

83092

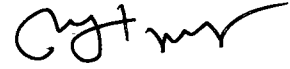
**DIŞ PROBLEMLER İÇİN SINIR İNTEGRAL
DENKLEMLERİ VE BUNLARIN ÇÖZÜMLERİ İÇİN
İTERATİF YÖNTEMLER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Araş. Gör. Remzi Tunç MISIRLIOĞLU
(509950052011)

83092

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 11 Ocak 1999
Tezin Savunulduğu Tarih : 5 Şubat 1999

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mevlüt TEYMÜR



Diğer Jüri Üyeleri Prof. Dr. Erdoğan ŞUHUBİ (İ.T.Ü.)

Prof. Dr. Mahir HASANOV (İ.T.Ü.)



ŞUBAT 1999

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

ÖNSÖZ

Bu çalışmayı gerçekleştirirken bana her türlü yardımı sabır ve anlayışla gösteren sevgili hocam, İTÜ Matematik Bölümü Başkanı sayın Prof. Dr. Mevlüt TEYMÜR'e teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım. Ayrıca, tezin bilgisayarla yazımının büyük bir bölümünü gerçekleştiren dostum ve ağabeyim Şafak KARA'ya teşekkürü bir borç bilirim.

OCAK 1999

R. T. MISIRLIOĞLU



İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ	iii
ÖZET	iv
SUMMARY	v
1. GİRİŞ	1
2. DIŞ PROBLEMLERİN TANIMLARI VE DIŞ PROBLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN TEKLİĞİ	3
2.1. Dış Problemlerin Tanımları	3
2.2. Dış Problemlerin Çözümlerinin Tekliği	4
3. SINIR İNTEGRAL DENKLEMLER	10
3.1. Giriş	10
3.2. Sınır İntegral Denklemler	11
4. MODİFİYE GREEN FONKSİYONU YÖNTEMİ	18
4.1. Dış Neumann Problemi İçin Modifiye İntegral Denklemin Çözümünün Tekliği	21
4.2. Dış Drichlet Problemi İçin Modifiye İntegral Denklemin Çözümünün Tekliği	23
5. SINIR İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN İTERATİF YÖNTEMLER	25
5.1. Giriş	25
5.2. Steepest Descent Yöntemi ve Kleinman - Roach İterasyonu	26
5.3. Daha Hızlı Bir İterasyon Şeması	32
6. SONUÇ	38
KAYNAKLAR	39
EK-A	40
ÖZGEÇMİŞ	41

TABLO LİSTESİ

Tablo 1	İlgili sınır integral denklemlerin çözümleri cinsinden Helmholtz denkleminin çözümleri.....	17
Tablo 2	Dış problemler ile ilgili sınır integral denklemlerin çözümleri cinsinden Helmholtz denkleminin çözümleri	20



DIŞ PROBLEMLER İÇİN SINIR İNTEGRAL DENKLEMLERİ VE BUNLARIN ÇÖZÜMLERİ İÇİN İTERATİF YÖNTEMLER

ÖZET

Dış bölgelerde Helmholtz denklemi ile tanımlanan eliptik sınır değer problemleri, akustik ve elektromanyetik dalga yayılması olaylarında ortaya çıkarlar. Bu problemlerde,

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

Helmholtz denkleminin, saçıcı cisimler üzerinde tanımlanmış ya Dirichlet veya Neumann sınır koşulu altında çözümleri bulunmak istenir. Burada k , dalga sayısı, homojen bir ortamda sabittir. Bu problemlerde sonsuz ayrı bir sınır olarak düşünülür ve problemin iyi tanımlanmış olması için sonsuzda bir koşulun belirtilmesi gerekir. Bu, örneğin üç boyutlu uzayda,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0$$

olarak ifade edilen Sommerfeld radyasyon koşuludur. Burada r seçilmiş olan bir orijinden itibaren olan uzaklıktır ve zamana bağlılık, ω frekans olmak üzere, $e^{-i\omega t}$ olarak seçilmiştir.

Dış problemleri çözmek için geliştirilen yöntemlerden biri sınır integral denklemi yaklaşımıdır. Bilindiği gibi, k , karşı gelen iç problemin bir özdeğeri ile çakıştığında, bir dış problem için türetilen integral denklemin çözümü tek olarak bulunamaz. Bu sorun orijinal problemde değil, çözümün gösteriliminden kaynaklanmaktadır. Bu güçlüğü üstesinden gelebilmek için genel olarak modifiye Green fonksiyonu teknikleri olarak adlandırılan teknikler geliştirilmiş ve bunlarla çözümleri tek olan sınır integral denklemleri türetilmiştir.

Tek olarak çözülebilen bu integral denklemler iteratif olarak çözülebilirler. Bu çalışmada Kleinman-Roach iterasyonu incelenmiş ve yorumlanmıştır. Daha sonra da bundan daha hızlı yakınsayan bir iterasyon şeması önerilmiştir.

BOUNDARY INTEGRAL EQUATIONS FOR EXTERIOR PROBLEMS AND ITERATIVE TECHNIQUES FOR THEIR SOLUTIONS

SUMMARY

Elliptic boundary value problems governed by the Helmholtz equation in exterior regions arise in acoustics and electromagnetics. Here one wishes to solve the Helmholtz equation

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

with either Dirichlet or Neumann boundary condition specified on the bodies, where k , the wave number, is a constant for a homogeneous media. In these problems, infinity can be regarded as a separate boundary and a condition at infinity is required to make the exterior problem well defined. This is the Sommerfeld radiation condition which can be expressed as

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0$$

in three-dimension where r is the distance from a fixed origin.

One of the methods for the solution of an exterior problem is the boundary integral equation approach. The integral equation approach has an important deficiency. It is well known that the integral equation is found to be non-unique when k coincides with an eigenvalue of the corresponding interior problem. The trouble occurs, not because the original problem fails to have a unique solution, but an account of the representation used for the field. Various methods have been introduced to overcome this difficulty. Using modified Green's functions new boundary integral equations have been devised and these are known to be uniquely solvable.

These uniquely solvable boundary integral equations can be solved iteratively. In this work, Kleinman-Roach iteration method is examined and expounded. Then a new iteration scheme having faster convergence rate than the previous iteration scheme is introduced.

1. GİRİŞ

Dış bölgelerdeki eliptik problemler sürekli ortamlar fiziğinin (akustik, elastisite teorisi, elektromanyetik teori vs.) bir çok dalında ortaya çıkarlar. Bu problemler içerisinde önemli bir kısmını zamana harmonik olarak bağlı dalgaların bir cisimden saçılması olayları ile ilgili olanlar oluşturmaktadır. Böyle tipik bir problem eliptik bir denklemin (genellikle indirgenmiş dalga denklemi, yani Helmholtz denklemi) bir yüzey üzerinde (saçıcı yüzey) tanımlanan ve sınır koşulu olarak adlandırılan bir koşulu sağlayan çözümünün bulunması şeklindedir. Bu problemlerde sonsuz, ayrı bir sınır olarak gözönüne alınır ve ele alınan problemin çözümünün tek olması için çözümün, sonsuzda, her yönde, radyasyon koşulu denen bir sınır şartını da sağlaması gerekir. Problem Helmholtz denklemi ile veriliyorsa bu koşul Sommerfeld radyasyon koşulu olarak bilinir,[1].

Dış problemlerin çözümlerinin inşası için bir çok teknik geliştirilmiştir,[1]. Bu tip problemlerin çözüm yöntemlerinin belirlenmesinde, sınır koşullarının üzerinde tanımlandığı sınır yüzeyinin geometrisi önemli bir tayin edicidir. Örneğin Helmholtz denklemi için tanımlanan dış problemlerde değişkenlerin ayrılması yöntemi ile çözüm dik kartezyen, dairesel, parabolik ve eliptik silindirik, küresel, prolate ve oblate sferoidal, konisel, parabolidal ve elipsoida koordinatlarda, sınır yüzeyinin üzerinde tanımlandığı yüzey, bir koordinat yüzeyi ile çakıştığında serisel formda inşa edilebilmektedir[1,5]. Bazı problemlerde sınır yüzeyi bir koordinat yüzeyinin yalnızca bir kısmını oluşturur, örneğin koşulun yarı sonsuz bir düzlem üzerinde belirtilmesi gibi. Böyle problemlerde kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisine, özellikle analitik devamlılığa, Liouville teoremine ve analitik fonksiyonların faktörizasyonuna dayanan Wiener-Hopf yöntemi ile kapalı çözümler inşa edilebilmektedir[1,5].

Bir dış problemde, yukarıda belirtilen yöntemlerle bir çözüm yapmak mümkün olmadığı zaman veya genel olarak uygulanmak üzere çeşitli yaklaşık çözüm yöntemleri geliştirilmiştir. Bunların bir kısmında problemlerin çözümlerini bulma, sınır yüzeyi üzerinde

türetilen ikinci tür Fredholm tipi integral denklemlerin çözümlerinin inşasına indirgenir. Bu integral denklemler nümerik veya iteratif olarak çözülebilirler.

Bu çalışmada, dış problemlerle ilgili integral denklemlerin iteratif çözüm yöntemleri incelenmiştir. Bu amaçla önce, birinci bölümde dış problemlerin tanımları ve bunların çözümlerinin tekliği üzerinde durulmuştur. İkinci bölümde dış problemler için sınır integral denklemlerinin türetilmesi özetlenmiş ve serbest uzay Green fonksiyonu kullanılarak elde edilen sınır integrallerin çözümlerinin bazı özel k (dalga sayısı) değerleri için tek olmayışı üzerinde durulmuştur. Problemlerin çözümleri tek olduğu için, bu nokta, çözümler integral denklemlerin çözümleri üzerinden inşa edilmeye çalışıldığında önem kazanır. Sorun da açık olarak çözüm tekniğinden kaynaklanmaktadır ve bu nedenle de integral denklem yönteminden kaynaklanan bu sorunu gidermek için çare, çözümleri tek olan integral denklemler inşa etmektir. Bu, modifiye Green fonksiyonu tanımlanarak giderilmektedir[11,12,13]. Bölüm 3'te bu yöntem tanıtılmakta ve bununla türetilen integral denklemler verilmektedir. Bölüm 4'te ise bu integral denklemler için Kleinman ve Roach [5] tarafından geliştirilen ve Kantorovich teoremine,[8], dayanan iterasyon şeması daha açık bir şekilde Steepest Descent (en dik iniş) yöntemi ve Kantorovich teoremi kullanılarak yorumlanmış ve daha sonra da gene en dik iniş yöntemine dayanan fakat Kleinman ve Roach'un iterasyon şemasından daha hızlı yakınsayan bir iterasyon şeması önerilmiştir. Bu şema Birman teoremine,[8], dayanmaktadır.

2. DIŞ PROBLEMLERİN TANIMLARI VE DIŞ PROBLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN TEKLİĞİ

2.1 Dış Problemlerin Tanımları

Üç boyutlu Euclidean uzayı $\mathcal{R}^3$ ile gösterelim ve $\mathcal{R}^3$ de D_+ ile göstereceğimiz sınırlı ve basit bağımlı bir bölge göz önüne alalım. D_+ 'nin ∂D ile göstereceğimiz sınır yüzeyinin bir Lyapunov yüzeyi olduğunu kabul ediyoruz. (Bkz. EK-A) ∂D 'nin dışında kalan bölgeyi de D_+ ile ve $\mathcal{R}^3$ 'deki herhangi iki P ve Q noktaları arasındaki uzaklığı da $R = R(P, Q)$ ile gösteriyoruz. ∂D üzerindeki noktalar için p,q küçük harflerini kullanacağız. Şimdi D_+ veya D_- bölgesinde Helmholtz denklemini (İndirgenmiş Dalga Denklemi)[1], sağlayan fonksiyonlar için bazı sınır değer problemlerinin tanımlarını vereceğiz. Önce dış bölgeyi ele alıyoruz.

Tanım 2.1: (Dış Neumann Problemi) ∂D üzerinde bir $g_+(p)$ fonksiyonu tanımlanmış (ve verilmiş) olsun. D_+ bölgesinde Helmholtz denkleminin çözümü olan,

$$(\Delta + k^2)u_+(P) = 0, \quad P \in D_+ \quad (1.1)$$

ve ∂D üzerinde

$$\frac{\partial u_+}{\partial n_p}(p) = g_+(p), \quad p \in \partial D \quad (2.2)$$

sınır koşulunu ve sonsuzda da

$$\lim_{r_p \rightarrow \infty} r_p \left(\frac{\partial u_+}{\partial r_p} - iku_+ \right) = 0 \quad (2.3)$$

Sommerfeld radyasyon koşulunu [1] sağlayan bir $u_+(P)$ fonksiyonunun bulunması problemi “Dış Neumann Problemi” olarak tanımlanır. Burada $\frac{\partial}{\partial n_p}$ diferansiyel operatörü ∂D üzerindeki bir p noktasında, ∂D nin $\hat{n}_p$ dış normal yönündeki türetme işlemini ($\hat{n}_p, D_+$ ya doğru uzanmaktadır) r_p ise koordinat merkezi (orijini) D_- 'de olan bir kartezyen koordinat sistemine göre (r_p, θ_p, ϕ_p) olarak tanımlanan küresel koordinatlarda radyal değişimi göstermektedir. Δ ise Laplace operatörüdür.

Tanım 2.2: (Dış Dirichlet Problemi) ∂D üzerinde bir $f_+(p)$ fonksiyonu tanımlanmış (ve verilmiş) olsun. D_+ bölgesinde Helmholtz denkleminin çözümü olan,

$$(\Delta + k^2)v_+(P) = 0, \quad P \in D_+ \quad (2.4)$$

ve ∂D üzerinde

$$v_+(p) = f_+(p), \quad p \in \partial D \quad (2.5)$$

sınır koşulunu ve sonsuzda da

$$\lim_{r_p \rightarrow \infty} r_p \left(\frac{\partial v_+}{\partial r_p} - ikv_+ \right) = 0 \quad (2.6)$$

radyasyon koşulunu sağlayan bir $v_+(p)$ fonksiyonunun bulunması problemine “Dış Dirichlet Problemi” denir.

Şimdi de daha sonra gerekli olacağı için iç sınır değer problemlerinin de tanımlarını vereceğiz.

