccati eşitliğinin çözümünde yakınsama yetersizliği artırılmış $P(s)$ 'in tekil-değer Bode diyagramı özelliklerinin uygun olmaması veya, muhtemelen bu problemin diğer iyi-hal koşullarının bozulmuş olmasının muhtemel göstergesidir. Özellikle, algoritma aşağıdaki koşulların sağlanmasını gerektirir [22]:

$$\text{rank}(D_{12}) = \dim(u_2) \leq \dim(y_1) \text{ and } \text{rank}(D_{21}) = \dim(y_2) \leq \dim(u_1) \quad (5.31)$$

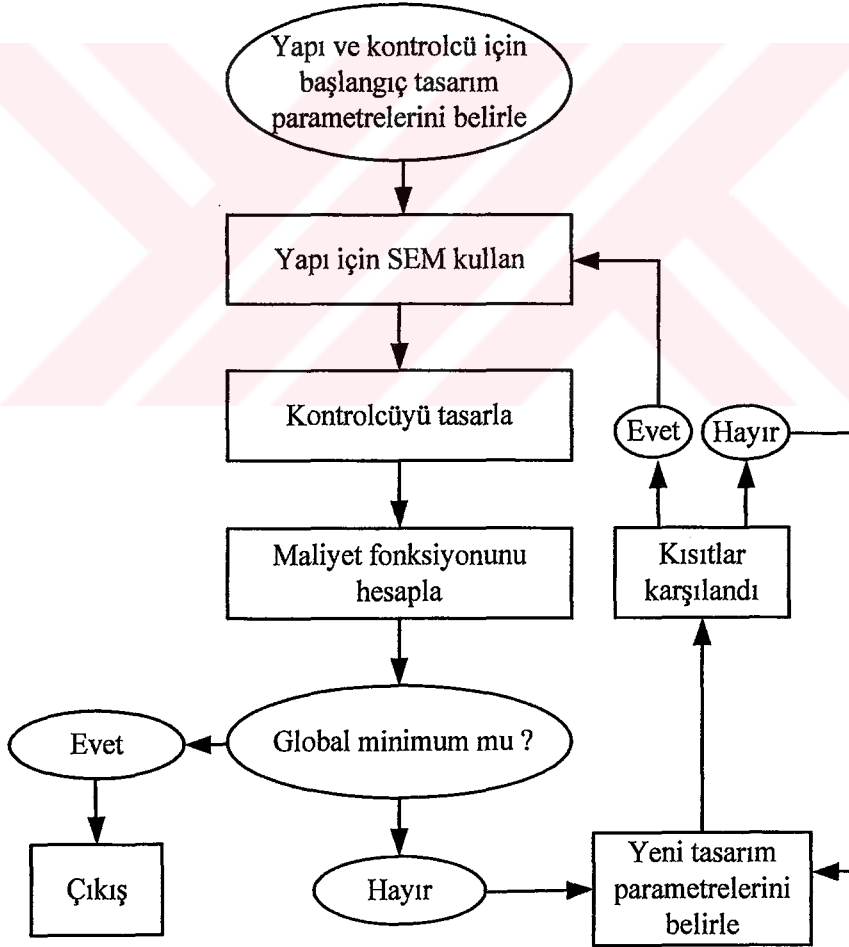
5.4. Kontrol Edilmiş Yapının Optimum Tasarımı

Yapısal optimizasyonda amaç, malzemeyi uygun şekilde dağıtarak tasarım özelliklerini sağlarken, yapının maliyetini minimize etmektir. Diğer yandan, kontrol kuralı yapı mühendisleri tarafından tasarlanmış bir yapı için, kontrol mühendisleri tarafından tasarlanır [29]. Böylece, kontrol edilmiş yapının tasarımı için iki görünen yaklaşım vardır. İlk yaklaşım yapıyı ve kontrolcüyü eş zamanlı olarak optimize eder. İkinci yaklaşımda, kontrolcü tasarlanmadan önce yapı optimize edilir, ve daha sonra kontrolcü tasarlanır ki buna yapının ve kontrolcünün ardışık veya ayrık optimizasyonu denir. Bundan sonra bir alt optimum kontrol edilmiş yapı sonuçta elde edilir. Bu çalışmada, her iki yaklaşım çalışılmış ve örnek bir yapıya uygulanmıştır.

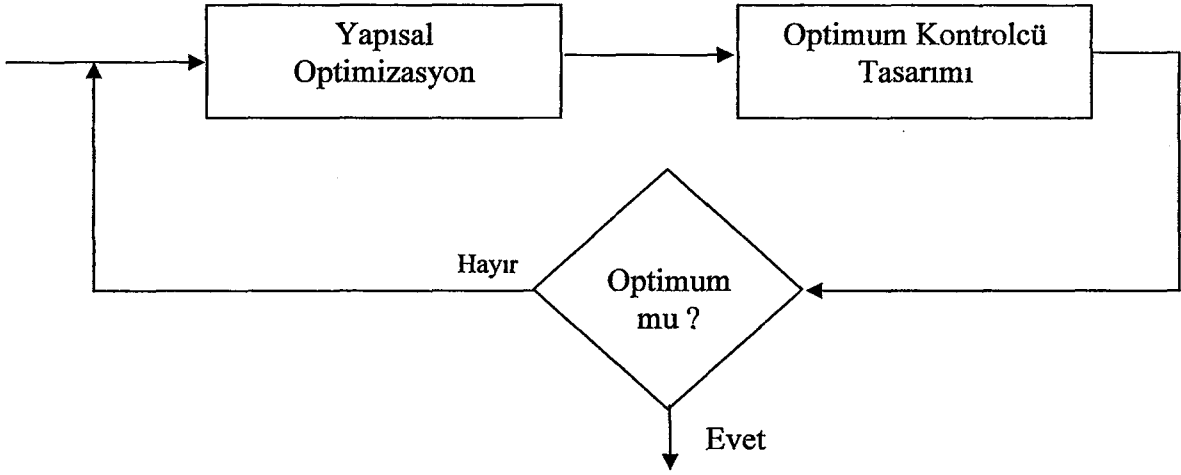
5.4.1. Yapıların ve kontrolcünün eş zamanlı optimizasyonu

Genellikle doğrusal olmayan optimizasyon metodları çoğu yapısal optimizasyon problemlerinde iyi çalışırken, bir optimal kontrolcü tasarımı için uygun değildir. Benzer şekilde, kontrolcü tasarım algoritmaları yapısal optimizasyon problemleri için uygun değildir. Bu nedenle, yapısal ve kontrolcü parametreleri iteratif optimizasyon algoritmaları kullanılarak eş zamanlı olarak optimize edilmelidirler. Eş zamanlı optimizasyon yaklaşımında, yapının ve kontrolcüsünün tasarım parametreleri Şekil 5.2' de gösterildiği gibi eş zamanlı olarak optimize edilir. Eş

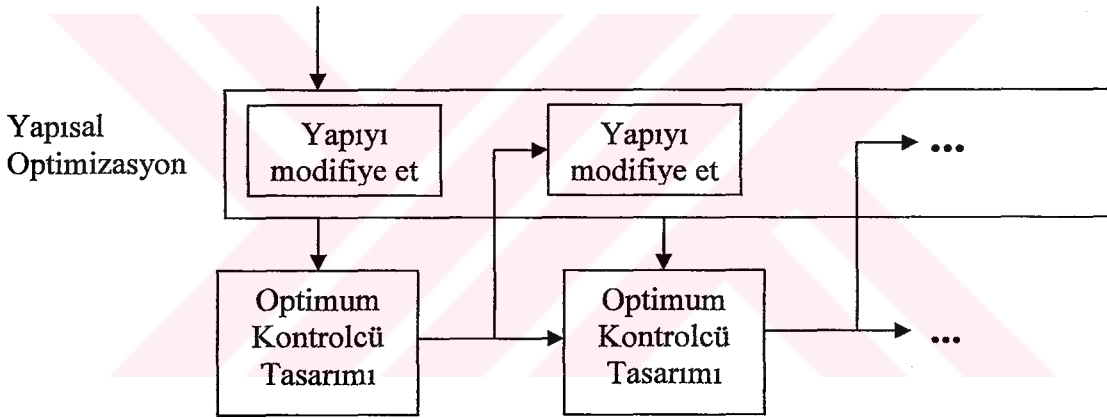
zamanlı optimizasyon için seri ve paralel optimizasyon prosedürü olmak üzere iki yaklaşım vardır [36] (örneğin, bkz. Şekil 5.3). Bu çalışmada, aynı optimum çözümü vermesine rağmen seri yaklaşımdan daha verimli (yani, az hesaplama zamanına ihtiyaç duyar) olduğu iddia edilen paralel eş zamanlı optimizasyon yaklaşımı kullanılmıştır [36]. H_2 optimum kontrol tasarımı probleminde $\|T_{zw}\|_2$ normu minimize edilir; diğer taraftan, H_∞ dayanıklı kontrolcü tasarım metodu için $\|T_{zw}\|_\infty$ normu $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ olacak şekilde γ iterasyon metodu kullanılarak minimize edilir. Burada $\|\Delta\|_\infty < 1/\gamma$ olacak şekilde sistem tüm kararlı Δ matrisleri için kararlıdır ve Δ sistemdeki yapılandırılmış belirsizliği gösterir [35].



Şekil 5.2 Yapının ve kontrolcünün eş zamanlı optimum tasarımı akış diyagramı.



a) Seri optimizasyon yaklaşımı.



b) Paralel optimizasyon yaklaşımı.

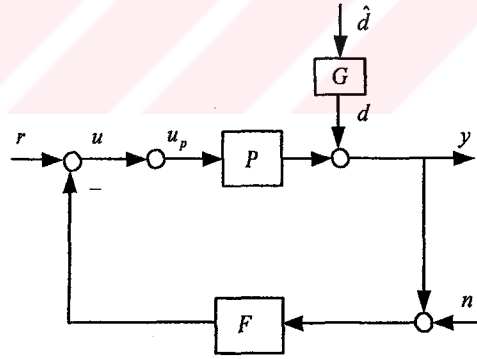
Şekil 5.3 Seri ve paralel optimizasyon yaklaşımları.

5.4.2. Yapı ve H_∞ kontrolcüsünün ardışık optimizasyonu

Literatürde, çok-giriş-çok-çıkışlı sistemler için H_∞ kontrol problemi çözümünün tek olmayabileceği ve optimumluğunun şüpheli olduğu belirtilmiştir [21]. Buna ilaveten, Bölüm 5.3.1.2 ve 5.3.2.2' de gösterildiği gibi, sistem matrisleri üzerinde sınırlamalar vardır. Bundan başka, literatürde vurgulandığı gibi (örneğin, bkz. [33] ve [36]), yapının serbestlik derecesinin genellikle çok büyük olmasından dolayı, model derecesini düşürme tekniklerinin bir kontrolcü bulmak için (örneğin, H_2 , H_∞ veya LQR) eş zamanlı optimizasyonda kontrolcü tasarım aşamalarının herbirinde

kullanılması CPU zamanını arttırır ve [10] ile [11] da tartışıldığı gibi genellikle çok serbestlik dereceli yapılar için önemli modelleme hataları içerir. Örneğin Şekil B1' de iki bin serbestlik derecesine sahip sonlu elemanlar metodu ile elde edilmiş bir düzlemsel kafes sistemin Bode diyagramı gösterilmiştir. Yapı sol uç taraftan mesnetlenmiş, sağ uç taraf serbest ve Şekil 5.7' deki kafes sistemin tekrarlanması ile oluşturulmuştur. Zorlayıcı kuvvet terimi olarak, düşey bir dış kuvvet serbest olan sağ-uç tarafa uygulanmış ve yer değiştirmeler sol-taraftaki ilk düğüm noktasında ölçülmüştür. Yapısal mekanikte bir küçük boyutlu problem için hesaplanmış bir frekans cevabı diyagramı için düşük dereceli model uydurmak çok zordur ve belirli bir seviyede modelleme hatası frekans aralığına bağlı olarak derecesi düşürülmüş modelde ortaya çıkacaktır. Diğer taraftan 5. ve 6. Bölümlerde geliştirilen ardışık optimizasyon yaklaşımı herhangi bir model derecesi düşürme tekniğine ihtiyaç duymaz.

Yapının ve dayanıklı kontrolcünün eş zamanlı optimizasyonunun bu sakıncaları ortadan kaldırılarak, kontrol edilmiş yapı için bir ayrık tasarım metodolojisi geliştirilmiştir. Dayanıklı kontrol felsefesine paralel olarak, bu metodoloji yapısal tekil değer şekillendirme temeline dayandırılmıştır.



Şekil 5.4 Bir sistemin blok diyagramı.

Şekil 5.4' de blok diyagramı verilen sistemi gözönüne alalım. Sonra, y çıktısı Laplace dönüşümü değişkenlerine göre aşağıdaki gibi üç kısma ayrılabilir.

$$y(s) = y_r(s) + y_d(s) + y_n(s) \quad (5.32)$$

Burada s kompleks Laplace dönüşüm değişkeni, r referans girişi, y_r referans girişi r' den kaynaklanan çıkış, d bozucu etki girişi, y_d bozucu etki girişi d' den kaynaklanan çıkış ve n gürültü girişi, y_n gürültü girişi n' den kaynaklanan çıkıştır. Böylece,

$$y_r(s) = S_0(s)P(s)r(s) \quad (5.33)$$

Burada

$$P(s) = T_{zu}(s) \quad (5.34)$$

$$y_d(s) = S_0(s)d(s) \quad (5.35)$$

$$y_n(s) = -T_0(s)n(s) = -(I - S_0(s))n(s) \quad (5.36)$$

P sistemin transfer matrisi, T_{zu} u ' dan z ' ye transfer matrisi (örneğin, bkz. Şekil 5.5), I birim matris, S_0 çıkış duyarlılık matrisi, L_0 çıkış çevrim transfer matrisi ve T_0 çıkış tamamlayıcı duyarlılık matrisidir.

$$S_0(s) = (I + L_0(s))^{-1} \quad (5.37)$$

$$L_0(s) = P(s)F(s) \quad (5.38)$$

$$T_0(s) = L_0(s)(I + L_0(s))^{-1} \quad (5.39)$$

Dayanıklılık için, y_d küçük olmalıdır. Bunun anlamı verilen bir d bozucu etki girişi için $\|y_d(j\omega)\|_\infty$ normunun küçük olmasıdır. Bu ise $\|S_0(j\omega)\|_\infty$ normunun minimize edilmesi anlamına gelir [6]. Bozucu etki dinamiğinin

$$d(s) = G(s)\hat{d}(s) \quad (5.40)$$

ile verildiğinin kabul edilmesi, d bozucu etkisinin $G(s)$ transfer matrisine sahip bir proses tarafından üretildiği anlamına gelir. Böylece (5.35) şu şekli alır

$$y_d(s) = S_0(s)G(s)\hat{d}(s) \quad (5.41)$$

Daha sonra, $\|y_d(j\omega)\|_\infty$ normunun minimizasyonu, $\|S_0(j\omega)G(j\omega)\|_\infty$ normunun minimizasyonuna eşdeğerdir. (5.37) ve (5.38)' in kullanımı ile,

$$\begin{aligned} \min_{\omega} \|y_d(j\omega)\|_\infty &\equiv \min_{\omega} \|S_0(j\omega)G(j\omega)\|_\infty = \min_{\omega} \|(I + P(j\omega)F(j\omega))^{-1}G(j\omega)\|_\infty \\ &\leq \min_{\omega} \|(I + P(j\omega)F(j\omega))^{-1}\|_\infty \|G(j\omega)\|_\infty \end{aligned} \quad (5.42)$$

elde edilir. Burada (14) son adımda kullanılmıştır. Tanım olarak

$$\|G(j\omega)\|_\infty = \sup_{\omega} \sigma_1\{G(j\omega)\} \quad (5.43)$$

Böylece, (5.42) şu şekli alır

$$\min_{\omega} \|y_d(j\omega)\|_\infty \equiv \min_{\omega} \|S_0(j\omega)G(j\omega)\|_\infty \leq \min_{\omega} \sigma_1\{(I + P(j\omega)F(j\omega))^{-1}\} \sigma_1\{G(j\omega)\} \quad (5.44)$$

Diğer taraftan, (5.13)' e göre

$$\min_{\omega} \sigma_1\{(I + P(j\omega)F(j\omega))^{-1}\} = \min_{\omega} \frac{1}{\sigma_n\{I + P(j\omega)F(j\omega)\}} \quad (5.45)$$

elde ederiz. (5.15)' e göre,

$$\min_{\omega} \frac{1}{\sigma_n\{I + P(j\omega)F(j\omega)\}} \geq \min_{\omega} \frac{1}{\sigma_n(I) + \sigma_1(P(j\omega)F(j\omega))} \quad (5.46)$$

olur. $\sigma_n(I) = 1$ olduğundan dolayı,

$$\min_{\omega} \frac{1}{\sigma_n\{I + P(j\omega)F(j\omega)\}} \geq \min_{\omega} \frac{1}{1 + \sigma_1(P(j\omega)F(j\omega))} \quad (5.47)$$

indirgenir. (5.47)' de $\sigma_1(PF)$ ' in yeteri kadar büyük olduğunu varsayarak ve $1 + \sigma_1(P(j\omega)F(j\omega)) \cong \sigma_1(P(j\omega)F(j\omega))$ yerine konarak, şu sonuç bulunur

$$\min_{\omega} \frac{1}{\sigma_n(I + P(j\omega)F(j\omega))} \geq \min_{\omega} \frac{1}{\sigma_1(P(j\omega)F(j\omega))} \quad (5.48)$$

olur. Diğer taraftan $A=PF$ ve $\Delta=(PF)^{-1}$ (5.16)' da yerine konarak,

$$\frac{1}{[1-\sigma_n(PF)]\sigma_n(PF)} \geq \frac{1}{\sigma_n(I+PF)} \geq \frac{1}{[1+\sigma_n(PF)]\sigma_n(PF)} \quad (5.49)$$

elde edilir. Burada $\sigma_1((PF)^{-1})=\sigma_n(PF)$ yerine konur ve (5.48) ile birleştirilerek,

$$\min_{\omega} \frac{1}{[1-\sigma_n(PF)]\sigma_n(PF)} \geq \min_{\omega} \frac{1}{\sigma_n(I+PF)} \geq \min_{\omega} \frac{1}{[1+\sigma_n(PF)]\sigma_n(PF)} \geq \min_{\omega} \frac{1}{\sigma_1(PF)} \quad (5.50)$$

elde edilir. $\sigma_n(PF)$ ' in yeteri kadar küçük olduğu kabul edilerek, (5.50)' de $\sigma_n(PF) \pm \sigma_n^2(PF) \cong \sigma_n(PF)$ yazılabilir. Sonra,

$$\min_{\omega} \frac{1}{\sigma_n(I+PF)} \cong \min_{\omega} \frac{1}{\sigma_n(PF)} \geq \min_{\omega} \frac{1}{\sigma_1(PF)} \quad (5.51)$$

elde edilir. Böylece, başlangıçtaki dayanıklı kontrol edilmiş yapı tasarımı

$$\min_{\omega} \|y_d(j\omega)\|_{\infty} = \min_{\omega} \|S_0(j\omega)G(j\omega)\|_{\infty} \cong \min_{\omega} \frac{\sigma_1(G(j\omega))}{\sigma_n(P(j\omega)F(j\omega))} \geq \min_{\omega} \frac{\sigma_1(G(j\omega))}{\sigma_1(P(j\omega)F(j\omega))} \quad (5.52)$$

haline gelir. Bunun anlamı başlangıçtaki eş zamanlı bir yapı ve H_{∞} dayanıklı kontrol optimum tasarım probleminin aşağıdaki gibi iki ayrık optimizasyon problemine indirgendiğidir.

