

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
KURULU KARARI
T.C. YÜKSEKÖĞRETİM
BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MANTIK SİSTEMLERİ VE BULANIK
LİNEER PROGRAMILAMA İLE ULAŞTIRMA
PROBLEMİNİN OPTİMİZASYONU**

~~142815~~

142975

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Uğur ŞAHİN
(509991414)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 24 Aralık 2002
Tezin Savunulduğu Tarih : 14 Ocak 2003**

Tez Danışmanı : Prof.Dr. Mehmet CAN

Diğer Jüri Üyeleri Prof.Dr. Şafak URAL (İ.Ü.)

Doç. Dr. Emanullah HİZEL (İ.T.Ü.)

OCAK 2003

ÖNSÖZ

Bu çalışmaya zemin hazırlayacak fikri sağlamasından ve ayrıca çalışmanın yönü hususunda yaptığı katkılardan dolayı hocam Prof. Dr Mehmet Can Bey'e ve çalışmam sırasında yararlandığım kaynakları hazırlayanlara bu emeklerinden ötürü teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, bugüne kadar fedakarlıklarını hiç bir şekilde esirgemeyen aileme de teşekkür ederim.

OCAK 2003

Uğur ŞAHİN



İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ	v
ŞEKİL LİSTESİ	vi
ÖZET	viii
SUMMARY	ix
BÖLÜM 1 MANTIK	1
1.1 Mantık Nedir?	1
1.2 Mantığın Bilimler Arasındaki Yeri	3
1.3 Akıl Yürütme Çeşitleri Ve Aklın İlkeleri	4
1.4 Mantık Sistemleri	9
1.5 Mantık Felsefesi	10
1.6 Kısa Bir Mantık Tarihi	15
BÖLÜM 2 KLASİK MANTIK	22
2.1 Çıkarım Çeşitleri	22
2.1.1 Doğrudan çıkarım türleri	22
2.2 Kıyas (Syllogisme)	26
2.2.1 Kıyasın tanımı	26
2.2.2 Kıyas çeşitleri	27
BÖLÜM 3 SEMBOLİK MANTIK	41
3.1 Aristo'dan 19. Yüzyıla Kadar	41
3.2 Lojistiğe Geçiş	41
3.3 Eklemler	43
3.4 Doğruluk Fonksiyonu Mantığı	44
3.4.1 Doğruluk tabloları	45
3.4.2 Doğruluk tablosu yardımıyla doğruluk analizi	47
3.4.3 Doğruluk fonksiyonu mantığında denetleme	48
3.4.3.1 Doğruluk tablosu ile denetleme	49
3.4.3.2 Çözümleyici çizelge ile denetleme	50
3.5 Niceleme Mantığı	56
3.5.1 Niceleme mantığına ait temel tanımlar	56
3.5.2 Nicelenmiş önermelerin yorumlanması	59
3.5.3 Nicelenmiş önerme ve çıkarımların denetlenmesi	60
BÖLÜM 4 ÇOK DEĞERLİ MANTIK SİSTEMLERİ	64
4.1. Üç Değerli Mantık Sistemleri	65
4.1.1. Lukasiewicz'in üç değerli mantığı	66
4.1.2. Bochvar'ın üç değerli mantık sistemi	68

4.1.3. Kleen'in üç değerli mantık sistemi	69
4.2. Lukasiewicz'in N değerli ve sonsuz değerli mantık sistemleri	71
4.3. Çok değerli mantığın uygulama alanları ve semantik yorumları	73
BÖLÜM 5 BULANIK MANTIK VE BULANIK KÜME TEORİSİ	74
5.1 Belirsizlik ve Bilgi	74
5.1.1 Dil, belirsizlik ve bulanık mantık yaklaşımı	75
5.1.2 Bulanık mantığın tarihçesi ve uygulama alanları	76
5.1.3 Bulanık mantığın avantajları	78
5.2 Bulanık Kümeler	79
5.2.1 Bulanık kümelerin özellikleri	84
5.2.2 Bulanık kümeler üzerinde işlemler	88
5.2.3 α -Kesimi ve genişleme prensibi	93
5.2.3.1 Bulanık kümelerin α -kesimi ile Temsili	93
5.2.3.2 Genişleme prensibi	96
5.2.4 Bulanıklaştırma veya üyelik forksiyonunun inşası	97
5.2.5 Durulaştırma	99
5.3 Bulanık Sayılar	104
5.3.1 Gerçel sayı aralıkları üstünde aritmetik işlemler	106
5.3.2 Bulanık sayılarla aritmetik	107
5.3.3 Dilsel değişkenler	110
5.4 Bulanık Bağlıntılar	111
5.4.1 Bağlıntı ve bulanık bağıntı	111
5.4.2 Bulanık bağıntılar arasında işlemler	113
5.4.3 Bulanık bağıntılar arasında birleşme işlemi	115
5.5 Bulanık Mantık	117
5.5.1 Bulanık önermeler	119
5.5.1.1 Şartlı ve nitelenmiş olmayan önermeler	121
5.5.1.2 Şartlı olmayan nitelendirilmiş önermeler	122
5.5.1.3 Şartlı ve nitelendirilmemiş önermeler	124
5.5.1.4 Şartlı ve Nitelendirilmiş Önermeler	125
5.5.1.5 Nicelenmiş Önermeler	125
5.5.2 Dilsel eşikler	130
5.5.3 Bulanık çıkarım	132
5.5.3.1 Şartlı bulanık önermelerle çıkarım	132
5.5.3.2 Nicelenmiş bulanık önermelerle çıkarım	136
BÖLÜM 6 BULANIK DEĞİŞKENLER ALTINDA ULAŞTIRMA	
PROBLEMİNİN OPTİMİZASYONU	140
6.1.Klasik Lineer Programlama	141
6.2.Bulanık Lineer Programlama	143
6.3.Ulaştırma Problemi	147
6.4.Uygulama	148
SONUÇ	154
KAYNAKLAR	161
ÖZGEÇMİŞ	163

TABLO LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 3.1	Değil ekleminin doğruluk tablosu.....	57
Tablo 3.2	Tümel evetleme ekleminin doğruluk tablosu.....	57
Tablo 3.3	Tikel evetleme ekleminin doğruluk tablosu.....	57
Tablo 3.4	Koşullu eklemin doğruluk tablosu.....	58
Tablo 3.5	Karşılıklı koşul ekleminin doğruluk tablosu.....	58
Tablo 3.6	$(p \wedge \sim q) \rightarrow r$ önermesinin doğruluk tablosu.....	59
Tablo 3.8	$p \rightarrow \sim q$, $p \wedge q \therefore p \rightarrow \sim q$ çıkarımının geçerlilik denetlemesi	62
Tablo 4.1	Lukasiewicz'in üç değerli mantığı için doğruluk tablosu.....	79
Tablo 4.2	Bochvar'ın üç değerli mantığı için doğruluk tablosu.....	81
Tablo 4.3	Kleenin'in üç değerli mantığı için doğruluk tablosu.....	82
Tablo 6.1	Merkezlerle firmalar arasındaki birim taşıma maliyeti (TL)	159

ŞEKİL LİSTESİ

		<u>Sayfa No</u>
Şekil 3.1	Tümel evetlemenin çözümleme ilkesi.....	62
Şekil 3.2	Tikel evetlemenin çözümleme ilkesi.....	63
Şekil 3.3	Koşul eklemının çözümleme ilkesi.....	63
Şekil 3.4	Karşılıklı koşul eklemının çözümleme ilkesi.....	64
Şekil 5.1	“3 e yakın gerçel sayılar kümesi” kavramının değişik üyelik fonksiyonları ile gösterimi.....	95
Şekil 5.2	Sıcaklık değişkeninin [0,100] aralığında aldığı alt..... durumların bulanık ve klasik değişkenler yardımıyla gösterilmesi	97
Şekil 5.3	Farklı α değerlerine karşı gelen α -kesim kümeleri.....	99
Şekil 5.4	Bir sabit diskin dönme hızını belirten A bulanık kümesi ve A'nın dayanak, öz ve sınır kümeleri	100
Şekil 5.5	Konveks olmayan normal bulanık A kümesinin üyelik..... fonksiyonu	101
Şekil 5.6	A ve B bulanık kümelerinin a) birleşim , b) kesişim..... c) A tümleyen kümelerinin üyelik fonksiyonla yardımıyla gösterimi	102
Şekil 5.7	Bulanık alt küme kavramının gösterimi ($A \subseteq B$).....	105
Şekil 5.7	a) En büyük üyelik yöntemi yoluyla durulaştırma b) Sentroid metoduyla durulaştırma işlemi.....	112
Şekil 5.8	Ağırlıklı ortalama yöntemiyle durulaştırma işlemi.....	113
Şekil 5.9	En büyük üyeliklerin ortalaması kuralı ile durulaştırma....	113
Şekil 5.10	Toplamların merkezi yöntemiyle durulaştırma işleminin.. gösterimi	114
Şekil 5.11	Üçgen ve yamuk üyelik fonksiyonuna sahip bulanık sayılar	116
Şekil 5.12	A ve B üçgen bulanık sayılarının üyelik fonksiyonları....	119
Şekil 5.13	A ve B bulanık sayılarının toplamı olan A+B bulanık..... sayısının üyelik fonksiyonu	121
Şekil 5.14	A ve B bulanık sayılarının farkı olan A-B bulanık..... sayısının üyelik fonksiyonu	121
Şekil 5.15	“Üretim hızı” dilsel değişkenine karşılık gelen alt..... Terimlerin bulanık sayılarla üyelik fonksiyonlarının oluşturulması	122
Şekil 5.16	a)“Yüksek” yüklemının üyelik fonksiyonu..... b) p önermesinin doğruluk değerinin üyelik fonksiyonu	133
Şekil 5.17	“uzun” ve “çok uzun” dilsel terimlerinin üyelik fonksiyonu	134
Şekil 5.18	Çeşitli doğruluk niteleyicilerinin üyelik fonksiyonlarının gösterimi	135
Şekil 5.19	“Koşma hızı” kavramının “yüksek koşma hızı” durumuna karşı gelen üyelik fonksiyonu	138
Şekil 5.20	“yaklaşık 3” bulanık sayısının üyelik fonksiyonu.....	138
Şekil 5.21	Çıkarımın bileşke kuralının grafik gösterimi.....	144

MANTIK SİSTEMLERİ VE BULANIK LİNEER PROGRAMLAMA METODU İLE ULAŞTIRMA PROBLEMİNİN OPTİMİZASYONU

ÖZET

Mantık tarihinin, bir bakıma aklın ilkeleri üzerine açılan tartışmalardan oluştuğu söylenebilir. Tartışılan başka hususlar da olmasına rağmen aklın ilkeleri ve bu ilkelerin temelleri yapılan tartışmaların başında gelir. Bu tartışmaların sonucudur ki, ortaya bu ilkeleri dışlayan bir çok klasik olmayan mantık sistemi çıkmıştır. Tezin ana konusu, bu çalışmaların ürünleri olan değişik mantık sistemlerinin incelenmesidir. Karşılıklı olarak çıkarım yapıları, geçerlilik denetleme yöntemleri, önerme eklemlerinin kullanılışı ve her bir sistemin doğruluk değeri analizi incelenmiş, aralarındaki farklar ortaya konulmaya çalışılmıştır.

İlk bölüm, mantığın neliği, mantık felsefesi ve mantık tarihinin kısa bir incelemesinden oluşmuştur. Bu bölümde, mantık ilkelerinin temelleri, son yüzyılda ortaya çıkan farklı mantık sistemlerinin ve fizik biliminde ortaya çıkan gelişmelerin oluşturduğu sıkıntılar bağlamında incelenmeye çalışılmıştır.

İkinci bölüm, yakın zamanlara kadar temel mantık olarak kabul edilen Aristo mantığını konu almaktadır. Aristo mantığı bir çıkarımı oluşturan yapıların herbirisini ayrı ayrı ele alır. Bu durum kavramların, önermelerin ve aristo mantığının bel kemiğini oluşturan kıyasın farklı başlıklar altında incelenmesini gerekli kılar.

Aristo mantığının bir devamı niteliğinde görülebilecek olan sembolik mantık geçen yüzyılın başlarında matematikçiler tarafından geleneksel mantığın sembolleştirilmesiyle oluşmuştur. Üçüncü bölümde, sembolik mantığın temelleri, önerme eklemlerinin karşılık geldiği doğruluk tabloları ve çıkarımları denetleme yöntemleri olan doğruluk tabloları ile çözümleyici çizelge yöntemi ele alınmıştır.

Yine geçen yüzyıl içinde mantık ilkeleri üzerine yapılan eleştiriler yeni mantık sistemlerinin doğmasına yol açmıştır. Geleneksel iki değerden farklı doğruluk değeri düşüncesi çok değerli mantığın esasını oluşturur. Böyle bir mantık elde etmek için bu iki değer dışında belirsiz veya nötr gibi doğruluk değerleri alabilen önermelerin olma olasılığını düşünmeliyiz. Tarihsel olarak geleceğe ilişkin önermelerin olma olasılığı, geleneksel olmayan doğruluk değerleri bağlamında önemli bir uyarı sağladı. Üçüncü şikkın olanaksızlığı ilkesini dışlayan üç değerli mantık sistemlerini, daha sonra n değerli ve sonsuz değerli mantık sistemleri takip etmiştir.

Son otuz yıl içerisinde gelişip büyüyen, yapay zeka, bilgisayar bilimleri, kontrol mühendisliği gibi alanlarda bir çok uygulaması olan bulanık küme teorisi ve bulanık mantık beşinci bölümde işlenmiştir. Bu bölümde, bulanık kümeler, bulanık kümeler üzerindeki işlemler, durulaştırma, genişleme prensibi, alfa kesimi, bulanık sayılar, bulanık bağıntılar ve bulanık mantık ele alınmıştır.

Son bölüm ise bulanık küme teorisinin, lineer programlama yöntemi ile birlikte ulaştırma problemine uygulanmasından oluşmaktadır. Klasik lineer programlama yönteminin belirsiz durumlardaki yetersizliğine mukabil, bulanık lineer programlama modeli, belirsizliği ifade etmede kullandığı araçlarla ön plana çıkar. Uygulama kısmında, bir firmanın, belirsiz koşullar altında dağıtacağı malın belirsiz olması durumunda minimum maliyetle ulaştırma işlemini gerçekleştirmesi ele alınmıştır.

Aklın ilkelerinin ispatını isteyenleri, Aristo, analitiğin ve ilkenin ne demek olduğunu bilmemekle suçlar. Eğer bunların bir ispatı olsaydı, ispatlayan şeylerin de bir ispatı olacak ve bu şekilde sonsuza kadar giden bir ispat zinciri olması gerekeceğini, bu ilkelerin bir ispata ihtiyaç duymayacağını söyler. Fakat, mantık ilkeleri nereden gelir, bunların kaynağı nedir? Gerçekten varlığın ve düşünmenin biricik yasaları mıdır? Bu tür sorular aslında günümüz bilim felsefesinde ve bilgi teorisinde de hala tartışılmaya devam edilmektedir.

Çalışmamız sırasında mantık felsefesi ve sonuç başlığı altında, bu soruna olumlu ve olumsuz cevap verilmesi durumunda çıkan sonuçları irdelemeye çalışacağız. Daha sonra tek tek bu soruna cevap üretmeye çalışanların kurdukları mantık sistemlerini inceleme altına alacağız. Amacımız, zihin yapımızın değişen gerçeklikler karşısında alacağı tutumun yönünün hangi ilkeler doğrultusunda belirlenebileceğine, bu ilkelerin Aristo'nun koyduğu ilkelerle sınırlandırıldığında ne gibi durumlarla karşılaşılabilceğine, bu ilkelerin dışında da ilkeler geliştirmenin imkanlarının diğer mantık sistemlerinde mevcut olup olmadığına bir ışık tutmak ve bundan sonra bu konu üzerine yapılabilecek daha ayrıntılı ve kuşatıcı bir çalışmaya bir giriş oluşturmaktır. Yoksa, şu durumda hangi ilkelerin düşüncenin ve varlığın yasalarını oluşturup oluşturmayacağı veya böyle ilkelerin var olup olmadığı sorularına yeni bir cevap üretme gibi bir iddia içerisinde değiliz. Fakat kanaatimiz, zihnin ve dilin bütününe kuşatacak bir mantık sistemi geliştirmenin mümkün olamayacağı yönündedir.

LOGICAL SYSTEMS AND TRANSPORTATION PROBLEM WITH FUZZY LINEAR PROGRAMMING METHOD

SUMMARY

Most logicians tend to consider that the history of logic is the history of discussions about law of thoughts. In spite of the different discussed matters, law of thoughts and foundation of these principles are the center of debates. As a result, many non-classical logic systems excluded some of these principles have been appeared. Main point of this work is to examine these systems. The differences of these systems are revealed with respect to analysis of truth values, interpretation of proposition, argument structure and the methods of validity proof.

Chapter 1 presents definition, a short history and some information about philosophy of logic. In this chapter, foundations of the principles of logic are discussed from the standpoint of depressions in the modern physics and non-classical logic systems.

In the second chapter, Aristotelian logic is introduced. Since it considers the structure of inference parts separately, it is required to develop logic of concepts, propositional logic and syllogism under different titles.

Symbolic logic to be seen as a continuation of traditional logic was developed by mathematicians in the past century. Chapter three expounds standard notations, basics of symbolic logic, truth tables of statement variables and refutation trees for use in determining the validity or invalidity of arguments

The critics in nineteenth and twentieth century caused to arise new logical systems. The very idea of truth-values other than the two orthodox truth values is obviously central to the conception of a many valued logic. To obtain such a logic, we must contemplate the prospect of propositions that are neither definitely true nor definitely false, but have some other truth status such as indeterminate or neuter. Historically, the problem of future contingency provided a prime early impetus to the serious consideration of this prospect of propositions with such an unorthodox truth status. Firstly, three valued systems which eliminate excluded middle law appeared and then many valued logics followed.

Since its inception, 30 years ago the theory of fuzzy sets has advanced in a variety of ways and in many disciplines. Applications of this theory can be found, for example, in artificial intelligence computer science, control engineering, decision theory and logic. Chapter 5 contains some elementary notions of this field such as fuzzy sets, fuzzy arithmetic, fuzzy relation, extension principle, defuzzification and fuzzy logic.

Last chapter is dedicated to the application of fuzzy set theory and fuzzy logic together with linear programming technique on transportation problem. Despite inadequacy of classic linear programming methods in imprecise and uncertain cases, fuzzy linear programming technique come to the fore with its own instruments.

Aristo accuse those asking the proof of laws of thought for being unacquainted with postulate and analytic. If there was a proof for these laws, it would be necessary to prove them and a proof chain would go to infinity in this point of view. Moreover, these principles do not need to be proven. However, where does the principles of logic come, what is their actual roots, do they indeed unique laws of thought and entity? Such kind of questions have still been argued in current philosophy of science and theory of knowledge.

The results under the circumstance in which these questions are answered positively and negatively are considered under the title of the philosophy of logic and the conclusion of this study. Then, the logical systems which are established by those trying to answer these questions are examined. The aim of this thesis to shed light on which principles determine how the structure of mind would take a manner against changing facts, how situations would be encountered with if they were confined with the laws introduced by Aristo, whether the opportunities developing different principles exist in the other logical systems or not and to form an introduction to such an overall and detailed study that it will be done later. Otherwise, we don't claim to give a new answer to the questions regarding whether which principles constitute the laws of thoughts and entity and whether there are such principles. However, The point of our view is that it couldn't be possible to establish a logical system which surrounds the whole mind and language

1. MANTIK

1.1 MANTIK NEDİR?

Mantık kelimesi Arapça bir kelime olup konuşma anlamına gelen “nutk” kelimesinden türemiştir. Bu sözcüğün eski Yunanca’daki karşılığı ise düşünmenin ve konuşmanın bilgisi anlamına gelen “logik” kelimesidir. Logik kelime olarak aynı zamanda “söz, ifade edilen fikir” anlamlarının yanında geniş manası ile insan aklının kendisi hakkındaki bilgisi, varlık ve evrendeki akıl manalarına gelen “Logos’un ilmi” anlamlarını da içerir.

Aristo’dan günümüze kadar mantığı gördüğü işlev bakımından doğru ve düzgün bir biçimde düşünmenin bilgisi olarak tanımlamak yanlış olmaz. Bir düşünme faaliyeti olarak mantığın inceleme alanı, diğer düşünme biçimleri olan algılama, tasarlama, problem çözme, hayal kurma gibi faaliyetlerimizden farklı olan akıl yürütmedir. Akıl yürütmek, var olan bilgi veya bilgileri kullanarak yeni bilgilere ulaşmaktır. Daha doğru bir deyişle bir bilginin doğruluğunu başka şeylere dayanarak, söyleyeceğimiz bu şeyin doğruluğuna delil göstererek ortaya koyma işlemidir. İşte mantık, doğru ve düzgün akıl yürütme formlarını inceleyen ve bunların geçerliliğini denetlemek için yeni yöntemler geliştiren bir bilgi disiplini. Burada yeni elde edilen bilgiye sonuç veya hüküm, sonuca ulaşmak için kullanılan bilgilere öncül, yapılan işleme ise akıl yürütme veya çıkarım denir.

Akıl yürütme işlemlerinde kullanılan bilgiler, bir dil kullanılarak ortaya konulmak durumundadır. Bu bilgiler, dilin gramer dediğimiz kendi kurallarına uygun olarak ortaya konulurlar ve dile ait bir dizi kelimenin anlamlı bir şekilde bir araya getirilmesiyle ifade edilirler. Mantığın konusu kapsamına girmesi için, dil ile ifade edilen herhangi bir cümlemin bir yargı şeklinde olması gerekir. Aristo mantığında doğru veya yanlış diye nitelenebilen bir cümleye yargı veya önerme denir. İşte bu yargı veya önermelerin ne şekilde olduğu, nelerden oluştuğu ve aralarında ki ilişkiler,

mantığın bir alt bölümü olan önermeler mantığının konusudur. Burada bir örnek verelim;

Bütün insanlar ölümlüdür. (1)

Aristo insandır. (2)

O halde, Aristo da ölümlüdür. (3)

Yukarıda verilen (1) ve (2) numaralı cümleler açıkça görüldüğü üzere bir doğruluk veya yanlışlık içermektedirler. Bütün insanların ölümlü olup olmadığının doğruluğu ile Aristo'nun insan olup olmadığı cümlelerinin doğruluğuna karar vermek mantıkçının işi değildir. Öncül dediğimiz bu iki önermenin doğruluğunu belirlemek, bu iki önermeyi ilgilendiren bilim dalının görevidir. Mantıkçı, sadece bu iki önermeyi doğru kabul ettiğimizde, daha başka hangi önermeyi doğru kabul edeceğimizi araştırır.

Mantık, düşünmenin oluşumundan ve düşüncenin içeriğinden bağımsız olarak, düşünceler arasındaki biçimsel akıl yürütme ilişkilerini ele alır, akıl yürütmeleri kendi içlerinde geçerlilik ve geçersizlik yönünden inceler ve geçerli akıl yürütme formlarının bir bilgisine ulaşmaya çalışır[1]. Bir çıkarımın geçerliliğinin incelenmesi sorunu akıl yürütmelerimizin dilsel ifadesi olan argümanların öncüllerinin sonucu zorunlu kılıp kılmadığını belirleme işidir. Her argüman, sonucun doğru olduğu amacını taşır. Fakat bu amacın gerçekleşmesi öncelikle, sonuca dayanak yapılan öncüllerin doğruluğunu, diğer yandan da bu öncüllerin sonucu zorunlu kılmasını gerektirir. Öncüllerin doğru olmadığı fakat öncüllerin sonucu zorunlu kıldığı bir durumda geçerlilikten bahsedilebilirse de, sonucun doğruluğu bu geçerlilikten bağımsız kalır. Elbette yanlış öncüller vasıtasıyla ve geçerli bir çıkarım altında doğru bir sonuca ulaşmak mümkündür, fakat sonucun doğruluğunu ispat işi önermelerden çıkmadığı için, bunu test edecek başka yollar aranmalıdır. Verilen bir argüman geçerli ve öncüller doğruysa, o zaman sonucun doğruluğu da kesindir. Sonucun yanlış olduğu geçerli bir argüman altında ise öncüllerden birisi yanlış demektir. Son olarak verilen bir argümanda sonucun yanlış öncüllerin doğru olduğunu biliyorsak, argüman geçersizdir demektir. Fakat bu tür bir geçerlilik anlayışının sadece iki değerli mantık için, yani önermelerin doğruluk değerlerinin doğru ve yanlıştan oluştuğu bir mantıkta işlevsel olduğu gözden kaçırılmamalıdır. İlerleyen bölümde ayrıntılı olarak göreceğimiz üzere, doğruluk değeri sayısının artmasıyla beraber,

geçerlilik tanımımızın da farklılaştırılması gerektiğini açıklayacağız. Bununla birlikte, iki değerden fazla doğruluk değerine sahip olan herhangi bir mantık sisteminde de, doğru öncüller altında geçerli bir çıkarımın doğru sonucu vereceğinin dışlanmadığını söylemeliyiz.

1.2 MANTIĞIN BİLİMLER ARASINDAKİ YERİ

Mantığı doğru düşünmenin kural ve ilkelerinin bilgisini veren, geçerli akıl yürütmeleri belirlemeye yarayan ölçütleri geliştirmeye çalışan bir disiplin olarak nitelendirdiğimizde onun konusunun çerçevesini çizmiş ve diğer bilgi disiplinlerinden de farkını ortaya koymuş oluruz. Bu nitelendirmeye mantığı, geçerli akıl yürütmelerin biçimlerini yani formlarını araştırmaya, sonra da bu formları bir arada sistematize etmeye çalışan biçimsel bir disiplin olarak görebiliriz. Bu yönüyle mantık, tüm tarih boyunca bilgi elde etmenin aracı olarak görülmüştür. Bu, mantığı kullanarak bütün bilgilere ulaşabileceğimiz anlamına gelmemektedir. Burada anlatılmak istenen tüm düşünme ve bilgi elde etme çabalarında kendisine kaçınılmaz ve zorunlu olarak başvurulması gerektiğidir. Mantık bu yönüyle, bütün bilimlerin imkanını sağlayan ilke, kural ve salt düşünsel ilişkiler alanı olarak, bilgi ve bağlı olarak bilgi disiplinlerinin varoluş koşuludur[1]. Yani, bilgi elde etme işleminde mantık gerekli, fakat yeterli değildir.

Düşünme alanımız ne olursa olsun, belli bir mantığı varsayma zorunluluğundan kurtulamayız. Bütün bilgi disiplinlerinde mantık, bir ön belirleyici olarak görev yapar. Bu şekilde bakıldığında mantığı, bütün bilgi disiplinlerinin üstünde, onları içten aydınlatan ve kalıplayan, onlara varolma imkanı sağlayan bir ışıldak olarak görmek daha uygundur[1,2]. Bütün bilgilerin varoluş şartının bir mantık gerektirdiği kanaati mantığın evrensel olduğu sonucunu akla getirmektedir. Böyle bir mantığın varlığı kabul edilse dahi evrensel mantığı oluşturan ilkelerin Aristo tarafından ortaya atılan ilkelerden mi oluşacağı, yoksa içinde daha başka ve bunlarla tutarlı olmayan ilkeler mi taşıyacağı konusu, mantık tarihi boyunca tartışılan bir husustur. Bu konu mantık felsefesi başlığı altında ele alınacaktır.

Diğer bilgi disiplinlerinin aksine, mantık tamamıyla asal ve bağımsızdır denilebilirse de, mantığı felsefenin bir kolu olarak düşünenler veya matematikle özdeş bir alan

olarak gören çalışmalar da mevcuttur. Matematikle mantık arasında hem konu hem de yöntem bakımından çok yakın bir ilişki vardır. İki disiplin de biçimseldir ve “a priori” yani deney dışında bilinen ilke ve önermelere dayanarak genellemelere gitmeye çalışırlar. Bu yönüyle içerikten yoksun, deneye ve gözleme dayalı olmayan kavram ve genel ifadelerden oluşan biçimsel bir disiplin oluştururlar.

1.3 AKIL YÜRÜTME ÇEŞİTLERİ VE AKLIN İLKELERİ

Mantık geçerli akıl yürütme formlarını araştıran bir alan olduğuna göre, öncelikle aklın nasıl yürüdüğü ve hangi yollardan geçerek geçerliliğe ulaştığı sorusunu sormak icab eder.

Mantıksal geçerliliğin oluşması için gerekli olanın sonucun öncüllerden zorunlu olarak çıkması olduğunu daha önce de söylemiştik. Akıl yürütme türleri arasında bu koşulu sağlayan tek yol dedüktif çıkarımdır. Sonucun zorunlu olarak öncüllerden çıkması isteniyorsa, akli bu yoldan yürütmek gerekir. Dedüksiyon, türkçe tûmdengelimle karşıladığımız bu kavram, geçerli akıl yürütme türlerinin aranacağı tek alandır. Fakat, tüm dedüksiyon türlerinin geçerli olduğu söylenemez. Yani, bütün geçerli çıkarımlar dedüksiyon türünde bir akıl yürütme olmasına karşın, tüm dedüksiyonlar geçerli değildir. Burada kafa karıştırıcı bir yönün bulunduğu görülmektedir. Hem sonucun zorunlu olarak öncüllerden çıktığı akıl yürütme türlerine dedüksiyon demek, hemde geçerli olmayan dedüksiyon türlerinin varolduğunu söylemek mantığın kendi içerisinde bulunmaması gereken bir çelişkidir. Fakat, dedüktif türdeki çıkarımların yapısı incelendiğinde bu çelişkinin ortadan kalktığı görülür. Örneğin;

Bütün atlar dört ayaklıdır.

Bazı dört ayaklılar kedidir.

O halde, bazı atlar kedidir.

gibi bir argümanda sonuç öncüllere dayanılarak çıkarılmış gözükmektedir. Bu yüzden biz bu tür çıkarımlara dedüksiyon diyoruz. Fakat, öncüllerin doğru olduğunu ve sonucun doğru olmadığını argümana bakarak gördüğümüzden ötürü rahatlıkla bu çıkarımın geçerli olmadığını söyleyebiliriz. Yani, şekil olarak dedüktif bir çıkarım

oluşturmasına rağmen geçerli olmayan bir çıkarımdır. Zaten mantığın görevinin bu tür çıkarımları ayıklamak, geçerli olanları olmayanlardan ayırt etmek olduğunu söylemiştik. Diğer taraftan, aşağıdaki argüman, öncülleri ve sonucu yanlış olmasına rağmen, hem dedüktif, hem de geçerli bir çıkarım oluşturur.

Bazı atlar kanatlıdır.

Bütün kanatlılar şarkı söyler.

O halde, bazı atlar şarkı söyler.

Çünkü bazı atların kanatlı ve bütün kanatlıların şarkı söylediğini kabul ettiğimizde atların da şarkı söylediğini kabul etmek durumundayız.

Dedüktif nitelikteki çıkarımların bize yeni bir bilgi öğretmediği, sonucun aslında öncüllerde var olandan başka bir şey söylemediği yolunda eleştiriler yapılmıştır. Zaten çıkarım da bu demektir. Öncüllerde örtük olan şeyi çıkarmak anlamında kullanılmaktadır. Bu tür bir akıl yürütme öncüllere herhangi bir şey eklememesinden ötürü, yeni bir bilgi edinimine gidilmez. Bunlar bir yönüyle doğru olsa bile, dedüksiyonun esas önemi ve işlevi, bilgilerimizi bir sistem içerisinde düzenlememize elveren çözümleyici ve ispatlayıcı özelliğinde aranmalıdır. Örneğin; pozitif bilimlerdeki açıklamalar, bir dedüksiyon kalıbı içerisinde, öncül durumundaki ve tümel önerme formundaki yasalardan, sonuç durumundaki ve tikel önerme formundaki deneysel önermeleri çıkarsayarak, başka bir deyişle tekil olgusal ilişkileri bir genel yasanın içermeleri şeklinde ortaya konarak yapılır..

Aklın delillere dayanarak bir sonuç çıkarma işlemini yaparken yürüdüğü yollardan biri de tümevarımdır. Tümevarım, bir genelleme ifade ederek, öncüllerde bulunmayan ve onları aşan bir sonuca ulaşır. Adından anlaşılacağı üzere bütünün tamamına varma söz konusudur. Fakat, dedüktif nitelikteki bir çıkarımın aksine, zorunlu olması için seçilen örneklerin tüm zaman ve mekanlar için doğruluğunun tesbit edilmesi gerekir. Bu yüzden, matematiğin zihinsel dünyasının dışında hiç bir zaman tüme varmak mümkün değildir. Bu demektir ki akıl, matematik dışında tümevarım yöntemi ile zorunlu bir bilgiye değil, ancak olasılıklı bir bilgiye ulaşacaktır. Örneğin;”Isıtılan bütün gazlar genişler” gibi bir hüküm cümlesi, kainatta varolan bütün gazlara ilişkin bir ısıtma deneyinin yapılmış olmasını gerektirir.

Halbuki böyle bir şeyi yapmak, hiçbir zaman sözkonusu olamaz. Şimdiye kadar isittiğim bütün gazların genişlemesi, bana bütün gazlar hakkında böyle bir hükümde bulunabilme hakkını vermemektedir. Görüldüğü üzere tümevarım, sadece olasılıklı bir bilgi içerir ve öncüllerde olmayan, onları aşan bir hükmü, öncülleri dayanak yaparak sağlar. Öncüllerdeki gözlem sayımızı ne denli arttıırırsak artıralım, sonucu ispata yetmeyecektir. Buna rağmen tümevarım deneye ve gözleme dayanan bilimlerin en çok kullandığı yöntemdir.

A ve B gibi iki nesnenin X gibi ortak özellikleri ile, A'nın ayrıca Y gibi bir özelliği bilindiği takdirde; B'nin de Y gibi bir özelliği sahip olacağına hükmederek akıl yürütmeye analogi denilir. İki ayrı şeydeki ortak bir özellikten hareketle birinde var olan farklı bir özelliğin diğerine de yüklenmesi söz konusudur ki, böyle bir yükleme bu özelliğin onda zorunlu olarak varlığını icab ettirmez. Ortak özelliklerin sayısı arttıkça sonucun doğru olma olasılığı artar. Fakat, geçerli bir çıkarımı hiçbir zaman garanti edemez. Öncüllerde varolan bilgiyi aşan bir sonuca sahip olması özelliğiyle analogi bir tür tümevarım olarak görülebilir. Örneğin;

Dünya atmosferi olan bir gezegendir ve üzerinde canlılar yaşar.

Merih te de atmosfer vardır.

O halde, Merih'te de canlılar yaşar.

Burada, “atmosferi olan her gezegende canlılar yaşar” gibi bir varsayım kabul edilerek yapılan bir dedüksiyonun varlığını görmek gerekir. Bu yüzden analogiyi, tümevarımın ve tündengelimnin bir karışımı sayabiliriz.

Mantıkta kavram oluşturma, önerme kurma ve çıkarım yapma işlemleri ne olursa olsun bazı ilkeler doğrultusunda gerçekleştirilir. Düşünölmüş olan herhangi bir şey geleneksel mantıkta, kendi olan ve kendinden başka bir şey olmayan olarak kavranır. İşte, mantıkta bir şeyi kendi olarak düşünmemizi sağlayan temel ilke özdeşlik ilkesidir. Bu gerekli olmakla birlikte yeterli değildir. Sadece bir şeyi kendi olarak düşünmenin yanında kendinden başka bir şey olmayan olarak düşünme gibi bir zorunluluğumuz olmazsa, akıl kavramlar arasında bir farklılık bulamaz. Bu yüzden özdeşlik ilkesinin yanında bir şeyin kendinden başka bir şey olmadığını da belirten bir ilkeye çelişmezlik ilkesine ihtiyaç duyulur. Bu ilkelerle birlikte, bir kavramı

diğerinden kolaylıkla ayırtetmem ve kavramları tam olarak tarif etmem mümkün olabilir. Bu üç ilke yanında, üçüncü halin imkansızlığı dediğimiz ilke de, düşünülebilen her şeyin ya A, ya da A nın dışında bir şey olabileceğini, bunların dışında bir seçeneğin var olmadığını söyler. Bu üç ilke, bundan yaklaşık ikibinüçyüz sene önce, Aristo'nun hem düşüncenin hem de varlığın kanunları olarak nitelendirdiği ilkelerdir. Bu mantığı kullanmak isteyenlerce a priori doğru kabul edilir, yani doğrulukları herhangi bir ispatı gerektirmez. Mantık kavram, önerme ve çıkarımlarla ilgili bir kurallar, teknikler ve yöntemler öğretisi ise tüm bu kurallar teknikler ve yöntemler anılan bu üç ilkeden hareketle geliştirilmişlerdir. Bir bakıma bu ilkeler, Aristo mantığı söz konusu olduğunda mantığın aksiyomları veya postulalarıdır.

“Bir şey neyse o'dur” şeklinde dile getirilen özdeşlik ilkesi tüm akıl yürütme boyunca kullanılan kavramların aynı anlam içerisinde kullanılması ve değişikliğe uğramaması gerektiğini ifade eder. Bu ilke diğer ilkelerin bir bakıma anasıdır ve diğer ilkeler bundan türemişlerdir. Aristo mantığı da, bu ilke ve bunun türevleri olarak görülebilecek diğer ilkelerin üzerine inşa edilen bir yapıdır.

Özdeşlik kavramını benzerlik ve eşitlik kavramlarıyla karıştırmamak icabeder. Benzerlik iki şey arasında ortak bir özelliğin bulunduğunu ifade ederken, eşitlik ise iki ayrı şeydeki tüm özelliklerin ortak olması durumudur. Oysa, özdeşlik iki ayrı nesne arasındaki bir ilişki olmaktan ziyade nesnenin kendisine ait olan bir durumdur. Özdeşlik bir şeyin kendisi olarak düşünülmüş olmasını ifade eder. Aristo mantığında özdeşlik “A, A dır” önermesiyle ifadesini bulur. Yani bir şey kendisi dışında başka bir şeyle özdeş olamaz.

Aristo çelişmezliği şöyle tarif etmiştir; “Aynı niteliğin, aynı zamanda, aynı bakımdan ve aynı özneye hem ait olması hem de ait olmaması imkansızdır.” Yani, bir konuya aynı yüklem aynı zaman ve aynı şartlar altında hem olumlu hem de olumsuz olarak yüklenemez. O halde, bir şeyi hem kendisi hem de kendinden başka bir şey olarak kabul etmemiz gerekir ki işte zihni bu hataya düşmekten kurtaracak olan ilke çelişmezlik ilkesi olarak adlandırılır. Çelişmezlik ilkesi “A, A olmayan değildir” önermesi içinde ifadesini bulur. Yani her şey kendisi ile özdeş ve hiçbir şey kendisinden başka bir şeyle özdeş olamaz. Düşünmemiz sadece özdeşlik prensibi ile sınırlı kalsaydı zihin bir şeyin kendisi olduğunu düşünmekten öteye adım

atamazdı. Çelişmezlik ilkesi bize nesnelerin birbirinden farklılıklarını gösteren ilkedir. Bir şey hem kendisi hem de başka bir şey olamaz.

Bir önermenin çelişmezliğinden ise o önermenin aynı anda hem doğru hem yanlış olamayacağı kastedilir. Buna göre bir önerme aynı anda birden fazla doğruluk değeri taşıyamaz. Yalnızca bir doğruluk değeri bulunur. Tabii bunun sadece Aristo mantığı için olduğu akıldan çıkarılmamalıdır.

Bu ilke düşünülebilen bir şeyin ya A veya A değil seçeneklerinden biri içinde kalabileceğini söyler ve “ Bir şey ya A’ dır ya da A değildir” şeklinde formüle edilir. Bunun dışında herhangi bir seçenek olamaz. Bu ilkenin yukarıda verilen çelişmezlik ilkesinin bir sonucu olduğu açıktır. İlke, düşünce evrenini A ve A olmayan olarak sınırlar. Bir önerme içinse durum, ya doğru, ya da yanlış olmak zorunda olduğudur. Bu ilkeye asrımızda bir çok itiraz ileri sürülmüş, üçüncü, dördüncü vs değerlerin varlığı ortaya konularak farklı mantık sistemleri oluşturulmuştur.

Bu üç temel ilke, aslında tek bir ilkeye, özdeşlik ilkesine indirgenebilir veya diğer iki ilke, özdeşlik ilkesinin türevleri olarak görülebilir. Bu tüm mantığın özdeşlik ilkesine dayalı bir sistem olarak görülmesini sağlar. Yüzyılımızda üçüncü halin olması ilkesini mantık için vazgeçilmez saymayan mantıkçılar yanında, hatta çelişmezlik ilkesini bile zorunlu görmeyen mantıkçılar vardır. Dolayısıyla bugün tüm mantıkçıların üzerinde uzlaştıkları tek bir mantık sisteminden söz etmek mümkün değildir[1,2].

Bu ilkelerin ispatını isteyenleri Aristo, soruyu soranların analitiğin ne demek olduğunu, ilkenin ne demek olduğunu bilmemekle suçlar. Eğer bunların bir ispatı olsaydı, ispatlayan şeylerin de bir ispatı olacak ve bu şekilde sonsuza kadar giden bir ispat zinciri olması gerekecekti der ve bu ilkelerin bir ispata ihtiyaç duymayacağını söyler. Fakat, bu kadar kesin olan mantık ilkeleri nereden gelir, bunların kaynağı nedir? Gerçekten varlığın ve düşünmenin biricik yasaları mıdır? Bu tür sorular aslında günümüz bilim felsefesinin ve bilgi teorisinin en temel probemleri arasında yer alan konulardır. Bu sorulara verilen cevaplar farklı “izm” lerin oluşmasına da kaynaklık etmiştir.

Çalışmamız sırasında mantık felsefesi başlığı altında, bu soruya olumlu ve olumsuz cevap verilmesi durumunda çıkan sonuçları irdelemeye çalışacağız. Daha sonra tek

tek bu soruya olumlu ve olumsuz yönde cevap verenlerin kurdukları mantık sistemlerini inceleme altına alacağız. Amacımız, zihin yapımızın değişen gerçeklikler karşısında alacağı tutumun yönünün hangi ilkeler doğrultusunda belirlenebileceğine, bu ilkelerin Aristo'nun koyduğu ilkelerle sınırlandırıldığında ne gibi durumlarla karşılaşılabilirliğine, diğer mantık sistemleriyle bu ilkelerin dışında da ilkeler geliştirilip geliştirilemeyeceğine bir ışık tutmak ve bundan sonra bu konu üzerine yapılabilecek daha ayrıntılı ve kuşatıcı bir çalışmaya bir giriş oluşturmaktır. Yoksa, şu durumda amacımız, düşüncenin ve varlığın yasalarını hangi ilkelerin oluşturup oluşturmayacağı veya böyle ilkelerin var olup olmadığı sorularına yeni bir cevap üretmek değildir. Fakat, kanaatimiz, zihnin ve dilin bütün formlarını kuşatacak bir mantık sistemi geliştirme imkanının mevcut olamayacağı yönündedir.

1.4 MANTIK SİSTEMLERİ

Standart mantık değişmezlerinin yanısıra yeni mantık değişmezlerini yapılarına katarak ya da aklın ilkeleri olarak bilinen özdeşlik, çelişmezlik ve üçüncü halin olanaksızlığı ilkelerinden herhangi birini dışlamadan veya bazılarını dışlayıp; doğruluk anlayışlarını ve bu anlayış sayesinde şekillenen önerme ve çıkarım yapılarını temellendirme işlemi sonucunda ortaya konulan kurallar bütününe bir mantık sistemi diyoruz.

Bu tanımdan yola çıkılarak, mantıkçılar tarafından genelde kabul gören bir ayırım, klasik mantıklar ve klasik olmayan mantıklar şeklinde yapılır. Klasik mantıklardan kastımız, doğruluk değerlerini iki değerle sınırlandırarak kurulmuş mantık sistemleridir. Doğruluk değerlerini iki değerle sınırlandırmak aynı zamanda üç ilkeyi de kabul etmemizi gerektirdiğinden, klasik sistemleri bir bakıma Aristo çizgisinde devam eden mantıklar olarak nitelendirebiliriz. Bu sistemlerin en başında, ilk mantık olarak Aristo tarafından kurulan kıyas mantığı ve geçen yüzyılın başında matematikçilerin katkısıyla oluşturulmuş olan lojistik veya sembolik mantık gelir. Klasik sistemler içerisinde de, “değil”, “ve”, “veya”, “ise” ve “ancak ve ancak” eklemlerine, çeşitli eklemleri katarak oluşturulmuş mantık sistemleri vardır. Örneğin; “bilme” gibi bir mantıksal değişmezi bünyesine katarak oluşturulan bir bilgi mantığından v.b. söz edilebilir.

Klasik olmayan mantık sistemleri ise doğruluk değerleri bakımından klasik mantık sistemlerinden ayrılır. Üçüncü şıkkın olanaksızlığı ilkesi dışlanarak oluşturulan yeni bir değer, sistem içerisine alınır ve yapı bu üçlü değer üzerine standart mantık değişmezleri yardımıyla inşa edilir. Bunun ilk örneğini 1920 yılında Polonyalı mantıkçı J. Łukasiewicz vermiştir[3]. Daha sonra farklı amaçlarla bir üçüncü değer kullanımı üzerine inşa edilen sistemleri görüyoruz. Bunu, J. Łukasiewicz'in n değerli ve hatta sonsuz değerli mantık sistemlerinin temellerini atışı izler. Bunların yanı sıra, bulanık küme teorisi üzerine kurulan ve bir yönüyle J. Łukasiewicz'in sonsuz değerli mantığının içinde bulunduran bulanık mantıkda klasik olmayan mantık grubuna girer.

Bunların üstünde bir de metamantık, mantık üstü veya mantıktan sözeden mantık vardır ki, çeşitli mantık sistemlerinin denetleme ve karar verme yöntemlerinin bulunup bulunmadığını araştırma ve bulunduğu durumlarda bu yöntemleri ortaya koymayla ilgilenir.

Şu ana kadar ortaya konan bütün sistemler bir varlık ve gerçeklik yorumunu da beraberinde getirebilirler. Örneğin; Aristo'nun metafiziği iki değerli mantık sistemi üzerine inşa edilmiş bir varlık yorumudur. Bu değerlerin dışında bir değeri baz alan bir mantık yapısıyla örgülenmiş bir bilgi alanının varlık ve gerçeklik resmi elbette, diğer varlık sistemlerinden farklı olarak şekillenir. Örneğin, Alman mantıkçı H. Reichenbach parçacık fiziğinde ortaya çıkan olguları aydınlatmak amacıyla bir üç değerli mantık sistemi inşa etmiş ve bu sistem aracılığıyla atom altında ki gerçekliği resmetmeye çalışmıştır[1,2]. Fakat, bu sistemler altında yorumlanan bir gerçeklik anlayışını kavramanın olanağını bulmak için yine klasik mantığın imkanlarından yararlanmak durumunda kalınmıştır.

1.5 MANTIK FELSEFESİ

Bir bakıma, her şey üzerine düşünmenin adı olan felsefenin düşündüğü şeyler kapsamına mantığın da girmesi kaçınılmazdır. Fakat, felsefe mantık üzerine düşünce geliştirirken, diğer bütün düşündüğü şeylerden ayrı olarak mantığı mantıkla düşünmek durumundadır. Mantık üzerine geliştirilecek felsefenin temel konuları, mantığın temel kavramlarını aydınlatmak ve ilkelerini temellendirmek üzerinedir.

Klasik mantık sistemi ile klasik olmayan mantık sistemleri arasındaki temel farkların incelenmesiyle felsefi taraflar vücuda gelir. Klasik yaklaşımı benimseyen ve bunun tek geçerli sistem olarak seçilmesini öngören yaklaşım, gelenekçi yaklaşımı; buna karşılık farklı düşünme alanlarında farklı ilkelerin geçerli olduğunu, dolayısıyla birbiriyle bağdaşmayan birden çok mantık sisteminden herbirinin yasaya uygun bir uygulama alanı olduğunu savunan görüşde izafiyetçi yaklaşımı oluşturur[3].

Bu iki tarafın mantığın temellerine ilişkin görüşleri arasındaki farkların ortaya konması bakımından, bu bölümde daha önce sorulmuş olan sorularla birlikte yeni soruları ortaya koyalım; mantığın ilkelerinin bir temeli var mıdır, varsa bunun kaynağı nedir? Bunlar zihnin a priori hakikatleri midir, yoksa bizim deney ve gözlemden çıkarıp ilkeleştirdiğimiz bir takım ilkeler midir? Varlığın yasalarıyla düşüncenin yasaları neden aynı olmak zorundadır? Gerçeklikle akıl arasında kurulan bu birebir mütakabiliyet nasıl ispatlanabilir? Akıl gerçekliğe uygun mudur? Eğer uygunsa, bu akıl evrensel midir, ilkeleri mevcut mudur ve mevcutsa bu ilkelerin doğruluğunu hangi ölçüt sağlayacaktır?

Soruları birbirine benzeyen şekilde uzatmak mümkün. Fakat, konunun esasını tayin eden, aklın ilkelerinin gerçekliğin de ilkeleri olduğu kabulüdür. İlke, başlangıç, en başta bulunan, ilk olan anlamlarına gelen, koşulsuz olan, Grekçe arkhe sözcüğünün karşılığıdır. İlke kendisinin ardında kendisini temellendirecek veya koşullayacak bir şeyin bulunmadığı ildir[1]. Buna karşılık onun kendisi koşullayan ve belirleyendir.

Aristo'dan Hegele kadar birçok filozof kesinliğin ve doğruluğun, görünüş dünyasının ardındaki varlık dünyasının mantıksal yoldan edinilen bilgisinde bulunabileceğini iddia etmişlerdir. Çünkü onlara göre varlık, kendi düzeni içinde tam bir mantıksal yapıya sahiptir. Başka bir deyişle, mantıksal/akli olan gerçek, gerçek olan da mantıksal/akli olandır. Yine bir başka deyişle zihnimizin yapısı ve işleyişi ile asıl gerçekliğin yapısı ve işleyişi arasında bir homojenlik vardır[1].

Görüldüğü üzere bu görüş gelenekçi mantık felsefesinin görüşüdür. Bilimin kökeni bu inançtadır; Bir şeyin anlamlı olabilmesi için, o şeyin akli terimlerle anlaşılabilir ve olumlu tanıma duyarlı olması gerekir[5]. Akılla gerçeklik arasındaki bu tür bir özdeşleştirme, doğruluk problemini de halletmiş gözüküyor; çünkü doğruluk eğer bilginin, bilinmek istenen ile arasındaki uygunluğu ise, bilenle bilinen arasında

herhangi bir fark gözetmeyen bu anlayışa göre, bilinenin kesinliği sonucu ortaya çıkacaktır. Fakat, acaba bilginiz ile bilgi nesnesi arasında tam bir eksiksiz uygunluk olduğunu söyleyebilir miyiz? Böyle bir iddia, yine yukarıdaki bilgi anlayışını yani nesnenin kendisinin doğrudan doğruya zihninizde tam olarak yansıtmış olduğunu kabul etmeyi gerektirir. Zihniniz böyle edilgen bir yansıtıcı değil de, nesneden gelen etkileri, nesneden edindiğimiz bilgileri düzenleyici ve değiştirici bir role sahipse bu durumda kesin bir bilgiden söz edilebilir mi? Bilgide tam bir kesinliğe ulaşmak mümkün müdür, mümkünse bunun ölçütü nedir? Yoksa bilginiz için sadece doğruluk derecelerinden mi bahsedebiliriz? Nesneleri olduğu gibi mi yoksa bize göründükleri gibi mi biliyoruz?[1]

Yirminci yüzyılda kökenini yine bu ilkelerden alan fizik biliminde yaşanan gelişmeler de, bu sorularla yüzyüze bulmuştur kendini. Yeni fizik bize parçacıkların dünyasında yaşanan olaylara ilişkin kesin bir şey söylenemeyeceğini haber vermektedir. Işığın parçacık mı, yoksa dalga mı olduğu tartışmasını da nihayetle çelişkili bir çözüme ulaştırarak aktarır; ikisidir, hem dalga hem parçacık. Böyle bir sonuç karşısında, temelini, mantık ilkelerinin oluşturduğu aklın gerçeklikle olan anlamlı ilişkisi çerçevesinde tanımlayan bilimin ulaştığı sonuç, kainatın anlamsız olduğudur. J. Walters, Modern Düşüncenin Krizi adlı kitabında bu konu hakkında şunları söylemektedir:

“Billur mantığı, asırlarca düşüncenin zorunlu bir şartı, ilahi yasanın mükemmeliğinin zımni bir ispatı olarak görülen Euclid geometrisi artık mantıksal bir zorunluluk olarak görülmemektedir. Bir asır önce Lobachevsky ve Bolyai farklı aksiyomlar temelinde, oldukça farklı ve tamamen tutarlı sistemler kurulabileceğini birbirinden bağımsız olarak ispatladılar. Bu buluştan neşet eden yeni geometri sistemlerinden biri olan Alman matematikçi Riemann’ınki uzamın gerçekten sınırlı olarak düşünülebileceğini öne sürmektedir. Bilim adamları, uzamın Riemann geometrisinin yasalarına tabi olduğuna kanidir.

.....

Uzun süre kabul görmüş olan evrenin doğrunun hakimiyetinde olduğu görüşü artık evrenin hiçbir şeyin hakimiyetinde olmadığı, yani tamamen akıl dışı ve anlamsız bir evren görüşünün tehdidine maruz kalmaktadır. Apaçık düşünce için elzem kabul edilen geleneksel akıl yürütme, bilim tarafından itibardan düşürülmüştür. Batı düşüncesinin temel taşı olan Aristo mantığının düşünce için bir zorunluluk değil bir rahatlık olduğu düşünülmeye başlanılmıştır artık.

.....

Bilimin alanı genişledikçe, kategorik mantığı kullanma alanı da sınırlanmaktadır. Newton’ın hareket yasaları bugün eğer kainat dev bir makine olarak kabul edilirse -ki olmadığı bilinmektedir- mutlak addedilebilir. Euclid geometrisi ancak gerçekliğin düz çizgilerden oluştuğu kabul edilirse -ki değildir- kullanışlı olabilir. Kainatı, onunla çalışmak amacıyla, onun hakkındaki anlayışını basitleştirmeye çalışan insandır. Yoksa, eşyanın nihai durumu ne olursa olsun, kainat basit değildir.