Tanım 2.3: (İç Neumann Problemi) ∂D üzerinde bir $g_-(p)$ fonksiyonu tanımlanmış (ve verilmiş) olsun. D_- bölgesinde Helmholtz denkleminin çözümü olan

$$(\Delta + k^2)u_-(P) = 0, \quad P \in D_- \quad (2.7)$$

ve ∂D üzerinde

$$\frac{\partial u_-(p)}{\partial n_p} = g_-(p), \quad p \in \partial D \quad (2.8)$$

sınır koşulunu sağlayan bir $u_-(P)$ fonksiyonunun bulunması problemi “İç Neumann Problemi” olarak adlandırılır.

Tanım 2.4: (İç Dirichlet Problemi) ∂D üzerinde bir $f_-(p)$ fonksiyonu tanımlanmış (ve verilmiş) olsun. D_- bölgesinde Helmholtz denkleminin çözümü olan,

$$(\Delta + k^2)v_-(P) = 0, \quad P \in D_- \quad (2.9)$$

ve ∂D üzerinde

$$v_-(p) = f_-(p), \quad p \in \partial D \quad (2.10)$$

sınır koşulunu sağlayan bir $v_-(P)$ fonksiyonunun bulunması problemi “İç Dirichlet Problemi” olarak adlandırılır.

2.2 Dış Problemlerin Çözümlerinin Tekliği

Bu kısımda yukarıda tanımlanan dış problemlerin çözümleri var ise, bu çözümlerin tek olduğunu göstereceğiz. Bunun için aşağıdaki teoremi ispatlamak yeterli olacaktır.

Teoremi ispatlarken gerekli olduğu için önce çözümlerin integral gösteriliminden bahsedeceğiz. Bu aşağıda vereceğimiz Green özdeşliği kullanılarak türetilir. $\mathbb{R}^3$ de

düzgün bir S yüzeyi ile sınırlanan bir B kapalı bölgesini gözönüne alalım ve u ve v bu bölgede ve sınırında tanımlı ve en az iki defa diferansiyellenebilen iki fonksiyon olsun. Bu koşullar altında birinci Green özdeşliği,

$$\int_B (v\Delta u + \nabla v \cdot \nabla u) dV = \int_S v \frac{\partial u}{\partial n} dS \quad (2.11)$$

olarak yazılır,[2]. Burada dV diferansiyel hacim elemanını, dS de S üzerinde diferansiyel yüzey elemanını, ∇ sembolü Nabla operatörünü (gradyantı) ve $\frac{\partial}{\partial n}$ ise S nin dış normal yönündeki türev işlemini göstermektedir. (2.11) de u ve v yer değiştirilir ve sonuç (2.11) den çıkartılırsa aşağıdaki İkinci Green Özdeşliği elde edilir;

$$\int_B (u\Delta v - v\Delta u) dV = \int_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \quad (2.12)$$

Eğer,

$$L = \Delta + k^2 \quad (2.13)$$

tanımı yapılırsa (2.12) den

$$\int_B (uLv - vLu) dV = \int_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \quad (2.14)$$

yazılır. Şimdi v fonksiyonu olarak,

$$Lv = -\delta(P - Q), \quad P, Q \in \mathbb{R}^3 \quad (2.15)$$

denkleminin

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0 \quad (2.16)$$

radyasyon koşulunu sağlayan çözümünü seçelim. Bu çözüm serbest uzay Green fonksiyonu adını alır ve

$$v = \Psi(P, Q) = e^{ik|P-Q|} / 4\pi |P-Q| \quad (2.17)$$

dır[1].

Eğer u Helmholtz denkleminin B de hiçbir singulariteye sahip olmayan bir çözümü ise, yani

$$Lu=0 \quad (2.18)$$

ise, (2.14) de (2.15) kullanılır ve

$$\int_B h(Q) \delta(P - Q) dV = \begin{cases} h(P), & P \in B \\ 0, & P \notin B \end{cases} \quad (2.19)$$

olduğu dikkate alınır,

$$\int_s \left\{ \frac{\partial u(q)}{\partial n_q} \Psi(P, q) - u(q) \frac{\partial}{\partial n_q} \Psi(P, q) \right\} dS_q = \begin{cases} u(P) & , P \in B \\ 0 & , P \notin B \end{cases} \quad (2.20)$$

elde edilir.

Burada q alt indisi operasyonların hangi değişkene göre yapıldığını belirtmektedir. (2.20) ifadesinin ilk satırı Helmholtz gösterilimi, tümü de 1. Helmholtz Teoremi olarak bilinir[3].

Şimdi dış problemlerin tekliği ile ilgili teoremi ve ispatını vereceğiz[1].

Teorem 2.1: Bir u fonksiyonu kapalı bir ∂D Lyapunov yüzeyi dışında kalan D_+ bölgesinde,

$$(\Delta + k^2)u(P) = 0 \quad (2.21)$$

Helmholtz denklemini, sonsuzda

$$\lim_{r_p \rightarrow \infty} r_p \left(\frac{\partial u}{\partial r_p} - iku \right) = 0 \quad (2.22)$$

Sommerfeld radyasyon koşulunu ve ∂D üzerinde de ya

$$\frac{\partial u}{\partial n_p} = 0 \quad (2.23)$$

homojen sınır koşulunu (Dış Neumann Problemi) veya

$$u(p) = 0 \quad (2.24)$$

homojen sınır koşulunu (dış Dirichlet problemi) sağlıyorsa

$$u(P) \equiv 0$$

dır. Burada basitlik için dış problemlerdeki u_+ ve v_+ fonksiyonları yerine u , ve $\frac{\partial}{\partial n_p}$ yerine de $\frac{\partial}{\partial n_p}$ yazılmıştır.

İspat: Sınır koşulları homojen olmayan, yani (2.23) yerine (2.2), (2.24) yerine de (2.5) ile tanımlanan dış problemlerin iki tane çözümleri u_1 ve u_2 olsun. Bu durumda $u = u_1 - u_2$ fonksiyonu da yukarıda verilen homojen sınır koşullarına sahip bir problemin çözümü olacaktır. Eğer $u \equiv 0$ olduğu gösterilebilirse bu durumda $u_1 = u_2$ olacağından dış problemlerin çözümlerinin tek olduğu ispatlanmış olur.

Şimdi ∂D yüzeyini çevreleyen ve orijini D_- 'de olan R yarıçaplı bir ∂B_R küre yüzeyini gözönüne alalım. Dıştan ∂B_R yüzeyi ile içten de ∂D yüzeyi ile sınırlı olan bölgeyi Σ ile gösterelim. (1.20) de verilen integral gösteriliminden P, Σ da bir nokta olmak üzere

$$u(P) = \int_{\partial B_r} \left\{ \frac{\partial u(q)}{\partial n_q} \Psi(P, q) - u(q) \frac{\partial}{\partial n_q} \Psi(P, q) \right\} dS_q$$

$$- \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u(q)}{\partial n_q} \Psi(P, q) - u(q) \frac{\partial}{\partial n_q} \Psi(P, q) \right\} dS_q \quad (2.25)$$

elde edilir. Burada $\frac{\partial}{\partial n_q}$ dış normaller yönündeki türetme işlemini göstermektedir.

Şimdi k nin reel olduğunu varsayalım, ve $\bar{u}$, u nun kompleks eşleniğini göstereyim, k reel olduğu için, $\bar{u}$ de Helmholtz denklemini sağlayacak, dolayısı ile ikinci Green Özdeşliğinden, (1.12),

$$\int_{\partial B_R} \left(u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} - \bar{u} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS = \int_{\partial D} \left(u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} - \bar{u} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \quad (2.26)$$

sonucuna ulaşılır. ∂B_R üzerinde $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial R}$ dir. Buradan görülür ki (2.26) nin solundaki integral R nin bir fonksiyonu olmasına rağmen, R den bağımsız bir sonlu sabittir. Şimdi,

$$-ik \left(\bar{u} \frac{\partial u}{\partial R} - u \frac{\partial \bar{u}}{\partial R} \right) = \left| \frac{\partial u}{\partial R} \right|^2 + k^2 |u|^2 - \left| \frac{\partial u}{\partial R} - iku \right|^2 \quad (2.27)$$

özdeşliğini dikkate alırsak,

$$\int_{\partial B_R} \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial R} \right|^2 + k^2 |u|^2 - \left| \frac{\partial u}{\partial R} - iku \right|^2 \right\} dS \quad (2.28)$$

integrali, (1.26) nedeni ile, R den bağımsızdır ve bir sabite eşittir. Diğer taraftan u (2.22) radyasyon koşulunu sağlamaktadır. Yani

$$R \rightarrow \infty \text{ için } R \left(\frac{\partial u}{\partial R} - iku \right) \rightarrow 0 \quad (2.29)$$

dır. Bu nedenle $R \rightarrow \infty$ için (2.28) integralinin sonucunda son terimin katkısı sıfıra gider ve sonuç olarak;

$$R \rightarrow \infty \text{ için } \int_{\partial B_R} \left| \frac{\partial u}{\partial R} \right|^2 dS = O(1) \text{ ve } \int_{\partial B_R} |u|^2 dS = O(1) \quad (2.30)$$

dır. Buradan da

$$\int_{\partial B_R} |u| dS \leq \left\{ 4\pi R^2 \int_{\partial B_R} |u|^2 dS \right\}^{\frac{1}{2}} = O(R) \quad (2.31)$$

$$\int_{\partial B_R} \left| \frac{\partial u}{\partial R} \right| dS = O(R) \quad (2.32)$$

sonuçlarına ulaşılır.

(2.25) de ∂B_R üzerindeki integralde $R|P|$ dir ve dolayısıyla Ψ , $(1/R)$ nin kuvvetleri cinsinden mutlak ve uniform olarak yakınsak bir seriye açılabilir.

Bu seriyi,

$$\Psi = e^{ikR} \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(\theta, \phi) / R^{n+1} \quad (2.33)$$

olarak yazabiliriz. Bu seri terim terime türetilebileceğinden;

$$\frac{\partial \Psi}{\partial R} = ike^{ikR} \frac{\Psi_0}{R} + O\left(\frac{1}{R^2}\right) \quad (2.34)$$

dir. Dolayısı ile ∂B_R üzerindeki integral

$$\int_{\partial B_R} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial R} - iku \right) \Psi_0(\theta, \phi) \frac{e^{ikR}}{R} + \left(\frac{\partial u}{\partial R} + u \right) O\left(\frac{1}{R^2}\right) \right\} dS \quad (2.35)$$

olarak ifade edilebilir. $R \rightarrow \infty$ için ilk terim (2.29) radyasyon koşulu nedeniyle sıfıra gider. Kalan terimler ise (2.31) ve (2.32) sonuçlarına göre sıfıra giderler. Dolayısı ile ∂D nin dışındaki bir P noktasında, k reel olduğunda (2.21) Helmholtz denkleminin (2.22) radyasyon koşulunu sağlayan bir çözümü,

$$u(P) = \int_{\partial D} \left\{ u(q) \frac{\partial}{\partial n_q} \Psi(P, q) - \frac{\partial u(q)}{\partial n_q} \Psi(P, q) \right\} dS_q \quad (2.36)$$

gösterilimine sahiptir.

R için, ∂D 'de ∂B_R 'nin tamamen içinde kalacak şekilde, bir R_0 değeri seçelim. $|P| > R_0$ olduğunda (2.33) açılımı (2.36) ya uygulanabilir. Bunun sonucu olarak $R > R_0$ için

$$u(P) = e^{ikR} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\theta, \phi) / R^{n+1} \quad (2.37)$$

yazılabileceği açıktır. Diğer taraftan (2.37) nin, (2.21) Helmholtz Denklemini sağlaması gerekir. (2.21) (r, θ, ϕ) küresel koordinatlarında ifade edilip (2.37) bu sonuç denklemde yerleştirilirse $1/R$ nin kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenerek u_n ler için

$$-2ik(n+1)u_{n+1} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_n}{\partial \phi^2} + n(n+1)u_n = 0$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.38)$$

hiyerarşik denklemleri elde edilir. Dolayısı ile radyasyon koşulunu sağlayan; u , $R > R_0$ bölgesinde u_n katsayıları (2.38) denklemlerini sağlayan (2.37) açılımı ile temsil edilebilir.

(2.38) den görülür ki, eğer $u_0 \equiv 0$ ise, $k \neq 0$ olmak koşulu ile $u_n \equiv 0$ ($n \geq 1$) dir.

Sonuç Olarak $u_0 \equiv 0$, $R \setminus R_0$ da $u \equiv 0$ olmasına yol açar. Fakat (2.36) gösterilimi u nun ∂D nin dışındaki bir P noktasında analitik olduğunu gösterir[4]. Bu nedenle eğer u , $R \setminus R_0$ bölgesinde özdeş olarak sıfır ise, ∂D 'nin dışındaki her yerde özdeş olarak sıfırdır. Dolayısı ile şu önemli sonuca ulaşmış oluyoruz; eğer u (2.22) radyasyon koşulunu sağlarsa ve $u_0 \equiv 0$ ise, u , ∂D nin dışında (D_+ da) özdeş olarak sıfır olur.

Dikkat edilirse reel k lar için, (2.26) nın sağ tarafı hem (2.23) hem de (2.24) homojen koşulu için sıfırdır,[1]. Dolayısı ile,

$$\int_{\partial B_R} \left(u \frac{\partial \bar{u}}{\partial R} - \bar{u} \frac{\partial u}{\partial R} \right) dS \rightarrow 0 \quad (2.38)$$

dır. (2.38)'den, (2.28) türetilirken izlenen yolla

$$\int_{\partial B_R} \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial R} \right|^2 + k^2 |u|^2 \right\} dS \rightarrow 0$$

yazılır. (2.37) kullanılarak buradan da

$$\int_{\partial B_R} |u_0|^2 \frac{dS}{R^2} \rightarrow 0$$

elde edilir ki, bu da ancak $u_0 \equiv 0$ olması ile mümkündür. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3. SINIR İNTEGRAL DENKLEMLERİ

3.1 Giriş

Birinci bölümde tanımlanan dış problemlerde sınır koşulunun üzerinde tanımlandığı ∂D sınır yüzeyi bazı koordinat sistemlerinde (kartezyen, küresel, dairesel silindirik gibi), [5], bir koordinat yüzeyi ile tümüyle çakıştığında, ilgili problemin kesin çözümü değişkenlerin ayrılması yöntemi kullanılarak elde edilebilmektedir. Bazı problemlerde ∂D sınır yüzeyi bir koordinat yüzeyinin yalnızca bir kısmını oluşturmaktadır (örneğin sınır koşullarının bir yarı sonsuz düzlem üzerinde tanımlanmasında olduğu gibi). Böyle problemlerde kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisine, özellikle analitik devamlılık, Liouville teoremi ve analitik fonksiyonların faktörizasyonuna dayanan Wiener-Hopf yöntemi ile analitik çözümler inşa edilebilmektedirler [1,5].

