

**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ZAMANLANDIRILMIŞ PETRİ AĞLARINDA ATEŞLENEBİLİRLİK  
PROBLEMLERİNİN İNCELENMESİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
Oktay YURTTAKAL**

**Anabilim Dalı : Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği**

**Programı : Elektronik Mühendisliği**

**HAZİRAN 2009**



**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ZAMANLANDIRILMIŞ PETRİ AĞLARINDA ATEŞLENEBİLİRLİK  
PROBLEMLERİNİN İNCELENMESİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
Oktay YURTTAKAL  
(504071216)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 04 Mayıs 2009**

**Tezin Savunulduğu Tarih : 01 Haziran 2009**

**Tez Danışmanı : Doç. Dr. Mürvet KIRCI (İTÜ)  
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Ece Olcay GÜNEŞ (İTÜ)  
Doç. Dr. Salman KURTULAN (İTÜ)**

**HAZİRAN 2009**



## ÖNSÖZ

Bilim ve teknolojideki hızlı gelişmeler, birçok ayrık olaylı sistemi beraberinde getirmiştir. Ayrık olaylı bir sistemin tasarımını, kontrolünü ve analizi yapabilmek için birkaç yöntem önerilmiştir. Bu yöntemlerin arasından kullanıma en elverişli olan Petri ağlarıdır. Bu çalışmada ise Petri ağlarına zaman olgusunun katılarak önerilen yeni modellerle sistemin çalışma durumları değerlendirilmiştir.

Tez çalışmaların süresince desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, bilgi ve önerilerini benimle her zaman paylaşan tez danışmanım Doç. Dr. Mürvet KIRCI'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmalarım süresince beni destekleyen Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu'na (TÜBİTAK) çok teşekkür ederim.

Son olarak, inanılmaz sabırları ve bana olan sonsuz sevgileri ile hep yanımda olan ve beni destekleyen kardeşim Y.Mimar Özlem YURTTAKAL, annem Gülhan YURTTAKAL ve babam Mehmet YURTTAKAL'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Mayıs 2009

Oktay YURTTAKAL

Elektronik ve Haberleşme Mühendisi



## İÇİNDEKİLER

### Sayfa

|                                                                                                                                                                                    |      |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| ÖNSÖZ.....                                                                                                                                                                         | iii  |
| İÇİNDEKİLER .....                                                                                                                                                                  | v    |
| KISALTMALAR .....                                                                                                                                                                  | vii  |
| ÇİZELGE LİSTESİ.....                                                                                                                                                               | ix   |
| ŞEKİL LİSTESİ.....                                                                                                                                                                 | xi   |
| ÖZET.....                                                                                                                                                                          | xiii |
| SUMMARY .....                                                                                                                                                                      | xv   |
| 1. GİRİŞ .....                                                                                                                                                                     | 1    |
| 1.1 Petri Ağları-PA (Petri Nets- PNs) .....                                                                                                                                        | 2    |
| 1.2 Zamanlandırılmış Petri Ağları Üzerine Yapılmış Çalışmalar .....                                                                                                                | 6    |
| 2. ZAMANLANDIRILMIŞ PETRİ AĞLARI.....                                                                                                                                              | 11   |
| 2.1 Geçişleri Zamanlandırılmış Petri Ağında Ateşlenme Gecikmesinin Belirlenmesi .....                                                                                              | 11   |
| 2.1.1 Yarış modeli (Race model) .....                                                                                                                                              | 11   |
| 2.1.2 Önseçim modeli (Preselection model) .....                                                                                                                                    | 12   |
| 2.2 Önerilen Petri Ağı Modeli.....                                                                                                                                                 | 13   |
| 2.2.1 Ateşlenebilirlik derecesinin bulunması.....                                                                                                                                  | 17   |
| 2.2.1.1 Bir giriş yerine sahip geçiş ile bir çıkış geçişine sahip yerin birleşmesi halinde geçişe ait ateşlenebilirlik derecesinin bulunması .....                                 | 17   |
| 2.2.1.2 Sadece bir çıktı okuna sahip yerlerin beslediği ortak çıkış geçişinin ateşlenebilirlik derecesinin bulunması .....                                                         | 18   |
| 2.2.1.3 Tek bir giriş yerinden bir çok geçişin beslenmesi durumunda geçişlerin ateşlenebilirlik derecelerinin bulunması .....                                                      | 18   |
| 2.2.1.4 Birden fazla ortak giriş yerinden beslenen ve bu giriş yerlerinden de farklı geçişlere ok yönleneceği halindeki geçişler için ateşlenebilirlik derecesinin bulunması ..... | 22   |
| 2.3 Genelleştirilmiş Zamanlı Petri Ağı Matematiksel Modeli .....                                                                                                                   | 28   |
| 2.4 Erişilebilirlik Analizi.....                                                                                                                                                   | 35   |
| 2.4.1 Erişilebilirlik analizinde kilitlenme durumu .....                                                                                                                           | 41   |
| 2.5 Yazılım .....                                                                                                                                                                  | 41   |
| 3. ZAMAN TUTMALI PETRİ AĞLARI (HOLDING TIME PETRİ NETS)...                                                                                                                         | 43   |
| 4. STOKASTİK ZAMANLANDIRILMIŞ PETRİ AĞLARI .....                                                                                                                                   | 53   |
| 4.1 Stokastik İşlem (Stochastic Process).....                                                                                                                                      | 54   |
| 4.2 Sürekli Zamanlı Markov Zinciri (SZMZ) .....                                                                                                                                    | 56   |
| 4.3 Zamanlandırılmış Petri Ağlarından Hafıza Özellikleri (Memory Policy).....                                                                                                      | 61   |
| 4.3.1 Yeniden örnekleme (Resampling) .....                                                                                                                                         | 61   |
| 4.3.2 Mümkün olma hafızası (Enabling Age Memory) .....                                                                                                                             | 62   |
| 4.3.3 Hafıza yaşı modeli (Age Memory) .....                                                                                                                                        | 63   |
| 4.4 Stokastik Petri Ağları-SPA (Stochastic Petri Nets,SPN) .....                                                                                                                   | 63   |
| 4.5 Genelleştirilmiş Stokastik Petri Ağları.....                                                                                                                                   | 68   |

|                                                             |           |
|-------------------------------------------------------------|-----------|
| 4.5.1 GSPA Analiz Yöntemleri.....                           | 72        |
| 4.5.1.1 SPA analiz yönteminin genişletilmiş hali ile analiz | 72        |
| 4.5.1.2 İndirgenmiş markov zinciri yöntemiyle çözüm         | 73        |
| <b>5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....</b>                            | <b>83</b> |
| <b>KAYNAKLAR.....</b>                                       | <b>85</b> |
| <b>EKLER.....</b>                                           | <b>87</b> |