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \underset{\omega}{\text{Minimize}} \quad et \sigma_1(G(j\omega)) \\ \underset{\omega}{\text{Maximize}} \quad et \sigma_{1,n}(P(j\omega)F(j\omega)) \leq \underset{\omega}{\text{Maximize}} \quad et \sigma_{1,n}(P(j\omega))\sigma_{1,n}(F(j\omega)) \end{array} \right\} \quad (5.53)$$

Böylece, H_{∞} dayanıklı kontrol edilmiş yapı için optimizasyonun amacını aşağıdaki gibi özetleyebiliriz.

$$\underset{\omega}{\text{Minimize}} \quad et \sigma_1(G(j\omega)) \text{ iken } \underset{\omega}{\text{Maximize}} \quad et \sigma_n(P(j\omega)) \text{ ve } \sigma_1(P(j\omega)) \quad (5.54)$$

(5.53) bir dayanıklı kontrol edilmiş yapının ayrık olarak tasarlanabileceğini gösterir. Burada yapı (5.54)' e göre optimize edilmiş olabilir ve sonra $\sigma_n(F(j\omega))$ ve $\sigma_1(F(j\omega))$ maksimum yapılacak şekilde herhangi bir kontrol kuralı tasarlanabilir.

Daha sonra, yalnız H_∞ dayanıklı kontrol kuralının kullanımının sakıncalarından kaçınılabilir. Böylece, (5.54) bir dayanıklı kontrollü yapı için optimizasyon kriteri olarak yorumlanabilir. Kontrol edilmiş yapının optimizasyonunda, aşağıdaki üç amaç fonksiyonu kullanılabilir:

i) (5.52)' nin sonucu olarak yapısal optimizasyondaki amaç fonksiyonu için ilk tercih aşağıdaki gibidir.

$$F = \min_{\omega} \frac{\sigma_1(G(j\omega))}{\sigma_n(P(j\omega))} \quad (5.55)$$

ii) Optimizasyon çalışmalarında, eğer bir yapı $\sigma_n(P(j\omega))$ ' nin maksimum yapılması şeklinde optimize edilirse, sonra $\sigma_1(P(j\omega))$ ' nin fazla değişmeyeceği gözlenmiştir. Bu yüzden, her iki tekil değer toplamı aşağıdaki şekilde amaç fonksiyonu olarak kullanılabilir.

$$F = \min_{\omega} \frac{\sigma_1(G(j\omega))}{\sigma_n(P(j\omega)) + \sigma_1(P(j\omega))} \quad (5.56)$$

iii) Bütün tekil değerlerin keyfi bir girişe cevaben çıkışa katkısı olduğundan [5], aşağıdaki amaç fonksiyonunu kullanmak çok uygundur.

$$F = \min_{\omega} \frac{\sigma_1(G(j\omega))}{\sum_{i=1}^{DOF} \sigma_i(P(j\omega))} \quad (5.57)$$

Bu üç amaç fonksiyonu Bölüm 5.5' deki sayısal çalışmalarda birbirleri ile karşılaştırılmıştır.

5.4.3. Yapının ve H_2 kontrolcünün ardışık optimizasyonu

Bu bölümde yapının ve H_2 optimum kontrolcünün ayrık optimizasyonu incelenmiştir. H_2 dayanıklı kontrol tasarımında, $\|y_d(j\omega)\|_2$ normu minimize edilir.

Yani,

$$\min_{\omega} \|y_d(j\omega)\|_2 = \min_{\omega} \|S_0(j\omega)G(j\omega)\|_2 \leq \min_{\omega} \|S_0(j\omega)\|_2 \|G(j\omega)\|_2 \quad (5.58)$$

L_2 - normu tanımından,

$$\sigma_n^2 \{G(j\omega)\} \leq \|G(j\omega)\|_2^2 \leq \sigma_1^2 \{G(j\omega)\} \quad (5.59)$$

yazılabilir. Böylece, (5.58) şu hali alır

$$\min_{\omega} \|y_d(j\omega)\|_2 \leq \min_{\omega} \|S_0(j\omega)\|_2 \|G(j\omega)\|_2 = \min_{\omega} \sigma_1^2 (I + P(j\omega)F(j\omega))^{-1} (G(j\omega)) \quad (5.60)$$

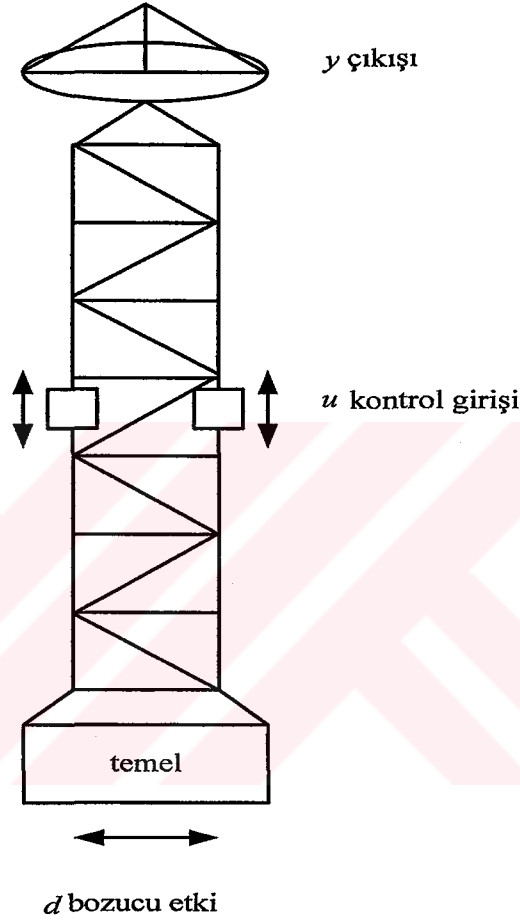
ve

$$\min_{\omega} \|y_d(j\omega)\|_2 \leq \min_{\omega} \|S_0(j\omega)\|_2 \|G(j\omega)\|_2 \cong \min_{\omega} \frac{\sigma_1^2(G(j\omega))}{\sigma_n^2(P(j\omega)F(j\omega))} \geq \min_{\omega} \frac{\sigma_1^2(G(j\omega))}{\sigma_1^2(P(j\omega)F(j\omega))} \quad (5.61)$$

elde edilir. Burada (5.61)'i elde etmek için (5.52)'yi veren aynı işlemler kullanılır. (5.61)'in alt sınırı (5.52)'nin karesidir. Böylece, (5.53) ve (5.54) ile tanımlanan ayrık optimizasyon problemi ve (5.55)'den (5.57)'ye kadar amaç fonksiyonları yapının ve H_2 dayanlı kontrolcülerinin ayrık optimizasyonları için de kullanılabilir.

(5.53) ve (5.54)'ün anlamı yapının ve kontrolcüsünün birleşik optimum tasarımının esasen yapısal tekil değer şekillendirmesi problemi olan bir ayrık optimizasyon problemine indirgenebilir olduğudur. Tekil değer şekillendirme [5] ve [24]'de çalışılmıştır. Örneğin, Şekil 5.5'deki anteni gözönüne alalım. d bozucu etkisi temel titreşimlerinden ileri gelmektedir ve yapının üzerine konmuş hareketlendiriciler vardır. Uygulanan kuvvetler, kontrol girişleridir. y çıkış vektörü antenin yerdeğiştirmeleridir. Amaç antendeki temel titreşimlerinden kaynaklanan (d bozucu etkisi) titreşimleri (kontrol edilmiş y çıkışlarını) azaltmaktır. d bozucu etki girişi ve u kontrol girişinin etkileri yapı üzerinde farklı yollardan antene ulaşır. “ $\sigma_1(G(j\omega))$ ’nin minimize edilmesi”nin anlamı, bozucu etki d ’nin y çıkışındaki etkisini minimum yapacak şekilde yapının optimize edilmesidir. “ $\sigma_n(P(j\omega))$ ve/veya $\sigma_1(P(j\omega))$ ’nin maksimize edilmesi”nin anlamı, kontrol girişi u ’nun y çıkışındaki etkisini maksimum yapacak şekilde yapının optimize edilmesidir. Uygulamada yapıların (P sistemi) serbestlik dereceleri çok büyük olsa bile, bilinen tekil değer şekillendirme problemlerinin hesaplama maliyetinin (5.55) ve (5.56) amaç fonksiyonları için oldukça az olduğu dikkate değerdir. Çünkü seçilen özdeğer çözücülerinin [9] kullanımı ile sadece en büyük ve en küçük tekil değerlerin (σ_1 ve σ_n) hesaplanması yeterlidir ve diğer tekil değerler gerekli değildir. Diğer taraftan,

(5.57) amaç fonksiyonu yapının bütün tekil değerlerinin hesaplanmasını gerektirdiğinden, onun hesaplama maliyeti (5.55) ve (5.56) ile karşılaştırıldığında daha yüksektir. Bir kafes yapının ve kontrolcüsünün ayrık ve eş zamanlı optimizasyon sonuçları sonraki bölümde karşılaştırılmıştır.



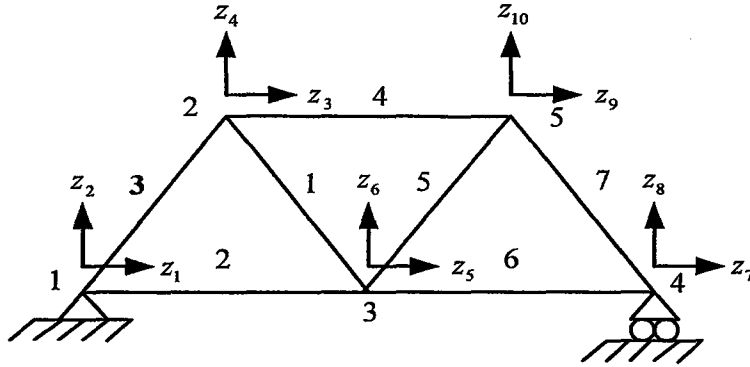
Şekil 5.5 Kontrol edilmiş anten yapısı.

5.5. Uygulama

Bu bölümde, buraya kadar çalışılan metodlar Şekil 5.6' da gösterilen basit bir kafes yapıya uygulanmıştır. Kafes sistem 7 kafes elemandan oluşmuştur ve yapısal parametreler aşağıdaki gibidir: Elastiklik modülü $E_i = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, eleman boyu

$l_i = 1 \text{ m}$, malzeme yoğunluğu $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ ' dür. Bu uygulamada kafes-kiriş elemanların h_i kesit alanları ve kontrolcü parametreleri tasarım değişkenleridir. Optimizasyon algoritmasında başlangıç parametre vektörü için çok sayıda deneme,

bozucu etki girişleri ve yapısal yükler sayısal çalışmada test edilmiştir. Sınırlı alandan dolayı, sadece aşağıdaki durumlar bu çalışmada detaylı olarak sunulmuştur.



Şekil 5.6 Kafes sistem.

Bütün çalışmalarda keyfi olarak seçilen iki bozucu etki girişi (kuvveti) 2 nolu düğüm noktasına pozitif z_3 ve negatif z_4 doğrultularında etki ettirilmiştir (Şekil 5.6). Yapıdaki gerilmelerin verilen emniyet sınırlarının altında olduğunu kontrol etmek için, her düğüm noktasına pozitif doğrultuda 5000 N büyüklüğünde dış kuvvet etki ettirilmiştir. Yapısal denklemleri [15] elde etmek için sonlu eleman metodları aşağıda belirtildiği gibi kullanılmıştır.

(5.17) ile verilen kafes sistemin aşağıdaki yarı-ayrık denklemlerini gözönüne alalım.

$$M\ddot{z} + C\dot{z} + Kz = F \quad (5.17)$$

Burada global kütle ve katılık matrisleri aşağıdaki eleman matrislerinin montaj edilmesiyle oluşturulmuştur.

$$m^i = \frac{\rho h_i l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

$$k^i = \frac{E_i h_i}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

Burada m^i ve k^i sırasıyla i . elemanın kütle ve katılık matrisleridir [13] ve [15].

Yukarıdaki kafes sistemin ve kontrolcüsünün eş zamanlı ve ardışık optimum tasarım problemleri H_2 ve H_∞ formülasyonları kullanılarak çözülmüştür. Dayanıklı kontrolcülerin tasarımı için ağırlık fonksiyonları [35] kullanılmamıştır ve H_∞ optimum kontrolcülerinin tasarımı için [8]' de verilen metodlar kullanılmıştır. "Full information" ve "full control" durumları tasarlanan kontrolcülere uygulanmıştır. H_2 ve H_∞ formülasyonlarının kullanımı ile, Bölüm 5.4.2 ve 5.4.3' de türetilen ardışık optimizasyon yaklaşımı için (5.55), (5.56) ve (5.57) ile verilen amaç fonksiyonları yapıyı optimize etmek için minimize edilmiştir. Yapısal optimizasyon ve kontrolcü tasarım problemleri Matlab kullanılarak çözülmüştür. Bütün optimizasyon çalışmalarında, "Ardışık Quadratik Programlama" metodu kullanılmıştır [32]. Yapının mukavemetini garanti etmek için optimizasyon problemi maksimum gerilmenin $(\tau_{ij})_{\max}$ bir emniyet gerilmesi $(\tau_{ij})_{\text{emniyet}}$ ile sınırlandırıldığı bir kısıtlı optimizasyon problemi olarak çözülmüştür. St 37 çelik malzeme için $\tau_{akma} = 24000$ N/cm², emniyet katsayısı $S=4$ ve $\tau_{\text{emniyet}}=6000$ N/cm² olarak alınmıştır. Kafes sistem için tasarım parametreleri kafes elemanların h_i kesit alanlarıdır. Optimizasyon algoritmasında h_i kesit alanlarının alt ve üst sınırları sırasıyla $LB=1.4 \times 10^{-4} m^2$ ve $UB=12 \times 10^{-4} m^2$ olarak alınmıştır. Yapının kütlesi düğüm noktalarına paylaştırılmıştır.

H_∞ dayanıklı kontrol algoritmasının rezonans frekansında Bode kazanç eğrilerinde sönümlemenin olmaması durumunda genliğin sonsuza gitmesi nedeniyle sistemi kontrol edemeyeceği göze çarpar. Bu yüzden, $C=\alpha K$ formundaki Rayleigh sönümü sayısal simülasyonlarda kabul edilmiştir ve burada α değeri 0.1 ile 0.0001 arasındadır. α 'nın küçük değerlerinin yakınsama problemleri ile sonuçlandığı gözlemlendiğinden dolayı, sayısal çözümlerde $\alpha=0.01$ olarak alınmıştır. Metalik yapılarda, sönümlemenin çok düşük olduğu gerçeğini gözönüne alarak, α 'nın bu

değeri izafi olarak yüksektir. Sayısal çözümlerde, bir yapının birinci doğal frekansı arttığında, H_∞ kontrol kuralının tasarımında yakınsama problemlerinin, (özellikle yapının serbestlik derecesinin büyük olması durumunda) ortaya çıkmasına müsait olduğu da gözlenmiştir.

Global minimumları bulmak için sayısal çözüm esnasında yapısal parametrelerin (kafes elemanların kesit alanları) başlangıç koşulları değiştirilmiştir. Literatürde uygun çözümleri elde etmek için aşağıdaki iki yol vardır: i) yapının ağırlığına alt ve üst sınırlar koymak veya, ii) yapıdaki maksimum gerilme ile emniyet gerilmesi arasındaki orana minimum ve maksimum sınırlar koymak. Birincisi, bir başlangıç ağırlığının tahmininin yapılmasını gerektirdiğinden uygulanabilir değildir; [33] ve [36]' da kullanılmıştır. İkincisi, ilk olarak bu çalışmada denenmiş ve yakınsama problemlerinin ortaya çıkmasına müsaade ettiği ve çözümün CPU zamanının eş zamanlı optimizasyon problemi için yirmi kata kadar arttığı gözlenmiştir. Aşağıdaki, optimizasyon çalışmaları, yapıdaki maksimum gerilme ile emniyet gerilmesi arasındaki oranda maksimum sınır 1 kullanılarak (alt sınır kullanmadan) tamamlanmıştır ($(\tau_{ij})_{\max} / \tau_{\text{emniyet}} \leq 1$).

Optimum çözümlerin bazıları Tablo A.1, A.2, A.3, A.4 ve A.5 de verilmiştir ve ilgili diyagramlar Şekil B.2, B.3, B.4, B.5, B.6, B.7, B.8, B.9, B.10 ve B.11' de sunulmuştur. Tablo A.1, A.2, A.3, A.4 ve A.5' de global minimumlar ve yerel minimumların karşılığı olan bazı önemli çözümler listelenmiştir. Tablo A.1 ve A.2 sırasıyla eşzamanlı H_∞ ve H_2 problemleri için çözümleri içerir. Diğer taraftan, (5.55), (5.56) ve (5.57)' nolu amaç fonksiyonları ile elde edilen ardışık optimizasyon problemleri için sonuçlar sırasıyla Tablo A.3, A.4 ve A.5' de sunulmuştur. Kontrol edilmiş yapının optimizasyonu esasen bir çok amaçlı (multiobjective) optimizasyon problemidir, burada amaç fonksiyonları aşağıdaki gibidir:

- i) Yapının optimum tasarımı genellikle emniyet sınırlarının altındaki yapısal gerilmeleri sağlayan yapısal ağırlıklar ile ölçülür.
- ii) Kontrolcünün optimum tasarımı genellikle kontrol hareketinin büyüklüğü (genliği) veya diğer davranış özellikleri gibi kontrolcü davranışı ile ölçülür. Önceden vurgulandığı gibi, dayanıklı kontrolcülerdeki

ağırlaştırma fonksiyonları, hareketlendirici dinamikleri ve kontrolcü davranışları bu çalışmada kriter olarak gözönüne alınmamıştır.

- iii) Kontrol edilmiş yapının optimum davranışı $\|T_{zw}\|_2$ veya $\|T_{zw}\|_\infty$ normu ile ölçülür.

Kafes sistemin ve kontrolcüsünün hem eş zamanlı hem de ardışık optimum tasarımı için uygun H_∞ ve H_2 normları ve (5.55), (5.56) ve (5.57) ile verilen tekil değerlerinin oranları çubukların toplam kesit alanları (kafes sistemin toplam ağırlığı ile orantılı) çözüm grupları içerisinde değiştiği durumda Şekil B.14, B.15, B.16 ve B.17’de verilmiştir. Bu şekillerde ve tablolarda, bu amaç fonksiyonları arasında aşağıdaki ilişkilerin olduğu gözlenir. Şekil B.8 ve Tablo A.1 de verilen eş zamanlı H_∞ problemi için çözümler gözönüne alınarak, minimum γ değeri 13 nolu çözüm içindir. Bununla beraber, 2 nolu çözümün toplam alanı 13 nolu çözümün toplam alanından %55 daha küçük iken, 2 nolu çözümün γ değeri 13 nolu çözümün γ değerinden sadece %0.1 daha büyüktür. Benzer olarak, eşzamanlı H_2 problemi için çözümler Şekil B.9, B.10 ve B.11 ve Tablo A.2’ de verilmiştir. Burada $\|T_{zw}\|_2$ normuna göre ve girişin toplam alanına göre 1 nolu çözümün en iyi çözüm olduğu gözlenir. Şekil B.9 ve Tablo A.3’ de verilen sonuçlar için (5.55) ile verilen $F = \min_{\omega} \sigma_1(G(j\omega))/\sigma_n(P(j\omega))$ amaç fonksiyonunun kullanımı ile ardışık optimizasyon yaklaşımı kullanılmıştır. Burada 1 nolu çözüme göre minimum F maliyeti, γ ve $\|T_{zw}\|_2$ değerlerini eş zamanlı optimizasyon problemlerinin optimum değerlerinden daha büyük değerlere götürdüğü gözlenir ve böylece bir alt optimum çözüm verir. Şekil B.10 ve Tablo A.4’ de verilen sonuçlar için, (5.56) ile verilen $F = \min_{\omega} \sigma_1(G(j\omega))/[\sigma_1(P(j\omega)) + \sigma_n(P(j\omega))]$ amaç fonksiyonunun kullanımı ile ardışık optimizasyon yaklaşımı kullanılmıştır. Burada 5 nolu çözümün (minimum F maliyeti) γ ve $\|T_{zw}\|_2$ değerlerini eş zamanlı optimizasyon problemlerinin optimum değerlerinden daha büyük değerlere götürdüğü ve 2 nolu çözümün eş zamanlı optimizasyon problemlerinin yaklaşık olarak optimum değerlerine götürdüğü gözlenir. Şekil B.11 ve Tablo A.5’ de verilen sonuçlar için, (5.57) ile verilen

$$F = \min_{\omega} \sigma_1(G(j\omega)) / \sum_{i=1}^{DOF} \sigma_i(P(j\omega)) \text{ amaç fonksiyonunun kullanımı ile ardışık}$$

optimizasyon yaklaşımı, eş zamanlı optimizasyon probleminin de optimum değerine eşit olan F maliyeti için (2 nolu çözüm) global minimumu verir. Özet olarak, eş zamanlı optimizasyon yaklaşımı için optimum çözümler ardışık optimizasyon yaklaşımları ile de elde edilebilir. Bu amaç için, (5.56) ile verilen amaç fonksiyonu bir kontrol edilmiş yapının optimum tasarımı için tavsiye edilir.