Bir dış problemin yukarıda bahsedilen ve bunlara benzeyen diğer yöntemlerle kesin çözümünün elde edilmesi mümkün olmadığı durumlarda veya genel olarak uygulanmak üzere çeşitli yaklaşık ve nümerik yöntemler oluşturulmuştur [1,5]. Bu yöntemlerin bir kısmı problemlerin önceki bölümde bahsedilen integral gösterilimlerine dayanır. Yöntemlerin bir kısmında da problemin çözümü, sınır yüzeyi üzerinde bir integral denklemin çözümünün bulunması problemine indirgenir. Örneğin dış Neumann ve dış Dirichlet problemlerinin çözümleri sırası ile tek tabaka ve çift tabaka potansiyelleri olarak adlandırılan ve sınır koşullarının tanımladığı yüzey üzerinde yazılan integraller formlarında arandıklarında, bu potansiyelleri tanımlayan fonksiyonlar için ∂D yüzeyi üzerinde ikinci cins Fredholm integral denklemleri elde edilir [6,7]. Sınır integral denklemleri Helmholtz gösterilimlerinden faydalananak da türetilirler [6]. İntegral denklemlerin çözümleri bulunduktan sonra, problemlerin D_+ bölgesindeki herhangi bir noktadaki çözümleri, ∂D üzerinde bir yüzey integrali hesaplanarak bulunur. Bunu daha açık anlatmak için dış Dirichlet problemini ele alalım ve sınır integral denkleminin de Helmholtz gösteriliminden faydalananak türetildiğini kabul edelim. Dirichlet probleminde ∂D üzerinde v_+

verilmektedir. Sınır integral denklemi ∂D üzerinde bilinmeyen $\frac{\partial v_+}{\partial n_p}$ için yazılır ve bunun çözümü olarak ∂D üzerinde $\frac{\partial v_+}{\partial n_p}$ bulunur. Dolayısı ile D_+ daki bir P noktasında v_+ nın bulunması (1.20) integral gösterilimindeki yüzey integrallerinin hesaplanmasına indirgenmiş olur.

3.2 Sınır İntegral Denklemleri

Bu bölümde dış problemlerle ilgili sınır integral denklemleri hakkında gerekli bilgiler verilecektir. Daha kapsamlı bilgi için [4,6,7] no'lu referanslara başvurulabilir.

Önceki bölümdeki gibi D_- , $\mathbb{R}^3$ de sınırlı bir bölgeyi, ∂D bunun sınırı olan kapalı Lyapunov yüzeyini ve D_+ da ∂D 'nin dışındaki bölgeyi gösterecektir. $\frac{\partial}{\partial n_p}$, ∂D 'ye normal olan $\hat{n}_p$ birim vektörü doğrultusundaki türev işlemidir. $\hat{n}_p$, ∂D 'den D_+ 'nin dışına doğru (D_+ 'nın içine doğru) uzanmaktadır. Bundan başka ∂D 'nin üzerindeki bir noktaya D_- 'den yaklaştığımızda normal türev için $\frac{\partial}{\partial n_p^-}$, D_+ 'dan yaklaştığımızda da $\frac{\partial}{\partial n_p^+}$ sembollerini kullanacağız. $\mathbb{R}^3$ 'deki bir noktayı gene P gibi büyük harfle, ∂D üzerindeki noktaları da p gibi küçük harflerle göstereceğiz.

Bu bölümde Helmholtz denkleminin bir temel çözümünü, uygunluk için

$$\gamma_0(P, Q) = -\frac{e^{ikR}}{2\pi R}, \quad R = |P - Q|$$

formunda alacağız [6].

Şimdi tek tabaka ve çift tabaka potansiyellerinin tanımını vereceğiz.

Tanım 3.1: μ , ∂D 'de tanımlı ve sürekli olmak üzere,

$$(T_0\mu)(P) = \int_{\partial D} \mu(q) \gamma_0(P, q) dS_q, \quad P \in \mathbb{R}^3 \quad (3.1)$$

integrali ile tanımlanan fonksiyona μ yoğunluklu bir TEK TABAKA POTANSİYELİ denir.

Tanım 3.2: v , ∂D 'de tanımlı ve sürekli olmak üzere,

$$(\zeta_0 v)(P) = \int_{\partial D} v(q) \frac{\partial \gamma_0}{\partial n_q}(P, q) dS_q, \quad P \in \mathbb{R}^3 \quad (3.2)$$

integrali ile tanımlanan fonksiyona v yoğunluklu bir ÇİFT TABAKA POTANSİYELİ denir.

Tek tabaka potansiyelinde, μ , ∂D üzerinde bir kaynak dağılımını; v ise çift tabaka potansiyelinde bir dipol dağılımını gösterir. Bilindiği gibi tek tabaka potansiyeli olan $(T_0\mu)(P)$, $\forall P \in \mathbb{R}^3$ için süreklidir, fakat bunun normal türevi ∂D 'da aşağıda verilen sıçramalı süresizliğe sahiptir,[7];

$$\frac{\partial}{\partial n_p^\pm}(T_0\mu)(p) = \pm\mu(p) + \frac{\partial}{\partial n_p}(T_0\mu)(p), \quad p \in \partial D. \quad (3.3)$$

$L_2(\partial D)$, ∂D üzerinde Lebesgue anlamında kare integrallenebilir fonksiyonların oluşturduğu Hilbert uzayı olmak üzere bir $K_0: L_2(\partial D) \rightarrow L_2(\partial D)$ operatörünü aşağıdaki şekilde tanımlayalım;

$$(K_0\mu)(p) = \int_{\partial D} \mu(q) \frac{\partial \gamma_0}{\partial n_p}(p, q) dS_q, \quad p \in \partial D \quad (3.4)$$

Bu operatörün $L_2(\partial D)$ 'deki eşleniği

$$(K_0^*\mu)(p) = \int_{\partial D} \mu(q) \frac{\partial \bar{\gamma}_0}{\partial n_q}(p, q) dS_q, \quad p \in \partial D \quad (3.5)$$

dir. Burada $\bar{\gamma}_0, \gamma_0$ ' ın eşleniğini göstermektedir.

Bu K_0 operatörü cinsinden tek tabaka potansiyelin normal türevleri için (2.3) sıçrama koşulları

$$\frac{\partial}{\partial n_p^\pm}(T_0\mu)(p) = (\pm\mu + K_0\mu)(p), \quad p \in \partial D \quad (3.6)$$

olarak yazılabilirler.

Teorem 3.1: $\forall p \in \partial D$ için $(C_0 v)(p) = (\bar{K}_0^* v)(p)$ (3.7)

dir[6,8].

Üstteki teoremden, çift tabaka potansiyelin sıçramalı süreksizlik koşulları aşağıdaki formda ifade edilebilir;

$$\lim_{P \rightarrow p^\pm} (C_0 v)(P) = \mp v(p) + (\bar{K}_0^* v)(p) \quad (2.8)$$

Burada $P \rightarrow p^+$, D_+ daki bir P noktasından ∂D üzerindeki bir p noktasına yaklaşımını, $P \rightarrow p^-$, D_- daki bir P noktasından ∂D üzerindeki p noktasına yaklaşımını göstermektedir.

Tanım 3.3: Çift tabaka potansiyelin normal türevini $(C_{0_n} v)(p)$ ile gösterelim.

$$(C_{0_n} v)(p) = \frac{\partial}{\partial n_p} \int_{\partial D} v(q) \frac{\partial \gamma_0}{\partial n_q}(p, q) dS_q \quad (3.9)$$

dir.

Bir Lyapunov yüzeyi üzerindeki bir çift tabaka potansiyelin normal türevinin varlığı için yeterli koşul, v yoğunluğunun ∂D 'de diferansiyellenebilir olmasıdır. Dolayısıyla, burada gözönüne alınan tüm durumlarda, v 'nün ∂D 'de sürekli olduğu, yani $v \in C(\partial D)$ olduğu kabul edilecektir. Dolayısıyla,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_p^+} (\zeta_0 v)(p) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_p^-} (\zeta_0 v)(p) = (\zeta_{0_n} v)(p), \quad p \in \partial D \quad (3.10)$$

dir[9].

Bu bölümdeki notasyona uygun olarak

$$\begin{aligned} (\Delta + k^2)u_+(P) &= 0, \quad P \in D_+ \\ \lim_{r_p \rightarrow \infty} \left\{ r_p \left(\frac{\partial u_+}{\partial r_p}(P) - iku_+(P) \right) \right\} & \end{aligned} \quad (3.11)$$

denklemlerini sağlayan u_+ dalga fonksiyonları için aşağıdaki integral gösterilimler elde edilir;

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \left[\frac{\partial u_+}{\partial \mathbf{n}_q}(q) \gamma_0(P, q) - u_+(q) \frac{\partial \gamma_0}{\partial \mathbf{n}_q} \left(\begin{matrix} 2u_+(P) & ; P \in D_+ \\ \begin{matrix} P, q \\ u_+(p) \end{matrix} & ; p \in \partial D \end{matrix} \right) \right] dS_q & \\ \left[0 & ; P \in D_- \right. \\ & = \left(T_0 \frac{\partial u_+}{\partial \mathbf{n}} \right)(P) - (\zeta_0 u_+)(P) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Diğer taraftan Helmholtz denkleminin D_- 'deki herhangi bir u_- çözümü için de

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \left[u_-(q) \frac{\partial \gamma_0}{\partial \mathbf{n}_q}(P, q) - \frac{\partial u_-}{\partial \mathbf{n}_q} \gamma_0 \left(\begin{matrix} 0 & ; P \in D_+ \\ \begin{matrix} P, q \\ u_-(p) \end{matrix} & ; p \in \partial D \end{matrix} \right) \right] dS_q & \\ \left[2u_-(P) & ; P \in D_- \right. \\ & = (\zeta_0 u_-)(P) - \left(T_0 \frac{\partial u_-}{\partial \mathbf{n}} \right)(P) \end{aligned} \quad (3.13)$$

integral gösterilimleri elde edilir. Burada, (2.11)'de verilen (Sommerfeld) radyasyon koşulu, $\gamma_0(P, q)$ tarafından sağlanmaktadır. Dolayısıyla, bu fonksiyon sonsuzda dışa giden yapıda ve bir noktadan çıkan küresel dalgaları göstermektedir. Ayrıca k , $(-k)$ ile yer değiştirirse, bu durumda $\bar{\gamma}_0(P, Q)$ temel çözüm rolü oynar, ve $\bar{\gamma}_0(P, Q)$, $\gamma_0(P, q)$ ile yer değiştirirse (2.12) geçerli kalır.

Önceki bölümde tanımlanan sınır değer problemleri, ya sınır koşulları uygun sıçrama koşullarıyla birlikte Helmholtz gösterilimine uygulanarak veya gerekli çözümün bir tek veya çift tabaka potansiyel formuna sahip olduğu kabul edilerek, sınır integral denklemler şeklinde yeniden formüle edilebilirler. İki yöntem aynı problem için farklı integral denklemler verirler. Bundan başka, Helmholtz gösterimi aslında her bir sınır değer problemi

için iki tane sınır integral denklemi üretir ve bunlar birlikte tek bir çözüme sahiptirler. Buna karşılık, tabaka potansiyelleri yaklaşımı ile türetilen sınır integral denklemleri tek çözüme sahip değildirler. İlk bölümde gösterildiği gibi tanımlanan sınır değer problemlerinin çözümleri tektir. Dolayısı ile bu durum yöntemden kaynaklanmaktadır.

İntegral denklemlerin türetilmesini dış Neumann problemi için vereceğiz ve diğer problemler için karşılık gelen sonuçları, bu problemin sonuçlarıyla birlikte (TABLO 1) de sunacağız.[6]

Klasik tabaka teorisinde, dış Neumann probleminin u_+ çözümü için,

$$u_-(P) = (T_0 u)(P), \quad P \in D_+ \quad (3.14)$$

olduğunu varsayalım ve sonra tek tabaka potansiyelin türevi için (3.3) ifadesi, (2.2) sınır koşulu ile birlikte kullanılarak,

$$\mu(p) + (K_0 \mu)(p) = g_+(p), \quad p \in \partial D \quad (3.15)$$

elde edilir. Eğer (3.15) denklemi, bir $\mu(p)$, $p \in \partial D$, çözümüne sahip ise, bu durumda (3.14) dış Neumann probleminin çözümünü verir. (3.15)'in adjoint homojen denklemi nontrivial çözümlere sahip olduğu zaman, Fredholm alternatifine göre (3.15), ya tek bir çözüme sahip değildir veya çözümü yoktur[4]. Bu durumu aşağıda inceleyelim:

Alternatif Green teoremi (özdeşlikleri) yaklaşımı, (2.2) sınır koşulunun (3.12) gösterilimine uygulanmasından ibarettir. Bu işlem yapılırsa

$$u_+(p) + (\bar{K}_0^* u_+)(p) = (T_0 g_+)(p), \quad p \in \partial D \quad (3.16)$$

elde edilir. Eğer (2.16), bir $u_+(p)$, $p \in \partial D$, çözümüne sahip ise, bu durumda (3.12) den,

$$u_+(P) = \frac{1}{2}(T_0 g_+)(P) - \frac{1}{2}(C_0 u_+)(P), \quad P \in D_+ \quad (3.17)$$

Helmholtz denkleminin D_+ da bir çözümü olur. Ancak burada (3.17)'de verilen fonksiyonun (2.2)'deki sınır koşulunu sağlayıp sağlamadığını bilemiyoruz. Bununla birlikte, böyle olduğunu, (3.6) ve (3.10)'daki tek ve çift tabaka potansiyellerinin normal türevleri ile ilgili ifadeleri ve (2.2) sınır koşulunu, (3.12) gösterimine uygulayarak elde edilen,

$$(C_0 u_+)(p) = -g_+(p) + (K_0 g_+)(p), \quad p \in \partial D \quad (3.18)$$

denklemini elde ederek gösteririz.