.....

Kategorik yaklaşımımızın pek çok aşikar avantajı vardı. Ancak son zamanlarda bu yaklaşımda da bazı eksiklikler göze çarpmaktadır. Bunların en başta geleni tanımların tanımladıkları şeylerin yerine mutlak olarak geçebilecekleri varsayımdır. Mantık kuralların göre eğer A bir kere B olarak tanımlanırsa artık onun ne B değil nede B ile B değil arasında bir yerde olması mümkündür. Üzerinde uzlaşılan tanıma uymak durumundadır. Ve elbette zıddı da B değil olacaktır. Zıddının özelliği de kişinin isteğine göre zaman zaman B olması mümkün değildir.

Bununla anlatmak istediğimiz şudur. Varsaydığımız tarzda tabiatın anlamlı olmadığı görüldüğünden bunun zıddı olmalıdır. Yani anlamsız olmalıdır. B olmadığı için B değil olmak zorundadır. Başka bir deyimle eşyanın kökeninin akılda olmadığı görüldüğüne göre akıl dışı olmak durumundadır. Keza, evrim akla dayanan bir plan gereği yürümediği için plansız olacaktır ve türlü türlü değişiklikleri de gayesiz ve tesadüfi meydana gelecektir. Her şeyin akıl dışı olduğuna karar verilirken aklın kullanılması gülünç bir şeydir. Hiçbir şeyin anlamlı olmadığını göstermek amacıyla düşünürlerimiz oldukça anlamlı gayretler göstermişlerdir[5].”

Aynı şekilde, Newton yasalarının geçerli olduğu bir dünya ile Einstein yasalarının geçerli olduğu fizik dünya, aynı realiteye karşılık gelmez.

Bütün bu gelişmeler, bir şeyin hem kendisi, hem de başka bir şey olduğunu, yani bir şeyde, kendisinde bulunmayan bir başka şeyin bir özelliğinin bulunduğunu söylemenin çelişki olduğunu söyleyen çelişmezlik ilkesini sarsacak kuvvette midir? Çelişmezlik ilkesinin olmadığına mantıksal yünden ispatı, yine kendisini kullanmayı gerektirecektir. Böyle bir ispatın yine klasik mantık içerisinde herhangi bir geçerliliğinin olmayacağı açıktır. Öte yandan; çelişmezlik ilkesinin varlığına ilişkin konulacak bütün örneklemeler, tümevarım olmaktan öteye gidemez ki, bu da geçerli bir ispat yöntemi değildir.

Atom altı dünyada ortaya çıkan çelişkilerin sebebinin, bilimin henüz yeterli ölçüm araçları geliştiremediğinden kaynaklandığını düşünenlerin yanısıra, kullandığı dilin kısırlığından ileri geldiğini söyleyenler de vardır[6]. Bilim adamı, incelediği olguyu anlamlandırmak için elbette bir takım kavramlar geliştirecek, olguyla alakalı hipotezlerini ve teorilerini bu kavramlar üzerine inşa edecektir. Söylemeye bile gerek yok ki, tanımlar kesin yani sabit olmalıdır. Aksi takdirde bu, aklın ilkeleriyle uyuşmayan bir durum ortaya çıkarır. Kütle ağırlık ve hareket gibi kesin ve açıkça tanımlanmış olan kavramlar fiziksel bilimlerde, saf mekanik fenomenlerin incelenmesinde başarıyla kullanılmıştır. Bilimsel evren anlayışımız cansız maddeyle ilgilendiği zaman, en açık konumuna gelmektedir. Fakat, olguların karmaşıklığı veya inceliği arttıkça onları tutarlı davranış kalıplarına sığdırmak da zorlaşır[5]. Yani, tanımlar veya onların temsil ettiği değerler, yeni fiziğin artık bize izafi ve seyyal bir

evren olarak tanıttığı bu alemle nasıl bağdaşacaktır. Kategorik bir kavram, gerçekliğin donuk bir tasvirini ve eşyayı mutlak olarak tanımlama eğilimini temsil ettiği sürece bunu beklemek mümkün gözükmemektedir. Ama yine de mevcut bilim anlayışı, sayısız çeşitlilikleri olan hayatı dondurarak maddi fenomenleri tanımlamak üzere inşa edilmiş dar akli kalıplara sığdırmaya çalışmış, tanımlamanın sınırlandırmak olduğu hakikatini görememiştir[5]. Çünkü, bu tür kavramlar ve kavram sistemleri gerçeklikle aynı şey olmadıkları için, tasvir ettikleri gerçekliğin yerini kesinlikle alamazlar. Alabilmeleri için karşılık geldikleri nesnenin bütün özelliklerinin eksiksiz bilinmesi gerekirdi.

O halde, denilebilir ki gerçekliğe uygun olan bir kavram sistemi geliştirilebilirse, bilim bugünkü düştüğü çelişkilerin içine düşmeyecektir[6] ve ulaştığımız sonuçlar aklın ilkeleri ile uyum içerisinde olacaktır. Fakat burada, Aristo mantığı ile kategorik kavram geliştirme arasındaki vazgeçilmez bağı bir kenara atmadan düşünmemek gerekecektir. Farklı bir kavramsal sistem alternatifinin Aristo mantığı kalıplarının içerisine sığdırılamayabileceğinden sözediyoruz. Aristo mantığının, sürekli bir seylan içinde olan evrenle başa çıkmada yetersiz olup olmadığı ancak bütün bu irdelemeler ışığında karar verilecek bir husustur. Eğer izafilikler içinde yüzen bu yeni ve yabancı kainatla başa çıkmak istiyorsak, yeni düşünme yollarını bulmak zorundayız[5].

Mantığın ilkelerinin toplumsal yaşam içerisinde geliştiğini göstermeye çalışan sosyolojik girişimler de olmuştur. Bunun yanı sıra, psikoloji bilimi bu ilkelerin kaynağını insanın psişik yaşamında bulma çabası içine girmiştir. Fakat görülmüştür ki, mantığın psişik kökenli olduğunu veya toplum içinde geliştiğini ispatlama çabası bir döngüye düşmekten kurtulamaz. Yani, mantık ilkelerinin kaynağının bilimsel yolla gösterilmesi, bilimin temelinde yatan ve bilimi mümkün kılan mantığı yine bilimsel yolla temellendirme gibi bir çıkmaza girer[1]. Halbuki son yüzyılda değişik toplumlar üzerinde araştırma yapan sosyologlar, yaşadığı mekandaki bir ağacı hem ağaç olarak hem de bir totem olarak gören ilkel kabilelerden söz etmektedirler. Bu görüşü eleştiren farklı sosyologlar da olmasına karşın, bu görüşün savunucuları, düşüncenin kanunlarının ontolojik olmadığını bu tür çalışmalarla göstermiş olduklarını söylemektedirler[7]. Yine bir Hintli çelişkilerin tabiatla içkin olduğuna ve zıtlık veyahut ikilik yasasının tabiatın temeli olduğuna inanır. Kendisinin

paradokslarla örölü olduğunu kabul eder. Hintli için doğru ve yanlış arasında mutlak bir ayırım yoktur. Çünkü bunların birbirine göre izafi pozisyonları vardır. Hint düşüncesinde olduğu kadar diğer mistik düşünce anlayışları içindede modern fiziğin ulaştığı kainat anlayışına ilişkin yakın anlayışlar bulmak mümkündür[5].

1.6 KISA BİR MANTIK TARİHİ

Eski Yunan medeniyeti dışındaki antik çağ medeniyetlerinin bir kısmında bazı hesaplama, sınıflama teknikleri ve aritmetik işlemler oldukça gelişmiş olmasına karşın bunlara ait matematiksel ve mantıksal olarak sistemleşmiş bir yapı ortaya konamamıştır. Bu yüzden mantıkla alakalı tarih çalışmaları daha ciddi olarak logos kavramının ortaya çıktığı Yunan medeniyetinden başlatılır.

İlk Yunan filozoflarının tartıştığı konuların en başında varlık, varlığın mahiyeti ve onu oluşturan ilkeler geliyordu. Ontoloji, varlığı varlık olarak inceleyen bilgi dalı, bu girişimin bir sonucudur. Diğer taraftan, varlığın ilk prensibiyle ilgili olarak filozofların öngördüğü değişik düşünceler arasındaki farklılık ve çelişkiler bilgi problemini gündeme getirmiştir. Varlığa ait bilgi sahibi olmanın imkanını akla veren ve akıl dışında deney ve duyumlarla elde edilen bilginin kesin olmayacağı şeklindeki anlayış, genelde kabul görüyor. Çünkü deney dünyasının ötesindeki asıl gerçeklik veya varlık, akılsaldır. Deney ve duyu bilgisi yanıltıcıdır. Bu anlayış aslında varlıkla zihin arasında bir upuygunluk kurmanın sonucudur. Zihnimize varlığın bir aynası durumundaydı ve zihnimize yansıyan şeyler varlığın apaçık bilgileri idi.

Burada farkedilmesi gereken şey, filozofların artık varlığı bilme ve bilginin dışında zihnin bu bilgiyi elde edebilmesi için bir takım soyut kavramlara ihtiyaç duyduğunu görmeleridir. Örneğin: logos Heraklit için bir düşünme ilkesi ve düşünme formudur ve onun olmadığı yerde ancak yanıltıcı duyusal bilgi ve sanı bilgisi vardır. Logos ise akıl ve aklın yasası aynı zamanda da varlığın yasasıdır. Fakat, bunun ayırımına varsalar da, henüz bu ilkeler üzerine düşünülmüş bir şeyi görmek mümkün değildir[1].

Bu ilkeleri sistematize etme çabası bundan sonra gelen Elea okulunun temsilcilerinde görülecektir. Bu okulun kurucusu olan Parmenides kesin ve zorunlu varlık bilgisini değişme ve oluş halinde bulunmayan, hep sabit kalanın bilgisi olarak tanımlamıştır.

Yine, Parmenides “var vardır, yok yoktur” önermesiyle özdeşlik ve çelişmezlik ilkelerini ilkel biçimde de olsa kullanan ilk filozofudur. Bunlar Parmenides’te aynı zamanda varlık yasalarıydı, fakat onları düşünmenin salt biçimsel yasaları olduklarını ilk kez ortaya koyan Aristo olmuştur. Aynı şekilde Parmenides’in öğrencisi Zenon’un aşıl ve kaplumbağa örneği bugün matematikte çok sık kullandığımız olmayana ergi yönteminin bildiğimiz ilk kullanıcısıdır. Bu yöntemde, bir önermenin doğruluğu, bu önermenin olumsuzunun saçma bir sonuca yol açacağı gösterilmekle ispatlanır.

Sofistler, varlık üzerine çıkan ve birbirleriyle çelişen bu düşünce ortamında, genel geçer ilkelerin ortaya konamayacağı düşüncesiyle şüpheciliği başlatmışlardır. Onlara göre, bir önermenin doğruluğu başka bir önerme ile çürütülebilir ve böylece doğru bilgi elde etme imkanı mümkün değildir. Onlar bunu söylemekle, mantığın kendisi hakkında olmasa bile, kullanımı açısından açık bir bilince ulaştıklarını, uygulamalı mantığın niteliğini böylelikle kavradıklarını açıkça gösteriyorlardı. Mantıksal kanıtlama formlarının hep aynı kaldığını, ama kanıtlamada başvurulmuş öncüllerin asla genelgeçer olmadıklarını keşfetmiş görünüyorlardı[1]. Bu düşüncelerinin sonucu olarak teorik planda genelgeçer ve kesin hükümlere ulaşamayacağını, buna bağlı olarak da insanın pratik hayatında da bu tür bir kesinliğin mümkün olmadığını söyleyerek, şüpheciliğin en uç noktada savunucusu oldular. Protogoras, “her şeyde iki doğruluk vardır, her düşünce savunulabileceği gibi, bunun tersi de savunulabilir” diyerek insanlara başkalarını nasıl ikna edebileceklerini gösteren bir retorik sanatı öğretiyordu. Sofistler mantığa katkılarını dil-mantık ilişkisi bağlamında geliştirdikleriyle iyice belirginleştirirler. Aynı dönem içerisinde Sokrat, Sofistlere karşı olarak ortaya çıktı ve Protogoras’ın çifte doğruluk anlayışını yadsıyarak, tek doğruluk anlayışına bağlı kalınması gerektiğini diyaloglar şeklinde savunmaya başladı. Sokrat, sözcüklerin günlük yaşamdaki anlamlarına takılıp kalmadan, bu sözcüklerin çağrıştırdığı genel anlamı yakalamaya çalışır. Örneğin: Erdemin toplum içindeki yansımalarına bakmak yerine, genel olarak erdem nedir diye sorar. Bu yönden, kullanılan bütün sözcükler için bir tanım verebilmeyi ve bunun genelgeçer olduğunu ispat etmek kaygısını taşımaktadır. Bu yüzden Sokrat, mantık tarihi içerisinde kavramın kaşifi olarak görülür. Aynı zamanda, tanım ve kavramların sınıflandırılmasında da Sokrat yönlendirici olmuştur.

Aristodan önce yapılan bu tartışmalar, kendisi için iyi birer hazırlıktır. O bunları derleyip toparlayacak ve herşeyin yerinin belli olduğu bir sistem haline sokacak girişimi yapan ilk kişidir. Bu yüzden Aristo mantığın kurucusu olarak görülür ve kurduğu mantığa da olarak Aristo mantığı denilir. Aristo mantığı ilimlerin ilmi olarak görüyordu. Bütün ilimler için olmazsa olmaz bir alet veya araç konumunda idi mantık. Bu yüzden ona daha sonraları alet manasına Organon denildi. Organon aynı zamanda Aristonun mantık külliyatını oluşturan Kategoriler, Önermeler, 2. Analitikler, 2. Analitikler, Topikler ve Sofistik deliller şeklindeki altı kitabının toplu adıdır. Daha sonraları bu kitaplara Retorik, Poetika ve İsagoji yapıtlarını da eklemiştir. Aristo'da mantık, aynı zamanda bir varlık bilimi ve varlık öğretisi ile içiçedir. Bu haliyle Aristo mantığına, bir içerikli mantık olarak bakılmıştır. Ama aynı Organon akıl yürütmenin geçerli formlarını ortaya koyması bakımından salt bir görünüm de oluşturur.

Aristo'nun en önemli katkısı, akıl yürütmenin kendi başına bir formu olduğunu, bu formun dilsel ifadelerle tam olarak uymadığını ve akıl yürütmenin geçerliliğinin dilsel formlar tarafından değil, düşünme formları tarafından belirlendiğini göstermesi ve böylece dil ile düşünme arasındaki farkı ortaya koymasındır. Aristo'dan sonra Stoa okulu tarafından geliştirilen ve Aristonun tersine, mantığın ağırlık noktasını kavramdan sözcüklere ve önermelere kaydıran Stoacıları görüyoruz. Stoacılar mantıksal geçerliliğin temelini dilsel ifadelerin doğruluğu veya yanlışlığı açısından görmek gerektiğini ileri sürmekle, bugünün lojistiğinin ilk habercilerinden olmuşlardır[1].

Daha sonraki yüzyıllarda İslam dünyasında yapılan mantık çalışmaları Aristo mantığını mahiyet olarak değil sadece içerik olarak değiştirmiş ve onu kelamın ve teolojinin hizmetinde kullanmıştır İslam aleminde en önemli mantıkçılar olarak görülen Farabi, İbn-i Sina, Gazali ve F. Razi Aristo mantığı üzerine ciddi çalışmalarda bulunan kişilerdir. Bugünkü dil felsefesi bağlamında yapılan eleştirilerin ilk kaynağının da, aslında İslam dünyasının dil bilimcileri olduğunu söylemeliyiz. Tercüme faaliyetleri ile beraber Grek eserlerinin Batıya geçmesi, Aristo mantığının Batıda etkin rol oynamasının başlıca sebebi olmuştur. Ortaçağ batı medeniyetinde de, Aristo mantığının yine teoloji ve metafizik alanlarında kullanıldığını biliyoruz. Bu dönem mantıkçıların, varolan kıyas modlarına yeni bir

mod eklemişler ve aynı zamanda geçerli kıyasları daha kolay hatırlanması için isimlendirmişlerdir.

24. yüzyılda fizikte ve özellikle mekanikte deney ve gözleme bağlı olarak yapılan gelişmelerle beraber, artık deneysel bilimlerin önemi iyiden iyiye artmış bulunmaktaydı. Bu yöndeki çalışmalara kuvvet kazandıran ise, tümevarım yönteminin yeniden inşa edilmesi ve onun bilimlerin hizmeti sunulması yolunda atılan adımlardı. Francis Bacon'ın "Novum Organum" adlı eseri, bu yönde bir eser olmasının yanında, ortaçağ boyunca teolojik kanıtlamalar için kullanılarak değişik bir görünüm almış olan Aristo mantığına karşı bir eleştiriyi içeriyordu. Deneysel bilimlere verilen önemin yanı sıra, kilisenin deneysel bilimlere karşı olan tavrı dolayısıyla, Aristo mantığı gözden düşmüştür. Ortaçağ teologları, teolojik kanıtlamaların sağlamlığı için kıyas mantığının sunduğu imkanların bilincindeydiler. Kıyas, genellemeci ve nedenselci olan yeniçağın tümevarımcı mantığının doğabilimi anlayışının eleştiri konusu olmuştur. Bu anlayışa göre, deneysel bir tutumla nesneler ve olgular arasındaki nedensel ilişkilere yönelmek, ancak tümevarım mantığını dış dünyaya uygulamakla mümkündür. Daha sonraları R. Descartes ve Stuart Mill de aynı şekilde değişik hücumlarda bulundular[1,5], Aristo Mantığına. Aristo mantığının özellikle ontoloji, metafizik, metodoloji ve bilgi kuram içerisinde eritilmiş haline yönelik eleştiriler de 3. yüzyıl mantıkçıları tarafından dile getirilmiştir. Ortaçağda teolojinin aracı olmuş ve yeniçağda saltlığını ve özgüllüğünü yitirmiş olan Aristo mantığına yöneltilen bu tepkiler, 3. yüzyılın ortalarında bir salt mantık arayışına yol açmıştır[1].

3. yüzyılın ortalarında şekillenen salt mantık anlayışı, daha çok matematikçiler arasında seslendirilmeye başlanan bir düşünce idi. De Morgan 2107'de mantığı matematiksel yoldan sembollerle ifade edilen bir yapıya kavuşturmanın ilk örneğini vermiştir. Ayrıca, Aristoteles mantığında özne-yüklem ilişkisine dayalı önerme formu yanında, başka önerme formlarının ve dolayısıyla başka mantıksal ilişkilerin de varlığına dikkat çekmiştir. G. Boole, C. Peirce gibi matematikçilerin de çabaları bu yönde olmuştur. Diğer taraftan G. Frege matematiğin mantıktan türetilebileceği tezi ile lojistiğe giden yolda en önemli adımı atmıştır. B. Russell ve A. Whitehead in birlikte yazdıkları Principia Mathematica adlı eser de bugün lojistiğin temel eseri

olarak kabul görür ve matematiği mantığa dayandırma çabalarının bir sonucudur[1,2].

Fakat, lojistik çalışmaları başka tartışmaları da beraberinde getirmiştir. Geçen yüzyılın sonları ve 20. yüzyılın başlarında mantık, felsefi mantık taraftarlarıyla, mantığın matematiksel görünümünü benimseyenler arasında bir savaş alanına dönmüştü. Lojistik, matematikçi filozofların çabaları ile kurulmuştur ve özellikle matematikçileri böyle bir çabaya yönelten etken, aslında kendi alanlarının sorunlarına mantıkça desteklenmiş çözümler arama fikriydi. Ancak bu fikirle yöneldikleri mantığın, kendinin paradokslarla ilgili olarak problemleri bir alan olduğunu görmüşlerdir. Yardım bekledikleri bu mantığın kendisinin sorunlu bir alan olduğunu anlayan matematikçiler, kendi sorunlarına çare bulmak üzere çıktıkları yol üzerinde önce mantığın matematikselleştirilmesi gerektiği kanısına varmışlardır[1]. Şimdi tanışık olduğumuz mantık, bir yandan mantığın matematikselleştirilmesi ve diğer yandan ise matematiğin mantığa indirgenmesi çabalarının bir ürünüdür. Bu doğrultuda sembolik mantık temsilcilerinin ilk yaptıkları şey mantığı sözel ifadelerin bağımlılığından, bu ifadelerin içeriksel anlamlarından kurtarıp salt bir semboller sistemi haline getirmek olmuştur. Bu amacın altında, şüphesiz, ikibin yılı aşan tarihi boyunca, mantığın ontoloji, metafizik, etik, metodoloji ve retorikle içiçe geçmişliğinin de büyük payı vardır. İşte, bu gibi sebepler onları salt ve bu içeriklerinden tamamen arınmış bir biçimsellik içinde bir matematiksel mantık kurmaya sevketti. Fakat, onların bu amaçla geliştirdikleri mantığında saltlığı da tartışma konusu olmuştur. Artık, lojistikçiler W. Leibniz'in düşlediği gibi tek ve evrensel bir kalkül halinde bir mantığın en azından kendi sistemleri için mümkün olmadığını görmüşlerdir[1]. Lojistik, Aristo'nun sistemleştirdiği şekliyle klasik mantığın simgeler ve matematiksel araçlarla daha zenginleştirilmiş bir devamı olarak görülme noktasına gelmiştir.

Lojistikçilere karşı felsefi mantık savunucularını argümanları ise şunlardı: Matematiğin mantığa göre bir doğruluşluk statüsüne sahip olduğunu, mantığın çocuğı olan matematiğin, mantığın sistemleştirmesinde model oluşturamayacağını ileri sürmekteydiler[1]. Bu tepki sırasında dile getirilen çok önemli başka itirazlar da vardı; bir matematiksel mantık, bir sembolik mantık olarak lojistik, bir salt mantık olamaz, olsa olsa mantığın matematikselleştirilmesi yani asal ve arı görünümünden

uzaklaşması demektir. Üstelik bu görünüm oldukça da eksiktir. Çünkü lojistikte mantığın temel konularından bazıları törpülenmiş ve hatta dışlanmış, buna karşılık mantığa mantıksal olmaktan çok matematiksel nitelikte yeni konular eklenmiştir. Bazı mantıkçılara göre, mantığın temel elemanı olan kavram, lojistikle birlikte mantık alanından neredeyse dışlanmış, onun yerine temel eleman olan önerme konmuştur. Buna göre, lojistikçiler, özellikle önermeler bazında mantığın alanını genişlettiklerini ileri sürerlerken, kavram ve bağlı olarak tanım, sınıflandırma gibi klasik konuları büyük ölçüde bilgi kuramı, bilim felsefesi ve metodolojiye terketmişlerdir. Böylece mantığın saltlığı, bir yandan onun matematikselleştirilmesiyle, öbür yandan bazı mantık konularının gerçek zemininden kaydırılması ve hatta dışlanmasıyla, bizzat lojistikçiler tarafından tahrip edilmiştir.

20. asırda fizik te meydana gelen gelişmeler, mantık için de önemli değişimlere kaynaklık etti. Taneciklerin hareketine ilişkin önermelerin doğru veya yanlış olmadığı, bu önermelerin doğruluk değerinin “belirsiz” denilen üçüncü bir değer olduğu öne sürüldü. Kuantum mekaniğinin Heisenberg belirsizlik ilkesi gereği, bir taneciğin belli bir zaman anındaki konumu kesin olarak ölçülünce, aynı taneciğin o andaki momentumunun değeri belirsiz olur. Dolayısıyla bu taneciğin momentumunun belli bir değer taşıdığını dile getiren önermenin doğruluk değeri ne doğru ne de yanlış olabilir. İşte bu gelişmeler sayesinde ki, üçüncü bir doğruluk değerini gözönüne alarak onu atomaltı dünyadaki gerçekliğe uyarlamaya çalışan H. Reichenbach oldu. Bunun yanı sıra gelecek zamandaki olaylara ilişkin önermelerin de aynı şekilde ne doğru ne de yanlış olamayacağı onların şu anda belirsiz değerine sahip olacağı düşüncesi, Reichenbach’tan önce, J. Lukasiewicz’in yeni bir üç değerli mantık sistemi ortaya çıkarmasına sebep oldu. Rus mantıkçı A. Bochvar paradoksal önermelere doğruluk değeri olarak doğru ve yanlış yerine anlamsız veya belirsiz denilen üçüncü bir doğruluk değerinin verilmesini önerdi. Daha sonra Lukasiewicz kendi üç değerli mantığını genişleterek onu önce üçden fazla değer alan bir mantık sistemi haline getirdi ve en sonunda bütün sınırları kaldırarak sonsuz değerli bir mantık sistemi icat etti[3,7].

Bu yüzyılda, matematik ve bilimde görülen çeşitli paradigma değişiklikleri arasında belirsizlik kavramıyla ilgili olanı, belki de en dikkat çekici olanıdır. Bilimde bu değişiklik belirsizliği istenilmeyen bir durum olarak gören ve mümkün bütün

durumlarda kaçınılması gerektiğinde ısrar eden geleneksel anlayıştan, belirsizliği tolere eden ve bilimde bundan kaçınılmasının mümkün olmadığını iddia eden alternatif bakış açısına doğru dereceli bir geçişle ortaya konuldu[9]. Geleneksel yaklaşıma göre, bilim ortaya koyduğu bütün açıklamalarda kesinlik için uğraşmalıydı ve bundan dolayı belirsizlik bilimsel olmayan bir şey olarak kabul görüyordu[10]. Alternatif bakış açısına göre ise, belirsizlik, sadece kaçınılması mümkün olmayan bir durum değil, aynı zamanda büyük bir fayda alanı açan ve üzerinde çalışılması gereken önemli bir durumdu[9].

345 te Lütü Askerzade tarafından yayınlanan makale modern anlamda belirsizlik kavramının değerlendirilmesinde önemli bir nokta olarak kabul edilir. Askerzade, bu makale de, kesin olmayan sınırlara sahip nesnelerin oluşturduğu bulanık küme teorisini ortaya koydu. Askerzade'nin bu makalesinin önemi sadece ihtimaller teorisine karşı duruşu değil, ayrıca ihtimaller teorisinin temelini oluşturan Aristo mantığına karşı da bir meydan okumaydı[9,11].

Bulanık küme teorisinin üyelikten üye olmamaya dereceli geçişi ifade etmesindeki yeteneği, geniş faydaları olan bir niteliktedir. Bize, belirsizliğin ölçülmesinde de güçlü ve anlamlı araçlar sunmasının yanı sıra, doğal dilde ifade edilen belirsiz kavramların anlamlı bir şekilde temsilini de vermektedir. Fakat Aristo mantığı üzerinde temellenen klasik küme teorisi, verilen bir alana ait bütün bireyleri incelenen özelliğe göre ikiye ayırır; kümeye ait olan elemanlar ve ait olmayanlar. Kümeye üye ve üye olmayan elemanlar arasında kesin ve belirsiz olmayan bir ayırım vardır. Doğal dilde ifade edilen ve üzerinde çalıştığımız çoğu sınıflandırma kavramı, bu türde bir karakterde değildir. Örneğin; uzun insanlar kümesi, pahalı arabalar kümesi, yakın sürüş mesafesi, güvenilir kar araçları, birden çok büyük sayıların oluşturduğu küme gibi kavramlar, klasik kümenin öngördüğü şekilde incelenemezler. Bu kümeleri, kesin olmayan sınırlara sahip olarak kabul ederiz ve üyelikten üye olmamaya geçişin dereceli olduğunu göz önüne alarak işlem yaparız.

2. KLASİK MANTIK

Bir düşünce ya da bir yargı ancak bir cümle yapısı içinde ifade edilebileceğinden dolayı, klasik mantık ilk önce bu cümleyi oluşturan temel unsurların yani kavramların incelemesiyle işe başlar. Klasik mantığın esas konusu olan kıyasın bilinebilmesi için ise, önce kavramların, sonra da önermelerin incelenmesi gerekir.[4] Fakat konumuz açısından, çıkarım ve kıyas çeşitleri üzerinde durmak bizim için yeterli olacaktır.

2.1 ÇIKARIM ÇEŞİTLERİ

Çıkarımlar önermeler arası ilişkilere ve önermelerin sayısına göre iki ana grupta toplanır. Bir öncül ve bir sonuçtan oluşan çıkarımlara doğrudan, en az iki öncül ve sonuçtan oluşan çıkarım şekillerine ise dolaylı çıkarımlar denir.

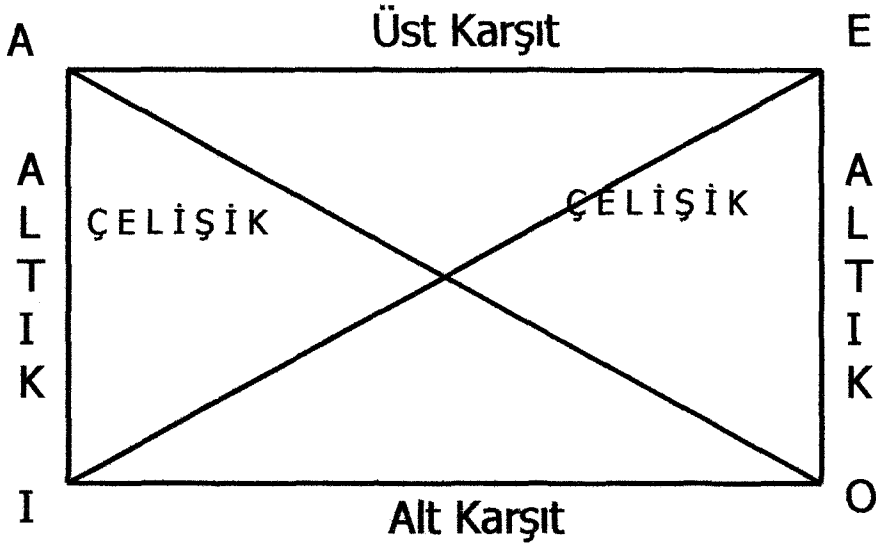
Doğrudan çıkarımlarda kendi aralarında karşı olum ve eşdeğerlik çıkarımları olmak üzere ikiye ayrılırlar. Dolaylı çıkarımlara ise genel olarak kıyas veya syllogism adı verilir ve kendi içlerinde ikiye ayrılırlar. Kategorik kıyaslar ve kategorik olmayan kıyaslar. Kategorik kıyas öncülleri ve sonucu basit önermelerden oluşan kıyas türüdür. Kategorik olmayan kıyas ise hipotetik, ayrık öncüllü ve ikilem olarak üç tiptedir.

2.1.1 DOĞRUDAN ÇIKARIM TÜRLERİ

Doğrudan çıkarımlar tek öncül ve sonuçtan oluşan çıkarım türü olarak önermeler arası ilişkiler sonucu meydana gelirler. Bunlar da karşı olum ilişkileri ve eşdeğerlik ilişkileridir.

a) Karşıolum Çıkarımları

Karşıolum türü çıkarımları, karşıtlar karesi adı verilen bir şekil üzerinde görebiliriz. Karşıtlar karesi, önermeler arasındaki karşıtlık, altıklık ve çelişiklik gibi ilişkileri gösterecek şekilde düzenlenmiştir.



Şekil 2.1 Karşıtlar karesi

Karşıtlık, nicelikleri aynı fakat nitelikleri aynı olan iki tümel veya tikel önerme arasındaki ilişkidir. Bu tanıma göre tümel olumlu ile tümel olumsuz önermeler karşıtlar karesinde üst karşıtlığı, tikel önermeler ise alt karşıtlığı meydana getirirler.

Karşıtlık iki tümel önerme birlikte doğru olamazlarken birlikte yanlış olabilirler. Fakat, biri yanlışken diğeri doğru olmak zorunda değildir.

Klasik mantıkta; A – Tümel olumlu

E – Tümel olumsuz

I – Tikel olumlu

O – Tikel olumsuz

önermeyi gösterir. Bir önerme özne ve yüklemiyle birlikte ait olduğu önerme grubuna göre SaP, SeP, SiP, SoP şekillerinden biriyle gösterilir. S önermenin öznesine, P ise yüklemine karşılık gelir. Bu şekilde ifade ettikten sonra şimdi karşıtlık ilişkilerini incelemeye geçebiliriz.

Örneğin;

“Bütün insanlar öğretmendir.” SaP - Y

“Hiçbir insan öğretmen değildir.” SeP - Y

önermeleri üst karşıtdırlar. İki önermenin de doğruluk değeri yanlıştır.

Alt karşıt önermeler ise, birlikte doğru olabilirlerken, birlikte yanlış olmaları mümkün değildir. Birinin doğru diğerinin yanlış olması veya ikisininde birlikte doğru olmaları önermelerin içeriğiyle ilgilidir. Örneğin;

“Bazı insanlar öğretmendir.” SiP -D

“Bazı insanlar öğretmen değildir.” SoP -D

önermelerinin her ikisinde doğrudur. Fakat,

“Bazı insanlar ölümlüdür.” SiP -D

“Bazı insanlar ölümsüzdür.” SoP - Y

önermeleri ise görüldüğü üzere birisi doğruyken diğeri yanlış değerini almaktadır. Aslında bu doğrulukları belirlemek tikel önermelere ait tümel önermelerin doğruluklarını belirlemekle sağlanabilir.

Nitelikleri aynı, fakat nicelikleri farklı iki önerme arasındaki ilişkiye altıklık ilişkisi denir. Tümel olumlu ile tikel olumlu ve tümel olumsuz ile tikel olumsuz önermeleri altıklık ilişkisine sahiptir. Altık önermelerde eğer tümel olan doğru ise, tikel olan da doğrudur. Fakat, tümellerin yanlış olması tikellerin yanlış olmasını gerektirmez. Aksine, tikellerin yanlış olduğu durumda tümeller de yanlıştır. Bu durumlardan birisine örnek olarak;

“Bazı insanlar zengindir.” SiP -D

“Bütün insanlar zengindir.” SaP -Y

verilebilir. Görüldüğü gibi tikelin doğru olması, tümelin doğru olmasını gerektirmemektedir.

Nitelik ve nicelik yönünden birbirlerinden farklı önermeler, birbirleriyle çelişik önermelerdir. Tümel olumlu -SaP- ile tikel olumsuz -SoP-, tikel olumlu -SiP- ile tümel olumsuz -SeP- çelişik önermelerdir. Çelişik önermelerin birisi doğruyken diğeri mutlaka yanlıştır. Örneğin;

“Bazı canlılar iki ayaklıdır.” SiP -D

“Hiçbir canlı iki ayaklı değildir.” SeP -Y

b) Eşdeğerlik Çıkarımları

Doğruluk değeri aynı olan iki önermeye eşdeğer, diyoruz. Eşdeğerlik çıkarımları ise doğruluk değerinin aynı kalmasını sağlayarak bir takım işlemler yoluyla başka bir önerme elde etme işlemidir. Bu işleme döndürme işlemi denir ve üç şekilde yapılabilir; evirme, çevirme ve devirme.

Evirme; önermenin niteliğini ve niceliğini değiştirmeden öznesini yüklem, yüklemine de özne yapma işleminin adıdır. Elde edilen yeni önerme öncülün evriğidir ve aynı doğruluk değerine sahiptir. Buna göre standart form kategorik önermeler dediğimiz dört önerme grubunun evriği şu şekilde oluşur; tümel olumlunun evriği yoktur, tikel olumlunun evriği tikel olumlu, tümel olumsuzun evriği tümel olumsuz ve tikel olumsuzun evriği doğruluk değerini korumadığından dolayı yoktur. Bunlardan sadece birine örnek vermekle yetinelim.

“Hiçbir hayvan, dört ayaklı değildir.” SeP –Y

“Hiçbir dörtayaklı, hayvan değildir.” SeP –Y

Çevirme ise iki adımda tamamlanan bir çıkarım biçimidir ve bütün önermelerin çevriği alınabilir. Önce önermenin niteliği değiştirilerek olumlu ise olumsuz, olumsuz ise olumlu yapılır. İkinci adımda, yeni önermenin yüklemine olumsuzluğu yani bütünleyicisi alınır. Örneğin;

“Bütün insanlar ölümlüdür.” SaP –D

“Hiçbir insan ölümlü olmayan değildir.” SeP –D

görüldüğü gibi, öncülün niteliği değişmiş haldeki üst karşıtı olan “Hiçbir insan ölümlü değildir” önermesinin yüklemi, tümleyeni “ölümlü olmayan” ile yer değiştirilerek sonuç elde edilmiştir.

Önermelerin nitelik ve niceliğini bozmadan öznesinin olumsuzunu yüklem, yüklemine olumsuzunu özne yaparak yeni bir önerme elde etme işlemine de devirme denilir. Bu çıkarım şekli de, evrik gibi bazı standart form önermeler için geçerli bir çıkarım değildir. Tümel olumlu ve tikel olumsuzun devrikleri geçerli tikel olumlu ve tümel olumsuzun devrikleri geçersizdir. Örneğin;

“Tüm insanlar canlıdır” SaP- D

“Tüm canlı olmayanlar insan olmayanlardır.” SaP -D

Canlı olmayan ve insan olmayan kavramları, öncüldeki terimlerin tümleyenleridir. Bunlar devirmenin tanımına göre yer değiştirerek sonuç elde edilmiştir.

2.2 KIYAS (SYLLOGISME)

2.2.1 KIYASIN TANIMI

Akıl yürütme formları içerisinde en yetkin konuma sahip olan kıyas, Aristo mantığının en önemli kısmını oluşturur. Daha önce de belirtildiği gibi, formel mantığın kavramlar ve önermeler mantığı, bu bölüme bir hazırlık niteliği taşır.

Genel anlamıyla akıl yürütme veya çıkarım diye tanımladığımız zihin faaliyeti, bilinenler vasıtasıyla bilinmeyenlere ulaşmak anlamına gelir. Bilgilerimizi sadece önermeler yoluyla ifade edebildiğimize göre, akıl yürütme faaliyetimizin de önermeler arasındaki ilişkilerden meydana geleceği açıktır. Akıl yürütme dediğimiz işlem dolaylı ve dolaysız olarak iki grup altında toplanır. Tek bir önermeye dayanılarak yapılan çıkarımlara dolaysız veya doğrudan çıkarım denilir. Bundan önceki bölümde önermeler arasındaki ilişkiler incelenirken gördüğümüz karşı olma ve eşdeğerlik ilişkileri doğrudan çıkarım grubunu oluştururlar. Eğer çıkarım bir veya birden çok önerme yoluyla yapılıyorsa, bu durumda dolaylı bir çıkarım sözkonusudur. Dolaylı akıl yürütme zihnin takip ettiği tarza göre üç şekilde olur. Zihin akıl yürütme sırasında, tümellerden tikellere veya özellere ulaşıyorsa, bu tip bir akıl yürütme şekline tümdengelim veya dedüktif akıl yürütme denir. Fakat zihin, bunun tersi bir şekilde, tikellerden yola çıkıp tümele ulaşmaya çalışıyorsa, bu şekle de tümevarım veya indüktif akıl yürütme denir. Tikellerin benzerliğinden yola çıkılarak, yine bir tikel hakkında bir hüküm oluşturulmaya çalışılıyorsa, buna da benzetme yoluyla akıl yürütme veya anoloji denir. Kıyas, dolaylı akıl yürütme formları içinde, dedüktif bir akıl yürütme olarak en yetkin çıkarım tekniğidir.

Aristo kıyası; “Kıyas bir sözdür ki kendisine, bazı şeylerin konulmasıyla, bu konulan verilerden başka bir şey, sadece bu veriler dolayısıyla gerekli olarak çıkar”[12] şeklinde tanımlamaktadır. Bu, sonuçta söylenecek sözün, zorunlu olarak öncekilerden çıkacağı manasını taşır. O halde, kıyas için şöyle bir tanım da yapmak mümkündür: Kıyas, zihnin verilmiş önermelere dayanarak, onlardan zorunlu sonuçları çıkarması işlemidir.

2.2.2 KIYAS ÇEŞİTLERİ

Bir kıyas, öncüller ve bu öncüllere zorunlu olarak bağlı olan bir sonuçtan oluşur. Öncüllerin sayısı ve yapısı kıyasın çeşitlerini belirler. Basit ve bileşik olmak üzere iki tür kıyastan söz etmek mümkündür. Basit kıyaslar iki veya daha çok basit önerme ile bir sonuçtan oluşan kıyas şeklidir. Bileşik kıyaslar ise içerisinde bileşik ve basit önermeleri birden bulundururlar.

1- Basit (*Kategorik*) Kıyaslar

a) Basit veya Kesin Kıyaslar

Mantıkçıların 'Syllogisme categoric' adı altında inceledikleri kıyaslardır. Klasik mantığın kurucusu olan Aristo yalnız bu kıyaslar üzerinde durmuştur.

Geleneksel mantığın üzerinde en çok durduğu kıyas şeklidir. Basit bir kıyas, iki öncül ve bir sonuçtan meydana gelir. Önergeler kategorik yani basit önerme türünden olduğu için, diğer bir adı da kategorik kıyastır. Dedüktif nitelikte olduğunu bildiğimiz kıyasın bu çeşidinin yapısı incelendiğinde görülecektir ki, öncüllerde ve sonuçta terimler ikişer defa geçmektedir. Bu terimlerden bir tanesi sadece öncüllerde, diğerleri ise hem öncül hem de sonuçta geçmektedir. Yalnız öncüllerde geçen terime orta terim denir. Sonuçta yüklem olarak geçen terime büyük terim, özne olarak geçen terime ise küçük terim denir. Büyük terimin bulunduğu önermeye büyük önerme, küçük terimin bulunduğu önermeye ise küçük önerme denilir. Sonuç önermesi ise küçük önerme ile büyük önermeden oluşur.

Kıyasta en önemli işlevi üzerine alan orta terim, bir kavramdan diğerine geçerken aracı durumundadır. Bundan dolayı da iki hüküm arasındaki ilişkiyi kurmayı sağlar ve büyük terimdeki hükmü küçük terime aktarır.

Örneğin;

Bütün <u>kuşlar</u> <u>kanatlıdır</u> .	(B.Ö)	}	Öncüller
O.T B.T			
<u>Kanarya</u> bir <u>kuştur</u> .	(K.Ö)	}	
K.T O.T			

gibi öncüllerden zihin, kuş olma nedeninde birleştiklerinden ötürü, büyük terimdeki kanatlılık özelliğinin küçük terim olan kanaryaya da iletilmesini sağlayarak, onda da onaylanmasını gerekli görür ve

Kanarya da kanatlıdır sonucunu çıkarır.

K.T B.T

Bir basit kıyasta büyük terim, kaplamı en büyük olan ve sonuçta yüklem olarak bulunan terimdir. Küçük terim ise, kaplamı en az ve sonuçta özne olarak bulunan terimdir. Büyük ve küçük terimler arasında bağ kurup neden birliği sağlayan, ayrıca karşılaştırma yapmayı mümkün kılan ve sonuçta yer almayan terim ise orta terimdir.

Basit kıyas, terimlerinin kaplamı ve işlemi bakımından incelenecek olursa; “Cins için doğru olan türler ve onların üyeleri içinde doğrudur” prensibine dayanılarak, sonucun zorunlu olarak çıktığı görülür. Çünkü, birinci önermenin konusu, aynı önermenin kaplamı içine ve ikinci önermenin konusuda birinci önermenin konusunun kaplamı içerisine girdiğinden dolayı, sonuç zorunlu olarak küçük terimin büyük terimin kaplamının içinde olmasını gerektirir. Aynı şekilde işlem bakımından incelenecek olursa bu örnek baz alınarak; Kanarya kuş olma özelliği ve kuşların da kanatlı olma özelliği bilindiğine göre, kanaryaların da kanatlı olma özelliğine sahip olması yine zorunlu bir sonuçtur[4].

Bütün dedüktif çıkarımlarda akıl yürütmenin geçerliliği, önermelerin içeriğinden çok biçimi ile ilgilidir. Bir akıl yürütmenin geçerli olması, daha önce ifade edildiği gibi, öncüller doğru sayıldığında, sonucun da zorunlu olarak bu öncüller gereği doğru olma durumudur. O halde içerik ne olursa olsun, geçerli bir çıkarımın biçimi, onu örnek alan diğer çıkarımlar için de aynı sonucu verecektir. Başka bir ifade ile, çıkarımı geçerli veya geçersiz yapan, önermelerin doğruluk değeri veya terimler değil, doğrudan doğruya bu terimlerin veya önermelerin birbiriyle olan ilişkilerinden oluşan çıkarım biçimidir[13,14,15].

Kategorik yani basit bir kıyasın biçimi, kıyası oluşturan önermelerin sıralanışı ve orta terimin öncüllerdeki yerine göre belirlenir. Önermelerin sıralanışından kastımız, basit kıyası oluşturan basit önermelerin kıyastaki konumudur. Basit önermeler bildiğimiz gibi dört çeşitte olabiliyordu. Bunlar, harfsel ifadeleriyle birlikte; A-Tümel olumlu, E-Tümel olumsuz, I-Tikel olumlu ve O-Tikel olumsuz durumlarıdır. O halde kıyas, bu önermelerin sıralanışına göre örneğin, EOA, AII, AEE, gibi durumlardan

oluşabilir. Böyle bir sıralanımda, ilk önerme temsilcisi olan harf büyük önermeyi, ikinci harf küçük önermeyi ve son harfde sonuç önermesini gösterir.

Orta terimin öncüllerdeki yerinin de, tasımın biçiminin belirlenmesinde önemli olduğunu söyledik. Önergelerin sıralanımı, biçimi tam olarak belirlemediği için geçerliğin saptanmasında yeterli bir ölçüt olamaz. İki tasım kalıbı sıralanım yönünden aynı, fakat orta terimin konumu yönünden farklılarsa, biçim yönünden farklıdırlar. Orta terim öncüllerde şu dört durumda bulunabilir: özne-yüklem, yüklem-yüklem, özne-özne ve yüklem-özne. Bu durumlara göre bir kıyas şu şekillerde olabilir;

I. Şekil	II. Şekil	III. Şekil	IV. Şekil
OB	BO	OB	BO
KO	KO	OK	OK
KB	KB	KB	KB

Orta terimin konumunu ve öncüllerin sıralanımını değiştirerek değişik kıyaslar oluşturmak mümkün olur. Her kıyasta üç önerme ve bu önermeler orta terimin öncüllerdeki yeri de hesaba katılırsa toplam olarak $4^3 \times 4 = 256$ tane kıyas oluşturmak mümkündür. Fakat bu 256 kıyastan sadece 24 tanesi geçerli bir çıkarım yapılmasına izin verir. Geçerli çıkarımlar ortaçağ mantıkçılarınca bunları temsil etmek amacıyla bir anlamı olmayan kelimelerle isimlendirilmişlerdir. Bunlar orta terimin belirlediği şekillere göre;

1. şekil: BARBARA, CELARENT, FERIO, DARII, *BARBARI, CELARONT*
2. şekil: CESARE, CAMESTRES, FESTINO, BAROCO, *CESARO, CAMESTROP*
3. şekil: DISAMIS, DATISI, BOCARDO, FERISON, *DARAPTI, FELAPTON*
4. şekil: CAMENES, DIMARIS, FRESISON, *BRAMANTIP, CAMENOP, FESAPO*

olarak adlandırılırlar. Bu isimlerin içinde geçen sesli harflerin sırası, geçerli kıyasın biçiminde yer alan önermelerin sırasıdır. Aristo, kıyasları mükemmel olan ve mükemmel olmayan olarak ikiye ayırmıştır. Mükemmel olan kıyaslar, 1. şekildeki ilk dört kıyastır. Diğer kıyaslar önermeler arasındaki ilişkiler kullanılarak bu dört şekle indirgenebildiği için mükemmel olarak nitelendirilmişlerdir. Bunlar arasında en gözde olanı tümel olumluyu sonuç verdiği için Barbara biçimli kıyastır. İtalik olarak

yazılmış kıyas isimleri zayıf veya gevşek olarak nitelendirilirler. Zayıf kıyastan kasıt ise, sonucun zorunluluğu için ek bir varsayıma ihtiyaç duyan kıyas şekli olmasıdır.

Basit Kıyasın Geçerlilik Şartları

Geçerliliğin yeterli ve gerekli koşulları gözüyle bakılabilecek bu kurallar geçerli kıyasların biçimlerinin incelenmesiyle ortaya çıkarılmıştır. Bunlar geçerliliğin denetiminde birer ölçüt olarak kullanılırlar.

- 1- Orta terim, iki öncülde de tikel olarak alınamaz. Yani, en azından bir öncülde dağıtılmış olarak bulunmalıdır.
- 2- Sonuçta bulunan küçük ve büyük terimin kaplamı, öncüllerdeki kaplamını aşmamalıdır.
- 3- İki olumsuz öncülle yapılan kıyas geçerli olamaz.
- 4- Öncüllerin ikisi de tikel ise, geçerli bir kıyas elde edilemez. Yani, öncüllerden biri tümel olmalıdır.
- 5- Öncüllerin birisi tikel ise, sonuçta tikeldir.
- 6- Öncüller olumlu ise, sonuç olumsuz olmaz.
- 7- Öncüllerden biri olumsuz ise, sonuç da olumsuzdur. Yani, sonuç olumsuzsa öncüllerin biri olumsuzdur demek de doğrudur.

Bu kurallar kullanılarak yukarıda belirtilen birkaç kıyas şeklini inceleyelim.

Örneğin;

AAE: Sonuç vermez. Çünkü olumlu öncüllerden olumsuz sonuç çıkmaz.

AEA: Sonuç vermez. Çünkü öncüllerden biri olumsuzsa sonuç da olumsuz olmalıdır.

AIE: Sonuç vermez. Çünkü olumlu öncüllerden olumsuz sonuç çıkmaz.

OOO: Sonuç vermez. Çünkü, iki tikel öncülden bir sonuç çıkmaz.

Görüldüğü gibi bu kuralları kullanarak kıyasın geçerliliğini tespit etmek çok kolay bir hal almaktadır.

b) Zincirleme Kıyas (Polysyllogism)

İkiden çok basit önerme aracılığıyla kurulan kıyas türüdür. Öncüllerin düzenlenişine göre, farklı zincirleme kıyaslardan söz edilebilir.

Birinci öncülün yüklemine ikinci öncüle konu, ikincisinin yüklemine üçüncüye konu şeklinde devam ederek sonuçta birinci önermenin konusuyla son önermenin yüklemine birbirine bağlayan zincirleme kıyas türüne, geri giden zincirleme kıyas denir. Genel form olarak şu şekildedir;

Bütün A' lar B' dir.

Bütün B' ler C' dir.

Bütün C' ler D' dir.

Bütün D' ler E' dir.

Bütün A' lar E' dir.

Bir örnek vermek gerekirse;

Bu ırmak gürültü yapıyor.

Gürültü yapan hareket eder.

Hareket eden donmamıştır.

Donmamış olan beni taşıyamaz.

O halde, bu ırmak beni taşıyamaz.

şeklindeki bir kıyas, geri giden bir zincirleme kıyası oluşturur. İlk öncüldeki gürültü yapmak yüklemi, ikinci öncülün konusunu oluşturmuş ve diğer önermelerde bu şekilde oluşturularak sonuc, ilk önermenin konusu ve son önermenin yükleminden meydana gelmiştir.

Diğer bir zincirleme kıyas türü de ileri giden zincirleme kıyastır. Bu kıyasta diğerinin tersine, birinci önermenin konusu ikinci önermenin yüklemine, ikinci önermenin konusu üçüncü önermenin yüklemine oluşturacak şekilde devam edilerek, sonuç önermesi, birinci öncülün yüklemiyle son önermenin konusu arasında bir bağ kurulmasıyla meydana getirilir. Genel form olarak

Bütün D' lar E' dir.

Bütün C' ler D' dir.

Bütün B' ler C' dir.

Bütün A' lar B' dir.

Bütün A' lar E' dir.

Örnek olarak;

Bütün hayvanlar canlıdır.

Bütün kuşlar hayvandır.

Bütün kanaryalar kuştur.

O halde bütün kanaryalar canlıdır.

kıyası bu türden bir kıyas oluşturur[1, 13].

c) Eksik Öncüllü Kıyas (*Entimem*)

Günlük hayattaki faaliyetlerimizin birçoğu, biz farkına varmasak ve düzenli bir şekilde ifade etmesek bile kıyaslardan oluşur. Hatta bilimsel alanda da bu böyledir. Bazen doğrudan sonucu söyleyerek, bazen de sadece o sonucu meydana getiren sebepleri vurgulayarak bunu yaparız. Bunu yaparken, düzenli kıyasın aksine, öncüllerden birini veya sonucu söylemeden dile dökeriz. Fakat kıyasın diğer kısmı, zihni bir süreç olarak düşüncemizde vardır ve söylenmemiştir. İfadede eksik veya örtük tutularak fakat zihinde tam olan kıyasa dürülü anlamında entimem veya eksik önermeli kıyas denir[2].

Önermelerin veya sonucun eksik olmasına göre entimemleri üç türde değerlendirebiliriz.

1-Büyük öncülü saklı tutulan kıyaslara birinci sıradan entimem denir.

“Anne sütü faydalıdır. Çünkü, bebeğin beden gelişimini sağlar.”

gibi bir önermede “Bebeğin beden gelişimini sağlayan her şey yararlıdır” büyük öncülü saklı tutulmuştur. Kıyasta yukarıdaki haliyle gösterilen neden, sonucu zorunlu kılmaya yetmez. Fakat büyük öncülün ifade edilmesiyle, kıyasın geçerlilik şartı tamamlanır.

Bebeğin beden gelişimini sağlayan her şey faydalıdır.

Anne sütü bebeğin beden gelişimini sağlar.

Anne sütü faydalıdır.

Örnek:

(Geçici şeylere aldanmamalıdır.)(B.Ö)(saklı)

Güzellik geçicidir.

Güzelliğe aldanmamalıdır.

(Her düşünen vardır.) (saklı önerme)

Düşünüyorum.

O halde varım,

2-Küçük öncülü saklı tutulan kıyaslara, ikinci seviyeden entimem denir.

“Sigara içmek ömrü kısaltır, bu gidişle dostumuzun sonu yakındır.”

Bu çıkarımda ikinci öncül, dostumuzun sigara içtiği saklı tutulmuştur.