## KISALTMALAR

|             |                                        |
|-------------|----------------------------------------|
| <b>AOS</b>  | : Ayrık Olay Sistemleri                |
| <b>BZ</b>   | : Birim Zaman                          |
| <b>GSPA</b> | : Genelleştirilmiş Stokastik Petri Ağı |
| <b>PA</b>   | : Petri Ağı                            |
| <b>RPZA</b> | : Rastgele Zamanlandırılmış Petri Ağı  |
| <b>SPA</b>  | : Stokastik Petri Ağı                  |
| <b>SZMZ</b> | : Sürekli Zamanlı Markov Zinciri       |
| <b>ZPA</b>  | : Zamanlandırılmış Petri Ağı           |
| <b>ZTPA</b> | : Zaman Tutmalı Petri Ağı              |



## ÇİZELGE LİSTESİ

### Sayfa

|                                                                                             |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Çizelge 2.1 :</b> Verilen ağa ait [0 3] bz. aralığında işaretleme değişimi.....          | 35 |
| <b>Çizelge 3.1 :</b> Şekil 3.3’de verilen modelde yer alan yer geçişlerin açıklamaları..... | 48 |
| <b>Çizelge 4.1 :</b> Şekil 4.13’de gözüken ağda yer alan geçiş ve yerlerin açıklaması. .... | 78 |



## ŞEKİL LİSTESİ

### Sayfa

|                                                                                    |    |
|------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Şekil 1.1 : Petri ağı grafiksel gösterilimi. ....                                  | 3  |
| Şekil 1.2 : Örnek bir Petri ağı modeli. ....                                       | 5  |
| Şekil 2.1 : Yarış modeline ait PA örneği. ....                                     | 12 |
| Şekil 2.2 : Önseçimli, anlık ateşlenmeli Petri ağı örneği. ....                    | 12 |
| Şekil 2.3 : İki fazda ateşlenmeli önseçimli PA örneği. ....                        | 13 |
| Şekil 2.4 : ZPA örneği. ....                                                       | 14 |
| Şekil 2.5 : 2.2.1.1 durumuna örnek bir Petri ağı. ....                             | 17 |
| Şekil 2.6 : 2.2.1.2 durumuna örnek bir Petri ağı. ....                             | 18 |
| Şekil 2.7 : 2.2.1.3 durumuna örnek bir Petri ağı. ....                             | 19 |
| Şekil 2.8 : Örnek bir Petri ağı. ....                                              | 20 |
| Şekil 2.9 : 2.2.1.4 duruma ait örnek bir Petri ağı. ....                           | 23 |
| Şekil 2.10 : Örnek bir Petri ağı. ....                                             | 24 |
| Şekil 2.11 : Örnek bir Petri ağı. ....                                             | 29 |
| Şekil 2.12 : Erişilebilirlik analizi için örnek Petri ağı. ....                    | 37 |
| Şekil 3.1 : Süre tutmalı Petri ağı örneği. ....                                    | 44 |
| Şekil 3.2 : Süre tutmalı Petri ağı örneği. ....                                    | 45 |
| Şekil 3.3 : Basit bir üretim sistemine ait Petri ağı modeli. ....                  | 47 |
| Şekil 3.4 : $p_2$ yerinde bulunan elverişli ve elverişsiz jeton dağılımı. ....     | 50 |
| Şekil 4.1 : Sürekli zamanlı markov zincirine ait örnek yörünge (sample path). .... | 57 |
| Şekil 4.2 : Örnek bir durum geçiş diyagramı. ....                                  | 58 |
| Şekil 4.3 : Makinenin çalışmasına ait durum geçiş diyagramı. ....                  | 60 |
| Şekil 4.4 : Örnek bir yarış modeli. ....                                           | 61 |
| Şekil 4.5 : Mümkün olma hafızası modeline örnek bir Petri ağı. ....                | 62 |
| Şekil 4.6 : Hafıza yaşı modeline örnek bir Petri ağı. ....                         | 63 |
| Şekil 4.7 : Örnek Stokastik Petri ağı. ....                                        | 66 |
| Şekil 4.8 : Verilen ağa ait erişilebilirlik ağacı. ....                            | 67 |
| Şekil 4.9 : SPA'ya ait Markov zinciri. ....                                        | 68 |
| Şekil 4.10 : Engelleyici Ok gösterilimi. ....                                      | 70 |
| Şekil 4.11 : Örnek GSPA modeli. ....                                               | 71 |
| Şekil 4.12 : Örnek GSPA modeli ve erişilebilirlik ağacı. ....                      | 73 |
| Şekil 4.13 : Basit üretim sisteminin Petri ağı modeli. ....                        | 77 |
| Şekil 4.14 : Şekil 4.13' deki sistemin erişilebilirlik ağacı. ....                 | 79 |
| Şekil 4.15 : Sistemin indirgenmiş gömülü Markov zinciri. ....                      | 80 |
| Şekil A.1 : Zamanlandırılmış örnek bir Petri ağı modeli. ....                      | 89 |



# **ZAMANLANDIRILMIŞ PETRİ AĞLARINDA ATEŞLENEBİLİRLİK PROBLEMLERİNİN İNCELENMESİ**

## **ÖZET**

Petri ağları, ayrık olay sistemlerini modellemede, kontrol etmede, analiz etmede oldukça elverişli bir uygulamadır. Petri ağı modelinin, diğer modellere göre daha uygulanabilir, daha etkili analiz sonuçları vermesi gibi üstün özellikleri nedeniyle gün geçtikçe kullanımı yaygınlaşmaktadır ve model her geçen gün bir adım daha geliştirilmektedir. Klasik Petri ağları gerçek zamanlı sistemleri kontrol etmede elverişli değildir çünkü bu modelin içinde zaman ifadesi yer almamaktadır. Bu nedenle klasik Petri ağlarının içine zaman olgusu eklenerek zamanlandırılmış Petri ağları oluşturulmuştur. Bu çalışmada ise zamanlandırılmış Petri ağları ele alınmıştır.

Zamanlandırılmış Petri ağları, genel anlamda zaman ifadesinin modele eklenmesi yöntemine göre iki gruba ayrılmıştır. İlk model deterministik olan zaman ifadesinin modele eklenmesiyle elde edilen deterministik zamanlandırılmış Petri ağlarıdır. Bu bölüm, zaman ifadesinin ağıın yerlerine, oklarına ve geçişlerine atanması şeklinde üç alt gruba ayrılır. İkinci model ise rasgele olan zaman ifadelerinin modele eklenmesiyle oluşturulmuş stokastik Petri ağlarıdır. Her iki modelinde uygulama alanına göre birbirine göre üstün oldukları noktalar vardır. Bu çalışmada ise, hem stokastik hem de deterministik Petri ağları ele alınmıştır.