(3.17) denklemi, $u_+(p)$ nin, $p \in \partial D$, (3.16) ve (3.18) denklemlerinin her ikisinin de çözümü olması kaydıyla, dış Neumann probleminin bir çözümünü verir. Burada (3.18)

bir uygunluk koşulu gibi görünmesine karşın, (3.16) denkleminin homojen kısmı nontrivial çözümlere sahip olmadığı takdirde bu koşul anlamsız olacaktır. Ancak böyle bir durumda ileride göstereceğimiz gibi (3.16) ve (3.18) ikilisi tek bir çözüme sahip olacaktır.

Görüldüğü gibi aynı sınır değer problemi için iki farklı formülasyondan elde edilen (3.15) ve (3.16) ikinci tür Fredholm integral denklemleri aynı değildir. Burada dikkat edilmesi gereken husus, Helmholtz gösteriminden elde edilen sınır integral denklemlerdeki bilinmeyen fonksiyon, aradığımız çözümün bilinmeyen sınır değeridir. Halbuki tabaka potansiyelindeki integral denklemin bilinmeyen fonksiyonu, D_+ daki çözüm için böyle bir direkt bağlantıya sahip değildir.

Diğer sınır değer problemleri için benzer bir analiz ile benzer sınır integral denklemleri elde edilebilir, [6]. Bunlar (TABLO 1)'de verilmektedirler. Her bir problem için önce tabaka potansiyelleri ile elde edilen denklemler, sonra da Green veya Helmholtz gösterilimlerinden bulunan denklemler verilmektedir.

(TABLO 1)'de görüldüğü üzere, tüm 2. tür sınır integral denklemleri aslında, K_0 operatörünü içermektedir. Bu durum bizi iç Dirichlet (Neumann) ve dış Neumann (Dirichlet) problemleri arasında bir bağlantının varlığına götürür. Şimdi bu ilişkiyi irdeleyelim:

İlk bakışta K_0 operatörünün spektrumunun bu sınır integral denklemlerinin çözümlerini araştırmamız için büyük bir önemi olduğu sezilmektedir. Çünkü, K_0 operatörüne Helmholtz denklemindeki k parametresinin operatör değerli bir fonksiyonu olarak bakılabilir. Bir λ parametresi takdim ederek $(I - \lambda K_0)$ standart formunu elde etmek ve bunu incelemek yerine, K_0 ve $(-K_0)$ operatörlerini ayrı olarak ele alıp incelemek uygun olacaktır.

Tanım 3.4: $\overset{0}{\omega} - K_0 \overset{0}{\omega} = 0$ denkleminin nontrivial $\overset{0}{\omega}$ çözümlerine sahip olduğu reel k değerlerine K_0 ' ın KARAKTERİSTİK DEĞERLERİ denir.

Tanım 3.5: $\overset{0}{\omega} + K_0 \overset{0}{\omega} = 0$ denkleminin nontrivial $\overset{0}{\omega}$ çözümlerine sahip olduğu reel k değerlerine $(-K_0)$ ' ın KARAKTERİSTİK DEĞERLERİ denir.

Not: k, K_0 nın bir karakteristik değeri ise, K_0^* ın da bir karakteristik değeridir, üstelik $\bar{K}_0$ ve $\bar{K}_0^*$ ın da karakteristik değerleridir[9]. Benzer şekilde $(-K_0)$, $(-K_0^*)$, $(-\bar{K}_0)$, $(-\bar{K}_0^*)$ lar da aynı karakteristik değerlere sahiptir, ancak bunları öncekilerden farklı olabilir. Ayrıca, ω , $\omega \pm K_0 \omega = 0$ denkleminin nontrivial bir çözümü ise $\bar{\omega}$ de, $\bar{\omega} \pm \bar{K}_0 \bar{\omega} = 0$ denkleminin nontrivial bir çözümüdür. Benzer olarak $\omega^* \pm K_0^* \omega^* = 0$ sonucu $\bar{\omega}^* \pm \bar{K}_0^* \bar{\omega}^* = 0$ sonucunu içerir.

Tanım 3.6: (2.7) ve (2.8) ile tanımlanan iç Neumann probleminin homojen formunun nontrivial çözümlerinin varolduğu k değerlerine iç Neumann probleminin KARAKTERİSTİK DEĞERLERİ denir. Benzer şekilde (2.1), (2.2) ve (2.3) ile tanımlanan iç Dirichlet problemlerinin homojen formlarının nontrivial çözümlerinin varolduğu k değerlerine de bu problemlerin KARAKTERİSTİK DEĞERLERİ denir.

Bilindiği gibi, dış problemlerin özdeğerleri yoktur [7], fakat iç problemlerin özdeğerleri vardır ve bu özdeğerler reeldir, [10]. K_0 'ın karakteristik değerleri ile iç problemlerin özdeğerleri arasındaki bu ilişki aşağıda ispatlarını vermeyeceğimiz teoremlerle ifade edilebilir [6].

Teorem 3.2:

(A) k , yalnız ve yalnız iç Neuman probleminin bir özdeğeri ise K_0 'ın bir karakteristik değeridir.

(B) k , yalnız ve yalnız iç Dirichlet probleminin bir özdeğeri ise K_0 'ın bir karakteristik değeridir.

Aşağıdaki teoremler, sırasıyla, dış Neumann ve dış Dirichlet problemlerinin tek bir çözüme sahip olduklarını gösterir:

Teorem 3.3: $\omega + K_0\omega = 0$ denkleminin yalnız ve yalnız $\left(T_0 \begin{smallmatrix} 0 \\ \omega \end{smallmatrix} \right)(p) = 0$ ise bir $\begin{smallmatrix} 0 \\ \omega \end{smallmatrix}$ nontrivial çözümü vardır.

Teorem 3.4: $\omega - K_0\omega = 0$ denkleminin yalnız ve yalnız $\left(\zeta_0 \begin{smallmatrix} 0 \\ \omega \end{smallmatrix} \right)(p) = 0$ ise bir $\begin{smallmatrix} 0 \\ \omega \end{smallmatrix}$ nontrivial çözümü vardır.

Peki denklem homojen olmadığı takdirde dış problemlerin çözümleri hala tek midir? Daha önce söz edildiği gibi sorunun integral denklemden değil, yöntemden kaynaklandığını artık görebiliriz. Gerçekten;

Teorem 3.5: (Dış Neumann) k , iç Dirichlet probleminin bir özdeğeri değilse,

$$\tilde{\omega}^* + \bar{K}_0^* \tilde{\omega}^* = T_0 g_+^+ \text{ denklemi } \forall g_+ \in L_2(\partial D) \text{ için tek bir çözüme sahiptir.}$$

İspat: k , iç Dirichlet probleminin bir özdeğeri olmadığından Teorem 2.2(B)'den; k , $(-K)$ 'nın bir karakteristik değeri değildir ve dolayısıyla $(-\bar{K}^*)$ 'ın bir karakteristik değeri değildir. Böylece; $\tilde{\omega}^* + \bar{K}_0^* \tilde{\omega}^* = T_0 g_+^+$, $\forall g_+ \in L_2(\partial D)$ için tek bir ω^* çözümüne sahiptir.

Teorem 3.6: (Dış Dirichlet) k , iç Neumann probleminin bir özdeğeri değilse;

$$\omega - K_0\omega = -\zeta_n f_+ \text{ denklemi } \forall f_+ \in L_2(\partial D) \text{ için tek bir çözüme sahiptir.}$$

İspat: Yukarıdakine benzer olarak yapılır[6].

TABLO 1

**İLGİLİ SINIR İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ CİNSİNDEN
HELMHOLTZ DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ**

PROBLEM	SINIR İNTEGRAL DENKLEMLER	ÇÖZÜMÜN GÖSTERİLİMİ
DİŞ NEUMANN	$\omega + K\omega = g_+$	$u_+ = T\omega \quad (D_+da)$
	$\tilde{\omega}^* + K^*\tilde{\omega}^* = Tg_+$ $\zeta_n \tilde{\omega}^* = Kg_+ - g_+$	$u_+ = \frac{1}{2}Tg_+ - \frac{1}{2}\zeta \tilde{\omega}^* \quad (D_+da)$
İÇ DIRICHLET	$\omega^* + K^*\omega^* = f_-$	$v_- = \bar{\zeta}\omega^* \quad (D_{-de})$
	$\tilde{\omega}^* + K^*\tilde{\omega}^* = f_-$	$v_- = \zeta\tilde{\omega}^* \quad (D_{-de})$
	$\omega + \bar{K}\omega = \zeta_n f_-$ $T\omega = \bar{K}^*f_- - f_-$	$v_- = \frac{1}{2}\zeta f_- - \frac{1}{2}T\omega \quad (D_{-de})$
	$\tilde{\omega}^* + \bar{K}\tilde{\omega} = \bar{\zeta}_n f_-$ $T\tilde{\omega}^* = K^*f_- - f_-$	$v_- = \frac{1}{2}\bar{\zeta}f_- - \frac{1}{2}\bar{T}\tilde{\omega} \quad (D_{-de})$
DİŞ DIRICHLET	$\tilde{\omega}^* - \bar{K}^*\tilde{\omega}^* = f_+$	$v_+ = -\zeta\tilde{\omega}^* \quad (D_+de)$
	$\omega - K\omega = -\zeta_n f_+$ $T\omega = \bar{K}^*f_+ + f_+$	$v_+ = \frac{1}{2}T\omega - \frac{1}{2}\zeta f_+ \quad (D_+de)$
İÇ NEUMANN	$\omega - K\omega = g_-$	$u_- = -T\omega \quad (D_{-de})$
	$\tilde{\omega} - \bar{K}\tilde{\omega} = g_-$	$u_- = -\bar{T}\tilde{\omega} \quad (D_{-de})$
	$\tilde{\omega}^* - \bar{K}^*\tilde{\omega}^* = -Tg_-$ $\zeta_n \tilde{\omega}^* = Kg_- + g_-$	$u_- = \frac{1}{2}\zeta\tilde{\omega}^* - \frac{1}{2}Tg_- \quad (D_{-de})$
	$\omega^* - K^*\omega^* = -\bar{T}g_-$ $\bar{\zeta}_n \omega^* = \bar{K}g_- + g_-$	$u_- = \frac{1}{2}\bar{\zeta}\omega^* - \frac{1}{2}\bar{T}g_- \quad (D_{-de})$

4. MODİFİYE GREEN FONKSİYONU YÖNTEMİ

Bir önceki bölümde dış problemler için türetilen sınır integral denklemlerinin bazı k değerleri için çözümlerinin tek olmadığı belirtilmişti. Dolayısı ile buna bağlı olarak bu k değerleri için dış problemlerin de çözümleri tek olmayacaktır. Halbuki bölüm 1’de gösterildiği gibi dış problemlerin çözümleri tektir. Dolayısı ile sınır integrallerinin çözümlerinde ortaya çıkan bu sorun önceden de belirtildiği gibi yöntemden kaynaklamaktadır. Çözümleri iç problemlerin özdeğerlerine karşı gelen k değerleri için de tek olan sınır integral denklemleri üzerinde çeşitli araştırmalar yapılmış ve modifiye Green fonksiyonları tanımlanarak bu sorun giderilmiştir,[11,12,13].

Bu bölümde, dış sınır değer problemlerinin çözümlerinin tüm k^2 değerleri için tek olduğu sınır integral denklemlerini araştıracağız. Bunu yapmak için daha önce sözü edilen (2.1) ve (2.2) potansiyellerindeki $\gamma_0(P, Q)$ serbest uzay Green fonksiyonu yerine, dış bölgede analitik olan ve sonsuzda (Sommerfeld) radyasyon koşulunu sağlayan bir başka temel çözüm kullanılacaktır.

Bölüm 2’deki gibi Helmholtz denkleminin bir temel çözümü

$$\gamma_0(P, Q) = -\frac{e^{ikR}}{2\pi R} ; R = |P - Q|,$$

olarak verilmektedir. Eğer $g(P, Q)$, Helmholtz denkleminin P ve Q cinsinden Sommerfeld radyasyon koşulunu sağlayan bir dalga çözümü ise,

$$\gamma_1(P, Q) = \gamma_0(P, Q) + g(P, Q) \quad (4.1)$$

de bir temel çözümdür,[12]. Ayrıca bu çözüm bir simetrik temel çözüm olup, $\gamma_1(P, Q) = \gamma_1(Q, P)$ dir,[4,12]. Bundan sonra $\gamma_1(P, Q)$ yu, bir modifiye Green fonksiyonu olarak sunmaktayız.

Eğer, $\omega \in L_2(\partial D)$ ise, γ_0 ve γ_1 den hangisinin temel çözüm olarak kullanılıp kullanılmadığına göre, ω yoğunluğunun tek ya da çift tabaka potansiyellerinin standart veya modifiye formlarını yeniden ve toparlanmış bir halde yazabiliriz.

Böylece $j=0,1$ için,

$$(T_j \omega)(P) = \int_{\partial D} \omega(q) \gamma_j(P, q) dS_q, \quad P \in \mathfrak{R}^3 \quad (4.2)$$

$$(C_j \omega)(P) = \int_{\partial D} \omega(q) \frac{\partial \gamma_j(P, q)}{\partial n_q} dS_q, \quad P \in \mathfrak{R}^3 \quad (4.3)$$

dir. (3.4) de sözü edilen sınır integral operatörü ise K_j ile gösterilir ve

$$(K_j \omega)(p) = \int_{\partial D} \omega(q) \frac{\partial \gamma_j(p, q)}{\partial n_q} dS_q, \quad p \in \partial D \quad (4.4)$$

ifadesiyle tanımlanır. Bunun $L_2(\partial D)$ deki eşleniği;

$$(K_j^* \omega)(p) = \int_{\partial D} \omega(q) \frac{\partial \bar{\gamma}_j(p, q)}{\partial n_q} dS_q, \quad p \in \partial D \quad (4.5)$$

şeklinde olur.

K_j operatörü cinsinden tek ve çift tabaka potansiyelleri için sıçrama koşulları sırasıyla,

$$\frac{\partial(T_j \omega)(p)}{\partial n_p^\pm} = (\pm \omega + K_j \omega)(p), \quad p \in \partial D \quad (4.6)$$

ve

$$\lim_{p \rightarrow p^\pm} (C_j \omega)(p) = (\mp \omega + K_j^* \omega)(p), \quad p \in \partial D \quad (4.7)$$

olur. (4.6) ve (4.7)'nin anlamlı olabilmesi için $g(P, Q)$ nun ∂D sınırının bir komşuluğunda tanımlı olması gerekir.