Sigara içmek ömrü kısaltır.

(Dostumuz sigara içmektedir (K.Ö saklı))

Dostumuzun sonu yakındır.

3- Sonucu saklı tutulan önermelere, üçüncü sıradan entimem denir.

“Odtü’de okuyan öğrenciler nitelikli vasıflara sahiptir. Ahmet Odtü de okumaktadır”

gerçekten bu çıkarımda sonuç, Ahmet nitelikli vasıflara sahiptir önermesi saklı tutulmuştur.

Odtü de okuyan öğrenciler nitelikli vasıflara sahiptir.

Ahmet Odtü de okumaktadır

(Ahmet nitelikli vasıflara sahiptir) (Saklı olan sonuç önermesi)

Bu tür kıyasların konuşmada sıkça kullanılması dinleyicinin özelliğine, amacımıza ve yapmak istediğimiz etkiye göre farklılık gösterir. Büyük öncülün saklı tutulması, dinleyiciyle çıkarımın dayanağını oluşturan ilkede anlaşmazlığa düşme endişesinden kaçınmak gerektiği zaman kullanılabilecek bir yöntem, küçük öncülün saklı tutulması ise her şeyi açıkça söylememe durumlarında kullanılabilecek bir yöntemdir. Aslında entimemin türü ne olursa olsun, konuşmalarımızda her şeyin açıkça söylenmemesine, okuyucuyu veya dinleyiciyi düşüncemize ortak yapma inceliği, ya da düpedüz, deyiş biçimi veya ustalık gereği diye de bakılabilir. Aksi takdirde düşüncelerimizi hep düzenli ve tam bir kıyas biçiminde dile getirmek, hem bizim için hem de dinleyici tarafından katlanılması zor bir yük olurdu[1,2].

2- Kategorik Olmayan Kıyaslar

Kıyasta tüm öncüllerin basit önermelerden oluştuğu durumların yanında, basit önermelerin önerme eklemleri yardımıyla biraraya getirilmesinden oluşan bileşik önermelerden kurulu kıyaslar da vardır. Büyük öncülün aldığı şekle göre bileşik kıyaslar *şartlı*, *seçenekli* ve bunların bir karışımı olan *ikilemdiye* üçe ayrılabilirler.

a-Şartlı (Hipotetik) Kıyaslar

Büyük öncülü şartlı önerme olan kıyas türüdür. Büyük öncülde “ise” ekleminde önce gelen önermeye ön bileşen, sonra gelene ise ard bileşen diyeceğiz[2]. Şartlı kıyaslarda, küçük önerme durumunda olan kategorik önermenin, büyük önermenin bileşenlerini evetlemesi (tasdik etme) veya değillemesi (inkar etme) durumları ortaya çıkar. Öncüller arasındaki bu ilişkiye göre, şartlı kıyaslarda biçim yönünde dört durum söz konusudur.

i) Ön bileşenin evetlenmesi

Büyük önermenin ön bileşeninin küçük önerme tarafından doğrulandığı durumlarda, büyük önermenin ard bileşeni sonuç olmak durumundadır. Çünkü büyük öncül, ard bileşenin oluşmasını bir koşula bağlı tutmaktadır. Bu koşul küçük önermede yerine getirildiğinden, dolayı ard bileşenin sonuç olarak ortaya çıkması zorunlu bir hal alır. Küçük önerme bu durumu yerine getirmediğinde, sonucun gerçekleşmediğini söylememiz için herhangi bir neden yoktur. Çünkü, sonucun oluşabilmesi için ön bileşen durumundaki önerme sadece yeterli koşul durumunda olup gerekli bir koşul değildir. Genel olarak aşağıdaki formdadırlar;

Eğer A, B ise A, C' dir.

A, B' dir.

O halde, A, C' dir.

Eğer A, B ise C, D' dir.

A, B' dir.

O halde, C, D' dir

Bir örnek vermek gerekirse:

Eğer bugün pazarsa, tatildir.

Bugün pazardır.

O halde, bugün tatildir.

Bu tür kıyasların teknik adı *modus ponens* dir. Modus kip, tarz anlamında, ponens, koymak var olduğunu tasdik etmek anlamındadır. Yani ikinci öncül, ilk öncülün ilk bileşenini tasdik etmektedir[2,13].

ii) Ön bileşenin değillenmesi

Büyük önermenin ön bileşeninin değillendiği durumlarda, art bileşenin değillenmesi zorunlu değildir. Bu durum yukarıda değinilen özellikten kaynaklanmaktadır. Yani, ön bileşenin ard bileşen için gerekli bir koşul olmaması hali bu durumu oluşturur. Ön bileşen gerçekleşmediği halde ard bileşen, pekala meydana gelebilir.

Eğer A, B ise A, C'dir.

Eğer A, B ise C, D'dir.

A, B değildir.

A, B değildir.

O halde, A, C değildir.

O halde, C, D değildir

Eğer bir kişi şairse ona hayranlık duyulur.

Hasan Bey şair değildir.

O halde Hasan Bey'e hayranlık duyulmaz.

Örnekten de görüldüğü gibi, bir kişinin şair olmaması ona hayranlık duyulmadığı anlamına gelemaz. Pekala da Hasan Bey'in hayranlık duyulacak başka nitelikleri olması mümkündür. Dolayısıyla, bu çıkarım, öncüller sonucu zorunlu kılmadığından dolayı geçerli bir çıkarım değildir[13].

iii) Ard bileşenin evetlenmesi

Küçük önermenin, ard bileşeni evetlediği durumlarda sonuç, olarak ön bileşenin evetlenmesi durumunun alınması, geçerli bir kıyas oluşturmaz. Çünkü şartlı bir kıyasta ard bileşenin gerçekleşmesi, ön bileşenin yerine gelmesi durumunu içerdiği halde, bunun tersi doğru değildir. Biçim olarak şöyle gösterilebilir:

Eğer A, B ise A, C'dir.

Eğer A, B ise C, D'dir.

A, C'dir.

C, D'dir

O halde, A, B'dir.

O halde, A, B'dir.

Eğer o zehir almışsa ölecektir.

O öldü.

O halde o zehir almıştır.

Örnekteki şahsın ölmesinin sebebinin zehir haricinde başka şeyler olabileceği açıktır. Onun ölmüş olması, zorunlu olarak zehir aldığını göstermediğinden dolayı, kıyas geçersizdir[13].

iv) Art bileşenin değillenmesi

Art bileşenin, küçük öncül tarafından değillenmesi halinde, sonuç olarak ön bileşen değillenerek oluşturulan kıyas geçerlidir. Çünkü, koşullu bir önermede ard bileşen, ön bileşenin gerekli bir koşulu durumundadır. Bu gerekli koşul gerçekleşmez ise, gerçekleşmesi için gerekli olan varsayım da gerçekleşmemiş demektir.

Eğer A, B ise A, C' dir.

Eğer A, B ise C, D' dir.

A, C değildir.

C, D değildir

O halde, A, B değildir.

O halde, A, B değildir.

Sıvı olan bir madde akıcıdır.

Bu madde akıyor.

O halde, bu madde sıvı değildir.

b) Seçenekli veya Ayrık Şartlı Kıyaslar

Büyük öncülü seçenekli bir bileşik önermeden oluşan kıyas grubudur. Seçenekli kıyasın belkemiği durumunda bulunan büyük önerme, 'veya' ve 'ya...yada' eklemleriyle kurulur ve bu eklemler kıyasta seçeneklerin varlığını bildirir. Şartlı kıyasta olduğu gibi, küçük önerme büyük önermedeki bileşenleri evetleyerek veya değilleyerek sonucu belirleme görevini üstlenir. Bu durumda sonuç büyük önermedeki evetlenemeyen veya değillenemeyen diğer seçenek olmak durumundadır[2]. Bu şartlar altında dört farklı seçenekli kıyas şekli oluşturmak mümkündür. Bu dört şekil hemen tahmin edileceği üzere; birinci seçeneğin evetlenmesi ve değillenmesi ile ikinci seçeneğin evetlenmesi ve değillenmesi durumlarıdır.

1.Seçeneğin Evetlenmesi:

Ya A Ya B' dir.

Bu ev beyazdır veya siyahtır.

A' dir.

Bu ev beyazdır.

O halde B değildir.

Bu ev siyah değildir.

Bu şekil altında yapılan bazı kıyaslarda sonuç önermesini, ikinci seçeneğin değillenmesi olarak almak, geçersiz bir kıyas oluşturacaktır. Çünkü bu durumlar, birinci seçeneğin ikinci seçeneği içerdiği durumlar olacaktır. Bundan dolayı da ikinci seçeneğin inkar edilmesi, yani değillenmesi mümkün değildir.

Ya A ya B'dir.	Bu gün hava ya yağmurludur ya bulutludur.
A' dır.	Hava yağmurludur.
B değildir.	Bulutlu değildir.

Yağmurun yağma olayının gerçekleşmesi zaten havanın bulutlu olmasını gerektiren bir durum olduğundan dolayı bu durum gerçekleşmeyecektir veya gerçekleşmedi denilemez.

1.Seçeneğin Değillenmesi

Ya A ya B'dir.	Şu gelen insan ya erkektir ya bayandır.
A değildir.	Gelen insan erkek değildir.
O halde B' dir.	O halde bayandır.

2.Seçeneğin Evetlenmesi

Ya A ya B'dir.	Ya güneş doğmuştur ya gecedir.
B 'dir	Gecedir
A değildir.	Güneş doğmuş değildir.

2.Seçeneğin Değillenmesi

Ya A ya B'dir.	Bu sene ya hükümet krizi, ya seçim olacaktır.
B değildir.	Seçim olmayacaktır.
A dır.	Hükümet krizi olacaktır.

Ayrık şartlı kıyasın geçerli olması için dikkat edilmesi gerekli olan bir nokta da büyük önerme konumunda olan seçenekli önermenin bağdaşır bir yapıda değilde bağdaşmaz nitelikte olmasıdır. Bağdaşır seçenekli önermeler, bir seçeneğin diğerini tüketmediği veya birinin olması diğer seçeneğin olmamasını zorunlu kılmayan önerme türüdür. Bağdaşmaz türde olan seçenekli önermede ise, seçeneklerden birinin olması diğerinin olmaması için gerekli bir koşul oluşturur. Yukarıda incelediğimiz şekiller bu kuralı göz önünde tutarak oluşturulmuştur. Aksi durumda seçeneklerden

birini seçmek, diğerini reddetmeyi gerektirmeyeceğinden dolayı çıkarımların geçerliliğini denetim altına almamız mümkün olmazdı.

c) İkilem (Dilemma)

Yukarıda ele alınan bileşik kıyas türlerini bir araya getirerek yeni bir kıyas türü oluşturmak mümkündür. Öncülleri hem şartlı hem de seçenekli önermelerden oluşan bu tür kıyaslara ikilem denir. İkilemin geçerlilik şartları da yine bu önermelerin yer aldığı kıyas şekillerindeki ilkelere bağlıdır. Örneğin;

Eğer iyi bir arkadaşsan o'na yardım edersin, ve eğer iyi bir arkadaşsan onun bu haline üzülürsün.

Ne ona yardım ediyorsun, ne de onun bu haline üzülüyorsun.

O halde, sen iyi bir arkadaş değilsin[8].

gibi bir kıyas ikilemi oluşturur.

İkilemde büyük öncül iki şartlı önermeden, küçük öncülde seçenekli bir önermeden meydana gelir. Sonuç önermesi bu önermeler arasındaki ilişkilere bağlı olarak şekillenir. Eğer ikilemde, sonuç önermesi büyük önermenin bir teriminden oluşuyorsa basit dilem, birden çok teriminden oluşuyorsa karmaşık dilem adını alır. Yine küçük öncülün büyük öncülü evetlemesine veya değillemesine göre dilem yıkıcı ve yapıcı olarak ikiye ayrılır. Eğer küçük öncüldeki seçenekler, şartlı önermelerden meydana gelen büyük önermenin ön bileşenlerini evetleyici ise, dileme yapıcı dilem denir. Seçenekler, büyük önermenin ard bileşenlerini değilliyorsa bu durumda da dileme yıkıcı dilem adı verilir. Bu koşullar, altında toplam dört adet dilemin biçimsel yapıları aşağıdaki gibi gösterilebilir.

i) Basit yapıcı ikilem

Eğer A ise B'dir ve eğer C ise B'dir.

Ya A ya da C'dir.

O halde B' dir.

Örneğin;

Eğer çalışırsan sınıfını geçersin ve eğer kopya çekersen yine sınıfını geçersin.

Ya çalışacaksın ya da kopya çekeceksin

Her iki halde de sınıfını geçersin

ii) Basit yıkıcı ikilem

Eğer A ise B'dir ve eğer A ise C'dir.

Ne B ne de C'dir.

O halde A değildir.

Konuya girişte verilen örnek bu dilem biçimine bir örnek teşkil eder.

iii) Karmaşık yapıcı ikilem

Eğer A ise B 'dir ve eğer C ise D' dir.

Ya A ya da C'dir.

O halde ya B'dir, ya da D'dir.

Örneğin;

Yarın hava güneşli olursa pikniğe gideceğiz, güneşsiz olursa ders çalışacağız.

Yarın hava ya güneşli olacak, ya da güneşsiz.

O halde, ya pikniğe gideceğiz ya da ders çalışacağız.

İv) Karmaşık Yıkıcı Dilem

Eğer A ise B'dir ve eğer C ise D'dir.

Ne B ne de D'dir.

O halde, ne A ne de C değildir.

Örneğin;

Eğer bir insan akıllıysa az konuşur ve eğer bir insan bilgiliyse alçak gönüllüdür.

Bir insan çok konuşuyorsa ve alçakgönüllü değilse

Bu insan ne akıllı ne de bilgilidir[8].

Dilemler, her zaman iyi konuşma ve ikna etme sanatının etkili bir aracı olarak kullanılmıştır. Dilem karşıdaki insanı iki seçenek karşısında bırakarak çıkmaza sokmak ve böylece yenilgiye uğratmak amacıyla kullanılır. Bir dilem karşısında kalan kişinin dileme mantıksal olarak itiraz etmesi yukarıdaki örneklerde de

görüldüğü gibi boş bir uğraştır. Çünkü, çıkarımlar geçerli olduğundan dolayı mantıksal olarak öncüllerle sonuç arasında herhangi bir boşluk yoktur. Fakat, dileme yine de itiraz edilerek böyle bir rahatsız edici durumdan kurtulmak mümkündür. Bunu dilemdeki büyük önermenin doğruluğuna itiraz etmekle, küçük önermenin seçeneklerinin tüketici olmadığını göstermekle veya aynı güçte karşı bir dilem ortaya koyarak başarmak mümkündür[1,2,13].



3. SEMBOLİK MANTIK

3.1 Aristo'dan 19. Yüzyıla Kadarki dönem

Aristo mantığı analitik olarak isimlendirmesine karşın kendisine ait mantık kitapları daha sonra Organon adı altında bir araya getirilmiştir[1]. Esere Organon, yani alet isminin verilmesi, Aristo'nun mantığı, varlığı bilmenin aracı olarak görmesinden kaynaklanmaktadır. Daha sonraki yüzyıllarda diğer mantıkçılar Organon'un kendi bütünlüğünü, kıyasa ağırlık veren bir görünüm şeklinde değiştirmişlerdir. Yeniçağın başlamasıyla birlikte, bilmenin aracı hakkında, “nesneler arasındaki nedensel ilişkilerin ortaya konulabilmesi ancak empirik bir tutumla ortaya konabilir ve bu tutumun başlıca aracıda tümevarım mantığı olmalıdır” görüşü ağırlık kazanmaya başladı. Bu çabalar sonucu, Aristo mantığı yerini deney ve gözlemle elde edilmiş bilgilerin genelleştirilmesi olan indüktif düşünceye bırakıyordu. Artık mantık, bilgi kuramının içinde değerlendirilmeye başlanmıştır. Metodoloji sorunlarına geliştirilen çözümler doğrultusunda mantık da nasibini almıştır. İlerleyen dönemlerde ve yine Yeniçağın başlarında Aristo mantığına karşı geliştirilen bu karşı tutumun gerekçesinin, mantığın ontoloji metafizik ve ilahiyat gibi konularla yakından ilişkili olmasının getirdiği sıkıntılar ve mantığın alanını bunlardan temizleyerek onu sadece bilimsel bilgi hizmetinde salt bir şekilde kullanmayı amaçlayan dünya anlayışı olduğunu görmek gerekir. Bu tepkiler ilerde bir salt mantık oluşturma çabasının adı olan lojistiğin doğmasına yol açacaktır.

3.2 Lojistiğe Geçiş

Yukarıda bahsedilen gerekçeler doğrultusunda 19. yüzyıl mantık alanında gelişmelere sahne olmaya başladı. Fakat, ilk çalışmalar kendi alanlarına çözüm aramak için çıktıkları yolda, mantığa kurtarıcı gözüyle bakan matematikçi filozoflardan geldi. De Morgan, mantığı matematiksel sembollerle ifade ederek bu konuda ki ilk çalışmayı ortaya koyan mantıkçıların başında gelir[2,17]. Yine o, özne yüklem ilişkisine dayanan önerme kalıplarından farklı olarak başka önerme formlarının da varlığına dikkat çekti[2]. Diğer taraftan, mantığın

matematikselleşmesinin yanı sıra matematiğin mantıktan türetilmesi yönündeki çabalar gözlemleniyor. G. Frege, B. Russell, A. Whitehead gibi otoriteler bu çabanın temsilcileridirler[1,2].

Mantıkçılar, cebirdeki gibi sembollere dayanan bir hesaplama tekniği geliştirerek, bununla önermeler arası ilişkileri ve çıkarım formlarını daha kolay ve daha basit bir şekilde ifade edebilme yollarını ortaya koydular. Geliştirdikleri semboller kümesi ve hesaplamaların yapılabileceği işlemlerin tanımlanması sonrasında, artık önermelerin yerine sembollerin konulmasıyla, içerikten bağımsız olarak, geçerlilik testi yapmak mümkün oluyordu. Lojistik, klasik mantıktan farklı olarak, mantığın yapı taşı olan kavramlar yerine önermeleri koyarak, bu konuda da farklılığını gösterdi[1].

Böyle bir hesaplama tekniğinin (kalkül), mantık içinde ve mantıksal ilişkilerin bir çizelgesi halinde kurulabileceği tezinden hareket eden lojistikçiler, cebirsel kalkülü kendilerine örnek olarak alıyorlardı. Cebirsel kalkül nasıl ki bir işaret, sembol ve kurallar demeti ise ve bu kalkül nasıl ki “sayılar evreni” denen bir içerik için kullanılabiliriyorsa, aynı şey mantıksal kalkül için de yapılabilir. Buna göre bir mantıksal kalkül, önermeler evreni için geliştirilmiş bir işaret, sembol ve kurallar demeti olacaktır. Cebir nasıl ki sayıların yerine harfleri koyuyorsa, mantık da önermeler yerine harflere başvuracaktır. Buna göre lojistikçiler için yapılması gereken şey, mantığın alanını bir önermeler evreni olarak görmek ve önermeleri içerikleriyle değil, birer işaretle, birer harfle, kısacası sembollerle göstermek ve önermeler arasındaki ilişkileri de yine sembollerle gösterilen bazı işaret ve kurallara göre bir yapma dil içerisinde formüleştirmektir[1]. Bu salt, formel ve içeriksiz yapı, bir semboller düzeni olarak, nasıl ki cebirsel semboller içerik için kullanıldıklarında, bu içerik yani sayılar arasındaki ilişkileri gösterip, kanıtlamaya imkan sağlıyorsa; önermeler arası ilişkileri gösterip kanıtlamaya ve en önemlisi bu ilişkileri denetlemeye imkan sağlar. Kısacası, mantıksal kalkül a) İçeriksiz formel bir işaret ve kurallar topluluğudur, b) bu işaret ve kurallar topluluğu, içeriğe uygulanabilir ve içeriği denetleyebilir bir araçtır. İşte böyle bir sembolik dilin sadece sayılar için değil, kavramlar ve önermeler içinde geliştirilebileceğini ilk kez açıklıkla gören ve sembolik bir kavram ve önerme dili, bir kalkül geliştirmeye çalışan kişi W. Leibniz olmuştur[1,2]. W. Leibniz böyle bir mantık kalkülü kurulabildiği ve felsefeye uygulanabildiği takdirde, felsefenin de matematiksel modele uygun bir yapıya kavuşturulabileceğine inanıyordu. Hatta bu durumda filozoflar, ortaya attıkları

iddiaları geliştirdikleri sistemleri, bir muhasebeci titizliğiyle bu kalkül sayesinde denetleyebileceklerdi. Bu iş için felsefe kavramlarını sembollerle göstermek, kavramsal ilişkileri ise işlemlerle ortaya koymak yeterli olacaktı. W. Leibniz, felsefenin evrensel bir bilim olma imkanını böyle bir kalkül geliştirmekte buluyordu. W. Leibniz'in düşlediği gibi bir kalküle ilk örnek G. Boole'un cebirsel kalkülü oldu[2]. Burada yapılan açıklamalar klasik mantıkla lojistik arasındaki ayrımın ortaya konması için yeterlidir. Ayrıca, sembolik veya matematiksel mantık adlarıyla anılan lojistiğin iki değerli klasik mantığın bir sembolik dil içerisinde yeniden yapılandırılmasından başka bir şey olmadığının ve Aristo mantığının sembollerle sürdürülen bir devamı olduğunun görölmesi önemlidir[1].

3.3 Eklemler

Lojistikte yapılan tüm işlemler, yukarıda ne olduğu ifade edilen önermeler kalkülüne dayanır. Önermeler kalkülü, eklemlerin bir yorumuna ve bu yoruma bağlı olarak geliştirilen doğruluk fonksiyonu tablosuna dayanır.

Klasik mantıkta basit önerme yapılarını niceliksel ve niteliksel olarak dört ana grupta toplamış ve daha sonra bileşik önermeleri ise bu önermelerle bir takım bağlaçları biraraya getirerek oluşturmuştuk. İşte bileşik önermeleri meydana getiren bu gibi bağlaçların yanısıra, basit önermeler arasındaki farkı oluşturan niceliksel ve niteliksel sözcükler, eklemleri oluştururlar. Bu sözcükler sembolik mantığın yapısında da şu şekilde sınıflandırılabilirler;

a) "Değil", "ve", "veya", "işe", "ancak ve ancak.işe" bağlaçları bileşik önermeleri kurmamız için gereklidirler. Bunlara önerme eklemleri de denir.

b) Tüm, bazı, hiç, hiçbir gibi sözcükler ise bir önermenin niceliğini belirttiklerinden dolayı niceleyici olarak isimlendirilirler.

Eklemlerin bu şekilde sınıflandırılması, sembolik mantığın önermeleri inceleme şeklini de yansıtır. İlk önce niceliklerinden arınmış bir şekilde bileşik önermeler ele alınırlar. Doğruluk değerleri bileşik önermeyi oluşturan bileşenlerine göre meydana gelir. Bu doğruluk değerleri için bir doğruluk değeri tablosu çıkarılır ve önermeler arası ilişki biçimleri bu tablo yardımıyla çözümlenir. Önermeleri nicelikleriyle beraber incelerken ise sembolik mantık sınıflar mantığı temelinde konuyu ele alarak kaplamsal ilişkiler doğrultusunda kurallar geliştirmeye çalışır. Bu çalışmaların

birincisine doğruluk fonksiyonu mantığı, ikincisine ise niceleme mantığı adını vereceğiz.

3.4 Doğruluk Fonksiyonu Mantığı

Sembolik mantıktaki sembolleştirme kavramı, önermeleri içerikten soyutlayarak onları harfler yoluyla ifade etme anlamı taşır. Basit önermeler p, q, r gibi harflerle simgeleştirilirler. Her bir harf bir önermeye karşılık getirilir. Önermelerin yerini tutan sembollerle birlikte yukarıda bahsedilen ve bileşik önerme yapmaya yarayan değişmezler kullanılır. Örneğin: p: “Hava bulutlu” ve $\sim q$: “Güneş açmayacak” önermeleri ise değişmezine karşılık getireceğimiz bir sembol yardımıyla bileşik bir önerme haline sokularak;

$$p \rightarrow \sim q : \text{“Hava bulutluysa güneş açmayacak”}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu şekilde bütün bileşik önerme formlarını oluşturmak mümkündür. Diğer önerme eklemlerine standartlaşmış olarak şu simgeler karşılık getirilir.

1. Değil eklemi.....: $\sim$
2. Ve eklemi.....: $\wedge$
3. Veya eklemi.....: $\vee$
4. İse eklemi.....: $\rightarrow$
5. Ancak ve ancak eklemi.....: $\leftrightarrow$

Bu eklemlerin sembolik mantıkta kullanılabilmesi için, günlük dilde kullanılan çok anlamlılığın kurtararak herbirinin kesin anlamlar ifade eden eklemler haline getirilmesi gerekir. Fakat bu durum, eklemlerin anlamlarının daraltılmasına yol açacağından dolayı, lojistiğin dilin zengin imkanlarından yararlanamadığı, dili yoksullaştırdığı itirazlarına yol açmıştır. Lojistikçiler, dildeki belirsiz ve müphem anlamların yol açtığı problemlerden kurtulmak kaygısıyla bu sembolleştirmeyi yapmışlardır. Aristo mantığında önermelerin içerikleriyle beraber kullanılmasını, mantığın formel hale gelemeyişinin sebebi olarak gösterirler. Lojistikçiler, “mantık ancak dildeki belirsizliklerin önermelerin içeriğine zorunlu olarak yansıyan

biçiminden kurtulunarak salt bir hale getirilebilir” anlayışının temsilcisi olagelmışlerdir[1].

Doğruluk fonksiyonu, bir bileşik önermenin doğruluk değerinin bileşenlerinin alacağı doğruluk değerine bağlılığı ifade eder. Yani, bileşik önermenin doğruluğu onu oluşturan basit önermelerin alacağı doğruluk ve yanlışlığın yanısıra, bileşik önermeyi meydana getiren eklemın anlamına karşılık gelen doğruluk değerine göre belirlenir. Örneğin; “ve” eklemiyle oluşturulmuş bir bileşik önermenin doğru olabilmesi, önermeyi meydana getiren basit önermelerin her ikisinin de doğru olmasıyla mümkündür. Buradan, bileşik önermenin doğruluğu, onu oluşturan basit önermelerin doğruluğunun bir fonksiyonudur denilebilir. Fakat, eklemelerin anlamlarının kesinleştirilmesi, olgusal durum ile olgusal durumun mantıkça ifade edilişı arasında bir uyumsuzluk oluşturmaları bakımından eleştiriye uğramıştır. Lojistikçiler her ne kadar günlük dil ile sembolik dil arasında birebir karşılık olmasının zorunlu olmadığını ve bu farklılığı gidermeye çalışmanın gereksizliğini ileri sürmüş olsalar da, geliştirilen mantıktan gerçekliği kavrama ve yorumlamada model olarak kullanılabilir olması beklentisi bu iddialara şüpheyile bakmayı gerektirecektir[1].

3.4.1 Doğruluk Tabloları

Yukarıda verilen eklemelerin anlamlarının sembolik dilde kesinleştirilmesiyle beraber, onların nasıl yorumlanacağını belirlenmesi amacıyla, doğruluk tablolarının oluşturulması gerekir. Bu da yine günlük dile uygun bir biçimde yapılmaya çalışılsa da, yukarıda anılan gerekçelerden dolayı eksik bir çalışmadır. Her eklem, içinde bulunduğu önerme formunu, sahip olduğu anlam üzerine şekillendirerek ona yeni bir doğruluk değeri katar. Eklemelerin etkisini en iyi biçimde doğruluk tabloları üzerinde görmek mümkündür.

Değil eklemi verilen önermenin niteliğinin tersine çevrilmesi için kullanılır. Değil eklemının kullanılmasıyla beraber olumlu bir önerme olumsuz, olumsuz bir önerme de olumlu hale gelir. Eklem “~” sembolüyle gösterilir. Örneğin: “Ali öğretmendir” önermesini p ile gösterirsek onun değillilmesi olan “Ali öğretmen değildir” önermesini ~p ile gösterilir. Önerme doğru ise değillilmesi yanlış, yanlış ise değillilmesi doğru alınır.

Tablo 3.1 Değil ekleminin doğruluk tablosu

p	$\sim p$
D	Y
Y	D

“Ve” eklemi, içinde bulunduğu bileşik önerme formunun doğru olabilmesi için tüm bileşenlerin doğru olmasını gerektirir. Bu yüzden de tümel evetleme adını alır. Yani, bileşik önermenin tüm bileşenleri doğru olması halinde doğru diğer tüm hallerde yanlıştır.

Tablo 3.2 Tümel evetleme ekleminin doğruluk tablosu.

P	q	$p \wedge q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	Y

“Veya” eklemi, içinde bulunduğu bileşik önerme formunun doğru olabilmesi için en az bir bileşenin doğru olmasını gerektirir. Bu yüzden tikel evetleme adını alır. Tikel evetleme önermesinde, bileşenlerin her ikisinin yanlış olması durumunda bileşik önerme yanlış, diğer durumlarda önerme doğrudur.

Tablo 3.3 Tikel evetleme ekleminin doğruluk tablosu.

P	q	$p \vee q$
D	D	D
D	Y	D
Y	D	D
Y	Y	Y

Koşul önermeleri, klasik mantıktaki hipotetik önermelere karşılık gelirler ve ise eklemiyle kururlar. Koşul önermesiyle meydana getirilmiş önerme yapıları, ön bileşenin doğru ard bileşenin yanlış olduğu durumlar haricinde doğrudur. “İse” ekleminin doğruluk tablosu şu şekilde verilir.

Tablo 3.4 Koşullu ekleminin doğruluk tablosu

P	q	$p \rightarrow q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	D
Y	Y	D

Sembolik mantık içinde değişmez olarak kullanılan en son eklem “ancak ve ancak” şeklinde belirtilen karşılıklı koşul eklemidir. Bu eklemi taşıyan önerme yapıları bileşenlerin her ikisinde doğru ve her ikisinde yanlış olduğu durumlarda doğru diğer durumlarda yanlıştır.

Tablo 3.5 Karşılıklı Koşul eklemine doğruluk tablosu

P	q	$p \leftrightarrow q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	D

Bileşik önermelerin doğruluk değeri, bileşenlerinin bir fonksiyonudur ve onların doğruluk değeri tarafından belirlenir. Bu durumda bileşen sayısına göre bileşik önermenin alacağı doğruluk değeri sayısı da farklılaşacaktır. Doğruluk değeri sayısı 2^N formülüyle hesaplanır. N, bileşen sayısına karşılık gelir. Örneğin; bir bileşik önerme 3 bileşenden meydana geliyorsa doğruluk tablosunun en son sütununda bileşik önermenin alacağı doğruluk değeri sayısı 8 olmalıdır.

3.4.2 Doğruluk Tablosu Yardımıyla Doğruluk Analizi

Artık eklemlerin doğruluk tablosu oluşturulduğuna göre, sembolik mantığın bir kalkül oluşturma çabasının temelini atmışız demektir. Bu temel artık bizim için doğal dildeki bir önerme yapısını sembolleştirme ve bu önerme yapısının doğruluk değerini saptayabilme imkanını tanıyacaktır. Doğal dilde ifade edilen bir önerme, önce önermeyi oluşturan bileşenlerin sembolleştirilmesi ile Lojistik temelinde işlem yapılmaya uygun bir hale getirilir. Önermeyi oluşturan basit önerme yapıları ve eklemlerin sembolleştirilmesi işleminden sonra, önermeyi oluşturan bileşik önermeler varsa bunlar öncelik sırasına göre paranteze alınırlar. Sembolleştirme işlemi bitirildikten sonra, eklemlerin anlamlarına göre doğruluk değeri analizi yapılır.

Örneğin:

“Ahmet sigara içmeyi sürdürür ve spor yapmazsa, akciğer kanseri olacak”

şeklindeki bir önermeyi;

p: Ahmet sigara içiyor.

q: Ahmet spor yapar.

r: Ahmet akciğer kanseri olacak.

Şeklinde sembolleştirebiliriz. p ve q arasında “ve” eklemi olduğunu görmekteyiz. Ayrıca Ahmetin akciğer kanseri olması p ve q önermelerinin yerine gelmesine bağlı olduğu için önerme genel olarak bir koşul önermesi durumundadır. Bunlar gözönüne alınarak yukarıdaki önerme;

$$(p \wedge \sim q) \rightarrow r$$

şeklinde sembolleştirilir. Önermelere verilecek doğruluk değeri ve doğruluk tablosu yardımıyla bileşik önermenin doğruluk değeri tayin edilir.

Tablo 3.6 $(p \wedge \sim q) \rightarrow r$ önermesinin doğruluk tablosu.

P	q	r	$\sim q$	$(p \wedge \sim q)$	$(p \wedge \sim q) \rightarrow r$
D	D	D	Y	Y	D
D	D	Y	Y	Y	D
D	Y	D	D	D	D
D	Y	Y	D	D	Y
Y	D	D	Y	Y	D
Y	D	Y	Y	Y	D
Y	Y	D	D	Y	D
Y	Y	Y	D	Y	D

Doğruluk tablosu sadece doğruluk değeri analizi yapmakta değil, bileşik önermelerin ilerde tanımlanacak olan tutarlılık, eşdeğerlilik, geçerlilik gibi özelliklerinin ve çıkarımların geçerliliğinin denetlenmesinde de bize çözüm sunar.

3.4.3 Doğruluk Fonksiyonu Mantığında Denetleme

Mantığın öncelikli amaçlarından biri, çıkarımların geçerliliğinin denetlenmesidir. Klasik mantığın bu işi kıyas teorisi yoluyla yaptığını görmüştük. Lojistikte ise denetleme işlemi geçerlilik, tutarlılık gibi kavramların tanımı verildikten sonra öncelikli olarak doğruluk tablosu yardımıyla ve sonra da çözümleyici çizelge yöntemi dediğimiz ikinci bir yolla verilecektir.

3.4.3.1 Doğruluk Tablosu ile Denetleme

Yukarıda doğruluk tablosunun, önerme formlarına ilişkin doğruluk değerlerinin oluşturulması işleminde nasıl kullanıldığı anlatılmıştı. Çıkarımların geçerliliği ve önermelerin tutarlılığı da yine doğruluk tablosunun kullanımıyla ortaya çıkar. Fakat, önce tutarlılık, geçerlilik ve eşdeğerlilik gibi kavramların ne anlama geldiğini görmeliyiz.

En az bir doğrulayıcı yorumu bulunan bir bileşik önermeye tutarlı, hiçbir doğrulayıcı yorumu bulunmayan bileşik önermelere ise tutarsız önermeler denir. Tutarlılık ve tutarsızlık doğruluk tablosunun sonucunu oluşturan son sütuna bakarak anlaşılabilir. Bu son sütun bileşik önermenin doğruluk değerlerinden oluşmaktadır ve bu doğruluk değerleri de daha önce ifade edildiği üzere bileşenlerin ve eklemlerin doğruluk değerleri yorumu altında gerçekleşir. Şimdi bu son sütunda eğer bir doğru yorum bulunuyorsa önerme tutarlı, eğer hiçbir doğru yorum bulunmuyorsa önermeye tutarsızdır denir.

Birden fazla önermenin birbiriyle tutarlılığı ise önermeleri oluşturan bileşenleri aynı anda doğru yapan ortak bir doğrulayıcı yorumun varlığıyla belirlenir. Böyle bir yorum bulunuyorsa önermeler tutarlı, bulunmuyorsa tutarsızdır. Örneğin Tablo 3.6 da verilen önermenin kendisi tutarlılık şartını yedi satırda sağlamaktadır. Önermeyi oluşturan $\sim q$ ve $(p \wedge \sim q)$ önermeleri ise, birbirleriyle üçüncü ve dördüncü satırda tutarlılık şartını sağlamaktadırlar.

İki önermenin aynı anda aynı değerleri alması durumunda bu önermelere eşdeğer önermeler denir. Doğruluk tablosu yardımıyla, bileşenlerinin doğruluk değeri yorumlarından sonuca hemen ulaşılabilir.

Sembolik olarak bir çıkarımın öncülleri virgüllerle, sonuç önermesi de “O halde” anlamına gelen $\therefore$ ile ifade edilirler. Çıkarımın geçerliliği öncüllerin doğruluğu halinde sonucun doğruluğunu garanti altına alır. O halde, öncüllerin doğruluğu bir tümel evetleme halinde düşünülebilir ve sonuç önermesi de bu öncüllerin yerine gelmesine bağlı olduğundan, çıkarımı bir koşullu önerme formu biçiminde düşünmek yerinde olacaktır. Şu halde, çıkarımın denetlenmesi için öncelikle çıkarımı koşullu bir önerme formuna dönüştürmeli ve sonra doğruluk tablosu yardımıyla bütün yorumlar altında alacağı değerlerin doğru olup olmadığı araştırılmalıdır. Çıkarımların doğruluk tablosuyla denetlenmesi için ikinci bir yöntem ise yine doğru öncüllerin geçerli bir çıkarım altında yanlış bir sonuç vermeyeceği ilkesine dayanır. Öncüllerin doğru olduğu durumda sonucun yanlış olduğu bir yorum bulunuyorsa bu halde çıkarım geçersizdir denir. Başka bir şekilde sonucun değillesmesi öncüllerle tutarlı ise çıkarım geçersiz, tutarsız ise çıkarım geçerli olur.

Örnek: $p \rightarrow \sim q$, $p \wedge q \therefore p \rightarrow \sim q$ çıkarımının geçerliliğini denetlemek için önce çıkarım koşullu bir önerme şeklinde ifade edilmelidir. Tablo kısaltımı için önbileşene A ve çıkarımın kendisine Ç diyelim.

Yani,

$$[(p \rightarrow q) \wedge (p \wedge q)] \rightarrow (p \rightarrow \sim q)$$

Tablo 3.8 $p \rightarrow \sim q$, $p \wedge q \therefore p \rightarrow \sim q$ çıkarımının geçerlilik denetlemesi

p	q	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$p \wedge q$	A	$p \rightarrow \sim q$	Ç
D	D	Y	D	D	D	Y	Y
D	Y	D	Y	Y	Y	D	D
Y	D	Y	D	Y	Y	D	D
Y	Y	D	D	Y	Y	D	D

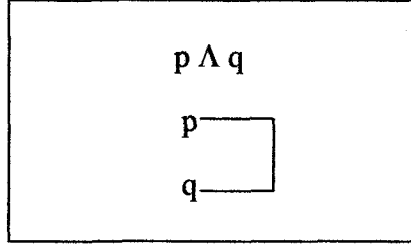
Son sütundan görüleceği üzere, ilk satırda çıkarım yanlış değerini almıştır. Bu ise çıkarımın geçersizliği anlamına gelir.

3.4.3.2 Çözümleyici Çizelge Yöntemi ile Denetleme

Doğruluk tablosuyla geçerlilik ve tutarlılık işlemlerinin yapılması her ne kadar yeterli bir yöntem gibi görünse de, önerme değişkenlerinin sayısı arttıkça tablolarda oluşan şişkinlikler bizi daha kolay bir çözüm arayışına sevkedecektir. Çözümleyici çizelge yöntemi doğruluk tablosu yönteminin kısıtlılıklarını aşarak daha kolay bir denetleme yöntemi ortaya koyması bakımından incelenmesi gereken bir yöntemdir. Yöntem, bir çizelge yardımıyla önerme ve çıkarımlara ait doğru ve yanlış yorumların bu çizelge üzerinde görülmesini sağlayarak geçerlilik ve tutarlılık işlemlerini kolaylaştırır. Yöntem her bir mantık değişiminin nasıl çözümlenmesi gerektiğini açıklayarak işe başlar.

Tümel Evetlemenin Çözümleme Kuralı

Tümel evetleme eklemine geçtiği bir önermenin doğru olabilmesinin, bileşenlerinin hepsinin doğru olmasını gerektirdiğini biliyoruz. Yani, $p \wedge q$ gibi bir önermenin doğruluk koşulu hem p, hem de q'nun birlikte doğru olmalarıdır. Böyle bir durumu, önermenin altında, her ikisinin de doğru olması durumunda önermenin doğru olacağı anlamına gelen bir işaretle belirleyebiliriz. Önermenin altına konulacak bir çengel işareti ile, tümel evetleme eklemine barındıran önerme yapısının, çengelin ucunda bulunan bileşenlerinin doğru olması ile doğruluk kazanacağını ifade ederiz[1,18,19].

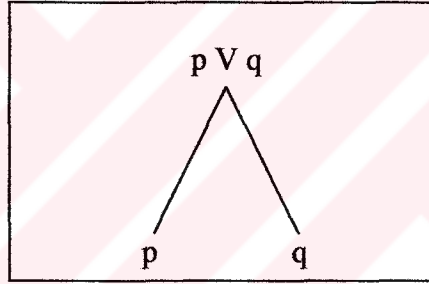


Şekil 3.1 Tümel evetlemenin çözümleme ilkesi

Çengel simgesi hem p hem de q 'nin doğru değerini aldıklarını göstermektedir.

Tikel Evetleyicinin çözümleyici ilkesi

Tikel evetleme ekleminin doğrulayıcı yorumunun, bileşenlerden en az birinin doğru olması durumunda oluştuğunu biliyoruz. O halde çözümlerken, bileşenlerden sadece birinin doğru olması gerektiğini göstererek sembolleştirmek gereklidir. $p \vee q$ önermesinin doğruluğu p 'nin ya da q 'nin doğruluklarından birine bağlıdır. Bu durum bir çatal sembolüyle gösterilebilir.

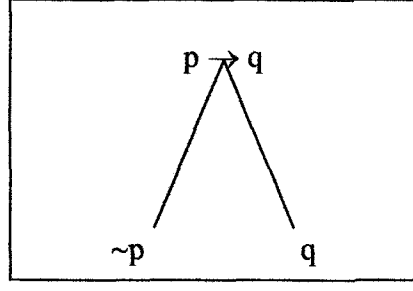


Şekil 3.2 Tümel evetlemenin çözümleme ilkesi

Tikel evetleme ekleminin çözümleyici çizelgesi de, tümel evetlemede olduğu gibi, doğrulayıcı yorumlarının sembolik yoldan ifadesine karşılık gelir.

Koşul Ekleminin Çözümleyici Çizelgesi

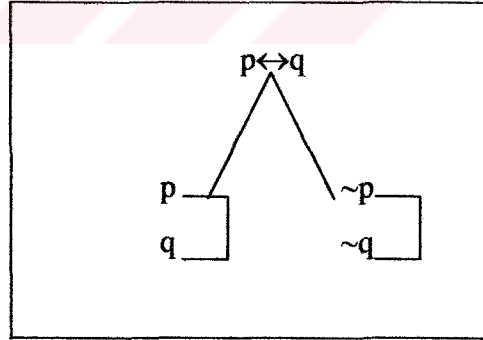
Koşul ekleminin, ön bileşenin doğru ard bileşenin yanlış olduğu durumlarda yanlış, diğer durumlarda doğru olan bir durum oluşturmaktadır. Buna göre, ön bileşenin değilinin doğru veya ard bileşenin doğru olması durumunda da koşul ekleminin bulunduğu önerme doğru olacaktır demektir. Bu ifade de bize, koşul ekleminin çözümleyici çizelge kuralının ön bileşenin değillemesinin ve ard bileşenin kendisinin bulunduğu bir tikel evetleme çözümlemesinin yapısını verir.



Şekil 3.3 Koşul eklemine çözümleme ilkesi

Karşılıklı Koşul Eklemine Çözümleyici Çizelgesi

Karşılıklı koşul eklemi, bileşenlerinin her ikisinin doğru, ya da her ikisinin yanlış olması durumunda doğrulayıcı bir yoruma sahiptir. Buna göre çözümleyici çizelgemiz $p \leftrightarrow q$ önermesinde p ve q 'nin birlikte doğru veya birlikte yanlış olması durumlarına birden bağlıdır. Her iki durum altında doğrulayıcı bir yoruma sahip olduğumuzdan dolayı ilk olarak çözümleyici çizelgemizde bir tikel evetleme yapısının olduğunu görebiliriz. Fakat tikel evetlemeyi oluşturan çatalın her iki ucunda da, önermelerin birlikte evetlendiğini göstermesi gereken bir tümel evetleme çengeli bulunması gerekir. Ayrıca, bileşenlerin birlikte yanlış olması durumunu, bileşenlerin doğrularının birlikte doğru olması durumu olarak ifade etmek, çözümleyici çizelge kuralı açısından önemlidir.



Şekil 3.4 Karşılıklı Koşul eklemine çözümleme ilkesi

Bu eklemelerin değillemeleri de aynı şekilde çözümlenerek çözümleyici çizelgeleri oluşturulabilir.

Eklemelerin çözümleyici çizelgeleri elde edildikten sonra bunların geçerlilik, tutarlılık denetlemelerinde nasıl kullanılacağını görmeliyiz. Bu işlem bize doğruluk tablosuna göre yukarıda anılan nedenlerden ötürü çok daha kolay ve basit bir yol sunmaktadır.

Bu yöntem kullanılırken başlıca şu adımları takip etmek gerekir; Çözümenecek önerme, önerme grubu veya çıkarım başa yazılarak yanına çözümenecek önerme olduğunu belirtmek amacıyla Ö harfi konulur ve sırasına göre numaralandırma yapılır. Önermenin ana eklemi bulunarak, bu eklemi çözümleyici çizelge ilkesine göre önerme çözülür. Bu işlem, bileşenleri temel önermelere inilinceye kadar devam etmelidir. Çözümleme işlemi yapılırken her adımda çözümenecek önermelere numara verilir ve çözümlenen kısım da bu numara işlemine uygun olarak numaralanmalıdır. Çözümlemenin tamamlanması için bütün bileşik önermeleri kendilerini oluşturan basit önermelere çözülmesi gerekir. Aksi halde çözümleme tamamlanmamış sayılacaktır. Çözümlemenin son adımı olarak çözümleme sonucunda çizelgede oluşan yollar kontrol edilmelidir. Oluşan yollar üzerinde birbirleriyle çelişen türde temel önermeler varsa bu yolun altına X işareti konarak bu yolun kapalı olduğu belirtilir. Eğer böyle bir çelişme mevcut değilse o halde bu yol açıktır ve açık bir yol doğrulayıcı bir yorumlamaya karşılık gelir[1,18,19].

Şimdi verilen bu yöntemi takip ederek, bir önermenin tutarlılığının ve bir çıkarımın geçerliliğinin denetlenmesinde, çözümleyici çizelgenin nasıl uygulandığını örneklerle görelim.

Örnek: $(\sim p \vee q) \wedge (p \wedge q)$ önermesinin tutarlılığını çözümleyici çizelge yöntemi ile denetlemek istersek;

$$1. (\sim p \vee q) \wedge (p \wedge q) \quad (\text{Ö})$$

$$2. \sim p \vee q \quad \boxed{} \\ 3. p \wedge q \quad \boxed{} \quad (1)$$

$$\begin{array}{c} p \quad \boxed{} \\ q \quad \boxed{} \quad (3) \\ \wedge \\ (2) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \sim p \quad q \end{array}$$

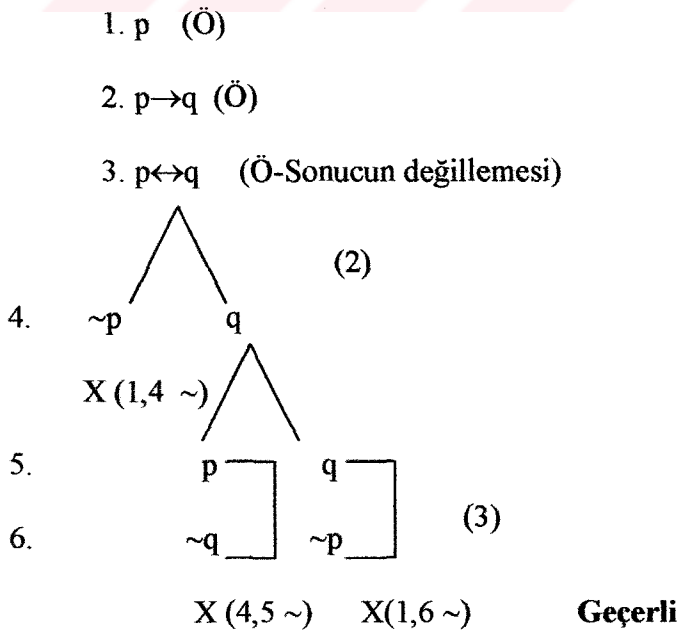
X **Tutarlı**

Önerme önce ana eklem olan tümel evetleme eklemine göre, daha sonra da önermeyi oluşturan diğer bileşik önermelere göre çözümlendi ve uygun olarak numaralandı. Çizelgede işlem sonucu iki yol oluştuğu görülüyor. Bunlardan sol kol üzerindeki

yolda hem $\sim p$ ve hem de p önermesi bulunduğundan bu yol üzerinde önermenin doğrulayıcı bir yorumunu oluşturmak mümkün değildir. Fakat, diğer kol olan sağ kol bu şekilde bir çelişme barındırmadığından dolayı açıktır. Bu yüzden de önerme tutarlıdır denir.

Çözümleyici çizelge yöntemiyle çıkarımların geçerliliğinin de denetlenebileceğini söylemiştik. Geçerli bir çıkarım, doğru öncüllerle birlikte yanlış sonuca sahip olmayan çıkarım yapısıdır. Bu ilkeyi baz alarak, öncüllerle birlikte sonucun değillemesinin birbirleriyle tutarlılığı gözetilerek çıkarımın geçerliliğini denetleyecek bir çözümleyici çizelge yöntemi üretebiliriz. Eğer öncüllerle, sonucun değillemesinden oluşan önerme grubu birbirleriyle tutarlılık sergiliyorlarsa, bu durumda tutarlılığı veren yorumlar, çıkarımı geçersiz kılarlar. Çünkü, öncüllerle sonucun değillemesinin birbirleriyle tutarlılık oluşturduğu bir yorumda, öncüllerle sonucun kendisi aynı yorum altında tutarlı olmayacaktır. Bu durum, başta alınan öncüllerle birlikte sonucun da doğru olması gerektiği ilkesiyle çelişeceğinden dolayı çıkarım geçersiz olacaktır. Dolayısıyla, çözümleyici çizelgede açık bir yolun bulunması, alınan önermelerin tutarlılığı anlamına geleceğinden dolayı, çıkarımın geçerliliği için öncülle sonucun değillemesinin birlikte çözümleneceği bir çizelgede bütün yolların kapalı olması gerekir.

$p, p \rightarrow q \therefore p \leftrightarrow q$ çıkarımının geçerliliğini denetleyelim.



Bütün yollar kapalı olduğundan dolayı çıkarım geçerlidir. Kapalı yolların yanlarındaki numaralar çelişkiyi oluşturan satır numaralarını göstermektedir.

Aynı şekilde önermelerin birbirleriyle eşdeğerliliği ve tutarlılığını da çözümleyici çizelge yöntemiyle denetlemek mümkündür.

3.5 Niceleme Mantığı

Doğruluk fonksiyonu mantığı beş temel önerme eklemi üzerine kurulu olarak doğruluk tablosu ve çözümleyici çizelge yöntemiyle birlikte niceliklerinden arındırılmış önermelerin geçerlilik ve tutarlılık denetimlerini sağlayan bir yapıya sahiptir. Bu yapı içerisinde klasik mantıkta nicelik ve nitelik yönünden dört gruba ayırdığımız kategorik önermelerin niteliklerine ilişkin yönlerini ele alabilmekle beraber nicelik belirten önermelerin ifadesi mümkün değildir. Bu yetersizlik, nicelik belirten önermelerle yapılacak çıkarımların da doğruluk fonksiyonu mantığının yapısı içerisinde denetlenemeyeceğini gösterir. Örneğin; klasik mantıkta

Tüm A lar B'dir

Hiçbir B, C değildir.

O halde, hiçbir A, C değildir.

gibi bir çıkarım geçerli olduğu halde, bu çıkarım formunun doğruluk fonksiyonu mantığında ifadesi olan $(p \wedge q) \rightarrow r$ çıkarımının geçerli olmadığı, doğruluk tablosu veya çözümleyici çizelge ile hemen görülebilir. Bunun sebebini, doğruluk fonksiyonu mantığının önermeleri sembolleştirmesi sırasında içeriklerinin boşaltılmasında bulabiliriz. Çünkü, klasik mantık son tahlilde özne-yüklem ilişkisinden hareket ederek, bunlar arasında sınıf temelli kurulan bir mantığın sonucudur. Fakat, doğruluk fonksiyonu mantığında önermelerin önerme temsilcileri yoluyla sembolleştirilmesi, bu ilişkinin çıkarım sırasında gözönünde bulundurulmamasını beraberinde getirir. O halde, nicelikleri ifade etme kapasitesine sahip bir sembolleştirmeye ihtiyaç duyuyoruz. Bu ihtiyacı karşılayacak olan sembolleştirme, hem özne yüklem ilişkisini karşılayacak, hem nicelikleri ifade edebilecek ve hem de doğruluk fonksiyonu mantığının imkanlarını kullanmamıza fırsat tanıyacak nitelikte olmalıdır.

3.5.1 Niceleme Mantığına Ait Temel Tanımlar

Basit önermeler ad ve yüklemden oluşmuş önermelerdir. Yüklem, adın yüklemde belirtilen özelliğe sahip olduğunu belirtir. Önerme içerisinde aynı yüklem

yüklendiği birden fazla adın olması da mümkündür. Niceleme mantığında bir önerme, yüklem ve öznesiyle birlikte sembolleştirilir. Yüklem A, B, C gibi yüklem temsilcisi olan büyük harflerle, adlar ise a, b, c gibi ad temsilcisi olan küçük harflerle temsil edilirler. Örneğin; “Ahmet öğretmendir” önermesi niceleme mantığında şu şekilde sembolleştirilir;

$$“Öa” \quad (3.1)$$

burada Ö yüklem olan öğretmeni a da özne durumunda olan Ahmeti temsil etmektedir. Görüldüğü gibi sembolleştirme önermenin iç yapısını temsil edecek formdadır[2]. Niceleme mantığında bu tür önermelere atomik önermeler veya tekil önermeler denir. Dikkat edilirse bunların içinde herhangi bir niceleyici geçmemektedir. Ayrıca, bu tür önermelerin klasik mantıkta tümel olarak kabul edildiği de burada hatırlanmalıdır. Bir tek addan bir önerme oluşturan yükleme birli yüklem, n tane addan önerme oluşturan yükleme de n’li yüklem diyeceğiz[18].