Bölüm 2’de geçişlerine deterministik olarak zaman ifadesin atandığı Petri ağı modeli ele alınmış ve bu modele ok ağırlıklarının birden büyük olması için ateşlenebilirlik derecesinin bulunması, mümkün olan geçişlerin aynı anda ateşlenmesi gibi özellikler eklenerek matematiksel olarak geliştirilmiştir. Geliştirilen bu modelle erişilebilirlik ağacının nasıl oluşturulacağı incelenmiştir. Zamanlandırılmış Petri ağlarına ilişkin önerilen matematiksel model ve erişilebilirlik ağacı oluşturmada kullanılan analiz yöntemleri kullanılarak MATLAB programı yardımıyla yazılım oluşturulmuştur ve bu yazılım çeşitli örnekler üzerinde uygulanarak, ağa ilişkin erişilebilirlik ağacı çıkartılmıştır.

Bölüm 3’de anlık olarak ateşlenen, geçişe ait deterministik olan zaman ifadesinin ağıın geçişine atanmış süre tutmalı Petri ağı modeli ele alınmıştır. Bu modelde giriş yerilerinden jetonların eksilme anı ile çıkış yerlerinde jetonların oluşma anı aynıdır yani işlem anlıktır. Bu modelin diğer modellere göre karşılaştırması ve matematiksel modeli ortaya konmuştur.

Bölüm 4’de, ağıın geçişlerine rasgele zaman ifadesinin atanmasıyla elde edilen stokastik Petri ağları ele alınmıştır. Önce ağdaki tüm geçişlerin hepsine, rasgele olan zaman ifadesinin eklenmesiyle elde edilen stokastik Petri ağları incelenmiştir. Sonra geçişlerine rasgele zaman değişkenlerin atandığı zamanlandırılmış geçişlerin yanında geçişlerine zaman ifadesinin eklenmediği zamansız geçişlerin olduğu zamansız geçişlerin olduğu genelleştirilmiş stokastik Petri ağlarının yapısı ele alınmıştır.



## **THE ANALYSIS OF FIRING PROBLEMS OF TIMED PETRI NETS**

### **SUMMARY**

Petri Nets are useful tools to control, analyze and model of discrete event systems. Petri Nets have superior properties different than other modeling method like easy to applicant, give more accurate solution than others. So uses of Petri Nets become widespread day by day and the Petri Net model is developed everyday. Classic Petri Net model has not got sufficient properties to model real time discrete event systems. So time properties is added the classical Petri net model and it is named timed Petri nets. On this study, timed Petri nets are discussed.

Timed Petri nets are divided two groups by according to adding temporal properties. First group, a deterministic time property added to classical Petri net model and is named as deterministic timed Petri Nets. In this model temporal specification can be added to the nets' places or nets' transition or nets' arcs. So first model can be divided three sub group according to added information. Second group, stochastic time properties added to the nets' transition and this group named as a stochastic Petri nets. These two groups have powerful properties according to each other.

In section 2, a deterministic time property is added to the nets' transition and it is named as deterministic timed Petri nets. This model is developed by adding the system some powerful properties like firing degree of transition under weight of arcs bigger than one, concurrent firing properties. Then, construction the reachability tree of this model is discussed. Under propsed mathematical model and reachability tree's methods, software is developed on the MATLAB. By using this software, the reachability tree of several Petri nets models is created.

In section 3, Petri Nets which has deterministic firing delay is added to the nets' transition is discussed. In this section firing of a transition is atomic process i.e. remove of a token from input places and add to the token at output places occurs at the same time. By using this model, the mathematical formalism is discussed according to temporal specification.

In section 4, stochastic time specification is added to the nets' transition and this model is named as a stochastic Petri nets. Firstly, stochastic Petri net is discussed. In this, all the transition in the nets has a stochastic firing time. Secondly generalized stochastic Petri net model is discussed. In this model, a stochastic timed transition and untimed transition take part.



## 1. GİRİŞ

Bilim ve teknolojiadaki hızlı gelişmeler birçok sistemi de beraberinde getirmiştir. Esnek imalat sistemleri, trafik sistemleri, haberleşme protokolleri, bilgisayar ağı sistemleri, ulaşım sistemleri bu sistemlere örnek olarak verilebilir. Bu sistemlerin davranışları çoğunlukla, kendi içlerinde işlemekte olan ayrık (discrete) olaylarla belirlenir. Eş zamanlılık, asenkron çalışma ve belirsizlik (nondeterminism) gibi karakteristiklere sahip böyle sistemlere, ayrık olay sistemleri (AOS) denir [1]. Böyle bir sistem yaratmak, o sistemi kontrol etmek, sistemin matematiksel modelini ortaya koymak ve analiz etmek hızla gelişen çalışma alanlarıdır. Bu bağlamda yaratılan modelin, sistem ile ne derecede uyduğu, matematiksel bağıntılarının gerçeğe ne derece yakın olduğu büyük önem taşımaktadır. Bir sistem basit olması, gerçeğe mümkün olduğu derecede uyarlanabilir olması ve basit olduğu sürece mükemmelliğe yaklaşır.

AOS'lerle ilgili yapılan formal çalışmalar genel olarak dört farklı yöntem üzerinde yoğunlaşmaktadır. Bunlar, otomata (automata), Petri ağları (Petri nets), minimaks ve diğer cebirsel yöntemler (minimax and other algebras), ve son olarak sıralama ağlarıdır (queuing networks) [2].

AOS'lerin kontrolünde yaygın olarak kullanılan formal metot ise Petri ağları kullanımıdır. Petri ağları, otomata ile haberleşme çalışmaları için ağ (net) şeklinde matematiksel bir araç ortaya koyan Alman matematikçi Carl A. Petri'den sonra bu ismi almıştır [3].

Petri ağları; eş zamanlılık, asenkronluk, paralel çalışma, deterministik olmama v.b. gibi özelliklere sahip ayrık olaylı sistemleri hem matematiksel hem de grafiksel olarak modellemekte, analiz etmekte, tasarlamakta ve kontrolünde kullanılan bir araçtır. En büyük avantajlarından birisi, hem sisteme ait davranış özelliklerinin analizi, hem de performans değerlendirmesi için aynı modelin kullanılmasıdır [4]. Petri ağlarının, zamanlandırılmış (timed) Petri ağı, renklendirilmiş (colored) Petri ağı, zamanlandırılmış renklendirilmiş (timed colored) Petri ağı, hibrid (hybrid) Petri ağı vb. gibi yüksek seviyeli modelleri vardır.