Ardışık optimizasyon yaklaşımlarının yerine getirilmesinde aşağıdaki metodoloji izlenir: İlk olarak yapı (5.55), (5.56) veya (5.57) amaç fonksiyonlarının kullanılmasıyla optimize edilir. Daha sonra, yapısal optimizasyonun tamamlanması üzerine optimal kontrolcü tasarlanır ve yapısal optimizasyon için iterasyonlar esnasında hiç bir kontrolcü tasarlanmaz. Bu yüzden, ardışık optimizasyon yaklaşımının toplam CPU zamanı eşzamanlı optimizasyon yaklaşımından yaklaşık 2-4 kat daha azdır. Eğer bir model derecesi düşürme tekniği eş zamanlı optimizasyon yaklaşımı için uygulanırsa, modelleme hataları problemin içine girer ve eş zamanlı optimizasyon yaklaşımının CPU zamanının bu basit yapı için en azından 2 kat artacağı tahmin edilmektedir. CPU zamanındaki bu artış çok serbestlik derecesine sahip yapılar için çok daha fazla olabilir (örneğin, bkz. [10] ve [11]).

Eğer Şekil B.2 ve B.7 incelenirse, bilinen duyarlılık fonksiyonlarının tekil değerlerine göre hem eş zamanlı hem de ardışık optimum tasarım yaklaşımları ile benzer davranışların elde edilebileceği görülebilir. Bununla beraber, (5.55), (5.56) veya (5.57)' nin ardışık optimum tasarım yaklaşımında yapısal optimizasyon için amaç fonksiyonu olarak kullanımı herhangi dayanıklı kontrol kuralının tasarımını gerektirmez [18]. Böylece, ilk önce, yapı (5.55), (5.56) veya (5.57) amaç fonksiyonu kullanılarak optimize edilir ve takiben herhangi bir kontrol kuralı uygulanabilir. Yapıyı optimize etmek için tekil değerlerin kullanımı zamanla-değişen çok yüklü durumların mevcudiyetinde alışlagelmiş tekniklere göre üstünlüklere sahiptir [5].

Eş zamanlı H_2 ve H_∞ dayanıklı kontrol tasarım problemleri ile elde edilen kontrolcülerin derecelerinin gerçekleştirilmek için çok büyük olduğu gözlemlenmiştir. Örneğin, optimum kontrolcünün pay ve paydasının derecesi bu basit örnek için 20 ile 40 arasındadır. Müteakiben, uygun kontrolcülerini elde etmek için model derecesini düşürme tekniklerine başvurmak yaygın uygulamadır. Bu

teknikler, bu çalışmanın ana konusu olmadığından daha fazla incelenmemiştir (örneğin, bkz. [25]).



6.YAPI VE LQR KONTROL SİSTEMİNİN BİRLEŞİK OPTİMUM TASARIMI

Bu bölümde, yapının ve LQR kontrol sisteminin birleşik optimum tasarımı çalışılmıştır. Yapı sonlu elemanlar metodları kullanılarak modellenmiş ve kontrolcü “linear quadratic regülatör (LQR)” formülasyonu kullanılarak tasarlanmıştır. Yapı ve kontrolcü eş zamanlı ve ardışık olarak optimize edilmiştir. 5. Bölümde incelenen H_2 ve H_∞ optimum kontrol formülasyonlarına benzer olarak, LQR formülasyonları kullanılarak kontrolcülerin eş zamanlı optimizasyonunun yapıların yapısal tekil değer şekillendirmesi ile optimize edilebileceği ve başarılı bir şekilde herhangi bir kontrol kuralının tasarlanabileceği bir eşdeğer ayırık optimizasyon problemine indirgenebileceği gösterilmiştir. Yapıların ve kontrolcülerin ayırık optimizasyonu özellikle çok serbestlik derecesine sahip yapılar için belirli üstünlüklere sahiptir. Ayrıca, son zamanlarda ileri sürülen “pasif temelli kontrolcü” veya “enerji şekillendirme yaklaşımı” diye adlandırılan yaklaşımın, bir tekil değer şekillendirmesi problemine eşdeğer olduğu gösterilmiştir. Takiben, yapıların ve kontrolcülerin eş zamanlı ve ardışık optimizasyonları bir kafes yapı ve kontrolcüsüne uygulanmıştır. Sonuçlar birbirleriyle karşılaştırılmıştır ve birleşik LQR tasarım problemi için ardışık optimizasyon yaklaşımının eş zamanlı optimizasyon yaklaşımından çok daha hızlı global minimumu verdiği sonucuna varılmıştır.

5. Bölümde incelenen H_2 ve H_∞ formülasyonlarına benzer olarak, eğer uygulamada yapılar için serbestlik derecesi çok büyük ise, CPU zamanını arttıran ve modelleme hataları içeren model derecesi düşürme tekniklerinin birleşik optimum tasarım yaklaşımlarında bir kontrol kuralını tasarlayabilmek için optimizasyon esnasında her LQR tasarım adımında kullanılmaları gerekecektir.

Bu yaklaşım optimize edilmiş yapılara daha hızlı gitme, yapının ve kontrolcüsünün ayırık tasarımına müsaade etme, kontrolcülerini tasarlamak için model derecesi düşürme tekniklerinin kullanımı için modelleme hatalarını ortadan kaldırma, ve çok serbestlik derecesine sahip yapılar için uygun olma gibi üstünlüklere sahiptir. LQR

formülasyonu ve yapının toplam şekil değiştirme ve kinetik enerjisi arasındaki bağıntı yapısal tekil değer şekillendirme problemi ile bağlantılı olarak türetilmiştir. Ayrıca, son zamanlarda [26], [27] ve [28] de ileri sürülen “pasif temelli kontrolcü” veya “enerji şekillendirme yaklaşımı” diye adlandırılan yaklaşımın bir yapısal tekil değer şekillendirmesi problemine de eşdeğer olduğu gösterilmiştir.

6. Bölümün ana hatları aşağıdaki gibidir: LQR problemi Bölüm 6.2’ de tanımlanmıştır. Daha sonra, kontrol edilmiş yapıların optimum tasarımı için bağıntılar Bölüm 6.3’ de sunulmuştur. Sayısal örnekler Bölüm 6.4’ de verilmiştir.

6.2. LQR Tasarım Metodu

Bir doğrusal-zamanla değişmeyen (linear time-invariant) yapıya ait hareket denklemleri aşağıdaki standart formda yazılabilir.

$$\dot{x} = Ax + B_2u, \quad x(0) = x_0 \text{ verilmiş} \quad (6.1)$$

$$z = C_1x + D_{12}u \quad (6.2)$$

Standart LQR tasarım problemi aşağıdaki gibi tanımlanır:

Problem tanımı: LQR kontrol problemi, performans kriteri $\|z\|_2^2$ normunu minimum yapacak $u \in L_2[0, \infty)$ aralığında bir optimum kontrol kuralı bulmaktır [1].

Diğer taraftan, genişletilmiş LQR problemi aşağıdaki gibi tanımlanır:

Problem tanımı: LQR problemi, sistemi içten kararlı yapacak i.e., $x \in L_2[0, \infty)$ ve aşağıda (6.3) ile tanımlanan performans kriterini minimum yapacak, $u \in L_2[0, \infty)$ aralığında bir optimum kontrol kuralını bulmaktır [1].

$$J = \int_0^t (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (6.3)$$

Burada $Q = Q^T \geq 0$ ve $R = R^T > 0$ sırasıyla x durum değişkeni ve u girişi için ceza matrisleridir. Optimum kazanç matrisi K , geri besleme kuralı $u = -Kx$ in yukarıdaki

J maliyet fonksiyonunu minimize edecek şekilde hesaplanır. LQR problemleri için çözümler [1]'de bulunabilir.

6.3. Kontrol Edilmiş Yapıların Optimum Tasarımı

Bir yapının ve LQR'ın eş zamanlı optimum tasarımı için, (6.3) ile tanımlanan maliyet fonksiyonu bir optimizasyon algoritması kullanılarak yapının optimum tasarım parametrelerinin bulunması ile minimize edilir. Burada Q ve R ceza matrisleri önceden tasarımcı tarafından verilir. Yapısal ve kontrolcü parametreleri (6.3)'teki J maliyet fonksiyonunu minimize etmek için iteratif optimizasyon algoritmaları kullanılarak eş zamanlı veya ardışık olarak optimize edilmelidirler. Eş zamanlı optimizasyon yaklaşımında, yapının ve kontrolcüsünün tasarım parametreleri 5. Bölümde belirtildiği gibi eş zamanlı olarak optimize edilir. 5. Bölümde benzer olarak, yapıların ve LQR'ların eş zamanlı optimum tasarımı için de paralel eşzamanlı optimizasyon yaklaşımı izlenmiştir.

6.3.1. Yapıların ve LQR tasarım probleminin ardışık optimizasyonu

Bu bölümde, 5. Bölümde incelenen H_2 ve H_∞ optimum kontrol formülasyonlarına benzer şekilde, yapı ve LQR kontrolcüsünün birleşik optimum tasarımının ayrıştırılabilir ve bir yapısal tekil değer şekillendirmesi şeklinde ifade edilebileceği gösterilmiştir. Sonsuz ufuklu problem (infinite horizon problem) için aşağıdaki LQR maliyet fonksiyonunu göz önüne alalım [1].

$$\min_X J = \min_X \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (6.4)$$

Burada X yapısal ve kontrolcü parametrelerini içeren tasarım parametre vektörüdür. Diğer taraftan, yapısal denklemleri elde etmek için sonlu eleman metodlarının kullanıldığını ve yapının yarı ayrık denklemlerinin 5. Bölümde tanımlanan aşağıdaki formda olduğunu varsayalım.

$$M\ddot{z} + C\dot{z} + Kz = f \quad (6.5)$$

(6.5) ile verilen yapının denklemleri aşağıdaki gibi durum vektörünün tanımlanması ile kolayca durum-uzay formuna (6.1) dönüştürülebilir.

$$x = \begin{bmatrix} z & \dot{z} \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Yapının U şekil değiştirme enerjisi ve T kinetik enerjisi aşağıdaki gibi yazılabildiğinden dolayı [1],

$$U = \frac{1}{2} z^T K z \quad (6.7)$$

$$T = \frac{1}{2} \dot{z}^T M \dot{z} \quad (6.8)$$

Sonra, sistemin toplam enerjisi E

$$E = U + T = \begin{bmatrix} z & \dot{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} K & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & \frac{1}{2} M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

ile verilir. Burada $0_{n \times n}$ $n \times n$ boyutunda sıfır matristir, ve n yapının serbestlik derecesidir. (6.5)' deki ikinci terim sönümlleme terimidir ve kayıp enerjinin sorumlusudur. Durum ceza matrisi Q ' nun aşağıdaki gibi olduğunu düşünelim.

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} K & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & \frac{1}{2} M \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

Burada yapıya karşılık olan durumlar (6.6) ile tanımlanır; sonra LQR formülasyonunun anlamı yapının toplam enerjisini minimize etmektir. Çünkü J nin minimizasyonu (6.4)' deki her bir terimin minimizasyonunu gerektirir ve birinci terim Q ' nun bu tanımı için yapının toplam enerjisine eşittir.

Genellikle, bir keyfi Q matrisi için, bir durum ağırlık matrisi W_s bulunabilir [14] öyleki:

$$Q = W_s^T \begin{bmatrix} \frac{1}{2} K & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} M \end{bmatrix} W_s \quad (6.11)$$

Bu tanım, durum değişkenleri

$$\dot{x}' = W_s \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

ile tanımlanan bir yapıya karşılık gelir. Durum ceza matrisi Q genellikle bir diyagonal matris olarak seçildiğinden dolayı, ağırlık matrisi W_s aşağıdaki gibi seçilebilir.

$$W_s = \begin{bmatrix} X_k & 0 \\ 0 & X_m \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

Burada X_k ve X_m matrislerinin sütunları sırasıyla K ve M matrislerinin özvektörleridir. Eğer Q matrisi diyagonal olarak seçilmez ise, bu takdirde matris denklemleri (6.11) verilen Q matrisi için W_s için çözümlenmelidir. Özetle, bir keyfi durum ceza matrisi Q için, (6.4) ile tanımlanan J ' nin minimizasyonu (6.12) ile verilen toplam yapısal enerjinin minimizasyonuna karşılık gelir; yani toplam yapısal enerji (6.12)' de olduğu gibi bir ağırlaştırılmış anlamda minimize edilir.

Bu arada, [28]' de çıkarıldığı üzere, bir belirli (deterministic) periyodik olmayan giriş vektörü $u(t)$ için enerji yoğunluğu oranı, aşağıdaki gibi maksimum ve minimum tekil değerlerin kareleri ile sınırlıdır.

$$\sigma_n^2(\omega) \leq \frac{\|\hat{y}(j\omega)\|_2^2}{\|\hat{u}(j\omega)\|_2^2} \leq \sigma_1^2(\omega) \quad (6.14)$$

Burada $y(t)$ giriş vektörü $u(t)$ ' ye cevap olan çıkış vektörüdür, ve $\hat{y}(j\omega)$ ve $\hat{u}(j\omega)$ sırasıyla $y(t)$ ve $u(t)$ ' nin "Fourier dönüşümleridir" ve

$$\hat{y}_i(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y_i(t) e^{-j\omega t} dt \quad (6.15)$$

$$\hat{u}_i(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_i(t) e^{-j\omega t} dt \quad (6.16)$$

ile tanımlanırlar. Böylece, bir keyfi ceza matrisi Q için , toplam yapısal enerjinin minimizasyonu ((6.4)' deki birinci terim), durum değişkenleri (6.12) ile tanımlanan yapının σ_1 ve σ_n 'lerinin minimizasyonuna eşdeğerdir.

Yukarıdaki sonuca paralel olarak, 5. Bölümde incelenen yapının ve H_2 ile H_∞ dayanıklı kontrolcülerin ayrık optimizasyonu için kullanılan amaç fonksiyonları toplam yapısal enerji ile de ilgilidir. Farz edelim G ve P sırasıyla bozucu etkiden çıkışa ve referans girişten çıkışa transfer matrislerini göstereyin. Böylece, ayrık yapısal optimizasyon probleminde $\sigma_1(G(j\omega))$ 'nın minimizasyonu, (6.5)' de $f=d$ kuvvet vektörüne eşit yapılarak hesaplanabilen bozucu etki girişi d' ye cevap olarak toplam yapısal enerji E_d 'nin minimizasyonuna eşdeğerdir. Bu takdirde, E_d ile gösterilen çıktıya karşılık gelen toplam yapısal enerji bozucu etki girişi d yüzünden olacaktır. Benzer olarak, ayrık yapısal optimizasyon probleminde, $\sigma_n(P(j\omega))$ 'nın maksimizasyonu, (6.5)' de $f=u$ kontrol girişine eşit kuvvet vektörü durumuna karşılık gelen kontrol girişi u' ya cevap olarak toplam yapısal enerji E_u 'nın maksimizasyonuna eşdeğerdir. Bu takdirde, E_u ile gösterilen çıktıya karşılık gelen toplam yapısal enerji kontrol girişi u yüzünden olacaktır. Sonuç olarak, 5. Bölümdeki (5.52) eşitliği aşağıdaki enerji oranının minimizasyonuna eşdeğerdir:

$$\underset{\omega}{\text{Minimize et}} \frac{E_d(\omega)}{E_u(\omega)} \quad (6.17)$$

veya eşdeğer olarak

$$\underset{\omega}{\text{Minimize et}} E_d(\omega) \text{ iken } \underset{\omega}{\text{Maksimize et}} E_u(\omega) \quad (6.18)$$

Şimdi, (6.4) deki ikinci terim incelenecektir. $\tilde{u}$ giriş vektörünün büyüklüğünü göstereyin (i.e., $u = u(t) = \tilde{u} \sin \omega t$). Bu takdirde, aşağıdaki denklem giriş-çıkış transfer matrisi $T(s)$ olan bir yapı için geçerlidir [31].

$$\sigma_n^2(\omega) \leq \frac{SMSVO(\omega)}{SMSVI} \leq \sigma_1^2(\omega) \quad (6.19)$$

Burada $\sigma_i(\omega)$, $T(j\omega)$ 'nın i . tekil değeridir (yapısal tekil değeri).

$SMSVO(\omega)$ “bir periyod için m sürekli-rejim çıkışı y_{ss} ’ in karesinin ortalama değerinin toplamını” gösterir:

$$SMSVO(\omega) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} y_{ss}^T(t) y_{ss}(t) dt = \frac{1}{2} \tilde{u}^T S(\omega) \tilde{u} \quad (6.20)$$

$SMSVI$ “bir periyod için girişin karesinin ortalama değerinin toplamını” gösterir:

$$SMSVI = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} u^T(t) u(t) dt = \frac{1}{2} \tilde{u}^T \tilde{u} \quad (6.21)$$

Ayrıca,

$$S(\omega) = \frac{1}{2} \left[T^*(j\omega) T(j\omega) + \overline{T^*(j\omega) T(j\omega)} \right] \quad (6.22)$$

ile tanımlıdır. Burada (*) eşlenik transpozu ve üst çizgi eşlenikliği gösterir. Kontrol girişi ceza matrisi R ’ nin aşağıdaki formda ayrıklaştırıldığı düşünüldüğünde,

$$R = W_R^T \Lambda W_R \quad (6.23)$$

ile verilir. Burada W_R ortogonal ve Λ diyagonaldır [14]. Böylece

$$\tilde{u} = \Lambda^{1/2} W_R u \quad (6.24)$$

elde edilir. Bu takdirde, (6.21) aşağıdaki formda elde edilir.

$$SMSVI = \frac{1}{2} \tilde{u}^T \tilde{u} = \frac{1}{2} u^T W_R^T \Lambda^{1/2} \Lambda^{1/2} W_R u = \frac{1}{2} u^T R u \quad (6.25)$$

(6.25) denklemi, (6.24) ile verilen bir giriş için sistemin $SMSVI$ ’ nın (6.4) ile verilen LQR maliyet fonksiyonu J ’ deki son terime eşit olduğu anlamına gelir. Bu nedenle $SMSVO$, (6.20) ve (6.24) kullanılarak da hesaplanabilir. Böylece J ’ nin minimizasyonu (6.19) ile tanımlanan bir ağırlaştırılmış giriş için $SMSVI$ ’ nın minimizasyonu anlamına gelir. Bu da aşağıdaki gibi σ_n ’nin maksimizasyonunu gerektirir.

$$\frac{1}{\sigma_1^2(\omega)} \leq \frac{SMSVI}{SMSVO(\omega)} \leq \frac{1}{\sigma_n^2(\omega)} \quad (6.26)$$

$SMSVI$, u girişinin fonksiyonu iken, yapısal tekil değerler σ_1 ve σ_n 'nin sadece yapısal parametrelere bağlı olması dikkate değerdir ve $SMSVO$ hem u girişinin hemde yapısal parametrelerin fonksiyonudur.