Tekil önermelerin önerme eklemleriyle birleşmesinden bileşik önermeler meydana gelir. Örneğin; “Ömer Ali’den uzun ve Karaman da Ali’den uzunsa, Ömer Karaman’ dan uzundur” önermesinde, U: uzun, ö: Ömer, a: Ali, k: Karaman ile temsil edilse önerme;

$$(Uöa \wedge Uka) \rightarrow Uök \quad (3.2)$$

ile ifade edilecektir.

Tekil önermeler içlerinde geçen adları ad sembolleriyle ifade ederler. Bu sembol, önermede geçen ada karşılık getirilir. Öznenin belirsiz olduğu durumlarda bu sembolleştirme değişkenlerle yapılır. Değişkenler, cebirsel denklemlerde olduğu gibi x, y, z gibi temsil edilirler ve önermenin anlamını bulduğu değerler evreninden herhangi bir değeri alabilirler. İşte, içinde ad yerine değişkenler taşıyan ve yerlerine birer ad konulunca doğru veya yanlış olan bu önermelere, açık önermeler denir. Evren ise açık önermelerin değer alanıdır. Evrendeki her bir elemana birey denilir. Unutulmaması gereken nokta, içinde değişken bulunduran bu önerme kalıplarının ancak ve ancak değişkenlerin yerine birer ad konulduklarında önerme durumuna geçmeleri ve doğruluk değeri alabilmeleridir. Örneğin; “x öğrencidir” önermesi belirsiz bir nesneyi içerdiğinden dolayı açık bir önermedir ve Öx şeklinde sembolleştirilebilir. Açık önermelerle bileşik önermelerin kurulması da aynı yöntemle yapılır. Açık önermenin içinde bulunan değişken veya değişkenlerin değer

aldığı, yani onları doğruluk değeri verebileceğimiz bir önerme haline getirecek adların oluşturduğu topluluğa değer evreni veya kısaca evren denir. Evrendeki herhangi bir değer için açık önermede yerine konulmasıyla yapılan işleme özelleme denir. “Öx” açık önermesine ait bir özelleme “Ahmet öğrencidir” yani, “Öa” şeklinde yapılabilir. Bu özelleme önermeyi doğru kılıyorsa bu özellemeye aynı zamanda gerçekleştirme denilir.

İçinde tüm, bazı, hiçbir, her gibi niceleyici geçen önermelere genel önermeler denir. Dikkat edilirse tekil önermeler sadece adları barındıran bir yapıdadırlar ve içlerinde bir niceleyici bulunmamaktadır.

Niceleme, bir açık önermeyi belli bir doğruluk değeri taşıyan önermeye dönüştürme işlemine denir. Bu işlem tekil önermelerde değişkenin yerine bir ad koyarak yapılabileceği gibi, değişkenin yerine evrene ait tüm değerler veya değerlerden bir kısmı konularak da yapılabilir. Birinci tür bir niceleme tekil, ikinci tür bir niceleme ise genel niceleme olarak adlandırılır. Evrene ait tüm değerlerin kullanılması durumunda genel niceleme işlemine tümel, bir kısmının kullanılması durumunda ise nicelemeye tikel niceleme denilir. Bir tekil önermeyle, hangi değer için yüklemi gerçekleştiği saptanırken, genel niceleme işlemi yüklemi gerçekleyen değerlerin miktarını belirtir[1,19]. Nicelenmiş önermelerin birer açık önerme olmayıp doğruluk değerlerinin olduğu unutulmamalıdır.

“her”, “tüm”, “bütün” gibi niceleyicilere tümel niceleyiciler, “bazı” gibi niceleyicilere ise tikel niceleyiciler denir. Tümel niceleyiciler $\forall$ tümel niceleyici işareti ile, tikel niceleyiciler de $\exists$ tikel niceleyici sembolüyle temsil edilirler. Bunlar niceleme mantığının mantık değişmezleridirler. Örneğin; “x kanatlıdır” gibi bir açık önermeyi K:kanatlıdır yüklem temsilcisiyle Kx şeklinde temsil edebiliyoruz. Bunun yanı sıra

“Herşey kanatlıdır”

gibi bir önerme içinde tümel bir niceleyici barındırmaktadır. Bu önerme tümel niceleyici işareti ile;

$$\forall x Kx \quad (3.3)$$

şeklinde belirtilir. Burada x in değer alacağı evren tümel niceleyici önermenin doğruluğunu belirler. Evreni kuşlar olarak belirlersek bu önermenin evrene ait bütün

değerlerinin gerçekleşeceği açıktır. Fakat, evreni canlılar olarak genişletirsek önermemiz yanlış olacaktır. Evrenimizi canlılar evreni olarak seçip önermemizi de;

$$\text{“Bazı şeyler kanatlıdır”} = \exists x Kx \quad (3.4)$$

olarak değiştirseydik bu durumda canlılar evrenindeki bir çok canlının bu önermeyi gerçeklediğini gerçek dünyaya ait olan bilgilerimizden çıkarabiliriz. Yukarıdaki örnekler bize klasik mantıktaki tümel ve tikel önerme formlarını hatırlatmaktadır. Şimdi öznenin kapsamını tam olarak belirterek tümel ve tikel önerme formlarının niceleme mantığında nasıl ifade edildiğini görelim.

Klasik tümel bir önerme olan

$$\text{“Bütün insanlar ölümlüdür”}$$

önermesi sembolik mantıkta bir koşulla önerme olarak yorumlanır ve niceleyicileri uygun biçimde karşı getirilerek bu şekilde sembolleştirme yapılır. Sembolik mantıkta bu önerme;

$$\text{“Her } x \text{ için, } x \text{ insan ise } x \text{ ölümlüdür”}$$

olarak yorumlanır. Yani tümel önermemiz, bileşik bir önerme olan koşullu önerme olarak;

$$\forall x (\dot{I}x \rightarrow \ddot{O}x) \quad (\dot{I}: \text{insan}, \ddot{O}: \text{ölümlü}) \quad (3.5)$$

şeklinde ifade edilir. Yine,

$$\text{“Bazı balıklar memelidir”}$$

şeklindeki tikel bir önerme formu da, bileşik bir önerme formunda uygun niceleyici ile birlikte

$$\text{“Bazı } x \text{ ler için, } x \text{ balıktır ve } x \text{ memelidir”}$$

olarak yorumlanır ve

$$\exists x (Bx \wedge Mx) \quad (B: \text{balık}, M: \text{memeli}) \quad (3.6)$$

şeklinde sembolleştirilir.

Tikel bir önermenin doğruluk koşulu, değer evrenindeki bireylerden en az birinin önermeyi gerçeklemesidir. Tümel bir önermenin doğruluk koşulu ise, değer evrenindeki tüm bireylerin belirtilen özelliğe sahip olmasıdır.

3.5.2 Nicelenmiş Önermelerin Yorumlanması

Yorumlama işlemi temelde, bir önermenin bileşenlerine verilecek doğruluk değerleri sayesinde ve bu değerler altında bir doğruluk değeri alması işlemidir. Doğruluk fonksiyonu mantığında bu işlemin, önerme temsilcilerinin her birine bir doğruluk değeri verilerek yapıldığını biliyoruz. Niceleme mantığında yorumlama işlemi ise kabaca önermeleri oluşturan bileşenlerin evrendeki bireylere ait bütün özelliklemelerine karşılık getirilen doğruluk değerlerinin hesaplanmasıyla yapılır.

Öncelikle önermenin verilen evren üzerindeki bütün özelliklemeleri belirlenir. Daha sonra, bu özelliklemelere doğruluk değeri verilerek yorumlama kümesi oluşturulur. Bu yorumlama kümesi altında önermenin doğruluk değeri hesaplanarak yorumlama işlemi yapılmış olur. Örneğin;

$$\forall x (Fx \rightarrow Gx) \quad (3.7)$$

şeklindeki tümel bir önermenin E: {a, b} biçiminde seçtiğimiz evren için bir yorumlamasını yapmaya çalışalım. Herhangi bir yorumlamanın oluşturulması, öncelikle önermeyi oluşturan tekil önermelerin evrene ait özelliklemelerinin doğruluk değerinin belirlenmesi yoluyla yapılır. Önermemizin E evrenindeki tüm özelliklemeleri;

$$Fa \rightarrow Ga, Fb \rightarrow Gb$$

şeklinde olur. Bu özelliklemeleri oluşturan atomsal önermelerin doğruluk değerleri şu şekilde oluşsun;

$$\{E: \{a,b\} Fa:D, Ga:D, Fb: Y, Gb: D\} \quad (3.8)$$

Bu şekilde atomsal önermelere doğruluk değeri verme işlemine bir önermenin yorumlanması diyeceğiz ve bu yorumlama altında önermenin hangi özelliklemeler için gerçekleştiğini ve gerçekleşmediğini kontrol ederek bu yorumlama altında bir doğruluk denetlemesi yapacağız. O halde, bu yorumlama için bizim önermemiz;

$$Fa \rightarrow Ga \quad Fb \rightarrow Gb$$

$$D \rightarrow D \quad Y \rightarrow D$$

$$D \quad D$$

şeklinde olur ki, buradan çıkarılacak sonuç evrene ait bütün özelliklemelerin (3.8) yorumu altında önermemizi gerçeklediğidir. Tüm özelliklemeler altında gerçekleşebilir olan önermelere, verilen yorumlamada tümel gerçekleşebilir dendir[18].

3.5.3 Nicelenmiş Önerme ve Çıkarımların Denetlenmesi

Niceleme mantığında denetleme işlemi için yine çözümleyici çizelge yönteminden faydalanacağız. Doğruluk fonksiyonu mantığında denetleme yaparken çözümleyici çizelge için kullandığımız eklemelerin çözümleme kurallarının, niceleme mantığında tek başlarına yeterli olmayacakları açıktır. Bu yüzden niceleme mantığının mantıksal değişmezlerini de içeren yeni çözümleme kuralları geliştirmemiz ve çözümleyerek denetleme işlemini bu kuralların hepsini beraberce kullanarak yapmamız gerekir. Çözümleyici çizelge yönteminin yanı sıra, hem doğruluk fonksiyonu mantığı, hem de niceleme mantığında denetleme işlemi için kullanılan bir başka yöntemde geçerlilikleri ispatlanmış çıkarım kurallarını kullanarak denetleme yapmaktır. Türetim kuralları denen bu kurallarla denetleme işlemi de çözümleyici çizelge kadar kullanışlı ve pratiktir. Fakat bu türetim kurallarına burada değinilmeyecektir.

Niceleme mantığında çıkarım ve önermelerin, geçerlilik, tutarlılık ve eşdeğerlilik gibi mantıksal ilişkileri çözümleyici çizelge ile denetleme, diğer eklem kurallarının yanı sıra niceleyici değilleme kuralları ve özelleme kuralları dediğimiz bir dizi kuralı kullanmayı gerektirir.

Niceleyici değilleme kuralları, niceleyicilerin değillemeleri arasında kurulan ilişkiler yoluyla elde edilen kurallardır. Tümel niceleyicinin değillemesini tikel, tikel niceleyicinin değillemesini tümel kılan bu kurallar, tümel ve tikel önermelerin birbirine dönüşümünü sağlarlar.

Tümel niceleyicinin değilleme kuralı: $\forall xFx$ şeklindeki tümel bir önermenin doğruluğu, tanımlı olduğu evren üzerindeki bütün özellemelerinin doğru olmasına bağlıdır. Bir özellemenin doğruluk değerinin yanlışlığı tümel önermenin kendisini de yanlış yapacaktır. x 'in Fx 'i gerçeklemeyen özellemesi $\sim Fx$ 'i gerçekleyecektir. Bu durumda öyleyse $\exists x\sim Fx$ vardır deriz ve bu tikel nicelenmiş önermenin doğruluk değeri $\sim\forall xFx$ ile aynı olur. O halde bu iki önerme, doğruluk değerleri aynı olduklarından dolayı birbirleriyle eşdeğerdirler ve herhangi bir durumda birbirlerinin yerine kullanılabilirler. Bu eşitlik;

$$\sim\forall xFx = \exists x\sim Fx \quad (3.9)$$

ile ifade edilir.

Tikel niceleyicinin değilleme kuralı: $\exists xFx$ önermesi, x in Fx 'i gerçekleyen en az bir özellemesinin varlığını gerektirir. Bu tikel önermenin değili olan $\sim\exists xFx$ önermesi doğru ise x in, Fx i gerçekleyen bir özellemesinin olmadığını ifade eder ki, bu aynı zamanda x in bütün özellemelerinin $\sim Fx$ 'i gerçeklediği anlamına gelir. O halde, $\sim Fx$ açık önermesi x in bütün özellemelerinde gerçekleşiyorsa $\forall x\sim Fx$ önermesi doğrudur ve $\sim\exists xFx$ tikel önermesiyle eşdeğerdir. Bu eşdeğerliğe tikel niceleyicinin değilleme kuralı denir.

$$\sim\exists xFx = \forall x\sim Fx \quad (3.10)$$

ile verilir.

Tümel Özelleme Kuralı: Tümel nicelenmiş bir önermenin doğruluğu, yukarıda da ifade edildiği üzere bütün özellemelerinin doğru olması durumunda mümkündür. O halde, bu kural gereği tümel bir önerme doğru ise, onun herhangi bir özellemesinin de doğru olduğu sonucu çıkarılabilir. İşte bu kurala tümel özelleme kuralı denir. Çözümleyici çizelge yönteminde bu kural kullanırken özellemeler çizelge üzerindeki yollarda bulunan ad sembollerine göre yapılır. Eğer bir yol üzerinde herhangi bir ad sembolü yoksa istenilen bir ad sembolü ile özelleme yapılır. Yol üzerinde bir veya daha fazla ad sembolü geçiyorsa, tümel önermeyi bu ad sembollerine göre ayrı ayrı özellemek gerekecektir.

$$\forall xFx \text{ -Tümel Önerme} \quad (3.11)$$

Fa -Özelleme

Tikel Özelleme Kuralı: Tikel nicelenmiş önerme bize önermenin ifade ettiği hükmü gerçekleyen en az bir şeyin var olduğunu bildirir. Bu itibarla $\exists xFx$ tikel nicelenmiş önermesinin doğruluğu, x 'in Fx 'i gerçekleyen bir özellemesinin olduğunu garanti eder. Şu halde, buradan $\exists xFx$ doğruysa, Fa özellemesi doğrudur gibi bir sonuca ulaşabiliriz. Buna tikel özelleme kuralı diyoruz. Tikel özelleme kuralı kullanılırken dikkat edilecek husus, öncüller arasında birden fazla tikel önermenin bulunması durumunda bunların özellemelerinin ayrı ayrı bireylerle yapılmasıdır. Aksi takdirde, var olmadığı halde öncüllerin birbirleriyle çelişmesi gibi bir durum ortaya çıkabilir. Örneğin; $\exists xFx$ ve $\exists x\sim Fx$ gibi iki tekil önerme öncülü barındıran bir çıkarım formunda, bu önermelerin özellemeleri aynı ad sembolü ile yapılırsa, Fa ve $\sim Fa$ gibi bir durum ortaya çıkar. Fakat, bu iki önerme birbiriyle çelişik değildir. Öğretmen

olan insanlar olabileceği gibi, öğretmen olmayan insanlar da vardır. Çelişki, aynı bireyle özelleme yapılmasından kaynaklanmaktadır.

$$\exists xFx \text{ -Tikel Önerme} \quad (3.12)$$

Fa -Özelleme

Bu yeni kurallarla beraber geçerlilik ve tutarlılık denetlemesi doğruluk fonksiyonu mantığı kısmında anlatılan çözümleyici çizelge kurallarına uyularak yapılır. Bunların yanısıra kuralların birbirlerine göre öncelik sırası gözetilmelidir. İlk olarak, niceleyici değilleme kurallarından başlamalıdır. Daha sonra varsa tümel evetlemenin çözümleyici kuralı uygulanmalıdır. Bunlar yapıldıktan sonra, tikel niceleyicinin özellemesi ve tikel evetleme önermesinin çözümleyici çizelge kuralları uygulanır. En son olarak da tümel niceleyicinin özellemesi çizelgeye eklenerek denetleme kontrol edilir. Şimdi buraya kadar açıklananları örneklerle gösterelim.

Örnek: $\forall xFx \rightarrow \forall xGx, \sim \exists xGx \therefore \exists x\sim Fx$ çıkarımının geçerliliğini denetleyelim.

Çıkarımlar denetleme işlemi, öncüllerle sonucun değillesmesinin tutarlılığının denetlenmesi işlemi idi. Öncüllerle sonucun değillenmesi arasında tutarlı bir ilişki mevcutsa, ya da başka bir deyişle bunlar kendi aralarında doğrulayıcı bir yorumlamaya sahipse, çizelgede en az bir tane açık yol bulunacaktır. Bu da önermelerin birbirleriyle tutarlı olduğu, yani çıkarımın geçersiz olduğu anlamına gelecektir. Eğer çizelgedeki tüm yollar kapalıysa öncüllerle sonucun arasındaki ilişki tutarsız, yani çıkarım geçerli olacaktır. Bu bilgilerin tekrarından sonra çıkarımı çözümleyici çizelgeye yerleştirelim.

$$1 \quad \forall xFx \rightarrow \forall xGx,$$

$$2 \quad \sim \exists xGx$$

$$3 \quad \sim \exists x\sim Fx$$

$$4 \quad \forall x \sim Gx$$

(2)

$$5 \quad \sim \forall xFx (1 \rightarrow)$$

$$\forall xGx (1 \rightarrow)$$

$$6 \quad \exists x\sim Fx (5)$$

$$Ga (5)$$

7 X (3,6 ~)

~Ga (4)

8

X (6,7 ~)

Geçerli

İlk üç satır öncüllerle sonucun değillemesinin yazıldığı satırlardır. Daha sonra kuralların öncelik sırasına göre dört numaralı satırda ikinci öncülün değillemesi alınmış ve beş numaralı satırda birinci öncüle ait koşul eklemesinin çözümleme kuralı uygulanmıştır. Altıncı satır birinci öncüldeki önbişenin değillemesi ve ardbişenin özellemesinden oluşmaktadır. Yedinci satırda sonuç önermesinin değili ile, birinci öncülün ön bişenin değillemesinin birbirlerinin değillemesi olduğu görülüyor. Son satırda ise ikinci öncüle tekil niceleyicinin değillemesinden elde edilen özelleme ile birinci öncülün ardbişeninin özellemesinin tutarsızlığı görölmektedir. İki yol da kapalı olduğundan, çıkarım geçerlidir diyebiliriz. Çizelge sonuç önermesinin değillemesine tikel niceleyicinin değilleme kuralı uygulanarak da çözümlenebilirdi. Bu durumda da aynı sonucun elde edileceğı görölecektir.

4. ÇOK DEĞERLİ MANTIK SİSTEMLERİ

Mantık tarihi boyunca iki değerli mantığın katı çerçevesini genişletmek ve doğruluk değeri kısmen doğru olan önermeleri içeren çıkarımlar yapmaya izin veren girişimler olmuştur. Batıda mantığın ana gelişimi boyunca, hakim olan görüş, bütün önermelerin yalnızca doğru veya yanlış olacağı yönündeydi. Bu görüş eski antik dönemde bile sorgulanmaktan kurtulamamıştı. Aristo yorum üzerine kitabında, gelecekle ilişkili konulara ait önermeler üzerine tartışırken henüz olmamış olan bir olay üzerinde konuşulduğu için bu tür önermelerin doğruluk değerinin belirlenemez olduğundan söz eder. Bu görüş hala tartışılmaktadır. Bu dönem ve daha sonrasındaki bütün yorumcular bu hususta böyle bir önermenin üçüncü bir değer alması gerektiği konusunda birleşirler[3].

Üçüncü bir değeri kabul eden bir mantık elde etmek için, belirlenemez veya nötr diyebileceğimiz önermelerin var olma olasılığı üzerine düşünmeliyiz. Tarihsel olarak, gelecekle ilgili olma problemi bu yönde bir gelişmenin ilk temellerini oluşturuyordu. Ortaçağda bu problem Latin Avrupalı ve İslam dünyasının mantıkçıları arasında da çok tartışıldı. Özellikle Duns Scotus ve Occamlı William tarafından ele alındı. Fakat, içerdiği bazı teolojik zorluklar dolayısıyla bazı mantıkçıların ilgisini çekmedi. Çünkü, eğer böyle bir mantık olsaydı, tanrısal bir önceden bilme nasıl mümkün olabilirdi. Fakat yine de gelecek bağımlı önermeler, J. Lukasiewicz'in üç değerli mantığı oluşturmasında birincil güç oldu[3].

Gelecekle ilgili önermeler üzerine olan bu yorumlamalardan başka, önermelerin modalitesi de çok değerli mantığın ortaya çıkmasında rol oynadı. Aristo'dan beri mantıkçılar bütün doğruluk değerlerinin iki değerli olmasından memnun değildiler. O dönemde bile modalite üzerine değişik doğruluk yorumlamaları vardır. Modern dönemde ise olasılık teorisinin gelişmesiyle birlikte bazı mantıkçılar olasılıklı modaliteleri; kesin doğru, olasılıklı doğru, belirsiz, olasılıklı yanlış, kesin yanlış şeklinde değerlendirdiler.

Çok değerli mantığın kurucu babaları olarak şu üç isim sayılabilir. C. Peirce, S. MacColl N. Vasilev . Bu mantıkçıların herbirisi değişik bir açıdan yaklaşarak Lukasiewicz'inki gibi formel olarak tam bir inşa olmasa da, üç değerli bir mantık sistemi üzerine çalışma yapmışlardır[3].

Bu konudaki ilk sistematik çalışma J. Lukasiewicz, A. Tarski ve Amerikalı mantıkçı E. Post tarafından yapılmıştır[3]. J. Lukasiewicz, 1920 de yayınlanan makalesinde klasik mantığın tam bir reddini ve üç değerli mantığın savunmasını yapar[20]. Daha sonra bu çalışmayı genişleterek daha fazla değerli mantık sistemlerinin ve hatta sonsuz değerli mantık sistemlerinin kuruluşunu gerçekleştirdi. Fakat ilerleyen yıllarda onun çok değerli mantık hakkındaki düşünceleri büyük oranda değişti. Artık sadece üç değerli ve sonsuz değerli bir mantık sisteminin uygulamada bir önemi ve felsefi bir ilgiye değer olduğunu düşünüyordu. Hayatının sonuna doğru bu düşüncelerini dört değerli mantığın da bir değeri olduğu yönünde değiştirdi[3].

E. Post ise J. Lukasiewicz'in çalışmalarından bağımsız olarak çok değerli mantık sistemini 1921 de kurdu ve bunu daha sonra n değerli mantığa kadar genişletti. Fakat sisteminin ciddi eksiklikleri olduğu sonradan görüldü[3].

Daha sonraki yıllar çok değerli mantık alanında daha fazla çalışmanın yapıldığı yıllar oldu. Çeşitli yazarlar Lukasiewicz'ın üç değerli ve çok değerli mantığını daha ileri taşıdılar. A. Tarski, J. Slupecki, A. Turquette bu mantıkçılardan bazılarıdır. Lukasiewicz'in orjinal sisteminin dışında daha bir çok çok değerli mantık sistemi geliştirildi. Bu yönde özellikle R. Arend A. Heyting, K. Gödel, D.A. Bochvar ve S. Kleene isimleri önemlidir. Özellikle, Bochvar ve Kleene tarafından geliştirilen üç değerli mantık sistemleri Lukasiewicz in mantık sisteminden önemli farklarla ayrılması açısından uygulamalarda da kendilerini ön plana çıkaran mantık sistemleri oldu[3].

4.1. ÜÇ DEĞERLİ MANTIK SİSTEMLERİ

Bütün çok değerli mantıklar, iki değrli mantık sisteminin doğruluk değeri yapısını esneterek ve bu iki uç arasına değerler yerleştirerek işe başlarlar. Bu değerler belirsiz, nötr, tanımlanamayan veya anlamsız olarak, kullanıldığı bağlama göre değişik isimlerle adlandırılırlar. Üç değerli mantık durumunda ise böyle sadece bir değer vardır.

Böyle bir değerin ortaya çıkması elbette oluşturulan doğruluk tablolarını da etkileyecektir. Her bir üç değerli mantık sisteminin belirsizliği yorumlayışı da farklı olduğundan, doğruluk değeri tablosu da buna göre oluşur. Fakat oluşturulan bütün tablolarda beş temel eklemin iki değerli mantık sistemi altındaki yorumlamaları korunmuştur. Fakat, belirsizliği yorumlama noktasında klasik tanımlamadan ve birbirlerinden ayrılırlar. Doğruluk değeri tabloları göstermiştir ki, bazı mantıkçılar bazı eklemeler hususunda diğerlerinden daha özgürce veya daha sınırlı bir şekilde hareket etmişlerdir. Ek olarak, önerme eklemelerin yeniden yorumlamasıyla birlikte, klasik çıkarım formlarımızın, totoloji ve çelişki tanımlamalarımızın da değişeceği ortadadır. Yeni duruma uygun tanımların veya bunları karşılayacak tanımların yeni bir mantık sistemi içerisinde tanımlanması gerekir.

Son soru olarak herhangi bir önerme eklemesini serbest veya sıkı bir şekilde yorumlama işine karar vermek için herhangi bir geçerli yol olup olmadığıdır. Mantıksal bağlaçların yorumlanması, bir önermenin doğruluğu hakkındaki bazı basit sezgilerimizden yola çıkılarak oluşturulmuştur. Örneğin doğru öncüller altında yanlış sonuç veren bir çıkarım doğru olamaz, aksi takdirde doğru akıl yürütme kavramı hiçbir şey ifade etmezdi. Bundan dolayı üç doğruluk değeri altında önermelerin yorumlanması, ilgilenilen uygulamalardan çıkarılan doğruluk değeri üzerine oluşan sezgilerimize dayanmalıdır. Zaten gördüğümüz gibi, aynı uygulamalar ve aynı sezgilere sahip olmadığımız, doğruluk tablolarından görülmektedir. Totolojinin ve doğruluk tablolarının üç değerli mantıklarda değişmesinin sebebi budur.[21]

4.1.1. Lukasiewicz in üç değerli mantığı

Aristo'nun gelecekteki olaylarla ilgili olarak kurulan önermelere doğru veya yanlış gibi bir değer atamanın imkanı üzerine olan tartışmasından bahsetmiştik. Bu noktadan hareket eden J. Lukasiewicz gelecek olaylarla ilgili önermelerden doğru veya yanlış olarak neden bahsedilemeyeceğini şu akıl yürütme üzerine inşa eder;

“Çelişkiye düşmeksizin ben gelecek yıl belirli bir zamanda örneğin Aralık 21 de Varşova da olacağımı farzedebilirim. Bunu şu an için kesin olarak belirleyebilmem de mümkün değildir. O halde, bu tarihte Varşova da olmak mümkündür fakat zorunlu değildir. Bu önerme şu an için doğru kabul edilseydi, o halde varşova da olmam zorunlu olurdu fakat bu başlangıçta yaptığım varsayımla çelişir. Eğer şu an için bu önerme yanlış olsa o halde bu tarihte Varşova da olmam mümkün olmayacaktı ki bu da başlangıçta kabul ettiğim varsayımla bir çelişki oluşturur. Bu durumda, bu önerme şu anda ne doğru ne de yanlıştır denilebilir. Bu yüzden de

bunların dışında bir doğruluk değerine sahip olmalıdır. Bu değeri belirsiz veya nötr anlamına kullanılabilecek olan $\frac{1}{2}$ ile gösterebiliriz.[20]”

Ortaya çıkan bu yeni değerle birlikte artık klasik mantıktan farklı olarak bir mantık sistemi inşa etmek mümkündür. Klasik önerme eklemlerini kullanarak bu doğruluk değeriyle birlikte Lukasiewicz aşağıdaki doğruluk tablolarını oluşturur.

Tablo 4.1 Lukasiewicz in üç değerli mantığı için doğruluk tablosu

$\neg p$	$p \backslash q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
	q	$D \ B \ Y$	$D \ B \ Y$	$D \ B \ Y$	$D \ B \ Y$
Y	D	D B Y	D D D	D B Y	D B Y
B	B	B B Y	D B B	D D B	B D B
D	Y	Y Y Y	D B Y	D D D	Y B D

Sembolik mantıkta gördüğümüz gibi üç değerli mantıkta da oluşturulan herhangi bir bileşik önerme, kendini oluşturan önermelerin ve önerme eklemlerinin bir doğruluk fonksiyonu şeklindedir. Aradaki fark, artık doğruluk değerleri üç değer üzerinden hesaplanmaktadır.

Lukasiewicz kendi üç değerli mantık sisteminin yapılanmasında $\sqcup$ ve $\rightarrow$ eklemlerini ilkel terimler olarak ele aldı. Diğer eklemler ise bu ilkeller yoluyla tanımlandı ve doğruluk tabloları elde edildi. İlkel terimler olarak bunların seçilmesinde, iki değerli mantık altında totolojik olan önermelerin korunması gereksinimi yatıyordu[3].

Tablodan da görüleceği üzere sistemi oluşturan üç doğruluk değeri vardır ve bu yüzden bu sistem L_3 olarak gösterilir. Herhangi bir önermenin değilinin doğruluk değeri ayrıca verilmiştir. “ve” eklemiyle oluşturulmuş bir önermenin doğruluk değeri önermeyi oluşturan değişkenlerin doğruluk değerleri arasında en yanlış olanını almaktadır. “veya” eklemleri ise “ve” ekleminin tersine kendisini oluşturan önermelerin doğruluk değerlerinin en büyüğünü doğruluk değeri olarak alır. $\rightarrow$ eklemleri ise iki değerli mantıktaki eşdeğerine karşılık getirilen $\sqcup p \vee q$ ile aynı değerleri korur. Önermelerin her ikisinin B değerini aldığı durumda $p \rightarrow p$ totolojisini bir değişikliğe uğratmamak amacıyla doğruluk değeri olarak D atanmıştır[3]. Ayrıca doğruluk değerleri arasından üçüncü değer çıkarılırsa, geriye kalan tablo iki değerli mantıkta oluşturulan doğruluk tablolarıyla aynı olduğu görülmelidir. Bu sebepten ötürü üç

değerli mantık içerisinde totoloji oluşturan bütün önerme kalıpları, iki değerli mantık içinde bir totolojidir. Fakat bunun tersi doğru değildir. Örneğin; klasik mantıkta üçüncü şıkkın olanaksızlığı olarak adlandırdığımız ve bir totoloji olan, $p \vee \neg p$ önerme kalıbının, p'ye B değeri atandığında L_3 sistemi içinde bir totoloji olmayacağı açıktır. Eğer L_3 sistemindeki “veya” eklemi bu önerme kalıbını totoloji yapacak şekilde yorumlanmış olsaydı, sistem içinde diğer açılardan hiçde istenmeyen sonuçlara neden olabilirdi. Çelişmezlik ilkesi de aynı şekilde değerlendirilecek olursa, üç değerli mantık içerisinde bu ilkeyi iki değerli mantık içerisindeki gibi yorumlamak mümkün olmayacaktır. Yeni bir tanımlamaya gidilerek, yarı totoloji gibi bir kavram geliştirilebilir. Bir önerme hiçbir yorumlama altında yanlış değerini almıyorsa (yani doğru ve belirsiz değerlerini almasına izin verilmiştir anlamında) bu durumda önermeye yarı totolojiktir denir. Totoloji ise bütün yorumlamalar altında doğru değeri alan önerme idi.[16]

Üç değerli mantığın ve çok değerli mantığın modal mantıkla yakından ilişkisi olduğundan söz etmiştik. Bu bağlamda, Lukasiewicz üç değerli mantık altında modal önermelere ilişkin doğruluk değeri yorumlamasını da farklılaştırmıştır[3].

4.1.2. Bochvar'ın Üç Değerli Mantık Sistemi

Üç değerli mantığın başka bir versiyonu Rus mantıkçısı A. Bochvar tarafından ortaya kondu[3]. Lukasiewicz mantığındaki üçüncü değer, Bochvar'ın mantığında başka bir anlam kazanıyordu. Bochvar'ın üçüncü değeri, belirsiz veya nötr den ziyade, anlamsız veya karar verilemez gibi bir yorumlama ile anlaşılabilir. Dilin içinde bulundurduğu anlamsal paradokslara bir çözüm getirmek amacıyla inşa ettiği üçüncü değeri, 1 ve 0 arasında bir değer olarak değilde paradoksal veya anlamsız olarak değerlendirmek daha doğru olur. Örneğin; “Bu cümle yanlıştır.” dediğimiz zaman eğer bu cümleyi doğru kabul edersek yanlış, cümlemin yanlış olduğu yanlışsa bu sefer cümle doğru demektir. Görülüyorki her iki durumda da bir çelişkidenden kurtulabilmemiz mümkün gözükmemektedir.

Anlamsız veya paradoksal diyebileceğimiz üçüncü değeri gösterim olarak Lukasiewicz sistemine sadık kalarak B ile ve sistemi de B_3 ile gösterelim. Bochvar, doğruluk tablolarını şu şekilde inşa etmiştir.

Tablo 4.2 Bochvar'ın üç değerli mantığı için doğruluk tablosu

$\neg p$	$p \backslash q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
		$D \ B \ Y$	$D \ B \ Y$	$D \ B \ Y$	$D \ B \ Y$
Y	D	$D \ B \ Y$	$D \ B \ D$	$D \ B \ Y$	$D \ B \ Y$
B	B	$B \ B \ B$	$B \ B \ B$	$B \ B \ B$	$B \ B \ B$
D	Y	$Y \ B \ Y$	$D \ B \ Y$	$D \ B \ D$	$Y \ B \ D$

Tablolardan da görüleceği üzere Bochvar'ın sisteminde klasik manada bir totoloji olması mümkün gözükmemektedir. Beş temel eklemin yanı sıra iç ve dış önerme eklemi adı altında iki önerme eklemi daha geliştirmiş ve bu sayede sistemde totolojilerin oluşmasını da mümkün kılmıştır. Fakat daha sonra Bochvar'ın üç değerli mantık sistemi vasıtasıyla bir çözüm getirmek istediği paradoksların, bu mantık sisteminde de bulunabileceği gösterilmiştir.

4.1.3. Kleen in Üç Değerli Mantık Sistemi

Diğerlerinden farklı olarak Kleen'in üçüncü değeri, tamamiyle matematiksel uygulamalar üzerine bir kaygıdan ortaya çıkmıştır. Üçüncü değeri, doğruluk değeri bilinmeyen veya belirlenemeyen olarak tanımlamıştır.

Örneğin; P matematiksel bir önerme olmak üzere,

$$P(x) \leftrightarrow 1 \leq \frac{1}{x} \leq 2$$

gibi bir önerme ona göre şöyle yorumlanabilirdi;

- 1) Eğer $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ ise önerme doğru
- 2) $x = 0$ ise önerme tanımsız veya belirlenemez
- 3) Bunların dışındaki değerlerde önerme yanlış.

Doğruluk tabloları oluşturulurken de böyle durumların formüle edilmesini amaçlayan bir çözüm geliştirmek amaçlanıyordu. Onun sistemini K_3 ile gösterirsek, doğruluk tabloları şu şekilde verilir.

Tablo 4.3 Kleene in 3 değerli mantığı için doğruluk tablosu

	p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
$\neg p$			$D B Y$	$D B Y$	$D B Y$	$D B Y$
Y	D		$D B Y$	$D D D$	$D B Y$	$D B Y$
B	B		$B B Y$	$D B B$	$D B B$	$B B B$
D	Y		$Y Y Y$	$D B Y$	$D D D$	$Y B D$

Kleene, bu doğruluk tablosunun yanısıra, Bochvar'ın sisteminin aynısı olan ve zayıf bağlaçlar ailesi adını verdiği başka bir tablo daha geliştirdi.

Bunların haricinde A. Heyting, K. Gödel ve H. Reichenbach'ın da kurmuş olduğu üç değerli mantık sistemlerinden de bahsetmek mümkündür[3]. Örneğin; H. Reichenbach'ın sistemi, kuantum mekaniğinde ortaya çıkan sorunlara çözüm getirmeyi amaçlıyordu. Bir taneciğin, kuantum dünyasında, aynı anda hem yerini hem de momentumunu aynı anda tesbit etmek tam mümkün olmadığından dolayı, bu tanecik üzerine farklı bilgi veren iki ayrı önermenin birlikte doğru kabul edilmesi mümkündür. Fakat bu, iki değerli mantığa göre çelişki teşkil eden bir durumdur. Bu yüzden Reichenbach'a göre kuantum dünyasına ilişkin bilgi içeren bir önerme doğru ve yanlış dışında bir de belirsiz değeri almalıdır. Ona göre fiziksel dünyanın yapısından söz etmek yerine bu dünyayı tasvir etmede kullanabileceğimiz dillerin yapısını gözönüne alabiliriz. Bu diller, tasvir ettikleri objeye göre iki veya üç değerli olabilirler. Bu durumda, tabiatı bir bütün olarak değerlendirmek istersek, dilin konusuna göre farklılık gösteren özelliklerini incelememiz gerekir [7].

4.2. LUKASIEWICZ'İN N DEĞERLİ VE SONSUZ DEĞERLİ MANTIK SİSTEMLERİ

Üç değerli mantık kullanışlı ve anlamlı olarak kabul edildikten sonra, ilgiler kendi yorumlamasına ve doğruluk şartlarına bağlı, çok değerli mantıkların da olabileceği düşüncesi üzerine yoğunlaştı. Böyle bir gelişme, sembolik mantığın büyük bir gelişim yapmasından sonra 1930'larda yapıldı[3]. Çok değerli mantık sistemi, önermenin alabileceği doğruluk değeri sayısına göre isimlendirilir. N değerli mantığın arkasındaki düşünce şudur; Eğer bir önerme $\frac{1}{2}$ gibi bir değer alıyorsa, o zaman oldukça doğru veya oldukça yanlış şeklinde değerler de alabilen önermeleri

düşünmek mümkündür. Bu doğruluk değerleri sırasıyla $\frac{3}{4}$ ve $\frac{1}{4}$ olarak ifade edilebilirdi

Lukasiewicz sistemini üçüncü değerden sonra, daha çok değer alabilecek bir biçimde sonra da $[0,1]$ aralığındaki rasyonel değerleri de alabilecek şekilde genişletmeye çalıştı. Bunu, $[0,1]$ aralığındaki bütün sayıların doğruluk değeri olarak kabul edilmesi izledi. Bu genişletme işleminde 0 değeri yanlış, 1 değeri doğruyu gösterirken arada kalan değerler diğer doğruluk değerlerine karşılık getirilmektedir.

Bir önermenin doğruluk değerini $T(p)$ ile gösterirsek, L_3 sisteminin doğruluk tablosu aşağıdaki cebirsel eşitliklerle de aynı şekilde oluşturulabilir;

$$T(\neg p) = 1 - T(p)$$

$$T(p \wedge q) = \min [T(p), T(q)]$$

$$T(p \vee q) = \max [T(p), T(q)]$$

$$T(p \rightarrow q) = \min [1, 1 - T(p) + T(q)]$$

$$T(p \leftrightarrow q) = [T(p) - T(q)]^2$$

Cebirsel eşitlikler, verilen önermelerin doğruluk değerlerini sayısal biçimde hesaplamayı mümkün kıldığından dolayı, doğruluk değerlerinin artması durumunda da doğruluk değerlerinin oluşturulması veya bir önermenin doğruluk değerinin hesaplanması zor olmayacaktır.

Verilen bir n doğal sayısı için doğruluk değerleri, $[0,1]$ aralığındaki rasyonel sayılarla etiketlenir. Bu aralık $n-1$ parçaya bölünür ve bu parçaların uç noktaları doğruluk değeri olarak alınır. $[0,1]$ aralığını $n-1$ parçaya bölen n tane nokta, n değerli mantığın doğruluk değeri kümesini oluşturur. O halde, n tane doğruluk değerine sahip bir mantık sisteminin doğruluk değer kümesi;

$$T = \left\{ 0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, \frac{n-1}{n-1} = 1 \right\}$$

şeklinde. Örneğin; altı değerli bir mantıkta doğruluk değerleri, 0, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ ve 1 sayılarından oluşacaktır. Böyle bir doğruluk değeri kümesiyle birlikte, doğruluk değerleri yukarıda verilen cebirsel işlemlere göre belirlenecek olan önerme eklemlerinin kullanılmasıyla, L_n sistemi inşa edilebilir. Bu değerler, doğruluk derecesi olarak yorumlanabilirler. Sistemi $[0,1]$ aralığındaki bütün rasyonel sayıları

doğruluk değeri kabul edebilecek şekilde genişlettiğimizde, sonsuz değerli bir mantık sistemi inşa ederiz ki bu, J. Lukasiewicz'in $L_{\aleph_0}$ sistemidir. Sistem rasyonel sayılarla sınırlandırılmadığında ise $[0,1]$ aralığındaki bütün reel sayıları içerecek şekilde sonsuz değerli bir mantık sistemi inşa edilebilir. Bu sistem $L_{\aleph_1}$ olarak gösterilir ve sürekli mantık olarak isimlendirilir. Böyle bir sistem, bir bakıma bulanık mantığın habercisi olarak da düşünülebilir. Bu mantık, bulanık mantığın özel bir durumudur. Çünkü bulanık mantıkta buna ek olarak esnek önerme eklemleri tanımlama imkanı vardır. Dar kapsamdaki bulanık mantığı, doğruluk değeri kümesi $[0,1]$ aralığına yerleşmiş sonsuz değerli mantık olarak anlamak mümkündür.

Yukarıda kısaca ele alınan n değerli ve sonsuz değerli mantık sistemleri, üç değerli Lukasiewicz mantığının bir genelleştirmesidir. Bunun yanı sıra, doğruluk değeri aralığının değiştirilmesi veya önerme eklemlerinin tekrar yorumlanmasıyla pek çok farklı n değerli ve sonsuz değerli mantık sistemi inşa etmek mümkündür. Örneğin; Bochvar'ın doğruluk tablosu üzerine n değerli bir mantık sistemi inşa edilebilir. Çünkü, kaç değerli olursa olsun, bir mantık sistemi için önemli olan nokta, çelişik olmayan bir formel aksiyomatik sistem halinde kurulmuş olmasıdır.

4.3. ÇOK DEĞERLİ MANTIĞIN UYGULAMA ALANLARI VE SEMANTİK YORUMLARI

Çok değerli mantığın anlamına ilişkin sorunlar, önemli bir konudur. Yorumsuz olarak verilen bir mantık sistemi, soyut bir mekanizma geliştirme açısından ilginç olabilir, fakat mantığın bir bölümü olma iddiasında olamaz. Doğruluk değerleri için bir yorum bulma sorunu, tatmin edici bir çözümden hala çok uzaktadır. Özellikle bu durum n değerli sistemler için geçerlidir. Ancak konu, bazı mantıkçılar tarafından oldukça önemsiz kabul edilmiştir. Çok değerli mantık sistemlerini, ancak sadece soyut bir sistem veya oyun olmaktan öte değerlendirdiğimizde bir mantık sistemi olarak kabul edebiliriz. Aksi takdirde o, ne işe yaradığı da anlaşılmayacak olan bir hesap tablosu olmaktan öteye geçmez[3].

Yukarıda verilen üç değerli mantık sistemleri, konuya ilişkin değerlendirmelerin bir kısmını oluşturmaktadır. Paradoksal yapıdaki önermeler, önermelerin modaliteleri ile alakalı çok değerli mantık çözümlemeleri, bazı değerler altında tanımsız kalan matematik fonksiyonlarına ilişkin yorumlamalar, önermelerin olasılık durumlarını

temsil edecek şekilde doğruluk değerlerinin tanımlanmasıyla elde edilen yorumlamalar, zamana bağlı olarak değişen önerme yapılarına ilişkin değerlendirmeler ve aksiyomatik bir sistemden bir önermenin veya değilinin türetilip türetilmeyeceğine bağlı olarak oluşturulan doğruluk değerleri, çok değerli mantığın anlamlı bir şekilde kullanıldığı alanlardır. Yine de kendi içinde problematikleri olan ve tamamlanmamış bir sahadır[3]. Bunların yanısıra bir önermenin alternatif iki veya daha çok dünyada alacağı doğruluk değerlerine göre çok değerli mantığın kullanılabilmesine ilişkin çalışmalar vardır. Örneğin; bir önermenin farklı geometriler altında doğruluk değerlerinin saptanması ile, bunların arasında kurulabilecek ilişkide çok değerli mantığın kullanıldığını görüyoruz.

Çok değerli mantık, önermeler mantığının aksiyomatik bir hale getirilmesinde ve aksiyomların birbirinden bağımsızlığını göstermede de bir araç olarak kullanılır. Kümeler teorisinde oluşan paradoksların yorumlanması yine bir uygulama alanıdır. Fakat, bu paradoksların herhangi bir n değerli mantık içerisinde de ortaya çıktığı gösterilmiştir. Daha önce de değinildiği üzere üç değerli mantığın atom altı dünyada ortaya çıkan problemlere bir yorum getirmede kullanıldığını hatırlatabiliriz. Elektronikte, devre yapılarına ilişkin kullanımı da pratik bir uygulama olarak karşımıza çıkar.

Sosyologların toplumlar üzerinde düşüncenin kanunlarına ilişkin yaptığı araştırmalar da çok değerli mantık sistemiyle yakından ilişki içerisinde görülebilir. Aristo, düşüncenin kanunları adı altında verdiği üç kanunun aynı zamanda varlığın kanunları olduğunu, yani bunların her yerde ve her zaman aynı olacağını söylüyordu. Halbuki son yüzyılda değişik toplumlar üzerinde araştırma yapan sosyologlar, yaşadığı mekandaki bir ağacı hem ağaç olarak hem de bir totem olarak gören ilkel kabilelerden söz etmektedirler. Bu görüşü eleştiren farklı sosyologlar da vardır ama, bu görüşün savunucuları, düşüncenin kanunlarının ontolojik olmadığını, bu tür çalışmalarla göstermiş oldukların söylemektedirler[22].

Bunun yanısıra, değer yargıları ve geleneklerin, fertler ve toplumlar üzerindeki etkisini ve bunlar arasındaki ilişkiyi inceleyen deontik mantıkta çok değerli mantıkla sıkı bir ilişki içerisinde[7].

5. BULANIK MANTIK VE BULANIK KÜME TEORİSİ

Bu yüzyılda matematik ve bilimde görülen çeşitli paradigma değişiklikleri arasında belirsizlik kavramıyla ilgili olanı belki de en dikkat çekicidir. Bilimde, bu değişiklik belirsizliği istenilmeyen bir durum olarak gören ve mümkün bütün durumlarda kaçınılması gerektiğinde ısrar eden geleneksel anlayıştan, belirsizliği tolere eden ve bilimde bundan kaçınılmasının mümkün olmadığını iddia eden alternatif bakış açısıcaklıkna doğru dereceli bir geçişle ortaya konuldu. Geleneksel yaklaşıma göre, bilim ortaya koyduğu bütün açıklamalarda kesinlik için uğraşmalıydı ve bundan dolayı da belirsizlik bilimsel olmayan bir şey olarak kabul görüyordu. Alternatif bakış açısıcaklıkna göre ise, belirsizlik, sadece kaçınılması mümkün olmayan bir durum değil, aynı zamanda büyük bir fayda alanı açan ve üzerinde çalışılması gereken önemli bir durumdu[9].

Araştırmacılar tarafından yapılan incelemeler sonucu belirsizliğin bu önemli rolünün anlaşılması, geleneksel anlayıştan belirsizliği temel alan modern anlayışa geçişi sağlayan dönüşümü başlatmıştır. Bu dönemde, ihtimaller teorisinden farklı olarak, belirsizlikle ilgili bir çok teorinin ortaya çıktığı görüldü. Bu teorilerle aynı zamanda birden çok belirsizlik türünün olduğu ve ihtimaller teorisinin bu belirsizlik türlerinden sadece biriyle ilgilendiği ortaya çıktı. Bulanık küme teorisi de, bu çalışmalar içinde şekillenen bir disiplindir[9].

5.1. BELİRSİZLİK VE BİLGİ

Kesinlik düşüncesinin değişmesinin ilk aşaması, 19. yüzyılın son çeyreğinde fizikçilerin moleküler düzeydeki çalışmalarıyla başladı. I. Newton'un mekanistik dünyasının kesinlik arzeden kuralları bu işlemlerle ilişkili olduğu halde, bu kuralların gerçek uygulamaları, varolan hesaplama tekniklerinin hatta ve hatta temel hesaplama limitlerinin bile çok ötesinde sonuçlara yol açması bakımından imkansız durumlar ortaya çıkarıyordu. Yani, bu kesin kanunların oluşturduğu bazı sonuçlar, sadece varolan bilgisayar teknolojisine dayanan pratikteki hesaplama yöntemleriyle işlenmesi bir yana, teoride bile kullanılamaz haldeydi. Moleküler düzeydeki fizik

alışmalarında ortaya çıkan ve çözüm için farklı bir yaklaşım gerektiren bu ihtiyaç, birbirinden bağımsız istatistik yöntemlerinin gelişimine yol açtı. Newton fiziğinde, belirsizliğe yer vermeyen matematiksel analizin rolü, istatistiksel mekanikte, olasılık teorisi tarafından karşılanıyordu ve bu teori aslında belirli bir tipteki belirsizliklerin giderilmesini amaçlıyordu[21]. Bugün anlaşılmıştır ki, istatistiksel süreçlerin veya olasılık kuramının incelediği belirsizlik tipi dışında kalan belirsizlik alanları mevcuttur.

Belirsizlik, bir bilgi alanında bazı kural veya durum belirteçlerinin hiç olmaması yani bilginin eksikliği, bilgilerin içerikleri ile ilgili bir takım şüphelerin var olması, ya da içeriğin kesin bir ifade taşınamaması anlamında kullanılmaktadır

Belirsizlik, çevre durumuna ait herhangi bir özelliğin anlaşılmasında var olan bir eksiklik ve doğru olmama nedenlerine dayanabilir. Bilginin eksik olması ise genelde bilgiye ulaşamama, ya da kabul edilebilir bir doğrulukla elde edememe olarak anlaşılır. İncelenen duruma etki eden faktörler, ele alınamayacak derecede çok sayıda ve çeşitte olduğunda, seçilen bazı faktörler yok sayılır ve dolayısıyla eldeki bilgi tabanı eksik olur. Halbuki, çoğu karar verme mekanizmalarında ya da mühendislik hesaplamalarında, uygulama alanı ya da başka herhangi bir nedenle ortaya çıkan belirsizlik, net ve kesin bir şekilde bilgisayara aktarılmalı ve çözüm sürecinde hesaba katılmalıdır. Bu zorunluluktan dolayı, yapay zeka uygulamaları, yardımcı karar uygulamaları, uzman sistemler, gelişmiş simülasyonlar gibi uygulamalar çoğaldıkça, belirsizlik problemi daha açık ve görülebilir bir şekilde ortaya çıkmıştır. Kısaca bilgisayarlaşma arttıkça belirsizlik problemi büyümekte ve buna paralel olarak belirsizliği ele alan yöntemler çoğalmaktadır[23].

5.1.1 Dil, Belirsizlik ve Bulanık Mantık Yaklaşımı

Genelde, problemlere sistemler aracılığıyla yaklaşırız. Bu sistemler, gerçekliğin bir kısmının modellenmesi olarak inşa edilirler. Gerçekliğin bazı yönleri kullanılarak kurulan bu modellerin amacı, doğal veya insan yapımı olan bazı gerçek olguların doğasını anlamak, istenilen yönde olguyu nasıl kontrol edebileceğimizi öğrenmek, çeşitli senaryolar için modellenen olgunun bütün kapasitesini kullanabilmek ve sistemin geleceğine ilişkin gerekli ve yeterli öngörülerini yapabilmektir[9]. Modellerin inşasında veya problemlerin tanımlanmasında kullanılacak kavramlar, bir dil aracılığıyla ortaya konması zorunludur ve dilin kendi içinde, kavramlarda yansımış

olan belirsizliklerin kurulmak istenen modelin gerçekliğe uygunluğunu da etkileyici olacağı açıktır.

Bulanık küme teorisinin, üyelikten üye olmamaya dereceli geçişi ifade etmesindeki imkanları bu esnekliği bize verir. Bize, belirsizliğin ölçülmesinde güçlü ve anlamlı araçlar sunmasının yansıcaklıkra, doğal dilde ifade edilen belirsiz kavramların anlamlı bir şekilde temsilini de vermektedir. Fakat Aristo mantığı üzerinde temellenen klasik küme teorisi, verilen bir alana ait bütün bireyleri, incelenen özelliğe göre ikiye ayırır; kümeye ait olan elemanlar ve ait olmayanlar. Kümeye üye ve üye olmayan elemanlar arasında kesin ve belirsiz olmayan bir ayrım vardır. Ancak, doğal dilde ifade edilen ve üzerinde çalıştığımız çoğu sınıflandırma kavramı, bu türde bir karakterde değildir. Örneğin; uzun insanlar kümesi, pahalı arabalar kümesi, yakın sürüş mesafesi, güvenilir kar araçları, birden çok büyük sayıların oluşturduğu küme gibi kavramlar klasik küme teorisinin öngördüğü şekilde incelenemezler. Bu kümeleri, kesin olmayan sınırlara sahip olarak kabul ederiz ve üyelikten üye olmamaya geçişin dereceli olduğunu göz önüne alarak işlem yaparız[9,25].

Bulanık bir küme, çalışma yapılan alana ait her bir bireye, matematiksel olarak kümedeki üyelik derecesini temsil eden bir değer atayarak tanımlanır. Bu değer elemanın, bulanık küme tarafından ifade edilen kavrama uygunluk derecesini ifade eder. Bundan dolayı bireylerin kümeye ait olması farklılaşır. Üyelik dereceleri 0 ile 1 arasındaki gerçel sayılarla temsil edilirler. Tam üye olma ve üye olmama durumu, bulanık kümede hala sırasıyla 1 ve 0 değerleriyle karşılanır. Bundan dolayı da, klasik küme kavramı bulanık küme kavramının bu iki değere kısıklıklanmış özel bir şekli olarak görülebilir.