Ayrık olaylı sistemlerin kontrolü konusunda yapılan en önemli çalışma Ramadge ve Wonham tarafından Gözetimli Kontrol Teorisi (Supervisory Control Theory-SCT) adı altında önerilmiştir [5]. Bu teori AOS'ler için kapalı çevrim denetleyicilerin sentezlenmesine olanak sağlamıştır. Bu yöntemin en önemli avantajı, bütün AOS sistemlerine uygulanabilirliği iken, en önemli dezavantajı ise otomatlarla modelleme yapıldığında durum patlaması (state explosion) problemidir. AOS'lerin kontrolü için Petri ağı temelli yöntemler de geliştirilmiştir. Petri ağı kullanılarak geliştirilen yöntemler, otomat kullanılarak geliştirilen yöntemlere göre bir takım avantajlar sunar. Bunlardan en önemlisi, bir Petri ağının durumu, o an ağdaki jetonların dağılımı tarafından belirlenirken otomatlarda sistemin içinde bulunduğu birbirinden farklı her bir olasılığı ifade etmek için bir durum (state) kullanılmak zorunda olunmasıdır. Petri ağının yapısı sistemdeki jeton sayısı artsa bile sisteme ait daha derli toplu (compact) bir model sunabilir [6]. Petri ağında, sürekli zamanlı sistemleri modellemekte kullandığımız gibi diferansiyel denklemler mevcut değildir.

### 1.1 Petri Ağları-PA (Petri Nets- PNs)

Petri ağı, yerler P (places), geçişler T (transitions) ve oklar A (arcs)'dan oluşmaktadır. Yerler, durumlara veya koşullara (conditions); geçişler, olaylara karşı düşer. Oklar (A), geçişlere ve yerlere ait olacak şekilde giriş ve çıkış okları şeklindedir. Eğer bir ok, bir geçişten bir yere doğru yönlendirilmiş şekilde bu oka geçişe ait çıkış oku (O) veya yere ait giriş oku (I) denir. Eğer bir ok, bir yerden bir geçişe doğru yönlendirilmiş şekilde ise geçişe ait giriş oku (I) veya yere ait çıkış oku (O) denir. En genel anlamda ise oklar ifade edilirken geçişlere ait giriş ve çıkış okları referans alınarak gösterilir. Oklar, geçişlerle yerler arasında ilişki kurmamıza yarar. Bir yerden bir geçişe doğru yönelmiş olan veya bir geçişten bir yere doğru yönelmiş olan okların sayısı, o ok demetinin ağırlığı (weight-W) denir. Ok ağırlığı, yerler ile geçişler arasındaki bağlantı katsayısını gösterir. Geçişlere ait, çıkış oku ağırlığı ( $O(t,p)$ ) ile gösterilirken giriş oku ağırlığı ( $I(t,p)$ ) ile gösterilir. Aynı şekilde yerlere ait, çıkış oku ağırlığı ( $O(p,t)$ ) ile gösterilirken giriş oku ağırlığı ( $I(p,t)$ ) ile gösterilir.

Eğer ok; bir yerden geçişe doğru yönelmiş ise bu yer, bu geçiş için giriş yeri ( $p \in \bullet t$ ) veya bu geçiş bu yer için çıkış geçişi ( $t \in p \bullet$ ) olarak adlandırılırken; bir geçişten bir

yere doğru yönelmiş ise bu yer bu geçiş için çıkış yeri ( $p \in t \bullet$ ) veya bu geçiş bu yer için giriş geçişi ( $t \in \bullet p$ ) olarak adlandırılır.

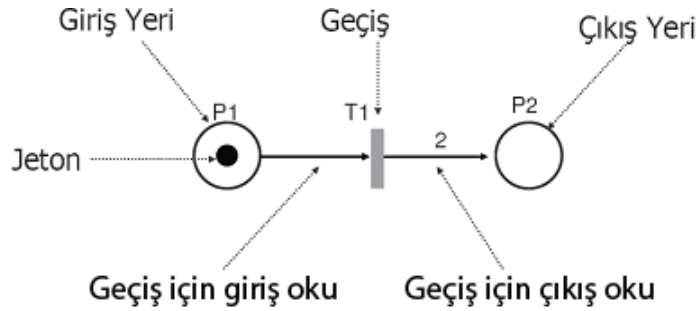
Yerler, durumlara ait bilgi taşıyan parçacıklar olan jeton (token) içerebilirler. Bir yerde bulunan jetonlar; o koşulun, o durumun yerine getirildiğini, sağlandığını gösterir.

Petri ağına (PN) ait bir durum (state) ise her yere ait jeton dağılımları ile ifade edilirken, sistemin içinde bulunduğu durum ise işaretleme vektörü  $M$  (marking vector) ile gösterilir.  $M[i]$  ise  $i$ . yere ait jeton sayısını gösterir.

İşaretlenmiş Petri ağı (MPN)  $MPN(P, T, I, O, M_0)$  gösterilimi ile ifade edilmektedir.

- $P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$  sonlu yerlerin kümesini,
- $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  sonlu geçişlerin kümesini, ( $P \cup T \neq \emptyset; P \cap T = \emptyset$ ).
- $I: (P \times T) \rightarrow N$  geçişler için giriş oklarının fonksiyonunu,
- $O: (P \times T) \rightarrow N$  geçişler için çıkış oklarının fonksiyonunu,
- $M_0 = P \rightarrow N$  başlangıç işaretlemesi,

gösterir. Petri ağları genelde grafiksel olarak gösterilirler. Çember şekilleri yerleri, çemberlerin içindeki siyah benekli şekiller (noktalar) jetonları, çubuk şekilleri ise geçişleri sembolize ederler.



**Şekil 1.1 :** Petri ağı grafiksel gösterilimi.

Şekil 1.1' de görülen örnek Petri ağına ilişkin sistem dinamikleri;  $P = \{P_1, P_2\}$ ,  $T = \{T_1\}$ ,  $M_0 = [10]^T$ ,  $I(t_1, p_1) = 1$ ,  $O(t_1, p_2) = 2$  şeklindedir. Petri ağlarında durum  $M(p)$ , işaretleme vektörü ile ifade edilmektedir. İşaretleme vektörü ise yerlere ait jeton dağılımları ile ifade edilir. Petri ağlarında durumlar arası geçiş, geçişlerin ateşlenmesi ile gerçekleşir. Petri ağındaki herhangi  $t \in T$  geçişinin

ateşlenebilmesi için önce mümkün olması gerekir. Mümkün olma koşulu ise (1.1)'deki gibidir.

$$M(p) \geq I(t,p) ; \forall p \in \bullet t \quad (1.1)$$

$\bullet t$ ,  $t$  geçişine girdi olarak bağlanan yerlerin kümesini gösterir. Bu kural; “bir geçişin,  $t_j \in T$ , mümkün olabilmesi için bu geçişe ait her giriş yerinde en az, bu yerden geçişe ait olan ok ağırlığı kadar jeton olmalıdır” şeklinde açıklanabilir. Bir geçişe ait ateşlenme; geçişe ait giriş yerlerinden giriş oklarının ağırlığı kadar sayıda jeton eksilirken, geçişe ait çıkış yerlerine ise çıkış oklarının ağırlığı kadar sayıda jeton eklenmesi şeklinde açıklanabilir. Ateşlenme sonucu sistemdeki jeton dağılımı matematiksel olarak (1.2)'deki gibi gösterilebilir.