(6.4) nolu amaç fonksiyonundaki birinci ve ikinci terimlerin sırasıyla (6.14) ve (6.26) ile açıklanan yapısal tekil değer şekillendirme problemlerinin tersine eşdeğer oldukları önemlidir. Gerçekten, Q ve R ceza matrislerinin kullanımı ile dengelenen, birinci ve ikinci terimlerin katkıları için (6.4) ile tanımlanan J amaç fonksiyonunda bir ilişki vardır. Müteakiben, sayısal çözümlerde yapı için bir ayrık optimizasyon problemi olan aşağıdaki amaç fonksiyonu kullanılabilir:

$$\underset{\omega}{\text{Minimize}} \quad etA(\sigma_1(\omega) + \sigma_n(\omega)) + B \left(\frac{1}{\sigma_1(\omega)} + \frac{1}{\sigma_n(\omega)} \right) \quad (6.27)$$

A ve B katsayıları sırasıyla, toplam yapısal enerjiyi ve $SMSVI$ 'yi cezalandırmak için bağımsız olarak seçilir.

(6.22) sadece σ_1 ve σ_n 'i içerdiğinden dolayı, optimizasyon probleminin hesaplama maliyetini düşüren seçimli özdeğer çözümleri [9] kullanılabilir (örneğin, bkz. [5] ve [24]). Gerçekten, 5. Bölümde incelenen yapıların ve kontrol sistemlerinin eş zamanlı optimum tasarımı için H_2 ve H_∞ optimum kontrol formülasyonlarına benzer olarak, LQR probleminin karşılığı da bir ayrık yapısal tekil değer şekillendirme problemi olarak ortaya konmuştur.

Gerçekten, ayrık H_2 ve H_∞ kontrol formülasyonları 5. Bölümde gösterilmiş ve yapı ile kontrolcünün optimum tasarımı için LQR formülasyonu frekans uzayında yapısal tekil değer şekillendirmesi problemi ile ilgilidir ve de frekans uzayında yapısal enerjinin şekillendirilmesine eşdeğerdir. Bölüm 6.4' de LQR formülasyonları üzerine sayısal örnekler gösterilmiştir.

6.3.2. Enerji şekillendirme ve tekil değer şekillendirme arasındaki bağıntı

Referanslar [26], [27] ve [28]' de "pasif temelli kontrol (PTK)" diye adlandırılan kontrolcü tasarım problemi için bir enerji şekillendirme yaklaşımı gösterilmiştir. Bu çalışmada PTK tasarımının bir yapısal tekil değer şekillendirme problemine de eşdeğer olduğu gösterilmiştir. Çarpımları güç biriminde olan eşlenik durumda (örneğin, $F^T v$ veya $M^T \omega$ burada F kuvvet, v hız, M moment ve ω açısal hız vektörleridir) $u \in R^m$ ve $y \in R^m$ bazı giriş güç değişkenleri sayesinde dış çevreye bağlı bir dağılmış parametrelili sistemi göz önüne alalım [26]. Sonra, sistemin aşağıdaki enerji denge denklemini sağladığını düşünelim.

$$E(x(t)) - E(x(0)) = \int_0^t u^T(\tau) y(\tau) d\tau - D(t) \quad (6.28)$$

Burada $x \in \mathcal{R}^n$ durum vektörüdür, $E(x(t))$ t anındaki toplam sistem enerji fonksiyonudur ve $D(t)$ sistemdeki kayıp enerjiyi gösteren bir negatif olmayan fonksiyondur. Sisteme aşağıdaki sinüzoid girişin uygulandığını düşünelim.

$$u(t) = \tilde{u} \sin(\omega t + \theta) \quad (6.29)$$

Burada $\tilde{u}$ aşağıdaki formda bir sabit vektördür.

$$\tilde{u} = [\tilde{u}_1 \quad \tilde{u}_2 \quad \dots \quad \tilde{u}_n]^T \quad (6.30)$$

Çıkışın Laplace dönüşümü $\hat{y}(s)$

$$\hat{y}(s) = T(s) \hat{u}(s) \quad (6.31)$$

ile tanımlanır, burada $\hat{u}(s)$ girişin Laplace dönüşümüdür ve $T(s)$ sistemin transfer matrisidir. Bu takdirde, sistemin [26]' da tanımlanan sürekli-rejim çıkışı y_{ss}

$$y_{ss} = \left[\frac{1}{2j} (T(j\omega) - \bar{T}(j\omega)) \cos(\omega t + \theta) + \frac{1}{2} (T(j\omega) + \bar{T}(j\omega)) \sin(\omega t + \theta) \right] \tilde{u} \quad (6.32)$$

ile verilir. *SOP* "bir periyod için sürekli rejimdeki gücün toplamıdır" ve aşağıdaki gibi gösterilir.

$$SOP = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} y_{ss}^T(\tau) u(\tau) d\tau \quad (6.33)$$

(6.29) ve (6.32)' yi (6.33)' de yerine koyarak,

$$SOP = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \tilde{u}^T \left(\frac{1}{2j} (T(j\omega) - \bar{T}(j\omega)) \cos(\omega t + \theta) \sin(\omega t + \theta) + \right. \\ \left. \frac{1}{2} (T(j\omega) + \bar{T}(j\omega)) \sin^2(\omega t + \theta) \right) \tilde{u} d\tau \quad (6.34)$$

elde edilir.

$$\int_0^{2\pi/\omega} \sin^2(\omega t) dt = \frac{\pi}{\omega} \quad (6.35)$$

olduğundan, ve (6.34)' deki ilk terimin integrali sıfır olduğundan dolayı, (6.34) denklemi (6.36)' ya dönüşür. Bu durumda,

$$SOP = \frac{1}{2} \tilde{u}^T [T(j\omega) + \bar{T}(j\omega)] \tilde{u} \quad (6.36)$$

Aşağıdaki tanımlama ile $N(\omega)$ yazılır.

$$N(\omega) = T(j\omega) + \bar{T}(j\omega) \quad (6.37)$$

$N(\omega)$ 'nın i . özdeğer ve özvektör sırasıyla, $\lambda_i(\omega)$ ve $x_i(\omega)$ ile gösterilsin. Bu takdirde,

$$SOP = \frac{1}{2} \tilde{u}^T N(\omega) \tilde{u} \quad (6.38)$$

şeklinde yazılır. $N(j\omega)$ simetriktir ve $\{x_i(\omega)\}$ gerçekte özvektörlerin bir ortonormal grubudur. Bu takdirde, $\tilde{u}$ aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^m a_i(\omega) x_i(\omega), \quad a_i(\omega) \in \mathbb{R} \quad (6.39)$$

Böylece, aşağıdaki bağıntıya ulaşılır:

$$\frac{SOP(\omega)}{SMSVI} = \frac{\sum_{i=1}^m a_i(\omega)^2 \lambda_i(\omega)}{\sum_{i=1}^m a_i^2(\omega)} = \sum_{i=1}^m b_i(\omega) \lambda_i(\omega) \quad (6.40)$$

Burada $SMSVI = \frac{1}{2} \tilde{u}^T \tilde{u}$, (6.16) ile tanımlanır ve

$$b_i(\omega) = \frac{a_i(\omega)^2}{\sum_{i=1}^m a_i(\omega)^2} \quad (6.41)$$

$$b_i(\omega) \geq 0 \quad (6.42)$$

ve

$$\sum_{i=1}^m b_i(\omega) = 1 \quad (6.43)$$

Bu takdirde, (6.40)

$$\lambda_n(\omega) \leq \frac{SOP(\omega)}{SMSVI} \leq \lambda_1(\omega) \quad (6.44)$$

anlamına gelir. $SOP(\omega)/SMSVI$ tanımından dolayı pozitif ve bir A matrisinin her özdeğeri için $\sigma_n(A) \leq |\lambda_i(A)| \leq \sigma_1(A)$ olduğundan (örneğin, bkz. [14] s. 162)

$$\lambda_1(\omega) \leq 2\sigma_1(\omega) \quad (6.45)$$

ve

$$\lambda_n(\omega) \geq 2\sigma_n(\omega) \quad (6.46)$$

elde edilir. Burada 2 katsayısı $N(j\omega)$ 'nın bir özdeğeri olan $\lambda_i(\omega)$ 'dan kaynaklanır, ve $\sigma_i(\omega)$ tekil değeri $T(j\omega)$ 'nin bir tekil değeridir ve $N(j\omega) = T(j\omega) + \bar{T}(j\omega)$ şeklinde tanımlıdır. Bu takdirde, (6.44)

$$2\sigma_n(\omega)SMSVI \leq SOP(\omega) \leq 2\sigma_1(\omega)SMSVI \quad (6.47)$$

elde edilir. Eğer (6.28) sürekli rejimde bir periyod için yazılırsa (yani, $t = 2\pi/\omega$ için) bu takdirde (6.28) denklemi (6.48)' e dönüşür:

$$E\left(x\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)\right) - E(x(0)) = \int_0^{2\pi/\omega} u^T(\tau) y_{ss}(\tau) d\tau - D\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) \quad (6.48)$$

Burada sağ taraftaki ilk terim (6.33)' den dolayı $(2\pi/\omega)SOP$ ' ye eşittir. Böylece,

$$\frac{2\pi}{\omega}SOP(\omega) = E\left(x\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)\right) - E(x(0)) + D\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) \quad (6.49)$$

elde edilir. Bununla beraber, (6.47)' den dolayı

$$\frac{4\pi}{\omega}\sigma_n(\omega)SMSVI \leq E\left(x\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)\right) - E(x(0)) + D\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) \leq \frac{4\pi}{\omega}\sigma_1SMSVI \quad (6.50)$$

şekline dönüşür. Sonuç olarak, [26]' da özenle işlenilmiş pasif temelli kontrol, bir tekil değer şekillendirme problemine eşdeğerdir. Eğer giriş vektörü $\tilde{u}$, $T(j\omega)$ ' nin n . sağ tekil vektörü $v_n(\omega)$ ' nin yönünde ise, alt sınıra ulaşılır. Eğer giriş vektörü $\tilde{u}$, $T(j\omega)$ ' nin ilk sağ tekil vektörü $v_1(\omega)$ ' nin yönünde ise, üst sınıra ulaşılır (örneğin, bkz. [5] ve [24]).

Enerji şekillendirme yaklaşımının yerine getirilmesindeki temel zorluk frekans uzayında bir enerji fonksiyonunun seçilmesidir. Bu sonuç için, tekil değer şekillendirme bilinen kontrolcü tasarım problemi hakkında daha çok fikir verebilir ve 5. Bölümdeki dayanıklı kontrol edilmiş yapı için ayrık tasarım yaklaşımı ve LQR için ayrık tasarım yaklaşımı hakkındaki sonuçların tümü uygulanabilir. Örneğin, enerji fonksiyonu $E(x(t))$ bir skaler fonksiyondur ve farklı giriş kombinasyonları için iç yapının nasıl cevap verebileceğini açıklamaz. Bununla beraber, tekil değerler farklı girişler için cevap olan çıkışlar hakkında bilgiyi içerir. Yani, eğer giriş i . sağ tekil vektör v_i ' nin yönünde ise, çıkış i . sol tekil vektör u_i ' nin yönündedir ve sistem kazancı i . tekil değer σ_i ' ye eşittir. Bölüm 6.4' de yapısal enerji şekillendirme için yapısal tekil değer şekillendirmenin nasıl kullanılacağını göstermek için bir örnek verilmiştir.

6.3.4. Tasarım duyarlılık analizi

Referans [5]' de, tekil değer duyarlılık analizleri yapısal mekanikte tasarım duyarlılığı problemlerine uygulanmıştır. Tekil değer tasarım duyarlılıkları tekil değerlerin türevleri her ω frekansında mevcut olamayabileceğinden dolayı "Gateaux türevleri" vasıtası ile hesaplanır. Tekil değerlerin Gateaux türevleri

$$\delta\sigma_i(b_k; \Delta b_k) = \left. \frac{d\sigma_i(b_k; \varepsilon\Delta b_k)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sigma_i(b_k + \varepsilon\Delta b_k) - \sigma_i(b_k)}{\varepsilon} \quad (6.51)$$

ile tanımlanır. Burada b_k tasarım parametreleridir ve Δb_k değişkeni b_k için verilen parametre perturbasyonudur [1]. Tekil değer tasarım duyarlılığı analizi bu çalışmada da kullanılmıştır.

6.4. Uygulama

Bölüm 5.5' de belirtilen kafes sistem ve onun kontrolcüsü için eş zamanlı ve ardışık optimum tasarım problemleri LQR formülasyonları kullanılarak bu bölümde çözülmüştür. Bütün yapısal parametreler Bölüm 5.5' de aşağıdaki gibi tanımlanmıştır. Kafes-kiriş sistem 7 kafes-kiriş elemandan oluşturulmuştur ve yapısal parametreler aşağıdaki gibidir: Elastiklik modülü $E_i = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, eleman boyu $l_i = 1 \text{ m}$, malzeme yoğunluğu $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ dür. Bütün optimizasyon çalışmalarında, "Ardışık Quadratik Programlama" metodu kullanılmıştır [34]. Yapının mukavemetini garanti etmek için optimizasyon problemi maksimum gerilmenin $(\tau_{ij})_{maks}$ bir emniyet gerilmesi $(\tau_{ij})_{emniyet}$ ile sınırlandırıldığı kısıtlı optimizasyon problemi olarak çözülmüştür. St 37 çelik malzeme için $\tau_{akma} = 24000 \text{ N/cm}^2$, emniyet katsayısı $S=4$ ve $\tau_{emniyet} = 6000 \text{ N/cm}^2$ olarak alınmıştır. Kafes sistem için tasarım parametreleri kafes elemanların h_i kesit alanlarıdır. Optimizasyon algoritmasında h_i kesit alanlarının alt ve üst sınırları sırasıyla $1.4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ ve $12 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ olarak alınmıştır. Yapının kütlesi düğüm noktalarına paylaştırılmıştır. Sönüm için, $C = \alpha K$ şeklinde Rayleigh sönümü sayısal simülasyonda kabul edilmiştir. Burada α değişkeni 0.1 ile 0.0001 arasındadır. Global minimumları bulmak için, yapısal parametreler (örneğin, kafes elemanların kesit alanları) için başlangıç koşulları sayısal çözümler esnasında değiştirilmiştir.

Tasarım parametreleri kafes sistemdeki çubukların h_i kesit alanlarıdır ve LQR formülasyonları ile hesaplanan $u=-Kx$ kontrol girişi için geri besleme matrisi K' dir. Tasarım parametrelerinde alt ve üst sınırlar Bölüm' 5 dekiler ile aynıdır. (6.4)' deki durum ceza matrisi Q ve kontrol ceza matrisi R için, bütün tasarım çalışmalarında basitlik için birim matrisleri olarak seçilmişlerdir. Keyfi Q ve R matrisleri Bölüm 6.3.1' de anlatıldığı gibi farklı olarak da seçilebilirdi.

Ardışık optimizasyon için, aşağıdaki maliyet fonksiyonu (6.27)' de $A=0$ ve $B=1$ seçilerek minimize edilmiştir.

$$\text{Minimize}_{\omega} \quad et \frac{1}{\sigma_1(P(j\omega))} + \frac{1}{\sigma_n(P(j\omega))} \quad (6.52)$$

Bu maliyet fonksiyonu, yapıların ve kontrolcülerin eş zamanlı optimizasyonları ile elde edilen sonuçlarla hemen hemen aynı sonuçları verir. $\sigma_n(P(j\omega))$ çok küçük (10^{-5} mertebesinde) ve $\sigma_1(P(j\omega))$ 10^2 mertebesinde olduğundan dolayı, (6.52)'de $1/\sigma_n(P(j\omega))$ terimi baskındır ve bunun sonucunda $1/\sigma_n(P(j\omega))$ ' nın maliyet fonksiyonu (6.52)' deki ile aynı sonuçları verir. Tablo A.6 ve A.7' de sırasıyla eş zamanlı ve ardışık optimum tasarım yaklaşımları için bazı sonuçlar sunulmuştur. Bir impulsa karşılık olan J maliyet fonksiyonunun değerleri, taransfer matrisinin H_2 normu ve (6.52) maliyet fonksiyonunun değerleri sırasıyla kafes sistemin eş zamanlı ve ardışık optimum tasarımları ile LQR için çubukların toplam kesit alanlarının (kafes sistemin toplam ağırlığı ile orantılı) çözüm grubu içinde değiştiği durumda Şekil B.12 ve B.13' de verilmiştir. Bir çok-amaçlı karar kriteri kullanarak bu şekillerde sunulan çözüm grupları arasından en iyi çözümün seçimi tasarımcının hedefidir.

Tablo A.7' de ardışık optimizasyon yaklaşımı ile elde edilen optimum çözümün Tablo A.6' da eş zamanlı optimizasyon yaklaşımı ile elde edilenden daha iyi olduğu gözlemlenir. CPU zamanlarına dayalı mukayeseler eş zamanlı optimizasyon yaklaşımı için model derecesi düşürme tekniği gerçekten gerekmemesine rağmen, ardışık optimizasyon yaklaşımının lehinedir. Eğer herhangi bir model derecesi düşürme tekniği eş zamanlı optimizasyon yaklaşımı için uygulansaydı, daha sonra eşzamanlı optimizasyon yaklaşımının CPU zamanları artacak, modelleme hataları

problemin içine girmiş olacak ve ardışık optimizasyon yaklaşımı eş zamanlı optimizasyon yaklaşımından daha üstün olacaktır.

Diğer taraftan, (6.50)' ye göre kafes sistemin enerjisini şekillendirmeyi istediğimizi varsayalım. Bu takdirde, yapısal parametrelerin değişimi ile yapısal enerjinin nasıl etkilenebileceğini bilmek önemlidir. Bu sonuç için, P (referans girişten-çıkışa) ve G (bozucu etkiden-çıkışa) transfer matrisleri için $\delta\sigma$ tekil değerlerinin Gateaux türevlerinin maksimumu aynı kafes sistem için Tablo A.8' de sunulmuştur, burada Δb_k tasarım değişkeni perturbasyonu 2 cm^2 ' lik çubuğun kesit alanının nominal değerlerinin keyfi olarak % 5' i olarak seçilmiştir. Tablo A.8' de en etkili kesit alanı artışı, P için 2 nolu çubuk ve G için 3 ve 4 nolu çubuk sayesinde. İlaveten, 2, 3, 4, 5 ve 7 nolu çubuklar için 2 cm^2 ' lik nominal kesit alanı civarında verilen bir perturbasyon için $\sigma_1(G)$ ' deki düşüş, $\sigma_1(P)$ ' deki düşüşten daha büyüktür. Diğer bir deyişle, 2, 3, 4, 5 ve 7 nolu çubukların kesit alanlarındaki herhangi bir artış, bir periyod için (6.50)' deki $E(x(2\pi/\omega)) - E(x(0)) + D(2\pi/\omega)$ sistemin toplam enerjisindeki düşüş ile sonuçlanacaktır.

LQR formülasyonları ile elde edilen optimum çözümler (örneğin, çubukların kesit alanları) 5. Bölümde H_2 ve H_∞ dayanıklı kontrol formülasyonları ile elde edilenlerden farklıdır. Çünkü bu yaklaşımlarda kullanılan maliyet fonksiyonları birbirlerinden oldukça farklıdır.

7. SONUÇLAR ve TARTIŞMA

Bir yapının ve kontrolcünün birleşik optimum tasarım problemi H_2 ve H_∞ dayanıklı kontrol formülasyonları ile LQR kullanılarak incelenmiştir. Eş zamanlı optimizasyon problemlerinde dayanıklı ve LQR kontrol kurallarının kullanımı belirli sakıncalara sahiptir. Bunlar, H_∞ dayanıklı kontrol problemi için çözümün tek olmaması, yapı için her tasarım adımında model derecesi düşürme tekniğine ihtiyaç duyulması ve bunun özellikle çok serbestlik dereceli yapılar için yaklaşım hataları içermesi, H_2 ve H_∞ optimum kontrolcünün ortaya çıkması için sistem matrisi üzerinde sağlanması gereken sınırlamalardır. Bu sakıncalar çok serbestlik dereceli yapılar için çok önemlidir.