Bulanık küme üzerine yapılan araştırmalar, ortaya çıktığı günden bu yana hızla büyümüştür. Oluşturduğu kavramsal çerçeve ve sonuçları itibariyle şu anda oldukça geniş bir perspektife sahiptir. Uygulama alanlarının genişliği ve bu alanlarda oluşturduğu sonuçların etkisi bakımından bulanık küme teorisi bugün bilimsel çalışmalarda önemli bir yer tutmaktadır[9,24].

5.1.2 Bulanık Mantığın Tarihçesi ve Uygulama Alanları

Bulanık küme teorisi ilk kez 1965 yılında L. Askerzade tarafından ortaya atılmış ve hızla gelişerek modern kontrol teorisi alanında birçok bilim adamının ilgisini çeken

araştırmaya açık yeni bir dal olmuştur.. Örneğin Londra Üniversitesinden H. Mamdani, bulanık mantık kuramını bir buhar türbinin hızının denetlenmesine uygulamayı düşünmüş ve bu amaçla, bir insanın davranışını örnekleyen ‘Eğer türbin hızı çok hızlı artıyorsa ve basınç da çok düşükse, buhar vanasını biraz aç’ türünden kurallardan oluşan bir uzman sistem geliştirmiştir. H. Mamdani, bulanık mantık temelli bu tür bir uzman sistemle türbin hızının ve performansının çok başarılı bir şekilde denetlenebileceğini göstermiştir[26].

Bulanık mantık kuramının ilk önemli endüstriyel uygulaması çimento sanayinde olmuştur. Bu sanayide değirmen içerisindeki sıcaklık ve oksijen oranı, ürün kalitesi açıcaklıktan çok önemlidir. Operatörlerin bu konuda yeterli bir uzmanlık kazanabilmeleri için yıllar geçmesi gerekir. Fakat kişiler ve uzmanlık düzeyleri arasında kaçınılmaz farklılıklar olacağından, üretilen çimentonun kalitesi vardiyadan vardiyaya değişecek, tutarlı kalitede çimento üretimi çok zor olacaktır. Bir firma bu nedenlerle doğrusal bir model üzerine kurulu geleneksel denetleyici yerine, bir bulanık mantık denetleyicisi kullanmayı düşünmüş ve çok başarılı sonuçlar veren bir uzman sistem geliştirmiştir.

Kronolojik olarak çimento uygulamasından sonraki en önemli aşama, Japonya da 1987 yılında faaliyete geçen Sendai metrosudur. Geliştirilen sistemde, daha önce tren operatörü tarafından basit bir denetleyici aracılığı ile yapılan ve yolcuların sarsıntılı bir yolculuk geçirmelerine neden olabilen hızlanma ve yavaşlama işlemleri otomatik olarak yapılmakta ve tren operatörünün yapması gereken işler kapıları kapatmak ve başlatma düğmesine basmak gibi birkaç işlemle sınırlı kalmaktadır. Böylece yolcuların, demirlere tutunma gereksinimi duymadan rahat bir yolculuk yapabilmeleri sağlanmış, daha önce kullanılan sisteme göre trenin istenilen konumda durması üç kat iyileşmiş ve kullanılan enerji % 10 oranında azalmıştır.

Uygulama alanları arasında çışitli beyaz eşya, tren, asansör, trafik kontrolü ve otomotiv sanayii sayılabilir. Bugün Japonya da bulanık mantık prensibiyle çalışan beyaz eşyalar ve elektronik aletler, örneğin fotoğraf ve çamaşır makinaları, güncel yaşamın birer parçasıdır. Günümüzde artık bulanık mantığın uygulamalarına yönelik özel yazılım ve donanımlar, piyasadan hazır bir şekilde temin edilebilmektedir.

Pilav pişirme aletlerinden, asansörlere, arabaların motor ve süspansiyon sistemlerinden, nükleer reaktörlerdeki soğutma ünitelerine, klimalardan elektrikli süpürgelere kadar, bulanık mantığın uygulandığı birçok alan bulunmaktadır. Bu alanlarda sağladığı enerji, iş gücü ve zaman tasarrufu ile "iktisat" açsıcaklığından da önem kazanmaktadır.

Bu mantıkla donatılan çamaşır makineleri, çamaşırın cinsi ve kirliliği, suyun durumu gibi şartları özel algılayıcılarla tespit ettikten sonra deterjanı, devir saysıcaklığını ve süresini ayarlamakta, böylelikle mevcut şartlara göre en uygun şekilde çalışmaktadır. Bunun büyük bir enerji tasarrufu doğurduğu açıktır. Tüketicinin sadece bir düğmeye basmasının yeterli olması ise, büyük bir kullanım kolaylığı temin etmiş ve bu tür makinelerin sadece bir fabrikada ayda 35.000 adet üretilmesine rağmen talebin karşılanamamasına sebep olmuştur.

Bulanık mantığın gelecekteki uygulama sahaları, daha da genişleyecek gibi gözükmektedir. Şeker hastaları için vücuttaki insülin miktarını ayarlayarak yapay bir pankreas görevi yapan minik anazyani üretiminde, prematüre doğumlarda bebeğin ihtiyaç duyduğu ortamı devam ettiren sistemlerin hazırlanmasında, suların klorlanmasında, kalp pillerinin üretiminde, oda içindeki ışığın miktarının ayarlanmasında ve bilgisayar sistemlerinin soğutulmasında bulanık mantık çok şeyler vaatmektedir.

5.1.3 Bulanık Mantığın Avantajları

Bulanık mantığın belirli bir formel tasarım yönteminin olmayışı ve halen iyi ölçme yöntemlerine sahip bulunmayışı, bulanık mantığın ne zaman kullanılması gerektiğinin ve geleneksel yöntemlerden ne kadar iyi sonuç vereceğinin kestirilmesini zorlaştırmaktadır. Ayrıca bulanık mantık uygulamalarında kullanılan kuralların, mutlaka uzman deneyimlerine bağlı olarak konulması gereksinimi ve üyelik fonksiyonları deneme ile bulunduğu için zaman kaybının olabileceği, bulanık mantığın dezavantajları arasında sayılabilir.

Bulanık mantığın en güçlü uygulamaları, doğrusal olmayan ve girişlerinde veya tanılımlarında belirsizlik bulunan karmaşık sistemlerin gerçekleştirilmesinde ortaya çıkmaktadır. Çok büyük doğa olayları (hava, doğal biçimler, okyanuslar gibi) veya insan yapsıcaklık (ekonomi, borsa veya seçimler gibi) sistemlerin modellenmesi ve kontrolü için, bulanık mantığın en iyi olduğu düşünülmektedir. Bu tür kontrol

sistemleri ile birlikte yeterli doğrulukta modellenemeyen çok karmaşık sistemler, önemli ölçüde doğrusal olmayan sistemler, girişlerinde veya tanımlarında belirsizlik olan sistemler için de bulanık mantığı kullanmak en iyi çözümü verir.

Bulanık mantığın her durumda iyi sonuç verecek bir sistemi olduğunu vurgulamak yanlış bir düşüncedir. Ancak gerçek dünyadaki birçok olayın açıklanması ve teknolojiye aktarılması işinde, geleneksel sistemler yerine bulanık mantığın kullanılması ile daha başarılı olunacağı açıktır.

Çok karmaşık, doğrusal olmayan, belirsizlik içeren ve geleneksel yöntemlerle incelenemeyen sistemlerin modellenmesine olanak tanınması da bulanık mantığın avantajları arasındadır. Ayrıca, bulanık mantığın insan düşünüş tarzına yakın olması, matematiksel modellerle uyum sağlaması, uygulamalarının hızlı ve ucuz olması, insan davranışlarını formüle etmesi, karar aşamalarını açık bırakmayacak şekilde tanımlanması, sistemlerde insan müdahalesine yer vermemesi ile birlikte sistemin kısa sürede gerçekleştirilmesi ve yeni olanaklara açık olması, bulanık mantığın üstünlüklerindendir[23].

5.2. BULANIK KÜMELER

Aristo mantığı ve bu mantık üzerine bina edilen klasik küme yaklaşımı, dünyayı doğru ve yanlış, siyah ve beyaz olarak ikiye böler. Bunların dışındaki bütün seçenekler görmezlikten gelinir. Bulanık küme teorisine işte bu sorunun bir araştırması olarak bakılabilir. Bulanık mantık ve bulanık küme, verdiğimiz bütün hükümleri bir derece problemi olarak görür. Bu açıdan bakıldığında bize, siyahla beyaz arasında gri renklerin var oluşu gibi, doğru ile yanlış arasında başka seçeneklerin olduğunu gösterir.

Klasik küme yaklaşımına göre istediğimiz özelliğe sahip olan bir birey, eleman veya çalışma alanı içerisindeki ölçümler, tanımlanan kümeye ya aittirler veya değildirler. Bu tür kümeleri ifade etmek için özel bir fonksiyon tanımlanabilir ve bu fonksiyona karakteristik fonksiyon denilir. Karakteristik fonksiyon her bir elemana 1 ve 0 değerlerinden birini üyelik durumuna göre atayarak, evrensel küme üzerinde tanımlanan ve bizim ilgilendiğimiz özelliğe sahip olan elemanların oluşturduğu kümeyi belirler.

Örneğin; X evrensel kümesi üzerinde belirli bir özelliği taşıyan elemanları ayırarak oluşturduğumuz A kümesini;

$$\forall x \in X, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & ,x \in A \\ 0 & ,x \notin A \end{cases} \quad (5.1)$$

karakteristik fonksiyon yardımıyla ifade edebiliriz. Fonksiyon A kümesine ait elemanlara 1 değerini, ait olmayan elemanlara ise 0 değerini atamaktadır. Yani, 1 değerini alan elemanların, A kümesini belirleyen özelliği taşıdığını söylemektedir. Fonksiyondan da görüldüğü üzere, klasik kümelerde bir eleman için üyelikten üye olmamaya geçiş çok kesindir ve iyi tanımlanmıştır. Fakat, bulanık kümeleri içeren bir evrensel küme içerisindeki elemanların üyelik geçişi derecelidir. Elemanların kümeye ait olma derecelerinden bahsetmek söz konusudur. Bu derecelendirme, bulanık kümelerin sınırlarına, belirsizlik özelliği katar. Bundan dolayı elemanın bu kümeye aitliği, belirsizliği ölçmeye yarayan bir fonksiyonla tanımlanır.

Fonksiyon, evrensel kümenin elemanlarını belirli bir aralıktaki gerçel sayılara karşılık getirerek elemanlar arasındaki derecelendirmeyi ifade edecek biçimde tanımlanır. Daha yüksek değerler, üyelik derecesinin yüksekliğini gösterir. Bu fonksiyona üyelik fonksiyonu ve bu fonksiyonun oluşturduğu kümeye, bulanık küme denir.

X boş olmayan klasik anlamda bir küme olsun. X 'deki bir bulanık A kümesi

$$\forall x \in X \text{ için; } A: X \longrightarrow [0,1] \quad (5.2)$$

fonksiyonu ile verilir. A 'ya bulanık kümeye karşılık gelen üyelik fonksiyonu adı verilir. Başka bir ifadeyle $A(x)$, A 'nın elemanlarının istenilen özelliği hangi ölçüde sağladığının ölçüsüdür[9,24,26].

Bulanık küme ve bulanık kümenin üyelik fonksiyonu kavramı aynı şeyi ifade ederler ve birbirlerinin yerine kullanılabilirler. Herhangi bir bulanık kümeyi üyelik fonksiyonuna bakarak belirlemek mümkün olduğu gibi, verilen bir bulanık kümeye bakarak üyelik fonksiyonunu yazmak da mümkündür. Bulanık A kümesi, X 'deki her elemanın üyelik derecesiyle birlikte oluşturduğu kümedir. x 'in A 'ya ait olma derecesi veya üyelik derecesi $A(x)$ olarak okunur.

Bulanık kümeler belirsiz kavramlarla uğraşan, onları temsil etmeye yarayan bir yöntemin gereçleridir. Belirsiz kavramlarla ifade edilen bir grubun üyelerinin gruba ait olmaları, bir belirsizlik teşkil edeceğinden dolayı, bu üyeliğe bir derece problemi olarak bakabiliriz.

Üyelik fonksiyonunun değer aralığı için yaygın olarak $[0,1]$ aralığı kullanılır. Bu durumda, her üyelik fonksiyonu, bir klasik evrensel kümenin elemanlarını, bu aralıktaki bir sayıya karşılık getiren bir fonksiyondur. Üyelik fonksiyonu tanımlarken evrensel küme, daima bir klasik küme yapsıcaklıktadır.

Bulanık küme kavramının temsili için genel olarak;

$$A: X \longrightarrow [0,1] \quad (5.3)$$

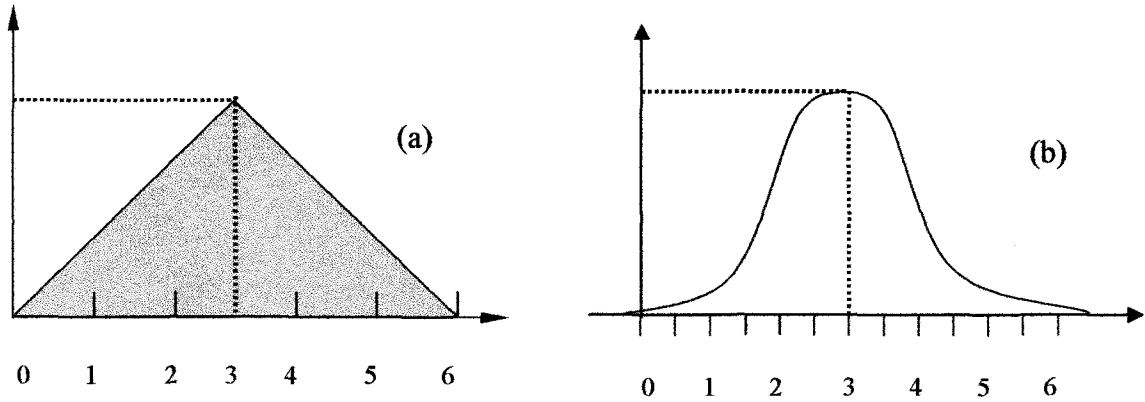
$$\mu_A: X \longrightarrow [0,1] \quad (5.4)$$

gösterimlerinden biri kullanılır. Herbir bulanık küme tamamıyla ve tek olarak özel bir üyelik fonksiyonu tarafından belirlenir. Bu itibarla gösterimler arasında da bir karışıklık doğmaz. Biz burada birinci gösterimi kullanmayı tercih edeceğiz.

Bulanık kümeler daha önce de ifade edildiği üzere doğal dildeki belirsiz ve bulanık kavramların temsili ve onları matematiksel olarak ifade etmemizi mümkün kılarlar. Bu temsil işlemi sadece kavramın kendisine değil, kavramın kullanıldığı alana da bağlıdır. Örneğin; “yüksek sıcaklık” kavramı hava olayları için kullanıldığında oluşturulabilecek bulanık kümeyle, bir nükleer reaktör içindeki sıcaklığı ifade etmede kullanıldığında oluşturulabilecek bulanık kümenin birbirinden tamamıyla farklı olması gerektiği açıktır. Hatta aynı alan içerisindeki aynı kavramın farklı bulanık kümelerle ifade edilebileceği durumların olması bile imkan dahilindedir. Fakat, böylesi durumlarda, bu farklı kümelerin bazı temel nitelikler bakımından birbirine benzemesi gerekir[9,26].

Çoğu bulanık küme grafiğinde 0’dan 1’e geçişin tam şekli önemli değildir. Gerçekten çoğu zaman verilen bir uygulama alanındaki dilsel terimlerin grafiksel karşılığının ne olduğunu kesin bir şekilde belirleyemeyiz. Bunun sebebi, bu terimin verilen alanda nasıl kullanıldığına dair deneyle gelen bilgilerin yeterli olmamasındandır. Özel bir şeklin uygun olup olmayacağının tespiti, çalışılan uygulama alanı tarafından elde edilen verilerle belirlenir. Fakat, bulanık kümelerin çoğu, uygulama alanına uygun üyelik fonksiyonunun tam olarak çizilmesi konusunda aşırı duyarlılığa sahip değildir. Bundan dolayı çoğu zaman basit şekiller tercih edilir

Üyelik fonksiyonları bir çok farklı şekillerde olabilir. Hesaplama açısından getirdiği kolaylıklar göz önüne alınarak istenilen şekilde üyelik fonksiyonu seçilebilir. Bu esneklik bir çok uygulamada hesaplamalar açısından çok kullanışlıdır. Çoğu durumda, üçgen ve yamuk şeklindeki üyelik fonksiyonları, işimizi görecektir niteliklere sahiptir.



Şekil 5.1 “3’e yakın gerçel sayılar kümesi” kavramının değişik üyelik fonksiyonları ile gösterimi

Üyelik fonksiyonları bulanık kümeler için hayati bir konumdadırlar. Bütün uygulamalarda ilgili dilsel terimi yeterince ifade eden uygun bir üyelik fonksiyonu oluşturmak zorunludur. Bunun yapılabilmesi, en başta bu dilsel kavramın veya değişkenin geçtiği konuyla yakından ilgilidir. Örneğin; “genç” kavramı insanlar veya yıldızlar ile ilişkilendirildiğinde elbette aynı anlamı taşımazlar.

Şekil 5.1 de, “3’e yakın gerçel sayılar kümesi” kavramını temsil eden üyelik fonksiyonuna ait iki örnek vardır. Açıkça görülmektedir ki bulanık kümelerin kullanışlılığı büyük oranda bizim, farklı kavramlara uygun üyelik derecesi fonksiyonlarını oluşturabilme becerimize dayanmaktadır. Bu fonksiyonlar analitik olarak;

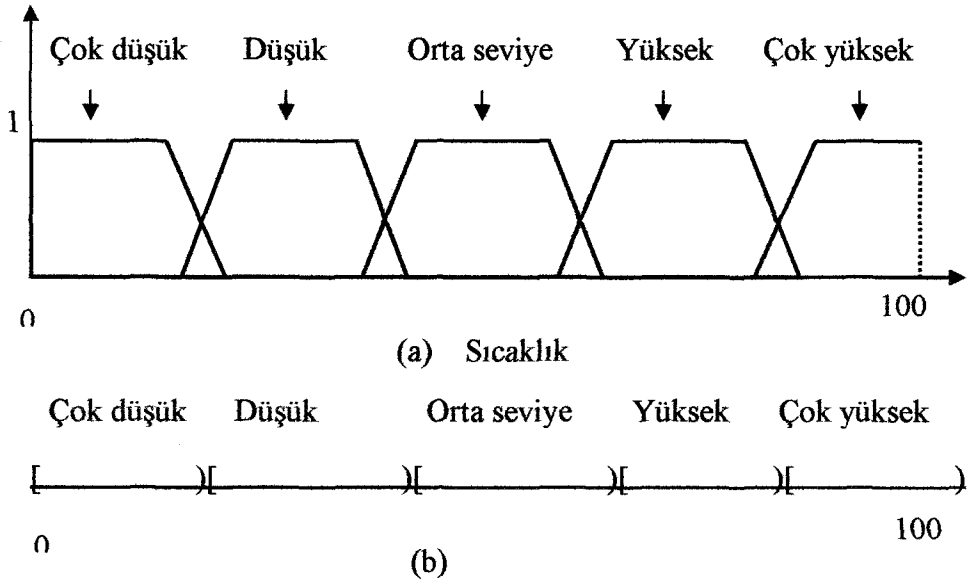
$$A_1(x) = \begin{cases} x/3, & 0 \leq x < 3 \\ (6-x)/3, & 3 \leq x < 6 \\ 0, & \text{diğer hallerde} \end{cases} \quad A_2(x) = \frac{1}{1+10(x-3)^2}$$

şeklinde verilir. Şekillerden de görüleceği üzere fonksiyonlar 3’de en yüksek üyelik derecesi olan 1 değerini almakta ve 3’ün her iki tarafında simetrik bir vaziyette

azalmaktadır. Bu kavramı ifade eden diğer fonksiyonlarında bu özellikleri taşıması gerektiği açıktır.

Günlük kullanım diline ait olan düşük, orta seviye, yüksek ve bunun gibi kavramları temsil eden çeşitli bulanık kümeler, bir değişkenin durumlarını tanımlamak amacıyla kullanılırlar. Bu değişkenlere bulanık değişkenler ve onun alt durumlarına da bulanık terimler denilir. Örneğin “sıcaklık” kavramı kendi içinde çok düşük, düşük, orta seviye, yüksek ve çok yüksek gibi durumlarla nitelenebilen bulanık bir değişken olarak alınabilir. Bu durumda, $[0,100]$ aralığında ki sıcaklık değerlerine karşılık gelecek uygun bulanık kümeler aşağıda Şekil 5.2.a'daki gibi seçilebilirler. Fakat, sıcaklık değişkenini klasik kümeler yardımıyla tanımlamaya çalışsaydık, bir tarafı açık aralıklar üzerinde tanımlı fonksiyonlar elde edecektik. Şekil 5.2.b bu durumu göstermektedir.

Bulanık değişkenlerin önemi, kavrama ait bu durumlar arasındaki geçişi yansıtabilmesindeki kolaylıkta yatar. Bulanık değişkenler belirsizlik altında yapılan ölçümleri ve belirsizliği konu alan yöntemleri ifade etmede de diğer yöntemlerden daha başarılı sonuçlar verir. Geleneksel klasik değişkenler ise bu kapasiteden yoksundurlar. Bir durumun klasik değişkenler yardımıyla tanımlanması matematiksel olarak doğru olduğu halde, kaçınılmaz ölçüm hataları karşısında gerçeğe uygunluk göstermezler. Her biri klasik değişkenlerle kesin yani belirsizlik taşımayan bir şekilde tanımlanmış bu durumların arasında ki sınırların civarında bulunan değerler için yapılacak bir ölçüm, sadece durumların birini destekleyici bir gözlem olarak alınır. Böylesi bir karar kaçınılmaz olarak belirsizlik içerse dahi matematiksel tanımlamalar ve hesaplamalar buna göre yapılır. Herhangi bir ölçümün sınırın her iki tarafındaki durumlar içinde, destekleyici bir gözlem olarak kabul edilmesi gereken yer olan bu değerlerde belirsizlik en yüksek düzeye ulaşır. Fakat, klasik değişkenler yoluyla işlemler yapılırken bu durumlar dahi görmezlikten gelinir ve ihmal edilir. Yapılan şey, durumlar arası sınır değerini, keyfi matematiksel tanımlamalarla, sadece tek bir duruma aitmiş gibi gösterilmesi ve deneysel ölçümlerde bu değerini tek bir duruma ait destekleyici bir değer olarak kabul edilmesidir[9].



Şekil 5.2 Sıcaklık değişkeninin $[0,100]$ aralığında aldığı alt durumların bulanık ve klasik değişkenler yardımıyla gösterilmesi

Halbuki bulanık değişkenler, belirsizlikleri deneysel verilerin bir parçası olarak ele aldıklarından dolayı, gerçeğe daha uygundur ve bize olgular hakkında klasik değişkenlere dayanan bilgilerden daha doğru bilgiler verirler. Ünlü fizikçi A. Einstein bu durumu şu şekilde ifade etmiştir: “Matematiğin kavramları kesin oldukları sürece gerçeği yansıtmazlar, gerçeği yansıttıkları sürece de kesin değildir.”[9]

Bulanık kümeler üzerine kurulan matematiksel yapı, klasik matematikten daha fazla açıklayıcı güce sahip olduğu halde, kullanılabilirliği, uygulama alanlarında karşımıza çıkan kavramlar için uygun üyelik fonksiyonlarının inşa edilebilmesine bağlıdır. Ancak bu işlemin tatmin edici düzeyde gerçekleşmesi, bir çok ek araştırma gerektirir.[9]

5.2.1 Bulanık Kümelerin Özellikleri

Bu bölümde bulanık kümeleri ilgilendiren bazı basit kavramlar üzerinde durulacaktır. Bu kavramların en başında bulanık kümelerle klasik kümeler arasında ilişki kurmamızı sağlayan α -kesimi ve kuvvetli α -kesimi kavramı vardır.

X klasik kümesi üzerinde tanımlı bulanık A kümesinin α -kesimi ve kuvvetli α -kesimi

$${}^{\alpha}\mathbf{A} = \{ x \mid A(x) \geq \alpha \} , \alpha \in [0,1] \quad (5.5)$$

$${}^{\alpha+}\mathbf{A} = \{ x \mid A(x) > \alpha \} , \alpha \in [0,1] \quad (5.6)$$

eşitlikleriyle tanımlanır. Bu tanımlara göre, bulanık bir A kümesinin α -kesimi, klasik X kümesinin, A bulanık kümesi içerisindeki α sayısından büyük veya eşit üyelik derecesine sahip elemanlarının oluşturduğu klasik bir kümedir. Şekil 5.3'de $X \subset R$ gerçel sayılar kümesi olması halinde, farklı α düzeylerine karşılık gelen α - kesimleri gösterilmiştir. α -kesimi ve kuvvetli α -kesimi kavramının doğrudan tanımdan elde edilecek önemli özelliklerinden biri, α 'nın artmasıyla beraber ona karşılık gelen α -kesim kümesinin küçülmesidir. Dolayısıyla, A bulanık bir küme ve

$$\begin{aligned} \alpha_1, \alpha_2 \in [0,1] \text{ ve } \alpha_1 < \alpha_2 \text{ olmak üzere} \\ {}^{\alpha_1}\mathbf{A} \supseteq {}^{\alpha_2}\mathbf{A} \text{ ve } {}^{\alpha_1+}\mathbf{A} \supseteq {}^{\alpha_2+}\mathbf{A} \end{aligned} \quad (5.7)$$

olduğu açıktır. Ayrıca herhangi bir α -kesimi aşağıdaki özellikleri de yukarıda belirtilen özellikten dolayı sağlar;

$${}^{\alpha_1}\mathbf{A} \cap {}^{\alpha_2}\mathbf{A} = {}^{\alpha_2}\mathbf{A} \text{ ve } {}^{\alpha_1+}\mathbf{A} \cap {}^{\alpha_2+}\mathbf{A} = {}^{\alpha_2+}\mathbf{A} \quad (5.8)$$

$${}^{\alpha_1}\mathbf{A} \cup {}^{\alpha_2}\mathbf{A} = {}^{\alpha_1}\mathbf{A} \text{ ve } {}^{\alpha_1+}\mathbf{A} \cup {}^{\alpha_2+}\mathbf{A} = {}^{\alpha_1+}\mathbf{A} \quad (5.9)$$

Yani, α -kesimleri iç içe yuvalanmış aralıklardan oluşan klasik kümeler meydana getirirler.

A bulanık kümesinin farklı α -kesimlerini temsil eden bütün α 'ların oluşturduğu kümeye A'nın düzey kümesi denir ve

$$\Lambda(A) = \{ \alpha \mid A(x) = \alpha, \exists x \in X \} \quad (5.10)$$

şeklinde verilir.

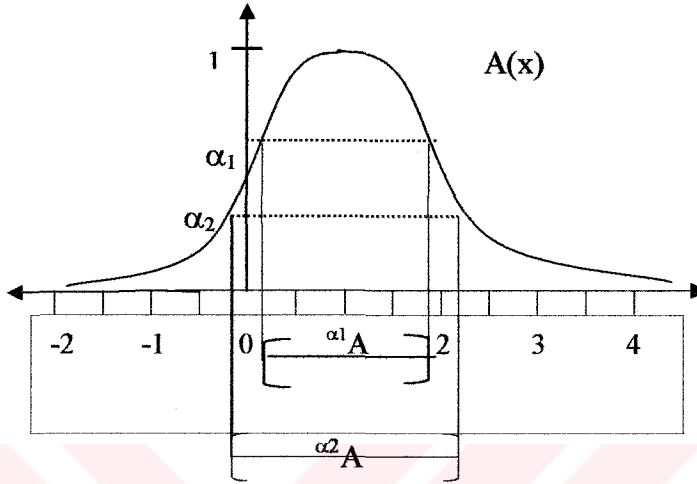
A bulanık kümesinin dayanağı, X evrensel kümesinin A bulanık kümesi içerisinde üyelik derecesi 0 dan büyük bütün elemanlarının oluşturduğu kümedir. Dayanak kümesi α -kesimi yardımıyla

$${}^{0+}\mathbf{A} = \mathbf{day(A)} = \{ x \mid A(x) > 0 \} \quad (5.11)$$

olarak da yazılır.

$${}^1\mathbf{A} = \mathbf{\ddot{oz}(A)} = \{ x \mid A(x) = 1 \} \quad (5.12)$$

kümesine A 'nın özü denir. Yani A bulanık kümesinin öz kümesi, üyelik dereceleri 1'e eşit olan elemanların oluşturduğu kümedir. A içerisinde üyelik derecesi 1'den büyük bir eleman olmadığından dolayı gösterim olarak ^1A α -kesimi de seçilebilir. A 'nın 0 ile 1 arasında kalan üyelik derecelerini alan elemanların oluşturduğu kümeye de A 'nın sınırı denir.



Şekil 5.3 $X \subset \mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi olması halinde farklı α değerlerine karşı gelen α -kesim kümeleri

$$\text{Sınır}(A) = \{ x \mid 0 < A(x) < 1 \} \quad (5.13)$$

ile verilir. Üyelik derecelerinin en küçük üst sınırına, A 'nın yüksekliği denir ve formel olarak

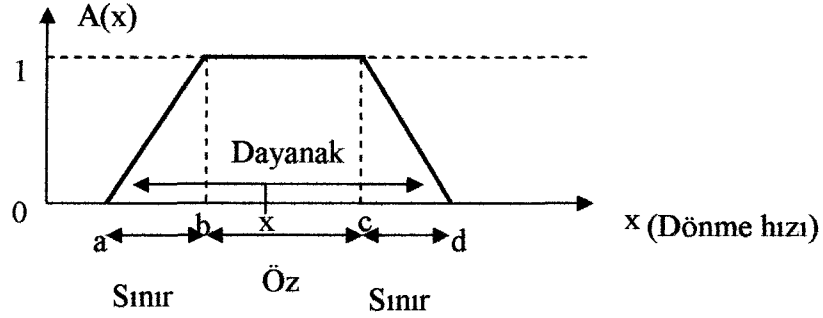
$$y(A) = \sup_{x \in X} A(x) \quad (5.14)$$

şeklinde gösterilir. Eğer A 'nın yüksekliği 1, yani $y(A)=1$ ise A ya normal bulanık küme, aksi takdirde normal olmayan bulanık küme denir. Normalleştirilmek istenilen bir bulanık küme, küme içerisindeki bütün üyelik derecelerinin $y(A)$ ya bölünmesiyle elde edilir. Şekil 5.4 bir normal bulanık kümenin bu kısımlarını göstermektedir.

Bu tanımları bir örnekle özetlemek mümkündür: x bir sabit disk'in bir dakikadaki dönme hızı olarak kabul edilsin. Elde bulunan ölçme aletlerinin yetersizliği ya da başka bir nedenle x 'in hiçbir zaman kesin bir şekilde ölçülemeyeceğini kabul ediyoruz. Bu durumda şu önerme daha gerçekçi olur:

“Sabit diskin dönme hızı nerdeyse tam olarak x 'e eşittir.”

Eğer sabit diskin işlevi hakkında istatistiksel veriler mevcutsa, olasılık teorisi yaklaşımları ile bilinen hata hesaplamaları kullanılarak yukarıdaki önerme modellenmelidir. Fakat elde modellemeyi yapacak ölçüde bir veri yoksa, ya da yeterince kesin ve hassas değerler bulunmuyorsa, dönme hızı kavramı, bulanık kümeler yoluyla ifade edilebilir. Elde veri bulunmasa dahi bulanık kümelerle dönme hızını tanımlamak mümkündür.



Şekil 5.4 Bir sabit diskin dönme hızını belirten A bulanık kümesi
ve A'nın dayanak, öz ve sınır kümeleri

Araştırmacı dönme hızını tanımlamak için yukarıdaki gibi bir A bulanık kümesini seçebilir. Bu durumda dönme hızının a'dan küçük ve d'den büyük olamayacağı ve b ile c arasında herhangi bir değer almasının nerdeyse kesin olacağı düşünülmüştür. Bu nedenle $[a,d]$ aralığı kümenin dayanağı (support) ve $[b,c]$ aralığı da özü (core) olarak adlandırılır.

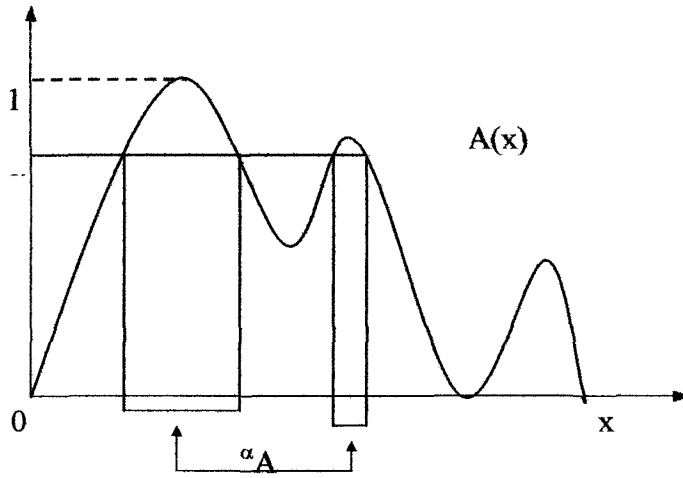
Bulanık kümelerin konvekslik şartı aşağıdaki eşitsizlikle belirlenir;

X bir doğrusal uzayın alt kümesi olduğunda, X te tanımlı bulanık kümeler içinde bir konvekslik tanımı verilebilir. $\forall x_1, x_2 \in X$ ve $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere X üzerinde tanımlı A bulanık kümesinin elemanları

$$A(\lambda.x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min(A(x_1), A(x_2)) \quad (5.15)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bu durumda A bulanık kümesine konvektir denir. (5.15)'te $x \in X$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ arasındaki işlem, söz konusu doğrusal uzaydaki skalerle çarpma işlemidir. Bu özellik klasik kümelerin konvekslik kavramının bir genelleştirmesi olarak görülebilir. Tutarlı bir genelleştirmenin yapılabilmesi, konveks bir bulanık kümenin $\alpha \in [0,1]$ değerlerini alan bütün α -kesimlerinin konveks olmasıyla mümkündür. Bulanık kümenin konvekslik özelliğinin olmadığı α -kesim kümelerinden herhangi birinin konveks olmadığı gösterilerek ispatlanabilir. Şekil 5.5

$X \subset \mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi olması halinde konveks olmayan normal bir bulanık kümenin üyelik fonksiyonunu göstermektedir.



Şekil 5.5 Konveks olmayan normal bulanık A kümesinin üyelik fonksiyonu

5.2.2 Bulanık Kümeler Üzerinde İşlemler

Klasik kümeler üzerinde tanımlanan üç temel işlem olan tümleyen alma, birleşim ve kesişim işlemlerinin bulanık kümeler üzerine genişletilmesini birden fazla yolla yapmak mümkündür. Uygulama alanının getirdiği özelliklere göre yeni işlemlerin tanımlanabilmesi kapasitesi, bulanık kümeleri klasik kümelerden ayırteden önemli noktalardan biridir. Fakat, genelde standart bulanık küme işlemleri olarak adlandırılan özel bir genişletme işlemi, bulanık küme teorisinde daha ayrıcalıklı bir yer tutar.

Standart tümleyen alma işlemi, X kümesi üzerinde tanımlı normal bulanık A kümesinin üyelik fonksiyonu yardımıyla;

$$\forall x \in X, \neg A(x) = 1 - A(x) \quad (5.16)$$

olarak tanımlanır.

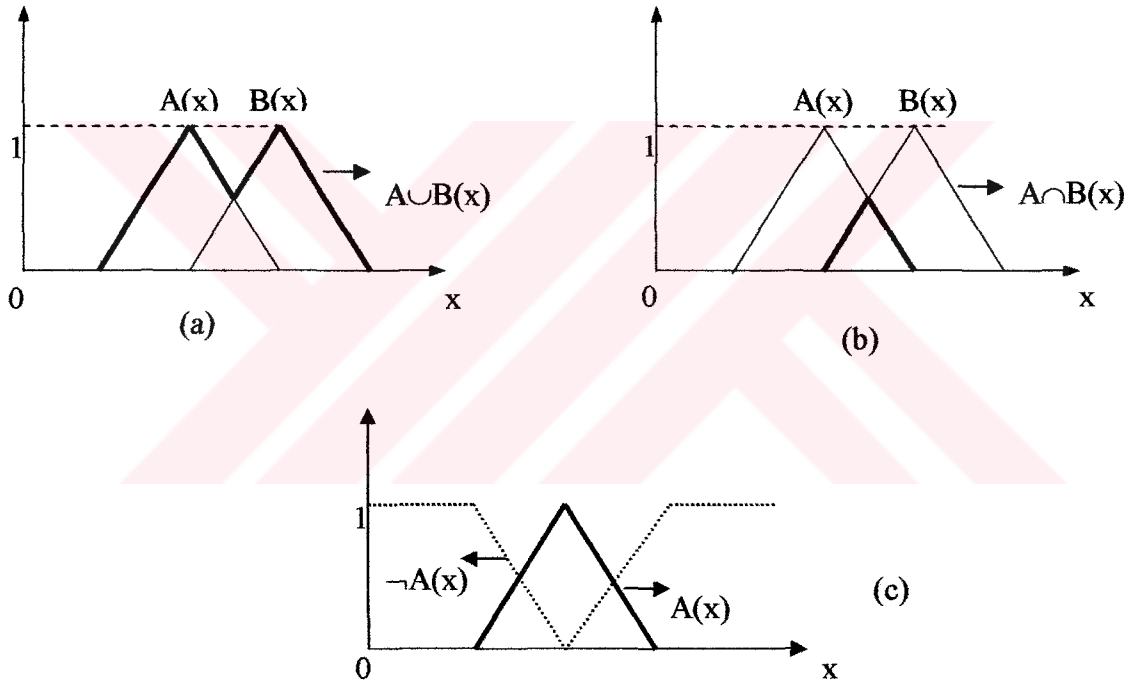
Kesişim ve birleşim için standart işlemler, verilen iki bulanık A ve B kümesinin üyelik fonksiyonları yardımıyla;

$$\forall x \in X, (A \cap B)(x) = \min[A(x), B(x)] = A(x) \wedge B(x) \quad (5.17)$$

$$\forall x \in X, (A \cup B)(x) = \max[A(x), B(x)] = A(x) \vee B(x) \quad (5.18)$$

olarak verilir. Kesişim işlemindeki min operatörü, X 'in aynı elemanına A ve B tarafından verilen üyelik derecelerinden küçük olanının alınması gerektiğini belirtirken, birleşim işlemi için tanımlı maks operatörü, büyük olanın alınması gerektiğini ifade eder. Min ve maks operatörlerinin birleşme özelliği dolayısıyla, bu tanımlar sonlu sayıda bulanık küme üzerine de genişletilebilirler.

Daha öncesinde konveks veya normal olan bulanık kümelerin bu işlemler esnasında özelliklerinden bazılarını kaybetmeleri mümkündür. Şekil 5.6 dan da görüleceği üzere A ve B bulanık kümeleri işlem öncesinde normal ve konveks oldukları halde, sonuçta ortaya çıkan $A \cup B$ kümesi konveks olmayan bir küme, $A \cap B$ kümesi de normal olmayan bir küme oluştururlar. A 'nın tümleyeni ise sadece konvekslik özelliğini kaybetmiştir.



Şekil 5.6 A ve B bulanık kümelerinin a) Birleşim , b) Kesişim c) A tümleyen kümelerinin üyelik fonksiyonları yardımıyla gösterimi

Klasik kümeler teorisinden bildiğimiz küme işlemlerinin özellikleri bulanık kümeler için de geçerlidir. İspatsız verilecek bu özellikler arasında çelişmezlik ilişkisi veya ortanın dışlanması olarak adlandırılan özellik, üçüncü şıkkın olanaksızlığı ilkesi bulanık küme teorisinin en önemli ayırt edici karakteristiğini ortaya koyarlar. Bu ilkeler bulanık kümeler için geçerli değildirler.

$$A \cup \neg A = X \quad (5.19)$$

$$A \cap \neg A = \emptyset \quad (5.20)$$

Klasik kümelerin en önemli özelliği, yapısal olarak kesin değerler taşımasıdır. Klasik bir kümenin sınırlarının tam olarak çizilmesi ve üyelerinin de kesin olarak belirlenmesi gereklidir. Yani bir eleman kümenin ya içindedir, ya dışındadır. Bu sınırlama klasik mantığın yapısında da görülmektedir. Bir önerme ya doğru ya da yanlış olmalıdır. Bunun haricinde başka bir durumun olması mümkün değildir. Fakat, kullandığımız önermelerin hepsi bu karaktere sahip değildir. Örneğin; uzun insanlar kümesi, sınırları tam olarak belirlenebilen bir küme değildir. Çünkü, uzun olma ile uzun olmama kavramları arasında sürekli bir geçiş vardır. İki küme arasındaki geçişi belirtmek için konulacak bir uzunluk ölçüsü, yapay bir sınır çekme olacaktır. Mesela, 1.80'in üzerinde olan bütün insanlar uzun olarak tanımlansalar, 1.79 cm boyundaki bir kişi uzun boylular sınıfına dahil edilmeyecektir. Fakat, böyle bir ayırımın hiç de makul olmadığı ve gerçeği yansıtmadığı ortadadır. Bunun gibi kesin sınırlarla ayıramayacağımız birçok kavram ve bunlara bağlı olarak da klasik kümelerle ifade edemeyeceğimiz nesne toplulukları vardır. Kalabalık şehir, yüksek maaş, yöneticilik deneyimi, gibi kavramlar da bu türdendirler. Bulanık küme teorisi bu tür kavramları temsil etmek için geliştirilmiş bir matematiksel yapıdır.

Klasik kümeler incelendiğinde, kümeler arasındaki ilişkilerin bu kümelerin kesin sınırlarla belirlenme özelliği ile ilgili olduğu görülür. Bu ilişkilerden çelişmezlik ve üçüncü şıkkın olanaksızlığı ilkesi, hem klasik kümeler teorisinde hem de klasik mantıkta bu kesinlik niteliğini içinde barındıran en önemli iki özelliktir.

Çelişmezlik ilkesi bize aynı anda iki önermenin doğru ve yanlış olmasının mümkün olmadığını söyler. Kümeler anlamında ise, bir elemanın hem kümeye ait olma hem de ait olmama gibi bir durumunun çelişki oluşturacağını ifade eder. Üçüncü şıkkın olanaksızlığı ilkesi de çelişmezlik ilkesiyle yakından bağlantılıdır. Bir önermenin doğru ve yanlıştan başka bir değer almasının mümkün olmadığını, kümeler anlamında ise bireyin ya bir kümede veya onun tümleyeninde olduğunu ifade eder.

Sınırları kesin olmayan belirlemeler yaptığımızda, klasik kümelerin yukarıda belirtilen ilişkileri ortadan kalkar. Artık ne çelişmezlik ilkesi ne de üçüncü şıkkın olanaksızlığı ilkesi vardır. Bu durumda bir önerme hem doğru hem yanlış olabileceği gibi, doğru veya yanlışın dışında da değerler alabilir. Yani, bir insanın bir dereceye kadar uzun ve bir dereceye kadar uzun olmaması mümkündür. Böyle bir yapı kompleks yapıdaki problemlere yaklaşımda büyük rahatlıklar sağlar. Kesin

matematik kurallarıyla, gerçekliği tanımlarken kullandığımız kesin olmayan kavramları bir araya getirmede bir anahtar rolünü oynar.

Yukarıda açıklanan iki özellik dışında, klasik kümeler için geçerli olan diğer özellikler bulanık kümeler için de geçerlidirler.

A, B ve C, X evrensel kümesi üzerinde tanımlı bulanık kümeler olmak üzere;

$$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$A \cap A = A, A \cup A = A$$

$$\neg(\neg A) = A$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$$

$$\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$$

} De'Morgan kuralları

X kümesi üzerinde tanımlı bütün bulanık kümeleri içine alan kümeye bulanık kuvvet kümesi denir ve $F(X)$ ile gösterilir.

Verilen $A, B \in F(X)$ bulanık kümeleri için $A \subseteq B$ özelliği ancak ve ancak

$$A(x) \leq B(x), \forall x \in X \quad (5.21)$$

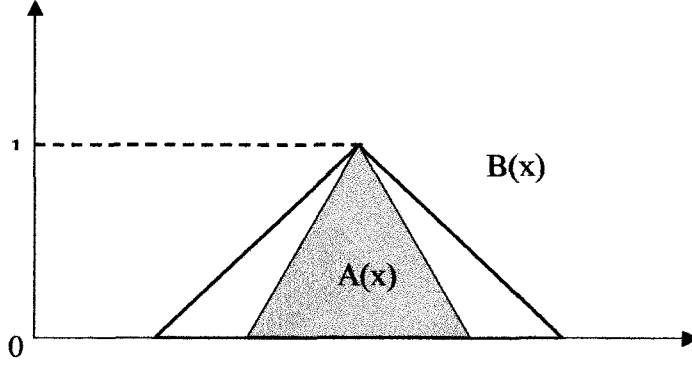
olması durumunda gerçekleşir. Yani, A'nın B kümesinin alt kümesi olması için, A'daki elemanlara karşı gelen bütün üyelik derecelerinin, B'deki üyelik derecelerinden küçük olması gerekli ve yeterlidir. Ayrıca bu durum geçerli olduğunda, standart küme işlemleri altında;

$$A \cup B = B, A \cap B = A$$

sağlanır. Şekil 5.7 bulanık bir küme ile alt küme arasındaki üyelik fonksiyonu ilişkisini göstermektedir.

Sonlu veya sayılabilir bir evrensel X kümesinin üzerinde tanımlı A bulanık kümesinin gösterimi sırasıyla;

$$A = \left\{ \frac{A(x_1)}{x_1} + \frac{A(x_2)}{x_2} + \dots + \frac{A(x_n)}{x_n} \right\} \quad (5.22)$$



Şekil 5.7 Bulanık alt küme kavramının gösterimi ($A \subseteq B$)

$$A = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A(x_i)}{x_i} \right\} \quad (5.23)$$

X evreni sayılamayan sayıda elemana sahipse bu durumda da;

$$A = \left\{ \int \frac{A(x)}{x} \right\} \quad (5.24)$$

şeklindedir.

Elemanlarla üyelik dereceleri arasındaki bölüm işareti ve toplama işareti gerçek kullanımındaki anlamında değildir. Sadece elemanlar arası ilişkileri ve elemanlarla üyelik derecesi arasındaki ilişkiyi ortaya koymak için kullanılırlar. Sayılamayan kümeler için kullanılan integral işareti de yine kümenin sürekliliğini göstermek için kullanılır.

A bulanık kümesine ait olan elemanların üyelik derecelerinin toplanmasıyla oluşturulan değere, A'nın skaler kardinalitesi denir ve

$$|A| = \sum_{x \in X} A(x) \quad (5.25)$$

ile verilir. X'in sayılabilir ya da sayılamaz çoklukta elemanı olması halinde, A'nın skaler kardinalitesi uygun şekilde yeniden tanımlanmalıdır.

Standart işlemlerin üyelik derecelerinin alacağı değerler $\{0,1\}$ değerlerine kısıcakiğıtlandığı takdirde klasik küme işlevi görürler. Yani, standart bulanık işlemler onlara karşılık gelen klasik küme işlemlerinin bir genelleştirmesidir. Fakat, şu anda daha iyi anlaşıldığı üzere bunlar mümkün olan tek işlemler değildirler. Her bir bulanık küme işlemi için, klasik işlemleri de içeren geniş bir işlem sınıfı bulunmaktadır[9].

Klasik kümelerin tersine, bulanık kümelerin yapısal olarak sahip olduğu bu esneklikten dolayı, uygulama alanının farklılığına göre bu işlemleri temsil etmek için daha uygun farklı fonksiyonların tanımlanması mümkündür. Yani, bulanık küme teorisi üzerine kurulan matematiksel analiz çerçevesinde, sadece bulanık kümelerin üyelik fonksiyonları değil, onlar arasında gerçekleşecek işlemler de çalışılan alanla yakından ilişkilidir. Uygun üyelik fonksiyonu tanımlama ve anlamlı işlemleri belirleme kapasitesi, bulanık küme teorisinin pratik faydasını artıran en önemli yönlerinden biridir.

5.2.3 α -Kesimi ve Genişleme Prensibi

Bulanık kümelerin herhangi bir α düzeyine karşılık gelen α -kesimlerinin bir klasik küme oluşturduğunu daha önce söylemiştik. Şimdi bu klasik kümelerden yola çıkarak bulanık kümelerle ne gibi bir ilişki kurabileceğimizi görmeye çalışacağız. Ayrıca klasik kümeler arasında tanımlanan fonksiyon kavramının bulanık kümeler için nasıl tanımlanabileceği de genişleme prensibi altında verilecektir.

5.2.3.1 Bulanık kümelerin α -kesimleriyle temsili

Bulanık kümelerle klasik kümeler arasında ilişki kurmak işleminde anahtar rolü α -kesimi ve kuvvetli α -kesim kümeleri oynar. Bu ilişki gözden geçirilmeden önce α -kesimlerine ait diğer özelliklerden bahsetmekte fayda var.

$A, B \in F(X)$ ve $\alpha, \beta \in [0,1]$ olmak üzere aşağıdaki özellikler ispatlanabilir:

- i) $A^{\alpha+} \subseteq A^{\alpha}$,
- ii) $\alpha \leq \beta$ ise $A^{\beta} \subseteq A^{\alpha}$ ve $A^{\beta+} \subseteq A^{\alpha+}$,
- iii) $(A \cup B)^{\alpha} = A^{\alpha} \cup B^{\alpha}$, $(A \cap B)^{\alpha} = A^{\alpha} \cap B^{\alpha}$ ve

$$(A \cup B)^{\alpha+} = A^{\alpha+} \cup B^{\alpha+}, (A \cap B)^{\alpha+} = A^{\alpha+} \cap B^{\alpha+}$$

Birinci özellik, kuvvetli α -kesiminin, her zaman aynı α düzeyindeki α -kesiminin alt kümesi olduğunu ifade eder. Tanım gereği bunun böyle olduğu açıktır. İkinci özellik ise α düzeyi artarken α -kesimi kümelerinin küçüldüğünü yani, α ya bağlı olarak monoton ufaldığını söylemektedir. Beşinci özellik sonlu sayıda bulanık küme üzerinde geçerli olan özellikler olup, kesişimin (birleşim) α -kesiminin, α -kesimlerin kesişimine (birleşim) eşit olduğunu söylemektedir. Aynı özellik kuvvetli α -kesim kümeleri için de geçerlidir. Ayrıca;

$$1) A \subseteq B \Leftrightarrow A^\alpha \subseteq B^\alpha$$

$$2) A \subseteq B \Leftrightarrow A^{\alpha+} \subseteq B^{\alpha+}$$

$$3) A=B \Leftrightarrow A^\alpha=B^\alpha$$

$$4) A=B \Leftrightarrow A^{\alpha+}=B^{\alpha+}$$

özellikleri de geçerlidir. Bu özelliklerin ispatı konumuz dışında olduğundan burada verilmeyecektir.

Bulanık kümelerin α -kesimler yardımıyla oluşturulmasındaki amaç klasik küme teorisinde tanımlanmış bazı kavramların ve küme işlemlerinin bulanık küme teorisine geçişini sağlamaktır. Bu işlemin nasıl yapıldığını bir örnek üzerinde inceleyelim; A bulanık kümesi sonlu bir evrensel küme üzerinde tanımlı olmak üzere aşağıdaki gibi verilmiş olsun.

$$A = \{0.2/x_1 + 0.4/x_2 + 0.6/x_3 + 0.8/x_4 + 1/x_5\}$$

Verilen A bulanık kümesinin üyelik derecesi olarak verilen α düzey kümesinin elemanları yardımıyla;

$$A^{0.2} = \{1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3 + 1/x_4 + 1/x_5\}$$

$$A^{0.4} = \{0/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3 + 1/x_4 + 1/x_5\}$$

$$A^{0.6} = \{0/x_1 + 0/x_2 + 1/x_3 + 1/x_4 + 1/x_5\}$$

$$A^{0.8} = \{0/x_1 + 0/x_2 + 0/x_3 + 1/x_4 + 1/x_5\}$$

$$A^1 = \{0/x_1 + 0/x_2 + 0/x_3 + 0/x_4 + 1/x_5\}$$

olarak tanımlanabileceği açıktır. Bu kümelerin klasik küme olarak verildiği ve kullanılan biçimlendirmenin klasik kümelerin temsilinde kullanılan karakteristik fonksiyon olduğuna dikkat edilmelidir.

Daha sonra yapılacak iş bu klasik kümeleri özel bir bulanık kümeye çevirmek için;

$$A_\alpha = \alpha A(x)^\alpha \text{ ve } A(x)^\alpha = \left\{ \sum_i \frac{\lambda_i}{x_i} \right\} \quad (5.26)$$

eşitliğinden yararlanmak olacaktır. Bu eşitliğe göre A_α bulanık kümeleri şu şekilde oluşacaktır;

$$A_{0.2} = \{0.2/x_1 + 0.2/x_2 + 0.2/x_3 + 0.2/x_4 + 0.2/x_5\}$$

$$A_{0.4} = \{0.4/x_1 + 0.4/x_2 + 0.4/x_3 + 0.4/x_4 + 0.4/x_5\}$$

$$A_{0.6} = \{0.6/x_1 + 0.6/x_2 + 0.6/x_3 + 0.6/x_4 + 0.6/x_5\}$$

$$A_{0.8} = \{0.8/x_1 + 0.8/x_2 + 0.8/x_3 + 0.8/x_4 + 0.8/x_5\}$$

$$A_1 = \{1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3 + 1/x_4 + 1/x_5\}$$

Artık α -kesimler yardımıyla oluşturulan bu özel bulanık kümeler vasıtasıyla başta verilen A bulanık kümesini elde etmek zor olmayacaktır. A bulanık kümesi, α düzeylerine karşılık gelen bu özel bulanık kümelerin birleşimidir. Yani, bizim örneğimiz için bu bağıntı;

$$A = A_{0.2} \cup A_{0.4} \cup A_{0.6} \cup A_{0.8} \cup A_1$$

şeklinde olur. Bu bölümün amacı, α -kesimleriyle bulanık kümelerin temsili işleminin genel bir durum olduğunu göstermektir. A bulanık kümesinin üzerinde tanımlı olduğu evrensel kümenin eleman sayısının sonlu veya sonsuz olması durumu değiştirmeyecektir. Keyfi bir A bulanık kümesinin α -kesimleriyle tanımlanmış özel bulanık kümeler olan A_α lar vasıtasıyla tanımlanması işlemine “ A nın ayrıştırması” denir ve genel olarak şu şekilde ifade edilir;

$$A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} A_\alpha, \forall A \in F(x) \quad (5.27)$$

$$A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} A_{\alpha+}, \forall A \in F(x) \quad (5.28)$$

A_α yukarıda α -kesim kümeleriyle tanımlanmış özel bulanık kümelerdir. Birleşim işlemi ise standart bulanık küme birleşim işlemidir.