$$M'(p) = M(p) - I(t,p) + O(t,p) ; p \in P \quad (1.2)$$

Petri ağında, verilen herhangi bir durumdan mümkün olan bir ateşleme ile başka bir duruma geçişi, matematiksel olarak ta gösterebiliriz.  $M_{k-1}$  durumunda bulunan bir ağ, mümkün olan bir geçişteki ateşleme olduktan sonra jeton dağılımlarına ilişkin durumu  $M_k$  ile gösterilsin. Bu durumda sistemin durumları arasındaki matematiksel bağıntı (1.3)'deki gibi gösterilir.

$$M_k = M_{k-1} + A^T u_k \quad (1.3)$$

Burada  $u_k$  Petri ağında her geçişin sırasıyla matrisin bir elemanına karşı geldiği ve hangi geçişin ateşlendiği gösteren  $n \times 1$  boyutunda sütun matris şeklinde (1.4)'deki gibi tanımlanır.

$$u_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

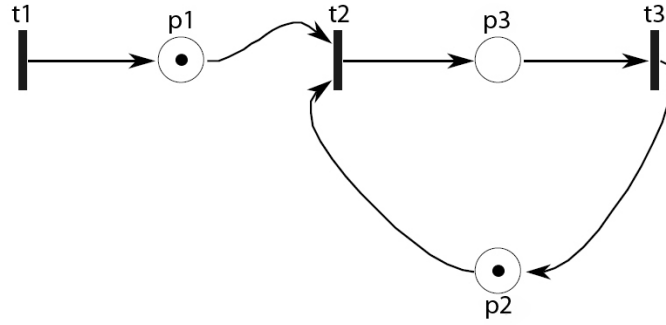
$u_k$  içerisindeki elemanlardan her defasında  $j$ . eleman 1 diğerleri ise 0 dır.  $j$ . eleman ise  $j$ . geçişin ateşlendiği gösterir.  $u_k$  matrisinin içinde yalnızca tek tane sayıda 1 elemanı mevcuttur çünkü aynı anda iki geçiş olamaz.

$A=[a_{ij}]$  matrisi ise (durum olay matrisi)  $n \times m$  boyutundadır ve (1.5)'deki gibi tanımlanır.

$$a_{ij} = a_{ij}^+ - a_{ij}^- \quad (1.5)$$

$a_{ij}^+ = O(t_i, p_j)$ ; i. geçiştten onun çıkış yerine olan j. yere doğru yönlenmiş okların ağırlık matrisini (çıkış oklarının ağırlık matrisi) gösterirken;  $a_{ij}^- = I(t_i, p_j)$ ; i. geçişin j.giriş yerinden bu geçişe doğru yönlenmiş okların ağırlık matrisini (giriş oklarının ağırlık matrisi) gösterir.

Şekil 1.2'de gösterilen Petri ağında  $M_0 = [110]^T$  şeklinde olup  $t_2$  geçişinin ateşlenmesinden sonra sistemin yeni durumunu (1.3) yardımıyla bulunsun.



**Şekil 1.2 :** Örnek bir Petri ağı modeli.

Önce verilen bu ağa ait giriş, çıkış ok ağırlıklarının matrisi bulunur.

$$a_{ij}^+ = O(t_i, p_j) = \begin{matrix} & p_1 & p_2 & p_3 \\ \begin{matrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad a_{ij}^- = I(t_i, p_j) = \begin{matrix} & p_1 & p_2 & p_3 \\ \begin{matrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Giriş, çıkış ok ağırlıkları matrisinin farkı şeklinde olan durum olay matrisi şu şekildedir.

$$A = a_{ij} = a_{ij}^+ - a_{ij}^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Bu ağı a ait 3x1 boyutunda olan u fonksiyonu,  $t_2$  geçişi ateşlendiği için şu şekildedir.

$$u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Verilen başlangıç durumunda,  $t_2$  geçişinin ateşlenmesi sonucunda oluşan yeni durum (1.3) yardımıyla hesaplanabilir.

$$M_1 = M_0 + A^T u_1$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 1]^T$$

## 1.2 Zamanlandırılmış Petri Ağları Üzerine Yapılmış Çalışmalar

Klasik Petri ağları, sistem performansını belirlemede yeterli özelliklere sahip değildirler. Çünkü sistemin etkinliği, faaliyeti hakkında herhangi bir süre belirlenmemiştir. Petri ağlarında zamana bağlı performans analizlerinin yapılması için klasik Petri ağlarına zaman ifadesi eklenerek genişletilmiş Petri ağları önerilmiştir. Klasik Petri ağlarına zaman ifadesinin eklenmesiyle zamanlandırılmış Petri ağları oluşturulmuştur (Timed Petri Nets). Zamanlandırılmış Petri ağları, ayrık olay sistemlerinin performans analizleri, tasarımı, modellemelerini yapmaya olanak sağlamaktadır.

Zamanlandırılmış Petri ağları iki temel alt sınıfa ayrılabilir. Bunlardan ilki, ağda bulunan her geçişe veya her yere veya her oka rasgele olmayan, deterministik bir ateşleme süresi veya bir zaman aralığının atanmasıyla oluşturulan deterministik zamanlandırılmış Petri ağlarıdır (Deterministic Timed Petri Nets-DTPN). Diğeri ise ağdaki her geçişe rasgele ateşlenme gecikmesi atanmasıyla oluşturulan stokastik zamanlandırılmış Petri ağlarıdır (Stochastic Timed Petri Nets-STPN). Hem deterministik hem de stokastik zamanlandırılmış Petri ağları, performans analizi uygulamalarında çok geniş bir uygulama alanına sahiptir. Deterministik zamanlandırılmış Petri ağları özellikle üretim çevrim oranlarının hesaplanmasında, sistem üzerinde ayrıntılı analiz ve kilitlenmelerin hesaplanmasında kullanılır.

Stokastik Petri ağıları ise üretim oranlarının elde edilmesinde, ortalama gecikme, sistem güvenilirlik derecesini belirlemede, sistem verimliliğin araştırılması gibi ortalama sonuçları hesaplama da kullanılırlar.

Deterministik zamanlanmış Petri ağıları kendi arasında tekrar alt gruplara ayrılır. Geçişlerine belirli bir ateşlenme süresi atanmış olan ağlara deterministik geçişleri zamanlandırılmış Petri ağı (Deterministic Timed Transition Petri Nets-DTTPNs) denir. Yerlerine belirli bir ateşlenme süresi atanmış olan ağlara deterministik yerleri zamanlandırılmış Petri ağı (Deterministic Timed Place Petri Nets-DTPPNs) denir. Oklarına belirli bir ateşlenme süresi atanmış olan ağlara deterministik okları zamanlandırılmış Petri ağı (Deterministic Timed Arcs Petri Nets-DTAPNs) denir. Ayrıca geçişlerine belli bir zaman aralığı atanmış Petri ağlarına zamanlı Petri ağları (Time Petri Nets-TPNs) denir.

