

**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GAZ DİNAMİĞİ DENKLEMLERİNİN ENO WENO  
ŞEMALARI İLE ETKİN ÇÖZÜMÜ**

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU  
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
Uçak Müh. Mehti KÖKLÜ  
(511991037)**

**101422**

**101422**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 11 Haziran 2001  
Tezin Savunulduğu Tarih : 26 Haziran 2001**

**Tez Danışmanı :**

**Prof.Dr. A. Rüstem ASLAN**

**Diğer Jüri Üyeleri**

**Prof.Dr. Adil YÜKSELEN**

**Yrd. Doç. Dr Kemal Bülent YÜCEİL**

**HAZİRAN 2001**

## ÖNSÖZ

Yapılan bu çalışmada ENO (Essentially Non-Oscillatory) ve WENO (Weighted ENO) şemaları incelenmektedir. ENO WENO şemaları yüksek hassasiyetli ve süreksizliklerde salınım yapmayan çözüm şemalarıdır. Bu şemalar sonlu hacim ve sonlu fark şemaları için incelenmiştir. Skaler konveksiyon denklemi, bir boyutlu Euler denklemi ve iki boyutlu Euler denklemi ele alınmış, bu denklemler örnek problemler için çözülmüştür. Uzaysal ayırıklaştırma ENO ve WENO şemaları ile yapılmış zamanda ise üçüncü mertebe TVD Runge-Kutta şeması kullanılmıştır. Bu çalışmada amaç ENO WENO şemalarının incelenmesi ve gaz dinamiği denklemlerine uygulanmasıdır.

Tez çalışmam sırasında benden yardımını ve desteğini esirgemeyen değerli hocam ve danışmanım Sayın Prof. Dr. A. Rüstem ASLAN'a, ayrıca Sayın Doç. Dr. Fırat O. EDİS'e teşekkür ederim.

Mehti KÖKLÜ

Haziran, 2001

## İÇİNDEKİLER

|                                                                     | <u>Sayfa No</u> |
|---------------------------------------------------------------------|-----------------|
| KISALTMALAR                                                         | iv              |
| ŞEKİL LİSTESİ                                                       | v               |
| SEMBOL LİSTESİ                                                      | vi              |
| ÖZET                                                                | vii             |
| SUMMARY                                                             | ix              |
| <br>                                                                |                 |
| 1. GİRİŞ                                                            | 1               |
| <br>                                                                |                 |
| 2. FORMÜLASYON                                                      | 5               |
| 2.1. Euler Denklemi (Viskozitesiz Akış Denklemi)                    | 5               |
| 2.1.1. Vektörel Formda Euler Denklemi                               | 5               |
| 2.1.2. Euler Denklemlerinin Sanki Lineer Formülasyonu               | 5               |
| 2.1.3. Skaler Konveksiyon Denklemi                                  | 6               |
| 2.1.4. Bir Boyutlu Euler Denklemi                                   | 7               |
| 2.1.4. İki Boyutlu Euler Denklemi                                   | 7               |
| 2.2. Karakteristiklere Ayrıştırma                                   | 8               |
| 2.2.1. Bir Boyutlu Euler Denklemi İçin Roe Matrisinin Oluşturulması | 9               |
| 2.3. Sonlu Fark Ve Sonlu Hacim Formülasyonu                         | 11              |
| 2.4. Uzaysal Ayrıklaştırma                                          | 13              |
| 2.4.1. Hücre Averajlarından Türevlere Yaklaşım                      | 13              |
| 2.4.2. Nokta Değerlerinden Türevlere Korunum Yaklaşımı              | 18              |
| 2.4.2. Sabit Hesaplama moleküllü Yaklaşım                           | 20              |
| 2.5. ENO WENO Yaklaşımları                                          | 21              |
| 2.5.1. ENO Yaklaşımı                                                | 22              |
| 2.5.2. WENO Yaklaşımı                                               | 27              |
| 2.6. Zaman Ayrıklaştırması                                          | 33              |
| <br>                                                                |                 |
| 3. UYGULAMALAR                                                      | 36              |
| 3.1. Skaler Konveksiyon Denklemi ( Burger Denklemi )                | 36              |
| 3.2. Şok Tüpü Problemi veya Rieman Problemi                         | 40              |
| 3.2.1. Sod Problemi                                                 | 41              |
| 3.2.2. Lax Problemi                                                 | 43              |
| 3.3. İki Boyutlu Euler Denklemi                                     | 44              |
| 3.3.1. Double Mach Reflection                                       | 44              |
| 3.3.2. İki Boyutlu Şok - Girdap Etkileşimi                          | 47              |
| <br>                                                                |                 |
| 4. SONUÇ ve DEĞERLENDİRME                                           | 49              |
| KAYNAKLAR                                                           | 51              |
| ÖZGEÇMİŞ                                                            | 53              |

## KISALTMALAR

|             |                                        |
|-------------|----------------------------------------|
| <b>ENO</b>  | : Essentially Non Oscillatory          |
| <b>WENO</b> | : Weighted Essentially Non Oscillatory |
| <b>TVD</b>  | : Total Variation Diminishing          |
| <b>REF</b>  | : Referans                             |



## ŞEKİL LİSTESİ

|                                                                                         | <u>Sayfa No</u> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| Şekil 2.1 : Hücrelerin gösterilmesi                                                     | 11              |
| Şekil 2.2 : Hücre sınır değerlerinin gösterilmesi                                       | 14              |
| Şekil 2.3 : Basamak fonksiyonu için sabit hesaplama molekül ve ENO ile bulunan sonuçlar | 21              |
| Şekil 3.1 : $t=0$ da problemin başlangıç hali.                                          | 37              |
| Şekil 3.2 : Minmod yaklaşımı, Lax-Friedrich akısı ile bulunan sonuç.                    | 37              |
| Şekil 3.3 : Minmod yaklaşımı, Godunov akısı ile bulunan sonuç.                          | 38              |
| Şekil 3.4 : Sabit hesaplama molekülü yaklaşımı ile bulunan sonuç.                       | 38              |
| Şekil 3.5 : ENO yaklaşımı, Lax-Friedrich akısı ile bulunan sonuç.                       | 39              |
| Şekil 3.6 : ENO yaklaşımı, Godunov akısı ile bulunan sonuç.                             | 39              |
| Şekil 3.7 : WENO yaklaşımı, Lax-Friedrich akısı ile bulunan sonuç.                      | 40              |
| Şekil 3.8 : WENO yaklaşımı, Godunov akısı ile bulunan sonuç.                            | 40              |
| Şekil 3.9 : Şok tüpünün şematik gösterimi.                                              | 41              |
| Şekil 3.10 : Sod probleminin $t=0$ 'da yoğunluk dağılımı.                               | 41              |
| Şekil 3.11 : Sod probleminin WENO ile bulunan yoğunluk dağılımı                         | 42              |
| Şekil 3.12 : Referans [8]'de bulunan sonuç ve gerçek çözüm.                             | 42              |
| Şekil 3.13 : Sod probleminin WENO ile bulunan basınç dağılımı.                          | 42              |
| Şekil 3.14 : Referans [8]'de bulunan sonuç ve gerçek çözüm.                             | 42              |
| Şekil 3.15 : Sod probleminin WENO ile bulunan hız dağılımı.                             | 42              |
| Şekil 3.16 : Referans [8]'de bulunan sonuç ve gerçek çözüm.                             | 42              |
| Şekil 3.17 : Lax probleminin $t=0$ 'da yoğunluk dağılımı.                               | 43              |
| Şekil 3.18 : Lax probleminin $t=0$ 'da basınç dağılımı.                                 | 43              |
| Şekil 3.19 : Lax probleminin WENO ile bulunan yoğunluk dağılımı.                        | 43              |
| Şekil 3.20 : Referans [8]'de bulunan sonuç ve gerçek çözüm.                             | 43              |
| Şekil 3.21 : Lax probleminin WENO ile bulunan basınç dağılımı.                          | 44              |
| Şekil 3.22 : Referans [8]'de bulunan sonuç ve gerçek çözüm.                             | 44              |
| Şekil 3.23 : Lax probleminin WENO ile bulunan hız dağılımı.                             | 44              |
| Şekil 3.24 : Referans [8]'de bulunan sonuç ve gerçek çözüm.                             | 44              |
| Şekil 3.25 : Double Mach Reflection problemi için şematik gösterim.                     | 45              |
| Şekil 3.26 : $t=0$ 'da problemin başlangıç hali.                                        | 46              |
| Şekil 3.27 : $t=0,2$ de WENO ile bulunan basınç dağılımı.                               | 46              |
| Şekil 3.28 : $t=0,2$ de WENO ile bulunan yoğunluk dağılımı.                             | 47              |
| Şekil 3.29 : Referans [10]'da bulunan sonuç.                                            | 47              |
| Şekil 3.30 : $t=0$ 'da problemin başlangıç hali.                                        | 48              |
| Şekil 3.31 : $t=0,2$ de WENO ile bulunan basınç dağılımı.                               | 48              |
| Şekil 3.32 : Referans [10]'da bulunan sonuç.                                            | 48              |
| Şekil 3.33 : $t=0,35$ de WENO ile bulunan basınç dağılımı.                              | 48              |
| Şekil 3.34 : Referans [10]'da bulunan sonuç                                             | 48              |

## SEMBOL LİSTESİ

|                           |                                                           |
|---------------------------|-----------------------------------------------------------|
| $\rho$                    | : Yoğunluk                                                |
| $u, v, w$                 | : x, y, z yönündeki hızlar                                |
| $P$                       | : Basınç                                                  |
| $E_t$                     | : Toplam Enerji                                           |
| $F, G, H$                 | : x, y, z yönündeki akı vektörleri                        |
| $A, B, C$                 | : F, G, H vektörlerinin jakobyen matrisleri               |
| $h$                       | : Entalpi                                                 |
| $u_{i+\frac{1}{2}}^{\pm}$ | : Hücre sınır değerleri                                   |
| $\lambda_i$               | : Özdeğerler                                              |
| $e_i$                     | : Özvektörler                                             |
| $R$                       | : Özvektörler matrisi                                     |
| $M_0, M_0'$               | : Plağın pozitif ve negatif limit momentleri              |
| $I_i$                     | : Hesaplama molekülü                                      |
| $p$                       | : İnterpolasyon polinomu                                  |
| $k$                       | : Doğruluk mertebesi                                      |
| $r$                       | : Hesaplama molekülünün sağ kayması                       |
| $s$                       | : Hesaplama molekülünün sol kayması                       |
| $\Delta x$                | : Ağ büyüklüğü                                            |
| $\beta_r$                 | : Düzgünlük göstergesi                                    |
| $\epsilon$                | : $10^{-6}$ değerinde bir sabit                           |
| $v(x)$                    | : Ele alınan herhangi bir fonksiyon                       |
| $\bar{v}_i$               | : $v(x)$ fonksiyonun hücre ortalaması                     |
| $c_{rj}, \alpha_r, d_r$   | : Hesaplama katsayıları                                   |
| $w_r$                     | : Ağırlıklar                                              |
| $c$                       | : Yüksek mertebeli zaman ayrıklaştırmasında CFL katsayısı |
| $r_c$                     | : Girdabın şiddetinin maksimum olduğu kritik yarıçap      |
| $\alpha$                  | : Girdabın azalma oranı                                   |

## ÖZET

Sonlu fark ve sonlu hacim şemaları polinom benzeri basit fonksiyonlar kullanarak ayrıklaştırılmış verilerin interpolasyonuna dayanır. Çok iyi bilindiği gibi daha yüksek mertebeden doğruluk olması için genellikle, daha geniş bir hesaplama molekül interpolasyonuna gerek vardır. Bu da enterpole edilen fonksiyonun hesaplama molekülü içersinde düzgün olmasıyla mümkündür. Geleneksel sonlu fark metotları sabit hesaplama molekülü interpolasyonuna dayanır. Örneğin  $i$  noktasında üçüncü mertebeden hassasiyete sahip bir interpolasyon elde etmek için, ikinci mertebeden bir interpolasyon polinomu gereklidir ve bu polinomu oluşturmak için  $i-1, i$  ve  $i+1$  deki bilgiler kullanılır. Başka bir deyişle, hesaplama bölgesinin neresinde olursak olalım her zaman için bulunduğumuz hücreye, sağdaki hücreye ve soldaki hücreye bakmamız gereklidir. Bu yöntem, problemin düzgün olduğu noktalarda gayet iyi çalışır. Fakat ikinci veya daha yüksek mertebeden hassasiyete sahip sabit hesaplama molekülü interpolasyonlar bir süreksizlik civarında sallanırlar. Bu salınımlar ağ iyileştirilse bile büyüklük olarak kaybolmayacaktır.

ENO, parçalı düzgün fonksiyonlar için ağ büyüklüğüne dayanan bir parametresi olmayan, yüksek hassasiyetli, esasen salınımsız (Essentially Non-Oscillatory) bir interpolasyon elde etmek için yapılmış ilk başarılı çalışmadır. ENO'da temel düşünce hesaplama molekülünün süreksizlik içeren hücreyi içermemesidir. Harten Engquist, Osher ve Chakravarty yerel hesaplama moleküllerini belirlemek için yerel düzgünlüğü ölçmede değişik yollar araştırmışlar ve bir hiyerarşi geliştirmişlerdir. Bu hiyerarşi, bir veya iki hücre ile başlar ve sonra bu hesaplama molekülüne iki uygun Newton bölünmüş farkların büyüklüğüne dayanarak, sağ ve soldaki aday iki hücreden birisi eklenir. Bu işlem hesaplama molekülü içerisinde istenen nokta sayısına ulaşılan kadar devam eder ve hücre sınırındaki değer bu hesaplama molekülündeki noktaların interpolasyonu ile hesaplanır. Hesaplama molekülünün seçiminde yerel düzgünlüğe dayanan birçok mümkün strateji vardır. Fakat bütün aday hesaplama molekülüleri arasında en yüksek dereceli bölünmüş farkların büyüklüğünü karşılaştırmak ve bunların içinde mutlak değer olarak en küçüğünü almak en iyi olanı olarak gözükmektedir.

Ağırlıklı (Weighted) ENO, (WENO) şeması ENO şemasına dayanır. ENO şemasında, aday olan hesaplama molekülüleri Newton bölünmüş farkları karşılaştırılarak en uygun hesaplama molekülünün (süreksizliği içermeyen) hangi hesaplama molekülü olduğuna karar verilip daha sonra hücre sınırındaki değer hesaplanırken sadece bu hesaplama molekülünden faydalanılırdı. WENO şemasında ise bu aday hesaplama molekülünün bir tanesini kullanmak yerine konveks bir kombinasyonu kullanılır. Böylece hassasiyet daha da artmış olur. Burada hesaplama molekülüleri belli ağırlıklarla çarpılarak kombinasyonu alınır. Bu ağırlıkların hesaplanması ayrıntılı olarak formülasyon kısmında anlatılmıştır.

ENO ve WENO şemaları yüksek mertebeden hassasiyete sahiptir. Ani ve monotone geçişleri çözebilir. ENO şemaları özellikle şok, girdap-şok etkileşimleri ve türbülanslı akışlardaki şok etkileşimleri gibi karmaşık akış yapıları için uygundur.

ENO ve WENO şemaları ile çözülen problemlerin bir çoğu kuvvetli şoklar ve zengin düzgün rejim yapıları içeren tiptedirler. Düşük mertebeli metotların böyle

problemler için zorlukları vardır ve bu yüzden ENO ve WENO gibi yüksek mertebeli kararlı metotlar daha etkilidir.

Yapılan bu çalışmada skaler konveksiyon denklemi, Bir Boyutlu Euler denklemi ve iki Boyutlu Euler denklemi ele alınmıştır. Bu denklemler aşağıdaki örnek problemler için çözülmüştür.

a) Skaler Konveksiyon Denklemi

Skaler konveksiyon denklemine örnek olarak Burger denklemi çözülmüştür.

b) Bir Boyutlu Euler Denklemi (Viskozitesiz akış denklemi)

Bir Boyutlu Euler denklemine örnek olarak şok tüpü (Riemann) problemi incelenmiştir.

Şok tüpü probleminin iki standart test hali vardır.

Sod problemi

Lax problemi

$$(\rho_L, q_L, P_L) = (1, 0, 1)$$

$$(\rho_L, q_L, P_L) = (0.445, 0.689, 3.528)$$

$$(\rho_R, q_R, P_R) = (0.125, 0, 0.1)$$

$$(\rho_R, q_R, P_R) = (0.5, 0, 0.571)$$

c) İki Boyutlu Euler Denklemi

İki boyutta Euler denklemine örnek olarak iki problem ele alınmıştır. Bunlardan birincisi “Double Mach Reflection” problemidir. Bu test problemi, hava içerisinde yayılan düz şokların kamalardan yansımalarını inceler. Bu problem bir şokun kama içeren şok tüpünde ilerlemesi ile oluşturulur. Diğer problem ise “İki Boyutlu Şok - Girdap Etkileşimi” problemidir. Problem durağan bir şok ile girdabın etkileşimini inceler.

## EFFICIENT SOLUTION OF GAS DYNAMICS EQUATIONS WITH ENO WENO SCHEMES

### SUMMARY

Finite difference and finite volume schemes are based on interpolations of discrete data using polynomials. It is well known that higher the order of accuracy of the interpolation requires the wider the stencil and it is possible when the interpolated function is smooth in the stencil. Traditional finite difference methods are based on fixed stencil interpolations. For example, to obtain an interpolation for cell  $i$  to third order accuracy, information of the three cells  $i-1$ ,  $i$ ,  $i+1$  can be used to build a second order interpolation polynomial. In other words, one always looks one cell to the left, one cell to the right, plus center cell itself. This works well for globally smooth problems. However, fixed stencil interpolation of second or higher order accuracy oscillates near a discontinuity. These oscillations do not decay in magnitude when the mesh is refined.

ENO (Essentially Non-Oscillatory) scheme is the first successful attempt to obtain a high order accurate, no mesh size dependent parameter and essentially non-oscillatory interpolation for piecewise smooth functions. The basic idea is to avoid including the discontinuous cell in the stencil, if possible. Harten, Enquist, Osher and Chakravarthy investigated different ways of measuring local smoothness to determine the local stencil, and developed a hierarchy that begins with one or two cells, then adds one cell to the stencil from two candidates on the left and right, based on the size of two relevant Newton divided difference. This procedure can be continued until the desired number of points in the stencil is reached and then the cell boundary values are calculated by interpolating of values in this stencil. Although there are other reasonable strategies to choose the stencil based on local smoothness, such as comparing the magnitudes of the highest degree divided difference among all candidate stencils and picking the one with least absolute value seems that it is better.

Weighted ENO scheme is based on ENO scheme. ENO compares the Newton divided difference of all candidate stencils and choose the smoothest stencil (ie, doesn't include discontinuity) according to the divided differences. Then the values at the cell boundary are computed using this stencil. WENO scheme uses a convex combination of all candidate stencils instead of using only one of them. Thus the accuracy is increased. One takes convex combination by multiplying the values which obtained from each of the candidate stencils by weights.

ENO and WENO schemes are indeed high order accurate and resolve shocks with sharp and monotone transitions. These schemes are especially suitable for problems containing both shocks and complicated smooth flow structures, such as those occurring in shock interactions with a turbulent flow and shock interaction with vortices.

Most of the problems solved by ENO and WENO schemes are of the type in which solutions contain both strong shocks and rich smooth region structures. Lower

order methods usually have difficulties for such problems and it is thus efficient to use high order stable methods such as ENO and WENO.

In this study scalar convection equation, one dimensional Euler equations and two dimensional Euler equations are solved for given sample problems.

a) Scalar Convection Equation

Burger equation is solved as an example of scalar convection equation.

b) One Dimensional Euler Equation (Inviscid Flow Equation)

Shock tube (Riemann) problem is solved as an example of one dimensional Euler equation.