Ayrıca, (3.10) ile benzer şekilde, çift tabaka potansiyelin normal türevi varsa,

$$\frac{\partial(C_j \omega)}{\partial n_p^+} = \frac{\partial(C_j \omega)}{\partial n_p^-} \quad (4.8)$$

dir[9].

(3.12) deki gösterilim, γ_0 , γ_1 ile yer değiştirdiği takdirde, sağlanmaz. Çünkü, böyle bir durumda $\mathfrak{R}^3$ de nontrival olmayan hiç bir dalga fonksiyonu yoktur, dolayısıyla $g(P, Q)$, D_+ de hiç bir singülariteye sahip değildir. Bununla birlikte, D_+ deki durumu ortadan kaldırarak,

$$T_1 \left(\frac{\partial u_+}{\partial n^+} \right) (P) - (C_1 u_+)(P) = \begin{cases} 2u_+(P), & P \in D_+ \\ u_+(p), & p \in \partial D \end{cases} \quad (4.9)$$

yazabiliriz[13].

Böylelikle, (3.12) ve (4.9) gösterimleri, gerekli işlemler yapılarak ve (3.7) den faydalanılarak aşağıdaki iki sınır integral denklemi verir:

$$T_j \left(\frac{\partial u_+}{\partial n^+} \right) - \bar{K}_j^* u_+ = u_+ , \quad p \in \partial D \quad (4.10)$$

$$K_j \left(\frac{\partial u_+}{\partial n^+} \right) - \frac{\partial (\zeta_j u_+)}{\partial n} = \frac{\partial u_+}{\partial n} , \quad p \in \partial D \quad (4.11)$$

Bu özetlemeleri yaptıktan sonra bu modifiye Green fonksiyonunu belli bir şekilde tanımlayarak çözümlerin tekliği ile ilgili zorluğu ortadan kaldıralım. Burada kurmaya çalışacağımız yöntem, Jones'un 1974 teki sunduğu yöntemin biraz daha geliştirilmişidir[13]. Ancak, sözü edilen sınır integral denklemlerin tek bir şekilde çözülebilirliği, yine Jones'un önerdiği ve izlediği yol ile Green fonksiyonunu uygun bir şekilde modifiye ederek iç problemlerin özdeğerlerindeki her bir durumda bile geçerliğini koruyacaktır. Ayrıca bundan sonraki işlemlerimizi kolaylaştırmak için TABLO 1'i daha kolay anlaşılır bir hale getirerek TABLO 2'yi aşağıda sunmaktayız.

TABLO 2
DIŞ PROBLEMLER İLE İLGİLİ SINIR İNTEGRAL DENKLEMLERİN
CÖZÜMLERİ CİNSİNDEN HELMHOLTZ DENKLEMİNİN CÖZÜMLERİ

PROBLEM	(Sınır İntegral Denklemi) D_+ daki çözümün gösterilimi	(Sınır İntegral Denklemi) ∂D daki çözümün gösterilimi
DIŞ DIRICHLET $v_+ = f_+$	$v_+ = \frac{1}{2} (T_j \omega - \zeta_j f_+)$	$(I - K_j) \omega = -\frac{\partial}{\partial n} (\zeta_j f_+)$
	$v_+ = -\zeta_j \omega$	$(I - \bar{K}_j^*) \omega = f_+$
DIŞ NEUMANN $\frac{\partial u_+}{\partial n} = g_+$	$u_+ = \frac{1}{2} (T_j g_+ - \zeta_j \omega)$	$(I + \bar{K}_j^*) \omega = T_j g_+$
	$u_+ = T_j \omega$	$(I + K_j) \omega = g_+$

Üstteki Green Teoremi Yaklaşımı
Altteki Tabaka Teorisi Yaklaşımı

Şimdi $\mathbb{R}^3$ 'te normalize edilmiş küresel dalga fonksiyonlarını aşağıdaki formlarda tanımlayalım,[11,13];

$$C_{nm}^{e,i}(P) := \left\{ -\frac{ik}{2\pi} \varepsilon_m (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right\}^{\frac{1}{2}} Z_n^{e,i}(kr_p) P_n^m(\cos\theta_p) \cos m\phi_p$$

$$S_{nm}^{e,i}(P) := \left\{ -\frac{ik}{2\pi} \varepsilon_m (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right\}^{\frac{1}{2}} Z_n^{e,i}(kr_p) P_n^m(\cos\theta_p) \sin m\phi_p$$

Burada, $\varepsilon_m = \begin{cases} 1, & m=0 \\ 2, & m>0 \end{cases}$ ve $P_n^m(\cos\theta_p)$ assosiye Legendre polinomları, $Z_n^{e,i}$ ise sırası ile küresel Bessel ve Hankel fonksiyonlarıdır;

$$Z_n^e(kr) = h_n^{(1)}(kr), \quad Z_n^i(kr) = j_n(kr).$$

$C_{nm}^{e,i}$ ve $S_{nm}^{e,i}$ fonksiyonları ortogonal fonksiyonlardır.

Lemma 3.1: $\{C_{nm}^e(p), S_{nm}^e(p) : 0 \leq n \leq m\}$ ve $\left\{ \frac{\partial C_{nm}^e(p)}{\partial n_p}, \frac{\partial S_{nm}^e(p)}{\partial n_p} : 0 \leq n \leq m \right\}$

kümeleri $L_2(\partial D)$ de lineer bağımsızdır.

İspat: Önce $\{C_{nm}^e, S_{nm}^e\}$ kümesini ele alalım ve varsayalım ki lineer bağımlı olsun. Bu durumda, sıfırdan farklı öyle a_{nm}, b_{nm} katsayıları vardır ki;

$$\phi(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (a_{nm} C_{nm}^e(p) + b_{nm} S_{nm}^e(p)) = 0, \quad p \in \partial D$$

dir. Ancak $\phi(P), P \in D_+$, Helmholtz denkleminin sonsuzda radyasyon koşulunu sağlayan bir çözümdür. Bundan dolayı, dış Dirichlet probleminin çözümünün tekliğinden $\phi(P) = 0$ dır. Bununla birlikte $\phi(P) = 0, \partial D$ sınırını içeren herhangi bir küre üzerinde olacağından ve $\{C_{nm}^e, S_{nm}^e\}$ nin bu küreler üzerindeki ortogonallığından,[13], $a_{nm} = b_{nm} = 0$ olur. ($\forall n, m$ için). Bu ise baştaki a_{nm}, b_{nm} katsayılarının sıfırdan farklı olması varsayımımız ile çelişir. Benzer ispat diğer küme için de yapılabilir.

LEMMA 4.1'deki fonksiyon kümelerinin $L_2(\partial D)$ 'de tam oldukları [14]'de gösterilmektedir

4.1 Dış Neumann Problemi İçin Modifiye İntegral Denklemin Çözümünün Tekliği

Green teoreminden elde edilen modifiye sınır integral denklemleri, (4.10) ve (4.11) den,

$$(I + \bar{K}_j^*)\omega = T_j g_+ \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial(\zeta_j \omega)}{\partial n} = (K_j - I)g_+ \quad (4.13)$$

dir. Ayrıca, D_+ daki çözüm, (3.12) ve (4.9) yoluyla,

$$u_+(P) = \frac{1}{2} T_j g_+(P) - \frac{1}{2} \zeta_j \omega, \quad P \in D_+ \quad (4.14)$$

olarak bulunur.

Buna karşılık, tabaka teorisinden elde edilen modifiye sınır integral denklemleri,

$$u_+(P) = (T_j \omega)(P), \quad P \in D_+ \cup \partial D \quad (4.15)$$

çözümünün varlığı kabul edilerek, buradan (4.6) vasıtasıyla

$$(I + K_j)\omega = g_+ \quad (\partial D \text{ üzerinde}) \quad (4.16)$$

olarak elde edilirler.

Burada şunu belirtelim ki, önceki bölüm yardımıyla,

$$(I + K_j)\omega = 0 \quad (4.17)$$

homojen denkleminin nontrivial çözümleri için, k nın reel değerleri, $-K_j$ nin karakteristik değerleri olup; K_j , $L_2(\partial D)$ de kompakt olduğundan [8] $-K_j^*$, $-\bar{K}_j$ ve $-\bar{K}_j^*$ nin de karakteristik değeridir. Ancak, yine önceki bölümde gördüğümüz gibi bu k karakteristik değerleri, (4.12) ve (4.16) denklemlerinin çözümlerini güçleştirmektedir. $j=0$ için, (4.12) ve (4.13) denklem ikilisinin k 'nın reel değerleri için tek bir çözüme sahip olduğunu göstermiştik. Dolayısıyla daha genel bir sonuç olarak aşağıdaki teoremi sunabiliriz:

Teorem 4.1: $\text{Im} k \geq 0$ için; $(I + K_j)\omega = 0 \Leftrightarrow (\partial D \text{ da}) T_j \omega = 0$ dır.

İspat: $j=0$ için ispat [6]'da yapılmıştır.

$j=1$ için, aynı ispat şekli uygulanır. Yani, $T_1 \omega = 0$ (∂D da) ise, $k \in \mathbb{R}$ için dış Dirichlet probleminin çözümlerinin tekliğinden D_+ da $T_1 \omega = 0$ dır. Şu halde, $\frac{\partial T_1 \omega}{\partial n^+} = 0$ dır. Ve (3.6)'dan $(I + K_1)\omega = 0$ olur. Tersine, $(I + K_1)\omega = 0$ ise, yine $T_1 \omega = 0$ dır.

Önceki bölümde gördüğümüz gibi $-K_0$ ın karakteristik değerleri iç Dirichlet probleminin bir özdeğerine karşılık geliyordu. Ancak bu durum K_1 için geçerli değildir. Çünkü $g(P,Q)$, D_- bölgesinde tanımlı değildir. Bununla birlikte, $g(P,Q)$ yu uygun bir şekilde seçerek bu durum sağlanmaktadır.

Teorem4.2: Eğer, $g(P,Q)$ modifiye Green fonksiyonu,

$$|2a_{nm} + 1| < 1 \quad (4.18)$$

ve

$$|2b_{nm} + 1| < 1 \quad (4.19)$$

koşulları sağlanacak şekilde,

$$g(P,Q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [a_{nm} C_{nm}^e(P) C_{nm}^e(Q) + b_{nm} S_{nm}^e(P) S_{nm}^e(Q)] \quad (4.20)$$

ile tanımlanırsa, $k, -K_1$ in bir karakteristik değeri olmak üzere, k , iç Dirichlet probleminin bir özdeğeridir.

İspat: [12,13]'de verilmiştir.

Dolayısıyla $g(P,Q)$ nun uygun bir modifikasyonu ile dış Neumann probleminin tek bir çözümü olduğu görülmektedir.

4.2 Dış Dirichlet Problemi İçin Modifiye İntegral Denklemin Çözümünün Tekliği

Green teoreminden elde edilen modifiye sınır integral denklemleri, (4.10) ve (4.11) den,

$$(I + \bar{K}_j^*) f_+ = T_j \omega \quad (4.21)$$

$$-\frac{\partial (C_j f_+)}{\partial n} = (I - K_j) \omega \quad (4.22)$$

dir. Ayrıca, D_+ daki çözüm, (3.12) ve (4.9) yoluyla,

$$v_+(P) = \frac{1}{2} T_j \omega - C_j f_+(P), \quad P \in D_+ \quad (4.23)$$

olarak bulunur. Burada f_+ nın ∂D da türevlenebilir. olması, (4.22)'deki çift tabaka potansiyelin normal türevinin varlığını garanti altına almaktadır. Bunun aşağıdaki teoremi ifade edebilmemiz açısından büyük önemi vardır.

Ayrıca tabaka teorisinden elde edilen modifiye sınır integral denklemleri, homojen denklemin

$$v_+(P) = -(C_j \omega)(P), \quad P \in D_+ \quad (4.24)$$

çözümünün varlığı kabul edilerek, (4.7) vasıtasıyla

$$(I - \bar{K}_j^*) \omega = f_+ \quad (4.25)$$

elde edilirler.

Burada şunu belirtelim ki, önceki bölüm yardımıyla

$$(I - K_j)\omega = 0 \quad (4.26)$$

homojen denkleminin nontrivial çözümleri için, k nın reel değerleri, K_j nin karakteristik değerleri olup, aynı şekilde K_j^* , $\bar{K}_j$ ve $\bar{K}_j^*$ nin de karakteristik değeridir. Ancak, bu k karakteristik değerleri, (4.21) ve (4.25) denklemlerinin teklikle çözülebilmesini engellemektedir. $j=0$ için, (4.21) ve (4.22) ikilisinin, reel k değerleri için tek bir çözüme sahip olduğu gösterilmişti. Şimdi daha genel olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.3: $p \in \partial D$ için $(I - \bar{K}_j^*)\omega = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial(C_j\omega)}{\partial n} = 0$ dır.

İspat: $j=0$ için ispat [6]'da yapılmıştır..

$j=1$ için; (a) $(I - \bar{K}_j^*)\omega = 0$ olsun. Bu durumda, $v_+ = -C_1\omega$ dır. Ve (4.7) vasıtasıyla ∂D de $v_+ = 0$ olur. $k \in \mathfrak{R}$ için dış Dirichlet probleminin hiç bir özdeğeri olmadığından, yani teklikle çözülebildiğinden, $D_+ \cup \partial D$ da da $v_+ = 0$ olur. Böylece $\frac{\partial(C_1\omega)}{\partial n^+}$ var ve sıfıra eşittir. Ancak ∂D bir Lyapunov yüzeyi olduğundan (4.8) yardımıyla $\frac{\partial(C_1\omega)}{\partial n} = 0$ bulunur. (b) $\frac{\partial(C_1\omega)}{\partial n} = 0$ olsun. $v_+ = C_1\omega$ (D_+ da) diyelim. Bu durumda, dış Neumann probleminin özdeğerlerinin olmaması sebebiyle $v_+ = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla ∂D da da $v_+ = 0$ dır ve (3.7)'den $(I - \bar{K}_j^*)\omega = 0$ elde edilir.