Stokastik zamanlandırılmış Petri ağıları ise kendi ağlarında alt gruplara ayrılır. Bunlardan ilki, ağdaki her geçişe üstel olarak dağıtılmış rasgele ateşlenme süresinin atandığı stokastik Petri ağlarıdır (Stochastic Petri Nets-SPNs). İkincisi ise ağdaki geçişlere üstel dağıtılmış rasgele ateşlenme süresinin yanında deterministik olarak sifıra eşit olan zaman geçilmesinin atandığı genelleştirilmiş stokastik Petri ağlarıdır (Generalized Stochastic Petri Nets- GSPNs). Üçüncüsü ise bazı koşullar altında keyfi olarak dağıtılmış ateşleme süresinin yanında üstel olarak dağıtılmış ateşleme süresinin bulunduğu genişletilmiş stokastik Petri ağlarıdır (Extended Stochastic Petri Nets-ESPNs). Dördüncü alt sınıfta ise bazı koşullar altında deterministik ateşleme süresinin yanında üstel olarak dağıtılmış ateşleme süresinin bulunduğu deterministik stokastik Petri ağlarıdır (Deterministic Stochastic Petri Nets-DSPNs). Beşinci alt sınıfta ise ağdaki tüm geçişlerin keyfi olarak dağıtılmış ateşleme süreleri atanmış olan keyfi stokastik Petri ağlarıdır (Arbitrary stochastic Petri nets-ASPNS). Bu kompakt stokastik Petri ağlarının yanında, renklendirilmiş stokastik Petri ağları(Colored Stokastik Petri Nets-CSPNs) ve stokastik yüksek seviyeli Petri ağları (Stochastic High Level Petri Nets-SHLPN) adında iki ayrı yüksek seviyeli stokastik Petri ağı modelleri vardır [7].

Genel anlamda üç temel alt sınıfa ayrılan deterministik zamanlandırılmış Petri ağlarında, önce Ramchandani [8] ağdaki geçişlerin olaylara karşı düştüğünü ve bu olayların tamamlanması için belli bir süre geçtiğini ortaya koymuş ve ağdaki her geçişe bir zaman etiketi atamıştır. Atanan negatif olmayan bu değer, geçişin

ateşlenme gecikmesi olarak adlandırılır. Bu ateşlenme gecikmesine sahip olan bir geçişin ateşlenmesi ile ağıın işaretlemesi iki adımda değişir. İlk adımda mümkün olan geçişlerin girdi yerlerinden jeton eksilir. İkincisi ise bu geçişe ait ateşlenme süresi kadar sonra çıktı yerlerinde jetonlar oluşur. Ramamoothy ve Ho [9] tarafından yapılan çalışmada ise, Ramchandani'nin modelini temel alarak serbest seçimli ağlar üzerinde performans analizi yapılmıştır.

Coolahan ve Roussopoulos [10] tarafından yapılan çalışmalarda ise zaman etiketi ağıın yerlerine yerleştirilmiştir. Bu atamayı yaparken işlemin, hareketin (process) yerler üzerinde gerçekleştiği ve zamanın burada harcanması gerektiği bilgisinden yola çıkmışlardır. Bu yaklaşımda zaman gecikmesi atanan yerlerdeki jetonlar, elverişli veya elverişsiz olacak şekilde bulunurlar. Bir yerde bulunan elverişsiz jetonlar bu yere atanan zaman gecikmesi kadar süre sonunda elverişli olurlar.

Zhu ve Denton [11] tarafından yapılan çalışmada ise zaman ifadesinin yerlere ve geçişlere atanmasından farklı olarak oklara atanmasından bahsedilmiştir. Bu yaklaşımda geçişe ait her giriş okuna ve her çıkış okuna belirli bir zaman etiketi atanmıştır. Zaman etiketi atanmayan okların zaman etiketlerinin sıfır olacağı varsayılmıştır. Bu yaklaşımın daha genel olduğunu ve daha karmaşık sistemleri modellemeye kullanılabileceğinden bahsedilmiştir. Zhu ve Denton bu çalışmayı şu şekilde yorumlamışlardır: geçişe ait tüm giriş oklarını kazılacak tünel gibi, çıkış oklarını ise giriş tünellerinin işi tamamlandıktan sonra jetonların kendi üzerinden geçeceği tünel gibi düşünülmüştür. Bir yer bir jeton kazandığı zaman, çıkış geçişine doğru olacak şekilde bir tünel oluşturmaya başlar ve bu tünelin tamamlanma süresi ise oklara atanan zaman gecikmesi kadardır. Eğer tünel oluşturması biterse, onun giriş yerinde jeton olduğu süre boyunca açık olarak kalacaktır. Geçiş sadece bütün giriş yerlerinden oluşturulmaya başlanmış olan tüneller bittiğinde mümkün olacaktır.

Zamanlandırılmış Petri ağlarına Merlin [12] tarafından önerilen diğer bir çalışmada ise ağdaki geçişlere bir zaman aralığı atanmıştır.  $[a^s, \beta^s]$  şeklinde bir zaman aralığı atanmış olup  $a^s$  zamanı, geçişin mümkün olduktan sonra, ateşlenmeden önce bekleyeceği minimum zaman;  $\beta^s$  zamanı ise, geçişin mümkün olduktan sonra, ateşlenmeden önce bekleyeceği maksimum zaman olarak değerlendirilmiştir. Geçiş bu iki zaman aralığı içindeki herhangi bir zamanda ateşlenebilmektedir. Ateşleme için herhangi bir gecikmeye yer verilmemiştir. Eğer geçiş,  $\beta^s$  zamanından önce

ateşlenmemiş ise geçiş  $\beta^s$  zamanında ateşlenmeye zorlanır. Bu uygulamanın modellenmesi ve gerçek zamanlı uyarlanması konusunda Berthomieu ve Menasche daha avantajlı olduğunu savunmuşlardır [13]. Popova, Berthomieu ve Menasche çalışmasına benzer fakat sistem durumlarını Berthomieu ve Menasche tanımladığı şekilde sistemin bütünü şeklinde değil de sistemin bir parçası olarak değerlendirmiştir [14].

Merlin ve Ramchandani tarafından sunulan iki farklı çalışma aynı anda Freedman tarafından yapılan çalışmada yer verilmiştir [15]. Ramchandani'nin yaklaşımı ele alındığında geçişlere atanan süreler ateşleme gecikmesi olarak, Merlin'in yaklaşımı ele alındığında ise her bir geçişe atanmış ateşleme aralığı atandığı vurgulanmıştır. Ramchandani'nin modelinde ifade edilen bir olaya ait bekleme süresinin Merlin'in modelinde ilgili geçişe ait bekleme aralığının sınırları birbirine eşit alınarak kolaylıkla ifade edilebileceği bu nedenle Merlin'in modelinin daha genel model olduğu belirtilmiştir.