There are two standard test case of shock tube problem:

Sod problem

Lax problem

$$(\rho_L, q_L, P_L) = (1, 0, 1)$$

$$(\rho_L, q_L, P_L) = (0.445, 0.689, 3.528)$$

$$(\rho_R, q_R, P_R) = (0.125, 0, 0.1)$$

$$(\rho_R, q_R, P_R) = (0.5, 0, 0.571)$$

c) Two Dimensional Euler Equation

Two problems are solved for two dimensional Euler equations. The first one is Double Mach Reflection problem. This test problem investigates reflections of planar shocks in air from wedges. The other one is two dimensional shock vortex interaction. This problem investigates a stationary shock and vortex interaction.

## 1. GİRİŞ

Karmaşık hava uzay yapıları etrafındaki düşük ve özellikle yüksek hızlı akışların daha etkin ve doğru modellenmesine yönelik gereksinim sürekli artmaktadır. Özellikle NASA'nın 'Tekrar Kullanılabilir Fırlatma Aracı' tasarımı çalışmaları çerçevesinde yapının karşı kaldığı yüksek hız ve sıcaklık ortamını öngöreceğ araç ve yöntemlere ilişkin çalışmalar süregelmektedir. Bu çalışmalar, karmaşık yapılar etrafında sayısal ağ üretimi ve türbülans modellemesi konularını içermektedir. Karmaşık yapılar etrafında etkin ağ üretimi beraberinde adaptif sayısal ağ üretimi ve kullanılacak akış çözücü ile entegrasyon konularına dikkat edilmesini gerektirir.

Akışı çözmek için sonlu fark, sonlu hacim yada sonlu eleman yöntemlerinden biri tercih edilir. Son zamanlarda, özellikle şok gibi süreksizliklerin etkin olduğu yüksek hızlı sıkıştırılabilir akış çözümlerinde karakteri gereği sonlu hacimler yöntemi tercih edilmektedir. Sonlu fark yönteminden geliştirilmiş olan sonlu hacim yöntemi bir kontrol hacmi boyunca süreklilik, momentum ve enerjinin korunumu ilkelerinin integral formda uygulanmasına dayanır.

Sonlu fark ve sonlu hacim şemaları polinom benzeri basit fonksiyonlar kullanarak ayrıklaştırılmış verilerin interpolasyonuna dayanır. Çok iyi bilindiği gibi daha yüksek mertebeden doğruluk olması için genellikle, daha geniş bir hesaplama molekül interpolasyonuna gerek vardır. Bu da enterpole edilen fonksiyonun hesaplama molekülü içersinde düzgün olmasıyla mümkündür. Geleneksel sonlu fark metotları sabit hesaplama molekülü interpolasyonuna dayanır. Örneğin  $i$  noktasında üçüncü mertebeden doğruluğa sahip bir interpolasyon elde etmek için, ikinci mertebeden bir interpolasyon polinomu gereklidir ve bu polinomu oluşturmak için  $i-1, i$  ve  $i+1$  deki bilgiler kullanılır. Başka bir deyişle, hesaplama bölgesinin neresinde olursak olalım her zaman için bulunduğumuz hücreye, sağdaki hücreye ve soldaki hücreye bakmamız gereklidir. Bu yöntem, problemin düzgün olduğu noktalarda gayet iyi çalışır. Fakat ikinci veya daha yüksek mertebeden doğruluğa sahip sabit hesaplama molekülü interpolasyonlar bir süreksizlik civarında sallanırlar. Bu salınımlar ağ iyileştirilse bile büyüklük olarak kaybolmayacaktır.

1987'den önce süreksizlik civarındaki bu salınımların üstesinden gelmek için başlıca iki yol tercih edilirdi. Bunlardan birincisi yapay viskozite eklemektir. Bu yapay viskozite, salınımları önlemek veya en azından azaltmak için süreksizlik civarında yeteri kadar büyük, fakat yüksek doğruluğu korumak açısından da yeteri kadar küçük olacak şekilde iyi ayarlanmalıydı. Bu yaklaşımın bir dezavantajı yapay viskoziteyi kontrol eden parametrenin ayarlanmasının probleme bağlı olmasıdır. Salınımların üstesinden gelmek için diğer bir yöntemde "limiters" kullanmaktır. Aslında bu süreksizlik civarında interpolasyonun doğruluk mertebesini azaltır. Bu yüzden bu limiterleri kullanırken dikkatli olunmalıdır.

Sonlu hacimler yönteminde süreksizliklerin etkin ve doğru öngörüsü için yaklaşık Riemann çözücülerine dayalı Godunov [1] şemaları sıkça kullanılır. 1990'lı yıllardan başlayarak, keyfi bir doğrulukta birinci mertebeye Godunov şemasının genelleştirilmesine yönelik bir çok çalışma yapılmıştır. Yüksek mertebeli uzaysal doğruluk, çözüm düzgün olduğunda ENO (Essentially Non-Oscillatory) şeması ile elde edilmiştir. ENO, verilen bir zamanda, çözümün hücre ortalamalarından yüksek doğruluklu noktasal bilgiler sağlayan bir yaklaşım prosedürüdür. Bu prosedür parçalı düzgün bir başlangıç şartına uygulandığında düzgün bölgelerde yüksek doğruluklu ve süreksizlik civarında salınım yapmayan bir akı hesabına olanak verir.

Yüksek mertebeli Godunov tipi şemalar için yapılan çalışmalar, Van Leer [2], Harten [3] ve Osher [4] in çalışmalarını takip eder. Harten [5]'in birleştirilmiş ENO sunumu bu çalışmaların en ileri aşamalarına örnek oluşturur. Yüksek mertebeli ENO şeması öncelikle bir boyutlu hiperbolik denklemler için geliştirilmiştir [5]. Günümüzde yapılan çalışmalar [6], bu şemanın dörtgensel veya düzgün değişen ağlarda iki boyutlu uzantılarıdır.

Shu ve Osher [7] çok boyutlu ENO şemaları üzerine çalışmalar yapmışlardır. Çok boyutlu çalışmalarda noktasal değerler kullanılmıştır. Korunum, türetilen akı fonksiyonu ile sağlanmıştır. Bu yaklaşımdaki temel düşünce ikinci mertebeden daha yüksek doğruluk istendiğinde sonlu fark algoritmasının hesaplama olarak daha etkin olmasındandır. Bununla birlikte sınır şartlarının yetersiz bir şekilde ele alınması sonlu hacim formülasyonunda daha net gözükür.

ENO, parçalı düzgün fonksiyonlar için ağ büyüklüğüne dayanan bir parametresi olmayan, yüksek doğruluklu, esasen salınımsız (Essentially Non-Oscillatory) bir interpolasyon elde etmek için yapılmış ilk başarılı çalışmadır. ENO'da temel düşünce hesaplama molekülünün süreksizlik içeren hücreyi

içermemesidir. Harten Engquist, Osher ve Chakravarty [5] yerel hesaplama molekülünü belirlemek için yerel düzgünlüğü ölçmede değişik yollar araştırmışlar ve bir hiyerarşi geliştirmişlerdir. Bu hiyerarşi, bir veya iki hücre ile başlar ve sonra bu hesaplama molekülüne iki uygun Newton bölünmüş farkların büyüklüğüne dayanarak, sağ ve soldaki aday iki hücreden birisi eklenir. Bu işlem hesaplama molekülü içerisinde istenen nokta sayısına ulaşılan kadar devam eder ve hücre sınırındaki değer bu hesaplama molekülündeki noktaların interpolasyonu ile hesaplanır. Hesaplama molekülünün seçiminde yerel düzgünlüğe dayanan birçok mümkün strateji vardır Fakat bütün aday hesaplama molekülüleri arasında en yüksek dereceli bölünmüş farkların büyüklüğünü karşılaştırmak ve bunların içinde mutlak değer olarak en küçüğünü almak en iyi olanı olarak gözükmektedir

Gerçektende ENO şemaları yüksek mertebeden doğruluğa sahiptir. Ani ve monotone geçişleri çözebilir. ENO şemaları özellikle şok ve girdaplı şok etkileşimleri ve türbülanslı akışlardaki şok etkileşimleri gibi karmaşık düzgün akış yapıları için uygundur.

Ağırlıklı (Weighted) ENO, (WENO) şeması ENO şemasına dayanır. ENO şemasında, aday olan hesaplama molekülüleri Newton bölünmüş farkları karşılaştırılarak en uygun hesaplama molekülünün (süreksizliği içermeyen) hangi hesaplama molekülü olduğuna karar verilip daha sonra hücre sınırındaki değer hesaplanırken sadece bu hesaplama molekülünden faydalanılırdı. WENO şemasında ise bu aday hesaplama molekülünün bir tanesini kullanmak yerine konveks bir kombinasyonu kullanılır [8,9]. Böylece doğruluk daha da artmış olur. Burada hesaplama molekülüleri belli ağırlıklarla çarpılarak kombinasyonu alınır. Bu ağırlıkların hesaplanması ayrıntılı olarak formülasyon kısmında anlatılmıştır.

ENO ve WENO şemaları ile çözülen problemlerin bir çoğu kuvvetli şoklar ve zengin düzgün rejim yapıları içeren tiptedirler. Düşük mertebeli metotların böyle problemler için zorlukları vardır ve bu yüzden ENO ve WENO gibi yüksek mertebeli kararlı metotlar daha etkilidir.

Bu çalışmada, yüksek mertebeden doğruluğa dayalı akış öngörüsü amacı ile ENO WENO şemaları kullanılarak Euler denklemleri 1 ve 2 boyutta örnek problemler için çözülmüşlerdir. Öncelikle skaler konveksiyon denklemi Minmod şeması kullanılarak çözülmüştür. Daha sonra skaler denkleme ENO ve WENO şemaları uygulanmıştır. Akı formülasyonu olarak Lax-Friedrich ve Godunov akıları denenmiş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır. Skaler denklem için ENO WENO

şemalarının aynı sonucu verdiği gözlenmiştir. Fakat WENO şeması 5.mertebeden doğruluklu olduğundan dolayı sonraki çalışmalarda sadece bu şema kullanılmıştır.

İkinci olarak WENO şeması ile Lax-Friedrich akı ayrıştırıcıları kullanarak 1 Boyutlu Euler denklemi incelenmiştir. Şok tüpü problemi (Riemann problemi) örnek problem olarak ele alınmış; bu problemin iki değişik hali (Lax problemi ve Sod problemi) çözülmüştür. Hız, basınç ve yoğunluk olarak sonuçlar elde edilmiştir. Bulunan sonuçlarla, bu problemin (Riemann problemi) Referans [8]'de bulunan sonuçlarla ve gerçek çözüm ile karşılaştırılmış ve gerçek çözüme çok yakın sonuçların bulunduğu görülmüştür.

Son olarak yine 5. mertebe WENO ve Lax-Friedrich akı ayrıştırıcı kullanarak 2 boyutlu Euler denklemi ele alınmıştır. Daha karmaşık problemler, “Double Mach Reflection” ve şok girdap etkileşimi örnek problemleri, için çözüm aranmıştır. Sonuçlar basınç ve yoğunluk olarak bulunmuştur. Elde edilen sonuçlarla Referans [10]'da bulunan sonuçlar karşılaştırılmıştır, aynı sonuçların bulunduğu gözlenmiştir.

Tezin 2. bölümünde Euler denklemlerinin, ENO-WENO şemalarının, sonlu hacim ve sonlu farkın matematiksel formülasyonları anlatılmıştır. 3. bölüm olan uygulamalar bölümünde bahsedilen örnek problemler anlatılmış ve bunların çözümünde bulunan sonuçlar verilmiştir. Son olarak tez bir sonuç ve değerlendirme ile tamamlanmıştır.

## 2. FORMULASYON

Bu bölümde, bu çalışmada çözümü yapılan denklemler ve sayısal çözüm şemaları anlatılmıştır

### 2.1 Euler Denklemi (Viskozitesiz Akış Denklemi)

Viskoz akış: sürtünme, ısı iletimi ve kütle difüzyonunu içeren bir taşınım olayıdır. Viskozitesiz akış ise bu olayların ihmal edildiği akışlardır. Eğer akışkan hareketini en genel anlamda veren Navier- Stokes denklemlerinden sürtünme ve ısı iletim içeren terimleri atılırsa viskozitesiz akış denklemleri (Euler denklemleri) elde edilir. Bu denklemler daimi olmayan, üç boyutlu, sıkışabilir viskozitesiz akış denklemleridir. Euler denklemleri birinci mertebeden nonlinear denklemlerdir ve zaman göre hiperbolik karakterdedir.

#### 2.1.1 Vektörel Formda Euler Denklemi

Hacimsel kuvvetlerin ve ısı ilavesinin olmadığı kartezyen koordinatlardaki sıkışabilir Euler denklemi şu şekilde yazılabilir [17].

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (2.1)$$

$U, F, G$  ve  $H$  vektörel büyüklüklerdir.

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E_t \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (E_t + p)u \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (E_t + p)v \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ (E_t + p)w \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

#### 2.1.2 Euler Denklemlerinin Sanki Lineer Formülasyonu

Euler denklemlerini matematiksel olarak inceleyebilmek için bu denklemleri sanki-lineer formda yazmamız gerekir. Eğer dış kuvvetler akış gradyeninden bağımsız ise Euler denklem sistemi  $U$  değişkenine göre birinci mertebededir yani en

fazla birinci mertebe türevler içerir. Euler denkleminin sanki lineer formu şu şekilde yazılabilir:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \left( \frac{\partial \vec{F}}{\partial u} \right) \vec{\nabla} U = 0 \quad (2.3)$$

veya

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{A} \vec{\nabla} U = 0 \quad (2.4)$$

en genel halde ise şu şekilde yazılır.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial y} + C \frac{\partial U}{\partial z} = 0 \quad (2.5)$$

Bu ifadedeki  $A, B, C$  terimleri sırasıyla  $F, G$  ve  $H$  akı vektörlerinin jakobyen matrisleridir:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial F}{\partial U} = \left| \frac{\partial F_1}{\partial U_1}, \frac{\partial F_2}{\partial U_2}, \frac{\partial F_3}{\partial U_3}, \frac{\partial F_4}{\partial U_4}, \frac{\partial F_5}{\partial U_5} \right| \\ B &= \frac{\partial G}{\partial U} = \left| \frac{\partial G_1}{\partial U_1}, \frac{\partial G_2}{\partial U_2}, \frac{\partial G_3}{\partial U_3}, \frac{\partial G_4}{\partial U_4}, \frac{\partial G_5}{\partial U_5} \right| \\ C &= \frac{\partial H}{\partial U} = \left| \frac{\partial H_1}{\partial U_1}, \frac{\partial H_2}{\partial U_2}, \frac{\partial H_3}{\partial U_3}, \frac{\partial H_4}{\partial U_4}, \frac{\partial H_5}{\partial U_5} \right| \end{aligned} \quad (2.6)$$

### 2.1.3 Skaler Konveksiyon Denklemi

Skaler konveksiyon denklemi,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad (2.7)$$

şeklinde ifade edilir ve  $u$  değişkeni sadece skaler büyüklük olarak alınır.  $f(u) = \frac{u^2}{2}$

olarak alınırsa Burger denklemi elde edilmiş olur ve çözülecek denklem

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.8)$$

haline gelir.

#### 2.1.4 Bir Boyutlu Euler Denklemi

Bir Boyutta (2.1) denklemi aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad (2.9)$$

Burada

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E_t \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u H \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$h = e + \frac{p}{\rho}, \quad E_t = \rho e \quad (2.11)$$

olarak tanımlanır. Bu denklemin lineerleştirilmiş hali

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (2.12)$$

olarak yazılır. Buradaki A jakobyen matrisi şöyle hesaplanır.

$$A = \frac{\partial F}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ (\gamma - 3) \frac{u^2}{2} & (3 - \gamma)u & \gamma - 1 \\ (\gamma - 1)u^3 - \gamma u e & \gamma e - 3 \frac{\gamma - 1}{2} u^2 & \gamma u \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

#### 2.1.5 İki Boyutlu Euler Denklemi

İki boyutta (2.1) denklemi aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad (2.14)$$

Burada

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E_t \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho u H \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho v H \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

olarak tanımlanır. Lineerleştirilmiş hali

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad (2.16)$$

olarak yazılır. Bu A ve B jakobyen matrisleri şu şekilde elde edilir:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}u^2 + \frac{\gamma-1}{2}v^2 & (3-\gamma)u & -(\gamma-1)v & \gamma-1 \\ -uv & v & u & 0 \\ -\gamma ue + (\gamma-1)uv^2 & \gamma e - \frac{\gamma-1}{2}(v^2 + 3u^2) & -(\gamma-1)uv & \gamma u \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -uv & v & u & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}v^2 + \frac{\gamma-1}{2}u^2 & -(\gamma-1)u & (3-\gamma)v & \gamma-1 \\ -vve + (\gamma-1)vv^2 & -(\gamma-1)uv & \gamma e - \frac{\gamma-1}{2}(u^2 + 3v^2) & \gamma v \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

## 2.2 Karakteristiklere Ayırıştırma

ENO ve WENO şemalarını denklem sistemlerine uygulamak için bir çok yol vardır. Bunlardan bir tanesi parça-parça tarzda uygulamadır. Bu tarzda u vektörünün her bir bileşeni için ayrı ayrı ENO WENO şemaları uygulanır. Böylece hücre sınırlarında  $x_{i+\frac{1}{2}}$ , sağ ve sol değerler  $u_{i+\frac{1}{2}}^{\pm}$  bulunur. Daha sonra yaklaşık Riemann çözücüsü kullanılarak sonuç bulunur. Bu yöntem en kolay yöntemdir. Doğruluğun yüksek olmadığı (ikinci mertebeden veya üçüncü mertebeden doğruluk için) problemlerde gayet iyi çalışır. Fakat daha yüksek mertebeden doğruluk istenen bazı problemlerde, ENO ve WENO şemaları denklem sistemine karakteristik ayırıştırma yöntemiyle uygulanır.

Karakteristik ayırıştırmayı  $f(u)=Au$  nun lineer ve A matrisinin de sabit olduğu bir örnekle açıklayalım. Bu durumda özdeğer ve özvektörler ve bunlardan oluşan  $R$ ,  $R^{-1}$ ,  $\wedge$  matrislerinin hepsi sabit matrisler olacaktır. Şöyle bir değişken dönüşümü tanımlayalım:

$$v = R^{-1}u \quad (2.19)$$

o zaman bir boyutlu Euler denklemi diagonal hale gelir.

$$v_t + \wedge v_x = 0 \quad (2.20)$$

Burada üç denklemde ayrı ayrı çözülür ve her biri skaler lineer konveksiyon denklemi şeklindedir.

$$w_i + \lambda_i w_x = 0 \quad (2.21)$$

Bundan dolayı skaler denklem çözümünde kullanılan teknikler burada kullanılabilir. Sonuçları elde ettikten sonra tekrar u fiziksel düzlemine geçilir.

$$u = R.v \quad (2.22)$$

Eğer  $f'(u) = A$  jakobyeni sabit değilse  $R, R^{-1}, \lambda$  matrislerinin hepsi  $u$ 'ya bağlı hale gelir. Sabit katsayılı haldekine benzer prosedür uygulayabilmek için bu matrisleri yerel olarak “dondurmak” gerekir. Bu işlem basit aritmetik ortalama ile yapılabilir.

$$U_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(U_i + U_{i+1}) \quad (2.23)$$

Fakat daha iyi sonuçlar veren bir ortalama, ortalama değer teoreminden faydalanılarak yapılabilir.

$$f(U_{i+1}) - f(U_i) = f'(U_{i+\frac{1}{2}})(U_{i+1} - U_i) \quad (2.24)$$

Burda bulduğumuz  $f'$  matrisine Roe matrisi denir [15].

### 2.2.1 Bir Boyutlu Euler Denklemi İçin Roe Matrisinin Oluşturulması

Lineerleştirilmiş haldeki bir boyutlu Euler denklemi şu şekilde yazılmıştı:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (2.25)$$

Buradaki A matrisi (2.13) denkleminden de görüldüğü gibi  $u$  değerlerine bağlıdır. Hücre sınırlarındaki akıyı hesaplayabilmek için bu A jakobyeninin  $x_{i+\frac{1}{2}}$  noktasındaki (hücre sınırındaki) değerine bir yaklaşım yapmamız gerekir. Bu yaklaşık A matrisinin şu özelliklerde olmalıdır [15, 11].