Önceki bölümde K_0 'ın karakteristik değerleri iç Neumann probleminin bir özdeğerine karşı gelmişti, fakat bu durum Sayfa 21'deki benzeri sebeple K_1 için geçerli değildir. Ancak Teorem 4.2'de sözü edilen koşullar gerçekleştiği takdirde, k nın iç Neumann probleminin bir özdeğerine karşılık geldiği gözlemlenebilir.

5. SINIR İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN İTERATİF YÖNTEMLER

5.1 Giriş

Bu bölümde, önceki bölümde kurduğumuz modifiye sınır integral denklemlerin çözümlerinin, ki bunlar artık tek bir şekilde çözülebilmektedirler, iteratif olarak nasıl inşa edilebilecekleri gösterilecektir.

TABLO 2’deki (dış problemler için)sınır integral denklem formülasyonlarını aslında genel bir formda $(I + A_j(k))\omega = h$ şeklinde ifade edebiliriz. Burada $A_j(k)$ lar, $\pm K_j$ veya $\pm \bar{K}_j^*$ şeklinde olup, h ise sınır değerleri ile ilgili bir fonksiyondur. Ayrıca parantezde k yazmamızın sebebi, $A_j(k)$ ların Helmholtz denkleminde görülen k parametresine bağlı sınır integral denklemler olduğunun vurgulanmasıdır.

$j=0$ için, ikinci bölümde gördüğümüz gibi, $A_0(k)$ lar TABLO 2’deki şekli ile alındığı takdirde, k nın her reel değeri için dış problemler, teklikle çözülememektedir, dolayısıyla da $(I + A_0(k))^{-1}$ ters işlemi yoktur. Bununla birlikte, $j=1$ için üçüncü bölümde yapıldığı gibi Green fonksiyonunun modifikasyonu, Teorem 4.2’deki koşulları sağlayacak şekilde alındığı takdirde, çözüm her k değeri için yapılabilir ve dolayısıyla $(I + A_1(k))^{-1}$ vardır. Ayrıca Jones’a göre, bu modifiye Green fonksiyonundaki terimlerin sonlu bir sayısı alınır ve a_{nm} , b_{nm} katsayıları $|2a_{nm} + 1| < 1$ ve $|2b_{nm} + 1| < 1$ koşulunu sağlarsa, bu durumda modifiye integral operatörü $k(k_N)$ alındığı takdirde sınırlı bir şekilde tersi alınabilir olacaktır. Burada k_N , modifikasyondaki terimlerin sayısı olan N ye bağlı bir sonlu sınırı göstermektedir. Buna ek olarak k_N monoton artan olup, $\lim_{N \rightarrow \infty} k_N = \infty$ olur,[12].

Ayrıca bu $A_j(k)$ operatörlerinin $H = L_2(\partial D)$ Hilbert uzayında iç çarpımı ve $\| \cdot \|$ normu ile kompakt operatörler olduğu görülebilir,[8].

$$L_j \omega = (I + A_j(k))\omega = h \quad (5.1)$$

diyelim. L_j operatörleri kendi kendilerine eşlenik değildirler, çünkü sınır integral

operatörlerde kendi kendine eşlenik olma koşulu bunların çekirdekleri ile bu çekirdeklerin kompleks eşleniklerinin eşit olmasını, ki bu çalışmamızdaki notasyonlara göre $\frac{\partial \gamma_j}{\partial n_p} = \frac{\partial \bar{\gamma}_j}{\partial n_q}$ olmasını gerektirir. Ancak γ_j ile $\bar{\gamma}_j$ 'nin normal türevleri arasında eşitlik yoktur. L_j operatörleri kendi kendilerine eşlenik olmamalarına rağmen (5.1) denkleminin çözümü tek olduğu için ($j=1$ için) ve $L_j^* L_j$ nin kendi kendine eşlenik ve aynı zamanda pozitif olmasından dolayı $(L_j^* L_j)^{-1}$ var olur ve dolayısıyla,

$$L_j^* L_j \omega = L_j^* h \quad (5.2)$$

denklemi tek bir $\omega' = (L_j^* L_j)^{-1} L_j^* h$ çözümüne sahip olur ve aşağıdaki lemma vasıtasıyla da aslında (5.1) ve (5.2) denklemlerinin teklikle belirli aynı ω' çözümüne sahip oldukları görülmüş olur.

Lemma 5.1: $\alpha \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

$$L_j \omega = h \Leftrightarrow (I - B_j) \omega = \alpha L_j^* h$$

dir. Burada

$$B_j = I - \alpha L_j^* L_j \quad (5.3)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

İspat: $L_j \omega = h$ olsun. Bu durumda,

$$(I - B_j) \omega = [I - (I - \alpha L_j^* L_j)] \omega = (\alpha L_j^* L_j) \omega = \alpha L_j^* h \text{ bulunur. Tersine,}$$

$$(I - B_j) \omega = \alpha L_j^* h \text{ olsun. Bu durumda,}$$

$$[I - (I - \alpha L_j^* L_j)] \omega = \alpha L_j^* L_j h \Rightarrow L_j^* L_j \omega = L_j^* h$$

$$(\alpha \neq 0) \Rightarrow \alpha L_j^* (L_j \omega - h) = 0 \text{ olur. Ancak,}$$

$$\dim N(L_j) = \dim N(L_j^*) \text{, [8], olduğundan,}$$

$$L_j \omega = h \text{ bulunur.}$$

Uyarı: B_j operatörü birimi içerdiğinden dolayı kompakt değildir. Ancak kendi kendine eşlenik olduğu açıkça görülmektedir. Bu durumda,

$$\|B_j\| = \sup_{\|u\|=1} |(B_j u, u)| \quad (5.4)$$

dir. [16; s.466]

5.2. Steepest Descent Yöntemi ve Kleinman - Roach İterasyonu

Bu kısımda yukarıda amaçlanan ve daha önce Kleinman ve Roach [15] tarafından geliştirilen ve Kantorovich Teoremine [8;s.446] dayanan iterasyon şemasını daha açık

bir şekilde “Steepest Descent” (en dik iniş) yöntemini ve Kantorovich Teoremini kullanarak inşa edeceğiz. Bir sonraki bölümde de yine en dik iniş yöntemine dayanan fakat daha hızlı yakınsayan bir iterasyon şeması önerilecek ve daha hızlı yakınsadığı gösterilecektir. Bu yeni şema Birman Teoremine [8;s.449] dayanmaktadır.

Şimdi amaçladığımız iterasyonları kurabilmemiz için Steepest Descent adı verilen yöntemi açıklayalım. Bu yöntemin amacı, bir lineer denklemi çözme problemini, uygun bir lineer fonksiyonel denklemin minimize edilerek aynı çözüme sahip kılacak şekilde belirlenmesine indirgenmesidir. Bunu gerçekleştirmek için de bu çözüme yakınsayan bir dizi teşkil edilmektedir. Dolayısıyla bu çözüme esas denklemin bir çözümü olarak bakılabilir.

Bu yöntemin bir planı şu şekilde sunulmaktadır:

Yapılandırılmak istenen iterasyon formunda, her bir yaklaşımdan bir sonrakine izlenecek olan yön, verilen fonksiyonelin en dik azalış yönü olacaktır.

Öncelikle bu yöntemi genel bir halde açıklayalım. F bir reel veya kompleks H Hilbert uzayı üzerinde tanımlı bir reel fonksiyonel ve alttan sınırlı olsun. Burada amaçlanan, F için, $F(\omega) \geq F(\omega')$ ($\omega \in H$) olacak şekilde bir $\omega' \in H$ elemanını bulmaktır. Bu problemi çözmek için de, F yi minimize edecek şekilde, yani $\lim_{n \rightarrow \infty} F(\omega_n) = \inf_{\omega \in H} F(\omega)$ olacak şekilde bir $\{\omega_n\}$ dizisi teşkil edilir. Böyle bir durumda bu $\{\omega_n\}$ dizisi, ω' 'ne yakınsayacak şekilde inşa edilir ve F nin sürekli olması koşuluyla bu ω' elemanı problemin çözümü olur. Bu yöntem bir doğrultu türevine sahip fonksiyoneller için formülize edilmektedir.

$\omega \in H$, sabit bir eleman olsun. ω noktasından v yönüne doğru bir ışın, $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $v \neq 0$, $v \in H$ olacak şekilde $\omega + \alpha v$ formundaki elemanların bir kümesidir. Dolayısıyla F yi bir reel değişkenli fonksiyon olarak gösterecek olursak, $F(\omega + \alpha v) = \phi(\alpha; \omega, v)$ şeklinde olur. F fonksiyonelinin ω noktasında, v yönündeki türevi;

$$\frac{\partial F}{\partial v}(\omega) = \frac{1}{\|v\|} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}(\alpha; \omega, v) \Big|_{\alpha=0} = \frac{1}{\|v\|} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(\omega + hv) - F(\omega)}{h} \text{ olur.}$$

Burada, bu türevin, her doğrultuda varolduğu ve bir minimum değeri alması için bir doğrultunun varolduğu kabul edilmektedir.

Tanım 5.1: F , her bir ω noktasındaki her doğrultu için türevlenebilir olsun ve Steepest Descent'in bir doğrultusu H nin her ω noktasında varolsun. Keyfi bir $\omega_0 \in H$ elemanı seçelim, ki bu minimuma sıfırıncı yaklaşım olarak kabul edilecektir. ω_k nin bulunduğu

varsayıldığı takdirde, ω_{k+1} inci yaklaşım, $\omega_{k+1} = \omega_k + \varepsilon_{k+1} v_{k+1}$ formundaki bir noktanın araştırılmasıdır. Burada v_{k+1} , Steepest Descent'in ω_k daki yönüdür. Bu formdaki ε_{k+1} sayısal parametresi, "Descent" (iniş) değeri olarak tanımlanır. Bu ε_{k+1} sayısal parametresini bulabilmek için izleyeceğimiz yol şu şekilde olacaktır:

Varsayalım ki, $\frac{\partial F}{\partial v_{k+1}}(\omega) < 0$ ve $\frac{\partial F}{\partial v}(\omega_k + \alpha v_{k+1})$, α nın bir fonksiyonu olarak sürekli olsun. Bu durumda $\phi(\alpha; \omega_k, v_{k+1})$ fonksiyonu, en az bir $[0, \alpha'_k]$ aralığında azalandır. Burada α'_k , $\frac{\partial \phi}{\partial \alpha}(\alpha; \omega_k, v_{k+1}) = 0$ denkleminin en küçük pozitif köküdür. İşte bu α'_k kökü, ε_{k+1} Descent değeri olarak alınmaktadır.

Descent değerini belirlemek için bu yolu kullanarak bir $\{\omega_k\}$ dizisi elde edilir öyle ki bu durumda bu dizi, minimize edilmiş bir dizi şekline gelir.

Şimdi bu yöntemi bizim problemimize uygulayalım:

$$\exists 0 < m < M < \infty \quad \Rightarrow \quad m^2 = \inf_{\|\omega\|=1} (L_j^* L_j \omega, \omega)$$

$$M^2 = \sup_{\|\omega\|=1} (L_j^* L_j \omega, \omega)$$

$$\|L_j^* L_j\| = M^2$$

olsun. Bu durumda $L_j^* L_j$ operatörü kendi kendine eşlenik olduğundan,

$$(L_j^* L_j \omega, \omega) = (L_j \omega, L_j \omega) = \|L_j \omega\|^2 \text{ ve } \|L_j\|^2 = \|L_j^* L_j\| \text{ olup,}$$

$$\inf_{\|\omega\|=1} \|L_j \omega\| = m$$

$$\sup_{\|\omega\|=1} \|L_j \omega\| = M \quad (5.5)$$

$$\|L_j \omega\| = M$$

elde edilir.

Şimdi fonksiyonelimizi,

$$F(\omega) = (L_j^* L_j \omega, \omega) - \left[(\omega, L_j^* h) + (L_j^* h, \omega) \right] \quad (5.6)$$

olacak şekilde tanımlayalım. Bu formülasyonun $F(\omega) = -(L_j^* L_j \omega, \omega)$ dan elde edildiği açıkça görülmektedir.

Teorem 5.1: (a) (4.2) nin bir ω' çözümü, (5.6) nın bir minimumudur.

(b) (4.6), $\tilde{\omega}$ noktasında bir minimuma sahip ise, $\tilde{\omega}$, (5.2) nin bir çözümü olup, $\tilde{\omega} = \omega'$ dır.

İspat: (a) $L_j^* L_j \omega' = L_j^* h$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= (L_j^* L_j \omega, \omega) - (\omega, L_j^* L_j \omega') - (L_j^* L_j \omega', \omega) \\
 &= (L_j^* L_j (\omega - \omega'), \omega - \omega') - (L_j^* L_j \omega', \omega') \\
 &\geq \inf (L_j^* L_j (\omega - \omega'), \omega - \omega') - (L_j^* L_j \omega', \omega') \\
 &= m^2 (\omega - \omega', \omega - \omega') - (L_j^* L_j \omega', \omega') \\
 &\geq - (L_j^* L_j \omega', \omega') \\
 &\cong F(\omega')
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F(\omega) \geq F(\tilde{\omega}')$$

$\Rightarrow \omega', F$ fonksiyoneli minimize eder.

(b) ω , (4.6) yı minimize ettiğinden,

$F(\omega') = F(\tilde{\omega})$ dır. Dolayısıyla, (a) daki benzeri işlemleri kullanarak,

$$0 = F(\tilde{\omega}) - F(\omega') = (L_j^* L_j (\tilde{\omega} - \omega'), \tilde{\omega} - \omega') \geq m^2 (\tilde{\omega} - \omega', \tilde{\omega} - \omega')$$

olur. Ancak $m^2 > 0$ ve $(\tilde{\omega} - \omega', \tilde{\omega} - \omega') \geq 0$ olduğundan, $\omega = \omega'$ bulunur.

Şimdi, genel halde izlediğimiz gibi, Steepest descent yöntemini (5.6) fonksiyoneline uygulayarak, istenen dizi oluşturulur.