Zafer Hüseyin Ergan [16] tarafından yapılan çalışmada ise zaman ifadelerinin geçişlere atanmış olduğu yaklaşım benimsenmiştir. Geçişleri zamanlandırılmış Petri ağı modellerinden Ramchandani'nin modeline uygun olarak ateşlenme gecikmelerinin her bir geçişi, için sabit bir değer olduğu kabulü yapılmıştır. Petri ağının sınırlı olduğu kabullenmesi yapılmıştır. Herhangi bir geçiş birden fazla peş peşe ateşlenebilmesine izin verilmekte devam eden ateşlenmeler mevcut iken yeni geçişlerin ateşlenmesine olanak verilmektedir.

Bowden Fred [17] tarafından yapılan çalışma, ağda bulunan mümkün olan herhangi bir geçişin ateşlenmesiyle, geçişin giriş ve çıkış yerlerinde olan jetonlar elverişli (avail) ve elverişsiz (unavail) olarak ikiye ayrılmıştır. Modele göre mümkün olan bir geçiş ateşlendiğinde, geçişin giriş yerindeki jetonun eksilmesi ile geçişin çıkış yerinde jetonun oluşması aynı anda gerçekleşir. Geçiş ateşlendiği zaman giriş yerinden sadece elverişli jetonlar eksilirken, çıkış yerinde yaratılan jetonlar elverişsiz jetonlardır. Bu elverişsiz olan jetonlar, tutma süresi (holding time) boyunca elverişsiz olarak kalırlar. Bu süre(tutma süresi) sonunda elverişsiz olan jetonlar elverişli jetona dönüşürler. Böyle tutma süresine(holding time) sahip Petri ağlarına zaman tutmalı Petri ağı adı verilir.(Holding time Petri nets-HTPNs)

Natkin[18] ve Molloy [19] tarafından stokastik Petri ağı üzerine yapılmış çalışmada, ağda yer alan her geçişe deterministik olmayan her bir geçiş için ayrı ayrı olacak şekilde üstel olarak dağıtılmış ateşlenme oranı adı verilen bir değer atanmıştır. Atanan bu değer ile Petri ağı yaklaşımının sürekli zamanlı Markov zinciri (Continuous Time Markov Chain) ile eşdeğer olduğu gösterilmiştir. Stokastik Petri ağının erişilebilirlik ağacındaki her durumun, geçişlere üstel olarak atanan ateşlenme oranlarıyla nasıl bulunacağı ve hangi olasılıklar içinde sistemin durumlarına erişileceği gösterilmiştir.

Ajmone, Balbo Conte [20] tarafından yapılan çalışmada ise stokastik Petri ağındaki geçişlere üstel dağıtılmış ateşlenme süresinin yanında deterministik olarak sıfıra eşit olan zaman geçikmesinin atandığı genelleştirilmiş stokastik Petri ağı tanımlanmıştır (Generalized Stochastic Petri Nets-GSPNs). Bu yaklaşımla, erişilebilirlik ağacında bulunan her durumun hangi olasılıklar içerisinde erişilebileceğini ve erişilen her durum üzerinden sistem performansı belirlemek üzerine çeşitli yaklaşım kriterleri ortaya konmuştur.

Bu tez çalışmasının ikinci ve üçüncü bölümlerinde yapılan çalışmada Ramchandani'nin yaklaşımına model olarak geliştirilen Zafer Hüseyin Ergan tarafında yapılan çalışma modeli geliştirilmiştir. Model, kurulacak Petri ağı modelinde ok ağırlıklarının birden fazla olabileceği varsayılmıştır. Dördüncü bölümde ise Bowden Fred tarafından geliştirilen zaman tutmalı Petri ağlarındaki işaretleme, matematiksel denklem takımlarıyla ifade edilmiştir. Beşinci bölümde ise önce stokastik Petri ağı yapısına değinilmiş ardından Ajmone, Marsan, Balbo ve Conte tarafından ortaya koyulan genelleştirilmiş stokastik Petri ağı incelenmiştir.

## **2. ZAMANLANDIRILMIŞ PETRİ AĞLARI**

Zamanlandırılmış Petri ağı, zamansız (klasik) Petri ağı modeline zaman ifadesinin eklenmesiyle elde edilir. Zamanlandırılmış Petri ağı yaklaşımı ile gerçek zamanlı sistemleri modellemek, analiz etmek, kontrol etmek mümkündür ve uygulama alanında daha gerçek bir sonuç üretirler. Zaman ifadesinin yerlere, oklara, geçişlere atanması şeklinde çeşitli zamanlandırılmış Petri ağı modelleri vardır. Bu bölümde ise zaman ifadesinin geçişlere atanması temel alan Ramchandani'nin yaklaşımı kullanılacaktır. Bunun nedeni ise geçişlerin, Petri ağından bir işaretlemeneden (durumdan) diğerine geçişte olayları ifade etmesi ve gerçek bir uygulama ise her olayın gerçekleşip tamamlanmasının belli bir zaman almasıdır. Bu metot uyarınca ateşlenme için gerekli olan gecikmelerin ağda bulunan her bir geçiş için sabit bir değer olduğu kabul edilecektir.

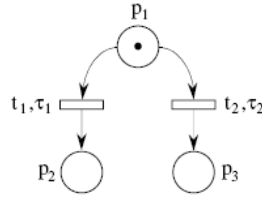
### **2.1 Geçişleri Zamanlandırılmış Petri Ağında Ateşlenme Gecikmesinin Belirlenmesi**

Zamanlandırılmış Petri ağlarında geçişe atanmış zaman ifadesinin, geçiş ateşlenmesiyle sistemin durum değişiminde kullanımında iki farklı yol mevcuttur. [7, 21, 22].

#### **2.1.1 Yarış modeli (Race model)**

Bu model yaklaşımında, ateşlenme olayı anlık bir olaydır. Yani giriş yerlerinden jetonların eksilme anı ile çıkış yerlerinde jetonların oluşma anı aynı zamanda olur. Petri ağında herhangi bir yerde bulunan jetonlar, bu yerin çıkışında bulunan geçişleri mümkün kılın ve her geçiş kendi ateşlenme uzunluğunu gösteren bir süre ölçere(saat, timer) sahip olsun. Bir geçiş mümkün olduğu zaman, bu geçişe ait ateşlenme gecikme süresi, bu süre ölçere yüklensin. Bu giriş yerinde bulunan jetonlar, mümkün olan geçişler tarafından ayırılmamış (non-reserved) olsunlar. Yani giriş yerindeki jetonların, hangi geçiş tarafından kullanılacağı bilinmesin. Bu

durumda, giriş yerinde bulunan bu jetonlar, ateşlenme süresi en kısa olan, süre ölçeri yüklenen gecikme değerinden en çabuk sıfıra ulaşan, geçiş tarafından kullanılacaktır.