1. U vektör uzayından F vektör uzayına lineer bir dönüşüm gerçeklemeli.
2.  $U_{i+1} \rightarrow U_i \rightarrow U$  giderken  $\tilde{A}(U_{i+1}, U_i) \rightarrow A(U)$  gitmelidir.
3. Herhangi bir  $U_{i+1}, U_i$  için  $f(U_{i+1}) - f(U_i) = \tilde{A} \cdot (U_{i+1} - U_i)$
4. A'nın özvektörleri lineer bağımsız olmalı.

### A Matrisinin Oluşturulması

Öncelikle bir  $w$  vektör parametresi tanımlayalım.

$$w = \sqrt{\rho} \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ H \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

ideal gaz bağıntılarından şu özelliği kullanalım.

$$E = \rho H - p = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho u^2 \quad (2.27)$$

$U$  ve  $f$  vektörleri  $w$  vektör parametresi cinsinden yazılabilir.

$$U = \begin{bmatrix} w_1^2 \\ w_1 w_3 \\ \frac{w_1 w_3}{\gamma} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} w_2^2 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} w_1 w_2 \\ \frac{\gamma - 1}{\gamma} w_2 w_3 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} w_2^2 \\ w_2 w_3 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Burada  $w$  değerleri için aritmetik ortalama kullanılmıştır  $\bar{w} = \frac{1}{2}(w_{i+1} + w_i)$

Şimdi yukarıda ifade edilen yaklaşık A matrisinin sahip olması gereken özelliklerden 3. özelliği arayalım.

$$U_{i+1} - U_i = B.(w_{i+1} - w_i) \quad (2.29a)$$

$$f(U_{i+1}) - f(U_i) = C.(w_{i+1} - w_i) \quad (2.29b)$$

Şeklinde yazılabilir.  $w_{i+1} - w_i = B^{-1}(U_{i+1} - U_i)$  bu ifade (2.29b) denkleminde yerine konursa

$$\begin{aligned} f(U_{i+1}) - f(U_i) &= C.B^{-1}(U_{i+1} - U_i) \\ \tilde{A} &= C.B^{-1} \\ f(U_{i+1}) - f(U_i) &= \tilde{A}.(U_{i+1} - U_i) \end{aligned} \quad (2.30)$$

3 özellik elde edilmiş olur. Burada bulunan  $A$  matrisine Roe Ortalama (Mean) Matris denir. Bu matristeki elemanları  $\bar{w}_1$  ile bölmek uygundur. Bu işleme “Roe averaging” denir. Bu durumda değişkenler  $u$  ve  $H$  değişkenimiz şu şekildedir [11]:

$$u = \frac{\bar{w}_2}{\bar{w}_1} = \frac{\sqrt{\rho_{i+1}}.u_{i+1} + \sqrt{\rho_i}.u_i}{\sqrt{\rho_{i+1}} + \sqrt{\rho_i}}, \quad H = \frac{\bar{w}_3}{\bar{w}_1} \quad (2.31)$$

Roe matrisinin özdeğer ve özvektörleri  $\det(C.B^{-1} - \lambda I) = 0$  ifadesinden şu şekilde bulunur.

$$\lambda_1 = u \quad \lambda_2 = u - c \quad \lambda_3 = u + c \quad (2.32)$$

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ \frac{u^2}{2} \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ u + c \\ H + uc \end{bmatrix} \cdot \frac{\rho}{2c}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ u - c \\ H - uc \end{bmatrix} \cdot \frac{\rho}{2c} \quad (2.33)$$

R matrisi bu özvektörler den oluşur  $R^{-1}$  ise R matrisinin tersidir

$$R = [\{e_1\} \quad \{e_2\} \quad \{e_3\}] \quad (2.34)$$

$$R = \begin{bmatrix} \frac{\rho}{2c} & 1 & \frac{\rho}{2c} \\ (u - c) \frac{\rho}{2c} & u & (u + c) \frac{\rho}{2c} \\ (H - uc) \frac{\rho}{2c} & \frac{u^2}{2} & (H + uc) \frac{\rho}{2c} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

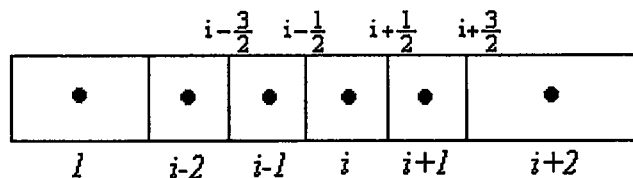
$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{u(-2H - u(u - c))}{\rho(-2H + u^2)} & \frac{2H - u(u - c)}{\rho(-2H + u^2)} & \frac{-2c}{\rho(-2H + u^2)} \\ \frac{-2H + 2u^2}{-2H + u^2} & \frac{-2u}{-2H + u^2} & \frac{2}{-2H + u^2} \\ \frac{u(2H - u(u + c))}{\rho(-2H + u^2)} & \frac{-2H + u(u + c)}{\rho(-2H + u^2)} & \frac{-2c}{\rho(-2H + u^2)} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Burada bulunan özdeğerler,özvektörler R ve  $R^{-1}$  matrisleri MATHEMATİCA programı kullanılarak bulunmuştur.

### 2.3 Sonlu Fark Ve Sonlu Hacim Formülasyonu

Verilen ağımız şu şekilde olsun:

$$a = x_{\frac{1}{2}} < x_{\frac{3}{2}} < \dots < x_{N-\frac{1}{2}} < x_{N+\frac{1}{2}} = b$$



Şekil 2.1 Hücrelerin gösterilmesi

Hücre , hücre merkezi ve hücre büyüklüğünü şu şekilde tanımlayalım:

$$I_i \equiv \left[ x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right] \quad x_i \equiv \frac{1}{2}(x_{i-\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}})$$

$$\Delta x_i \equiv x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Ele aldığımız denklem bir boyutlu Euler denklemidir:

$$u_t(x, t) + f_x(u(x, t)) = 0 \quad (2.37)$$

Sonlu hacim şemalarıyla bu denklemi direkt olarak çözemeyiz. Fakat integre edilmiş halini çözebiliriz.

$$\bar{u}(x_i, t) = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(\xi, t) d\xi \quad (2.38)$$

Hücre averajı olmak üzere bu denklemi  $I_i$  aralığında integre edelim.

$$\frac{d\bar{u}(x_i, t)}{dt} = -\frac{1}{\Delta x_i} (f(u(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) - f(u(x_{i-\frac{1}{2}}, t))) \quad (2.39)$$

Hücre averajına  $(\bar{u}(x_i, t))$  yapılan yaklaşım  $\bar{u}_i(t)$  olmak üzere, bu integre edilmiş denkleme şu şekilde yaklaşım yapılır.

$$\frac{d\bar{u}_i(t)}{dt} = -\frac{1}{\Delta x_i} (\hat{f}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{i-\frac{1}{2}}) \quad (2.40)$$

Sayısal akı da şu şekilde tanımlanır.

$$\hat{f}_{i+\frac{1}{2}} = h(u_{i+\frac{1}{2}}^-, u_{i+\frac{1}{2}}^+) \quad (2.41)$$

$h$  fonksiyonu monoton akıdır. Skaler konveksiyon denkleminin çözümünde iki çeşit  $h$  fonksiyonu kullanılmıştır

1. Godunov akısı

$$h(a, b) = \begin{cases} \min_{a \leq u \leq b} f(u), & a \leq b \\ \max_{b \leq u \leq a} f(u), & a > b \end{cases} \quad (2.42)$$

2. Lax- Friedrich akısı

$\alpha = \max_u |f'(u)|$  olmak üzere

$$h(a, b) = \frac{1}{2} [f(a) + f(b) - \alpha(b - a)] \quad (2.43)$$

Bir ve iki boyutlu Euler denkleminin çözümünde ise biraz daha farklı yol izlenir.

- Bütün  $i$  ler için  $f(u)$  ve  $u$  nun bölünmemiş farkları hesaplanır (Bölünmemiş farklar ENO kısmında anlatılacaktır)

$$V < x_{i-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j+\frac{1}{2}} > \equiv V < x_{i+\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j+\frac{1}{2}} > - V < x_{i-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j-\frac{1}{2}} >, j \geq 1 \quad (2.44)$$

Bu farklar ve Lax-Friedrich akı ayrıştırıcıları kullanılarak, akıların  $\pm$  değerleri hesaplanır.

$$\begin{aligned} f^\pm(u) &= \frac{1}{2} (f(u) \pm \alpha u) \\ \alpha &= \max_{1 \leq j \leq N} |\lambda_j(u_j)| \end{aligned} \quad (2.45)$$

Burada bulunan bu akılar, her bir  $x_{i+\frac{1}{2}}$  noktasında daha önce hesaplanmış olan Roe matrisi kullanılarak karakteristik düzleme dönüştürülür.

$$g_i^\pm = R^{-1} f_i^\pm \quad (2.46)$$

Karakteristik düzlemde ENO WENO şeması uygulanarak hücre sınırındaki değerler ( $g_{i+\frac{1}{2}}^\pm$ ) hesaplanır. Bulunan hücre sınırındaki değerler tekrar fiziksel düzleme dönüştürülür.

$$\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^\pm = R \hat{g}_{i+\frac{1}{2}}^\pm \quad (2.47)$$

$h$  fonksiyonu monoton akıdır. ENO ve WENO şemalarında bu  $h$  fonksiyonu şu şekildedir.

$$h(a, b) = f_{i+\frac{1}{2}}^+ + f_{i+\frac{1}{2}}^- \quad (2.48)$$

## 2.4 Uzaysal Ayrıklaştırma

ENO WENO şemalarına geçmeden önce, uzaysal boyutta interpolasyon ve yaklaşım problemi üzerinde duralım. Verilen ağıımız Bölüm 2. 3'de belirtildiği gibi olsun

### 2.4.1 Hücre Averajlarından Türevlere Yaklaşım

Hiperbolik korunum denklemlerine hücre averajlarını kullanarak yaklaşım yapalım. Bir  $v(x)$  fonksiyonunun hücre averajı şu şekilde verilmiş olsun:

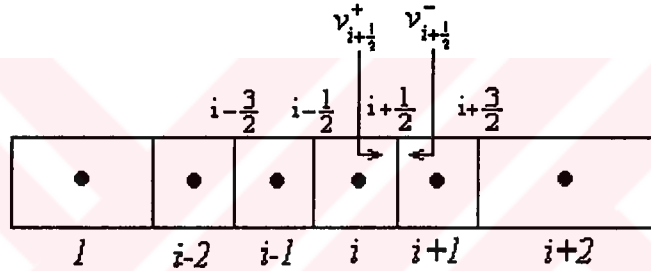
$$\bar{v}_i \equiv \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} v(\xi) d\xi, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.49)$$

Şimdi, her bir  $I_i$  hücre molekülü için öyle bir  $p_i(x)$  fonksiyonu bulalım ki bu hesaplama molekülünün içerisinde bu fonksiyonun,  $v(x)$  fonksiyonuna yaklaşımı  $k$ . mertebe doğruluklu olsun. Bu  $p_i(x)$  fonksiyonu en çok  $k-1$  mertebeden olacaktır.

$$p_i(x) = v(x) + O(\Delta x^k), x \in I_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.50)$$

Bu  $p_i(x)$  fonksiyonu hücre sınırlarında  $v(x)$  fonksiyonuna şu yaklaşımları verir:

$$\begin{aligned} v_{i+\frac{1}{2}}^- &= p_i(x_{i+\frac{1}{2}}), \\ v_{i-\frac{1}{2}}^+ &= p_i(x_{i-\frac{1}{2}}), \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (2.51)$$



Sekil 2.2 Hücre sınır değerlerinin gösterilmesi

Bu yaklaşık değerler de  $k$ . mertebe doğrulukludur.

$$v_{i+\frac{1}{2}}^- = v(x_{i+\frac{1}{2}}) + O(\Delta x^k), \quad v_{i-\frac{1}{2}}^+ = v(x_{i-\frac{1}{2}}) + O(\Delta x^k), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.52)$$

Verilen bir  $I_i$  istasyonu ve  $k$  doğruluğu için ilk önce verilen istasyonun  $r$  hücre solundan,  $s$  hücre sağından ve kendinden oluşan bir hesaplama molekülü seçmemiz gerekir. ( $r, s \geq 0, r+s+1=k$ ):

$$S(i) \equiv \{I_{i-r}, \dots, I_{i+s}\} \quad (2.53)$$

Her bir  $S(i)$  hesaplama molekülündeki hücre averajları,  $v(x)$  fonksiyonun hücre averajlarına karşılık gelen ve  $k-1=r+s$  mertebeden sadece bir  $p(x)$  fonksiyonu vardır.

$$\frac{1}{\Delta x_j} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} p(\xi) d\xi = \bar{v}_j, \quad j = i-r, \dots, i+s \quad (2.54)$$

$v(x)$  fonksiyonunun hesaplama molekülü içerisinde düzgün (smooth) olduğu müddetçe bu  $p(x)$  polinomu, bizim aradığımız  $k$ . mertebe yaklaşımdır.

Ayrıca  $v(x)$  in hücre sınırlarındaki (2.51). yaklaşık değerlerine de ihtiyacımız vardır,  $S(i)$  hesaplama molekülü içerisinde verilen  $v_{ij}$  hücre averajlarından  $v_{i+\frac{1}{2}}^-, v_{i-\frac{1}{2}}^+$  değerlerine dönüşüm lineer olduğundan  $S(i)$  hesaplama molekülündeki  $\Delta x_j$  hücre büyüklüğüne,  $k$  doğruluğuna ve hesaplama molekülünün sağa ve sola kaymasına ( $r, s$ ) bağlı olan ancak  $v(x)$  fonksiyonunun kendisine bağlı olmayan şu şekildeki  $c_{rj}$  katsayıları vardır [10].

$$v_{i+\frac{1}{2}}^- = \sum_{j=0}^{k-1} c_{rj} \bar{v}_{i-r+j} \quad (2.55a)$$

$$v_{i-\frac{1}{2}}^+ = \sum_{j=0}^{k-1} \tilde{c}_{rj} \bar{v}_{i-r+j} \quad (2.55b)$$

Buradaki aynı  $x_{i+\frac{1}{2}}$  istasyondaki  $\pm$  üst indisleri arasındaki fark  $I_i$  ve  $I_{i+1}$  hesaplama moleküllerinin farklı hesaplama molekülü olma olasılığından dolayıdır. Buradaki  $\tilde{c}_{rj}$  katsayısı  $c_{rj}$  katsayısına bağlı bir ifadedir

$$\tilde{c}_{rj} = c_{r-1,j} \quad (2.56)$$

Bunu şu şekilde özetleyebiliriz. Verilen  $k$  hücre averajları için

$$\bar{v}_{i-r}, \dots, \bar{v}_{i-r+k-1} \quad (2.57)$$

$x_{i+\frac{1}{2}}$  hücre sınırındaki değeri veren  $c_{rj}$  katsayıları vardır.

$$v_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{j=0}^{k-1} c_{rj} \bar{v}_{i-r+j} \quad (2.58)$$

ve hücre sınırındaki bu değerlerde  $k$ . mertebe doğrulukludur.

$$v_{i+\frac{1}{2}} = v(x_{i+\frac{1}{2}}) + O(\Delta x^k) \quad (2.59)$$

$c_{rj}$  katsayılarının nasıl elde edildiğini ve (2.50) doğruluk özelliğinin nasıl ispatlandığını anlamak için  $v(x)$  fonksiyonunun primitif fonksiyonuna bakalım

$$V(x) = \int_{-\infty}^x v(\xi) d\xi \quad (2.60)$$

Burada  $-\infty$  alt limit çok önemli değildir ve herhangi bir sabit sayı ile değiştirilebilir. Bu ifade, açıktır ki  $V(x_{i+\frac{1}{2}})$  hücre averajları cinsinden (2.49) denklemi kullanılarak ifade edilebilir.

$$V(x_{i+\frac{1}{2}}) = \sum_{j=-\infty}^{x_{i+\frac{1}{2}}} v(\xi) d\xi = \sum_{j=-\infty}^i \bar{v}_j \Delta x_j \quad (2.61)$$

Bundan dolayı  $v_{ij}$  hücre averajlarını bilirse hücre sınırındaki  $V(x)$  primitif fonksiyonunu da kesin olarak bilmiş oluruz.  $V(x_{i+\frac{1}{2}})$  fonksiyonu aşağıdaki  $k+1$  noktada interpolate eden

$$x_{i-r-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+s+\frac{1}{2}} \quad (2.62)$$

ve en çok  $k$  mertebeli polinomu  $P(x)$  ile ve onun türevini de  $p(x)$  ile gösterirsek

$$p(x) = P'(x) \quad (2.63)$$

o zaman (2.54) denklemini şu şekilde çıkarılır.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x_j} \sum_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} p(\xi) d\xi &= \frac{1}{\Delta x_j} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} P'(\xi) d\xi = \frac{1}{\Delta x_j} (P(x_{j+\frac{1}{2}}) - P(x_{j-\frac{1}{2}})) \\ &= \frac{1}{\Delta x_j} (V(x_{j+\frac{1}{2}}) - V(x_{j-\frac{1}{2}})) \\ &= \frac{1}{\Delta x_j} \left( \int_{-\infty}^{x_{j+\frac{1}{2}}} v(\xi) d\xi - \int_{-\infty}^{x_{j-\frac{1}{2}}} v(\xi) d\xi \right) \\ &= \frac{1}{\Delta x_j} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} v(\xi) d\xi = \bar{v}_j, \quad j = i-r, \dots, i+s \end{aligned} \quad (2.64)$$

Burada üçüncü eşitliği ele alalım.  $P(x)$  fonksiyonu,  $V(x)$  fonksiyonunu  $x_{i+\frac{1}{2}}$  ve  $x_{i-\frac{1}{2}}$  noktalarında interpolate ediyor. Bu da  $p(x)$  polinomunun bizim aradığımız polinom olduğunu gösterir. (2.50) doğruluk şartını da şu şekilde elde edilir:

$$P'(x) = V'(x) + O(\Delta x^k), x \in I_i \quad (2.65)$$

Şimdi de  $c_{ij}$  katsayılarının nasıl elde edildiğine bakalım. Bunun için Lagrange interpolasyon polinomu kullanalım

$$P(x) = \sum_{m=0}^k V(x_{i-r+m-\frac{1}{2}}) \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^k \frac{x - x_{i-r+l-\frac{1}{2}}}{x_{i-r+m-\frac{1}{2}} - x_{i-r+l-\frac{1}{2}}} \quad (2.66)$$

Önce  $V(x_{i-r-\frac{1}{2}})$  sabitini (2.66) denkleminde çıkaralım ve

$$\sum_{m=0}^k \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^k \frac{x - x_{i-r+l-\frac{1}{2}}}{x_{i-r+m-\frac{1}{2}} - x_{i-r+l-\frac{1}{2}}} = 1 \quad (2.67)$$

kuralını kullanarak

$$P(x) - V(x_{i-r-\frac{1}{2}}) = \sum_{m=0}^k (V(x_{i-r+m-\frac{1}{2}}) - V(x_{i-r-\frac{1}{2}})) \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^k \frac{x - x_{i-r+l-\frac{1}{2}}}{x_{i-r+m-\frac{1}{2}} - x_{i-r+l-\frac{1}{2}}} \quad (2.68)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemin her iki tarafının türevini alalım ve (2.54) ve (2.61) denklemlerinden,

$$V(x_{i-r+m-\frac{1}{2}}) - V(x_{i-r-\frac{1}{2}}) = \sum_{j=0}^{m-1} \bar{v}_{i-r+j} \Delta x_{i-r+j} \quad (2.69)$$

olduğuna dikkat edelim. Bu ifadeyi yukarıda yerine koyarsak

$$p(x) = \sum_{m=0}^k \sum_{j=0}^{m-1} \bar{v}_{i-r+j} \Delta x_{i-r+j} \left( \frac{\sum_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^k \prod_{\substack{q=0 \\ q \neq m, l}}^k (x - x_{i-r+q-\frac{1}{2}})}{\prod_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^k (x_{i-r+m-\frac{1}{2}} - x_{i-r+l-\frac{1}{2}})} \right) \quad (2.70)$$

elde ederiz. Bu ifadeyi  $x = x_{i+\frac{1}{2}}$  noktasında hesaplayarak en son şu ifadeyi elde ederiz.

$$v_{i+\frac{1}{2}} = p(x_{i+\frac{1}{2}}) = \sum_{j=0}^{k-1} \left( \frac{\sum_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^k \prod_{\substack{q=0 \\ q \neq m, l}}^k (x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-r+q-\frac{1}{2}})}{\prod_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^k (x_{i-r+m-\frac{1}{2}} - x_{i-r+l-\frac{1}{2}})} \right) \Delta x_{i-r+j} \bar{v}_{i-r+j} \quad (2.71)$$

yani (2.58) denklemindeki sabit  $c_{ij}$  ler şu şekilde bulunmuş olur:

$$c_{rj} = \left( \frac{\sum_{l=0}^k \prod_{\substack{q=0 \\ l \neq m, q \neq m, l}}^k (x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-r+q-\frac{1}{2}})}{\prod_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^k (x_{i-r+m-\frac{1}{2}} - x_{i-r+l-\frac{1}{2}})} \right) \Delta x_{i-r+j} \quad (2.72)$$

Genel halde ( $x_{i+\frac{1}{2}}$  noktasının interpolasyon noktası olmadığı hallerde)  $c_{rj}$  katsayıları bu şekilde hesaplanır. Fakat  $x_{i+\frac{1}{2}}$  noktası interpolasyon noktası olduğunda bu denklemde bir çok sıfır terim oluşur.