5.2.3.2 Genişleme prensibi

Klasik kümeler arasında bir ilişki kurmayı sağlayan bağıntıların özel bir şekli olan fonksiyonların, bulanık kümeler aracılığıyla oluşturulması işlemine genişleme prensibi denir. Yani, iki bulanık küme arasında herhangi bir fonksiyonun nasıl tanımlanabileceğini ifade eder. 1975’ de L. Askerzade tarafından ortaya konulan genişleme prensibi klasik matematik teorilerinin bulanıklaştırılmasında önemli bir araçtır[26]. Bu prensibi tanımlamadan önce, onun özel bir durumu olan klasik fonksiyon kavramını gözden geçirmekte fayda var.

X ve Y klasik iki küme ve $F(X)$ ile $F(Y)$ bu kümelerin kuvvet kümeleri olmak üzere X ten Y ye tanımlanacak klasik bir fonksiyonun, kuvvet kümelerinin üzerinde yapılacak bir genişlemesi;

$$f: F(X) \longrightarrow F(Y) \quad (5.29)$$

$$\forall A \in F(X) \text{ için } f(A) = \{y \mid y = f(x), x \in A\} \quad (5.30)$$

şeklinde tanımlanır. f fonksiyonunun tersi olan f^{-1} fonksiyonu da;

$$f^{-1}: F(X) \longrightarrow F(Y) \quad (5.31)$$

$$\forall B \in F(Y) \text{ için } f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\} \quad (5.32)$$

olur. $f(A)$ ve $f^{-1}(B)$ kümelerini üyelik fonksiyonu kavramının özel bir durumu olan karakteristik fonksiyon kavramıyla ifade etmek istersek;

$$[f(A)](y) = \sup_{x|y=f(x)} \chi_A(x) \quad (5.33)$$

$$[f^{-1}(B)](x) = \chi_B(f(x)) \quad (5.34)$$

ile verilirler. Şimdi de X ve Y üzerinde tanımlı olacak bulanık kümeleri ele alarak ve yukarıdaki eşitliklerde kullanılan karakteristik fonksiyon kavramını üyelik fonksiyonu kavramıyla yer değiştirerek klasik bir fonksiyonun bulanıklaştığı genişleme prensibini elde ederiz.

$$f: F(X) \longrightarrow F(Y) \text{ ve } f^{-1}: F(X) \longrightarrow F(Y) \text{ olmak üzere}$$

$$[f(A)](y) = \sup_{x|y=f(x)} A(x) \quad (5.35)$$

$$[f^{-1}(B)](x) = B(f(x)) \quad (5.36)$$

olarak verilir. X 'ten Y 'ye tanımlı bir f fonksiyonu verildiğinde genişleme prensibi bize yukarıda tanımlı kurallarla beraber X ve Y üzerinde tanımlı bulanık kümeler arasında geçiş yapabilmeyi sağlayan bir fonksiyon tanımlamamızı sağlar. X üzerinde tanımlı A bulanık kümesi, f fonksiyonundan türetilen bir $B \subseteq Y$ bulanık kümesi belirler. B bulanık kümesinin elde edilmesi; A bulanık kümesinin f altındaki görüntüsü aynı elemana karşılık gelen elemanlarının üyelik derecelerinin en küçük üst sınırının alınması yoluyla olur. Aynı şekilde, B bulanık kümesi ve f fonksiyonu verildiğinde ise A bulanık kümesi; f altındaki görüntüleri B 'nin elemanlarına karşılık gelen X evrensel kümesinin elemanlarından oluşur ve üyelik dereceleri de yine B de bu elemanlara karşılık gelen üyelik dereceleri yoluyla verilir. Başka bir deyişle fonksiyonun tanım bölgesi değişmesine rağmen üyelik derecesi değişmemektedir. Evrensel kümenin elemanlarının sonlu olması durumunda supremum operatörü maksimum operatörüyle yer değiştirir.

5.2.4 Bulanıklaştırma Veya Üyelik Fonksiyonunun İnşası

A. Einstein'in sözü bize gerçek hayatta çok az şeyin kesin olduğunu ve matematiğin teori ve metodları tarafından modellenen olgularında gerçeği yansıtmadığını anlatmaktadır. Yani, doğadaki bir çok şey, basit ve uygun tasvirlerle ve tanımlamalarla tam olarak karakterize edilemez.

Daha önce de ifade edildiği üzere, bulanık küme teorisi doğal dilde ifade edilen kavramların matematiksel olarak ifade edilmesi için gerekli olan teorik alt yapıyı sağlar. Bu amaçla oluşturulacak olan yapılar, bize dilin kendi yapısında var olan birçok belirsiz kavramı değişik bulanık kümelerle ifade etmeye, uygulama alanlarının amaçlarına göre değişiklikler yapmaya izin verir. Fakat, bu belirsizliği tanımlamak için kullanılan üyelik fonksiyonları üzerinde herhangi bir kısıtlama koymak da pek mümkün değildir. Hatta bulanıklığı tanımlamak için oluşturulan kuralların bile bulanık olduğu iddia edilebilir[26]. Yine de herhangi bir matematiksel yapıyla bazı standart kavramlar geliştirilebilir. Bulanıklığı karakterize etmenin çok çeşitli yolları olmasının yanında, bu bulanıklığı karakterize eden üyelik fonksiyonunu oluşturmada da çok çeşitli yollar vardır. Bu işlem sezgisel olacağı gibi, bir takım algoritmalara ve mantıksal işlemlere de dayanabilir. Elde verinin olmadığı durumlarda bile araştırmacı kendi üyelik fonksiyonlarını oluşturup bunlar üzerinden bir model inşa edebilir. Daha sonra bu keyfi işlem, verilerle bir eğitmeye tabi

tutularak doğrulanma yoluna gidilebilir. Burada bu algoritmalar ve yöntemler tezin konusunu aştığından dolayı verilmeyecektir. Fakat şu anda günümüzde mevcut tekniklerin en başında ve standartlaşmaya giden bir teknik olarak, yapay sinir ağları olduğunu söylemekle yetinelim.

Dilsel kavramlar sadece içsel olarak belirsizlikler taşımakla kalmayıp, kullanılan konuya bağımlı olarak da anlam değişiklikleri gösterirler. Bu değişiklikler çalışılan alanda terimleri temsil etmek için kullanılan üyelik fonksiyonlarını farklılaştıracağı gibi, kavramları kavramlara en uygun olan bulanık işlemleri belirlemede de esneklik oluştururlar. Günümüzde yapılan çalışmalar dilsel terimleri biraraya getiren bağlaçların farklı alanlarda farklı anlamlara sahip olduğunu ve buna göre de tanımlanacak işlemlerin farklılaşmasının daha iyi sonuç vereceğini göstermiştir[27]. Uygun üyelik fonksiyonu inşa etme ve uygun işlemler tanımlama süreci, haddizatında bulanık küme teorisinin problemi değildir. Bu problem, yine çerçevesinin bulanık küme teorisince belirleneceği bir bilgi edinme probleminin içerisinde görülebilir. Yani bulanık küme teorisi bilgi edinme işleminin hangi çerçevede yürütüleceği ve uygun bilginin etkin bir şekilde nasıl temsil edileceği konularında alt yapı sağlar. Bilgi edinme süreci ise, bir bilgi mühendisliği problemidir. Bilgi mühendisinin görevi, çalışma alanının uzmanlarından bilgiyi elde etmek ve bunu işlevsel ve istenilen şekilde ifade etmektir. Bu durumda, bilgi mühendisi elde ettiği bilgileri, içinde dilsel değişkenler bulunan önermeler şeklinde ortaya koyacaktır. İkinci aşamada ise, her bir dilsel terimin anlamını belirlemeye çalışacaktır. Bu aşama, aynı zamanda terimlere uygun üyelik fonksiyonu ve işlemler atamanın yapıldığı süreçtir. Dilsel terimler için üyelik fonksiyonu inşası, evrensel küme içindeki bazı elemanları prototip olarak kabul edilerek ortaya çıkartılabilir. Diğer elemanlar da, bu prototipe uygun, anlamlı ve benzerlik fonksiyonu denilen bir fonksiyonla ifade edilir[21].

Eğer üyelik fonksiyonunu tanımlamak tam olarak mümkün değilse, uzman kişi bunu evrensel küme içinde bazı bireyleri örnekleme yoluyla başarabilir. Örneklendirme, dilsel terimlerle bu temsili örneklerin arasındaki uygunluğu kontrol etmek amacıyla uzman sorular sorularak kolaylaştırılabilir. Bu sorulara verilen cevaplar $(x, A(x))$ şeklinde, örneklendirme için seçilen elemanlara karşı gelen bir üyelik fonksiyonu oluştururlar. Daha sonra tam olarak fonksiyonun oluşturulmasına geçilebilir. Bunu yapmanın bir yolu uygun bir fonksiyon seçmek ve ilgili bir yöntemle verilen

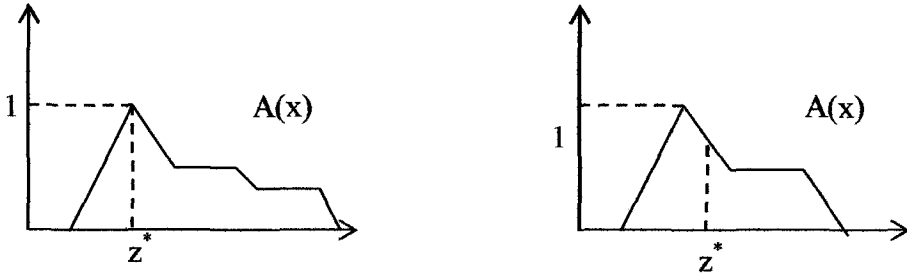
örneklere en uygun olan fonksiyonu belirlemektir. Diğer bir yol olarak, uygun bir yapay sinir ağı kullanıp bu örneklemeler aracılığıyla öğrenme işleminden bir fonksiyon oluşturulabilir. Bu son yaklaşım, üyelik fonksiyonu oluşturmak için neredeyse standartlaşmış bir yöntem olarak görülebilir[21,24,25].

5.2.5 Durulaştırma

Yukarıda, çalışılan alan üstünde elde edilen verilere bir üyelik fonksiyonu karşılık getirme işlemi olan bulanıklaştırma işlemi üzerinde duruldu. Fakat, uygulama alanlarının faaliyetleri, tasarımları ve kararları kesin bilgilerle yerine getirilmek durumundadırlar. Kullanılan makinalar, bilgisayarlar hep bu bilgilere göre işlerlik gösterirler. Örneğin; yeni bir mühendislik ürünü tasarımı hakkında karar verirken, son karar bu ürünün “geliştirilmesi” veya “geliştirilmemesi” şeklinde olmak zorundadır. Yine, bir elektrikli ısıtıcıya verilen talimatlar, sadece insanların doğal dilde kullandıkları sıcaklığı “biraz” veya “çokça” yükselt biçiminde olamaz. Bu talimatlar belli bir sayısal değer şeklinde verildiğinde karşılık bulurlar. Yani, bu bulanık bilgilerin artık durulaştırma diye adlandıracağımız bir aşamadan geçmesine ihtiyaç vardır. Sonunda kendimizi bulanık sonuçları klasik sonuçlara çevirme gibi bir ihtiyaç karşısında bulmuş oluyoruz. Durulaştırma, bulanık bir değer, kesin bir değere çevrilmesi işlemidir. Aynen, bulanıklaştırma işleminin de kesin bir değeri bulanık bir kümeyle ifade etme işlemi olduğu gibi[9,26,27]. Şu ana kadar geliştirilmiş olan durulaştırma işlemleri arasından en yaygın olarak kullanılan beş tanesini vermekle yetineceğiz.

1- En büyük üyelik kuralı: Yükseklik prensibi olarak da bilinen bu yöntemin uygulanabilmesi için durulaştırma işlemi yapılan çıkarım kümesinin en yüksek değerli üyelik derecesini alan bir elemanın olması gerekir. $A(x)$, A bulanık kümesini temsil eden üyelik fonksiyonu ve z^* da A 'nın en büyük üyelik derecesine sahip elemanı olmak üzere şu eşitsizlikle belirlenir;

$$\forall x \in X, A(z^*) \geq A(x) \quad (5.37)$$



Şekil 5.7 a) En büyük üyelik yöntemi yoluyla durulaştırma
b) Sentroid yöntemiyle durulaştırma işlemi

2- Sentroid Kuralı: Bu yöntem alanların ortası olarak da bilinir. Şekil 5.7(b), A bulanık çıkarım kümesinin durulaştırılmış değerini göstermektedir. Durulaştırma yöntemlerinin içinde en yaygın olarak kullanılandır. Formel olarak;

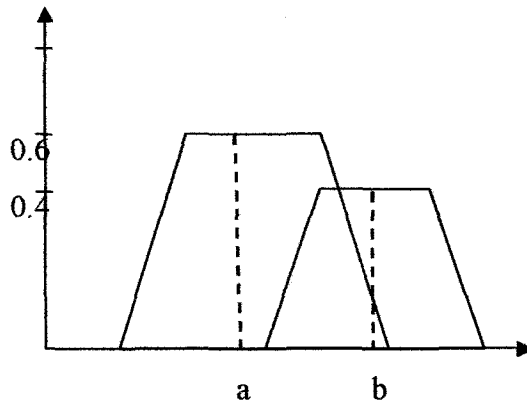
$$z^* = \frac{\int A(x) \cdot x \, dx}{\int A(x) \, dx} \quad (5.38)$$

ile verilir. İntegral işareti bildiğimiz anlamda integrale tekabül eder.

3- Ağırlıklı ortalama kuralı: Simetrik üyelik fonksiyonuna sahip bulanık kümeler için uygulanabilen bu yöntem de, üyelik fonksiyonları en büyük üyelik derecesine sahip elemanla çarpılarak ağırlıklı ortalamaları alınır:

$$z^* = \frac{\sum A(x_{\max}) \cdot x_{\max} \, dx}{\sum A(x_{\max}) \, dx} \quad (5.39)$$

Şekil 5.8'de görülen çıkarım, bulanık kümesinin ağırlıklı ortalama yöntemiyle durulaştırma işlemi yukarıdaki formülle birlikte;



Şekil 5.8 Ağırlıklı ortalama yöntemiyle durulaştırma işlemi

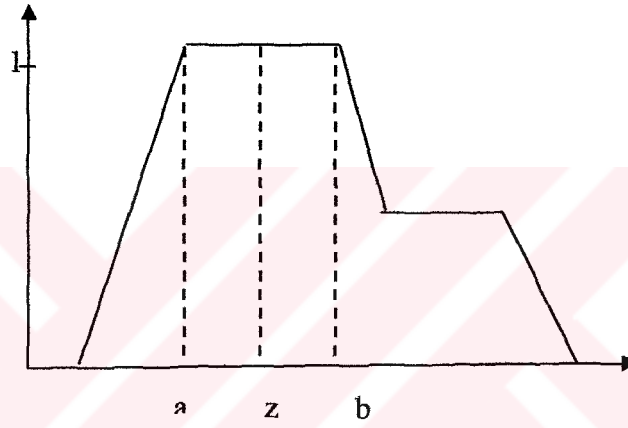
$$z^* = \frac{a.(0.6)+b.0.4}{0.6+0.4}$$

ile hesaplanır. a ve b, karşılık geldikleri üyelik fonksiyonlarının en yüksek üyelik derecesine sahip elemanların ortalamalarıdır.

4- En büyük üyeliklerin ortalaması kuralı: Birinci yönteme çok benzemesine karşın burada en büyük üyeliği alan değerler birden fazladır. Bu yüzden durulaştırma; a ve b en büyük üyelik değerlerine karşılık gelmek üzere;

$$z^* = \frac{a+b}{2} \quad (5.40)$$

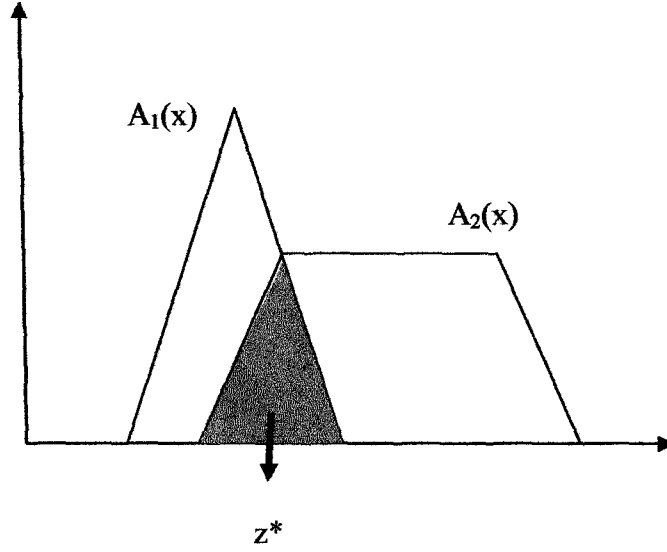
ile verilir.



Şekil 5.9 En büyük üyeliklerin ortalaması kuralı ile durulaştırma

5- Toplamların merkezi yöntemi: Durulaştırma yöntemleri içinde en hızlı sonuç verenidir. Durulaştırma işlemi, herbir bulanık çıkış kümesindeki elemanların üyelik derecelerinin cebirsel toplamı üzerine kuruludur. Fakat, bu yöntemin dezavantajı bulanık çıktı kümesindeki kesişen alanların iki defa toplama katılmasıdır. Durulaştırma;

$$z^* = \frac{\int \sum_{k=1}^n A_k(x).x dx}{\int \sum_{k=1}^n A_k(x) dx} \quad (5.41)$$



Şekil 5.10 Toplamların merkezi yöntemiyle durulaştırma

ile yapılır. Şekil 5.10 bu yöntemle yapılan durulaştırma işleminin iki tane üyelik fonksiyonundan oluşan bir çıkarım işlemi için yapılışını göstermiştir. Bu yöntemin ağırlıklı ortalama yöntemine benzer yönleri vardır. Tek fark, bu yöntemin ağırlıkların üyelik fonksiyonlarına karşı gelen alanlara tekabül etmesi, ağırlıklı ortalama yönteminde ise ağırlıkları üyelik değerlerinin oluşturmasıdır.

Durulaştırma yöntemlerinin her biri çalışılan alana göre farklı sonuçlar verecektir. Hangisinin daha iyi olduğuna verilecek cevap ise, yine uygulamaya ve çalışılan alana bağlı olarak değişecektir. Yöntemleri karşılaştırmada kullanılan bazı ölçütler bulunmasına rağmen bu ölçütlerin neler olduğuna burada değinilmeyecektir.

5.3 BULANIK SAYILAR

Bir çok tabiat hadisesinin modellenmesi sırasında, onları karakterize etmek için kullandığımız kesin sayıların yetersizliği bulanık sayıları tanımlamak için bir temel oluşturur. Bulanık bir sayı, dilsel bir ifadenin şekillendirdiği normal bir sayıdan meydana gelir. Dilsel ifadeler “yaklaşık”, “hemen hemen”, “neredeyse”, “civarında” türünden ifadelerdir[21].

Sezgisel olarak “yaklaşık r ” dediğimizde, bunun bulanık olduğunu ve merkezini r kabul eden sayılardan oluştuğunu düşüneceğimiz açıktır. Merkezde bulunan r sayısının bu kavramla ilişkisi açık olduğu halde r nin her iki yanında bulunan gerçel sayıların bu kavramla ilişkisinin daha az derecede uyumlu olduğu gözlenebilir. Daha doğru bir deyişle, merkeze yakın sayıları merkeze yakınlığıyla açıklamak gerekir. Dolayısıyla, bu kavram bir bulanık küme oluşturmaya uygundur. Üyelik fonksiyonunun, merkezi değer olan r 'de 1 değerini alması ve r nin her iki yanında bulunan sayılara da yakınlığı ölçüsünde üyelik derecesi ataması beklenir. Merkezi değer her iki yanına doğru gidilirken üyelik derecesi de o oranda 1'den 0'a doğru azalacaktır. İşte bu tür bulanık kümeler “bulanık sayılar” olarak adlandırılırlar. Bütün bulanık sayılar bir bulanık küme oluşturdıkları halde bütün bulanık kümelere bulanık sayılar gözüyle bakamayız. Çünkü, bazı bulanık kümeler 1 değerini almayabilirler.

Bulanık bir kümeyi bulanık sayı olarak nitelendirmek için, bu kümenin aşağıdaki koşulları sağlaması gereklidir.

- 1- Bulanık sayılar normal bulanık kümelerdir.
- 2- α kesimleri kapalı gerçel sayı aralıklarıdır.
- 3- Bulanık sayının dayanağı sınırlıdır.
- 4- Bulanık sayılar konveks bulanık kümelerdir.

Yukarıdaki örneği ele alırsak, r 'deki üyelik derecesinin 1 olması gerektiği açıktır. Bu yüzden de, “ r 'ye yakın sayılar” ifadesini temsil eden bulanık sayı, normal bir bulanık küme olmalıdır. Diğer üç koşul ise, bulanık sayılar üzerinde aralıklar yardımıyla tanımlanacak işlemleri rahatlıkla kullanabilmek amacıyla oluşturulmuş özelliklerdir. Daha önce, her bulanık kümenin α -kesimleri yardımıyla tek olarak belirlenebileceği ve bunlarında kapalı aralıklar olduğu söylenmişti. O halde, bulanık sayılar arasındaki

işlemler, bu kapalı gerçel sayı aralıkları arasındaki işlemler yardımıyla tanımlanabilirler.

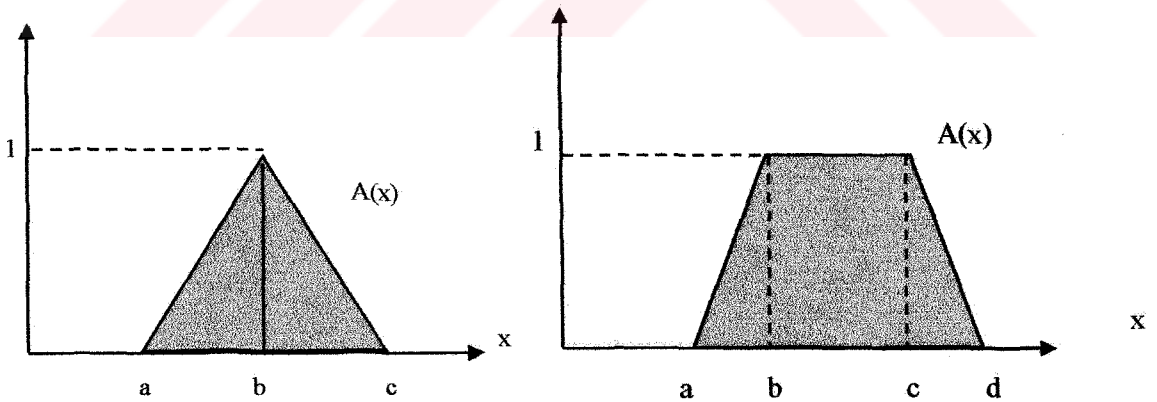
Söylediklerimizden çıkan sonuca göre bulanık bir sayının üyelik fonksiyonu için genel bir şekil verebiliriz. $a \leq b \leq c \leq d$ ve f ile g fonksiyonu sürekli olmak üzere;

$$A(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in [a, b] \\ 1 & , x \in [b, c] \\ g(x) & , x \in [c, d] \\ 0 & , x < a \text{ ve } x > d \end{cases}$$

f fonksiyonu 0 dan 1 e doğru artarken, g fonksiyonu $[c, d]$ aralığında 1 den 0 a doğru azalan bir fonksiyondur. Herhangi bir şekildeki bulanık sayının üyelik fonksiyonu bu genel ifade doğrultusunda verilebilir.

Üçgen ve yamuk şekle sahip olan üyelik fonksiyonları, bulanık sayıları temsil etmede çok sık kullanılmakla beraber bazı uygulamalarda diğer şekillerde tercih edilebilir. Genel formdaki aralıkları belirleyen sayıların seçimi çok önemlidirler ve büyük oranda da uygulamadaki kavramların kullanımına bağlıdır.

Aşağıda Şekil 5.11’de en sık kullanılan üyelik fonksiyonlarının şekilleri ve üyelik fonksiyonlarına karşılık gelen analitik ifadeler verilmiştir.



Şekil 5.11 Üçgen ve yamuk üyelik fonksiyonuna sahip bulanık sayılar

$$A_1(x) = \begin{cases} (x-a)/(b-a) & , x \in [a,b] \\ (x-c)/(b-c) & , x \in [b,c] \\ 0 & , \text{diğer} \end{cases} \quad A_2(x) = \begin{cases} (x-a)/(b-a) & , x \in [a,b] \\ 1 & , x \in [b,c] \\ (x-d)/(c-d) & , x \in [c,d] \\ 0 & , \text{diğer} \end{cases}$$

A_1 fonksiyonu Şekil 5.11 (a)'ya, A_2 fonksiyonu da Şekil 5.11 (b)'ye aittir.

5.3.1 Reel Sayı Aralıkları Üstünde Aritmetik İşlemler

Bir çok uygulama alanında gerçel sayı aralıkları, sayısal değişkenlerin gerçel değeri hakkındaki kesin olmayan bilgilerimizin tanımlanmasına izin verir. Bu belirsizlik, ölçüm araçlarının kısıtlı olmasından veya hesaplamaların tam olarak yapılamamasından kaynaklanan bir durumdur. Gerçel sayı aralıkları üzerinde yapılan işlemler, bu konuda bize yardımcı olurlar.

Bu işlemleri tanımlayabilmek için $[a,b]$ ve $[c,d]$ şeklinde iki tane kapalı aralık alalım. $a \leq b$ ve $c \leq d$ olacak şekilde a, b, c, d sayıları aralıkların uç noktalarıdır. İşlemleri yapabilmek için kullanılacak temel mantık her iki aralıktaki bütün sayılar arasında karşılıklı olarak bu işlemi yerine getirmektir. Sadece bölme işleminde 0 ın bölünen aralığa ait olmaması gerekir.

İki aralık arasında yapılan işlemin de bir kapalı aralık oluşturacağı açıktır. Aynı zamanda, sonuçtaki aralığın uç noktaları da üzerinde işlem yapılan aralıkların uç noktalarıyla belirlenecektir.

Aralıklar üzerindeki işlemler aşağıdaki şekilde tanımlanırlar;

Toplama: $[a,b] + [c,d] = [a+c, b+d]$

Çıkarma: $[a,b] - [c,d] = [a-d, b-c]$

Çarpma: $[a,b] \cdot [c,d] = [\min(a.c, a.d, b.c, b.d), \max(a.c, a.d, b.c, b.d)]$

Eğer $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ ise bu halde aralıkların çarpımı;

$[a,b].[c,d]=[a.c, b.d]$ ile hesaplanır.

Bölme: $[a,b]/[c,d] = [\min(a/c, a/d, b/c, b/d), \max(a/c, a/d, b/c, b/d)]$, $0 \notin [c,d]$

5.3.2 Bulanık Sayılarla Aritmetik

Bu işlemlerin bulanık sayılara genişletilmesi, işlemi uygulamadaki kullanımı açısından önemlidir. Bulanık sayıların tek olarak α -kesimleri ile ifade edilebileceğini ve bunların da kapalı reel sayı aralıklarından oluştuğunu biliyoruz. Bunun yanısıra aritmetik işlemlerin aralıklar üzerinde nasıl uygulanacağını da öğrenmiş bulunuyoruz. Şimdi, bulanık sayıların bu özelliklerini ve bu tanımlı işlemleri biraraya getirerek bulanık sayılar üzerinde bu işlemleri tanımlamaya çalışalım.

Öncelikle toplama ve çıkarma işlemlerinin yapısına bakalım. Üçgen veya yamuk şekle sahip olan üyelik fonksiyonları arasında toplama ve çıkarma işlemleri, üyelik fonksiyonlarının öz kümeleri ve dayanak kümeleri arasında yapılır. Sonuçta oluşan öz ve dayanak, sonuç bulanık sayısını karakterize eder ve üyelik fonksiyonunun şeklinde kullandığımız sayılarla aynı olur. Fakat, toplama ve çıkarma için geliştirilen bu yöntemler çarpma ve bölme için geçerli olmayacaktır. Çünkü, bu işlemlerle elde edilen sonuç bulanık sayısı, üyelik fonksiyonunun şekli üzerinde işlem yapılan bulanık sayılarla aynı değildir.

Herhangi iki bulanık sayı üzerinde yapılacak olan bu dört temel işlemi formüle etmenin bir yolu da, sayıları α -kesimleri yardımıyla temsil etmek ve α -kesimleri üzerinde aralık işlemlerini kullanmaktır. Örneğin; A ve B iki bulanık sayı * da herhangi bir işlem olsun. $\forall \alpha \in (0,1]$ için $A*B$ 'nin α -kesimi, A ve B nin α -kesimleri yardımıyla şöyle tanımlanabilir.

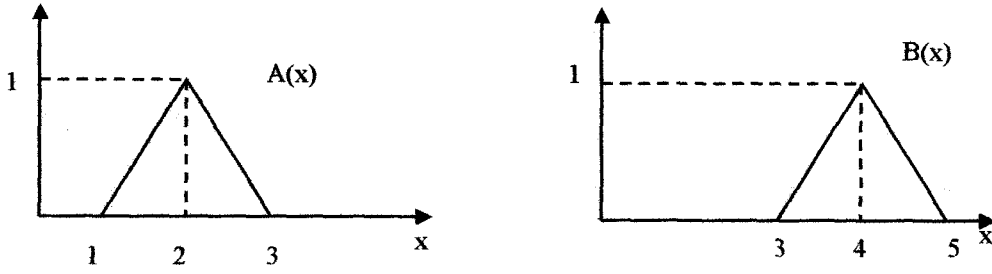
$$(A*B)^\alpha = A^\alpha * B^\alpha \quad (5.40)$$

$\alpha=0$ için bölme işleminin tanımlanamıyacağına dikkat edilmelidir. $(A*B)^\alpha$ ile birlikte, $A*B$ işlemi;

$$A*B = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (A*B)^\alpha . \alpha \quad (5.41)$$

olarak tanımlanır.

Bu tanımların uygulamasını bir örnek üzerinde inceleyelim; üyelik fonksiyonları üçgen şeklinde olan A ve B bulanık sayılarının analitik ifadeleri ve üyelik fonksiyonları aşağıdaki gibi verilmiş olsun.



Şekil 5.12 A ve B üçgen bulanık sayılarının üyelik fonksiyonları

$$A(x) = \begin{cases} (x-1) & , x \in [1,2] \\ (3-x) & , x \in [2,3] \\ 0 & , \text{diğer} \end{cases} \quad B(x) = \begin{cases} (x-3) & , x \in [3,4] \\ (5-x) & , x \in [4,5] \\ 0 & , \text{diğer} \end{cases}$$

$\alpha \in [0,1]$ için α -kesim kümeleri, sayıların analitik ifadelerinden belirlenebilirler;

$A^\alpha = [{}^\alpha a_1, {}^\alpha a_2]$ ve $B^\alpha = [{}^\alpha b_1, {}^\alpha b_2]$ olsunlar.

$$\left. \begin{aligned} A({}^\alpha a_1) &= {}^\alpha a_1 - 1 = \alpha \\ A({}^\alpha a_2) &= 3 - {}^\alpha a_2 = \alpha \end{aligned} \right\} \text{ve buradan} \quad \begin{aligned} {}^\alpha a_1 &= \alpha + 1 \\ {}^\alpha a_2 &= 3 - \alpha \end{aligned}$$

olarak bulunurlar. Bu durumda α düzeyine karşılık gelecek gelen α kesim kümesi;

$A^\alpha = [\alpha+1, 3-\alpha]$ ile belirlenir. Aynı işlemler B bulanık sayısı için gerçekleştirildiğinde

B bulanık sayısı için α düzeyine karşılık gelecek olan α -kesim kümesi; $B^\alpha = [\alpha+3, 5-\alpha]$

olacaktır. (5.40) eşitliği kullanılarak α -kesimleri arasında yapılacak toplama işlemi A

ve B bulanık sayıları için;

$$(A+B)^\alpha = [\alpha+1, 3-\alpha] + [\alpha+3, 5-\alpha]$$

ve aralıklar üzerinde yapılacak toplama işlemi ile

$$(A+B)^\alpha = [2\alpha+4, 8-2\alpha]$$

olarak hesaplanır. α -kesim kümelerinden herhangi biri bu şekle sahip olan A+B bulanık sayısının üyelik fonksiyonunu elde etmek için;

$$2\alpha+4=x \quad \text{ve} \quad 8-2\alpha=x$$

eşitliklerinden faydalanılır. $\alpha=0$ ve $\alpha=1$ değerleri için A+B ye ait α -kesiminin uç noktaları ve en yüksek üyelik derecesine sahip olan değer elde edilir. Bu durumda;

$$\forall x \in [4,6] \text{ için } \alpha=(x-4)/2 \text{ ve } \forall x \in [6,8] \text{ için } \alpha=(8-x)/2$$

olarak belirlenir. Böylelikle A+B bulanık sayısına ait üyelik fonksiyonunun analitik ifadesi şu şekilde olacaktır.

$$A+B(x) = \begin{cases} (x-4)/2 & , x \in [4,6] \\ (8-x)/2 & , x \in [6,8] \\ 0 & , \text{diğer} \end{cases}$$

Aynı şekilde $(A-B)^\alpha = A^\alpha - B^\alpha$ olduğundan dolayı, çıkarma işlemi yine, α -kesimlerinin oluşturduğu aralıklar üzerindeki çıkarma işlemine dönüşür.

Yukarıda A ve B bulanık sayılarına ait herhangi $\alpha \in [0,1]$ düzeyine ait α -kesim kümeleri verildiğine göre bunlar arasındaki çıkarma işlemi;

$$(A-B)^\alpha = [\alpha+1, 3-\alpha] - [\alpha+3, 5-\alpha] \text{ ile beraber}$$

$$(A-B)^\alpha = [2\alpha-4, 2\alpha]$$

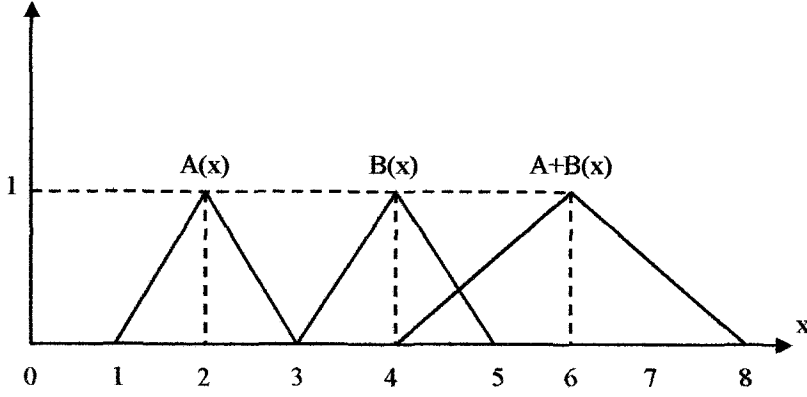
olarak hesaplanırlar. $\alpha=0$ verilerek A-B bulanık sayısının dayanağı $[-4,0]$ olarak belirlenir. Bulanık sayılar simetrik olduklarından dolayı;

$$\forall x \in [-4,-2] \text{ için } \alpha=(x+4)/2 \text{ ve } \forall x \in [-2,0] \text{ için } \alpha=x/2$$

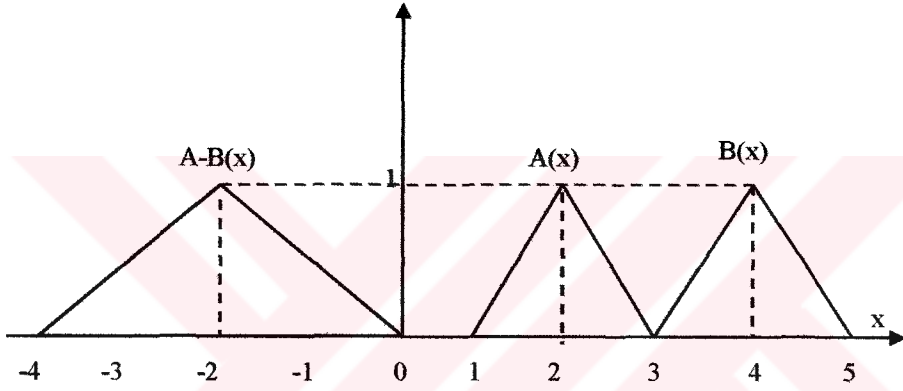
olacaktır. O halde, A-B bulanık sayısına ait üyelik fonksiyonu;

$$A-B(x) = \begin{cases} (x+4)/2 & , x \in [-4,-2] \\ x/2 & , x \in [-2, 0] \\ 0 & , \text{diğer} \end{cases}$$

şeklindedir. Çarpma ve bölme işlemleri için de üyelik fonksiyonları α -kesim kümelerine karşılık gelen aralıklar yardımıyla aynı şekilde elde edilebilir.



Şekil 5.13 A ve B bulanık sayılarının toplamı olan $A+B$ bulanık sayısının üyelik fonksiyonu



Şekil 5.14 A ve B bulanık sayılarının farkı olan $A-B$ bulanık sayısının üyelik fonksiyonu

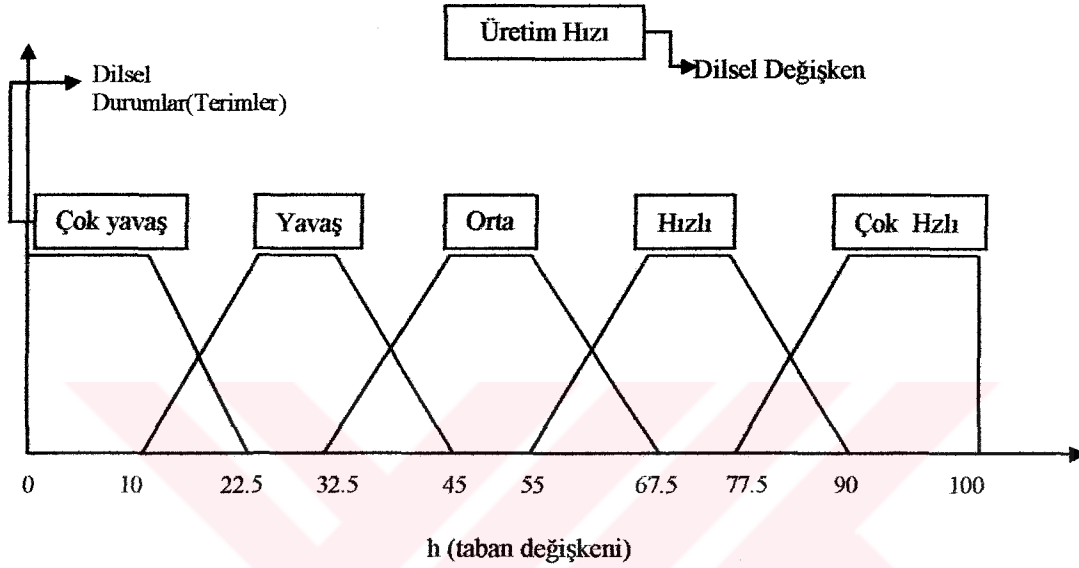
5.3.3 Dilsel Değişkenler

Bulanık sayılar kavramı, bulanık değişkenleri nicel bir hale getirmede önemli bir role sahiptir. Bu değişkenlere ait alt durumlar diyebileceğimiz “çok küçük”, “küçük”, “orta” vb şeklindeki dilsel kavramlar, bulanık sayılarla ifade edildiğinde sonuç olarak ortaya çıkan yapı, genellikle dilsel değişkenler olarak adlandırılır.

Dilsel değişken, bir taban değişken aracılığıyla, değerlerini belirli bir gerçel sayı aralığından alır. Taban değişken, sıcaklık, basınç, nem, hız, enflasyon oranı, üretim hızı, deprem şiddeti gibi fiziksel veya sayısal değişkenler olabilir. Dilsel bir değişkende, taban değişkenin yaklaşık değerlerini gösteren dilsel terimler, uygun bulanık sayıyla ifade edilirler.

Örneğin; Üretim hızı gibi bir değişken alalım ve verilen alana ilişkin üretim araçlarının hızını, belirlenen amaca göre ifade etmek gibi bir problemimiz olsun.

Üretim hızı ölçütü aynı taban değişken olarak da kabul edilebilir ve ara durumlar “çok yavaş”, “yavaş”, “orta seviye”, “hızlı” ve “çok hızlı” gibi dilsel terimlerle oluşturulur. Bu beş dilsel terimin herbirine anlamları yardımıyla belirlenecek bulanık sayılar karşı getirilir. Şekilde dilsel terimleri ifade etmek için yamuk bulanık sayılar kullanılmış ve üretim hızının değişim aralığı [0,100] olarak belirlenmiştir.



Şekil 5.15 “Üretim hızı” dilsel değişkenine karşılık gelen alt terimlerin bulanık sayılarla üyelik fonksiyonlarının oluşturulması

5.4 BULANIK BAĞINTILAR

Klasik bağıntılar iki kümenin elemanları arasında belirlenen bir ilişkinin varlığını veya yokluğunu ortaya koyarlar. Bulanık bağıntılar ise bu ilişkinin kuvvetini veya derecesini ifade ederler. Genel olarak, bulanık bağıntılar kartezyen çarpım şeklindeki evrensel kümeler üzerinde tanımlı bulanık kümelerdir.

Klasik bağıntılar ile karşılaştırıldığında, bulanık bağıntıların doğal dilde ifade edilen kavramları daha iyi ifade ettiği görülür.

5.4.1 Bağıntı ve Bulanık Bağıntı

Klasik anlamda bir bağıntı X ve Y kümelerinin oluşturduğu kartezyen çarpım kümesinin bir alt kümesi olarak;

$$R = \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\} \subseteq X \times Y \quad (5.42)$$

şeklinde ifade edilir. Bir bağıntının elemanları, görüldüğü üzere ikililerden oluşmaktadır. Kartezyen çarpımdaki küme sayısına göre üçlü, dörtlü veya n’li elemana sahip bağıntılar tanımlamak mümkündür. Klasik bir bağıntıda klasik anlamda bir küme olduğundan dolayı, onu’da karakteristik fonksiyon yardımıyla ifade etmek mümkündür.

$X \times Y$ üstünde tanımlı bulanık bir bağıntı ise;

$$R = \{((x,y), R(x,y)) \mid (x,y) \in X \times Y, R(x,y) \in [0,1]\} \subseteq X \times Y \times [0,1] \quad (5.42)$$

şeklinde tanımlanabilir. R bağıntısı içinde yer alan $R(x,y)$ fonksiyonu iki değişkenli bir üyelik fonksiyonudur ve üyelik derecesi x ile y arasındaki ilişkinin kuvveti olarak yorumlanabilir. Bulanık bağıntılar da bulanık kümelerde olduğu gibi üyelik fonksiyonları yardımıyla belirlenirler. Bulanık bağıntı kavramı her bir çifte belirli bir üyelik derecesi ataması yönünden, klasik bağıntı kavramıyla karşılaştırıldığında ilişkileri daha kuvvetli açıklama gücüne sahiptir.

Bağıntının üzerinde tanımlandığı küme sonlu olduğunda takdirde gösterim için bir matris yapısı kullanmak uygundur. Örneğin;

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad \text{ve} \quad Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\} \text{ için}$$

$X \times Y$ üzerindeki bir bağıntı bu elemanlar arasındaki ilişkiyi gösterecek şekilde;

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mn} \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

ile verilir. Burada $i = 1 \dots n$ ve $j = 1 \dots m$ için her $r_{ij} = R(x_i, y_j)$ şeklinde tanımlıdır. Yani, i. satır ve j. sütundaki matris elemanına karşılık gelen r_{ij} , R bağıntısında (x_i, y_j) ’nin üyelik derecesi $R(x_i, y_j)$ ’yi ifade eder. Daha yüksek boyuttaki bağıntılar da aynı kural çerçevesinde tanımlanabilir.

Örneğin; $X = \{\text{Ankara, İstanbul, Muğla}\}$ ve $Y = \{\text{Samsun, Kayseri}\}$ kümeleri arasında bir uzaklık bağıntısı tanımlarsak, bu bağıntının oluşturacağı matrisin elemanları şu şekilde olabilir;

R(x,y)	Ankara	İstanbul	Muğla
Samsun	0.6	0.8	0.9
Kayseri	0.4	0.7	0.8

Uzaklık ilişkisi var veya yok şeklinde değerlendirilebilecek bir nitelik değildir. Bu yüzden iki şehir arasındaki uzaklığın belirlenmesi için bir derecelendirme yoluna gidilmesi gerektiği, gerçek hayatta karşımıza çıkan olaylarda kullandığımız mantığa çok uygundur. Buna göre, tablodaki değerine bakarak, Samsun ile Muğla arası uzaklığın, Samsun ile Ankara arasındaki uzaklıktan daha büyük olduğunu söyleyebiliriz.

5.4.2 Bulanık Bağıntılar Arasında İşlemler

Bulanık bağıntılar da birer bulanık küme olduğuna göre, onlar üzerinde de aynı işlemleri tanımlamak mümkündür. Fakat, bulanık bağıntılar üzerinde bunların yanısıra ters bağıntı ve bileşke gibi farklı işlemler de tanımlamak mümkündür.

R_1 ve R_2 , $A \times B$ üzerinde tanımlı iki bulanık bağıntı olmak üzere;

$$R_1 = \{(x,y,R_1(x,y)) \mid (x,y) \in X \times Y, R_1(x,y) \in [0,1] \} \quad (5.44)$$

$$R_2 = \{(x,y,R_2(x,y)) \mid (x,y) \in X \times Y, R_2(x,y) \in [0,1] \} \quad (5.45)$$

şeklinde verilmiş olsunlar. R_1 ve R_2 arasında yapılabilecek işlemler, yine onları belirleyen üyelik fonksiyonları aracılığıyla bulanık kümeler üzerindeki gibi yapılır.

Herhangi bir bağıntının tümleyeni yine onun üyelik fonksiyonunun değerlerinin 1 den çıkarılmasıyla elde edilir. Yani,

$$\neg R_1(x,y) = 1 - R_1(x,y) \quad (5.46)$$

$R_1 \cap R_2$ 'nin üyelik fonksiyonu ise yine üyeliklerin en küçüğü alınarak elde edilir.

$$R_1 \cap R_2(x,y) = \min(R_1(x,y), R_2(x,y)) \quad (5.47)$$

$R_1 \cup R_2$ 'nin üyelik fonksiyonu, üyeliklerin en büyüğünün seçilmesiyle oluşturulur;

$$R_1 \cup R_2(x,y) = \max(R_1(x,y), R_2(x,y)) \quad (5.48)$$

$R_1 \subseteq R_2$ olması ancak ve ancak

$$\forall (x,y) \in X \times Y \text{ için } R_1(x,y) \leq R_2(x,y) \quad (5.49)$$

eşitsizliğinin sağlanması ile gerçekleşir.

Yine $X \times Y$ üzerinde tanımlı olan bir bulanık bağıntının tersi ise $Y \times X$ üzerinde tanımlı bir bağıntı olmak üzere;

$$R^{-1}(y,x) = R(x,y) \quad (5.50)$$

eşitliği ile belirlenir.

Örneğin; $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ kümeleri üzerinde R_1 ve R_2 bağıntılarının aşağıdaki tablolar vasıtasıyla verildiğini düşünerek bu işlemleri açıklamaya çalışalım.

	y_1	y_2	y_3
x_1	0.8	1	1
x_2	0.1	0.6	0.7
x_3	1	0.4	0.2

$R_2 =$	y_1	y_2	y_3
	0.9	0.3	1
	0.6	0.2	0.4
	1	1	0.7

şeklinde verilmiş olsunlar bu durumda;

$R_1 \cap R_2 =$	y_1	y_2	y_3
	0.8	0.3	1
	0.1	0.2	0.4
	1	0.4	0.2

$R_1 \cup R_2 =$	y_1	y_2	y_3
	0.9	1	1
	0.6	0.6	0.7
	1	1	0.7

şeklinde en büyük ve en küçük işlemlerinin uygulanmasıyla elde edilir. R_1 in tümleyeni ise;

$\neg R_1 =$	y_1	y_2	y_3
	0.2	0	0
	0.9	0.4	0.3
	0	0.6	0.8

olarak elde edilecektir.

Çalışılan alana göre tümleyen, kesişim ve birleşim işlemi için, aynen bulanık kümelerde olduğu gibi, yukarıda tanımlananlardan farklı şekilde uygun fonksiyonlar tanımlanabilir. Bu ilişkiyi belirten dilsel değişkenin anlamına bağlı olarak belirlenecek bir süreçtir.

Bulanık iki küme arasında kartezyen çarpım işlemi yoluyla bir bağıntı tanımlamak mümkündür. Bu işleme doğrudan çarpım denir. A ve B, sırasıyla X ve Y üzerinde tanımlı iki bulanık küme olmak üzere üyelik fonksiyonları $A(x)$ ve $B(y)$ ile verilmişlerse, bu durumda A ile B üzerinde tanımlanacak doğrudan çarpıma ait elemanların üyelik derecesi, A'nın ve B'nin üyelik fonksiyonlarının en küçüğünün alınmasıyla oluşturulur. Yani;

$$A \times B = \{(x, y, \min(A(x), B(y))) \mid x \in A, y \in B\}$$

şeklinde oluşur. Bundan başka, klasik bağıntılarda olduğu üzere, bulanık bağıntılar için de eşdeğerlik, kısmi sıralama bağıntılarını uygun şekillerde tanımlamak mümkündür.

5.4.3 Bulanık Bağıntılar Arasında Bileşke İşlemi

İki bağıntı arasında bir bileşke işleminden söz etmek için, birinci bağıntının ikinci elemanlarının ait olduğu kümeyle, ikinci bağıntının birinci elemanlarının ait olduğu kümenin aynı olması gerekir. Bu durumda, R_1 , $X \times Y$ ve R_2 , de $Y \times Z$ üzerinde tanımlı iki bulanık bağıntı ise

$$\mathfrak{R} = R_1 \circ R_2$$

bileşke işlemi $X \times Z$ kümesinin elemanlarından oluşmalıdır. $\mathfrak{R}$ bileşke bulanık bağıntısını temsil edecek üyelik fonksiyonu R_1 ve R_2 'nin üyelik fonksiyonları tarafından belirlenir. Formel olarak bileşke işlemi aşağıdaki eşitlikle verilir.

$$\mathfrak{R}(x, z) = (R_1 \circ R_2)(x, z) = \max_{y \in Y} \min [R_1(x, y), R_2(y, z)] \quad (5.51)$$

Bu işlem bize bileşke bağıntısının üyelik fonksiyonunun; R_1 'in birinci bileşenlerini, R_2 'nin ikinci bileşenine bağlayan ortak elemanlarının üyelik derecelerinden en küçük olanının ve daha sonra da bunlar arasından en büyük üyelik derecesine sahip olanın seçilmesiyle oluşturulacağını söyler.

Örneğin; Hastaların üzerindeki belirtilerin, hastalardaki dereceleri ve hangi hastalığın hangi belirtiliyle ne derecede ilişkili olduğunu bilirsek, hastaların hastalıklarla olan ilişkileri üzerinde doğru bir değerlendirmeyi böyle bir bileşke işlemiyle yapabiliriz.

R_1 = Bir belirtinin bir hasta üzerinde ne kadar güçlü gözüktüğünü

R_2 = Varolan belirtinin bir hastalıkla ilişkisinin ölçüsünü

yansıtsın. Bu durumda;

$\mathfrak{R}=R_1 \circ R_2$ =Hastalarla, hastalıklar arasındaki ilişkiyi ifade eder.

	y_1	y_2	y_3
x_1	0.8	1	1
x_2	0.1	0.6	0.7
x_3	1	0.4	0.2

	z_1	z_2	z_3
y_1	0.9	0.3	1
y_2	0.6	0.2	0.4
y_3	1	1	0.7

ile verilen bulanık bağıntıların bileşke işlemi;

$$\mathfrak{R}(x_1, z_1) = R_1 \circ R_2(x_1, z_1) = \max[\min(R_1(x_1, y_1), R_2(y_1, z_1)), \min(R_1(x_1, y_2), R_2(y_2, z_1)), \min(R_1(x_1, y_3), R_2(y_3, z_1))]$$

$$\mathfrak{R}(x_1, z_1) = R_1 \circ R_2(x_1, z_1) = \max[\min(0.8, 0.9), \min(1, 0.6), \min(1, 1)] = \max(0.8, 0.6, 1) = 1$$

$$\mathfrak{R}(x_1, z_2) = R_1 \circ R_2(x_1, z_2) = \max[\min(R_1(x_1, y_1), R_2(y_1, z_2)), \min(R_1(x_1, y_2), R_2(y_2, z_2)), \min(R_1(x_1, y_3), R_2(y_3, z_2))]$$

$$\mathfrak{R}(x_1, z_2) = R_1 \circ R_2(x_1, z_2) = \max[\min(0.8, 0.3), \min(1, 0.2), \min(1, 1)] = \max(0.3, 0.2, 1) = 1$$

.....

$$\mathfrak{R}(x_3, z_3) = R_1 \circ R_2(x_3, z_3) = \max[\min(R_1(x_3, y_1), R_2(y_1, z_3)), \min(R_1(x_3, y_2), R_2(y_2, z_3)), \min(R_1(x_3, y_3), R_2(y_3, z_3))]$$

$$\mathfrak{R}(x_3, z_3) = R_1 \circ R_2(x_3, z_3) = \max[\min(1, 1), \min(0.4, 0.4), \min(0.2, 0.7)] = \max(1, 0.4, 0.2) = 1$$

olacaktır. O halde, $\mathfrak{R}$ nin üyelik fonksiyonunun ifade eden bileşke matris;

	z_1	z_2	z_3
x_1	1	1	0.8
x_2	0.7	0.7	0.7
x_3	0.9	0.3	1

$$\mathfrak{R} = R_1 \circ R_2 =$$

şeklinde olur. Demek ki bu tabloya bakarak, “ x_1 hastasında z_1 hastalığının var” olduğunu söyleyebiliriz.