Kontrol edilmiş yapının optimum tasarımının, bir çok-amaçlı optimizasyon problemi olduğuna dikkat edilmelidir. Bir basit kafes sistem için, amaçların çubuğun toplam kesit alanları (toplam ağırlıkla orantılı) ve amaç fonksiyonu (5.55), (5.56) veya (5.57) ile verilen yapısal tekil değerlerin oranları ve H_2 ile H_∞ normları olduğunda farklı yaklaşımlar için çözüm grupları verilmiştir. Aynı yaklaşım, LQR için de tekrarlanmıştır. Yapının ve kontrolcünün eş zamanlı optimizasyonunun, ilk önce yapısal tekil değer şekillendirmesi ile optimize edildiği ve daha sonra kontrolcünün herhangi bir metodla tasarlanabileceği bir ardışık optimum tasarım yaklaşımına dönüştürülebilir olduğu gösterilmiştir. Ardışık optimizasyon yaklaşımında yapısal optimizasyon için amaç fonksiyonları (5.55), (5.56), (5.57) ve (6.27) ile verilen yapısal tekil değerlerin oranları ile ifade edilebilir. Yapının sonlu eleman modelinin serbestlik derecesi büyük olmasına rağmen, tekil değer şekillendirme probleminin hesaplama maliyeti (5.55), (5.56) ve (6.27) için çok düşüktür. Çünkü, sadece en büyük ve en küçük tekil değerlerin hesaplanması gereklidir ve seçimli özdeğer çözücülerinin kullanımı ile bunlar kolayca hesaplanabilir ve diğer tekil değerler gerekli değildir. Eş zamanlı optimizasyon probleminin çözümlerinin ardışık optimizasyon yaklaşımı ile de elde edilebileceği de gözlemlenmiştir. Sayısal çalışmaya dayanarak, aşağıdaki yaklaşımın kontrol edilmiş yapının optimum tasarımı

için çok verimli olduğu sonucu çıkarılmıştır: ilk önce (5.56) veya (6.27) ile verilen amaç fonksiyonunu yapıyı optimize etmek için kullan ve yerel minimumların karşılığı olan bütün çözümleri kaydedilir. Sonra herhangi bir kontrol kuralı bu çözümler için bir kontrolcü tasarlamak için kullanılabilir. Sonra nihai tasarım bu aday çözümler arasından seçilebilir.

Diğer taraftan, eş zamanlı optimizasyon yaklaşımı için, H_2 , H_∞ veya LQR kontrol kurallarının tasarımında her tasarım adımında model derecesi düşürme tekniklerinin kullanılması gerekirken, bu çalışmada geliştirilen ardışık optimizasyon yaklaşımı yapısal optimizasyon esnasında herhangi bir model derecesi düşürme tekniğine ihtiyaç duymaz ve çok serbestlik dereceli problemlere kolayca uygulanabilir. Ardışık optimizasyon yaklaşımında, kontrolcü yapı optimize edildikten sonra tasarlanır. Böylece, eş zamanlı optimizasyon yaklaşımından çok daha az CPU zamanına ihtiyaç duyulur. Model derecesi düşürme tekniğinin uygulanmadığı durumda, ardışık optimizasyon yaklaşımının toplam CPU zamanı eş zamanlı optimizasyon yaklaşımından yaklaşık 2 ile 4 kat daha azdır. Eğer eş zamanlı optimizasyon yaklaşımı için bir model derecesi düşürme tekniği uygulanırsa, CPU zamanı karşılaştırması ardışık optimizasyon yaklaşımının daha fazla lehine olacaktır.

LQR kullanılarak, bir basit kafes sistem için, amaçların çubukların toplam kesit alanları (toplam ağırlıkla orantılı) ve amaç fonksiyonu (örneğin, (6.4)' deki J maliyet fonksiyonu ve (6.27)' deki yapısal tekil değerlerin fonksiyonu) olan farklı yaklaşımlar için çözüm grupları verilmiştir.

Son zamanlarda ileri sürülen pasif temelli kontrolcü, veya enerji şekillendirme yaklaşımı diye adlandırılan yaklaşımın, bir yapısal tekil değer şekillendirmesi problemine eşdeğer olduğu gösterilmiştir. Enerji şekillendirme yaklaşımının yerine getirilmesindeki temel zorluk frekans uzayında bir uygun enerji fonksiyonunun seçilmesidir. Bu sonuç için, tekil değer şekillendirme bilinen kontrolcü tasarım problemi hakkında daha çok fikir verebilir ve 5. Bölümdeki dayanıklı kontrol edilmiş yapılar için ayrık tasarım yaklaşımı ve LQR için ayrık tasarım yaklaşımı ile ilgili sonuçlar uygulanabilir.

Gelecekteki çalışmalarda, H_2 veya H_∞ dayanlı kontrol formülasyonlarının kombinasyonu ve “genetic algoritma”, “simulated annealing algoritma”, “convex optimizasyon algoritması” gibi diğer optimizasyon metodları incelenecektir. Ayrıca, tekil değer şekillendirme kullanılarak enerji şekillendirme yaklaşımı konusu incelenmeye devam edilecektir.



KAYNAKLAR

- [1] **Anderson B. D. O. and Moore J.B.**, 1990. Optimal Control, Prentice Hall.
- [2] **Barber J. R.**, 1992. Elasticity, Kluwer Academic Publishers.
- [3] **Chandrupatla T. R. and Belegundu A. D.**, 2002. Introduction to Finite Elements in Engineering, Prentice Hall.
- [4] **Datta K.B. and RaiChaudhuri A.**, 2002. H_2 / H_∞ Control of Discrete Singularly Perturbed Systems: The state feedback case, *Automatica*, **38**, 1791-1797.
- [5] **Ersoy H. and Muğan A.**, 2002. Design Sensitivity Analysis of Structures Based upon the Singular Value Decomposition, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **191**, 3459-3476.
- [6] **Freudenberg J. and Looze D. P.**, 1998. Frequency Domain Properties of Scalar and Multivariable Feedback Systems, Springer Verlag.
- [7] **Friedland B.**, 1996. Advanced Control System Design, Prentice-Hall.
- [8] **Glover K. and Doyle J. C.**, 1988. State-space Formulae for all Stabilizing Controllers That Satisfy an H_∞ Norm Bound and Relations to Risk Sensitivity, *Systems and Control Letters*, **11**, 167-172.
- [9] **Golub G. H. and Loan C. F.**, 1983. Matrix Computations, Johns Hopkins University Press.
- [10] **Gu J. M., Ma Z. D. and Hulbert G. M.**, 2000. A New Load-dependent Ritz Vector Method for Structural Dynamics Analyses: Quasi-static Ritz Vector, *Finite Elements in Analysis and Design*, **36**, 261-278.
- [11] **Gu J. M., Ma Z. D. and Hulbert G. M.**, 2001. Quasi-static Data Recovery for Dynamic Analyses of Structural Systems, *Finite Elements in Analysis and Design*, **37**, 825-841.
- [12] **Haftka R.**, 1992. Elements of Structural Optimization, Kluwer Academic Publishers.
- [13] **Haug E. J. and Choi K. K.**, 1986. Design Sensitivity Analysis of Structural System, Academic Press.

- [14] **Horn R. A. and Johnson.C. R.**, 1995. Topics in Matrix Analysis, Cambridge University Press.
- [15] **Hughes.T. J. R.**, 1987. The Finite Element Method, Prentice Hall.
- [16] **Haddad W. M., Chellaboina V., Corrado J.R. and Bernstein D. S.**, 2000. Robust Fixed-Structure Controller Synthesisi using the Implicit Small-Gain Bound, *Journal of The Franklin Institute*, **337**, 85-96.
- [17] **Khot N. S.**, 1995. Optimum Structural Design and Robust Active Control Using Singular Value Constraints, *Computational Mechanics*, **16**, 208-215.
- [18] **Khot N. S. and Öz H.**, 1997. Structural – Control Optimization with H_2 – and H_∞ – norm Bounds, *Optimal Control Applications and Methods*, **18**, 297-311.
- [19] **Khot N. S. and Velely D. E.**, 1992. Robustness Characteristic of Optimum Structural/ Control Design, *J. Guidance Control and Dynamics*, **15**, 81-87.
- [20] **Kwan Y. W. and Bang.H. C.**, 2000. The Finite Element Method Using Matlab, CRC Press.
- [21] **Limebeer D. J. N., Anderson B. D. O. and Hendel B.**, 1994. A Nash Game Approach to Mixed H_2 / H_∞ Control, *IEEE Transaction on Automatic Control*, **39**, 69-82.
- [22] **Matlab Manuals.**, 2001. Robust Control Toolbox for Use with MATLAB, Mathworks Inc.,.
- [23] **Matlab Manuals.**, 2001. Optimization Toolbox for Use with MATLAB, Mathworks Inc.,.
- [24] **Muğan A.**, 2002. Effects of Mode Localization On Input-Output Directional Properties of Structure, *J. Sound and Vibrations*, **258**, 45-63.
- [25] **Obinata G. and Anderson B. D. O.**, 2001. Model Order Reduction for Control System Design, Springer-Verlag.
- [26] **Ortega R., van der Schaft A., Mareels I. and Maschke B.**, 2001. Putting Energy Back in Control, Lecture Notes, *IEE Control Systems Magazine*, pp. 18-33.
- [27] **Ortega R., van der Schaft A., Maschke B. and Escobar G.**, 2002. Interconnection and Damping Assignment Passivity-based Control of Port-controlled Hamiltonian Systems, *Automatica*, **38**, 585-596.

- [28] **Ortega R., Spong M. W., Gomez-Estern F. and Blankenstein G., 2002.**
Stabilization of a Class of Underactuated Mechanical Systems via
Interconnection and Damping Assignment, *IEEE Transaction on
Automatic Control*, **47**, 1218-1233.
- [29] **Ou J.-S., 1996.** Integrated Optimal Structural and Vibration Control Design,
Ph.D. Thesis, The University of Michigan.
- [30] **Ou J.-S. and Kikuchi N., 1996.** Optimal Design of Controlled Structure,
Structural Optimization, **11**, 19-28.
- [31] **Postlethwaite I., Edmunds J. M., and Macferlane A. G. J., 1981.** Principal
Gains and Principal Phases in the Analysis of Linear Multivariable
Feedback Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-26**,
32-46.
- [32] **Schittowski K., 1985.** NLQPL: A FORTRAN-subroutine Solving Constrained
Nonlinear Programming Problems, *Operations Research*, **5**, 485-500.
- [33] **Tsujioka K., Kajiwara I. and Nagamatsu A., 1996.** Integrated Optimum
Design of Structure and H_{∞} Control System, *AIAA Journal*, **34-1**,
159-165.
- [34] **Vanderplaats G.N., 1984.** Numerical Optimization Techniques For
Engineering Design with Application, McGraw-Hill Book Company.
- [35] **Zhou K., Doyle J. C. and Glover K., 1996.** Robust and Optimal Control,
Prentice Hall.
- [36] **Zhu Y., Qiu J., Tani J., Urushiyama Y. and Hontani Y., 1999.**
Simultaneous Optimization of Structure and Control for Vibration
Suppression, *J. of Vibration and Acoustics*, **121**, 237-243.

EK A

Tablo A.1 Eş zamanlı H_∞ optimizasyon problemi ile elde edilen çözümler.

Çözüm no	Başlangıç ve optimum kesit alanları (cm ²)	Toplam alan (cm ²)	γ	CPU Zamanı (s)	$\frac{\tau_{maks}}{\tau_{emn}}$
1	$h_{başlangıç} = [1.4, 1.4, 1.4, 1.4, 1.4, 1.4, 1.4]$ $h_{optimum} = [12, 1.55, 12, 12, 5.25, 3.13, 1.81]$	47.76	83.75	59.32	0.17
2	$h_{başlangıç} = [2, 2, 2, 2, 2, 2, 2]$ $h_{optimum} = [12, 1.71, 12, 12, 3.22, 1.97, 1.4]$	44.31	83.75	49.78	0.17
3	$h_{başlangıç} = [2.5, 2.5, 2.5, 2.5, 2.5, 2.5, 2.5]$ $h_{optimum} = [12, 4, 12, 11.67, 1.96, 4.34, 2.44]$	48.43	83.75	50.92	0.16
4	$h_{başlangıç} = [3, 3, 3, 3, 3, 3, 3]$ $h_{optimum} = [12, 2.8, 12, 12, 2.8, 2.9, 2.9]$	47.4	83.75	42	0.16
5	$h_{başlangıç} = [3.5, 3.5, 3.5, 3.5, 3.5, 3.5, 3.5]$ $h_{optimum} = [12, 3.5, 12, 11, 3.5, 3.5, 3.5]$	49	85	29.96	0.16
6	$h_{başlangıç} = [4, 4, 4, 4, 4, 4, 4]$ $h_{optimum} = [12, 4, 12, 11.5, 4, 4, 4]$	51.5	84.37	29.39	0.16
7	$h_{başlangıç} = [5, 5, 5, 5, 5, 5, 5]$ $h_{optimum} = [12, 5, 12, 11.34, 5, 5, 5]$	55.34	84.37	39.17	0.16
8	$h_{başlangıç} = [6, 6, 6, 6, 6, 6, 6]$ $h_{optimum} = [12, 6, 12, 12, 6, 6, 6]$	60	83.75	39.53	0.15
9	$h_{başlangıç} = [7, 7, 7, 7, 7, 7, 7]$ $h_{optimum} = [12, 7, 12, 12, 7, 7, 7]$	64	83.75	39.65	0.15
10	$h_{başlangıç} = [8, 8, 8, 8, 8, 8, 8]$ $h_{optimum} = [12, 8, 12, 9.26, 8, 8, 8]$	65.26	86.25	39.28	0.15
11	$h_{başlangıç} = [9, 9, 9, 9, 9, 9, 9]$ $h_{optimum} = [12, 9, 12, 12, 9, 9, 9]$	72	83.12	39.54	0.15
12	$h_{başlangıç} = [10, 10, 10, 10, 10, 10, 10]$ $h_{optimum} = [12, 10, 12, 11.92, 10, 10, 10]$	75.92	83.125	51.65	0.15
13	$h_{başlangıç} = [11, 11, 11, 11, 11, 11, 11]$ $h_{optimum} = [12, 11, 12, 12, 11, 11, 11]$	80	83.12	29.31	0.15
14	$h_{başlangıç} = [12, 12, 12, 12, 12, 12, 12]$ $h_{optimum} = [12, 12, 12, 12, 12, 12, 12]$	84	83.12	20.39	0.14

Tablo A.2 Eş zamanlı H₂ optimizasyon problemi ile elde edilen çözümler.

Çözüm no	Başlangıç ve optimum kesit alanları (cm ²)	Toplam alan (cm ²)	$\ T_{zw}\ _2$	CPU Zamanı (s)	$\frac{\tau_{maks}}{\tau_{emn}}$
1	$h_{başlangıç} = [1.4, 1.4, 1.4, 1.4, 1.4, 1.4, 1.4]$ $h_{optimum} = [1.4, 1.43, 1.92, 1.44, 1.41, 1.4, 1.41]$	10.41	0.087	26.11	0.95
2	$h_{başlangıç} = [2, 2, 2, 2, 2, 2, 2]$ $h_{optimum} = [1.99, 2, 1.99, 1.99, 2, 2, 2]$	13.97	0.093	14.48	0.88
3	$h_{başlangıç} = [2.5, 2.5, 2.5, 2.5, 2.5, 2.5, 2.5]$ $h_{optimum} = [2.49, 2.5, 2.49, 2.49, 2.5, 2.5, 2.5]$	17.47	0.098	14.25	0.70
4	$h_{başlangıç} = [3, 3, 3, 3, 3, 3, 3]$ $h_{optimum} = [2.99, 3, 2.99, 2.99, 3, 3, 3]$	20.97	0.104	14.37	0.58
5	$h_{başlangıç} = [3.5, 3.5, 3.5, 3.5, 3.5, 3.5, 3.5]$ $h_{optimum} = [3.49, 3.5, 3.49, 3.49, 3.5, 3.5, 3.5]$	24.47	0.108	14.52	0.50
6	$h_{başlangıç} = [4, 4, 4, 4, 4, 4, 4]$ $h_{optimum} = [3.99, 4, 3.99, 3.99, 4, 4, 4]$	27.97	0.112	14.45	0.44
7	$h_{başlangıç} = [5, 5, 5, 5, 5, 5, 5]$ $h_{optimum} = [4.99, 5, 4.99, 4.99, 5, 5, 5]$	34.97	0.119	14.34	0.35
8	$h_{başlangıç} = [6, 6, 6, 6, 6, 6, 6]$ $h_{optimum} = [5.99, 6, 5.99, 5.99, 6, 6, 6]$	41.97	0.126	14.36	0.29
9	$h_{başlangıç} = [7, 7, 7, 7, 7, 7, 7]$ $h_{optimum} = [6.99, 7, 6.99, 6.99, 7, 7, 7]$	48.97	0.132	14.37	0.25
10	$h_{başlangıç} = [8, 8, 8, 8, 8, 8, 8]$ $h_{optimum} = [7.99, 8, 7.99, 7.99, 8, 8, 8]$	55.97	0.137	14.30	0.22
11	$h_{başlangıç} = [9, 9, 9, 9, 9, 9, 9]$ $h_{optimum} = [8.99, 9, 8.99, 8.99, 9, 9, 9]$	62.97	0.142	14.39	0.19
12	$h_{başlangıç} = [10, 10, 10, 10, 10, 10, 10]$ $h_{optimum} = [9.99, 10, 9.99, 9.99, 10, 10, 10]$	69.97	0.146	14.39	0.17
13	$h_{başlangıç} = [11, 11, 11, 11, 11, 11, 11]$ $h_{optimum} = [10.99, 11, 10.99, 10.99, 11, 11, 11]$	76.97	0.151	14.29	0.16
14	$h_{başlangıç} = [12, 12, 12, 12, 12, 12, 12]$ $h_{optimum} = [11.99, 12, 11.99, 11.99, 12, 12, 12]$	83.97	0.155	14.36	0.14

Tablo A.3 Yapının (5.55) ile verilen amaç fonksiyonu ile optimize edildiği ardışık optimizasyon problemi ile elde edilen çözümler.