Eğer ağıımız üniform değil ise  $c_{rj}$  katsayıları (2.72) denklemindeki gibi hesaplanır.

Ağıımız üniform ise,  $\Delta x_i = \Delta x$ ,  $c_{rj}$  ifadesi artık  $i$  ve  $\Delta x$  e bağlı olmayacaktır.

$$c_{rj} = \sum_{m=j+1}^k \frac{\sum_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^k \prod_{\substack{q=0 \\ q \neq m, l}}^k (r - q + 1)}{\prod_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^k (m - l)} \quad (2.73)$$

Görüldüğü gibi  $c_{rj}$  ifadesi sadece  $r$  ve  $k$  ya bağlı hale geldi. Örneğin  $k=3$  ve  $r=1$  için hücre sınırındaki yaklaşık değer şu şekilde bulunmuş olur:

$$v_{i+\frac{1}{2}}^+ = -\frac{1}{6} \bar{v}_{i-1} + \frac{5}{6} \bar{v}_i + \frac{1}{3} \bar{v}_{i+1} + O(\Delta x^3) \quad (2.74)$$

#### 2.4.2 Nokta Değerlerinden Türevlere Korunum Yaklaşımı

Hiperbolik korunum kanunlarına nokta değerleri kullanarak (sonlu farklar şeması) yüksek doğruluklu ve korunumlu yaklaşım yapılabilir.

Bir  $v(x)$  fonksiyonunun noktasal değerleri şu şekilde verilsin.

$$v_i \equiv v(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.75)$$

Şimdi öyle bir sayısal akı bulalım ki

$$\hat{v}_{i+\frac{1}{2}} \equiv \hat{v}(v_{i-r}, \dots, v_{i+s}), \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (2.76)$$

Bu akıların farkları,  $v'(x)$  türevinin  $k$ . mertebe doğrulukla yaklaşımı olsun.

$$\frac{1}{\Delta x_j} (\hat{v}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{v}_{i-\frac{1}{2}}) = v'(x_i) + O(\Delta x^k), \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (2.77)$$

Öncelikle ağıımızı üniform kabul edeceğiz,  $\Delta x_i = \Delta x$

Şimdi  $\Delta x$  ağ büyüklüğüne aşağıdaki gibi bağlı bir  $h(x)$  fonksiyonu bulalım.

$$v(x) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} h(\xi) d\xi \quad (2.78)$$

o zaman

$$v'(x) = \frac{1}{\Delta x} \left[ h\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - h\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right) \right] \quad (2.79)$$

olduğu açıktır. Bu durumda (2.77) denklemini elde etmek için yapmamız gereken

$$\hat{v}_{i+\frac{1}{2}} = h(x_{i+\frac{1}{2}}) + O(\Delta x^k) \quad (2.80)$$

kullanmaktır. Burada (2.77) denklemini elde etmek için paydadaki  $\Delta x$  teriminden dolayı (2.80) denkleminde  $O(\Delta x^{k+1})$  terimi gerekli gibi görünebilir. Fakat pratikte, (2.80) denklemindeki  $O(\Delta x^k)$  terimi genelde düzgündür o zaman (2.77) denklemindeki fark ekstra  $\Delta x$  verecektir ve buda paydadaki terimi götürür.

(2.78) denklemini kullanarak  $h(x)$  fonksiyonuna yaklaşım yapmak kolay değildir. Burada bilinen  $v(x)$  fonksiyonu bilinmeyen  $h(x)$  fonksiyonunun hücre averajları olduğuna dikkat edelim.  $h(x)$  fonksiyonunu bulabilmek için bir önceki kısımda anlatılan prosedürü kullanmamız gerekir.  $h(x)$  fonksiyonun primitifini alırsak

$$H(x) = \int_{-\infty}^x h(\xi) d\xi \quad (2.81)$$

(2.78) denkleminde

$$H(x_{i+\frac{1}{2}}) = \sum_{j=-\infty}^i h(\xi) d\xi = \Delta x \sum_{j=-\infty}^i v_j \quad (2.82)$$

olduğunu görürüz. Böylece (2.78) denkleminde  $h(x)$  fonksiyonunun hücre averajı olarak belirtilen  $v_j$  nokta değerleri verildiğinde,  $x = x_{i+\frac{1}{2}}$  hücre ara yüzeyinde,  $h(x)$  primitif fonksiyonu kesin olarak bilinmiş olur. Bundan dolayı  $h(x_{i+\frac{1}{2}})$  fonksiyonuna k. mertebe yaklaşım elde etmek için daha önceki prosedür kullanılır. Bu  $h(x_{i+\frac{1}{2}})$  daha sonra  $\hat{v}_{i+\frac{1}{2}}$  sayısal akı olarak alınır.

Başka bir deyişle, eğer (2.76) denklemindeki  $\hat{v}_{i+\frac{1}{2}}$  akısı için hesaplama molekülü şu noktalarsa:

$$x_{i-r}, \dots, x_{i+s} \quad (2.83)$$

Burada  $r+s=k-1$  dir. O zaman  $\hat{v}_{i+\frac{1}{2}}$  akısı şu şekilde ifade edilebilir:

$$\hat{v}_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{j=0}^{k-1} c_{rj} v_{i-r+j} \quad (2.84)$$

Buradaki sabit  $c_{rj}$  katsayıları daha önceden bulunanlarla aynıdır.

Örneğin  $k=3$  ve  $r=1$  için bu akı şöyledir:

$$v_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{6} \bar{v}_{i-1} + \frac{5}{6} \bar{v}_i + \frac{1}{3} \bar{v}_{i+1} \quad (2.85)$$

Sonrada şu ifadeyi yazmak mümkündür.

$$\frac{1}{\Delta x} (\hat{v}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{v}_{i-\frac{1}{2}}) = v'(x_i) + O(\Delta x^3) \quad (2.86)$$

Tekrar vurgulamak gerekirse, burada ağıımız üniform veya düzgün değişen bir ağ olmalıdır. Aksi halde  $c_{rj}$  sabitlerinin hiçbir seçimi (2.76)-(2.77) türevlerine ikinci mertebeden daha yüksek bir merteye ile korunumlu yaklaşım yapamayacaklarını ispatlamak mümkündür. Bu ispat Taylor açılımı ile kolayca görülür [10].

Bundan dolayı yüksek mertebeli sonlu fark sadece üniform veya düzgün değişen ağlar için kullanılabilir.

## 2.5 Sabit Hesaplama moleküllü Yaklaşım

Sabit hesaplama molekülünden kastettiğimiz (2.53) ve (2.83) denklemlerindeki  $r$  (sol kaymaların) bütün  $i$  noktaları için aynı olmasıdır. Genelde yerel olarak düzgün olan  $v(x)$  fonksiyonu için, en iyi yaklaşım  $k$ 'nın çift olduğu durumlarda merkezi yaklaşım  $r=s-1$  (Burada merkez  $x_{i+\frac{1}{2}}$  istasyonudur),  $k$ 'nın tek olduğu durumda ise bir nokta “upwind biased” yaklaşımdır.  $r=s$ ,  $r=s-2$ . Örneğin eğer ağıımız üniformsa  $\Delta x_i = \Delta x$ ,  $v_{i+\frac{1}{2}}$  için dördüncü merteye yapı şu şekildedir:

$$v_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{12} \bar{v}_{i-1} + \frac{7}{12} \bar{v}_i + \frac{7}{12} \bar{v}_{i+1} - \frac{1}{12} \bar{v}_{i+2} + O(\Delta x^4) \quad (2.87)$$

$r=1$  ve  $r=0$  için üçüncü merteye bir nokta “upwind biased” yapı ise

$$v_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{6}\bar{v}_{i-1} + \frac{5}{6}\bar{v}_i + \frac{1}{3}\bar{v}_{i+1} + O(\Delta x^3) \quad (2.88a)$$

$$v_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}\bar{v}_i + \frac{5}{6}\bar{v}_{i+1} - \frac{1}{6}\bar{v}_{i+2} + O(\Delta x^3) \quad (2.88b)$$

şeklindedir. Benzer olarak merkezi dördüncü mertebe akı (2.84) denkleminde,

$$\hat{v}_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{12}v_{i-1} + \frac{7}{12}v_i + \frac{7}{12}v_{i+1} - \frac{1}{12}v_{i+2} \quad (2.89)$$

şeklinde formüle edilir. Bu akı da

$$\frac{1}{\Delta x}(\hat{v}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{v}_{i-\frac{1}{2}}) = v'(x_i) + O(\Delta x^4) \quad (2.90)$$

denkleminde görüldüğü gibi 4.mertebe doğruluk verir. Üçüncü mertebe bir nokta “upwind biased” akılar

$$\hat{v}_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{6}\bar{v}_{i-1} + \frac{5}{6}\bar{v}_i + \frac{1}{3}\bar{v}_{i+1} \quad (2.91a)$$

$$\hat{v}_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}\bar{v}_i + \frac{5}{6}\bar{v}_{i+1} - \frac{1}{6}\bar{v}_{i+2} \quad (2.91b)$$

şeklindedir. Bunlar da

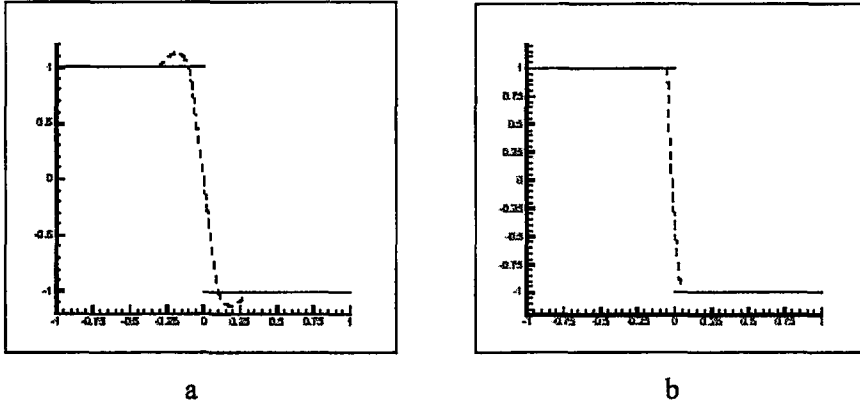
$$\frac{1}{\Delta x}(\hat{v}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{v}_{i-\frac{1}{2}}) = v'(x_i) + O(\Delta x^3) \quad (2.92)$$

görüldüğü gibi 3. mertebe doğruluk verirler. Geleneksel merkezi ve upwind şemaları, bu sabit hesaplama molekülülü yapılardan veya akı fark yaklaşımlarından türetilebilir.

## 2.5 ENO WENO Yaklaşımları

Hiperbolik korunum kanunlarını çözerken parçalı düzgün fonksiyonlarla ilgileniriz. Eğer  $v(x)$  fonksiyonu sadece parçalı düzgünse, süreksizlik civarında sabit hesaplama molekülülü yaklaşım yeterli değildir. Şekil 2.3 de basamak fonksiyonu için merkezi hesaplama molekülülü dördüncü mertebe (parçalı kübik) interpolasyon kullanılmıştır. Yani  $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$  aralığında polinom yaklaşımı, bu basamak fonksiyonunu dört noktada  $x_{i-\frac{3}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{3}{2}}$ , enterpole etmiştir.

Bu salınımlar, (2.83) denkleminde ifade edilen hesaplama molekülünün, süreksiz hücreyi içermesinden dolayı olmuştur. Sonuç olarak (2.50) yaklaşımı böyle hesaplama molekülülleri için artık doğru değildir.



Şekil 2.3 Basamak fonksiyonu için sabit hesaplama molekülü merkezi kübik interpolasyon (a) ve ENO kübik interpolasyon (b). Düz çizgi fonksiyonun kendisi kesik çizgi interpolate edilmiş polinom

### 2.5.1 ENO Yaklaşımı

Şekil 2.3'i daha yakından incelersek, adaptif hesaplama molekülü fikrinin hesaplama molekülünün  $r$  sol değişiminin  $x_i$  istasyonu ile değişmesi olduğunu anlarız. Temel düşünce mümkün olduğunca süreksizlik içeren hücreyi hesaplama molekülü içinde bulundurmaktan kaçınmaktır.

Bu etkiyi elde etmek için Newton interpolasyon polinomuna bakmamız gerekir. İlk önce Newton bölünmüş farkları hatırlayalım. (2.60) –(2.61) denklemindeki  $V(x)$  fonksiyonunun 0. derece bölünmüş farkı şu şekilde tanımlanır:

$$V[x_{i-\frac{1}{2}}] \equiv V(x_{i-\frac{1}{2}}) \quad (2.93)$$

ve genelde  $j$ . derece bölünmüş farklar,  $j > 1$  için şöyle tanımlanır:

$$V[x_{i-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j-\frac{1}{2}}] \equiv \frac{V[x_{i+\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j-\frac{1}{2}}] - V[x_{i-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j-\frac{1}{2}}]}{x_{i+j-\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}} \quad (2.94)$$

Benzer olarak (2.49) denklemindeki  $v$  hücre averajlarının bölünmüş farkları şu şekildedir:

$$\bar{v}[x_i] \equiv \bar{v}_i \quad (2.95)$$

ve genel halde  $j$ .derece bölünmüş fark şöyledir:

$$\bar{v}[x_i, \dots, x_{i+j}] \equiv \frac{\bar{v}[x_{i+1}, \dots, x_{i+j}] - \bar{v}[x_i, \dots, x_{i+j-1}]}{x_{i+j} - x_i} \quad (2.96)$$

(2.61) denkleminde

$$V\left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\right] = \frac{V(x_{i+\frac{1}{2}}) - V(x_{i-\frac{1}{2}})}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}} = \bar{v}_i \quad (2.97)$$

olduğunu görürüz. Yani,  $v$  nin 0. derece bölünmüş farkları  $V(x)$  in 1. derece bölünmüş farkıdır. Böylece (2.97) ve (2.94) denklemlerini kullanarak  $V(x)$  in 1. ve daha yüksek dereceli bölünmüş farklarını  $v$  nin 0. ve daha yüksek dereceli bölünmüş farkları cinsinden yazabiliriz.

$V(x)$  fonksiyonunu (2.83) denklemindeki  $k+1$  noktada interpolate eden  $k$ . derece  $P(x)$  interpolasyon polinomunun Newton formu, (2.93) ve (2.94) bölünmüş fark denklemleri kullanılarak ifade edilebilir.

$$P(x) = \sum_{j=0}^k V\left[x_{i-r-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i-r+j-\frac{1}{2}}\right] \prod_{m=0}^{j-1} (x - x_{i-r+m-\frac{1}{2}}) \quad (2.98)$$

(2.63) denklemindeki  $p(x)$  fonksiyonunu elde etmek için bu denklemin türevini alınır.

$$p(x) = \sum_{j=1}^k V\left[x_{i-r-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i-r+j-\frac{1}{2}}\right] \sum_{m=0}^{j-1} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^{j-1} (x - x_{i-r+l-\frac{1}{2}}) \quad (2.99)$$

Bu denklemde sadece  $V(x)$  in birinci ve yüksek dereceli bölünmüş farkları gözükmemektedir. (2.97) denklemini kullanarak  $p(x)$  fonksiyonunu tamamen  $v$  nin bölünmüş farkları cinsinden ifade edebiliriz.

Şimdi bölünmüş farkların önemli bir özelliğine bakalım.  $x_{i-\frac{1}{2}} < \xi < x_{i+j-\frac{1}{2}}$  hesaplama molekülündeki bazı  $\xi$  ler için,

$$V\left[x_{i-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j-\frac{1}{2}}\right] = \frac{V^{(j)}(\xi)}{j!} \quad (2.100)$$

$V(x)$  fonksiyonu bu hesaplama molekülü içerisinde düzgün olduğu müddetçe bu ifade doğrudur. Eğer  $V(x)$  fonksiyonu hesaplama molekülü içerisindeki bazı noktalarda süreksiz ise o zaman şöyle yazmak mümkündür:

$$V\left[x_{i-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j-\frac{1}{2}}\right] = O\left(\frac{1}{\Delta x^j}\right) \quad (2.102)$$

Bundan dolayı bölünmüş farklar hesaplama molekülü içerisinde fonksiyonun düzgünlüğünün bir ölçüsüdür.

Şimdi (2.98) denklemini kullanarak ENO fikrini tanımlayalım. Amacımızın  $x_{i-\frac{1}{2}}$  ve  $x_{i+\frac{1}{2}}$  noktalarını içeren ve  $k+1$  ardışık noktadan oluşan, bir hesaplama molekülü bulmak olduğunu farz edelim. Öyle ki  $V(x)$  fonksiyonu diğer hesaplama molekülleri ile karşılaştırıldığında en düzgün bu hesaplama molekülü içerisinde olsun. Bu işlemi iki adımda yapabiliriz. İlk önce iki noktalı hesaplama molekülü ile başlayalım.

$$\bar{S}_2(i) = \{x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\} \quad (2.103)$$

Burada  $\tilde{S}$ ,  $V$  primitif fonksiyonu için olan hesaplama molekülünü belirtmek için kullanılmıştır.  $V$  için olan  $\tilde{S}$  hesaplama molekülü (2.97) denkleminde  $v$  için olan  $S$  hesaplama molekülüne karşılık gelir. Örneğin (2.102) deki hesaplama molekülü  $v$  için tek hücre hesaplama molekülüne karşılık gelir.

$$S(i) = \{I_i\} \quad (2.104)$$

(2.102) denklemindeki  $S$  hesaplama molekülünde lineer bir interpolasyon, Newton formunda şu şekilde yazılır.

$$P^1(x) = V\left[x_{i-\frac{1}{2}}\right] + V\left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\right](x - x_{i-\frac{1}{2}}) \quad (2.105)$$

Bir sonraki adımda hesaplama molekülüne bir nokta ekleyerek genişletmek için iki seçeneğimiz vardır. Birincisinde hesaplama molekülüne, soldaki  $x_{i-\frac{3}{2}}$  noktası eklenir ve su quadratik interpolasyonu verir

$$R(x) = P^1(x) + V\left[x_{i-\frac{3}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\right](x - x_{i-\frac{1}{2}})(x - x_{i+\frac{1}{2}}) \quad (2.106)$$

veya hesaplama molekülüne, sağdaki  $x_{i+\frac{3}{2}}$  noktası eklenir ve şu quadratik interpolasyon verir.

$$S(x) = P^1(x) + V\left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{3}{2}}\right](x - x_{i-\frac{1}{2}})(x - x_{i+\frac{1}{2}}) \quad (2.107)$$

(2.106) ve (2.107) denklemlerinde  $P^1(x)$  den sapmalar aynı fonksiyondur.

$$(x - x_{i-\frac{1}{2}})(x - x_{i+\frac{1}{2}}) \quad (2.108)$$

Fakat bu fonksiyon iki farklı sabit ile çarpılmıştır.

$$V\left[x_{i-\frac{3}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\right] \quad \text{ve} \quad V\left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{3}{2}}\right] \quad (2.109)$$

Bu iki sabit,  $V(x)$  fonksiyonunun iki farklı hesaplama molekülündeki ikinci derece bölünmüş farkıdır. Daha önceden (2.100) ve (2.101) denklemlerinde belirtildiği gibi , daha küçük bölünmüş farkı olan, fonksiyonu o hesaplama molekülü içerisinde daha düzgün yapacaktır. Böylece iki ilgili bölünmüş farkı karşılaştırarak ve mutlak değer olarak küçüğünü alarak hesaplama molekülüne hangi noktanın ekleneceğine karar vermiş oluruz. Böylece eğer

$$\left| V\left[x_{i-\frac{3}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\right] \right| < \left| V\left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{3}{2}}\right] \right| \quad (2.110)$$

ise o zaman üç nokta hesaplama molekülü şu şekilde yapılır.

$$\bar{S}_3(i) = \{x_{i-\frac{3}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\} \quad (2.111)$$

aksi halde hesaplama molekülü şu şekildedir:

$$\bar{S}_3(i) = \{x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{3}{2}}\} \quad (2.112)$$

Bu prosedür, her bir adımda hesaplama molekülüne birer nokta ekleyerek hesaplama molekülü içerisinde istenen nokta sayısına ulaşılan kadar devam eder.