Yukarıda tanımlanan işlemlerden başka, bulanık bağıntılar bu işlemler arasında tanımlanan aşağıdaki özellikleri de sağlarlar,

$$R_1 \circ R_2 \neq R_2 \circ R_1$$

$$R_3 \circ (R_1 \cup R_2) = (R_3 \circ R_1) \cup (R_3 \circ R_2)$$

$$R_3 \circ (R_1 \cap R_2) = (R_3 \circ R_1) \cap (R_3 \circ R_2)$$

$$R_1 \subseteq R_2 \Rightarrow R_1 \circ R_3 \subseteq R_2 \circ R_3$$

5.5 BULANIK MANTIK

Birinci bölümde yapılan mantık tanımında, mantığı akıl yürütmenin mümkün bütün şekillerinin prensiplerini, yöntemlerini ve biçimlerini ortaya koyma çalışması olarak tanımlamıştık. Fakat, ne klasik mantık, ne de sembolik mantık, akıl yürütmelerimizin bütününe kapsayıcı bir yapıya sahip olabileceğini iddia edemez. Ancak dilin kendi sınırları içine düşen formlarını ifade ederek, sistemini sembolize eder. Kuşatıcılıkları, dilin ve düşüncenin bütün yansımalarını içine alacak kadar geniş değildir.

Bulanık mantığa gelindiğinde, ise kendi payına düşen alanda diğer mantık sistemlerinden bu işi daha iyi yaptığı söylenebilir. Fakat, bulanık mantığın da yine dilin ve düşüncenin bütün formlarını içine alıp onları sistematik bir hale getirmek gibi bir iddiası yoktur. Sadece dilin ve düşüncenin, belirsizliklerin var olduğu durumlarda nasıl davrandığının ve ne gibi akıl yürütme formlarına sahip olduğunun bir incelemesidir bulanık mantık. Yine de, bulanık mantığın açtığı alanın genişliği, klasik ve modern mantığınkinden çok daha göz kamaştırıcıdır.

Şimdiye kadar bulanık mantık alanında yapılan çalışmalardan anlaşıldığı kadarıyla bu kavramın geniş ve dar manada kullamları iki karşılığı vardır. Dar manada bulanık

mantık, bu yüzyılın başında geliştirilen çok değerli mantığın bir genişlemesi olarak ele alınır. Geniş anlamda kullanılan bulanık mantık kavramı ise yaklaşık akıl yürütme formlarıyla ilgili yöntemlerin, kuralların ve kavramların oluşturduğu sistemi ifade etmek amacıyla kullanılır. Burada incelenecek ana konu, geniş manada bulanık mantıktır.

Bulanık küme ve bulanık mantık teorisinin kurucusu olan L. Askerzade, bulanık mantık için şu tanımlı yapmaktadır: “Klasik mantık sistemlerinin bir genişlemesi olarak görülebilecek olan bulanık mantık, belirsiz ve kesin olmayan durumlarda, oluşan bilginin temsil edilmesinde gerekli olan kavramsal çerçeveyi sağlayan bir araç durumundadır. İsminden de anlaşılacağı üzere, kesin olandan ziyade yaklaşık olan akıl yürütme modellerinin temelini oluşturan mantıktır. Bulanık mantıkta, herşey bir derece problemidir.”[9]

Geniş anlamda ele alınan bulanık mantık kavramı, bulanık küme teorisinin bir uygulama alanı olarak görülebilir. Yaklaşık muhakeme diye adlandırdığımız “approximate reasoning” alanında kullanılan çeşitli akıl yürütme formlarını formüle etmek için, bulanık küme teorisi içinde geliştirilmiş olan kavramları, kuralları ve metodları kullanır. Bu araçların kullanımı, bize doğruluk derecesi ve üyelik fonksiyonu arasında bir bağıntı kurmamızı gerekli kılar. A bir bulanık küme ve $A(x)$ de evrensel kümenin bütün elemanlarına karşılık gelen A’ya ait olma veya üyelik derecesi ise bu ifade aynı zamanda “x A’nın bir üyesidir” gibi bir önermenin doğruluk derecesi olarak da görülebilir. Tersine “x, F’dir” şeklinde bir önerme, X evrensel kümesinin bir elemanı ve F de bulanık dilsel bir ifade (orta, düşük, yüksek vb) olarak verilseydi, bu önermenin doğruluk derecesi de F ifadesi tarafından belirlenen bulanık bir A kümesinin x’e karşılık gelen üyelik derecesi olarak yorumlanabilirdi. Bu karşı getirim yoluyla bulanık önermeler üstünde de değilleme, tikel evetleme, tümel evetleme gibi mantık işlemleri, bulanık kümeler üzerinde tanımlanan tümleyen birleşme ve kesişme işlemlerine benzer şekilde tanımlanabilir.

Doğal dilde yaygın olan belirsiz kavramları içeren önermelerle akıl yürütme üzerinde durmak, bulanık mantığın ilgilendiği durumlar açısından gereklidir. Örneğin; aşağıdaki çıkarım yaklaşık muhakemenin bir örneğidir.

“Yağmurun bol yağdığı senelerde, genelde toprak daha fazla ürün verir.

Fazla ürün olursa, çiftçiler yüksek hayat standardına sahip olurlar.

O halde, Yağmur bol yağarsa, çiftçiler genelde yüksek hayat standardına sahip olurlar”

Böyle bir çıkarımın klasik mantıkta ifade edilemeyeceği açıktır. Çıkarım anlamlı ve zorunlu olduğu halde, içinde bulundurduğu yüklemelerin belirsizliği nedeniyle klasik mantık yaklaşımı, böyle bir çıkarımın geçersiz olduğunu söyleyecektir. Geniş manada bulanık mantığın amacı bu tür çıkarımlarla ilgilenmektir. Görüldüğü üzere bu çıkarımlar, doğal dilde ifadesini bulan bulanık önermeler üstüne kuruludurlar. [9,21]

Önermelerdeki dilsel ifadeler değişik nitelikte bulanık dilsel ifadeler içerebilirler. Bunlar;

- Bulanık yüklemeler : Uzun, genç, küçük, orta, normal, pahalı vb
- Bulanık doğruluk değerleri : Doğru, az doğru, yanlış, çok yanlış vb
- Bulanık niceleyiciler: Neredeyse tamamı, yaklaşık yarısı, yirmisi kadarı, çoğu

Bütün bu dilsel ifadeler değişik alanlarda uygun bulanık kümelerle temsil edilebilirler.

5.5.1 Bulanık Önermeler

Bulanık önerme, belirsiz veya açıkça tanımlanamayan sınırlara sahip kavramlardan oluşan bir hüküm cümlesidir. Kişisel fikirleri ifade eden veya değişik anlamlara yol açabilen türde dilsel ifadeler, bulanık önermeler şeklinde ifade edilirler.

Bulanık önermelerle klasik önermelerin arasındaki temel fark, doğruluk değerlerinde görülür. Klasik önermenin ya doğru veya yanlış olması gerekirken, bulanık bir önermenin doğruluğu, bir derece problemidir. Doğruluk ve yanlışlık sırasıyla 1 ve 0 ile ifade edilirse, herbir bulanık önermenin doğruluk derecesi $[0,1]$ aralığındaki bir sayıyla ifade edilebilir. Bulanık önermenin doğruluk değerinin atanması işlemi aslında, önermenin kullanıldığı konuşma alanı olarak nitelediğimiz evrensel küme üzerinden $[0,1]$ aralığına, bir dönüşümle verilir. T, bir bulanık önermenin doğruluk değerini gösteren fonksiyon olmak üzere;

$$T: u \in U \longrightarrow [0,1] \quad (5.52)$$

şeklinde tanımlanır. Bulanık önermeleri bulanık kümelerle ilişkili bir biçimde

yazmak da mümkündür. p : “ x A *dır*” gibi bulanık bir önermenin doğruluk değeri yukarıdaki fonksiyonla belirlenmek üzere, p ’nin doğruluk değeri genel olarak;

$$T(p) = A(x) \quad (5.53)$$

ifadesiyle verilir. Yani, p nin doğruluk derecesi x in A bulanık kümesine ait olma derecesidir.

Klasik önermelerde yer alan basit, bileşik, şartlı ve nicelenmiş önerme tiplerinin yanısıra, bulanık mantıkta önermeler, içinde bulunan dile ait belirsiz ifadeler sebebiyle daha geniş bir önerme grubunu içerirler.

Örneğin;

p : “Fırat nehri derin bir nehirdir”

gibi bir önerme bulanıktır. Burada derin nehir kavramıyla anlatılmak istenilen açık ve kesin değildir. Derin bir nehir ile derin olmayan bir nehir arasında kesin sınır koyacak elimizde bir ölçüt yoktur. Burada elbette nehirlerin derinliğiyle ilişkili bir üyelik fonksiyonu oluşturulabilir. Fakat, bu ikinci derecede ilgileneceğimiz bir konudur. Şu anda sadece, farklı dilsel bileşiklerden oluşan bulanık bir önermenin doğruluk değerinin belirlenmesiyle ilgileneceğiz.

q : “Fırat nehrinin derin bir nehir olduğu doğrudur”

önermesini gözönüne alalım. p ile q önermeleri arasında önemli bir fark vardır. Önceki önerme gerçek dünyadaki bir olay veya objenin bir özelliğini yansıtırken, q önermesi onun doğruluk derecesi ile ilgilenmektedir. Yani, ikinci önerme bir önerme ile ilgilidir. Bu tür değişiklikler, klasik önerme grupları içerisinde yer almazlar.

Önerme eklemleri yardımıyla, basit önermelerden bileşik önermelere geçişin sağlanması ve doğruluk değerlerinin elde edilmesi, klasik mantıktakine benzer bir yolla yapılır.

p ve q önermeleri sırasıyla A ve B bulanık kümeleri üzerinde tanımlı önermeler olmak üzere;

Değilleme : $\neg p$: “ x , A değildir” önermesinin doğruluk değeri;

$$T(\neg p) = 1 - T(p) \quad (5.54)$$

Tikel evetleme: $p \vee q$: “ x A veya B dir”

$$T(p \vee q) = \max(T(p), T(q)) = \max(A(x), B(x)) \quad (5.55)$$

Tümel evetleme: $p \wedge q$: “x, A ve B dir”

$$T(p \wedge q) = \min(T(p), T(q)) = \min(A(x), B(x)) \quad (5.56)$$

ile verilirler. Üyelik fonksiyonları ve bulanık küme işlemleri için kullanılabilen tanımlama esnekliği, önerme eklemleri için de geçerlidir. Uygulama alanı ve konuya göre, uzman kişinin öngördüğü fonksiyonlar, önerme eklemleri için kullanılabilirler.

Şimdi temel bulanık önerme biçimlerini inceleme işine başlayabiliriz. Temel bulanık önerme çeşitleri;

1. Şartlı ve nitelendirilmiş olmayan önermeler,
2. Şartlı olmayan nitelendirilmiş önermeler,
3. Nitelendirilmiş olmayan Şartlı önermeler,
4. Nitelendirilmiş Şartlı önermeler,
5. Nicelenmiş Önermeler

şeklinde sınıflandırılabilirler. Her bir önerme tipi için doğruluk değeri ve ilişkili biçim ve yorumları uygun biçimde verilebilir.

5.5.1.1 Şartlı ve Nitelenmiş Olmayan Önermeler

Bu tip bulanık önermenin genel formu, p bir bulanık önermeyi göstermek üzere;

$$p: “V F’ dir” \quad (5.57)$$

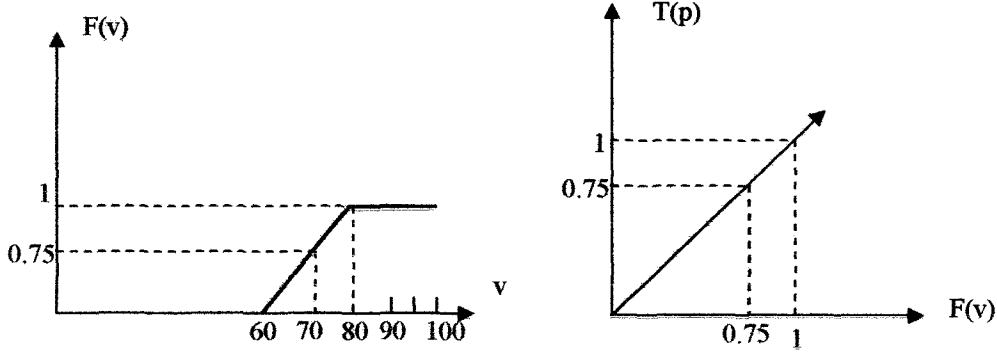
şeklinde ifade edilir. V, Y evrensel kümesi üzerinde tanımlı ve v değerini alan bir değişken, F ise Y üzerinde tanımlı, uzun, pahalı, düşük, normal gibi bir yüklem yerini tutan bulanık bir kümedir. V nin herhangi verilen bir v değerine F(V) gibi bir üyelik derecesi karşılık getirilir. Bu üyelik derecesi aynı zamanda p önermesinin doğruluk derecesi olarak yorumlanabilir. Yani;

$$T(p) = F(v) \quad (5.58)$$

olarak verilir. Açıklanan kavramları göstermek için, V yi dünya üzerinde herhangi bir yerin ölçülen hava sıcaklığını gösteren bir değişken olarak alalım. Şekil 5.16 da gösterilen üyelik fonksiyonu da, bu dilsel değişkene ait yüksek sıcaklık durumunu gösterebilir. İlişkili tüm ölçüm belirlemelerinin elimizde olduğunu farzederek, bu durumda bir bulanık önermeyi;

p : “Sıcaklık (V) Yüksek(F) tir”.

şeklinde ifade edebiliriz.



Şekil 5.16 a) “Yüksek” yüklemine üyelik fonksiyonu

b) p önermesinin doğruluk değerinin üyelik fonksiyonu

Bu önermenin doğruluk derecesi, sıcaklığın gerçek değerine ve yüksek için verilen tanıma bağlıdır. Örneğin: 70 derecelik bir sıcaklığa karşılık önermenin alacağı değer,

$$F(70) = 0.75 \text{ ve } T(p) = 0.75$$

olarak hesaplanır.

T doğruluk fonksiyonunun rolünün, bulanık kümelerle bulanık önermeler arasında bir köprü oluşturmak olduğunu görmekteyiz. F 'deki üyelik dereceleriyle, bulanık önermelerin dereceleri arasındaki bağlantı bu ilişkinin sayısal olarak ifade edilmesinin yanı sıra, kavramsal olarak da önemi büyüktür.

5.5.1.2 Şartlı Olmayan Nitelendirilmiş Önermeler

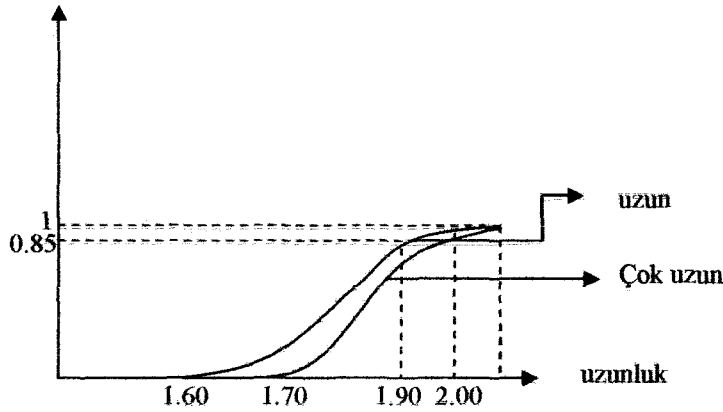
Nitelendirilmiş şartlı olmayan önermenin genel şekli;

$$p: “V'nin F olması S'dir” \quad (5.59)$$

olarak verilir. V ile F biraz önce ele aldığımız önerme tipindeki anlamlarındadır. S ise bulanık doğruluk niteleyicisidir ve bulanık bir küme ile ifade edilir. Bu tipteki bir bulanık önermeye örnek olarak;

$$\frac{\text{“Ali'nin boyunun uzun olduğu çok doğrudur”}}{V \quad F \quad S}$$

önermesini ele alabiliriz. Yüklemler olan “uzun” terimini Şekil 5.17 ve “çok doğru” doğruluk niteleyicisini Şekil 5.18’de verilen bulanık kümeler temsil etmektedir.



Şekil 5.17 “uzun” ve “çok uzun” dilsel terimlerinin üyelik fonksiyonu

Alinin boyunun 1.90 olduğunu kabul edersek “uzun” bulanık kümesine ait üyelik derecesi 0,85 olacaktır. Bulanık önermemizin doğruluk değeri de bu değere göre “çok doğru” niteleyicisi altında 0,42 değerine sahip olacaktır. Eğer yüklemimizi veya doğruluk niteleyicisini değiştirirsek, önermeye ait doğruluk değeri yine aynı yöntemle elde edilir.

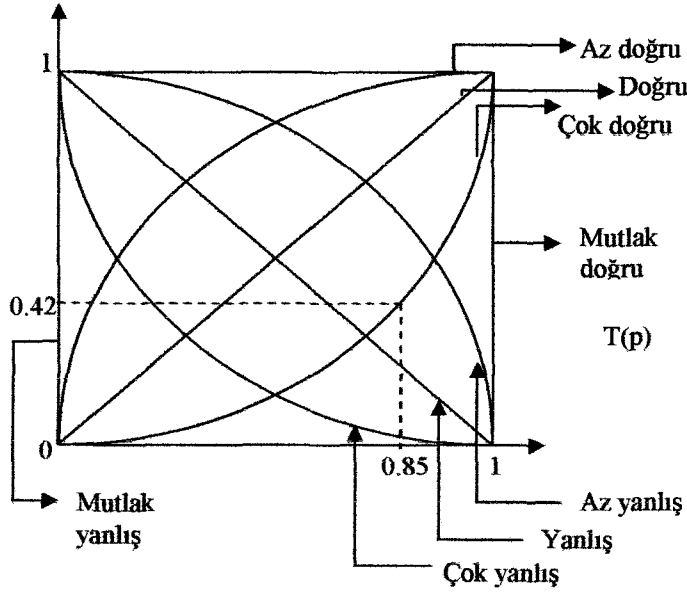
Genelde doğruluk nitelendirici bir yapıya sahip, bir bulanık önermenin doğruluk değeri

$$\forall v \in V \text{ için } T(p) = S(F(v)) \quad (5.60)$$

ile verilir. $G(v) = S(F(v))$ dersek, herhangi bir doğruluk niteleyici yükleme sahip bir önermeyi, doğruluk nitelendirici olmayan birinci tipteki bir önerme gibi “ V G ’dir” şeklinde görebiliriz.

$F(1.90)=0.85$ ve $T(0.85)=0.42$ olarak hesaplanır. O halde, p önermesinin doğruluk değeri 0.42 diyebiliriz.

Gerçekte doğruluk niteleyicisi olmayan bir önerme de, özel bir doğruluk niteleyiciye sahip önermedir. Nitelendirilmemiş bir önermenin doğruluk niteleyicisi olan S ’yi “doğru” niteleyeni olarak alabiliriz. “doğru” niteleyicisine sahip bulanık önermelerde S ’yi temsil eden üyelik fonksiyonu olarak birim fonksiyon alınır. Yani; $S(F(v))=F(v)$ dir.



Şekil 5.18 Çeşitli doğruluk niteleyicilerinin üyelik fonksiyonlarının gösterimi

5.5.1.3 Şartlı ve Nitelendirilmemiş Önermeler

Genel form olarak; p , bulanık, şartlı ve nitelendirilmemiş önermesi

$$p: \text{"Eğer } x \text{ } A \text{ ise } y, B \text{ dir."} \quad (5.61)$$

şeklinde ifade edilir.

x ve y , sırasıyla X ve Y kümeleri üzerinde tanımlı değişkenlerdir. A ve B ise sırasıyla X ve Y üzerinde tanımlı bulanık kümelerdir. Bu tür önermeler R , $X \times Y$ üzerinde tanımlı bir bulanık küme olmak üzere

$$\langle X, Y \rangle, R \text{ dir}$$

şeklinde düşünülebilir. R bağıntısı $R(x, y) = J[A(x), B(y)]$ şeklinde belirlenir. Burada $[0, 1]$ üstünde tanımlı J operatörü, çalışılan alana uygun olarak seçilen şartlı önerme operatörüdür. Şartlı önerme ile "Eğer... ise..." yapısındaki önermeleri kasetmekteyiz.

J operatörü çoğu zaman standart Lukasiewicz operatörü olarak alınır. Bu operatör;

$$J(a, b) = \min(1, 1 - a + b) \quad (5.62)$$

ile verilir. Yukarıda verilen iki eşitliğin arasındaki bağı kurmak için;

$$X = \{0.1/ x_1, 0.8/ x_2, 1/ x_4\} \quad \text{ve} \quad Y = \{0.5/ y_1, 1/ y_2\}$$

aldığımızda,

$$R = \{ 1/(x_1, y_1) + 1/(x_1, y_2) + 0.7/(x_2, y_1) + 1/(x_2, y_2) + 0.5/(x_3, y_1) + 1/(x_3, y_2) \}$$

olacaktır. Eğer $X=x_1$ ve $Y=y_1$ seçilirse bu durumda

$$R(x_1, y_1) = 1 = T(p)$$

$$R(x_1, y_2) = 0.7 = T(p) \text{ olur.}$$

5.5.1.4 Şartlı ve Nitelendirilmiş Önergeler

Genel form olarak

$$p: \text{“Eğer } x, A \text{ ise, } y \text{’nin } B \text{ olması } S \text{’dir”} \quad (5.63)$$

şeklinde verilir.

Yukarıda incelediğimiz tiplerden hareketle doğruluk değeri;

$$T(p) = S(R(x, y)) = S(J(A(x), B(x))) \quad (5.64)$$

eşitliği ile belirlenir.

5.5.1.5 Nicelenmiş Önergeler

Klasik önermeler mantığında yüklemelerin nicelleştirilmesiyle bir genişleme yapıldığı gibi, bulanık mantıkta da bulanık niceleyiciler yardımıyla böyle bir genelleme yapmak mümkündür. Gerçekte bulanık önermelerde bulanık niceleyiciden kastımız bulanık sayılar olacaktır. İki tür bulanık niceleyiciden bahsetmek mümkündür. Birinci tür bulanık niceleyici, gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı ve “yaklaşık 10”, “100 den çok fazla”, “en azından yaklaşık 5” gibi dilsel terimler için kullanılan niceleyici türüdür. İkinci tür bulanık niceleyicimiz ise $[0,1]$ aralığı üzerinde tanımlı ve “neredeyse tamamı”, “yaklaşık yarısı” ve “çoğu” gibi dilsel değişkenleri karakterize ederler. Birinci tip niceleyicilere mutlak niceleyiciler, ikinci tür niceleyicilere ise izafi niceleyiciler denir.

Birinci tür bulanık niceleyicileri içeren bulanık önermelerin iki şekli vardır. Birinci şekilde olan bulanık niceleyici içeren önerme

$$p: \text{“} T \text{’da } F \text{ olan } V(i) \text{’ ler } Q \text{ kadardır”} \quad (5.65)$$

genel formu ile verilir. I bir indis kümesi olmak üzere, V bu indis kümesi üzerinde tanımlanmış bir fonksiyondur. F ise V 'nin aldığı değerler üzerinde tanımlı bir bulanık küme, Q da gerçel sayılar üzerinde tanımlanmış bir bulanık sayıdır. Örneğin;

“Koşu takımında yüz metreyi yüksek hızda koşan
koşucuların sayısı yaklaşık 10 dur”

önermesi alınabilir. Bu önermede;

I : Takımdaki koşucuların kümesi

$V(i)$: I kümesindeki her bir koşucunun yüz metreyi koşma hızı

F : yüksek terimini ifade eden ve V üzerinde tanımlanan bulanık küme

Q : “yaklaşık 10” terimine karşılık gelen bulanık sayı olarak belirlenir.

Bu formda verilen bir bulanık önerme daha basitleştirilmiş olarak;

$$p': "Q \text{ kadar } E \text{ vardır.}" \quad (5.66)$$

şeklinde yazılabilir. Q yukarıdaki önermeyle aynı anlamda kullanılmıştır. E ise I kümesi üzerinde verilen:

$$\forall i \in I, E(i) = F(V(i)) \quad (5.67)$$

bileşke fonksiyonudur. Bu durumda p önermesi

p' : “Koşu takımında yüz metreyi yüksek hızda koşan yaklaşık 10 koşucu vardır.” şeklinde de söylenebilir.

Bu yeni önerme de;

“Koşu takımında yüz metreyi yüksek hızda koşan koşucu”

ifadesi E bulanık kümesini oluşturur. Bu halde de tekrar p'' önermesi

$$p'': "W, Q' \text{ dur}" \quad (5.68)$$

şeklinde düzenlenerek en basit haliyle yazılabilir. Bütün bu yapılanlardan amaç, matematiksel hesabı daha basit bir şekle sokmaktır. W , E kümesinin kardinalitesi olarak hesaplanır ve

$$W = |E| = \sum E(i) = \sum F(V(i)) \quad (5.69)$$

olarak verilir. Son olarak p önermesinin doğruluk değeri p' 'nün doğruluk değerine eşittir ve

$$T(p) = T(p') = Q(|E| = W) \quad (5.70)$$

ile hesaplanır. Örneğin;

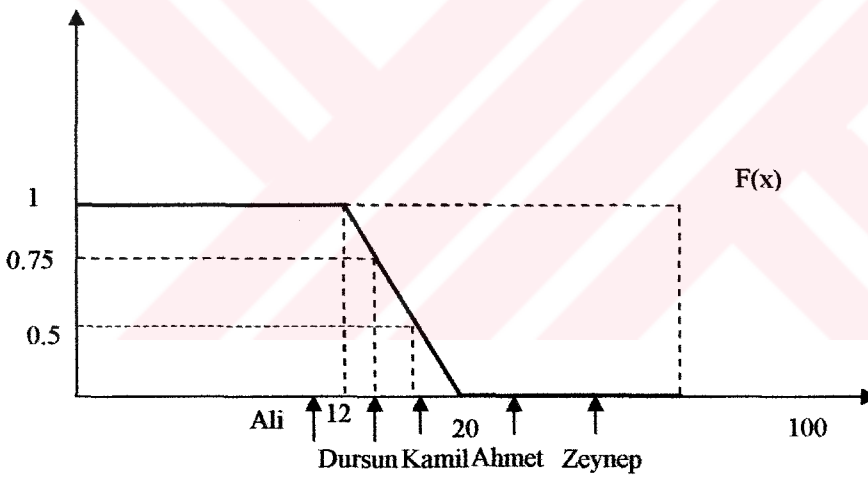
p:“Koşu takımında yüz metreyi yüksek hızda koşan yaklaşık üç koşucu vardır” önermesinin doğruluk değerini aşağıda verilenler altında inceleyelim.

Verilen sınıf olarak: $I = \{\text{Ahmet, Zeynep Ali, Dursun, Kemal}\}$ olsun.

Q : “Yaklaşık 3” bulanık sayısı

F: “yüksek koşma hızı” terimini oluşturan ve değerlerini $[0,100]$ aralığından alan bulanık küme olarak belirlenir. Öncelikle $\forall i \in I$ için $V(i)$ verilmiş veya hesaplanmış olmalıdır. Buna göre;

$V(\text{Ahmet}) = 22$ sn, $V(\text{Ali}) = 11$ sn, $V(\text{Dursun}) = 14$ sn, $V(\text{Kamil}) = 17$ sn $V(\text{Zeynep}) = 25$ sn olarak verilirse, aşağıda üyelik fonksiyonu verilen F bulanık kümesi altında, bu hız değerlerinin üyelik dereceleri belirlenebilir.

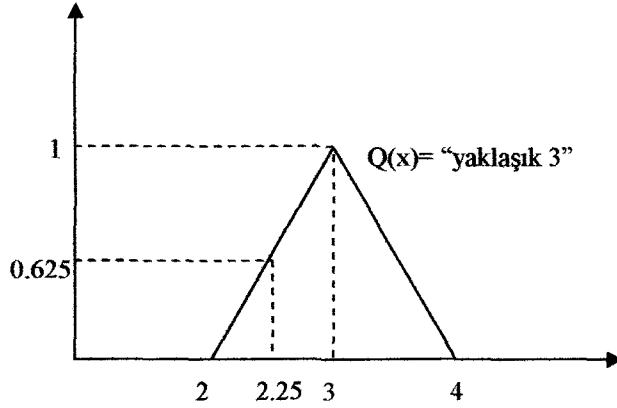


Şekil 5.19 “koşma hızı” kavramının “yüksek koşma hızı” durumuna karşı gelen üyelik fonksiyonu

$$E = \{1/\text{Ali} + 0.75/\text{Dursun} + 0/\text{Zeynep} + 0/\text{Ahmet} + 0.5/\text{Kamil}\}$$

(5.69) formülünden hareketle

$$|E| = \sum E(i) = 2.25 \text{ bulunur.}$$



Şekil 5.20 “yaklaşık 3” bulanık sayısının üyelik fonksiyonu

Son olarak p önermesinin doğruluk değeri; (5.70) ile birlikte

$$T(p) = Q(2.25) = 0.625$$

olarak hesaplanır. Diğer taraftan koşucuların hızları bilinmeseydi, E bulanık kümesi oluşturulamazdı. Fakat, önerme bize E'nin kardinalitesinin çeşitli değerler altında alabileceği değerleri sağlaması açısından yardımcı olurdu. Örneğin; $|E| = 3$ olması durumunda $Q(3) = 1$ olacağından önerme mutlak doğru olacaktır. Fakat, $|E| = 5$ ve $Q(5) = 0$ değerlerini alması durumunda ise, koşucuların 5'inin de yüksek hızda koştuğu sonucunun yanlış olduğunu söyleyebiliriz.

Birinci tipte bulanık niceleyici içeren bulanık bir önerme şu şekilde de olabilir;

$$p: "I \text{ da } V_1(i) F_1 \text{ ve } V_2(i) F_2 \text{ olan } i' \text{ ler } Q \text{ kadardır}." \quad (5.71)$$

Önerme, verilen elemanlar sınıfı üzerinde iki özelliği aynı anda taşıyan elemanların oluşturduğu bulanık sayıyı temsil etmektedir. Yukarıdaki nicelenmiş bulanık önerme tipine benzer olarak bu tip önermede de;

I : İndeks kümesi,

V_1 ve V_2 : Sırasıyla Y^1 ve Y^2 den değer alan değişkenler,

Q : Bir bulanık sayı.

F_1 ve F_2 : V_1 ve V_2 üzerinde tanımlı birer bulanık kümeyi temsil ederler.

Bu tipte bir nicelenmiş bulanık önermeye örnek olarak;

p : “Koşu takımında 100 metreyi koşma hızı yüksek ve genç olan koşucular yaklaşık 7 kişidir”

önermesi verilebilir. Bu önerme için;

I : Koşu takımının üyeleri,

V_1 ve V_2 : 100 metreyi ve genç kümelerindeki elemanları temsil eden değişkenler

Q : “yaklaşık 7” dilsel terimini ifade eden bulanık sayı

F_1 ve F_2 : “genç” ve “yüksek hız” terimlerini karakterize eden bulanık kümelerdir.

p önermesi daha sade bir biçimde;

p' : “ E_1 ve E_2 Q 'dur” şeklinde veya p' : “ W , Q 'dur” şeklinde basitleştirilmiş haliyle tekrar yazılabilir.

Bu önermeye karşılık gelen matematiksel ifadeyi de yukarıdaki önerme biçimindeki gibi $\forall i \in I$ için $E_1(i) = F_1(V_1(i))$ ve $E_2(i) = F_2(V_2(i))$ şeklinde yazabiliriz. Aynı şekilde W , yukarıdakine benzer bir biçimde hesaplanabilir. Burada yapılması gereken değişiklik, iki farklı özelliğin aynı anda istenmesi olacağından dolayı, W , E_1 ve E_2 'nin kesişimindeki üyelik derecelerinin toplamı olarak hesaplanır. Yani, F_1 ve F_2 bulanık kümelerinin her $i \in I$ için üyelik derecelerinin en küçüğü alınır. Bu açıklamalarla W ;

$$W = |E_1 \cap E_2| = \sum \min(E_1(i), E_2(i)) = \sum \min[F_1(V_1(i)), F_2(V_2(i))] \quad (5.72)$$

olarak hesaplanabilir. Bu halde, p önermesinin doğruluk değeri;

$$T(p) = T(p') = Q(W) \quad (5.73)$$

ile bulunur.

Şimdi ikinci tür bulanık niceleyici içeren nicelenmiş bulanık önermelere bakalım. Bunlar, belirli bir sayı vermekten ziyade “neredeyse tamamı”, “yaklaşık yarısı”, “çoğu” vb niceleyicilerdir. $[0,1]$ aralığındaki bulanık sayılarla temsil edilmeleri daha uygundur.

Genel form olarak;

$$p: “I'da ki $V_1(i)$ F_1 olan i 'ler arasında $V_2(i)$ F_2 olanlar Q kadardır”. \quad (5.74)$$

şeklinde verilir. Kısaca, önerme tipi; verilen bir elemanlar sınıfında belirli bir özelliği taşıyan elemanlar arasında diğer bir özelliği taşıyan elemanların sayısını ifade

etmektedir. $Q, [0,1]$ aralığında tanımlı bir bulanık sayı olmak üzere, diğer semboller daha önce tanımlanmış önerme çeşitlerindekiyle aynı anlama sahiptir. Örneğin:

p : “ Koşu takımında 100 metreyi yüksek hızda koşan koşucuların neredeyse tamamı, yüksek akıcılıkta ingilizce konuşmaktadır”

gibi bir önerme bu tür önerme şekline bir örnek teşkil edebilir. Daha önce yaptığımız gibi bu önerme de

p' : “ E_1 içinde Q kadar E_2 vardır” veya p' : “ E_1 içinde E_2 ler Q kadardır” şekillerinden biriyle yazılabilir. E_1 ve E_2 evrensel küme üzerinde;

$$E_1(i) = F_1(V_1(i)) \quad \text{ve} \quad E_2(i) = F_2(V_2(i)) \quad (5.75)$$

şeklinde tanımlanmışlardır. Bu eşitliklerle daha önce incelediğimiz niceleyici önerme tipi arasındaki farklılık, niceleyicinin anlamlarından kaynaklanmaktadır. Bulanık mantığın klasik mantık yaklaşımından farklı taraflarından birisi de, burada da görüldüğü üzere, önermelerin içeriklerini niceleyiciler de dahil olmak üzere ihmal etmemesidir. Daha önceki yorumlamalardan bu önermenin son olarak;

p' : “ W Q ’dur” biçiminde yazılabileceğini söyleyebiliriz. Burada W ;

$$W = |E_1 \cap E_2| / |E_1| = \sum \min[F_1(V_1(i)), F_2(V_2(i))] / \sum [F_1(V_1(i))] \quad (5.76)$$

ile hesaplanır. Önerme, anlam olarak belirli bir özelliğe sahip elemanların oluşturduğu kümeden, başka özelliğe sahip olanların sayısını verdiğinden ötürü formülün, E_1 kümesinin üyelik dereceleri toplamına bölme ile verildiğine dikkat edilmelidir.

p nin doğruluk değeri yine;

$$T(p) = T(p') = Q(W) \quad (5.77)$$

ile bulunur.

5.5.2 Dilsel Eşikler

Dilsel eşikler diğer terimleri bir bakıma anlamca farklılaştıran özel dilsel terimlerdir. Örneğin; çok, aşağı-yukarı, oldukça, çok aşırı gibi terimler dilsel eşikler olarak kabul edilir. Bunlar, bulanık yüklemeler, doğruluk niteleyicileri gibi önermelerin barındırdığı nitelikler üzerinde doğrudan etki yaparlar.

“Ahmetin şişman olduğu doğrudur” şeklinde alınan ve doğruluk niteleyicisi de “doğru” olarak kabul edilen bir bulanık önerme, “çok” dilsel terimi ile aşağıdaki şekillerde değiştirilebilir.

“Ahmet in çok şişman olduğu doğrudur”

“Ahmet in şişman olduğu çok doğrudur”

“Ahmet in çok şişman olduğu çok doğrudur”

Genelde; p: “ x F’dir” şeklinde verilen bir önerme ve E şeklinde ki bir dilsel eşikle değiştirilen bir önermeyi

$$Ep: “x EF dir” \quad (5.78)$$

şeklinde gösterebiliriz. Burada, EF, F yüklemine E eşiği uygulanarak elde edilmiş yeni bulanık yüklemi göstermektedir.

Dilsel eşiklerin klasik anlamda bir önermeye uygulanması mümkün değildir. Örneğin; “çok kare”, “çok dik üçgen” vb anlamlı şeyleri ifade etmemektedir.

E gibi bir eşik, karşılık geldiği dilsel terime uygun bir işlemle temsil edilir. Bu işlemin ne olacağı, uygulamalarda veya dil bilimi ve anlambilim çerçevesinde çalışılacak bir konudur.

Sözelimi “çok” gibi bir dilsel eşiğe $e(a)=a^2$ şeklinde bir işlem karşılık getirebiliriz. Yani, bir eleman “çok” eşiği altında yeniden yorumlanıyorsa üyelik, derecesinin karesi alınarak işleme sokulur. Aynı şekilde “oldukça” gibi bir eşik $e(a) = a^{1/2}$ şeklinde formüle edilebilir. Dilsel eşiklere karşı gelen bu fonksiyonlara, genel olarak düzenleyiciler denir.

X üzerinde verilen bir bulanık yüklem F, ve E eşiğini temsil eden e gibi bir düzenleyici verildiğinde, düzenlemeye uğramış yeni bulanık önermenin üyelik fonksiyonu;

$$\forall x \in X \quad \text{için} \quad EF(x) = e(F(x)) \quad (5.79)$$

ile verilecektir. Eğer $\forall a \in [0,1]$ için $e(a) < a$ ise, e eşiğine güçlü düzenleyici, $e(a) > a$ durumunda ise, e eşiğine zayıf düzenleyici denir. $e(a)=a$ durumu, birim düzenleyiciye karşılık gelir.

Güçlü düzenleyiciler uygulandıkları bulanık yüklemi kuvvetlendirirken, buna mukabil olarak önermenin doğruluk derecesini düşürürler. Zayıf düzenleyiciler ise tersine üyelik derecesini arttırırken, bulanık yüklemi zayıflatırlar.

5.5.3 Bulanık Çıkarım

Klasik mantıkta ve çok değerli mantıkta yapılan çıkarımlar, genelde totolojik önerme kalıpları olan *modus ponens*, *modus tollens* ve *hypothetical syllogism* adı verilen totolojiler üzerinde yapılır. Bunlar en önemli çıkarım kuralı olarak bilinirler. Bulanık mantıkta da bu çıkarım kuralları kullanılarak çıkarım teknikleri geliştirmek, yine bulanık küme, üyelik fonksiyonu ve bulanık bağıntılar yardımıyla yapılır.

5.5.3.1 Şartlı Bulanık Önermelerle Çıkarım

X ve Y gibi klasik iki kümenin bütün elemanları arasında $y=f(x)$ ile verilen bir ilişki sözkonusu olduğunda, verilen bir $x \in X$ değeri için f fonksiyonu altında x e karşılık gelen y değerini bulabiliriz. Aynı şekilde $A \subseteq X$ olan bir A kümesi içindeki her elemana karşılık gelen $y=f(x)$ şeklinde $B \subseteq Y$ olan bir kümeyi de

$$B=\{y \mid y=f(x), x \in A\} \quad (5.80)$$

ile ifade ederiz. Bu durumu biraz daha ilerleterek; $X \times Y$ çarpım kümesi üzerinde alınan bir fonksiyon olması gerekmeyen bir R bağıntısı tanımlamış olalım. Bu durumda, verilen bağıntı altında bir $x \in X$ elemanına karşılık gelen $\exists y \in Y$ ögesini, R sayesinde bulmak mümkündür. $A \subseteq X$ olmak üzere, $\forall x \in A$ için R verildiğinde A ya karşılık gelen $B \subseteq Y$ kümesi

$$B=\{y \mid \langle x,y \rangle \in R, x \in A \subseteq X\} \subseteq Y \quad (5.81)$$

ile verilebilir. Bütün bu incelenen durumların, verilen kümelerin ve bağıntının karakteristik fonksiyonları yardımıyla ifadesi mümkündür. χ_A , χ_B ve χ_R sırasıyla A, B ve R ye karşılık gelen karakteristik fonksiyonlar olmak üzere

$$\forall y \in Y, \chi_B = \max \min [\chi_A(x), \chi_R(x,y)] \quad (5.82)$$

ile verilir. İncelenmeyen durumlar da bu gösterime bağlı kalınarak kolayca çıkarılabilir. Bu bağıntı bize, A kümesi ve R bağıntısı verildiğinde, bu ikisinin yardımıyla B kümesini nasıl elde edebileceğimizin yolunu göstermektedir.

Yapılanın aslında mantıksal bir çıkarım olduğunu fark etmemiz, konu açısından önemlidir. Fonksiyonlar veya bağıntılar, mantıksal çıkarım yapısında verilen kurallara veya büyük öncül kısmına karşılık getirilebilir. Küme elemanları da elde edilen bulgular veya gerçekliğe ilişkin ölçümler sonucu oluşturduğumuz önermelerdir. Bu kural ve bulgular altında bulunabilecek sonuçlar, yine bunlar vasıtasıyla akıl yürütme ve çıkarım tekniklerini kullanarak yapılabilecek bir iştir.

Yapılan bu işlemleri bir adım daha ileri götürerek başlangıçta alınan küme ve bağıntılarımızı bulanıklaştırmayı deneyelim.

$R \subset X \times Y$ üzerinde tanımlı bulanık bir bağıntı olmak üzere, A' ve B' de sırasıyla X ve Y üzerinde tanımlı bulanık kümeler olsunlar. Eğer A' bulanık kümesi ve R bağıntısı verilmişse buradan;

$$\forall y \in Y, B'(y) = \sup_{x \in X} \min [A'(x), R(x,y)] \quad (5.83)$$

bağıntısıyla B' kümesini elde etmek mümkündür.

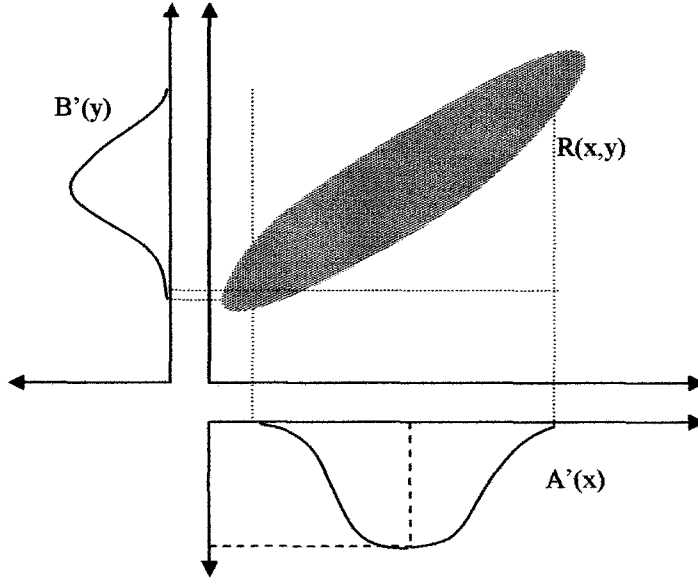
Klasik kümeler için karakteristik fonksiyon yardımıyla verilen eşitlik, bulanık kümelere üyelik fonksiyonu yardımıyla genelleştirilmiştir. R bağıntısı daha önceki bölümlerde açıklanan şartlı bulanık bir önermeyi temsil eder ve

$$p: \text{“Eğer } x, A \text{ ise } y, B' \text{dir”}$$

şeklindedir. Şartlı önermenin bulanık bir bağıntıya karşılık getirilecek uygun bir operatör ile

$$R(x,y) = J[A(x), B(y)] \quad (5.84)$$

tarzında verildiğini daha önceden biliyoruz. J burada da daha önceki gibi standart Lukasiewicz eşitliğine karşı getirilir. Uygulama ve çalışma alanına göre değişik tanımlamalar vermenin mümkün olduğunu burada bir kez daha hatırlatmakta fayda var.



Şekil 5.21 Çıkarımın bileşke kuralının grafik gösterimi

P önermesinden elde edilen R' 'yi ve q : “ x , A' ’dür” şeklinde verilen başka bir önerme kullanarak r : “ y , B' ’dür” şeklinde yeni bir önermeye ulaşabiliriz. Bu işleme klasik mantıkta *modus ponens* çıkarımı dendiğini biliyoruz. Burada ise çıkarım bulanık kümeler üzerinde tanımlandığından ötürü *genelleştirilmiş modus ponens* adını vereceğiz.

Genelleştirilmiş modus ponens çıkarımının genel formunu şu şekilde ifade etmek mümkündür; p verilen bir kural ve q da bir gerçeklik olarak düşünülürse;

Kural: Eğer x , A ise, y , B' ’dir.

Gerçek: x , A' ’dür _____

Sonuç: y , B' ’dür.

B' ’nün (5.84) formülüyle ve R bağıntısının da Lukasiewicz koşullu operatörü ile verildiğini biliyoruz. Burada, $A'=A$ ve $B'=B$ alınırsa, klasik anlamda *modus ponens*’in oluştuğunu gözlemledik. Bir örnek üzerinde yukarıda yapılanları inceleyelim;

$X=\{x_1, x_2, x_3\}$ ve $Y=\{y_1, y_2\}$ klasik kümeleri verilsin. A ile B de sırasıyla X, Y üzerinde tanımlı;

$A=\{0.5/x_1 + 1/x_2 + 0.6/x_3\}$ ve $B=\{1/y_1 + 0.4/y_2\}$ bulanık kümeler olsunlar.

Kuralımızın bu kümelere göre belirleneceğini biliyoruz. Şu halde standart

Lukasiewicz koşullu operatörü kullanılarak, “Eğer x, A ise, y, B’ dir” koşullu kuralını;

$$R(x,y) = \min [1, 1-A(x)+B(y)]$$

ile birlikte kullanılınca;

$$R(x,y) = \{ 1/(x_1,y_1)+0.9/(x_1,y_2)+1/(x_2,y_1)+0.4/(x_2,y_2)+1/(x_3,y_1)+0.8/(x_3,y_2) \}$$

buluruz.

$$A' = \{ 0.6/ x_1 + 0.9/ x_2 + 0.7/ x_3 \}$$

bulanık kümesiyle verilen ve bir ölçüm sonucu elde edilen önerme altında, “x, A’dır” önermesi için çıkarımımızı;

$$\begin{aligned} B'(y_1) &= \sup \min [A'(x), R(x,y_1)] \\ &= \max [\min(0.6,1), \min(0.9,1), \min(0.7,1)] \\ &= 0.9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B'(y_1) &= \sup \min [A'(x), R(x,y_2)] \\ &= \max [\min(0.6,0.9), \min(0.9,0.4), \min(0.7,0.8)] \\ &= 0.7 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda, “y B’ dür” sonucu;

$$B' = \{ 0.9/ y_1 + 0.7/ y_2 \}$$

olarak verilecektir. Diğer bir çıkarım şekli olan modus tollens çıkarım tipi, bulanık mantıkta genel form olarak;

Kural : Eğer x, A ise, y, B’ dir.

Gerçek: y B’ dür.

Sonuç : x A’ dür

şeklinde verilir. Bu durumda çıkarımın matematiksel ifadesi;

$$\forall x \in X, A'(x) = \sup_{y \in Y} \min [B'(y), R(x,y)] \quad (5.85)$$

eşitliği ile verilir. Burada R yine şarh bulanık bir önermeye karşılık gelen standart Lukasiewicz koşullu operatörü olmak üzere, sonuç önermesi bu yolla elde edilir.

Kümeler klasik olarak, $A' = \neg A$ ve $B' = \neg B$ seçildiğinde klasik modes tollens çıkarım şeklinin elde edildiğini görürüz.

Son olarak şartlı kıyas veya *hypothetical syllogism* adı verilen çıkarım tipinin bulanık şartlı önermeler altındaki genelleştirilmiş hali;

Kural 1: Eğer x , A ise y , B' 'dir.

Kural 2: Eğer y , B ise, z , C' 'dir.

Sonuç : Eğer x , A ise, z , C' 'dir.

şeklinde olacaktır. Genel formdaki x, y ve z sırasıyla X, Y ve Z kümelerinden seçilen elemanlara, A, B ve C de sırasıyla bu kümeler üzerinde tanımlanan bulanık kümelere karşılık gelir. Genel formda alınan her bulanık şartlı önerme için, bir bulanık bağıntı yardımıyla, çıkarımın bileşke kuralı verilir.

$$R_1(x, y) = J[A(x), B(y)] = \min [1, 1 - A(x) + B(y)],$$

$$R_2(x, y) = J[B(y), C(z)] = \min [1, 1 - B(y) + C(z)],$$

$$R_3(x, y) = J[A(x), C(z)] = \min [1, 1 - A(x) + C(z)]$$

Bu eşitlikler altında genelleştirilmiş şartlı kıyasın bileşik çıkarım kuralı;

$$R_3(x, y) = \sup \min [R_1(x, y), R_2(y, z)] \quad (5.86)$$

olarak verilir. Bu eşitlik aynı zamanda matris gösterim olarak

$$R_3 = R_1 \circ R_2 \quad (5.87)$$

Şeklinde de yazılabilir.

5.5.3.2 Nicelenmiş Bulanık Önermelerle Çıkarım

Daha önce nicelenmiş bulanık önermelerin hepsinin

$$p: "W, Q' \text{ dur}" \quad (5.88)$$

şeklinde ifade edilebileceğini görmüştük. Genelde nicelenmiş bir bulanık önermeden çıkarım yapma problemini şu şekilde ifade edebiliriz;

$$p_i: "W_i, Q_i' \text{ dir}" , i=1 \dots n \quad (5.89)$$

şeklinde verilmiş n tane nicelenmiş bulanık önerme olsun. Q_i 'lerin bir niceleyiciye ve W_i 'lerin de bu niceleyiciyle uyumlu bir değişken olduğunu biliyoruz. Şimdi; bu

nicelenmiş önermelerden ne gibi bir sonuç çıkartabileceğimiz sorusuna verilen cevaplardan birisi olan, niceleyiciyi genişletme prensibini verelim.

Bu kural ilk önce bu önermelerden çıkarım yaparak elde ettiğimiz önermenin genel formunu ifade ederek başlar;

$$P: "W, Q' \text{dur}" \quad (5.90)$$

önermesi sonuç önermesi olsun. Eğer,

$$f: R^n \longrightarrow R \text{ olmak üzere } W=f(W_1, W_2, \dots, W_n) \text{ ve } Q=f(Q_1, Q_2, \dots, Q_n)$$

koşullarını sağlayan bir f fonksiyonu varsa, bu durumda niceleyiciyi genişletme prensibi bize, P önermesinin p_i 'lerin bir sonucu olarak çıkabileceğini söyler. Burada f fonksiyonu ikinci bölümde verilen genişleme prensibiyle oluşturulan bir fonksiyondur. Örneğin;

$$p_1: "Odada yaklaşık 10 kişi var"$$

$$p_2: "Odada bulunanların yaklaşık yarısı çocuktur"$$

$$p : "Odada Q kadar çocuk vardır"$$

şeklinde bir çıkarımın geçerlilik denetlemesini bu yöntemle yapmak istiyoruz. Bu durumda Q yu belirlememiz gerekir. Bunu yukarıdaki verilen yöntemle başarabiliriz. Q_1 : "yaklaşık 10" ve Q_2 : "yaklaşık yarısı" şeklinde iki niceleyici tanımlayabiliriz. E ve F kümelerini de sırasıyla odadaki kişilerin kümesi ve odadaki çocukların kümesi olarak gösterelim. Bu durumda yukarıdaki çıkarımımızı şu şekilde formülee etmemiz mümkündür.

$$p_1: "W_1, Q_1' \text{dir.}"$$

$$p_2: "W_2, Q_2' \text{dir.}"$$

$$p: "W, Q' \text{dur.}"$$

$W_1 = |E|$, $W_2 = |E \cap F| / |E|$ ve $W = |F|$ 'ye karşı gelen değişkenler olacağını daha önce öğrendiklerimize dayanarak yazmamız gerektiği açıktır. W_1 , W_2 ve W arasındaki ilişkiyi ortaya koyan bir fonksiyon, bu değişkenlerin eşitlerine baktığımızda hemen açığa çıkacak kadar kolaydır.

$$f: R^2 \longrightarrow R, f(W_1, W_2) = W \text{ olacak şekilde;}$$

$$W=f(W_1, W_2) = W_1. W_2 \quad (5.91)$$

seçilebilir. Fonksiyonu bu şekilde seçmemiz gerçekten uygundur.

$$\begin{aligned} f(W_1, W_2) &= |E| \cdot |E \cap F| / |E| \\ &= |E \cap F| = |F| = W \end{aligned}$$

olarak gerçekleşir. Bulduğumuz bu fonksiyon aynı şekilde niceleyicilere de uygulanmalıdır.

$$Q = Q_1 \cdot Q_2$$

şeklinde verilen Q eşitliği, sonuç önermesindeki bulanık niceleyiciye karşılık gelen üyelik fonksiyonunu oluşturacaktır. O halde, Q, “yaklaşık yarısı” ve “yaklaşık 10” kavramlarına karşı gelen bulanık sayıların çarpılmasıyla elde edilir. Demek ki, P önermesinde verilen bulanık niceleyici bu şekilde verilmişse, çıkarımımızın geçerli olduğunu söyleyebilirim. Aksi takdirde bunu söylemek mümkün değildir.