Çözüm no	Başlangıç ve optimum kesit alanları (cm ²)	Toplam alan (cm ²)	F	γ	$\ T_{zw}\ _2$	CPU Zamanı (s)	$\frac{\tau_{maks}}{\tau_{emn}}$
1	$h_{başlangıç} = [1.4, 1.4, 1.4, 1.4, 1.4, 1.4, 1.4]$ $h_{optimum} = [1.4, 1.4, 12, 11.62, 11.93, 1.4, 1.4]$	41.16	1.65	107.50	0.136	43.32	0.17
2	$h_{başlangıç} = [2, 2, 2, 2, 2, 2, 2]$ $h_{optimum} = [1.4, 1.4, 11.7, 12, 7.12, 1.4, 1.4]$	36.42	1.66	107.5	0.136	50.53	0.17
3	$h_{başlangıç} = [2.5, 2.5, 2.5, 2.5, 2.5, 2.5, 2.5]$ $h_{optimum} = [2.32, 1.88, 2.61, 3.05, 2.78, 2.48, 2.15]$	17.31	5.57	200	0.099	21.73	0.68
4	$h_{başlangıç} = [3, 3, 3, 3, 3, 3, 3]$ $h_{optimum} = [2.89, 2.55, 3.18, 3.43, 3.18, 3.01, 2.76]$	21	5.87	181.25	0.105	21.64	0.56
5	$h_{başlangıç} = [3.5, 3.5, 3.5, 3.5, 3.5, 3.5, 3.5]$ $h_{optimum} = [3.42, 3.15, 3.76, 3.88, 3.63, 3.52, 3.32]$	24.71	6.02	166.25	0.109	21.82	0.47
6	$h_{başlangıç} = [4, 4, 4, 4, 4, 4, 4]$ $h_{optimum} = [3.94, 3.69, 4.35, 4.36, 4.11, 3.99, 3.85]$	28.31	6.09	153.75	0.113	23.68	0.41
7	$h_{başlangıç} = [5, 5, 5, 5, 5, 5, 5]$ $h_{optimum} = [4.98, 4.75, 5.13, 5.12, 5.11, 5, 4.87]$	34.99	6.23	137.5	0.120	14.51	0.34
8	$h_{başlangıç} = [6, 6, 6, 6, 6, 6, 6]$ $h_{optimum} = [5.99, 5.8, 6.1, 6.1, 6.09, 6, 5.9]$	41.99	6.28	125	0.126	14.48	0.28
9	$h_{başlangıç} = [7, 7, 7, 7, 7, 7, 7]$ $h_{optimum} = [6.99, 6.83, 7.08, 7.08, 7.07, 7, 6.91]$	48.99	6.31	114.37	0.132	14.45	0.25
10	$h_{başlangıç} = [8, 8, 8, 8, 8, 8, 8]$ $h_{optimum} = [7.99, 7.85, 8.07, 8.07, 8.06, 8, 7.92]$	55.99	6.33	105.62	0.137	14.42	0.22
11	$h_{başlangıç} = [9, 9, 9, 9, 9, 9, 9]$ $h_{optimum} = [8.99, 8.87, 9.06, 9.06, 9.06, 9, 8.93]$	62.99	6.35	98.75	0.142	14.46	0.19
12	$h_{başlangıç} = [10, 10, 10, 10, 10, 10, 10]$ $h_{optimum} = [10, 9.88, 10.06, 10.05, 10.05, 10, 9.94]$	69.99	6.36	92.5	0.146	14.46	0.17
13	$h_{başlangıç} = [11, 11, 11, 11, 11, 11, 11]$ $h_{optimum} = [11, 10.9, 11.05, 11.05, 11.04, 11, 10.94]$	76.99	6.37	87.5	0.150	14.40	0.16
14	$h_{başlangıç} = [12, 12, 12, 12, 12, 12, 12]$ $h_{optimum} = [11.99, 11.9, 12, 12, 12, 12, 11.95]$	83.84	6.38	83.125	0.154	14.45	0.15

Tablo A.4 Yapının (5.56) ile verilen amaç fonksiyonu ile optimize edildiği ardışık optimizasyon problemi ile elde edilen çözümler.

Çözüm no	Başlangıç ve optimum kesit alanları (cm ²)	Toplam alan (cm ²)	F	γ	$\ T_{zw}\ _2$	CPU Zamanı (s)	$\frac{\tau_{maks}}{\tau_{emn}}$
1	$h_{başlangıç} = [1.4, 1.4, 1.4, 1.4, 1.4, 1.4, 1.4]$ $h_{optimum} = [1.4, 2.05, 12, 12, 9.98, 1.4, 1.4]$	40.23	0.17	106.87	0.136	178.56	0.16
2	$h_{başlangıç} = [2, 2, 2, 2, 2, 2, 2]$ $h_{optimum} = [1.4, 1.4, 12, 12, 12, 3.41, 1.4]$	43.61	1.75	106.87	0.136	127.92	0.17
3	$h_{başlangıç} = [2.5, 2.5, 2.5, 2.5, 2.5, 2.5, 2.5]$ $h_{optimum} = [1.4, 1.4, 12, 12, 10.41, 3.5, 1.4]$	42.12	1.77	106.87	0.136	242.07	0.17
4	$h_{başlangıç} = [3, 3, 3, 3, 3, 3, 3]$ $h_{optimum} = [1.4, 1.4, 3.35, 3.69, 1.4, 3.86, 3.34]$	18.44	0.52	195	0.101	125.43	0.56
5	$h_{başlangıç} = [3.5, 3.5, 3.5, 3.5, 3.5, 3.5, 3.5]$ $h_{optimum} = [1.4, 1.4, 12, 12, 4.62, 1.7, 1.4]$	34.53	1.71	106.87	0.136	94.40	0.17
6	$h_{başlangıç} = [4, 4, 4, 4, 4, 4, 4]$ $h_{optimum} = [1.4, 1.4, 12, 12, 1.44, 2.76, 1.4]$	32.41	1.82	106.87	0.136	143.89	0.20
7	$h_{başlangıç} = [5, 5, 5, 5, 5, 5, 5]$ $h_{optimum} = [4.99, 4.97, 5.06, 5.05, 5., 5., 4.97]$	35.04	0.63	138.75	0.119	70.51	0.35
8	$h_{başlangıç} = [6, 6, 6, 6, 6, 6, 6]$ $h_{optimum} = [1.4, 5.76, 12, 8.49, 1.4, 12, 1.4]$	42.46	3.28	113.75	0.132	131.62	0.28
9	$h_{başlangıç} = [7, 7, 7, 7, 7, 7, 7]$ $h_{optimum} = [1.4, 6.94, 12, 8.85, 1.4, 12, 1.4]$	44	3.17	113.12	0.132	158.03	0.28
10	$h_{başlangıç} = [8, 8, 8, 8, 8, 8, 8]$ $h_{optimum} = [1.4, 7.5, 12, 12, 6.62, 8.62, 6.79]$	54.95	4.97	106.87	0.136	144.5	0.16
11	$h_{başlangıç} = [9, 9, 9, 9, 9, 9, 9]$ $h_{optimum} = [1.4, 7.88, 12, 12, 4.57, 10.23, 7.75]$	55.84	4.75	106.87	0.136	126.96	0.16
12	$h_{başlangıç} = [10, 10, 10, 10, 10, 10, 10]$ $h_{optimum} = [2.14, 12, 12, 12, 6.32, 1.4, 1.4]$	47.27	2.29	104.37	0.138	624.53	0.15
13	$h_{başlangıç} = [11, 11, 11, 11, 11, 11, 11]$ $h_{optimum} = [11, 10.89, 12, 12, 11.04, 11.04, 10.91]$	78.92	6.27	85	0.153	58.46	0.14
14	$h_{başlangıç} = [12, 12, 12, 12, 12, 12, 12]$ $h_{optimum} = [11.99, 11.98, 12, 12, 12, 12, 11.99]$	83.96	0.64	83.12	0.154	85.60	0.14

Tablo A.5 Yapının (5.57) ile verilen amaç fonksiyonu ile optimize edildiği ardışık optimizasyon problemi ile elde edilen çözümler.

Çözüm no	Başlangıç ve optimum kesit alanları (cm ²)	Toplam alan (cm ²)	F	γ	$\ T_{zw}\ _2$	CPU Zamanı (s)	$\frac{\tau_{maks}}{\tau_{min}}$
1	$h_{başlangıç} = [1.4, 1.4, 1.4, 1.4, 1.4, 1.4, 1.4]$ $h_{optimum} = [1.4, 1.51, 1.82, 1.52, 1.4, 1.4, 1.4]$	10.46	2.52	262.5	0.087	49.26	0.99
2	$h_{başlangıç} = [2, 2, 2, 2, 2, 2, 2]$ $h_{optimum} = [1.4, 2.56, 3.65, 3.43, 2.1, 1.4, 1.4]$	15.94	1.83	193.75	0.101	28.65	0.51
3	$h_{başlangıç} = [2.5, 2.5, 2.5, 2.5, 2.5, 2.5, 2.5]$ $h_{optimum} = [2.32, 2.6, 2.77, 2.68, 2.53, 2.35, 2.39]$	17.66	2.52	201.25	0.099	38.65	0.64
4	$h_{başlangıç} = [3, 3, 3, 3, 3, 3, 3]$ $h_{optimum} = [2.85, 3.08, 3.21, 3.14, 3.03, 2.87, 2.9]$	21.08	2.56	183.75	0.104	59.62	0.55
5	$h_{başlangıç} = [3.5, 3.5, 3.5, 3.5, 3.5, 3.5, 3.5]$ $h_{optimum} = [3.37, 3.56, 3.67, 3.61, 3.52, 3.39, 3.42]$	24.58	2.58	168.75	0.108	35.26	0.48
6	$h_{başlangıç} = [4, 4, 4, 4, 4, 4, 4]$ $h_{optimum} = [3.88, 4.05, 4.15, 4.09, 4.02, 3.91, 3.93]$	28.06	2.60	157.5	0.112	41.12	0.42
7	$h_{başlangıç} = [5, 5, 5, 5, 5, 5, 5]$ $h_{optimum} = [4.91, 5.04, 5.11, 5.07, 5.01, 4.92, 4.94]$	35	2.62	138.75	0.119	59.67	0.34
8	$h_{başlangıç} = [6, 6, 6, 6, 6, 6, 6]$ $h_{optimum} = [5.92, 6.03, 6.09, 6.06, 6.01, 5.94, 5.95]$	42.02	2.62	125	0.126	39.48	0.29
9	$h_{başlangıç} = [7, 7, 7, 7, 7, 7, 7]$ $h_{optimum} = [6.93, 7.02, 7.07, 7.05, 7.01, 6.95, 6.96]$	49.01	2.63	114.37	0.131	37.68	0.25
10	$h_{başlangıç} = [8, 8, 8, 8, 8, 8, 8]$ $h_{optimum} = [7.94, 8.02, 8.06, 8.04, 8, 7.95, 7.96]$	56.01	2.63	106.25	0.137	38.03	0.22
11	$h_{başlangıç} = [9, 9, 9, 9, 9, 9, 9]$ $h_{optimum} = [8.95, 9.02, 9.05, 9.03, 9, 8.96, 8.97]$	63.01	2.63	98.75	0.141	41.96	0.19
12	$h_{başlangıç} = [10, 10, 10, 10, 10, 10, 10]$ $h_{optimum} = [9.95, 10.01, 10.05, 10.03, 10, 9.96, 9.97]$	69.98	2.63	93.12	0.146	67.17	0.17
13	$h_{başlangıç} = [11, 11, 11, 11, 11, 11, 11]$ $h_{optimum} = [10.96, 11, 11.04, 11.03, 11, 10.96, 10.97]$	77	2.64	87.5	0.150	37.31	0.16
14	$h_{başlangıç} = [12, 12, 12, 12, 12, 12, 12]$ $h_{optimum} = [11.96, 12, 12, 12, 12, 11.97, 11.97]$	83.9	2.64	83.12	0.154	51.5	0.15

Tablo A.6 Eş zamanlı LQR optimizasyon yaklaşımı ile elde edilen bazı çözümler.

Çözüm no	Başlangıç ve optimum kesit alanları (cm ²)	Toplam alan (cm ²)	J	$\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_n}$	CPU Zamanı (s)	$\frac{\tau_{maks}}{\tau_{emn}}$
1	$h_{başlangıç} = [1.4, 1.4, 1.4, 1.4, 1.4, 1.4, 1.4]$ $h_{optimum} = [1.52, 1.4, 1.88, 1.84, 1.4, 1.4, 1.4]$	10.84	89.79	23380	4.96	0.96
2	$h_{başlangıç} = [2, 2, 2, 2, 2, 2, 2]$ $h_{optimum} = [1.4, 1.97, 1.87, 1.4, 1.87, 1.4, 1.4]$	11.31	89.49	23620	20.71	0.96
3	$h_{başlangıç} = [2.5, 2.5, 2.5, 2.5, 2.5, 2.5, 2.5]$ $h_{optimum} = [2.35, 2.61, 2.17, 1.4, 2.49, 2.5, 2.62]$	16.16	89.54	30590	16.04	0.83
4	$h_{başlangıç} = [3, 3, 3, 3, 3, 3, 3]$ $h_{optimum} = [1.43, 1.4, 2.22, 1.4, 2.96, 1.4, 2.99]$	13.82	89.55	29267	21.92	0.83
5	$h_{başlangıç} = [3.5, 3.5, 3.5, 3.5, 3.5, 3.5, 3.5]$ $h_{optimum} = [1.96, 4.07, 1.97, 1.4, 3.86, 5.06, 5.15]$	23.5	89.72	47180	23.9	0.88
6	$h_{başlangıç} = [4, 4, 4, 4, 4, 4, 4]$ $h_{optimum} = [3.31, 3.91, 2.35, 1.4, 2.03, 3.99, 3.91]$	20.93	89.60	38958	26.34	0.76
7	$h_{başlangıç} = [5, 5, 5, 5, 5, 5, 5]$ $h_{optimum} = [3.99, 4.99, 2.23, 1.4, 4.56, 4.65, 4.91]$	26.77	89.84	53470	9.42	0.78
8	$h_{başlangıç} = [6, 6, 6, 6, 6, 6, 6]$ $h_{optimum} = [2, 6.28, 3.77, 1.4, 4.42, 8.41, 3.76]$	30.06	89.78	61599	39	0.51
9	$h_{başlangıç} = [7, 7, 7, 7, 7, 7, 7]$ $h_{optimum} = [6.06, 7, 4.42, 1.4, 6.78, 5.28, 6.78]$	37.73	90.08	72390	9.32	0.45
10	$h_{başlangıç} = [8, 8, 8, 8, 8, 8, 8]$ $h_{optimum} = [6.56, 7.77, 4.7, 1.4, 7.58, 8.01, 6.16]$	42.17	89.95	82836	25.28	0.43
11	$h_{başlangıç} = [9, 9, 9, 9, 9, 9, 9]$ $h_{optimum} = [9.23, 9.59, 6.59, 1.4, 8.8, 10.91, 8.96]$	55.5	90.5	111370	30.53	0.34
12	$h_{başlangıç} = [10, 10, 10, 10, 10, 10, 10]$ $h_{optimum} = [8.08, 10.5, 6.13, 1.4, 10.5, 10.53, 10.37]$	57.56	90.37	109620	14.82	0.35
13	$h_{başlangıç} = [11, 11, 11, 11, 11, 11, 11]$ $h_{optimum} = [9.27, 9.14, 5.5, 1.4, 9.16, 11.38, 10.99]$	56.87	90.29	113400	185.75	0.38
14	$h_{başlangıç} = [12, 12, 12, 12, 12, 12, 12]$ $h_{optimum} = [11.91, 12, 10, 1.4, 12, 12, 12]$	71.32	90.84	137350	28.26	0.25

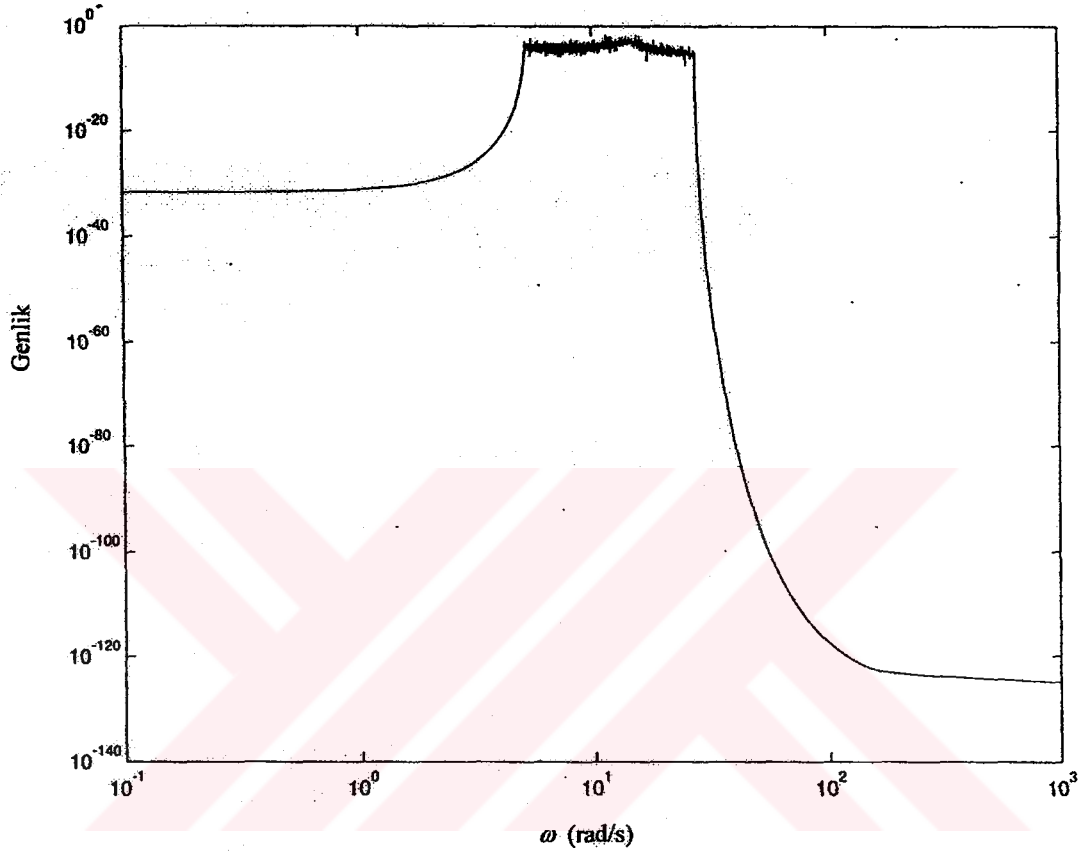
Tablo A.7 Ardışık LQR optimizasyon yaklaşımı ile elde edilen bazı çözümler.