Eğer ağıımız üniformsa  $\Delta x_i = \Delta x$  , o zaman bölünmüş farkları hesaplamaya gerek yoktur. Bunun yerine (2.97) denklemindeki bölünmemiş farklar hesaplanır

$$V < x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} > = V\left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\right] = \bar{v}_i \quad (2.113)$$

$$V < x_{i-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j+\frac{1}{2}} > \equiv V < x_{i+\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j+\frac{1}{2}} > - V < x_{i-\frac{1}{2}}, \dots, x_{i+j-\frac{1}{2}} >, j \geq 1 \quad (2.114)$$

Bir defa  $\tilde{S}(i)$  dolayısıyla da  $S(i)$  hesaplama molekülü bulunduktan sonra hücre sınırlarındaki değeri hesaplamak için daha önceden bulunan  $c_{ij}$  katsayıları ile birlikte (2.58) denklemini kullanılır.

Genelde, hesaplama molekülü bilindiği takdirde, hücre sınırındaki  $v(x)$  e yaklaşık bir değer hesaplamak için ağ üniform değilse (2.72) ve üniform ise (2.73) denklemlerindeki gibi tanımlanan  $c_{ij}$  lerle birlikte (2.55a), (2.55b) denklemlerini kullanmak daha uygundur.

Basamak fonksiyonu için aynı parçalı kübik interpolasyonlu fakat bu defa ENO ile elde edilen iki noktalı hesaplama molekülü  $\tilde{S}_2(i) = \{x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\}$  , kullanılarak bulunan çözüm Şekil 2.3 den de görüldüğü gibi salımsızdır.

$V(x)$  parçalı düzgün fonksiyonu için, iki noktalı  $\tilde{S}_2(i) = \{x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\}$  hesaplama molekülü ile başlayan ENO interpolasyonu şu özelliklere sahiptir

1. Doğruluk şartı

$$p_i(x) = V(x) + O(\Delta x^{k+1}), \quad x \in I_i \quad (2.115)$$

süreksizlik içermeyen herhangi bir  $I_i$  hücresi için geçerlidir. Bu ENO interpolasyon prosedürünün yüksek mertebeli doğruluğunun korunmasını sağlar

2.  $P_i(x)$  fonksiyonu,  $V(x)$  fonksiyonunun bir süreksizliğini içermeyen herhangi bir  $I_i$  hücresi içerisinde monotondur

Şimdi ikinci özelliği ele alalım. Süreksizlik içeren  $I_i$  hücrelerinde hata olması beklenebilir. Çünkü ENO, iki nokta ile başlayan ve bu halinde süreksizlik içeren bir hesaplama molekülü durumunda işe yaramaz. Şimdi ikinci özelliğe bir örnek vererek ispatını yapalım.  $V(x)$  fonksiyonu bir basamak fonksiyonuysa,

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad (2.116)$$

ve  $k$ . derece  $P(x)$  polinomu  $V(x)$  fonksiyonunu  $k+1$  noktada interpolate etsin

$$x_{\frac{1}{2}} < x_{\frac{3}{2}} < \dots < x_{k+\frac{1}{2}} \quad (2.117)$$

ve süreksizlik de

$$x_{j_0-\frac{1}{2}} < 0 < x_{j_0+\frac{1}{2}} \quad (2.118)$$

1 ile  $k$  arasındaki bir  $j_0$  değerinde olsun. Süreksizliği içermeyen herhangi bir aralık

$$\left[ x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}} \right] \quad j \neq j_0 \quad (2.119)$$

için şu ifadeler yazılabilir

$$P(x_{j-\frac{1}{2}}) = V(x_{j-\frac{1}{2}}) = V(x_{j+\frac{1}{2}}) = P(x_{j+\frac{1}{2}}) \quad (2.120)$$

o zaman en azından  $x_{j-\frac{1}{2}} < \xi < x_{j+\frac{1}{2}}$  arasında öyle bir  $\xi_j$  noktası vardır ki bu noktada  $P'(\xi_j) = 0$  olsun. 0 süreksizliğini içermeyen  $k-1$  aralık olduğundan  $P'(x)$  fonksiyonunu sıfır yapan  $k-1$  farklı  $\xi_j$  noktası bulunabilir. Bununla beraber,  $P'(x)$  fonksiyonu en çok  $k-1$  derece ve sıfır olmayan polinomdur. Böylece en çok  $k-1$  farklı sıfır bulunur. Bu,  $P'(x)$  fonksiyonunun şok aralığında  $\left[ x_{j_0-\frac{1}{2}}, x_{j_0+\frac{1}{2}} \right]$  hiçbir sıfır içermediğini, yani

$P(x)$ 'in bu aralıkta monoton olduğunu gösterir. Bu ispat, ikinci özelliği ispatlamak için de genelleştirilebilir.

### 2.5.2 WENO Yaklaşımı

WENO (Weighted ENO) yaklaşımı ENO yaklaşımına dayanır [8, 9]. Daha basit olması açısından burada da ağırlığımızı üniform alacağız,  $\Delta x_i = \Delta x$

Daha önceden de bahsedildiği gibi ENO prosedürü süreksizliklerde yüksek doğruluğa sahiptir. Bu etki bölünmüş farkların mutlak değerlerine dayanan adaptif olarak hesaplama molekülü seçerekten yapılır. Yinede, ENO hakkında şunları söylemek mümkündür.

1. Çözümün ve onun türevlerinin sıfıra yakın olduğu yerlerde yuvarlama hata dağılımlarından dolayı hesaplama molekülü değişebilir. (2.110) denkleminin her iki tarafının sıfıra yakın olduğu durumlarda yuvarlama hatalarındaki küçük bir değişme, eşitsizliğin yönünü, dolayısıyla da hesaplama molekülünü değiştirebilir. Ayrıca düzgün bölgelerde, hesaplama moleküllerinin bu şekildeki adaptasyonu gereksizdir. Üstelik bu, hiperbolik denkleme uygulandığında doğruluk kaybına sebep olur.
2. Sonuçta bulunan (2.74) sayısal akısı, komşu noktalarda hesaplama molekülü değişebileceğinden dolayı düzgün değildir.
3. Hesaplama molekülü seçme prosesinde  $2k-1$  hücre içeren  $k$  tane aday hesaplama molekülü vardır. Fakat akı hesaplanırken bunlardan sadece bir tanesi kullanılır ve sonuçta  $k$ . mertebe doğruluk elde edilir. Eğer muhtemel hesaplama moleküllerdeki  $2k-1$  hücre kullanılırsa, o zaman düzgün bölgelerde  $2k-1$  mertebe doğruluk elde edilmiş olur.
4. ENO hesaplama molekülü seçme prosedürü bir çok mantıksal “if” yapılarını veya bunun matematiksel eşdeğerini içerir.

Buradaki birinci problemi iyileştirmek için bir çok çalışmalar yapılmıştır [12].

WENO bu dört noktada ENO prosedürünü geliştirmek için yapılan bir çalışmadır. Temel düşünce, yapıyı oluşturmak için aday hesaplama moleküllerinden bir tanesini kullanmak yerine bütün hepsinin konveks bir kombinasyonunu kullanmaktır. Daha açıklayıcı olması için  $k$  tane aday hesaplama molekülü düşünelim.

$$S_r(i) = \{x_{i-r}, \dots, x_{i-r+k-1}\}, \quad r = 0, \dots, k-1 \quad (2.121)$$

Bu  $k$  tane hesaplama molekülü (2.58) denklemine göre  $v_{i+\frac{1}{2}}$  için  $k$  tane farklı değer verir.

$$v_{i+\frac{1}{2}}^{(r)} = \sum_{j=0}^{k-1} c_{rj} \bar{v}_{i-r+j}, \quad r = 0, \dots, k-1 \quad (2.122)$$

WENO yapısı hücre sınırındaki  $v(x_{i+\frac{1}{2}})$  değerine yeni bir yaklaşım olarak (2.122) denkleminde tanımlanan bütün  $v_{i+\frac{1}{2}}^{(r)}$  değerlerinin konveks bir kombinasyonunu alır:

$$v_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^{k-1} w_r v_{i+\frac{1}{2}}^{(r)} \quad (2.123)$$

Açıktır ki WENO nun başarılı olabilmesi  $w_r$  ağırlıklarının seçimi olacaktır. Kararlılık ve tutarlılık için  $w_r$  katsayılarının şu şartları sağlaması gerekir

$$w_r \geq 0, \quad \sum_{r=0}^{k-1} w_r = 1 \quad (2.124)$$

Eğer  $v(x)$  fonksiyonu aday hesaplama moleküllerinin hepsinin içerisinde düzgünse o zaman şu şekilde  $d_r$  katsayıları mevcuttur.

$$v_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^{k-1} d_r v_{i+\frac{1}{2}}^{(r)} = v(x_{i+\frac{1}{2}}) + O(\Delta x^{2k-1}) \quad (2.125)$$

Örneğin  $1 \leq k \leq 3$  için  $d_r$  ler şöyledir:

|       |   |               |                |
|-------|---|---------------|----------------|
| $k$   | 1 | 2             | 3              |
| $d_0$ | 1 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{10}$ |
| $d_1$ |   | $\frac{1}{3}$ | $\frac{3}{5}$  |
| $d_2$ |   |               | $\frac{1}{10}$ |

Tutarlılıktan dolayı  $d_r$  lerin her zaman pozitif ve

$$\sum_{r=0}^{k-1} d_r = 1 \quad (2.126)$$

olduğunu görürüz. Bu düzgün hallerde şu şekilde yazmak mümkündür:

$$w_r = d_r + O(\Delta x^{k-1}), \quad r = 0, \dots, k-1 \quad (2.127)$$

Bu da  $2k-1$ . mertebeden doğruluğu gösterir.

$$v_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^{k-1} w_r v_{i+\frac{1}{2}}^{(r)} = v(x_{i+\frac{1}{2}}) + O(\Delta x^{2k-1}) \quad (2.128)$$

2k-1. mertebeden doğruluk göstermesini şu şekilde anlayabiliriz

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{k-1} w_r v_{i+\frac{1}{2}}^{(r)} - \sum_{r=0}^{k-1} d_r v_{i+\frac{1}{2}}^{(r)} &= \sum_{r=0}^{k-1} (w_r - d_r) (v_{i+\frac{1}{2}}^{(r)} - v(x_{i+\frac{1}{2}})) \\ &= \sum_{r=0}^{k-1} O(\Delta x^{k-1}) O(\Delta x^k) = O(\Delta x^{2k-1}) \end{aligned} \quad (2.129)$$

Eğer  $v(x)$  hesaplama molekülü bir veya daha fazla hesaplama molekülünde süreksizliğe sahipse daha başarılı bir ENO için buna karşılık gelen ağırlığın sıfır olmasını bekleriz.

Son olarak bu ağırlıkların hesaplama olarak etkili olmasını isteriz. Bundan dolayı polinomlar veya dönüşüm fonksiyonları üslü tip fonksiyonlar olarak tercih edilir.

Bütün bu nedenlerden dolayı ağırlıkları aşağıdaki gibi yazmak mümkündür.

$$\alpha_r = \frac{d_r}{(\epsilon + \beta_r)^2} \quad (2.130)$$

$$w_r = \frac{\alpha_r}{\sum_{s=0}^{k-1} \alpha_s}, \quad r = 0, \dots, k-1 \quad (2.131)$$

Burada  $\epsilon$  sıfıra bölme hatasından kaçınmak için konulmuştur. Sayısal hesaplamalarımızda bu  $\epsilon$  değeri için  $10^{-6}$  alacağız.  $\beta_r$  ler  $S_r(i)$  hesaplama moleküllerinin düzgünlük göstergeleridir. Eğer  $v(x)$  fonksiyonu,  $S_r(i)$  hesaplama molekülü içerisinde düzgünse o zaman şu ifade yazılabilir:

$$\beta_r = O(\Delta x^2)$$

fakat eğer  $v(x)$   $S_r(i)$  hesaplama molekülü içerisinde bir süreksizliğe sahipse

$$\beta_r = O(1)$$

yazılabilir. Bunları (2.131) denklemindeki  $w_r$  ağırlıklarına dönüştürürsek,  $v(x)$  fonksiyonu  $S_r(i)$  hesaplama molekülü içerisinde düzgünse o zaman,

$$w_r = O(1)$$

eğer  $v(x)$   $S_r(i)$  hesaplama molekülü içerisinde bir süreksizliğe sahipse

$$w_r = O(\Delta x^4)$$

yazılabilir. Böylece süreksizlik civarında daha iyi bir ENO yapılmış olur.

Şimdi  $\beta_r$  düzgünlük göstergesi verildiğinde (2.127) denklemindeki doğruluk şartına bakalım. Herhangi bir  $\beta_r$  düzgünlük göstergesi için (2.131) denkleminde tanımlanan ağırlıkların (2.124) denklemini sağladığı kolayca görülür. (2.127) denklemini sağlaması için Taylor açılımını incelemek yeterli olacaktır.

$$\beta_r = D(1 + O(\Delta x^{k-1})), \quad r=0, \dots, k-1 \quad (2.132)$$

Burada  $D$   $r$  den bağımsız (fakat  $\Delta x$  e bağlı olabilir) sıfır olmayan bir büyüklüktür.

WENO da ağırlıkların hesabında iki farklı düzgünlük ölçeği kullanılır.

Bunlardan birincisi direkt olarak fonksiyonun bölünmemiş farkını kullanarak elde edilen düzgünlük ölçeğidir[8]. Bu ölçek kullanılarak  $(k+1)$  mertebeden doğruluk elde edilir.

$$\beta_r = \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(v[j+r+i-k, l])^2}{k-l} \quad (2.133)$$

Burada  $v[\cdot, \cdot, \cdot]$  1. derece bölünmemiş farktır. Örneğin  $k=2$  için

$$\beta_r = (v[j+r-1, 1])^2, \quad r = 0, 1 \quad (2.134)$$

$k=3$  ise yukarıdaki denklem,

$$\beta_r = \frac{1}{2}((v[j+r-2, 1])^2 + (v[j+r-1, 1])^2) + (v[j+r-2, 2])^2, \quad r = 0, 1, 2 \quad (2.135)$$

Düzgün bölgelerde (2.133) denkleminin Taylor açılımının analizi şu sonucu verir:

$$\beta_r = (v'\Delta x)^2(1 + O(\Delta x)), \quad r = 0, 1, \dots, k-1 \quad (2.136)$$

Burada  $v' = v'(u_j)$ .  $O(\Delta x)$  terimi  $O(\Delta x^{k-1})$  değildir. Bundan dolayı düzgün monoton bölgelerde, yani  $v' \neq 0$ , bundan dolayı,

$$w_r = d_r + O(\Delta x), \quad r = 0, \dots, k-1. \quad (2.137)$$

Düzgünlük ölçüsü (2.133) denklemi ile verilmiş olan WENO şeması  $f(u(x))$  akısının monoton olduğu yerlerde  $(r+1)$  dereceden doğruluk verir.

$k=3$  olduğunda (2.135) denkleminin Taylor açılımı:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{1}{2}((v'\Delta x - \frac{1}{2}v''\Delta x^2)^2 + (v'\Delta x - \frac{1}{2}v''\Delta x^2)^2) + (v''\Delta x^2)^2 + O(\Delta x^5) \\ \beta_1 &= \frac{1}{2}((v'\Delta x - \frac{1}{2}v''\Delta x^2)^2 + (v'\Delta x - \frac{1}{2}v''\Delta x^2)^2) + (v''\Delta x^2)^2 + O(\Delta x^5) \\ \beta_2 &= \frac{1}{2}((v'\Delta x + \frac{1}{2}v''\Delta x^2)^2 + (v'\Delta x + \frac{3}{2}v''\Delta x^2)^2) + (v''\Delta x^2)^2 + O(\Delta x^5) \end{aligned} \quad (2.138)$$

Burada ikinci derece terimlerin hesaplama molekülünden hesaplama molekülüne farklı oldukları görülmektedir. Bundan dolayı (2.136) denklemi kritik noktalarda artık doğru değildir. ki bu da WENO şemasını bu noktalarda  $k=3$  için üçüncü mertebe doğruluk verir. Bu kritik noktalarda (2.133 denklemindeki düzgünlük ölçeği ile hesaplanan ağırlıklar optimal ağırlıklardan ıraksarlar. Fakat düzgün ağırlıklarda bütün  $r$  ler için  $\beta_r$  düzgünlük ölçeği sıfır olmayan  $\epsilon$  sabitine göre çok küçük olduğundan ağırlıklar optimal ağırlıklara yakın olurlar.

Süreksizliklerde aday hesaplama moleküllerinden bir veya daha fazla hesaplama molekülü düzgün bölge içerisinde kalırken diğer hesaplama molekülleri süreksizlik içerirler. Süreksizliğin büyüklüğü her zaman  $O(1)$  dir ve ağırlık iyi olması ile değişmez. Düzgün bir hesaplama molekülü için

$$\beta_r = O(\Delta x^{2p})$$

Düzgün olmayan bir hesaplama molekülü içinse

$$\beta_r = O(1)$$

(2.131) denklemindeki ağırlıkların tanımından bu düzgün olmayan  $S_1(i)$  hesaplama molekülü  $w_r$  ağırlığına karşılık gelir:

$$w_r = O(\Delta x^{2p})$$

Bu nedenle küçük  $\Delta x$  ler için ve pozitif  $p$  kuvveti için düzgün olmayan hesaplama molekülü için atanan ağırlık  $\Delta x \rightarrow 0$  iken kaybolur.  $r$  aday hesaplama molekülüleri içerisinde birden fazla düzgün hesaplama molekülü mevcutsa ağırlıkların tanımından, düzgün hesaplama moleküllerinden her birini  $O(1)$  olan ağırlıklar almasını bekleriz Bu durumda ağırlıklar tam olarak ENO ağırlıklarına benzemezler. Fakat eğer hesaplama molekülü düzgünse bu hesaplama molekülünün sahip olduğu bilgiler kullanışlıdır ve bunlardan yararlanılmalıdır. WENO şemalarının şoklarda çok iyi çalıştığı deneysel çalışmalarla da gösterilmiştir.  $k=2, 3$  için  $p=2$  olması salınımsız bir yaklaşım elde etmek için yeterlidir ve sayısal hesaplamalarımızda da biz  $p=2$  kullanacağız. Süreksizlik civarındaki doğruluk çalışmalarında sadece uzaysal hatalarla ilgilenilmiştir. Zamanın ilerlemesi ile oluşan hatalar göz önüne alınmamıştır. Özetleyecek olursak,

1. ENO şemalarında görülen mantıksal ifadeler içermezler.

2.  $k$ . Derece ENO şemasına dayanan WENO şeması monoton bölgelerde  $(r+1)$  mertebeden doğruluğa sahiptir.
3. Süreksizliklerde ENO şemalarından daha iyi aslında salınımsız özelliği elde edilmiş olur.