$\omega, v \in H$ için,

$$\begin{aligned}
 F(\omega + v) &= (L_j^* L_j (\omega + v), \omega + v) - [(\omega + v, L_j^* h) + (L_j^* h, \omega + v)] \\
 &= (L_j^* L_j \omega, \omega) - [(\omega, L_j^* h) + (L_j^* h, \omega)] \\
 &\quad + [(L_j^* L_j \omega - L_j^* h, v) + (v, L_j^* L_j \omega - L_j^* h)] + (L_j^* L_j v, v) \\
 &= F(\omega) + [(L_j^* L_j \omega - L_j^* h, v) + (v, L_j^* L_j \omega - L_j^* h)] + (L_j^* L_j v, v) \quad (5.7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial v}(\omega) &= \frac{1}{\|v\|} [(L_j^* L_j \omega - L_j^* h, v) + (v, L_j^* L_j \omega - L_j^* h)] \\
 &= \frac{2}{\|v\|} \operatorname{Re}(L_j^* L_j \omega - L_j^* h, v) = 0
 \end{aligned}$$

olur. Böylece Steepest Descent'in ω_0 daki doğrultusu, $-v_1$ ile belirli olup,

$$v_1 = L_j^* L_j \omega_0 - L_j^* h \text{ dir.}$$

ϵ_1 'i belirlemek için $\frac{\partial \phi}{\partial \alpha}(\alpha; \omega_0, -v_1) = 0$ denkleminde, (5.7) yardımıyla,

$$\phi(\alpha; \omega_0, -v_1) = F(\omega_0 - \alpha v_1) = F(\omega_0) - 2\alpha (v_1, v_1) + \alpha^2 (L_j^* L_j v_1, v_1)$$

ikinci dereceden denklem elde edilerek bu denklemin kökü,

$$\alpha = \varepsilon_1 = \frac{(v_1, v_1)}{(L_j^* L_j v_1, v_1)} \text{ şeklinde bulunur ve sonuçta,}$$

$$\omega_1 = \omega_0 - \varepsilon_1 v_1 \text{ elde edilir.}$$

Benzer şekilde, $\omega_2 = \omega_1 - \varepsilon_2 v_2$; $v_2 = L_j^* L_j \omega_1 - L_j^* h$, $\varepsilon_2 = \frac{(v_2, v_2)}{(L_j^* L_j v_2, v_2)}$

elde edilerek, genel halde iterasyon formumuz

$$\omega_n = \omega_{n-1} - \varepsilon_n v_n; \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (5.8)$$

şeklinde olur.

Burada, $v_n = L_j^* L_j \omega_{n-1} - L_j^* h$, $\varepsilon_n = \frac{(v_n, v_n)}{(L_j^* L_j v_n, v_n)}$ dir.

Dolayısıyla, bu şekilde kurulan $\{\omega_n\}$ dizisi minimize edilmiş bir dizi olur.

Teorem 5.2 (Kantorovich) : Üstte kurulmuş olan $\{\omega_n\}$ dizisi ve teklikle belirli olan ω' çözümü için, $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \omega'$ dir. Ayrıca yakınsaklık hızı,

$$\|\omega_n - \omega'\| \leq \frac{\|v_1\|}{m} \left(\frac{M^2 - m^2}{M^2 + m^2} \right)^n \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (5.9)$$

eşitsizliği ile verilir.

İspat: (4.2) denklemini, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere,

$$\omega = \omega - \alpha L_j^* L_j \omega + \alpha L_j^* h \quad (5.10)$$

şeklinde ifade edelim ve B_j operatörü (5.3) deki gibi tanımlansın. (5.4) ten dolayı B_j operatörü, mümkün en küçük norma sahiptir ve dolayısıyla $\alpha \in \mathbb{R}^+$ sayısının uygun bir seçimi yapılabilir.

Bunun için öncelikle $\|B_j\|$ normunun minimumunu hesaplamamız gereklidir. $\|\omega\| = 1$ için,

$$\begin{aligned} (B_j \omega, \omega) &= (\omega - \alpha L_j^* L_j \omega, \omega) \\ &= (\omega, \omega) - \alpha (L_j^* L_j \omega, \omega) \\ &= \|\omega\|^2 - \alpha \|L_j \omega\|^2 \\ &= 1 - \alpha \|L_j \omega\|^2 \end{aligned}$$

olur. Ancak (5.5) ten;

$$1 - \alpha M^2 \leq 1 - \alpha \|L_j \omega\|^2 \leq 1 - \alpha m^2 \text{ dir.}$$

Dolayısıyla $\|B_j\|$ normunu minimize edebilmemiz için $|1 - \alpha m^2| = |1 - \alpha M^2|$ olması gerekir.

Fakat bu durumda $0 < M < \infty$ olduğundan $\alpha = \frac{2}{M^2 + m^2}$ bulunur. Şu halde,

$$\min_{\alpha = \frac{2}{M^2 + m^2}} \|B_j\| = 1 - \alpha m^2 = \alpha M^2 - 1 = \frac{M^2 - m^2}{M^2 + m^2} \quad (5.11)$$

elde edilir. Ayrıca burada $\min \|B_j\| < 1$ olduğu açıkça görülebilir.

Şimdi Steepest Descent yöntemindeki $F(\omega)$ fonksiyoneli (5.6) daki gibi yeniden ele alalım. ω' , (5.2) nin teklikle belirli bir çözümü olduğundan,

$$\begin{aligned} F(\omega) &= (L_j^* L_j \omega, \omega) - (\omega, L_j^* L_j \omega') - (L_j^* L_j \omega', \omega) \\ &= (L_j^* L_j (\omega - \omega'), \omega - \omega') - (L_j^* L_j \omega', \omega') \\ &= (L_j (\omega - \omega'), L_j (\omega - \omega')) - (L_j \omega', L_j \omega') \\ &= \|L_j (\omega - \omega')\|^2 - \|L_j \omega'\|^2 \end{aligned} \quad (5.12)$$

dir. Ayrıca artık $\alpha \in \mathbb{R}^+$ sayısının uygun bir seçimi yapılabildiğinden, (5.8) daki iterasyon formumuzu $\omega_n = \omega_{n-1} - \alpha v_n$ şeklinde yeniden ifade edebiliriz. Bu durumda (5.10) dan faydalanarak,

$$\omega_n = \omega_{n-1} - \alpha v_n = B_j \omega_{n-1} + \alpha L_j^* h \quad (5.13)$$

olur ve ω' çözümü için de,

$$\omega_n - \omega' = B_j (\omega_{n-1} - \omega') \quad (5.14)$$

şeklinde ifade edilebilir. Buna ek olarak, (4.12) den Teorem 4.1 vasıtasıyla, F fonksiyoneli minimum yapacak şekilde $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$\omega_n = B_j \omega_{n-1} + \alpha L_j^* h$$

elemanları seçildiği takdirde, bunlar aynı zamanda (5.10) denkleminin de çözümleri olacaklardır, ki bu durumda $F(\omega_n) \geq F(\omega_n)$ olur.

Dolayısıyla, (5.14) vasıtasıyla,

$$\begin{aligned} \|\omega_n - \omega'\| &= \|B_j (\omega_{n-1} - \omega')\| \\ &\leq \|B_j\| \|\omega_{n-1} - \omega'\| \\ &\leq \|B_j\| \|B_j\| \|\omega_{n-2} - \omega'\| \\ &= \|B_j\|^2 \|\omega_{n-2} - \omega'\| \\ &\leq \dots \dots \dots \\ &\leq \|B_j\|^n \|\omega_0 - \omega'\| \end{aligned}$$

olup, (5.11)'i kullanarak,

$$\|\omega_n - \omega'\| \leq \left(\frac{M^2 - m^2}{M^2 + m^2} \right)^n \|\omega_0 - \omega'\|$$

olur. ve dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \omega' \text{ bulunur.}$$

Ayrıca,

$$\begin{aligned} \|\omega_0 - \omega'\| &= \|L_j^{-1} L_j (\omega_0 - \omega')\| \\ &\leq \|L_j^{-1}\| \|L_j \omega_0 - L_j \omega'\| \\ &= \|L_j^{-1}\| \|L_j \omega_0 - h\| \\ &\leq \frac{1}{\inf_{\|\omega\|=1} \|L_j \omega\|} \|L_j \omega_0 - h\| \\ &= \frac{1}{m} \|L_j \omega_0 - h\| \end{aligned}$$

dir. Şu halde yakınsaklık hızı,

$$\|\omega_n - \omega'\| \leq \frac{\|L_j \omega_0 - h\|}{m} \left(\frac{M^2 - m^2}{M^2 + m^2} \right)^n \text{ eşitsizliği ile verilir.}$$

5.3 Daha Hızlı Bir İterasyon Şeması

Şimdi, $\{\omega_n\}$ dizisinin ω' çözümüne yakınsama hızından en az p kez ($p=1,2,\dots$) daha hızlı olan bir dizi inşa edelim ve bununla ilgili yakınsaklık hızını belirleyelim.

Öncelikle ω_0 ve v_1 e göre ω_p iterasyonunu yeniden ifade edelim:

$$\omega_0 \in H, \text{ yine keyfi olsun. } L_j^* L_j = U \text{ diyelim.}$$

$$\omega_1 = \omega_0 - \varepsilon_1 v_1 = \omega_0 + \lambda_1^{(1)} v_1; \lambda_1^{(1)} = -\varepsilon_1$$

$$\omega_2 = \omega_1 - \varepsilon_2 v_2$$

$$= \omega_1 - \varepsilon_2 (L_j^* L_j \omega_1 - L_j^* h)$$

$$= \omega_0 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) v_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 L_j^* L_j v_1$$

$$= \omega_0 + \lambda_1^{(2)} v_1 + \lambda_2^{(2)} U v_1; \lambda_1^{(2)} = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2), \lambda_2^{(2)} = -\varepsilon_1 \varepsilon_2$$

$$\omega_3 = \omega_2 - \varepsilon_3 v_3$$

$$= \omega_0 + \lambda_1^{(3)} v_1 + \lambda_2^{(3)} U v_1 + \lambda_3^{(3)} U^2 v_1;$$

Böyle devam ederek,

$$\omega_p = \omega_0 + \lambda_1^{(p)} v_1 + \lambda_2^{(p)} U v_1 + \lambda_3^{(p)} U^2 v_1 + \dots + \lambda_p^{(p)} U^{p-1} v_1 \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned}
\lambda_1^{(p)} &= -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_p) \\
\lambda_2^{(p)} &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{p-1} \varepsilon_p \\
&\dots\dots\dots \\
\lambda_p^{(p)} &= (-1)^p \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_p
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\omega_{(0)} = \omega_0$ olsun.

Şimdi ise

$$\begin{aligned}
\omega_{(1)} &= \omega_0 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 U v_1 + \dots + \lambda_p U^{p-1} v_1 \\
&= \omega_0 + (\lambda_1 + \lambda_2 U + \dots + \lambda_p U^{p-1}) v_1
\end{aligned}$$

elemanın gözönüne alıp, $F(\omega_{(1)})$ minimal olacak şekilde $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ reel katsayılarını belirleyelim.

$$\begin{aligned}
F(\omega_{(1)}) &= (L_j^* L_j \omega_{(1)}, \omega_{(1)}) - \left[(\omega_{(1)}, L_j^* h) + (L_j^* h, \omega_{(1)}) \right] \\
&= \left(U \omega_0 + \sum_{i=1}^p \lambda_i U^i v_1, \omega_0 + \sum_{i=1}^p \lambda_i U^{i-1} v_1 \right) \\
&\quad - \left[\left(\omega_0 + \sum_{i=1}^p \lambda_i U^{i-1} v_1, L_j^* h \right) + \left(L_j^* h, \omega_0 + \sum_{i=1}^p \lambda_i U^{i-1} v_1 \right) \right] \\
&= (L_j^* L_j \omega_0, \omega_0) - \left[(\omega_0, L_j^* h) + (L_j^* h, \omega_0) \right] \\
&\quad + 2 \sum_{i=0}^p \lambda_i (U^{i-1} v_1, v_1) + \sum_{i=1}^p \sum_{r=1}^p \lambda_i \lambda_r (U^i v_1, U^{r-1} v_1) \\
&= F(\omega_0) + 2 \sum_{i=1}^p \lambda_i (U^{i-1} v_1, v_1) + \sum_{i=1}^p \sum_{r=1}^p \lambda_i \lambda_r (U^i v_1, U^{r-1} v_1) \\
\frac{\partial F(\omega_{(1)})}{\partial \lambda_i} &= 0 \quad (i = 1, \dots, p) \quad \text{olacağından,} \\
(U^{i-1} v_1, v_1) + \sum_{r=1}^p \lambda_r (U^i v_1, U^{r-1} v_1) &= 0 \quad (i = 1, \dots, p)
\end{aligned} \tag{5.16}$$

denklem sistemi elde edilir.

Burada türetme işlemi yapılırken;

$$(U^m v_1, U^n v_1) = (U^{m+n} v_1, v_1)$$

kuralı kullanılmıştır. Dolayısıyla bu kuralı yeniden kullanarak (5.16) denklem sistemi,

$$(U^{i-1} v_1, v_1) + \sum_{r=1}^p \lambda_r (U^{i+r-1} v_1, v_1) = 0 \quad (i = 1, \dots, p) \tag{5.17}$$

şeklinde yeniden ifade edilebilir. Ancak F fonksiyoneli için minimum varolduğundan, (5.17) sisteminin bir çözümü var olacaktır. Bu ise λ_r 'lerin belirlenebileceğini açık olarak gösterir.

$\omega_{(1)}$ 'den başlayarak tamamen benzeri yol ile $\omega_{(2)}$ 'yi ve dolayısıyla $\omega_{(n)}$ 'yi inşa edebiliriz ki bu durumda aynı şekilde $\omega_{(n)} = \omega_{(n-1)} - \epsilon_n v_n$ iterasyon formu elde edilir. Burada

$$v_n = L_j^* L_j \omega_{n-1} - L_j^* h$$

olup, ϵ_n ise (5.17) denklem takımının ve her bir $\omega_{(2)}, \omega_{(3)}, \dots, \omega_{(n)}$ terimlerinin oluşturdukları denklem takımlarının çözümlerinin genel halini göstermektedir. Burada şunu belirtmek gerekir ki (5.17) ve diğerleri için çözümleri,

$$\phi(U) = c_1 + c_2 U + c_3 U^2 + \dots + c_p U^{p-1} \quad (5.18)$$

p-1 inci dereceden reel bir operatör polinomu formunda ifade edebiliriz. [8;s.449]

Teorem 5.3: (Birman) Üstte kurulmuş olan $\{\omega_{(n)}\}$ dizisi ve teklikle bilirlir olan ω' çözümü için, $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{(n)} = \omega'$ dür. Ayrıca yakınsaklık hızı,

$$\|\omega_{(n)} - \omega'\| \leq \frac{\|v_1\|}{m} \left[\frac{1}{\theta_p \left(\frac{M^2 + m^2}{M^2 - m^2} \right)} \right]^n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (5.19)$$

eşitsizliği ile verilir. Burada $\theta_p(t) = \cos(p \arccos t)$, $-1 \leq t \leq 1$, p inci dereceden Chebyshev polinomudur.