Çözüm no	Başlangıç ve optimum kesit alanları (cm ²)	Toplam alan (cm ²)	J	$\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_n}$	CPU Zamanı (s)	$\frac{\tau_{maks}}{\tau_{emn}}$
1	$h_{başlangıç} = [1.4, 1.4, 1.4, 1.4, 1.4, 1.4, 1.4]$ $h_{optimum} = [1.41, 1.41, 1.82, 1.4, 1.4, 1.4, 1.4]$	10.25	89.67	20990	18.03	0.99
2	$h_{başlangıç} = [2, 2, 2, 2, 2, 2, 2]$ $h_{optimum} = [1.67, 1.76, 1.97, 1.4, 1.4, 1.43, 1.4]$	11.04	89.68	20990	13.59	0.93
3	$h_{başlangıç} = [2.5, 2.5, 2.5, 2.5, 2.5, 2.5, 2.5]$ $h_{optimum} = [1.8, 2.01, 2.44, 1.4, 1.4, 1.62, 1.4]$	12.08	89.706	20990	13.81	0.76
4	$h_{başlangıç} = [3, 3, 3, 3, 3, 3, 3]$ $h_{optimum} = [1.7, 1.66, 1.81, 1.4, 1.4, 1.7, 1.4]$	11.07	89.68	20990	23.26	1.00
5	$h_{başlangıç} = [3.5, 3.5, 3.5, 3.5, 3.5, 3.5, 3.5]$ $h_{optimum} = [1.76, 1.57, 1.81, 1.4, 1.4, 1.4, 1.4]$	10.75	89.68	20990	58.68	1.00
6	$h_{başlangıç} = [4, 4, 4, 4, 4, 4, 4]$ $h_{optimum} = [1.4, 1.4, 1.83, 1.4, 1.4, 1.4, 1.4]$	10.23	89.67	20990	32.68	1.00
7	$h_{başlangıç} = [5, 5, 5, 5, 5, 5, 5]$ $h_{optimum} = [1.74, 1.69, 1.81, 1.4, 1.4, 1.74, 1.4]$	11.20	89.50	20990	28.45	0.99
8	$h_{başlangıç} = [6, 6, 6, 6, 6, 6, 6]$ $h_{optimum} = [1.4, 1.4, 1.83, 1.4, 1.4, 1.86, 1.4]$	10.70	89.67	20990	51.57	1.00
9	$h_{başlangıç} = [7, 7, 7, 7, 7, 7, 7]$ $h_{optimum} = [1.65, 1.62, 1.81, 1.4, 1.4, 1.65, 1.4]$	10.95	89.50	20990	33.48	0.99
10	$h_{başlangıç} = [8, 8, 8, 8, 8, 8, 8]$ $h_{optimum} = [1.71, 1.66, 1.81, 1.4, 1.4, 1.71, 1.4]$	11.10	89.68	20990	38.59	0.99
11	$h_{başlangıç} = [9, 9, 9, 9, 9, 9, 9]$ $h_{optimum} = [1.4, 1.4, 1.83, 1.4, 1.4, 2.08, 1.4]$	10.91	89.67	20990	91.65	1.00
12	$h_{başlangıç} = [10, 10, 10, 10, 10, 10, 10]$ $h_{optimum} = [1.88, 1.43, 1.82, 1.4, 1.4, 1.4, 1.4]$	10.73	89.69	20990	67.51	1.00
13	$h_{başlangıç} = [11, 11, 11, 11, 11, 11, 11]$ $h_{optimum} = [1.54, 2.93, 2.47, 1.4, 1.4, 1.4, 1.4]$	12.54	89.77	20990	33.89	0.75
14	$h_{başlangıç} = [12, 12, 12, 12, 12, 12, 12]$ $h_{optimum} = [2.19, 1.47, 1.85, 1.4, 1.4, 1.46, 1.4]$	11.18	89.70	20990	38.60	0.98

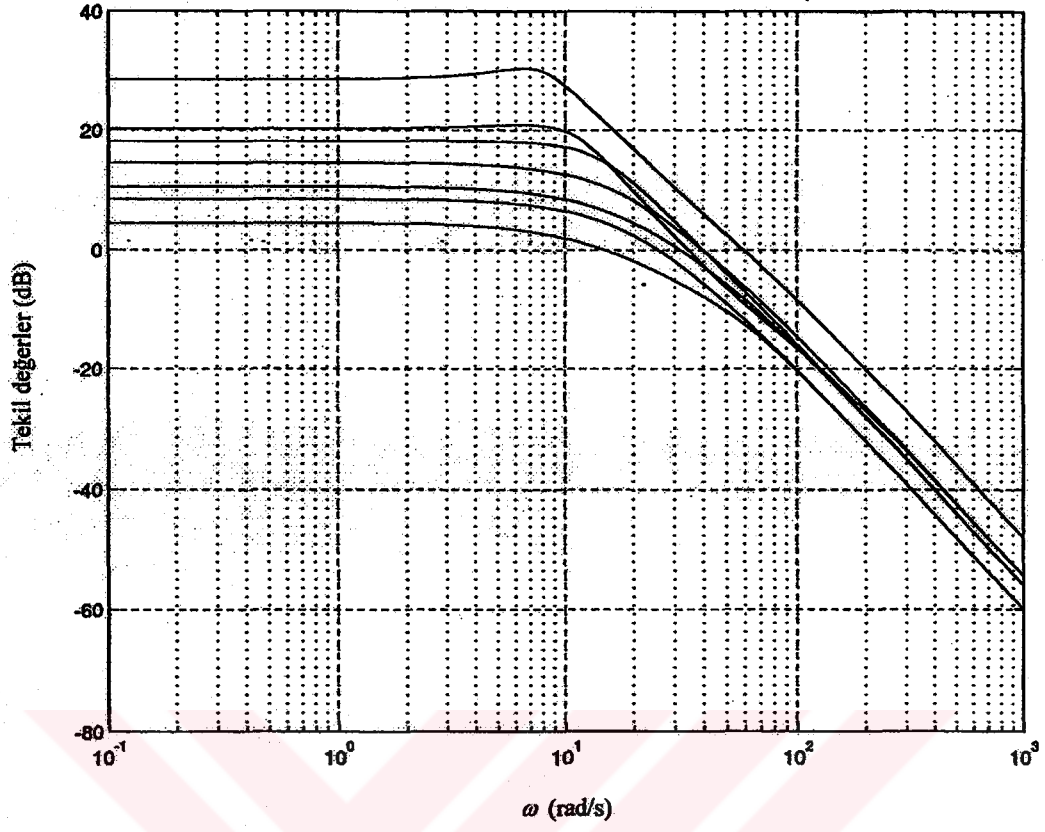
Tablo A.8 P ve G taransfer matrisleri için tekil değerlerin Gateaux türevlerinin maksimumu.

Perturbe edilmiş çubuk	$\max \delta\sigma_1(P)$	$\max \delta\sigma_1(G)$
1	2.9143	21.6189
2	-13.3626	-45.2740
3	-7.07212	-63.1449
4	-7.1903	-63.1188
5	-3.9279	-45.1288
6	1.2031	8.8138
7	-5.1514	-11.3411

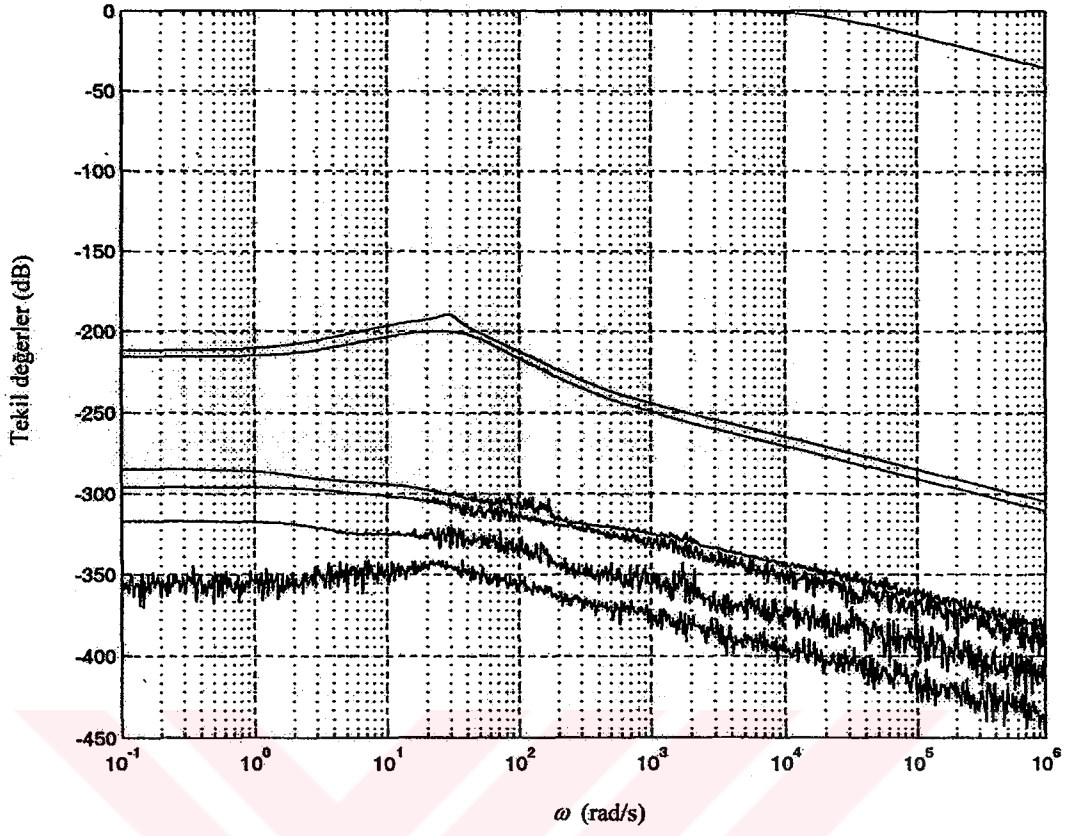
EK B



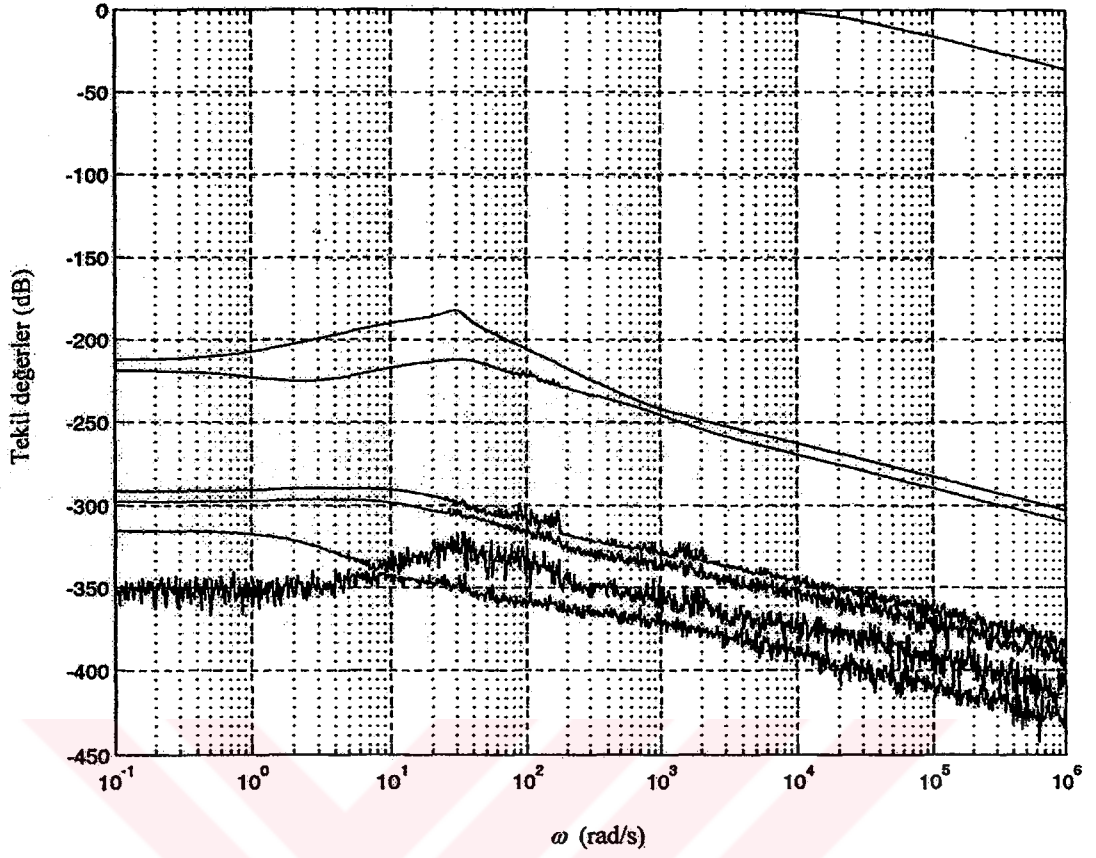
Şekil B.1 2000 serbestlik derecesine sahip bir kafes yapının Bode kazanç eğrisi.



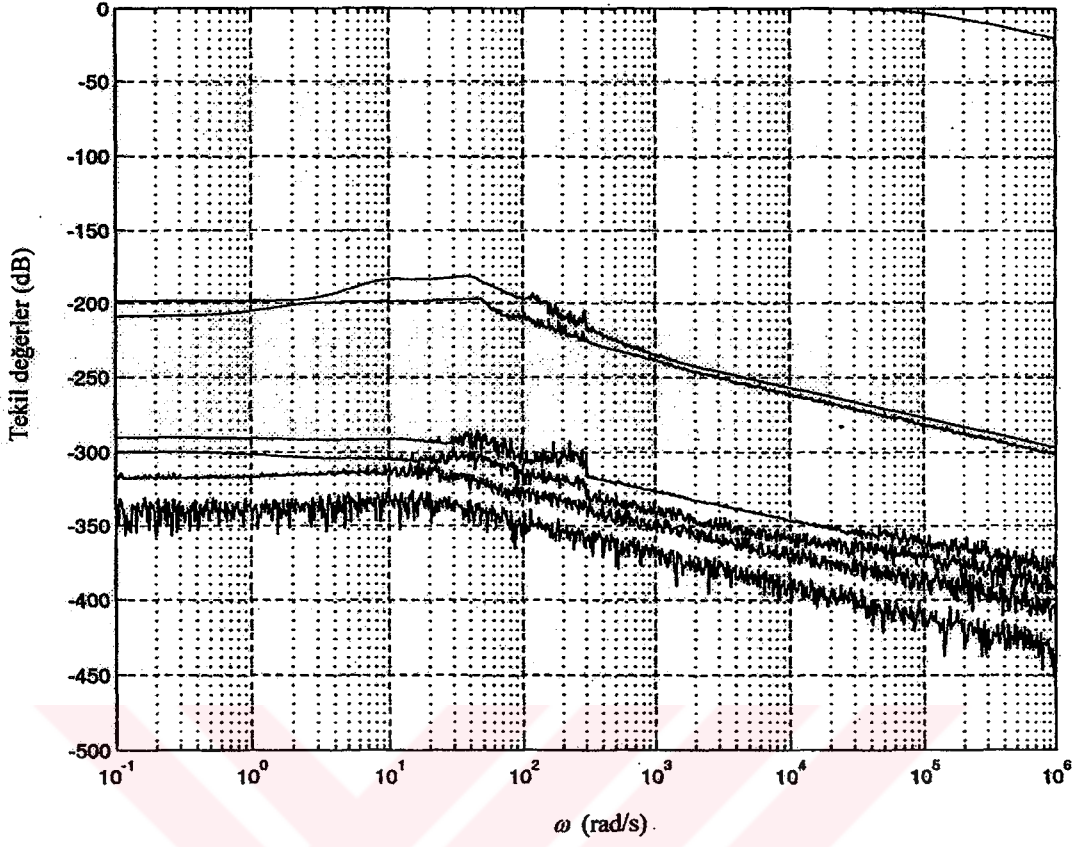
Şekil B.2 Sabit $h_{\text{initial}}=1.5 \text{ cm}^2$ için açık-çevrim yapı sisteminin tekil değerleri.



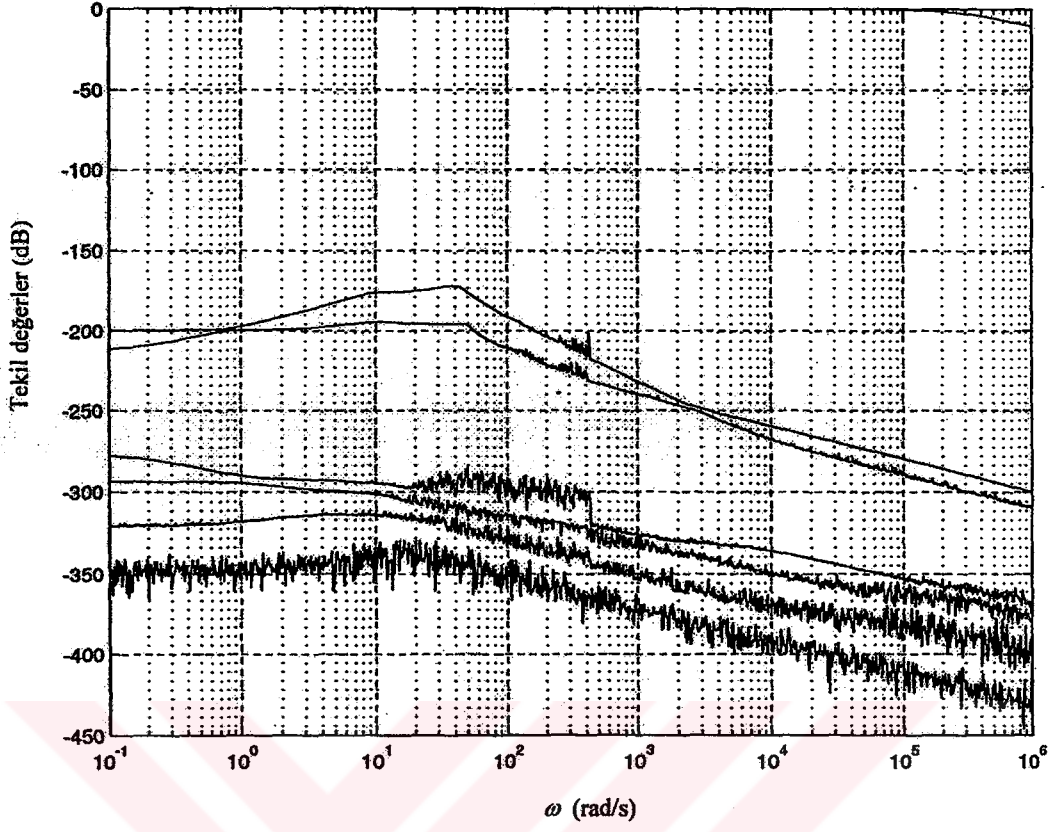
Şekil B.3 Eş zamanlı H_∞ optimum kontrolcünün optimum çözümleri için duyarlılık fonksiyonlarının tekil değerleri.



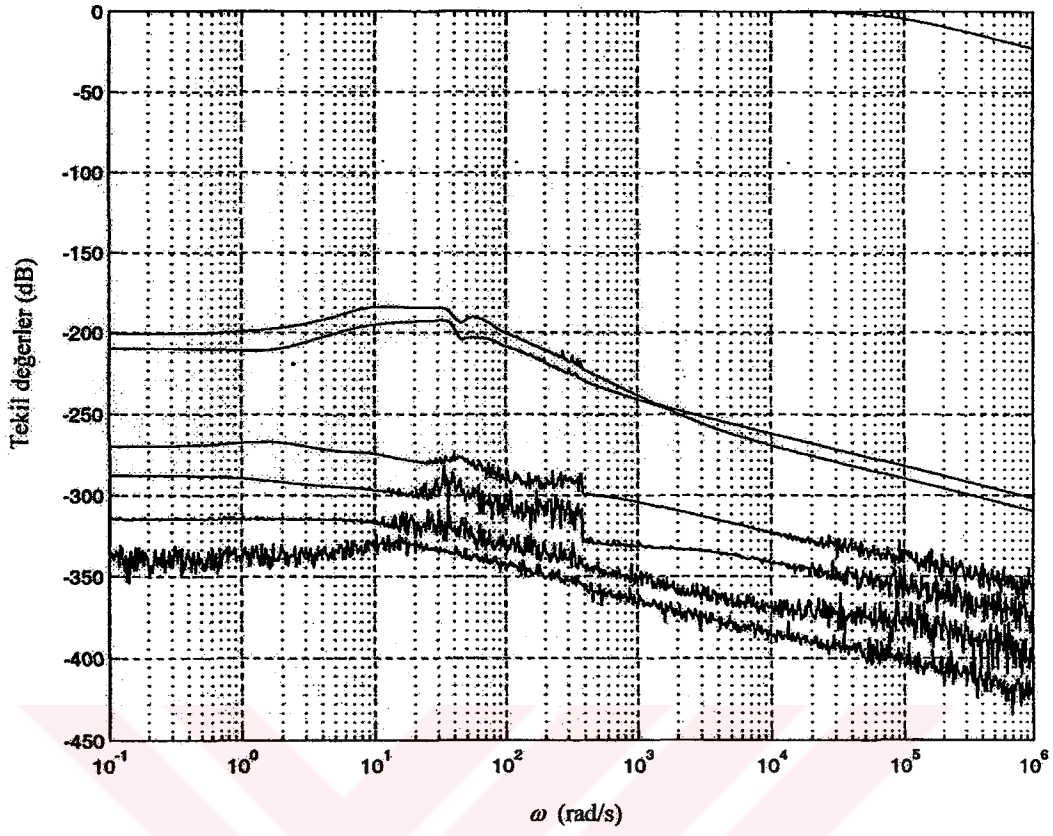
Şekil B.4 Eş zamanlı H_2 optimum kontrolcünün optimum çözümleri için duyarlılık fonksiyonlarının tekil değerleri.