### Yeni Düzgünlük Ölçeği

Bildiğimiz gibi her bir  $S_r(i)$  hesaplama molekülünde  $x = x_{i+\frac{1}{2}}$  de hesaplanan ve  $v(x_{i+\frac{1}{2}})$  yaklaşık değerine karşılık gelen  $k-1$  dereceden polinom yazabiliriz. Toplam değişim (total variation) düzgünlük için iyi bir ölçü olduğundan  $I_i$  içerisinde bu polinom için toplam değişimi minimize etmek istenir. Düzgün bir akı ve yüksek mertebeli değişimlerin rolü düşüncesi aşağıdaki düzgünlük ölçüsünü verir.  $S_r(i)$  hesaplama molekülündeki interpolasyon polinomunu  $p_r(x)$  ile gösterelim

$$\beta_r = \sum_{l=1}^{k-1} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \Delta x^{2l-1} \left( \frac{\partial^l p_r(x)}{\partial^l x} \right) dx \quad (2.139)$$

Bu denklemin sağ tarafı  $p_r(x)$  interpolasyon polinomunun  $(x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}})$  aralığındaki bütün türevlerinin  $L^2$  normlarının karelerinin toplamıdır.  $\Delta x^{2l-1}$  çarpanı, hiperbolik denklemler için kullanıldığında benzerliği korumak için türevlerdeki  $\Delta x$  bağımlılığını kaldırmak için kullanılmıştır.

$k=2$  için (2. denklem),

$$\begin{aligned} \beta_0 &= (\bar{v}_{i+1} - \bar{v}_i)^2 \\ \beta_1 &= (\bar{v}_i - \bar{v}_{i-1})^2 \end{aligned} \quad (2.140)$$

$k=3$  için (2.139) denklemi

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{13}{12} (\bar{v}_i - 2\bar{v}_{i+1} + \bar{v}_{i+2})^2 + \frac{1}{4} (3\bar{v}_i - 4\bar{v}_{i+1} + \bar{v}_{i+2})^2 \\ \beta_1 &= \frac{13}{12} (\bar{v}_{i-1} - 2\bar{v}_i + \bar{v}_{i+1})^2 + \frac{1}{4} (\bar{v}_{i-1} - \bar{v}_{i+1})^2 \\ \beta_2 &= \frac{13}{12} (\bar{v}_{i-2} - 2\bar{v}_{i-1} + \bar{v}_i)^2 + \frac{1}{4} (\bar{v}_{i-2} - 4\bar{v}_{i-1} + \bar{v}_i)^2 \end{aligned} \quad (2.141)$$

Bu denklemin Taylor açılımı sırasıyla,

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{13}{12} (v'' \Delta x^2)^2 + \frac{1}{4} (2v' \Delta x - \frac{2}{3} f''' \Delta x^3)^2 + O(\Delta x^6) \\ \beta_1 &= \frac{13}{12} (v'' \Delta x^2)^2 + \frac{1}{4} (2v' \Delta x + \frac{1}{3} f''' \Delta x^3)^2 + O(\Delta x^6) \\ \beta_2 &= \frac{13}{12} (v'' \Delta x^2)^2 + \frac{1}{4} (2v' \Delta x - \frac{2}{3} f''' \Delta x^3)^2 + O(\Delta x^6) \end{aligned} \quad (2.142)$$

Burada  $f'' = f''(u_i)$ . Eğer  $f' \neq 0$  ise

$$\beta_r = (v' \Delta x)(1 + O(\Delta x^2)), \quad r = 0,1,2 \quad (2.143)$$

Bu ölçümle bulunan ağırlıklar  $k=3$  için (2.132) şartını sağlarlar ve böylece beşinci mertebe doğrulukli ( $k=3$  için) WENO şeması elde edilir.

Üstelik bu ölçüm  $f(u(x))$  in kritik noktalarında da daha hassastır.  $f' = 0$  olduğunda,

$$\beta_r = \frac{13}{12} (v'' \Delta x^2)^2 (1 + O(\Delta x^2)), \quad r = 0,1,2 \quad (2.144)$$

Bu da gösterir ki bu ölçümle bulunan ağırlıklar kritik noktalarda da beşinci mertebe hassastır.

## 2.6 Zaman Ayrıklaştırması

TVD Runge Kutta metodu:

Runge Kutta metotları aşağıdaki gibi yazılan adi diferansiyel denklem (başlangıç değer problemi) sistemlerini çözmek için kullanılır.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad (2.145)$$

$$u_t = L(u) \quad (2.146)$$

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t L(u^n) \quad (2.147)$$

Örneğin

$$u_t = -f(u)_x$$

Verilen bir zaman adımında  $u$  nun  $x$  ile değişimini göz önüne alalım.  $x$  eksenı boyunca herhangi bir noktada  $u$  ve onun türevi  $\frac{\partial u}{\partial x}$  n. zaman adımında bilinmektedir.

Bu denklemin fiziksel çözümünün en önemli özelliği  $x$  ekseninde bütün bölge boyunca integre edilen  $\frac{\partial u}{\partial x}$  zamanla artmaz. Bu integre edilmiş büyüklük toplam değişim (Total variation) olarak adlandırılır ve TV ile gösterilir.

$$TV = \int \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| dx \quad (2.148)$$

Böylece fiziksel açıdan uygun bir çözüm için TV zamanla artmaz. (2.145) denkleminin sayısal çözümünün terimleri cinsinden yazmak gerekirse

$$TV(u) = \sum_i |u_{i+1} - u_i| \quad (2.149)$$

Gerçekten de (2.148) denklemini farklı sayısal çözümün  $x$  deki toplam değişimini ifade eder. Eğer  $TV(u^{n+1})$  ve  $TV(u^n)$  (2.148) denkleminin sırayla  $n+1$ . ve  $n$ . zaman adımımda hesaplanmış değerleri ise

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n)$$

O zaman sayısal algoritma TVD dir denilebilir. (Total Variation Diminishing). Yukarıda bahsedilenlerden eğer sayısal çözüm verilen bir akış alanının fiziksel özelliğini takip ediyorsa o zaman şema TVD şeması olmalıdır.

Şok dalgaları gibi süreksizliğe sahip fiziksel akış alanlarında süreksizlik civarında salınımlar gözlenmez. Diğer taraftan böyle akış alanlarını çözmek için kullanılan bir çok sayısal şema böyle salınımlar gösterirler. Bu salınımlar sayısal kaynaklıdır. Yukarıda söylenenlerin ışığı altında böyle salınım veren şemalar TVD şartını sağlamazlar. Örneğin merkezi fark şeması TVD şeması değildir.

Şimdi yukarıdaki denkleme tekrar dönelim. Bu ifadenin sağlanması için  $\Delta t$ 'ye şöyle bir kısıtlama getirir.

$$\Delta t \leq \Delta t_1$$

Sonra aynı kararlılık sonuçlarının olduğu yüksek mertebeli Runge-Kutta metotları arayalım.  $\Delta t$  üzerinde de şöyle bir kısıtlama olabilir.

$$\Delta t \leq c\Delta t_1$$

Burada  $c$  yüksek mertebeli zaman ayrıklaştırmasında CFL katsayısıdır.

Yukarıda tanımlanan yüksek mertebeli TVD zaman ayrıklaştırması zaman adımımdaki kısıtlama ile yüksek mertebeli zaman ayrıklaştırmasının kararlılığını korur. [19] da (2.146) için genel Runge Kutta metodu şu şekilde verilmiştir.

$$u^{(i)} = \sum_{k=0}^{i-1} (\alpha_{ik} u^{(k)} + \Delta t \beta_{ik} L(u^{(k)})) \quad i = 1, \dots, m \quad (2.150)$$

$$u^{(0)} = u^n, u^{(m)} = u^{n+1}$$

Açıktır ki eğer bütün katsayılar negatif değilse  $\alpha_{ik} \geq 0, \beta_{ik} \geq 0$  o zaman (2.150) denklemin, ileri Euler operatörünün konveks bir kombinasyonudur. Burada  $\Delta t$

,  $\frac{\beta_{ik}}{\alpha_{ik}} \Delta t$  ile değiştirilmiştir ve tutarlı olması için  $\sum_{k=0}^{i-1} \alpha_{ik} = 1$  dir

(2.150) Runge Kutta metodu CFL katsayısının ancak şu şartında TVD dir [19].

$$c = \min_{i,k} \frac{\alpha_{ik}}{\beta_{ik}} \quad (2.151)$$

Referans [19] da CFL katsayısının  $c=1$  olduğu ve bu şarta uyan şemalar şu şekilde bulunmuştur.

Optimal ikinci mertebeden TVD Runge Kutta metodu

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^n + \Delta t L(u^n) \\ u^{n+1} &= \frac{1}{2} u^n + \frac{1}{2} u^{(1)} + \frac{1}{2} \Delta t L(u^{(1)}) \end{aligned} \quad (2.152)$$

Üçüncü mertebeden TVD Runge Kutta metodu,

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^n + \Delta t L(u^n) \\ u^{(2)} &= \frac{3}{4} u^n + \frac{1}{4} u^{(1)} + \frac{1}{4} \Delta t L(u^{(1)}) \\ u^{n+1} &= \frac{1}{3} u^n + \frac{2}{3} u^{(2)} + \frac{2}{3} \Delta t L(u^{(2)}) \end{aligned} \quad (2.153)$$

### 3. UYGULAMALAR

Bu bölümde, bu çalışmada anlatılan şemalara ait uygulamalar yapılacaktır. İlk önce skaler konveksiyon denklemi ele alınacaktır. Bu denklem çözümünde hücre sınırındaki değerler ilk önce Minmod fonksiyonu ile çözülmüştür [10]. Daha sonra sabit hesaplama molekül yaklaşımı ile çözülmüştür. Sonra da ENO ve WENO şemaları ile çözüm yapılmıştır. Akı formulasyonu olarak Lax-Friedrich ve Godunov akıları kullanılmıştır.

İkinci olarak bir boyutlu Euler denklemi için uygulama yapılmıştır. Bu uygulamalarda şok tüpü problemi (Riemann problemi) ele alınmıştır. Şok tüpü problemi iki ayrı örnek problem ile (Sod Problemi, Lax Problemi) incelenmiştir. WENO şeması daha yüksek hassasiyete sahip olduğunda bu problemlerin çözümünde WENO şeması kullanılmıştır. Akı ayrıştırıcı olarak Lax-Friedrich akı ayrıştırıcısı kullanılmıştır.

Son olarak iki boyutlu Euler denklemi için uygulama yapılmıştır. Bu uygulamalardan birincisi “Double Mach Reflection” problemi, diğeri ise şok-girdap etkileşim problemidir. Bu örnek problemlerin çözümünde yine yüksek hassasiyetli olmasından dolayı WENO şeması kullanılmıştır. Yine akı ayrıştırıcı olarak Lax-Friedrich akı ayrıştırıcısı kullanılmıştır.

Sonuçlar aşağıdaki gibi bulunmuştur.

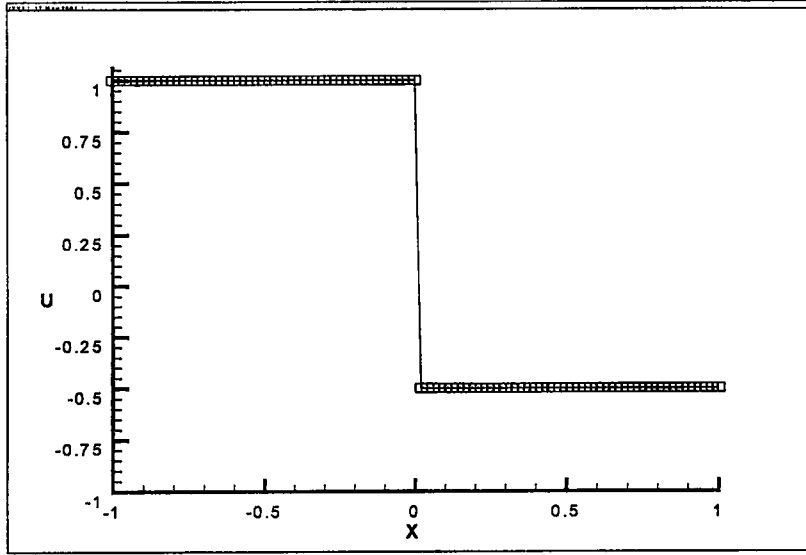
#### 3.1 Skaler Konveksiyon Denklemi (Burger Denklemi)

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0 \quad (3.1)$$

Başlangıç şartı Riemann başlangıç şartıdır

$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ -0.5 & x > 0 \end{cases}$$

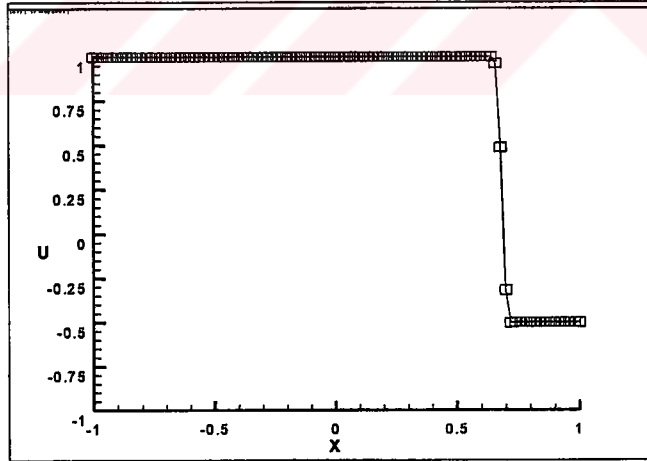
Bu problemde ağımız üniformdur ve bir boyutta 102 noktadan oluşmaktadır.



Şekil 3.1  $t=0$  da başlangıç hali

zaman adımı ise  $\Delta t = \frac{\Delta x}{2 \max_j |u_j^n|}$  formülünden hesaplanmaktadır. Zamanda 30 adım gitmektedir.

Akı hesabı hem Godunov hem de Lax-Friedrich akısı kullanılarak hesaplanmaktadır.



Şekil 3.2 Minmod yaklaşımı ,Lax- Friedrich akısı

Hücre sınır değerlerinin hesabında ise sırasıyla

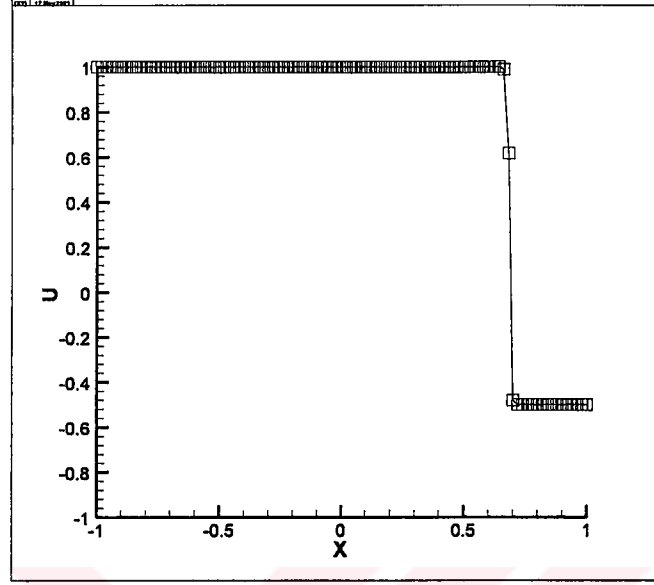
- Minmod
- ENO
- WENO

kullanılmıştır.

Bu problem ayrıca sabit hesaplama molekül yaklaşımı ile çözülmüştür.

Şekil 3.2 de hücre sınırındaki değerler minmod fonksiyonu ile hesaplanmıştır.

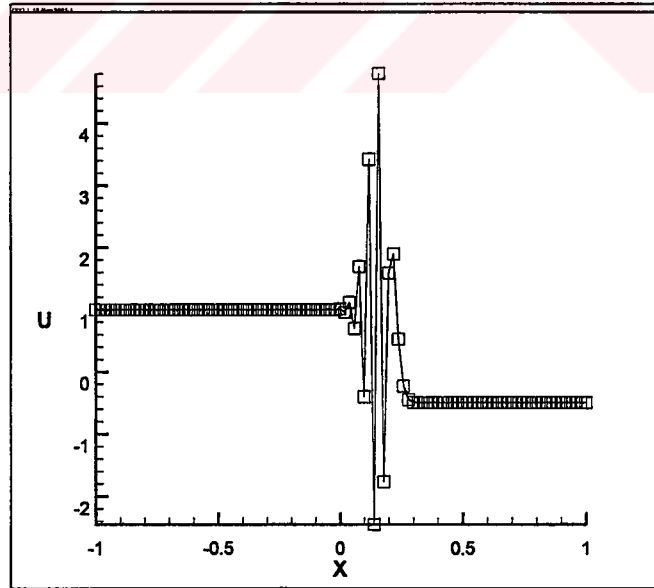
Akı hesabında ise Lax Frierich akısı kullanılmıştır.



Şekil 3.3 Minmod yaklaşımı, Godunov akısı

Şekil 3.3 de hücre sınırındaki değerler minmod fonksiyonu ile hesaplanmıştır.

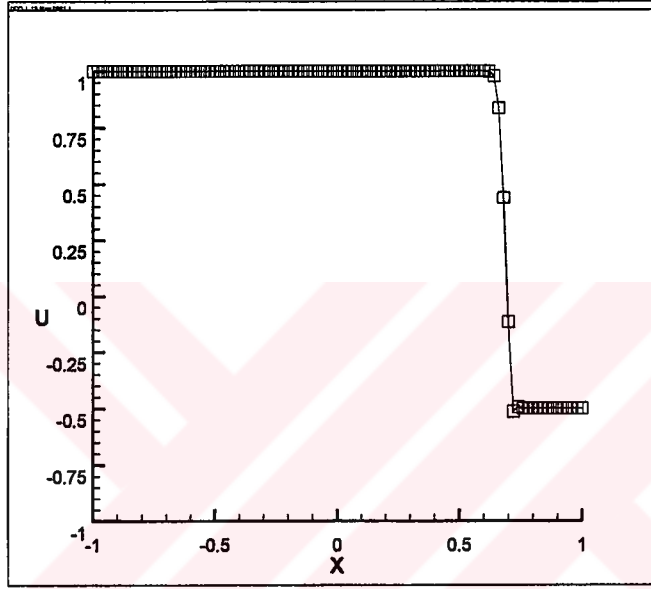
Akı olarak Godunov akısı kullanılmıştır.



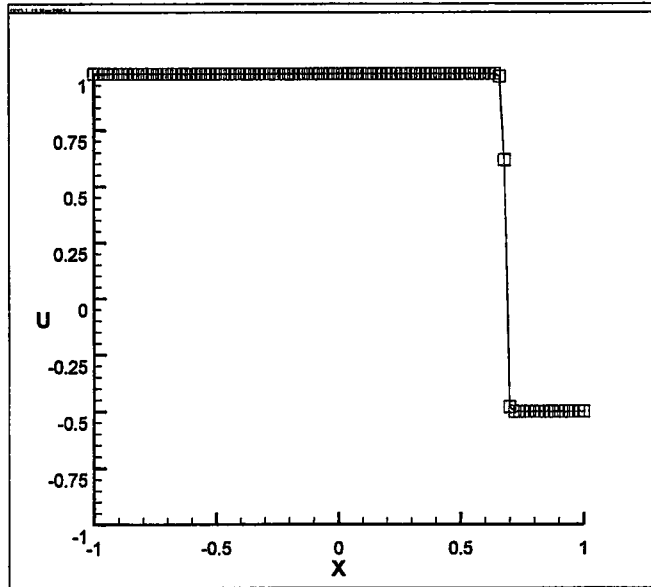
Şekil 3.4 Sabit hesaplama molekül yaklaşımı

Şekil 3.4 de hücre sınırındaki değerler sabit hesaplama molekül yaklaşımı ile bulunmuştur. Bu yaklaşımda 3 nokta kullanılmıştır. Sabit hesaplama molekülün en sol noktası i noktası alınmıştır. ( $r=0$ ). Sabit  $c_{ij}$  katsayıları buna göre bulunmuştur.