İspat: (4.18) deki $\phi(U)$ operatör polinomu, $m^2 \leq t \leq M^2$ için,

$$\phi(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \dots + c_p t^{p-1}$$

olacak şekilde reel değerli polinomdur ve dolayısıyla $\phi(U)$ kendi kendine eşleniktir, [8;s.258].

Ayrıca, $\phi(U)U = U\phi(U)$ olduğu açıktır.

Şimdi bu $\phi(U)$ operatör polinomu için, (5.2) denklemini,

$$\tilde{\omega} = \omega - \phi(U)U\omega + \phi(U)L_j^* h \quad (5.20)$$

şeklinde ifade edelim ve B_j operatörünü $B_j = I - \phi(U)U$ olacak şekilde tanımlayalım. Teorem 5.2 deki ispata benzer yolla, B_j operatörünün mümkün en küçük norma sahip olmasından pozitif reel değerli $\phi(t)$ polinom fonksiyonu için uygun bir seçim yapıldığını gösterelim.

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= B_j \omega_0 + \phi(U) L_j^* h \\
&= \omega_0 - \phi(U) U \omega_0 + \phi(U) L_j^* h \\
&= \omega_0 - \phi(U) (U \omega_0 - L_j^* h) \\
&= \omega_0 - \phi(U) v_1 \\
&= \omega_0 + \sum_{r=1}^p c_r U^{r-1} v_1
\end{aligned}$$

yazalım. Bu durumda Teorem 5.1 vasıtasıyla $F(\tilde{\omega}_1) \geq F(\omega_{(1)})$ olur. Şu halde (5.14) vasıtasıyla ve $\omega_{(0)} = \omega_0$ olduğundan,

$$\|\omega_{(n)} - \omega'\| = \|B_j(\omega_{n-1} - \omega')\| \leq \frac{\|v_1\|}{m} \|B_j\|^n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (5.21)$$

eşitsizliği Kantorovich teoreminin ispatında yer alan benzeri argümanları kullanarak elde edilebilir.

Şimdi $\|B_j\|$ normunu minimize edecek olan $\phi(t)$ polinomunu tanımlayalım.

$$\begin{aligned}
\|\phi(U)\| &\leq \max_{t \in [m^2, M^2]} |\phi(t)| \\
\text{olduğundan,} \quad \|B_j\| &\leq \max_{t \in [m^2, M^2]} |1 - t\phi(t)| \text{ dir.}
\end{aligned}$$

Dolayısıyla $\max_{t \in [m^2, M^2]} |1 - t\phi(t)|$ minimal olacak şekilde $\phi(t)$ polinomu için bir seçim yapmak mümkündür. $\Psi(t) = 1 - t\phi(t)$ diyelim. Bu durumda, $\Psi(t)$ polinomu $\Psi(0) = 1$ olacak şekilde $[m^2, M^2]$ aralığında sıfırdan, en küçük maksimum sapmaya sahip p inci dereceden bir polinom olacaktır, [16; s.346].

$$\text{Ayrıca,} \quad \Psi(t) = \frac{\theta_p\left(\frac{2t - M^2 - m^2}{M^2 - m^2}\right)}{\theta_p\left(\frac{M^2 + m^2}{M^2 - m^2}\right)}, \quad [8; s.449]$$

şeklinde yazılabilmektedir. Bu durumda,

$$\max_{t \in [m^2, M^2]} \left| \theta_p\left(\frac{2t - M^2 - m^2}{M^2 - m^2}\right) \right| = \max_{t \in [-1, 1]} |\theta_p(t)| = 1$$

olduğundan,

$$\|B_j\| \leq \max_{t \in [m^2, M^2]} |\Psi(t)| = \frac{1}{\theta_p\left(\frac{M^2 + m^2}{M^2 - m^2}\right)}$$

olur. Şu halde bunu (5.21) eşitsizliğine uygularsak,

$$\|\omega_{(n)} - \omega'\| \leq \frac{\|v_1\|}{m} \frac{1}{\left(\theta_p \left(\frac{M^2 + m^2}{M^2 - m^2}\right)\right)^n}$$

bulunmuş olur ve böylece ispat biter.

Şimdi, $\{\omega_{(n)}\}$ dizisinin teklikle belirli ω' çözümüne yakınsamasının, $\{\omega_n\}$ dizisinin aynı ω' çözümüne yakınsamasından en az p kez daha hızlı olduğunu gösterelim. Bunu yapmak için aşağıdaki teoremi ispatlamamız yeterlidir.

Teorem 5.4:

$$\|\omega_{(n)} - \omega'\| \leq \frac{\|v_1\|}{m} \left[\left(\frac{M^2 - m^2}{M^2 + m^2} \right)^p \right]^n \quad (p, n \in \mathbb{N}) \quad (5.22)$$

dir.

İspat: Teorem 5.3 teki B_j operatörünü yeniden tanımlayalım, yani $B_j = I - \phi(U)U$ olsun. B_j operatörünün mümkün en küçük norma sahip olabilmesi için pozitif reel değerli $\phi(t)$, $m^2 \leq t \leq M^2$, polinom fonksiyonu için Teorem 5.3' tekinden farklı olarak uygun bir seçimini yeniden belirleyelim. $\phi(t)$ reel değerli ve reel katsayılı bir polinom olduğundan buna keyfi bir pozitif reel sayı gözüyle bakabiliriz. Bu durumda, Kantarovich teoremindeki B_j operatörünün normunun minimize edilmesi için kullanılan yöntemi uygularsak,

$$\|B_j\| \leq \max_{t \in [m^2, M^2]} |1 - t\phi(t)|$$

olduğundan,

$$c_1 = c_2 = \dots = c_p = \frac{2}{M^2 + m^2} \text{ olup, } \phi(t), t \in [m^2, M^2], \text{ polinomu için,}$$

$$\phi\left(\frac{M^2 - m^2}{M^2 + m^2}\right) = \frac{2}{M^2 + m^2} \left[1 + \left(\frac{M^2 - m^2}{M^2 + m^2}\right) + \left(\frac{M^2 - m^2}{M^2 + m^2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{M^2 - m^2}{M^2 + m^2}\right)^{p-1} \right]$$

olacak şekilde bir seçim yapmak mümkün olur.

Şu halde, $1 - t\phi(t) \leq 1 - m^2\phi(t)$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\min_{\substack{c_i = \frac{M^2 - m^2}{M^2 + m^2} \\ (i=1, \dots, p)}} \|B_j\| &= 1 - m^2 \frac{2}{M^2 + m^2} \left[1 + \left(\frac{M^2 - m^2}{M^2 + m^2} \right) + \left(\frac{M^2 - m^2}{M^2 + m^2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{M^2 - m^2}{M^2 + m^2} \right)^{p-1} \right] \\
&= 1 - m^2 \frac{2}{M^2 + m^2} \frac{1 - \left(\frac{M^2 - m^2}{M^2 + m^2} \right)^p}{1 - \frac{M^2 - m^2}{M^2 + m^2}} \\
&= 1 - m^2 \frac{2}{M^2 + m^2} \frac{M^2 + m^2}{2m^2} \left[1 - \left(\frac{M^2 - m^2}{M^2 + m^2} \right)^p \right] \\
&= \left(\frac{M^2 - m^2}{M^2 + m^2} \right)^p
\end{aligned}$$

bulunur. Sonuçta B_j operatörünün normunun minimize edilmiş olan bu yeni değerini (5.21) eşitsizliğinde yerine koyarsak (5.22) elde edilmiş olur.

Sonuç:

$$\frac{1}{\theta_p \left(\frac{M^2 + m^2}{M^2 - m^2} \right)} \leq \left(\frac{M^2 - m^2}{M^2 + m^2} \right)^p \leq \frac{M^2 - m^2}{M^2 + m^2} \quad (p \in \mathbb{N}) \text{ dir.}$$

İspat:

$$\frac{M^2 - m^2}{M^2 + m^2} < 1 \text{ olduğundan, } \left(\frac{M^2 - m^2}{M^2 + m^2} \right)^p \leq \frac{M^2 - m^2}{M^2 + m^2} \text{ olduğu açıktır.}$$

p inci dereceden keyfi bir $s(t)$ polinomu için, $|\xi| > 1$ olmak üzere $|s(\xi)| \leq |\theta_p(\xi)| \max_{t \in [-1,1]} |s(t)|$

[17;s.17], olduğundan, bu eşitsizlikte, $s(t) = t^p$ ve $\xi = \frac{M^2 + m^2}{M^2 - m^2}$ alındığı takdirde,

$$\frac{1}{\theta_p \left(\frac{M^2 + m^2}{M^2 - m^2} \right)} \leq \left(\frac{M^2 - m^2}{M^2 + m^2} \right)^p$$

bulunur.

6. SONUÇ

Bu çalışmada, Helmholtz denklemi için tanımlanan dış problemlerle ilgili sınır integral denklemlerinin iteratif çözüm yöntemleri ele alınmıştır. Önce Kleinman ve Roach [15] tarafından geliştirilen ve Kantorovich tarafından verilen bir teoreme dayanan iterasyon şeması Steepest Descent (en dik iniş) yöntemi ve gene Kantorovich'in bu teoremi ile yeniden yorumlanmış ve türetilmiştir. Daha sonra da gene en dik iniş yöntemine dayanan fakat önceki iterasyon şemasından daha hızlı yakınsayan bir iterasyon şeması, Birman tarafından verilen bir teoreme dayanarak önerilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] **D.S. Jones**, Acoustic and Electromagnetic Waves, Clarendon Press, Oxford, (1986).
- [2] **F.B. Hildebrand**, Advanced Calculus for Applications, Prentice Hall, New Jersey, (1996).
- [3] **I.N. Sneddon**, Elements of Partial Differential Equations, 18th printing, John Wiley, New York, (1983).
- [4] **D.L. Colton**, Partial Differential Equations, Birkhäuser, New York, (1988).
- [5] **J.J. Bowman, T.B.A. Senior, K.E. Uslenghi**, Electromagnetic and Acoistic Scattering by Simple Shapes, North-Holland, Amsterdam, (1969).
- [6] **R.E. Kleinman and G.F. Roach**, Boundary Integral Equations for the Three-Dimensional Helmholtz Equation, SIAM Review, vol.16, No.2, pp 214-236, (1974).
- [7] **V.I. Smirnov**, A Course of Higher Mathematics, Vol.IV, Pergamon Press, Oxford, (1964).
- [8] **L.V. Kantorovich and G.P. Akilov**, Functional Analysis, Pergamon Press, Oxford, (1982).
- [9] **N.M. Günter**, Potential Theory and Its Applications to Basic Problems of Mathematical Physics, Ungar, New York, (1967).
- [10] **I. Stakgold**, Boundary Value Problems of Mathematical Physics, vol.II, Macmillan, New York, (1968).
- [11] **F. Ursell**, On the Exterior Problems of Acoustics, Proc. Camb. Phil. Soc., 74, pp 117-125, (1973).
- [12] **D.S. Jones**, Integral Equations for the Exterior Acoustic Problem, Q. Jl. Mech. appl. Math., 28, pp 129-142, (1974).
- [13] **R.E. Kleinman and G.F. Roach**, On Modified Green Functions in Exterior Problems for the Helmholtz Equation, Proc. Roy. Soc. London, A 383, pp 313-332, (1982).
- [14] **I.N. Vekua**, New Methods for Solving Elliptic Equations, New York, Wiley, (1967).
- [15] **R.E. Kleinman and G.F. Roach**, Iterative Solutions of Boundary Integral Equations in Acoustics, Proc. Roy. Soc. London, A 417, pp 45-47, (1988).
- [16] **E.Kreyszig**, Introductory Functional Analysis with Applications, New York, Wiley, (1978).
- [17] **L. Fox and I.B. Parker**, Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis, Oxford University Press, London, (1968).

EK-A

Tanım:

Bir S yüzeyi verilmiş olsun. Eğer; S ,

- 1°) S yüzeyinin her bir noktasında, S , bir teğet düzleme sahip,
- 2°) Bir küre yüzeyinin herhangi bir P_0 noktası, P_0 dan bağımsız olarak r yarıçapı ile tanımlanabilir, dolayısıyla, S yüzeyinin, küre içine düşen Σ parçası, P_0 noktasındaki n_0 normaline paralel olan doğrular şeklinde,
- 3°) P_1 ve P_2 , S yüzeyinin herhangi iki noktası; n_1 ve n_2 , P_1 ve P_2 noktalarında S yüzeyine dışa doğru normaller olacak şekilde birim normaller; A ve δ sabitler, $0 < \delta \leq 1$ ve R , P_1 ile P_2 noktaları arasındaki uzaklık olmak üzere, $|n_1 - n_2| \leq AR^\delta$,
- 4°) S yüzeyinin herhangi bir σ parçasının keyfi bir P noktasından çıkan ω_σ açısı sınırlı :
 $|\omega_\sigma| \leq K$, $\exists K > 0$, koşullarını sağlıyorsa,

S yüzeyine bir LYAPUNOV YÜZEYİ denir.

ÖZGEÇMİŞ

Remzi Tunç MISIRLIOĞLU

20.12.1970 tarihinde Şanlıurfa'da doğdu. İlköğrenimini Hatay'ın Reyhanlı İlçesi Oğuzhan İlkokulu'nda tamamlayıp, ortaöğrenimini sırasıyla Adapazarı Atatürk Ortaokulu ve İstanbul Bahçelievler Lisesi'nde bitirdi. Yüksek Öğrenimini 1995 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde tamalayarak, aynı yılın ekim ayında İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Yüksek Lisans Programını kazandı. Burada bir yıl İngilizce hazırlık okuduktan sonra, asıl programa başladı. 1997 yılında evlendi.

1998 yılı şubat ayında İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Mühendisliği Bölümü'ne Araştırma Görevlisi olarak girdi. Halen bu görevini sürdürmektedir.