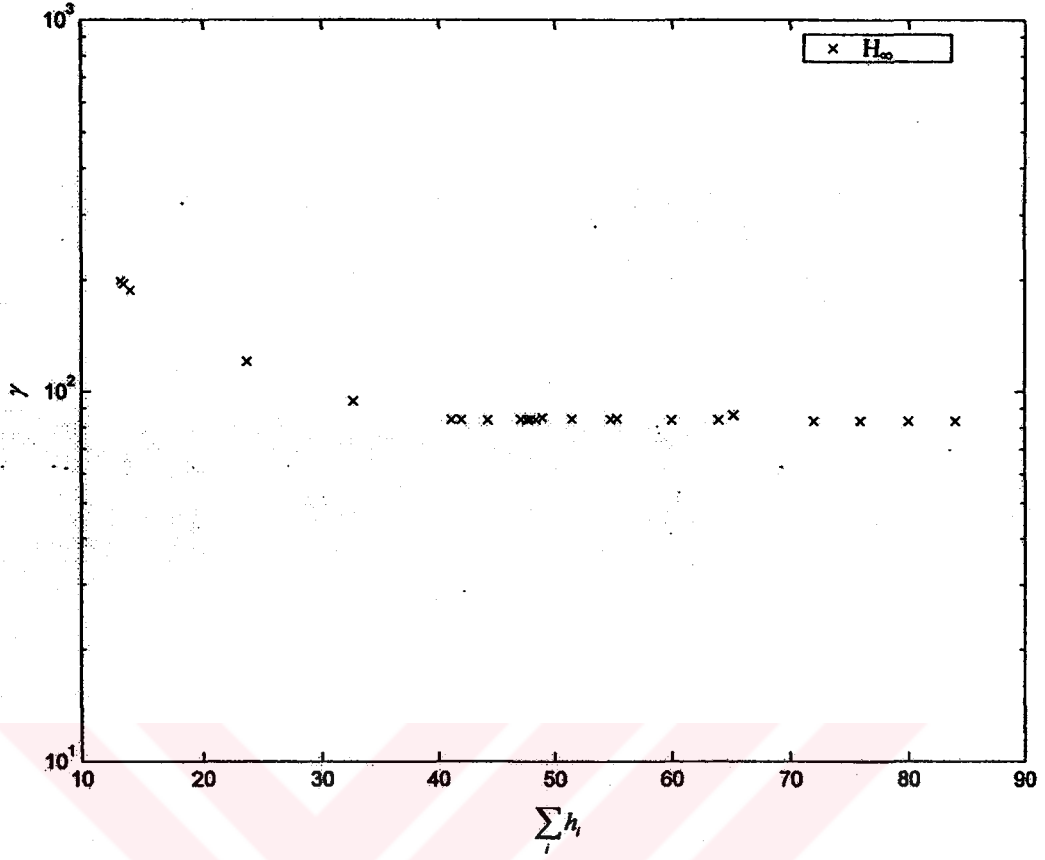
Şekil B.5 Amaç fonksiyonu (5.55) ile verilen kontrol edilmiş yapının ve açık-çevrim yapının ardışık optimizasyonunun tekil değerleri.



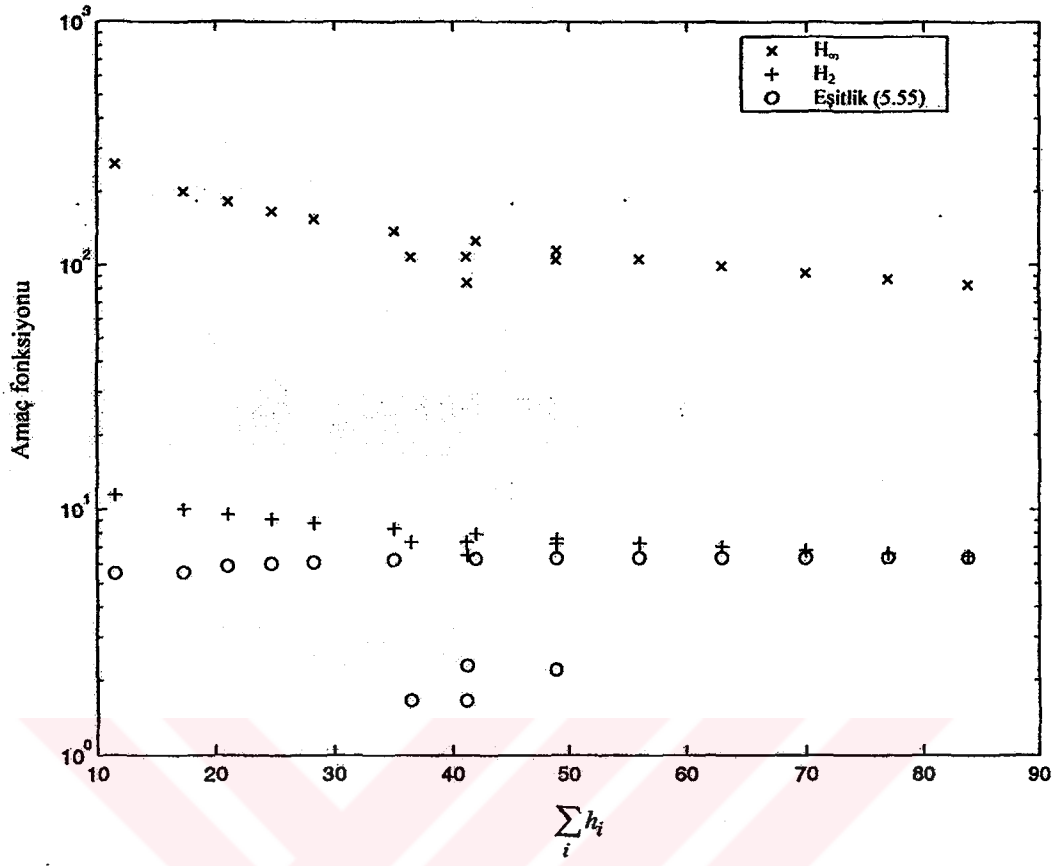
Şekil B.6 Amaç fonksiyonu (5.56) ile verilen kontrol edilmiş yapının ve açık-çevrim yapının ardışık optimizasyonunun tekil değerleri.



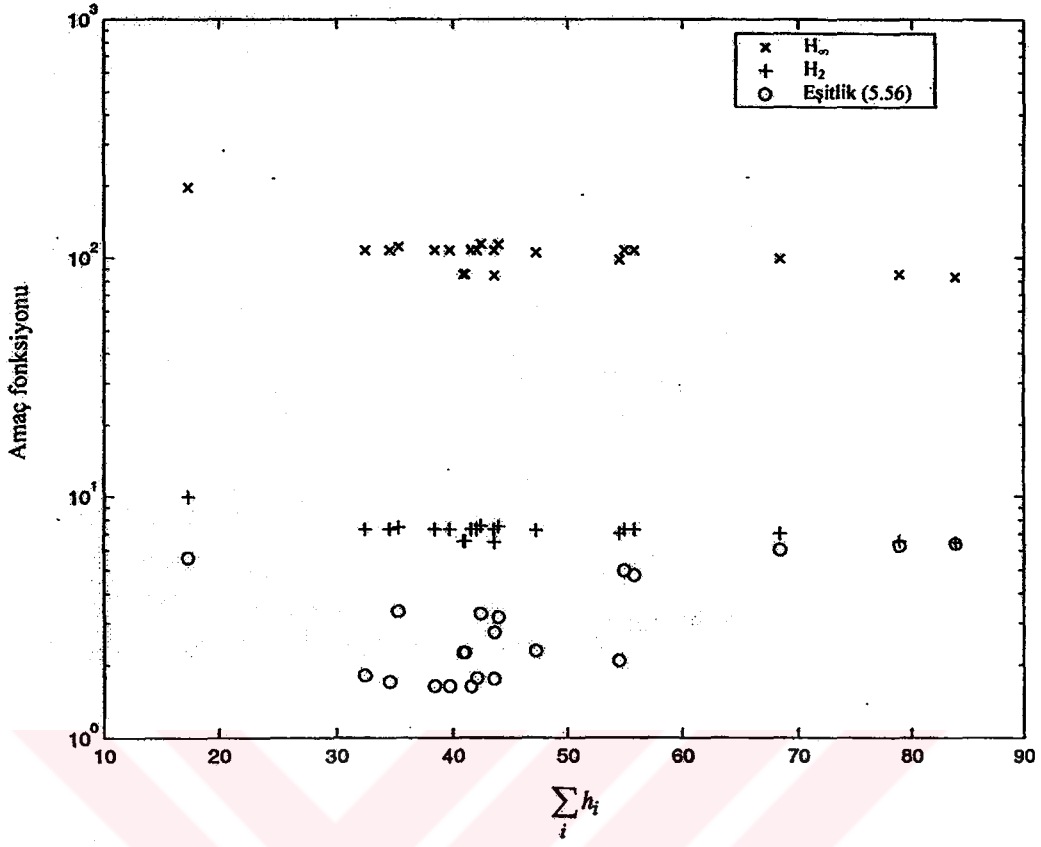
Şekil B.7 Amaç fonksiyonu (5.57) ile verilen kontrol edilmiş yapının ve açık- çevrim yapının ardışık optimizasyonunun tekil değerleri.



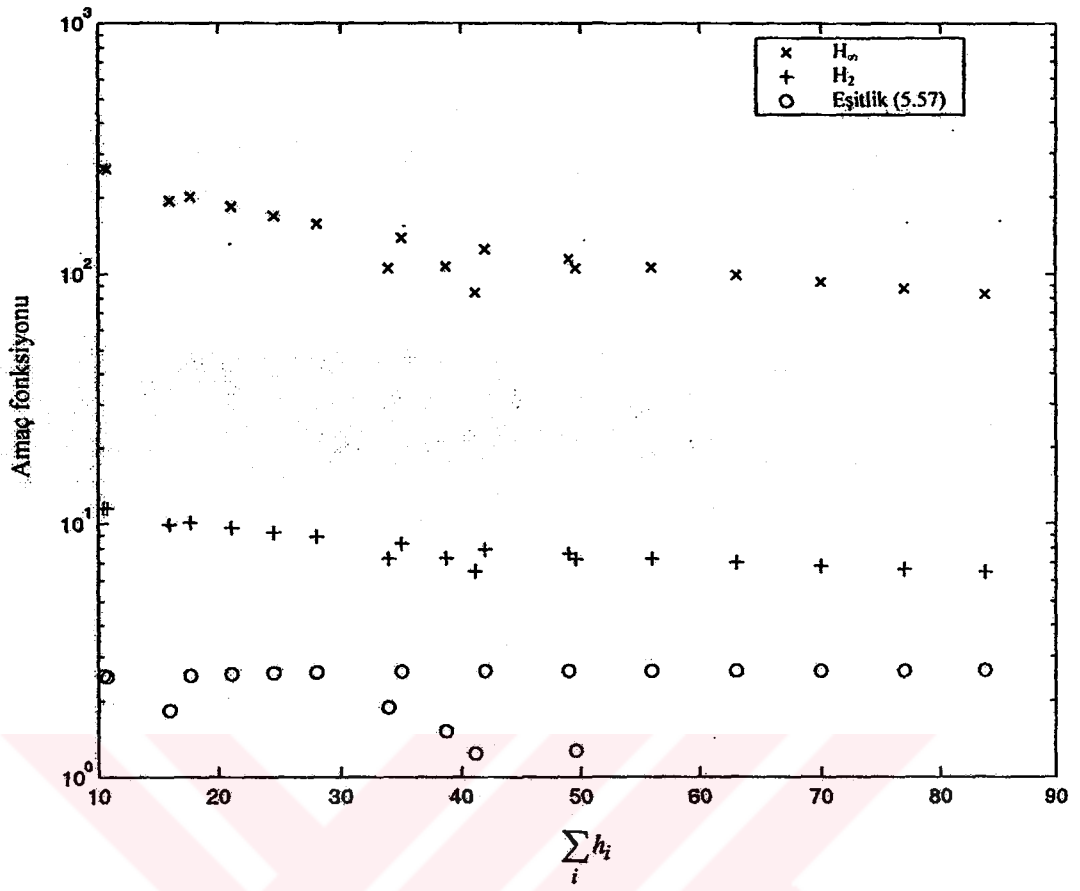
Şekil B.8 Kafes sistemin eş zamanlı optimum tasarımı için toplam kesit alanı değiştiğinde H_∞ dayanıklı kontrolcü için minimum γ .



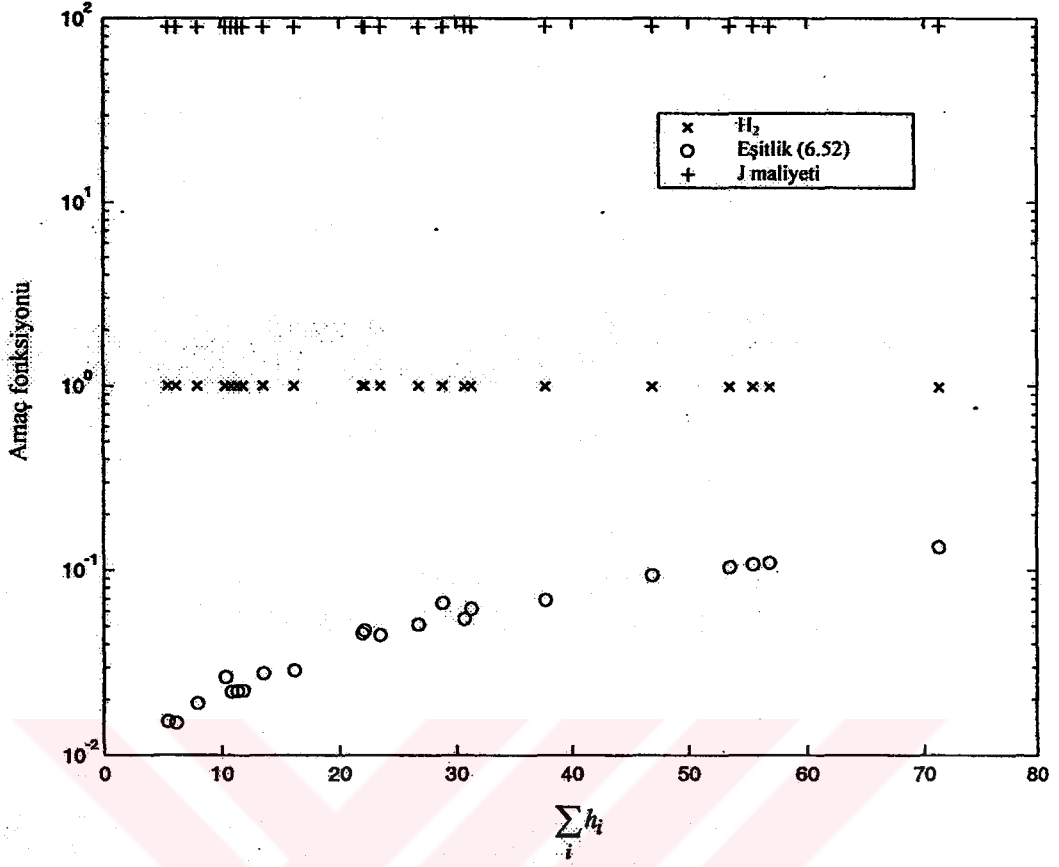
Şekil B.9 (5.55) amaç fonksiyonunun kullanımı ile ardışık optimum tasarım için toplam kesit alanı değiştiğinde H_∞ ve H_2 normları ile (5.55) tekil değerlerinin oranı.



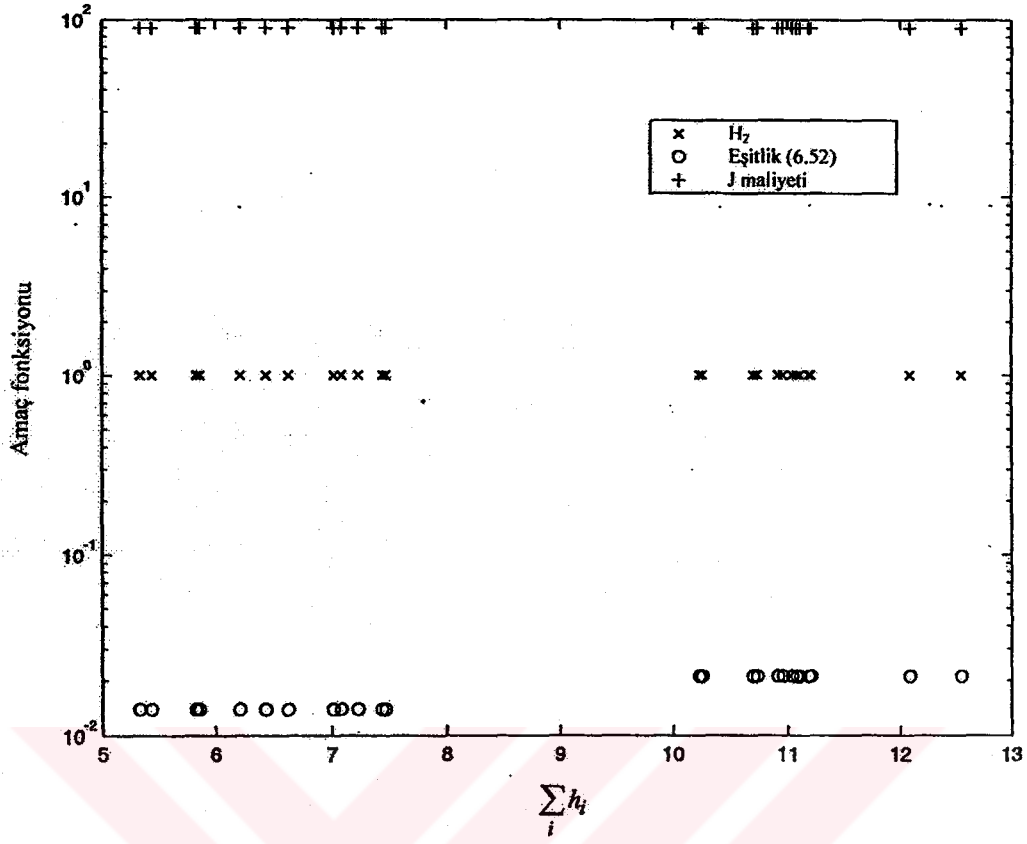
Şekil B.10 (5.56) amaç fonksiyonunun kullanımı ile ardışık optimum tasarım için toplam kesit alanı değiştiğinde H_∞ ve H_2 normları ile (5.56) tekil değerlerinin oranı.



Şekil B.11 (5.57) amaç fonksiyonunun kullanımı ile ardışık optimum tasarım için toplam kesit alanı değiştiğinde H_∞ ve H_2 normları ile (5.57) tekil değerlerinin oranı.



Şekil B.12 (6.3) amaç fonksiyonunun kullanımı ile kafes sistemin eş zamanlı optimum tasarımı için toplam kesit alanı değiştiğinde J maliyet fonksiyonu, H_2 normu ve tekil değerlerin terslerinin toplamı.



Şekil B.13 (6.3) amaç fonksiyonunun kullanımı ile kafes sistemin ardışık optimum tasarımı için toplam kesit alanı değiştiğinde J maliyet fonksiyonu, H_2 normu ve tekil değerlerin terslerinin toplamı.

ÖZGEÇMİŞ

Mehmet Bozca, 1965 yılında Kilis’de doğdu. İlk, orta ve lise eğitimlerini İstanbul’da tamamladı. 1983 yılında, Kocasinan Lisesi Matematik bölümünden mezun oldu. 1987 yılında, Yıldız Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makina Mühendisliği Bölümü, Konstrüksiyon ve İmalat Opsiyonundan Makina Mühendisi olarak mezun oldu. 1989 yılında, Denizli 11. Piyade Tugayı, 12. Piyade Er Eğitim Alayı’nda 207. Kısa Dönem olarak askerlik hizmetini tamamladı. 1990-1993 yıllarında, Cihan Elektronik Sanayii A.Ş., Grundig TV Fabrikası’nda sırasıyla Konstrüksiyon Mühendisi ve Yan Sanayii İlişkileri Şefi olarak görev yaptı. 1993-1994 yıllarında, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İngilizce Hazırlık Programı’na devam etti. 1996 yılında, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Makina Mühendisliği Ana Bilim Dalı, Konstrüksiyon Programı’ndan Makina Yüksek Mühendisi olarak mezun oldu. 1995-1997 yıllarında, Ford-Otosan Otomobil Sanayii A.Ş.’ de Metod Mühendisi olarak görev yaptı. 1997-1998 yıllarında, Assan-Hanil Otomotiv Sanayi ve Ticaret A.Ş.’ de Geliştirme Mühendisi olarak görev yaptı. 1998 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi, Makina Fakültesi, Makina Mühendisliği Bölümü, Konstrüksiyon Bilim Dalı’nda Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı. 1999 yılında, İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Makina Mühendisliği Ana Bilim Dalı, Konstrüksiyon ve İmalat Programı’nda Doktora eğitimine başladı.