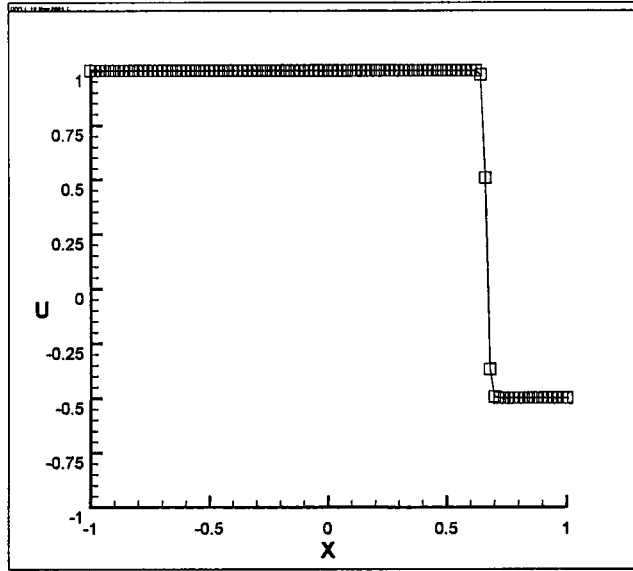
Şekil 3.5 ve Şekil 3.6 da ENO prosedürü ile hesaplama moleküllerdeki bölünmemiş farklar karşılaştırılarak adaptif hesaplama molekülü yapılmıştır. Bu şekillerde sırayla akı olarak Lax-friedrich akı ve Godunov akı formülasyonu kullanılmıştır.



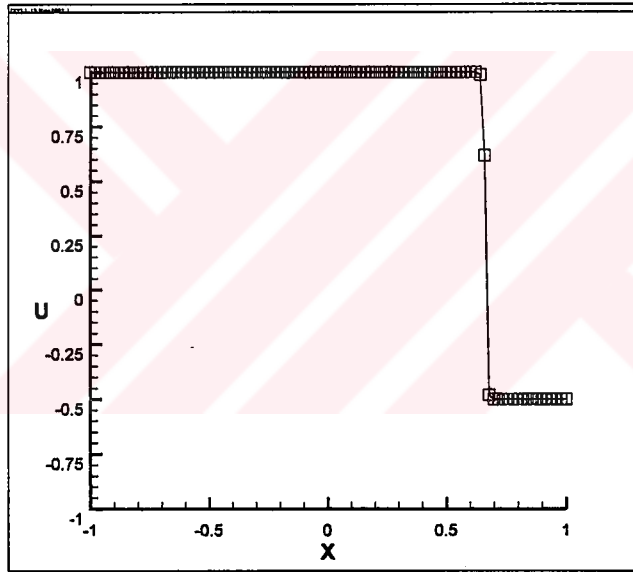
Şekil 3.5 ENO ,Lax-Friedrich akısı



Şekil 3.6 ENO, Godunov akısı



Şekil 3.7 WENO, Lax-Friedrich akısı



Şekil 3.8 WENO, Godunov akısı

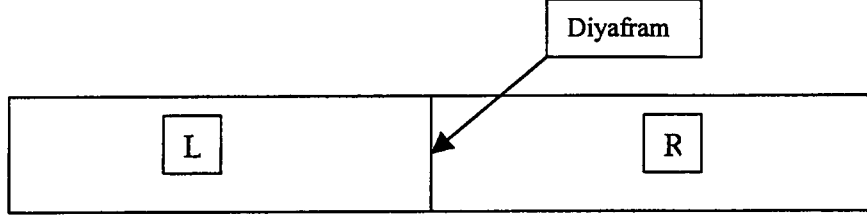
Son olarak ta hücre sınırındaki değerler WENO prosedürü ile bulunmuştur. Yine akı hesabında sırasıyla Lax-Friedrich ve Godunov akı formülleri kullanılmıştır. Bunlarla bulunan sonuçlar ise Şekil 3.7 ve 3.8 de sunulmuştur.

### 3.2 Şok Tüpü Problemi veya Rieman Problemi

Ele alınan denklem bir boyutlu Euler denklemdir.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad (3.2)$$

Şok tüpü problemi şok dalgaları ve süreksizlikler içerdiğinden iyi bir test problemidir. Bu problem Riemann problemi olarak da adlandırılır. Uzun ve bir boyutlu bir şok tüpünde, farklı basınç ve yoğunluktaki iki farklı başlangıç hali bir diyafram tarafından birbirinden ayrılır. Bu diyaframın kırılması ile şok tüpü problemi deneysel olarak oluşturulur.



Şekil 3.9 Şok tüpünün şematik gösterimi

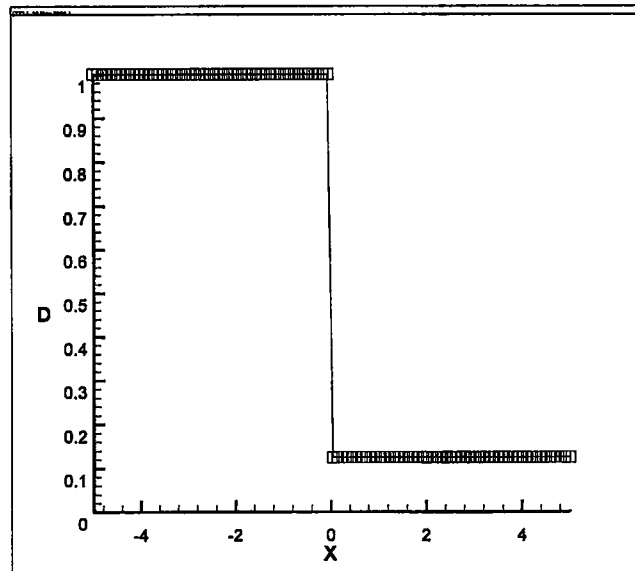
WENO şeması ENO şemasından daha hassasiyetli olduğundan bu ve bundan sonraki problemler sadece WENO şeması ile çözülmüştür

· Şok tüpü problemi için iki standart test hali vardır

### 3.2.1 Sod Problemi

Başlangıç şartı şu şekilde verilmiştir:

$$\begin{aligned} (\rho_L, q_L, P_L) &= (1, 0, 1) \\ (\rho_R, q_R, P_R) &= (0.125, 0, 0.1) \end{aligned} \quad (3.3)$$

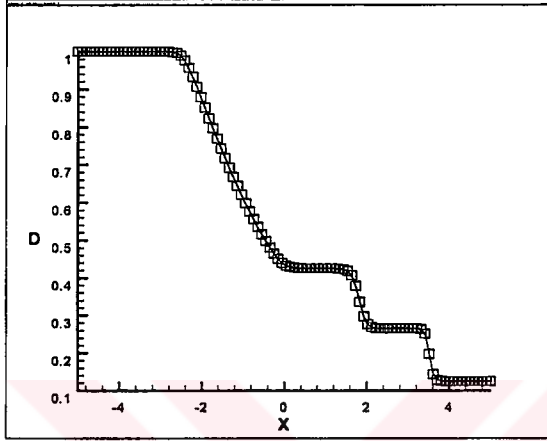


Şekil 3.10 t=0 da şok tüpü (yoğunluk dağılımı)

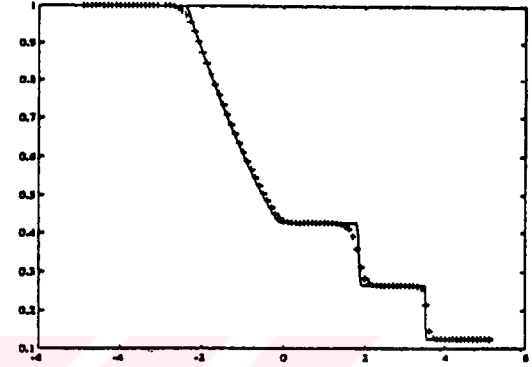
Sınır şartı:

Şok tüpü yeterince uzun kabul edilmiştir. Sınırdaki değerler başlangıçtaki değere eşit alınmıştır.

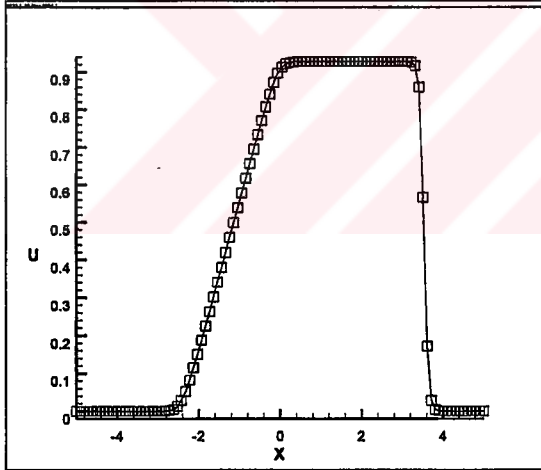
Bu problemde  $x$  boyunca 101 grid noktası kullanılmıştır. CFL katsayısı 0.6 alınmıştır.  $t=1.3$  de şu sonuçlar bulunmuştur.



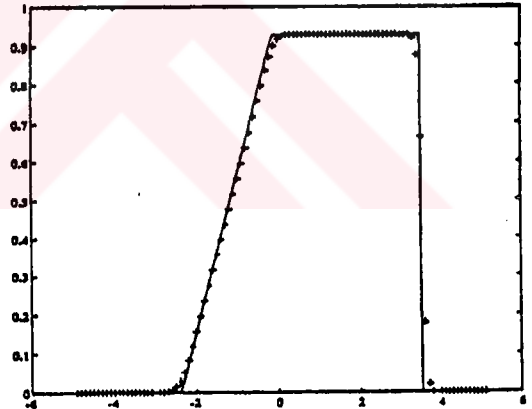
Şekil 3.11 WENO,  $t=1.3$ , Yoğunluk



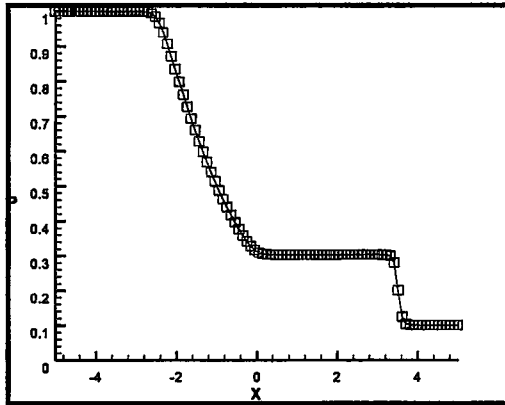
Şekil 3.12 Ref[8]'de bulunan sonuç ve gerçek çözüm



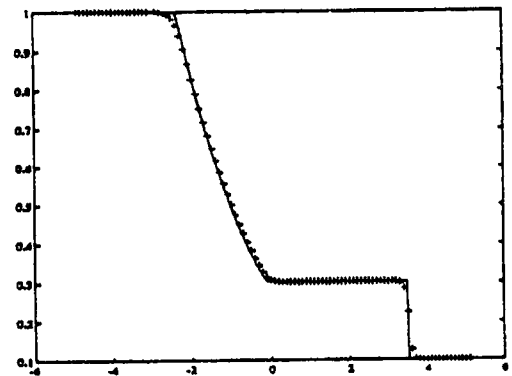
Şekil 3.13 WENO,  $t=1.3$ , Hız



Şekil 3.14 Ref[8]'de bulunan sonuç ve gerçek çözüm



Şekil 3.15 WENO,  $t=1.3$ , Basınç

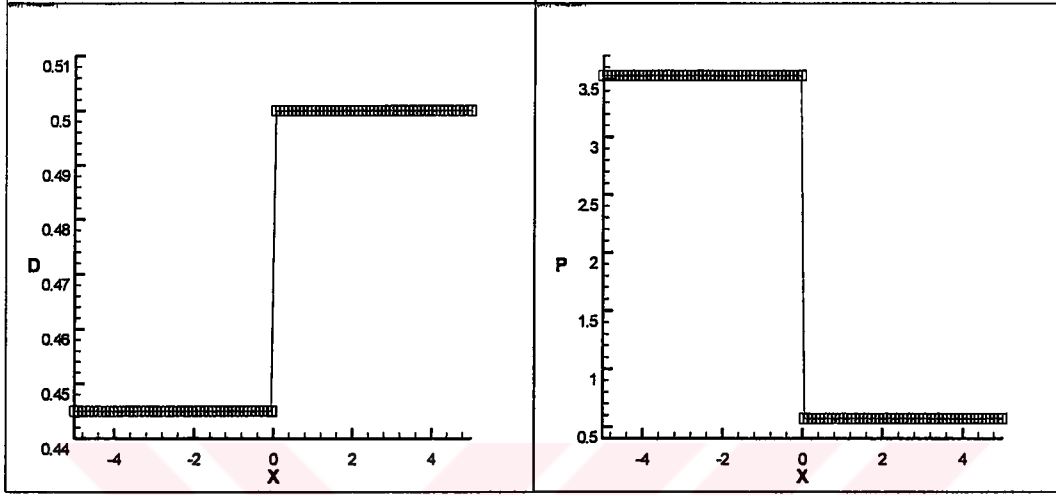


Şekil 3.16 Ref[8]'de bulunan sonuç ve gerçek çözüm

### 3.2.2 Lax Problemi

Başlangıç şartı şu şekilde verilmiştir

$$\begin{aligned} (\rho_L, q_L, P_L) &= (0.445, 0.689, 3.528) \\ (\rho_R, q_R, P_R) &= (0.5, 0, 0.571) \end{aligned} \quad (3.4)$$



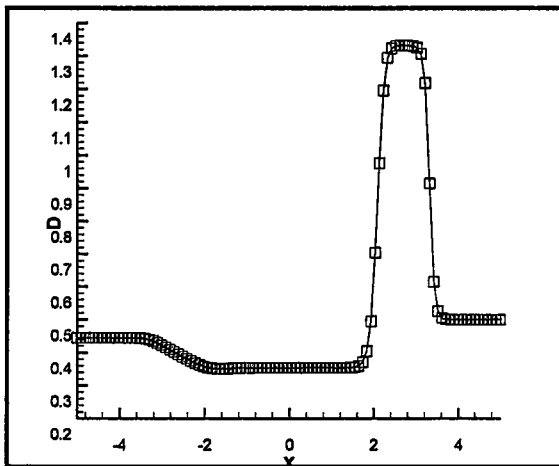
Şekil 3.17 t=0, Yoğunluk

Şekil 3.18 t=0, Basınç

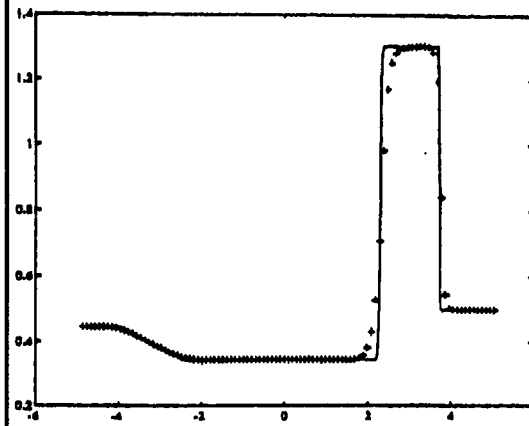
Sınır şartı:

Şok tüpü yeterince uzun kabul edilmiştir. Sınırdaki değerler başlangıçtaki değere eşit alınmıştır.

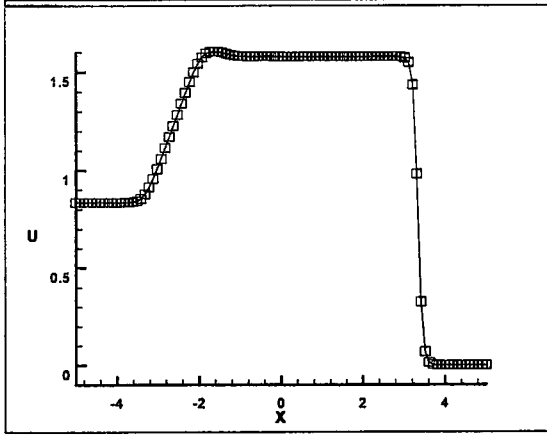
Bu problemde x boyunca 101 grid noktası kullanılmıştır. CFL katsayısı 0.6 alınmıştır. t=1.3 de şu sonuçlar bulunmuştur.



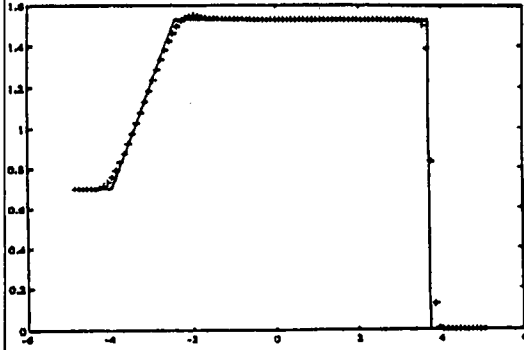
Şekil 3.19 WENO, t=1.3, Yoğunluk



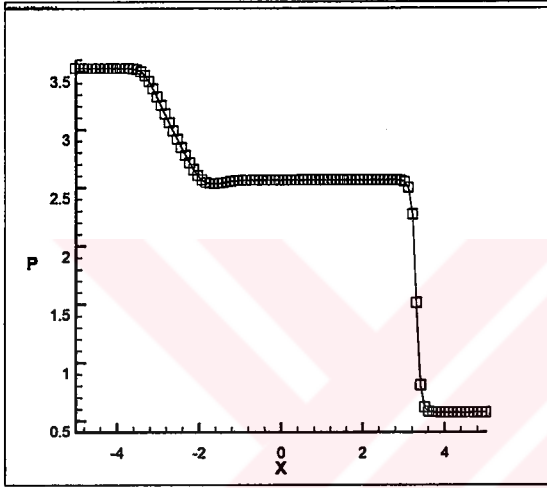
Şekil 3.20 Ref[8]'de bulunan sonuç ve gerçek çözüm



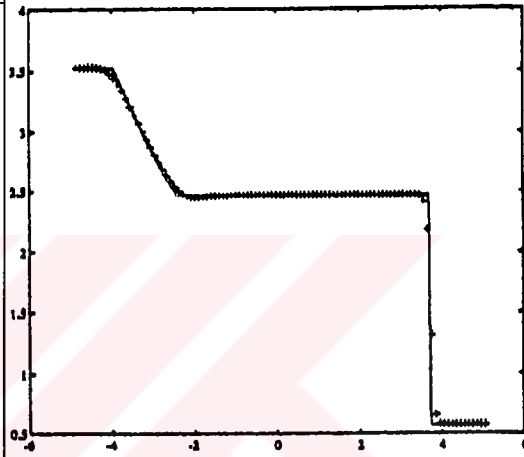
Şekil 3.21 WENO, t=1.3 , Hız



Şekil 3.22 Ref[8]'de bulunan sonuç ve gerçek çözüm



Şekil 3.23 WENO, t=1.3 , Basınç



Şekil 3.24 Ref[8]'de bulunan sonuç ve gerçek çözüm

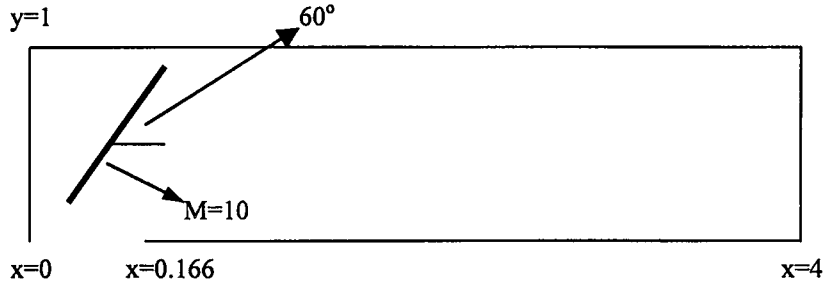
### 3.3 İki Boyutlu Euler Denklemleri

Ele alınan denklem iki boyutta Euler denklemleridir.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} + \frac{\partial g(u)}{\partial y} = 0 \quad (3.5)$$

#### 3.3.2 Double Mach Reflection

Bu test problemi, hava içerisinde yayılan normal şokların kamalardan yansımalarını inceler. Bu problem deneysel olarak bir kama içeren şok tüpünde şokun ilerlemesi ile oluşturulur. Başlangıçta basit düz şok, tüpün duvarı (kama) ile sağ açılı olarak karşılaşır. Fakat bu duvar bir eğim yapmaya başladığında komplike şok yansımaları oluşur. Bu noktadan sonra oluşan akış gelen şokun Mach sayısına ve kamaya geliş açısına bağlıdır. Bu çalışmada problem , duvarla 60° açı yapan ve havada ( $\gamma=1.4$ ) Mach 10 ile ilerleyen bir şok içerir.