Niceleyiciyi genişletme prensibi, diğer türdeki nicelenmiş bulanık önermelerden çıkarım yapabilecek şekilde genişletilebilir. Örneğin,

$$\begin{aligned} p_1: & \text{“E’nin } Q_1 \text{ kadarı F’dir.”} \\ p_2: & \text{“E ve F’nin } Q_2 \text{ kadarı G’dir.”} \\ p: & \text{“E’nin } (Q_1 \cdot Q_2) \text{ kadarı F ve G’dir”} \end{aligned}$$

formundaki bir çıkarım şeklinde de aynı prensipten faydalanabiliriz. Bu çıkarım şeklinde E, F ve G X üzerinde tanımlı bulanık kümeler ve Q_1 ile Q_2 de $[0,1]$ üzerinde tanımlı izafi niceleyicilerdir. $Q_1 \cdot Q_2$ ise bulanık iki sayının çarpımı olarak verilmiştir. Daha önceki nicelenmiş bulanık önermeler gibi, bu çıkarım tipinin genel formu da;

$$\begin{aligned} p_1: & \text{“} W_1, Q_1 \text{’dir.”} \\ p_2: & \text{“} W_2, Q_2 \text{’dir.”} \\ p: & \text{“} W, Q \text{’dur.”} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda;

$W_1 = |E \cap F| / |E|$, $W_2 = |E \cap F \cap G| / |E \cap F|$ ve $W = |F \cap E \cap G| / |E|$ şeklinde temsil edilecekleri açıktır. Bu bağıntıların, daha önce de gördüğümüz gibi önermelerin içeriklerinden elde edildiklerini hatırlatmakta fayda vardır. Niceleyiciyi genişletme prensibi kullanılarak seçilmesi gereken fonksiyonun yine;

$$W = f(W_1, W_2) = W_1 \cdot W_2$$

olduğu görülür. Sonuç,

$$\begin{aligned} f(W_1, W_2) &= |E \cap F| / |E| \cdot |E \cap F \cap G| / |E \cap F| \\ &= |F \cap E \cap G| / |E| = W \end{aligned}$$

işlemleriyle elde edilir. Bu forma bir örnek olarak;

p_1 : “Çoğu öğrenci gençtir”

p_2 : “ Genç olan öğrencilerin yaklaşık yarısı erkektir”

şeklindeki iki nicelenmiş bulanık önermeden,

p : “Öğrencilerin Q kadarı genç ve erkektir”

gibi bir çıkarımın geçerliliği, niceleyiciyi genişletme prensibi kullanılarak tesbit edildikten sonra, sonuç önermesinin doğruluk değeri, “çoğu” ve “yaklaşık yarısı” terimlerine karşılık gelen bulanık sayıların çarpılmasıyla elde edilir. Yine çıkarımın geçerli olabilmesi için bu kurallar altında, sonuç önermesinde kullanılan Q bulanık niceleyicisinin $Q = Q_1 \cdot Q_2$ şeklinde verilmesi gereklidir. Aksi takdirde, çıkarımın geçerli olduğunu söyleyemeyiz.

6. BULANIK DEĞİŞKENLER ALTINDA ULAŞTIRMA PROBLEMİNİN OPTİMİZASYONU

Günümüz dünyasının karmaşık yapısı modern işletme problemlerinin de karmaşıklaşmasına yol açmıştır. Problemlerin çözümü için geliştirilecek karar süreçleri de bu karmaşıklıkla doğru orantılı olarak artmaktadır. İşletmelerin bütün yapısını etkileyebilecek nitelikte kararların verilmesi gerektiğinde, yönetici mekanizma elbette çok dikkatli davranmak isteyecek ve en iyi kararın verilmesi için gerekli imkanları seferber edecektir. Örneğin; piyasaya yeni bir mal sunmaya hazırlanan bir firma, piyasa durumu, ürün için gerekli fonun sağlanabilmesi, ürünün pazardaki fiyatının belirlenmesi, pazarlama sürecinde ele alınacak faktörler gibi değişkenlerin her birini karar mekanizması içinde değerlendirecek ve yapacağı eylemin yönünü bunlara göre tayin edecektir. Eylemin yönünün tayin edilmesi olarak adlandırılabilir bu süreçte, bütün değişkenleri kesin olarak tespit etmek ve tüm elverişli karar seçeneklerinden beklenen sonuçları belirlemek her zaman mümkün olmaz. Bu noktada en iyi eylemi tespit edebilmek için, bilimsel yöntemler kullanılmalıdır. İşte, eylemin yönünün araştırılması olarak da adlandıracağımız bu süreç. yöneylem araştırması, nicel karar verme gibi alanların doğmasına yol açmıştır.

II. Dünya Savaşı sırasında A.B.D ve İngiltere'nin askeri alanlarda kullanmak üzere geliştirilen ilk yöneylem araştırması, savunma sistemlerinden daha etkin bir şekilde faydalanmayı amaçlıyordu. Daha sonraki yıllar yöneylem araştırmasında ve bu alanda kullanılabilecek tekniklerin geliştirilmesinde büyük patlamalara sahne oldu. G. Dantzig (1940) ve Kantorovich (1947) birbirinden bağımsız olarak doğrusal programlama problemlerinin genel çözümlerini elde ettiler. Daha sonra G. Dantzig lineer programlama problemlerinin daha gelişmiş bir çözüm yöntemi olan simpleks yönteminin ilk örneğini oluşturdu. Doğrusal veya lineer programlama bugün yöneylem araştırmalarında en çok kullanılan yöntemdir. [30,32]

Yöneylem araştırması (operational research), adından da anlaşılabilir gibi eylemin yönünün araştırılmasıdır. Kıt kaynakların dağıtımını gerektiren koşullar

altında, bir sistemin en iyi nasıl tasarlanması ve işletilmesi gerektiğini araştıran bilimsel yaklaşımdır.

Elde bulunan kaynakların maksimum kar veya minimum maliyet gibi amaçlar için nasıl kullanılması gerektiğine karar vermek şeklinde de özetlenebilir. Bu süreç öncelikle problemin dikkatli bir şekilde tanımlanması ve formüle edilmesiyle başlar. Tanımlama kısmı sistemin amaçlarını ve kısımlarını belirlemeyi kapsar. Probleme etki eden parametreler belirlenir. Daha sonra gerçek problemin soyutlanmış bir şekli olan bir matematiksel modelin inşa edilmesiyle devam eder. Karar verici, bu modelin gerçek problemin doğru bir temsili olup olmadığını denetleyen testler yapar. Modelden bir çözüm üretme işlemini, amacı en iyi şekilde karşılayan seçeneğin seçilmesi takip eder. Çözümün ve çözüm sonucunda varılan kararın değerlendirilmesi sonucu, yönetici mekanizma bu süreçlerin tekrar kontrol edilmesi veya ulaşılan sonucun uygulanması gibi bir karara varır. Bir yöneylem araştırmasında varolan süreçler kısaca böyle özetlenebilir. Fakat, problemlerin doğası gereği, standart olarak izlenebilecek bir işlem yolunun oluşturulması mümkün değildir.

6.1 KLASİK LİNEER PROGRAMLAMA

Bu süreç içerisinde problemin matematiksel modelinin oluşturulması işleminde kullanılacak bir çok teknik mevcut olmasına karşın, bunlardan en çok kullanılanı doğrusal programlama modelidir.

Kıt kaynakların mevcut faaliyetler için mümkün olan en uygun şekilde dağıtımını hedefler. Gerçekleştirilmek istenen amaç, lineer bir fonksiyonla ifade edilir. Problemin yapısı gereği, amaç fonksiyonunun mevcut sınırlamalar altında enbüyüklenmesi (maksimizasyon) veya enküçüklenmesi (minimizasyon) istenir. Sınırlamalar veya kısıtlar ise, mevcut olan kıt kaynaklar hesaba katılarak oluşturulan lineer eşitsizliklerden oluşur.

Herhangi bir lineer programlama modeli genel olarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir veya bu şekle dönüştürülebilir;

$$\begin{aligned}
\text{Maksimum} \quad & Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\
\text{Kısıtlayıcılar} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\
& (6.1) \\
& x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n
\end{aligned}$$

Genel formu bu şekilde verilebilecek olan bir lineer programlama modelinde; Z enbüyüklenecek veya probleme bağlı olarak enküçüklenecek olan amaç fonksiyonunu temsil etmektedir. Amaç fonksiyonunda yer alan c_j katsayıları kar veya maliyet katsayıları ve x_j değişkenleri de belirlenmesi gereken karar değişkenleri olarak adlandırılırlar. Amaç fonksiyonun altında yer alan ve eşitsizlik halinde verilmiş olan lineer eşitsizlik takımı ise, amacın hangi kısıtlar altında gerçekleştirileceğini tanımlayan kısıt fonksiyonlarıdır. Kısıt fonksiyonlarında yer alan a_{ij} katsayıları bir birim j ürünü üretmek için kaynak i den ne kadar kullanılması gerektiğini gösterir. b_i katsayıları ise elde varolan kaynak miktarının ifadesidir. Son olarak da, karar değişkenleri üzerinde yer alan negatif olmama koşulu verilmiştir. Karar değişkenlerinin gerçek dünyada anlam bulabilmesi, onların negatif olmama koşulu ile sağlanabilir. Bir lineer programlama modelinin amacı, Z fonksiyonunu en büyüleyecek veya en küçükleyecek x_j değerlerinin bulunmasıdır. Bütün kısıt koşullarını sağlayan x_j değerlerinin oluşturduğu küme, uygun çözüm kümesini teşkil eder. Uygun çözüm kümesindeki değerlerden amaç, fonksiyonunu en büyüleyen x_j değerleri, optimal çözüm olarak adlandırılır. Böyle bir çözüm tek olabileceği gibi birden fazlada olabilir veya hiç olmayabilir.

Amaç fonksiyonunu enbüyükleyecek veya enküçükleyecek optimal çözümü bulmak için kurulan bir lineer programlama problemi, grafiksel yöntemle veya G.R.Dantzig tarafından geliştirilen simpleks yöntemiyle elde edilebilir. Grafiksel çözüm en fazla üç değişkenli problemlerin çözümü için elverişli olduğu halde, simpleks yöntemi gerçek uygulamalarda karşımıza çok boyutlu olarak çıkan sistemlere cevap vermede uygulanır. Yöntem cebirsel tekrarlama (iterasyon) olarak da adlandırabileceğimiz bir algoritmayla verilebilir. Öncelikle bir başlangıç simpleks tablosu düzenlenir ve daha sonra tekrarlayıcı işlemler ile belirli bir hesap yöntemi içinde gelişen çözümlere doğru ilerleyerek, optimal çözüme ulaşıncaya kadar işlemler sürdürülür[30,33].

Tekrarlanan tablolar amaç fonksiyonunun ve karar değişkenlerinin aldığı değerleri gözleme imkanı verirler.

6.2 BULANIK LİNEER PROGRAMLAMA

Lineer programlama yöntemi, optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılan başlıca araç olmasına karşın, her tür probleme cevap verebilecek yapıda değildir. Bunların en başında, içinde kesin ve güvenilir bilgiye dayanmayan problemlerin modellenmesi gelir. Çünkü lineer programlama modeli, çok iyi tanımlanmış ve kesin verileri kullanmayı gerektirir. Ancak böyle bir bilginin elde edilmesi her zaman mümkün olmadığı gibi, olduğu durumlarda bile işletmelere olan maliyeti çok yüksektir. Zaten gerçek dünyaya ait uygulamalarda da bu şekilde güvenilir, kesin, ve tam bilgiler beklemek aldatıcıdır[34]. Bu yüzden lineer programlamanın yapısını belirsiz ve eksik bilgi altında çözülmesi gereken problemler içinde uygun bir hale getirme, onun uygulamalardaki etkisini ve gücünü arttıracaktır. Hem problemin tanımlanması aşamasında gerekli olan bilgi maliyetini azaltmak, hem de bu bilginin oluşturacağı gerçek olmayan modellemeler yapmaktan kaçınmak için, bulanık lineer programlama modeli kullanılabilir.

Bulanık bir sistem, karar vericinin herhangi bir ek maliyet oluşturmadan, hemen o an elinde bulunan bilgiyle bile modellenebilecek bir yapıdadır. Bu sisteme karşı gelen ilk çözüm bilindiği takdirde, karar verici ek bir bilginin gerekip gerekmediğini algılayabilir, ek bilginin getireceği fayda maliyet analizini yapabilir ve kararı da buna göre değerlendirebilir. Bu şekilde, adım, adım karşı gelen çözümler geliştirilerek sonuca gidilir[34].

En genel şekliyle bulanık değişkenler altında oluşturulacak bir bulanık lineer programlama modeli şu şekilde verilir;

$$\begin{aligned} \text{Maksimum} \quad & Z = \sum_{j=1}^n C_j x_j \\ \text{Kısıtlayıcılar} \quad & \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j \prec B_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & (6.2) \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

A_{ij} , B_i , C_j katsayıları gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı bulanık kümelerdir. Değişkenler arasındaki aritmetik işlemler de, bulanık aritmetik işlemlerine karşılık gelir. $\prec$ sembolü bulanık kümeler arasındaki sıralama veya dilsel bir yorumlama olarak hemen hemen küçük veya eşit olarak değerlendirilir. Burada, bulanık kümeler arasında sıralama yapmanın ve bu şekilde tanımlı dile ait bir kavrama, matematiksel bir ifade karşılık getirmenin yolları üzerinde durmayacağız.

Genelde, bulanık lineer programlama modeli, ilk önce ona karşılık gelen klasik lineer programlama modelini oluşturmak suretiyle bir bakıma bulanıklıktan kurtarılır ve daha sonra da yukarıda da kısaca bahsettiğimiz standart yöntemlerle (grafik yöntem, veya simpleks) bu klasik problem çözülür.

Genel formda ifadesi verilen bulanık lineer programlama modeli katsayılardan bazılarının bulanık, bazılarının normal olması durumuna göre bir kaç değişik şekilde ele alınabilir. Fakat, çözüm için geliştirilen yaklaşımların özü, bulanıklığı giderilerek klasik çözüme dönüştürmek şeklindedir.

Sadece amaç fonksiyonunun bulanık olduğu bulanık modeller oluşturulabileceği gibi, bazı kısıtlayıcıların bulanık, bazılarının klasik şekilde verildiği sistemlerle, yalnız kısıtlayıcı eşitsizliklerinin sağ tarafındaki kaynak kapasitesine karşılık gelen B_i katsayılarının bulanık verdiği durumlar ortaya çıkabilir.

Biz burada sadece bir sonraki bölümde ele alacağımız, bulanık değişkenler altında ulaştırma probleminin gerektirdiği biçimde son durumun, yani kaynak veya talep kapasitesine karşılık gelen katsayıların bulanık olduğu durumun çözümünü incelemekle yetineceğiz.

Bu durumda böyle bir lineer programlama modeli şu şekilde ifade edilir;

$$\begin{aligned}
 \text{Maksimum} \quad & Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\
 \text{Kısıtlayıcılar} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \prec B_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 & (6.3) \\
 & x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

B_i bulanık katsayılarını temsil edecek olan üyelik fonksiyonlarını atarken karar verici, probleme uygun verilere karşılık gelen bir üyelik fonksiyonu araştırmalıdır. B_i 'ye atanacak olan üyelik fonksiyonları arasında en çok tercih edilenler lineer ve konkav olanlardır. B_i 'ye atanacak fonksiyonu şu şekilde belirleyelim; $x \in \mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesi olmak üzere,

$$B_i(x) = \begin{cases} 1 & , x \leq b \\ \frac{b_i + p_i - x}{p_i} & , b_i < x < b_i + p_i \\ 0 & , b_i + p_i \leq x \end{cases}$$

(6.4) olsun. Karar değişkenlerinin oluşturacağı n boyutlu $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektörünün i . kısıtlayıcıyı sağlama derecesi;

$$D_i(x) = B_i\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right) \quad (6.5)$$

ile verilir. Bütün B_i 'lere karşı gelen D_i kümelerinin kesişimi bize, klasik yaklaşıma benzer olarak uygun çözüm kümesini verecektir. O halde; uygun çözüm kümesi;

$$\bigcap_{i=1}^m D_i \quad (6.6)$$

şeklinde oluşur. Bundan sonraki aşama ise, bu çözüm kümesi içerisinde amaç fonksiyonunu enbüyükleyecek veya enküçükleyecek olan optimum çözümün seçilmesi işlemidir.

Kısıt değerleri bulanık olduğundan dolayı, amaç fonksiyonu tolerans aralığı dediğimiz $[b_i, b_i+p_i]$ 'ye karşılık gelen değerlerden birinde en büyük değerini alacaktır. O halde, bu aralığın uç noktalarının belirlediği amaç fonksiyonu değerleri, amaç fonksiyonunun üyelik fonksiyonun oluşturulmasındaki parametreler olarak alınmalıdır. Yani, optimal değerlerin en küçüğü bu aralığın sol tarafındaki değer, en büyüğü ise sağ tarafındaki değer tarafından belirlenir. Matematiksel olarak optimal değer aralığını belirlemek, klasik bir lineer programlama problemine karşılık gelecektir:

$$\begin{array}{ll}
\text{maks} & z_l = cx \\
\text{kısıt} & \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \\
& x_j \geq 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
\text{maks} & z_u = cx \\
\text{kısıt} & \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i + p_i \\
& x_j \geq 0
\end{array}$$

(6.7)

Optimal değerlere karşılık gelen bulanık küme ise, bu alt ve üst optimal değerlerle birlikte;

$$G(x) = \begin{cases} 1 & , z_u \leq cx \\ \frac{cx - z_l}{z_u - z_l} & , z_l \leq cx \leq z_u \\ 0 & , cx \leq z_l \end{cases}$$

(6.8)

şeklinde belirlenir. Aslında problemi, kısıt ve amaç fonksiyonlarını aynı anda sağlayan, en yüksek üyelik derecesine sahip karar değişkeninin değerini bulmak, şeklinde özetleyebiliriz. Başka bir deyişle biçimsel olarak problem;

$$\text{maks} \quad \left[\left(\bigcap_{i=1}^m D_i \right) \cap G \right]$$

(6.9)

tarzında ifade edilebilir. Amaç fonksiyonunu en büyükleyecek olan x değerine karşılık gelen en büyük üyelik derecesine λ denirse, artık λ 'yı bulmak, başta da söylendiği gibi klasik bir optimizasyon problemidir. Elbette λ 'nın bulunması kısıt ve amaç fonksiyonlarının üyelik fonksiyonlarını kullanmak yoluyla elde edilir.

$$\begin{array}{ll}
\text{maks} & \lambda \\
\text{kısıt} & \lambda(z_u - z_l) - cx \leq -z_l \\
& \lambda p_i + \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i + p_i \quad (i = 1 \dots m) \\
& \lambda \in [0,1] , x_j \geq 0 \quad (j = 1 \dots n)
\end{array}$$

(6.10)

Tekrar edersek, 6.10 denklem sisteminin bize söylediği; kısıt ve amaç fonksiyonlarını birlikte sağlayan optimal x değerine karşılık gelen üyelik derecesinin bulunması gerektirir. Bize gereken bu üyelik değerine karşılık gelen değerlerin de

kolayca elde edilebilir olmasıdır. Bu sistem artık klasik anlamda bir lineer programlama problemi olduğundan dolayı simpleks yöntemiyle rahatlıkla çözülebilir[31,34].

6.3 ULAŞTIRMA PROBLEMİ

Ulaştırma problemi lineer programlama probleminin özel bir türüdür. Belirli bir kaynakta üretilen malların minimum maliyetle belirli hedeflere taşınması problemin özünü oluşturmaktadır. Maliyet minimuma indirilmeye çalışılırken, hedefin talebi ile kaynağın arzı, ya da sunumu arasındaki ilişki, eşitlik şeklinde değerlendirilir. Bu aynı zamanda kısıt koşullarının da belirlenmesi anlamına gelir.

Ulaştırma probleminin klasik bir lineer programlama modeli olarak ele alınıp, simpleks algoritmasıyla çözülebilmesine karşın, sadece ulaştırma problemlerini çözmek amacıyla geliştirilmiş başka yöntemler de vardır. Bu yöntemlerin genel karakteri, uygun bir başlangıç çözümü bulduktan sonra bu çözümü diğer tekniklerle iyileştirme yoluna gitmek şeklinde özetlenebilir. Başlangıç çözümü bulmak için kullanılan yöntemler arasında; Kuzey-Batı Köşe yöntemi, En Az Maliyetli Gözeler yöntemi, Vogel yaklaşım yöntemi gibi teknikler sayılabilir[30]. Bu çözüm, atlama taşı veya çoğaltan yöntemi kullanılarak, optimal çözüm bulunana kadar iyileştirilmeye çalışılır. Burada, bu yöntemlerin ayrıntısına girmeyeceğiz. Bu yöntemler bulanık değişkenler altında da çözüm verecek şekilde düzenlenebilmelerinin mümkün olduğu bilinmelidir.

m sayıda üretim merkezinin ve n sayıda tüketim merkezinin olduğu bir ulaştırma problemi, sunum ve talep değerlerinin bulanık olduğu bir durumda yukarıda verilen yöntemle çözülebilir. Önce genel olarak bir ulaştırma probleminin matematiksel yapısını tanımlamakla işe başlayalım;

i 'inci üretim merkezi a_i kadar malı üretebilirken, j 'inci tüketim merkezi de b_j kadar mal talebinde bulunuyor olsun. i . üretim merkezinden, j . tüketim merkezine gönderilen bir birimlik mal miktarının maliyetini c_{ij} ile gösterelim. Bu durumda, ulaştırma problemi;

$$\min \quad Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i = 1 \dots m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j = 1 \dots n$$

(6.11)

şeklindeki lineer programlama formülasyonu ile ifade edilebilir. x_{ij} katsayıları, i . üretim merkezinden, j . tüketim merkezine gönderilen mal miktarına karşılık gelir. Toplam taşınan mal miktarının maliyetinin, hangi taşıma programı çerçevesinde enküçükleneceğine ilişkin çözüm, istenilen optimal çözümdür. Birinci kısıt; istenen mal miktarının, sunulan mal miktarı ile sınırlandırılması gerekliliğini, ikinci kısıt ise üretilen mal miktarının, toplam talebe eşit olması gerekliliğini ifade eder. Sistemin dengede kalması ve uygun bir çözümün mümkün olması, ancak toplam talebin toplam arzı eşit olduğu durumda mümkündür. Fakat, eşit olmadığı durumlarda problemin yapısına göre hayali bir üretim veya tüketim merkezi oluşturularak sistemin dengeye oturması sağlanır.

6.4 UYGULAMA

X şirketinin C_1 , C_2 şeklinde iki üretim merkezi vardır. F_1 , F_2 firmaları da X şirketinden mal talep etmektedirler. C_1 merkezinin üretim miktarı günlük olarak en az 200 birimdir ve bu miktar hammadde ve işgücünün durumuna göre 300 birime kadar çıkartılabilir. Aynı şekilde, C_2 merkezi, günlük en az 150 birim mal üretmekte ve bu yine aynı sebeplerden ötürü 200 birime kadar da çıkabilmektedir. F_1 firmasının günlük mal talep miktarı 250 birimdir. Fakat firma piyasada kendisinden istenen perakende talep miktarına göre bu miktarı 300 birime kadar çıkarabilmektedir. F_2 firması da günlük en az 100 birim mal talep etmekte ve bunu 200 birime kadar artırabilmektedir. Tablo 6.1 merkezlerle firmalar arasındaki birim mal başına taşıma maliyetini göstermektedir.

Tablo 6.1 Merkezlerle firmalar arasındaki birim taşıma maliyeti (TL)

Tüketim Merkezi Üretim Merkezi	F_1	F_2
C_1	10	8
C_2	6	7

Merkezlerden firmalara taşınacak malın toplam maliyetinin enküçüklenmesi istenmektedir.

Üretim merkezleriyle tüketim merkezleri arasındaki ilişkiyi gösterecek bir tablo problemi formüle etmemizde bize yardımcı olacaktır.

	F_1	F_2	Sunum miktarı
C_1	10 x_{11}	8 x_{12}	$\tilde{C}_1$
C_2	6 x_{21}	7 x_{22}	$\tilde{C}_2$
Talep miktarı	$\tilde{F}_1$	$\tilde{F}_2$	$\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 = \tilde{F}_1 + \tilde{F}_2$

Sunum ve talep miktarları değişken, yani kesin olmayan verilerden oluşmaktadır. Bu durumda, herbir merkezin üretim ve talep miktarına karşılık bir bulanık üyelik fonksiyonu oluşturularak bunun üzerinden problem çözülebilir.

Amaç fonksiyonu;

$$\text{Min } Z = 10x_{11} + 8x_{12} + 6x_{21} + 7x_{22}$$

şeklinde belirlenir.

Kısıtlar ise;

$$\begin{aligned}x_{11} + x_{12} &\leq \tilde{C}_1 \\x_{21} + x_{22} &\leq \tilde{C}_2 \\x_{11} + x_{21} &\geq \tilde{F}_1 \\x_{12} + x_{22} &\geq \tilde{F}_2 \\x_{ij} &\geq 0\end{aligned}$$

ile verilir. Bulanık üretim ve talep miktarlarına karşılık gelen üyelik fonksiyonları aşağıda tanımlanmıştır.

$$\tilde{C}_1(x) = \begin{cases} 1 & , x \leq 200 \\ \frac{300-x}{100} & , 200 < x < 300 \\ 0 & , 300 \leq x \end{cases} ,$$

$$\tilde{C}_2(x) = \begin{cases} 1 & , x \leq 150 \\ \frac{200-x}{50} & , 150 < x < 200 \\ 0 & , 200 \leq x \end{cases}$$

$$\tilde{F}_1(x) = \begin{cases} 1 & , x \leq 250 \\ \frac{300-x}{50} & , 250 < x < 300 \\ 0 & , 300 \leq x \end{cases} ,$$

$$\tilde{F}_2(x) = \begin{cases} 1 & , x \leq 100 \\ \frac{200-x}{100} & , 100 < x < 200 \\ 0 & , 200 \leq x \end{cases}$$

Oluşturulan bu üyelik fonksiyonları kullanılarak amaç fonksiyonunun alacağı alt ve üst değerler belirlenmelidir. Bunun için oluşturulmuş klasik lineer programlama problemi aşağıdaki gibi tanımlanır; amaç fonksiyonunun alacağı alt değere Z_l üst değere de Z_u denirse,

$$\text{Min } Z_l = 10x_{11} + 8x_{12} + 6x_{21} + 7x_{22}$$

$$\text{kısıt } x_{11} + x_{12} \leq 200$$

$$x_{21} + x_{22} \leq 150$$

$$x_{11} + x_{21} \geq 250$$

$$x_{12} + x_{22} \geq 100$$

$$x_{ij} \geq 0$$

$$\text{Min } Z_u = 10x_{11} + 8x_{12} + 6x_{21} + 7x_{22}$$

$$\text{kısıt } x_{11} + x_{12} \leq 300$$

$$x_{21} + x_{22} \leq 200$$

$$x_{11} + x_{21} \geq 300$$

$$x_{12} + x_{22} \geq 200$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Simpleks yöntemini kullanarak çözüm yapan LINDO paket programı ile bu alt ve üst sınırlar;

$$Z_l=2700 \text{ ve } Z_u=3800$$

olarak elde edilir,

Bu sonuçlar amaç fonksiyonunun enküçüklenmesini sağlayan en yüksek üyelik derecesine sahip karar değişkenlerinin değerlerini ve bu üyelik derecesini bulmayı sağlayan (6.10) denkleminde yerine konulursa;

$$\text{maks } \lambda$$

$$\text{kısıt } \lambda(3800 - 2700) - (10x_{11} + 8x_{12} + 6x_{21} + 7x_{22}) \leq -2700$$

$$100\lambda + x_{11} + x_{12} \leq 300$$

$$50\lambda + x_{21} + x_{22} \leq 200$$

$$50\lambda + x_{11} + x_{21} \geq 300$$

$$100\lambda + x_{12} + x_{22} \geq 200$$

$$\lambda \in [0,1] , x_{ij} \geq 0$$

formülasyonu elde edilir. Klasik lineer programlama modeli olan bu formülasyon simpleks metodunu kullanan LINDO 6.1 paket programı ile çözülmüş ve

$$\lambda = 0.68$$

bulunmuştur. Merkezler arasında bu üyelik derecesine karşılık gelen, taşıma birimleri;

$$X_{11}=232 \quad X_{12}=0$$

$$X_{21}=34 \quad X_{22}=132$$

şeklinde oluşacaktır. O halde, X şirketi, bulanık değişkenler altında oluşacak olan toplam taşıma maliyetini enküçüklemek için bu değerleri kullanmalıdır.



SONUÇ

Klasik mantığın yeterliliği ve mantık ilkelerinin temelleriyle ilgili problemler yüzyıllardan beri mantık ve felsefe içerisindeki konumunu korumakta, bugün bile hala tartışma sürmektedir. Bunun yanı sıra, yine bu problemlerin bir uzantısı durumunda olan alternatif mantık sistemleri ve bunların sonuçları ile ilgili değerlendirmeler ise daha geçen yüzyılda ortaya çıkan bir konudur. Tezin başından beri bu problemlerin bir kısmına çeşitli başlıklar altında değinmiştik. sonuç bölümünü ise yukarıda sayılan problemlerle ilgili söylenilenlerin bir kısmını gözden geçirerek ve bunlardan tezimizin kapsamı içinde olanların değerlendirmesini yaparak bitirmeyi hedefliyoruz. Zira bu konu üzerine yapılan tartışmaları bütünüyle ele almak felsefenin, mantığın, bilgi teorisinin, dil çalışmalarının ve özellikle de bilim felsefesinin tamamının gözden geçirilmesini gerektirecek ölçüde büyük çaplı bir çalışmayı ister.

Aklın ilkeleri olarak da nitelenen üç kanun, Aristo ve onun çizgisinde olan filozoflar tarafından aynı zamanda varlığın da ilkeleri olarak kabul görmektedir. Böyle bir varsayım aklın gerçekliği bir ayna olarak yansıttığı inancı üzerine temellendirilmiştir. Bu görüşe göre, varlığın temel ilkeleri olarak mantık yasaları evrenseldir, tüm olup bitenlere uygulanırlar ve doğayı inkar etmeksizin bunları inkar etmeye olanak yoktur[37].

O halde, bu anlayış çerçevesinde alternatif mantık sistemlerinin yerinin bulunamayacağını ve tek bir doğru mantık sisteminin olduğu sonucunu çıkartabiliriz. Deneye ve gözleme dayalı yeni bilim anlayışının gelişmesiyle birlikte bu görüş geçerliliğini yitirmeye başlamıştır. Bu ilkeler yine düşüncenin yasaları kabul edilmekle beraber varlığın yasalarıyla özdeş tutulmuyorlardı. Örneğin, I. Kant mantık ilkelerini ve en genelinde zihin ilkelerini varlık yasaları olarak görmenin büyük bir yanılgı içerdiğini söylüyordu[1]. Kant için mantık ilkeleri, olgular dünyasından elde edilen bilginin düzenleyici koşulları olarak, yalnızca bizde doğuştan varolan a priori ilkelerdir. Empirist akım içerisinde yer alan düşünürler de, I. Kant gibi onların varlığın yasaları olmadığını kabul etmekle birlikte bunların a

priori değil, yaşantı sonrası deneyimlerle kazanılmış a posteriori ilkeler olduğunu iddia ediyorlardı[37].

Varlığın yasalarını düşüncenin kanunları olarak gören rasyonalist anlayış için, mantıksal açıdan çelişki içeren bir gözlemin olanaksızlığı ortadadır. Örneğin hem ağaç hem de ağaç değil diyebileceğimiz bir nesne düşünebilir miyiz?. Denebilir ki, bir nesne kimi yönlerden ağaç kimi yönlerden ise başka bir şey olabilir. Doğru ama bu nesnenin aynı yönden hem ağaç hem de başka bir şey olmasına olanak var mıdır. Tersine, bir şey ya ağaçtır ya da ağaç değildir genellemesini yanlışlayacak bir gözlem nasıl bir gözlemdir? Bir nesnenin hem ağaç hem de başka bir şey olmasındaki olanaksızlık dilsel ya da tanım gereği bir olanaksızlık değil düpedüz gerçekliğe ters düşmesi nedeniyle ortaya çıkan bir olanaksızlıktır. Fakat, mantık yasalarının kaynağına ilişkin bir şey ortaya koymamaktadır. Koyabilmesi de zaten böyle bir anlayış içerisinde mümkün değildir. Çünkü, mantık ilkelerinin ispatı yine kendilerinin kullanımını gerektireceğinden dolayı, döngül bir ispata dönüşür. Bu ilkelerin dışında kalan ilkelerle bunları ispatlamaya çalışmak ise kendileriyle bir çelişki oluşturur[37].

Mantık yasalarını indüktif genellemeler kabul eden anlayış bunların doğa yasaları gibi genellemelerden oluştuğunu söyler. O halde, bunların da doğa yasaları gibi gözlemle doğruluklarının denetlenmesi mümkündür. Mümkünse p ve p değil gibi bir önermenin yanlışlığını daha önceki deneyimlerimizden biliyoruz demektir. Fakat bu doğrulama indüktif olacağından dolayı bir kesinlik taşımayacaktır. Üstelik, geçmiş deneyimlere dayalı böyle bir genelleme yeni gözlemlerle yanlışlanabilme olanağına kapalı olamaz. Örneğin; ışığın dalga ve parçacık olma ikilemi bu ilkeyi yanlışlama olarak karşımıza çıkar. Oysa; “Hiçbir bekar evli değildir” türünden bir genellemenin doğruluğu geçmiş deneyimlerden kaynaklanmamakta, bu nedenle yeni bir yanlışlama olasılığı da bulunmamaktadır. Böyle bir itiraza bu tür önermelerin doğa yasaları türünden önermeler olmadıkları, analitik türden olduklarından dolayı da tanım gereği doğru olacakları şeklinde bir cevap verilmiştir[37]. Bütünüyle deneysel bilgi üzerine kurulu bilim madem mantığın yasalarını gerçekliğin yasaları olarak görmemektedir, o halde neden gerçeklikte ortaya çıkan çelişmelerin, örneğin ışığın yapısı örneğinde olduğu gibi, anlamsız olduğunu söylemekte ve kabul edememektedir.

Diğer bir görüş ise mantık yasalarını sadece aklın işleyişini betimleyen ve düşünme süreçlerini yansıtan genellemeler olarak görmüştür. Bunlara göre p ve p değil

biçimindeki önermeler yanlıştır. Çünkü insan aklı, doğası gereği çelişkiyle bağdaşmaz, istesek de tutarsızlıkları benimseyemeyiz. Öte yandan, p ya da p değil gibi mantıksal doğruları benimsemek ruhsal bir zorunluluktur, tersi düşünülemez. Başka bir deyişle bu görüşe göre mantık yasaları ruhsal yasalarlardır. Tutarlılığı aramak ya da çelişkiden sakınmak sağlıklı düşünmenin başta gelen özelliğidir. Matematik, bilim ve hatta günlük konuşmalarımız dahi mantığın bu ilkelerini varsaymaksızın varolamazlar. Bu bakımdan, mantık yasalarını düşünme yetimizin doğasının bir gereği saymada gerçek payı olabilir[37]. Fakat, düşüncenin kanunları bu ilkelerle sınırlandırıldığında Taoizm, Zen-Budizm, Sufizm ve emsali doğu geleneklerinde, hatta Hegel ve Heraklit'in felsefelerinde varolan ve bir manada çelişmezlik ilkesini dışladığı için paradoks mantığı denilebilecek olan düşünce çeşidini nasıl anlamlandıracağız. Örneğin; Chouang Tzu ya ait "Bir bir dir, bir yandan da bir bir değildir ve gene bir birdir" gibi bir cümle bunu çok güzel ifade etmektedir. O halde, şöyle mi demeliyiz; gerçekliğin ve aklımızın bu ilkelerle örtüşen tarafları var olduğu gibi, bu ilkelerin dışında hatta bunlarla çelişen gerçeklikler ve düşünce şekilleri de vardır.[35]

Son yüzyılda dilbilimi üzerine yapılan çalışmalar sırasında bu ilkelerle ilgili şöyle bir itiraz da gündeme gelmiştir; Mantık yasaları sözsel konvansiyonlar, yani uzlaşımlardır. Bu görüşe göre, mantık ilkelerinin doğruluğu, kendisini oluşturan terimlerin tanımından kaynaklanan bir doğruluktur. Bu tanımların değişmesiyle beraber de ilkelerin doğruluğu değişecektir. Bu tanımlara bağlı kalmamız sadece fayda bağlamında düşünülebilir ve sözsel konvansiyonlar özgün tercih ve kararımızla sürdürdüğümüz yada değiştirebileceğimiz bir şeydir. Mantıkla dil arasındaki ilişki yüzyıllar boyu ikisi arasında bir benzeşim kurulmasına yol açmıştır. Bu görüşe benzer bir görüşü İslam dilbilimcileri de ortaya koymuşlardır. Ancak bu görüşe karşı da tanımın yanlışlığı doğru, doğruyu yanlış yapan bir sihirli değnek olmadığı, bir ağacın hem ağaç hem de ağaç olmadığını söyleme gibi zorunlu bir yanlışın herhangi bir tanımla doğru hale getirilmesinin mümkün olmadığı gibi itirazlar yapılmıştır.

Çok değerli mantık sistemlerinin ortaya çıkışıyla beraber tartışmanın boyutu farklı bir görünüm kazandı. Her biri farklı kaygılarla ortaya konan çok değerli mantık sistemlerinin kendi içlerinde tutarlı olarak inşa edilmesi geleneksel mantığın sınırlarının dışına çıkma imkanı tanınması bakımından önemliydi. Fakat, bu durumda da bu tür mantık sistemlerinin gerçekliği nedir, aralarında bir seçim neye göre

mümkün olacaktır, mantık sistemini belirleyen kriterler nelerdir gibi soruların cevaplanması gerekiyordu.

Bu konudada mantık ilkelerinin kaynağı problemde olduğu gibi, geleneksel mantığın biricik mantık olduğunu iddia edenlerin yanısıra, çok değerli mantık sistemlerinin açtığı alanın göz kamaştırıcılığından etkilenenler de vardır. Geleneksel mantığın biricik mantık olduğunu iddia edenler, diğer mantık sistemlerinin birer oyundan ibaret olduğunu veya mantık gibi, mantığa benzyen bir formel sistem oluşturduklarını söylemektedirler. Diğer taraftan izafiyetçi bakışı benimseyenler ise farklı geometri sistemlerinde olduğu gibi, doğru olan mantık hangisidir gibi bir sorunun anlamsız olduğunu, bunun yerine hangi mantık daha faydalıdır gibi bir bakışın daha anlamlı olacağını düşünmektedirler[3].

Bir sistem P gibi bir önermeyi doğrularken diğer sistem değil P yi doğruluyorsa bu durumda iki sistem arasında kuvvetli bir çatışmadan söz etmek mümkündür. Geometri de çıkan sistemler ve yine klasik-yeni fizik sistemlerindeki karşıtlık bu türdendir. Birine göre bir tez doğru diğerine göre ise yanlıştır. Gelenekselci anlayış bu türden çatışmalar sözkonusu olduğunda hangi sistemin doğru olduğu sorusunu sorar. Öte yandan, farklı sistemlerin içerdikleri farklı araçlar amaca uygun olarak değişik imkanlar sunarlar. Bu imkanlar arasında bir tenakuz değil daha çok uygulama açısından bir karşı karşıya gelme sözkonusudur. Mantıktaki bu izafiyeti bu şekilde algılayan düşünce anlayışı araçsalcılık olarak adlandırılır. Araçsalci bakış açısı belirlenen amaç için en uygun ve en etkili olan mantık sistemi hangisidir gibi pragmatik yani faydacı bir anlayışla probleme yönelir. Çoğulcu mantık yapısını kabul ederler ve aralarındaki seçimi keyfi olarak değilde işlevsel amaç ilişkili değerlendirmeler üzerine belirlenen ekonomiklik, etkinlik, uygunluk vs. gibi kriterlerle ilişkili görürler. Araçsalci bakış açısı içerisinde yer alan diğer bir grup ise çok değerli mantıkları kabu etmekle beraber, onların seçiminde faydacı anlayışın geliştirdiği kriterlere bağımlı kalınmasını istemezler. Formalist yada biçimci olarak adlandırılan bu grup için çok değerli mantık sistemleri yaratıcı zekanın özgür bir girişimi olarak kabul edilmelidir. Sonsuz bir mantık süreci tahayyül ederlerken, aralarında yapılacak olan bir seçimi ise tamamıyla keyfi ve sıradan olarak görürler.[3]

Elbette böyle bir düşünme süreci içerisinde mantık dışı mantık sistemlerinin varlığı da mümkün görünmektedir. Fakat, sorulması gereken soru mantık dışının ne olduğu,

herhangi bir formel sistemi mantık sistemi olarak kabul edebilmemizin faydacıların geliştirdiği amaç ilişkili işlevsellik kriterlerinin yanında başka kriterlere sahip olup olmadığıdır. Gerçekten bir mantık sistemini belirleyen ve öyle nitelendirmemizi sağlayan kriterler nedir? Bu soruya verilecek cevaplar ve bunlar üzerine oluşan tartışmalar tezimizin kapsamını aşmaktadır. Fakat, buraya kadar anlatılanlar çerçevesinde, bir mantık sisteminin, düşüncenin ve dilin formel olmayan parçalarını formel bir çıkarım ve muhakeme sistemi içerisinde aritmetik hesaplama sistemlerinin yaptığı şekle benzer olarak sistematize etmenin yanısıra, anlamsal yorumlar açısından, geliştirdiği formel yapıya bir karşılık bulmak zorunda olduğu söylenebilir. Muhakeme ve çıkarım özelliklerini formal olarak sisteme eden ve tam bir araştırma alanında onu yürütebildiğimiz, matematik ve bilim gibi, bir sistem mantık sistemi olarak adlandırmayı hak edebilir.

Bundan daha önemlisi de, herhangi bir mantık sistemi oluştururken de bizim bir mantık kullanıyor olmamızdır. Bu durum, Aristo mantığı için de diğer mantık sistemleri için de böyledir. Fakat, bu mantık öncesinde yer alan mantık düzeneğinin ilkelerinin keşfedilip keşfedilemeyeceği sorusu açıktır. Çünkü, bu mantığın ilkelerinin belirlenmesi aynı mantığın kendi üzerine yansımali bir bakışını gerektirir. Bütün mantık sistemleri için geçerli olacak ölçütler üst mantık alanına ilişkin bir çalışmadır. Bir mantık sistemi üst mantığın düzenleyici kuralları tarafından denetlenir. Önerilen mantık sistemleri eğer minimum kesinlik standartlarını karşılamayacak bir şekilde ise hiç bir zaman ciddi bir değerlendirme için yeterli nitelikte olarak kabul edilmeyecektir. Problemin bu yönü mantık sisteminin kendi iç perspektifinden bakıldığında çok büyük bir şey olarak görülmeyebilir. Fakat, esas olarak meta mantık yani üst mantık yönü üzerine dışsal bir perspektif belirleyici olacaktır. Bu yaklaşım sonucunda hemen bazı önemli özelliklerin öne çıktığını görürüz. Mantık sisteminin gelişiminde ve dile getirilmesinde ilk ve en önemli özellik en azından minimum tutarlılık standartlarını karşılama ihtiyacıdır. Sistem tutarlı olmalıdır hem de çelişmezlik ilkesi gibi bir ilkeyi içerip içemediğine bakılmaksızın. Yani kendi kendisini tekzip eden bir yapı olmamalıdır. Bunun yanısıra, sistemi karakterize eden özellikler açıkça ve belirsizliğe yer vermeden belirtilmelidir[3]. Bundan dolayı sistemlerin kendileri nesnel olmalıdır. Üst mantık içinde yer alan bu düzenleyici kriterlerin, iki değerli mantığın ilkeleriyle benzeşimi tartışmaların odağındadır. Böyle bir durumu, klasik mantığın diğer mantıklar

üzerinde bir öneme sahip olduğunun göstergesi sayanlar vardır. Diğer taraftan, klasik mantığın ilkelerinin diğer mantık sistemleri üzerindeki hakimliğinin hiçde bir üstünlük oluşturmayacağını savunanlarla beraber, bu ilkeleri daha farklı mantık sistemlerinden türetmenin mümkün olduğunu ileri sürenler de bulunmaktadır. Bu açıdan, neyin bir mantık sistemi olacağı hakkında karar vermenin standartlarını oluştururken iki değerli mantık ne tek ne de gerekli bir araç değildir[3].

Bu konuda Nicholas Rescher şunları söylemektedir;

“Mantıkta çoğulculuk sorunu cevabi evet veya hayır şeklinde verilemeyecek karmaşık bir sorudur. Gerçekten, hiç şüphesiz olarak alternatif mantık sistemleri vardır. Bu sistemler birbirleriyle tezlerinin kabul edilebilirliği yönünden uyumsuzluk içinde olduklarından ve iddialarının bizim tarafımızdan kabul edilebilirliği konusunda hemen hemen başabaşılar. Bundan dolayı izafiyetçi anlayış hakkında söylenecek çok şey vardır. Kesinlikle herhangi bir sistematikleştirmenin mantık sistemi olarak adlandırılması üstüne zaruri olarak komulacak bir şekil ve mantık prensibi yoktur. Buna karşın mantıkta izafiyetçilik rasyonel olmayan eğilimleri gerektirmez. Çünkü böyle sonuçlar eşit doğrulukta salt düzenleyici işlev gören mantık üstü prensipler tarafından men edilir.

Çelişmezlik ilkesini ve üçüncü şıkkın olanaksızlığı ilkesini iki bakımdan aralarını ayırmak durumundayız. Birincisi, bu ilkelerin bir sistem için açık bir formül olmaları yönünden, diğeri ise sistem üstü prensipler olarak görülebilirliği açısından. Bu ikinci rol daha ayrı bir statüye sahiptir. Bu yönden bu prensiplerin düzenleyici doğası birinci prensip kadar kolayca gözden çıkarılacak bir şey değildir. Burada mantık ilkeleri bir şekilde formüle edilmiş herhangi bir sistemin dışında yer alan düzenleyici prensipler olarak durmaktadırlar. Bu duruma bakarak klasik mantığın prensiplerinin bütün sistemler üzerinde düzenleyici kurallar olarak metamantığın ilkeleri olduğu gibi bir mana çıkarılabilir. Fakat metamantık düzeyindeki düzenleyici kuralların klasik mantığın kuralları ile benzeşimliği klasik iki değerli önermeler mantığının üstünlüğü gibi genel bir iddia için temel oluşturamaz.

Bir mantıksal ilke bütün mantık sistemleri için geçerli olan bir önerme değildir. Daha ziyade düzenleyici mantık üstü prensiplerdir. Çeşitli sistemler açısından soyut ve geneldir. Bu mantık sistemi içinde gerçekleşmese bile onun açısından gerçekleşmelidir. Bu mantık prensibi mantık sistemi içerisinde neyin yapılabildiğini neyin yapılamayacağını belirler.

Düzenleyici seviyede bir mantık sistemi olarak ortaya konan her inşa aklın bazı genel ilkelerine uymak zorundadır. Bu düzenleyici ilkeler bütün mantık sistemleri üzerinde bir dereceye kadar bir tekdüzelik ve istikrarı garanti altına alır. Bu açıdan bir tek mantığı kabul edebiliriz.[3]”

Yine herhangi bir mantık sisteminin seçimi işlemi de mutlak kurallara bağımlı olarak yürüyen bir süreç değildir. Eğer mantık sistemleri arasındaki bir seçim kaçınılmaz bir gereklilik tarafından dikte edilmemişse seçim büyük bir oranda bir karar problemidir. Karar tamamıyla keyfi olmayıp elde ki problemin yapısına uygun bir şekilde amaç bağımlı ve fonksiyonel olarak seçilir. Bundan dolayı mantık prensiplerinin mutlak olmayan fakat sisteme ilişkin bir yapıya sahip olduklarını söylemek doğrudur ve bir sistemin seçimi özgür bir seçimdir. Kaçınılmaz olarak doğru aksiyomlar ve doğru çıkarım kuralları ve bu yüzdende mutlak bir mantık tezi yoktur. Açıkça karşıt mantık

prensiplerinin doğruluğu tatmin edici bir şekilde gösterilemez, çünkü böyle bir gösterimin yapılabilmesi bu karşıtlığı içinde bulunduran prensiplerin kullanımını gerektiren bir ispatla mümkündür. Eğer başka prensipler kullanılmış olsa bu zaten kendi kendisini tekzip etmeyi gerektiren bir süreci ortaya çıkarır[3].



KAYNAKLAR

- [1] **Özlem, D.**, 1999, Mantık klasik/sembolik Mantık, Mantık Felsefesi, İnkılap Yayınevi, İstanbul
- [2] **Yıldırım, C.**, 1999, Mantık, Bilgi Yayınevi, Ankara.
- [3] **Rescher, N.**, 1969, Many Valued Logic, McGraw Hill Co, Britain.
- [4] **Ural, Ş.**, 1985, Temel Mantık, Çantay Kitabevi, İstanbul.
- [5] **Walters, J.D.**, 1995, Modern Düşüncenin Krizi, İnsan Yayınları, İstanbul.
- [6] **Kocabaş Ş.**, 2001, Fizik ve Gerçeklik, Küre Yayınları, İstanbul.
- [7] **Ural, Ş.**, 1987, Çok değerli Mantık Sistemleri, İ.Ü.Edebiyat Fakültesi Basımevi, İstanbul.
- [8] **Taylan, N.**, 1996, Mantık Tarihçesi Problemleri, Marifet Yayınları, İstanbul.
- [9] **Klir, George J. and Yuan B.**, c1995, Fuzzy sets and fuzzy logic : theory and applications, Upper Saddle River, N.J. : Prentice Hall PTR
- [10] **Moles, A.**, 1990, Belirsizin Bilimleri, İnsan Bilimleri için Yeni Bir Epistemoloji, YKY, İstanbul
- [11] **Askerzade, L.**, 1965, "Fuzzy Sets" Information and Control 8:3, 338-53
- [12] **Aristo**, 1996, Organon II. Analitikler, Çev. H.Ragıp Atademir, M.E.B Yayınları, İstanbul.
- [13] **Emiroğlu, İ.**, 1999, Ana Hatlarıyla Klasik Mantık, Asa Kitabevi, İstanbul.
- [14] **Çüçen, A.Kadir**, 1997, Klasik Mantık, Asa Yayınevi, Bursa.
- [15] **Öner, N.**, 1970, Klasik Mantık, Ankara Ü. İlahiyet Fak. Yay. Ankara.
- [16] **Grünberg, T.**, 2000, Sembolik Mantık El Kitabı, Cilt 2-3, Metu Yayınları, Ankara.
- [17] **Copi, I.**, 1979, Symbolic Logic, Macmillan Publishing Co. New York
- [18] **Grünberg, T.**, 2000, Sembolik Mantık El Kitabı, Cilt 1, Metu Yayınları, Ankara.
- [19] **Nolt, J. And Rohatyn D.**, 1988, Schaum's Outline Series Logic, McGraw Hill Co., New York

- [20] **Lukasiewicz, J.**, 1920, On 3 valued logic, *Ruch Filozoficzny*, vol. 5, pp.169-171.
- [21] **Klir, George J., Clair, Ute H. and Yuan Bo**, 1997, *Fuzzy Set Theory, Foundations and Applications*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ 07458
- [22] **Ülken, H. Z.**, 1942, *Mantık Tarihi*, İ.Ü Edb.Fak. Yayınları, Rıza Koşkun Matbaası, İstanbul
- [23] **Teymür, C.**, 1998, *Belirsiz Bilgi : Bulanık Mantık ve Olasılık Yaklaşımı, Yüksek Lisans Tezi*, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [24] **Ross, Timothy J**, c1995, *Fuzzy logic with engineering applications*, McGraw-Hill, New York.
- [25] **Bojadziev, G. and Bojadziev M.**, 1995, *Fuzzy sets, fuzzy logic, applications* River Edge, NJ World Scientific Pub. Co, Singapor.
- [26] **Şen, Z.**, 2000, *Bulanık Mantık ve Modelleme İlkeleri*, Boyut Yayınevi, İstanbul
- [27] **Driankov, D., Hellendoorn and H., Reinfrank, M.**, c1996. *An introduction to fuzzy control*, Springer, Berlin.
- [28] **Şen Z.**, 2002, *Eleştirel Klasik, Sembolik ve Bulanık Mantık*, Basılmamış Kitap Notları
- [29] **Atademir, H.Ragıp**, 1974, *Aristonun İlim ve Mantık Anlayışı*, Ankara Ü. İlahiyet Fak. Yay. Ankara.
- [30] **Özdemir, A.**, 1997. *Yöneylem Araştırması*, Ekin Kitabevi, Bursa.
- [31] **Zimmerman, H.**, 1987. *Fuzzy Sets, Decision Making and Expert Systems*, Kluwer Academic Publishers, Boston.
- [32] **Bazaraa, M.S., Jarvis, John J. and Sherali, H.D**, 1990, *Linear Programming and Network Flows*, John Wiley & Sons, New York.
- [33] **Hillier, F.S and Lieberman, G.J**, 1986, *Introduction to Operation Research*, Holden-Day, Inc, Oakland California
- [34] **Rommelfanger, H.**, 1996, *Fuzzy Linear Programming and applications*, *European Journal of Operational Research*, **92**, 512-527
- [35] **Uçar Ş.**, 1997, *Tarih Felsefesi Meseleleri*, Nehir Yayınları, İstanbul.
- [36] **Mutahhari M.**, 1997, *Felsefe Dersleri 1*, İnsan Yayınları, İstanbul.
- [37] **Barker, Stephen F.**, 1965, *The elements of Logic*, McGraw-Hill Book Co., New York.

ÖZGEÇMİŞ

1976 yılında Kırıkkale de doğdu. 1998 yılında Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümünden mezun oldu. 1998-1999 yılları arasında ODTÜ de dil eğitimi aldıktan sonra İTÜ Matematik Mühendisliği bölümünde araştırma görevlisi olarak işe başladı. Halen aynı bölümde yüksek lisans eğitimin yapmaktadır.

Uğur ŞAHİN