Şekil 3.25 problemin şematik gösterimi

Başlangıç şartı:

Başlangıçta şok  $60^\circ$  'lik bir açı ile kamaya gelmektedir. Şok  $y=0$  dan  $y=1$  e kadar yatayla  $60^\circ$  açı yapmaktadır. Şokun önündeki bozulmamış hava durağandır. Bozulmamış havanın basıncı ve yoğunluğu sırasıyla;  $p=1$  ,  $\rho=1.4$ . Şokun gerisinde kalan kısımdaki basınç,yoğunluk ve hızlar Mach 10 için normal şok bağıntılarından hesaplanır.

Sınır şartları:

Sol taraftaki sınır şartı başlangıçtaki şok sonrası akım özellikleridir. Bu sınırdaki akım özellikleri normal  $M=10$  için normal şok tablolarından bulunur.

Sağ taraftaki sınır şartı bütün gradyenler sıfır olacak şekildedir.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

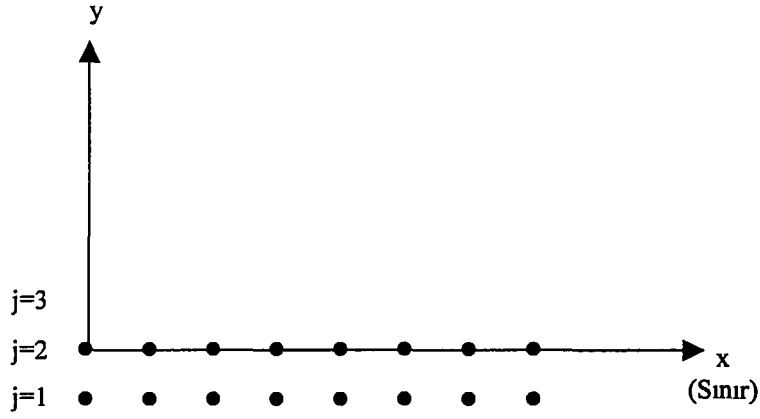
$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E_t \end{bmatrix}$$

Bölgenin üst kısmında sınır şartı şokun Mach 10 hızı ile hareket etmesidir. Şok zamanla mach hızı ile ilerler ve şokun önünde başlangıçtaki akım özellikleri mevcutken şokun gerisindeki akım özellikler ise  $M=10$  için normal şok tablolarından bulunur.

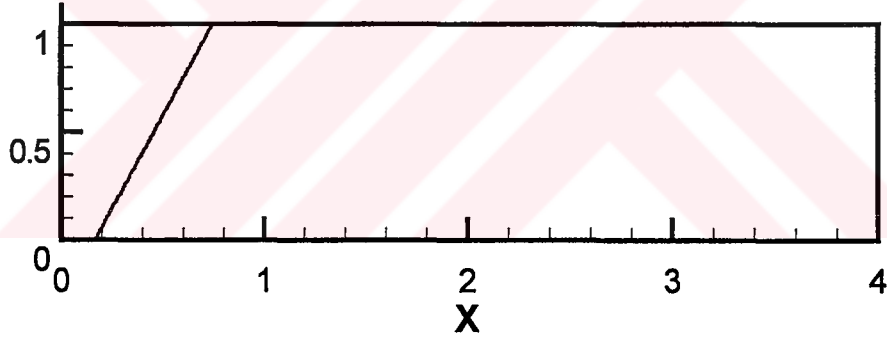
Bölgenin alt kısmında  $0 \leq x \leq 0.16$  olan bölümde başlangıç şartı şok sonrası akım özellikleridir.  $0.1 < x \leq 4$  olan kısımda ise yansıma sınır şartı vardır.

Yansıma sınır şartı şu şekildedir:

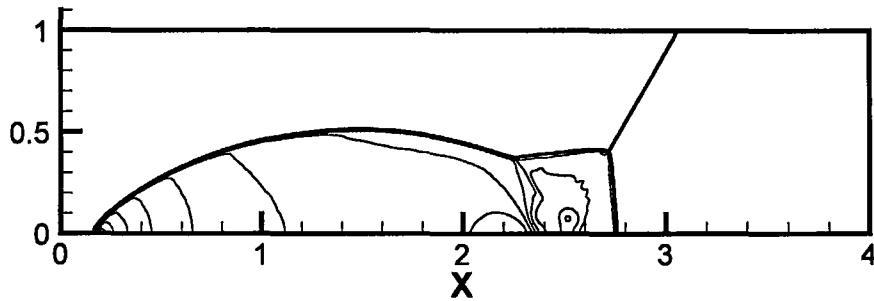
$j=1$  deki basınç, yoğunluk ve teğetsel hız  $j=3$  deki noktalara eşit alınır. Normal hız ise  $j=3$  deki hızın negatifi olarak alınır.  $j=2$  de ise yine aynı şekilde  $j=3$  deki değerler kullanılabilir. Fakat burada normal hız sıfırdır [18].



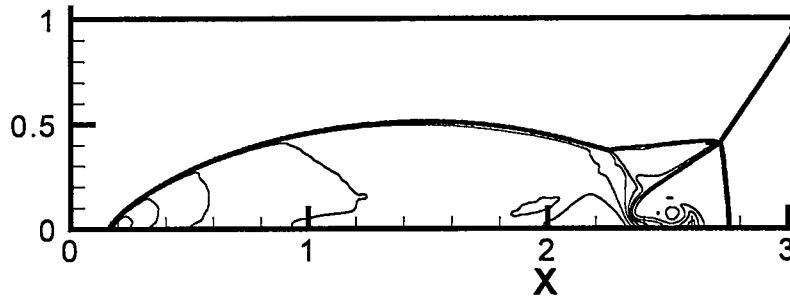
Problemin çözümünde 480X120 ağ kullanılmıştır.  $t=0.2$  zamanındaki sonuçlar verilmiştir.



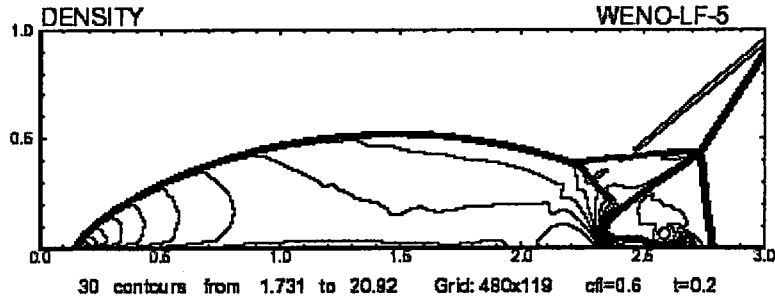
Şekil 3.26  $t=0$  da problemin başlangıç hali



Şekil 3.27  $t=0.2$  Basınç dağılımı



Şekil 3.28  $t=0.2$  de Yoğunluk Dağılımı



Şekil 3.29 Referans [10]'da bulunan sonuç.

### 3.2.2 İki Boyutlu Şok - Girdap Etkileşimi

Problem durağan bir şok ile girdabın etkileşimini inceler. Hesaplama bölgesi  $[0,1] \times [0,1]$  olarak alınmıştır.

Başlangıç Şartları:

$x=0.5$  noktasında durağan bir şok ( $M = 1.1$ )  $x$  eksenine normal doğrultuda yerleştirilmiştir. Şokun sol tarafındaki değerler şunlardır:

$$(\rho, u, v, P) = (1, \sqrt{\gamma}, 0, 1) \quad (3.6)$$

Sağ tarafındaki değerler ise  $M=1.1$  için normal şok tablosundan hesaplanır.

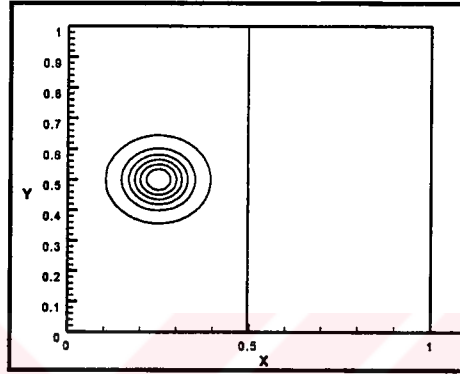
Yine şokun sol tarafında  $(x_c, y_c) = (0.25, 0.5)$  noktasına küçük bir girdap yerleştirilmiştir. Bu girdabın akış alanına etkisini şu şekilde formüle edilir.

$$\begin{aligned} \Delta u &= \epsilon e^{\alpha(1-r^2)} \sin \theta \\ \Delta v &= -\epsilon e^{\alpha(1-r^2)} \cos \theta \\ \Delta T &= -\frac{(\gamma-1)\epsilon^2 e^{2\alpha(1-r^2)}}{4\alpha\gamma} \\ \Delta S &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

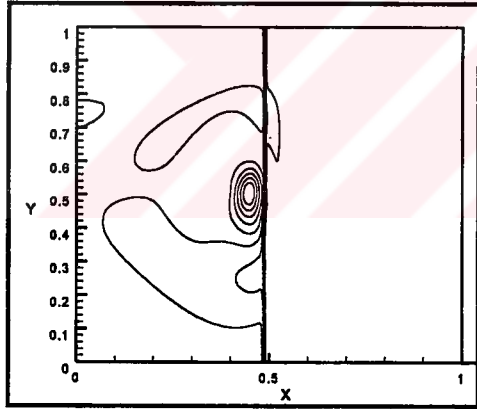
Burada  $\tau = \frac{r}{r_c}$  ,  $r = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}$  ,  $\epsilon$  girdabın şiddetini belirtir,  $\alpha$  girdabın azalma oranını kontrol eder.  $r_c$  ise girdabın maksimum şiddetinin olduğu kritik yarıçaptır. Bu problemde  $\epsilon = 0.3$  ,  $r_c = 0.05$  ,  $\alpha = 0.204$  olarak seçilmiştir.

Sınır şartı olarak bölgenin dört sınırında da periyodiklik sınır şartı vardır.

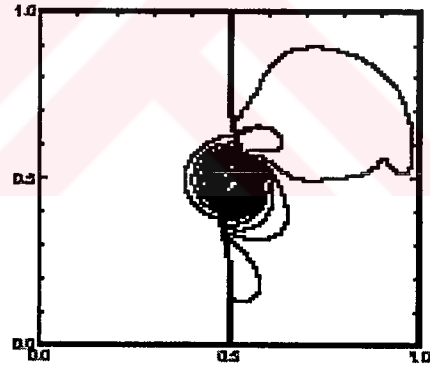
Ağımız 111X100 noktadan oluşmaktadır. Ağ y ekseninde üniformdur ancak x eksenin şok civarında sıklaştırma yapılmıştır.



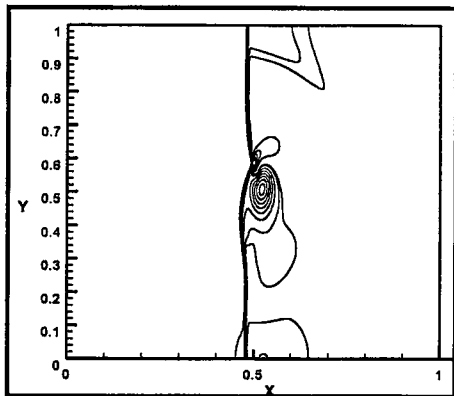
Şekil 3.30 t=0 da problemin başlangıç



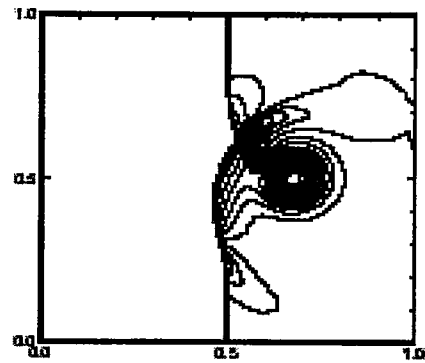
Şekil 3.31 t=0.2 de Basınç Dağılımı



Şekil 3.32 Ref[10]'daki sonuç



Şekil 3.33 t=0.35 de Basınç Dağılımı



Şekil 3.34 Ref[10]'daki sonuç

#### 4. SONUÇ ve DEĞERLENDİRME

Yüksek doğruluklu ENO ve WENO şemaları son yıllarda sonlu fark ve sonlu hacim yöntemleri ile kullanılmak üzere gerek yapısal gerekse yapısal olmayan ağlarla kullanım için geliştirilmişlerdir. WENO şemaları ENO şemaları üzerine dayanır. Gerek ENO gerekse WENO şemaları gerek akış çözümünün süreksizlikler içermediği bölgelerde gerekse akışın süreksizlik içeren bölümlerinde yüksek doğruluk ile çözüm sağlamak üzere yüksek dereceden polinom oluşturulmasına dayanır.

Bu çalışmada da dünyada oluşan bu eğilim doğrultusunda ENO ve WENO şemaları kullanılarak yüksek doğruluk ile 1 ve 2 boyutlu süreksizlik içeren taşınım problemleri ele alınmıştır. Gerek skaler Burger denklemini gerekse 1 ve 2 boyutlu Euler denklemlerini sonlu hacim ve ENO-WENO şemaları ile çözmek üzere bilgisayar programları geliştirilmiştir.

Öncelikle skaler konveksiyon denklemi Minmod şeması kullanılarak çözülmüştür. Daha sonra skaler denkleme ENO ve WENO şemaları uygulanmıştır. Akı formülasyonu olarak Lax-Friedrich ve Godunov akıları denenmiş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır. Skaler denklem için ENO-WENO şemalarının aynı sonucu verdiği gözlenmiştir. İkinci olarak WENO şeması ile Lax-Friedrich akı ayrıştırıcıları kullanarak 1 Boyutlu Euler denklemi incelenmiştir. Şok tüpü problemi (Riemann problemi) örnek problem olarak ele alınmış; bu problemin iki değişik hali (Lax problemi ve Sod problemi) çözülmüştür. Hız, basınç ve yoğunluk olarak sonuçlar elde edilmiştir. Bulunan sonuçlarla, problemin (Riemann problemi) gerçek çözümü ile karşılaştırılmış ve gerçek çözüme çok yakın sonuçların bulunduğu görülmüştür.

Son olarak yine 5. mertebe WENO ve Lax-Friedrich akı ayrıştırıcı kullanarak 2 boyutlu Euler denklemi ele alınmıştır. Daha karmaşık problemler, “Double Mach Reflection” ve şok girdap etkileşimi örnek problemleri, için çözüm aranmıştır. Sonuçlar basınç ve yoğunluk olarak bulunmuştur. Elde edilen sonuçlarla Ref[10]’da bulunan sonuçlar karşılaştırılmıştır, aynı sonuçların bulunduğu gözlenmiştir.

Bu çalışmada ele alınan akış alanları, kolaylık olması için, kartezyen koordinat sistemine dayalı dörtgen bölgelerden seçilmiştir. Bundan sonraki çalışmalar için programın eğrisel sınırlara sahip yapısal olmayan sayısal ağları da inceleyecek şekilde geliştirilmesi gerekmektedir.



## KAYNAKLAR

- [1] Godunov, S. K., "A Finite-Difference Method for the Numerical Computation of Discontinuous Solutions of the Equations of Fluid Dynamics," *Mathematicheskii Sbornik*, Vol. 47, No. 3, 1959, pp.271-290.
- [2] Van Leer, B., "Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme V. A Second Order Sequel to Godunov's Method," *Journal of Computational Physics*, Vol. 32, No. 1, 1979, pp. 101-136
- [3] Harten, A., "High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws," *Journal of Computational Physics*, Vol. 49, No. 3, 1983, pp. 357-393
- [4] Harten, A., and Osher S., "Uniformly High-Order Accurate Non-Oscillatory Schemes, " IMRC Technical Summary Rept. 2823, Univ. of Wisconsin, Medison, WI, May 1985.
- [5] Harten, A., Engquist, B., Osher S., and Chakravarthy S., "Uniformly High-Order Accurate Essentially Non-Oscillatory Schemes, III " *Journal of Computational Physics*, Vol. 71, No. 2, 1987, pp. 231-323
- [6] Casper, J., and Atkins H., "A Finite-Volume High-Order ENO Schemes for Two Dimensional Hyperbolic Systems." *Journal of Computational Physics*, Vol. 106, 1993, pp. 62-76
- [7] Shu, C., and Osher S., "Efficient Implementation of Essentially Non-Oscillatory Shock-Capturing Schemes." *Journal of Computational Physics*, Vol. 77, No. 2, 1988, pp. 439-471.
- [8] Liu, X. D., Osher S., and Chan T., "Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes." *Journal of Computational Physics*, Vol. 115, 1994, pp. 200-212.
- [9] Jiang, G., and Shu, C., "Efficient Implementation of Essentially Non-Oscillatory Schemes." *Journal of Computational Physics*, Vol. 126, 1996, pp. 202-228

- [10] **Shu, C.**, “Essentially Non-Oscillatory Schemes and Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes for Hyperbolic Conservation Laws,” *ICASE Rept.*, No. 97-65, November 1997.
- [11] **Roe, P. L.**, “ Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes,” *Journal of Computational Physics*, **Vol. 43**, No. 2, 1981, pp. 357-372.
- [12] **Shu, C.**, “Numerical Experiments on the Accuracy of ENO and Modified ENO Schemes,” *Journal of Scientific Computing*, **Vol. 9**, 1990, pp. 127-149.
- [13] **Woodward, P., and Colella P.**, “Numerical Simulation of Two-Dimensional Flow With Strong Shocks,” *Journal of Computational Physics*, **Vol. 54**, 1984, pp. 115-173.
- [14] **Anderson, John D., Jr.**, *Modern Compressible Flow with historical perspective*, 2<sup>nd</sup> ed., McGraw-Hill, Singapore, 1990.
- [15] **Hirsh, C.**, *Numerical Computation of Internal and External Flows*, Vol. 1,2, John Wiley & Sons Inc.,1977.
- [16] **Hoffman, K.A.**, *Computational Fluid Dynamics for Engineers*, A Publication of Engineering Education Systems, Austin, Texas, USA.
- [17] **Anderson, John D., Jr.**, *Computational Fluid Dynamics*, McGraw-Hill, Singapore, 1995.
- [18] **Anderson D. A., Tannehill C.J., and Pletcher H. R.**, *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1984.
- [19] **Shu, C.**, “Total Variation-Diminishing Time Discretizations,” *SIAM Journal of Scientific and Statistical Computing*, **Vol. 9**, 1988, pp. 1073-1084.

## ÖZGEÇMİŞ

Mehti Köklü 20.05.1976 tarihinde Kahramanmaraş'ta doğdu. 1988 yılında K.Maraş Şehit Yusuf Çavuş ilkokulundan mezun oldu. 1992 yılında Orta okulunu K.Maraş Anadolu Lisesi'nde tamamlayarak aynı yıl Gaziantep Fen Lisesi'ni kazandı. 1995 yılında Gaziantep Fen Lisesi'nden mezun oldu. 1995 yılında İTÜ Uçak ve Uzay Bilimleri Fakültesi, Uçak Mühendisliği Bölümünü kazandı. 1999 yılında bu bölümden mezun oldu ve aynı yıl İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Uçak Mühendisliği Anabilim Dalı, Uçak Mühendisliği Programı'nda yüksek lisans öğrenimine başladı. 1999 yılı Ekim ayından beri İstanbul Teknik Üniversitesi, Uçak ve Uzay Bilimleri Fakültesi, Uzay Bilimleri ve Teknolojisi Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.