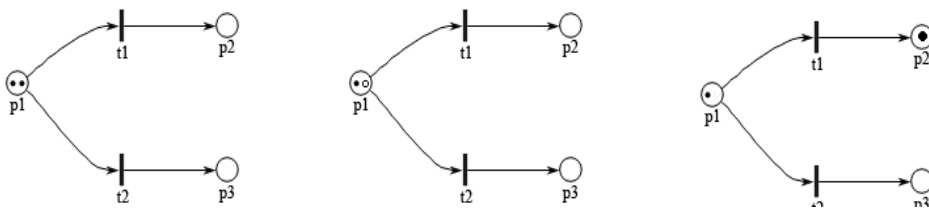


**Şekil 2.1 :** Yarış modeline ait PA örneği.

Şekil 2.1’de verilen Petri ağı örneğinde  $\tau=0$  anında  $p_1$  yerinde 1 jeton olsun. Bu jeton bu anda  $t_1$  ve  $t_2$  geçişlerinin mümkün kılmaktadır. Bu jetonun hangi geçiş tarafından kullanılacağı konusunda  $t_1$  ve  $t_2$  geçişleri arasında yarış vardır. Bu yarış ise gecikme süresi daha kısa olan geçiş kazanır. Eğer  $\tau_1 > \tau_2$  ise  $t_2$  geçişine ait gecikme daha kısa olduğundan yarış kazanır ve  $\tau_2$  anında  $p_3$  yeri jeton kazanır. Eğer  $\tau_1 < \tau_2$  ise  $t_1$  geçişine ait gecikme daha kısa olduğundan yarış kazanır ve  $\tau_1$  anında  $p_2$  yeri jeton kazanır.

### 2.1.2 Önseçim modeli (Preselection model)

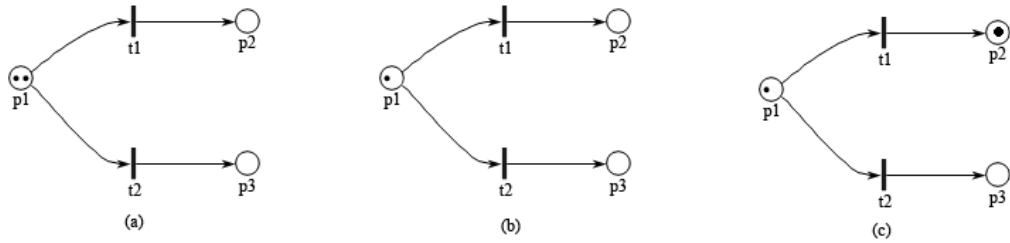
Bu modelde ise, geçişlerin ortak giriş yerinde bulunan jetonlar, geçişler tarafından ayırtılırlar (reserved). Geçiş tarafından ayırtılan jetonlar sadece o geçiş tarafından kullanılabilir. Bu ayırma işlemi zamandan bağımsız olarak gerçekleşmektedir. Zaman ifadesi sadece geçişin ateşlenmesinin tamamlanmasında kullanılır. Ön seçim modeli kendi altında iki farklı alt kısma ayrılır. Bunlardan birincisi, anlık işlemle ateşleme dağılımı, diğeri ise iki farklı zaman fazında gerçekleşen ateşlenmeler şeklindedir. İlk durumda, anlık ateşlenmede, geçiş tarafından giriş yerinde ayırtılan jetonlar elverişsiz olarak isimlendirilirler ve gösterilirler. Bu elverişsiz jetonlar diğer geçişler tarafından kullanılamazlar. Bu geçişin ateşlenmesiyle elverişsiz olan jetonlar giriş yerinden eksilir ve çıkış yerinde elverişli, normal jetonlar yaratılır.



**Şekil 2.2 :** Önseçimli, anlık ateşlenmeli Petri ağı örneği.

Şekil 2.2’de gösterilen Petri ağı örneğinde (a) durumunda sistem başlangıç anındadır. Bu anda  $p_1$  yerinde bulunan jetonlardan bir tanesi  $t_1$  geçişi tarafından ayırılmıştır. Bu durum (b) seçeneğinden gösterilmiş olup, iç boş olan jeton ayırılmış jetonu göstermektedir. Başlangıç anından itibaren,  $t_1$  geçişinin gecikmesi kadar süre sonunda  $p_1$  yerinden bu ayırılmış jeton eksilir ve aynı zaman dilimi içinde  $p_2$  yerinde normal jeton oluşur.

Belirtilen ikinci önseçimli ateşlenme seçeneğinde ise iki ayrı zaman fazında ateşlenme gerçekleştirilir. İlk fazda geçiş tarafından ayırılan jeton sistemden kaybolur. Geçişin ateşlenmesi gecikmesi sonunda, çıkış yerinde jeton belirir.



**Şekil 2.3 :** İki fazda ateşlenmeli önseçimli PA örneği.

Şekil 2.3’de gösterilen PN örneğinde (a) durumunda sistem başlangıç anındadır. Bu anda  $p_1$  yerinde bulunan jetonlardan biri  $t_1$  geçişi tarafından ayırılmıştır ve sistemde gözükmemektedir. Bu durum (b) seçeneğinden gösterilmiştir. Başlangıç anından itibaren,  $t_1$  geçişinin gecikmesi kadar süre sonunda  $p_2$  yerinde normal jeton oluşur.

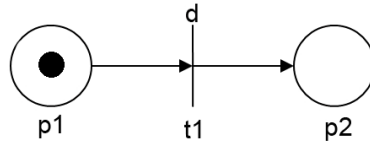
## 2.2 Önerilen Petri Ağı Modeli

Ele alınan yaklaşımda zamanlandırılmış Petri ağı  $ZPA(P, T, I, O, M_0, \tau_0, D)$  gösterilimi ile ifade edilmektedir ve iki fazda önseçimli Petri ağı modeli temel alınmıştır.  $P$  yerlerin kümesini,  $T$  geçişlerin kümesini,  $I$  yerlerden geçişlere doğru olacak şekilde yönlendirilmiş giriş oklarının fonksiyonu,  $O$  geçişlerden yerlere doğru olacak şekilde yönlendirilmiş çıkış oklarının fonksiyonu,  $M_0$  başlangıç işaretlemesini,  $\tau_0$  başlangıç anını göstermektedir.  $D: T \rightarrow \mathbb{R}^+$  olacak şekilde geçişlerin ateşlenme gecikmelerinin kümesi gösterir ve  $D \triangleq \{d_i \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$  şeklinde tanımlanır.  $n$  ile ağdaki, geçişlerin sayısı gösterilmektedir.  $ZPA$ ’nın herhangi bir  $\tau$  anındaki durumu,  $M(\tau): P \rightarrow \mathbb{N}$  işaretleme vektörü ile ifade

edilmektedir. Petri ağındaki bir  $p \in P$  yerinde  $\tau$  anında bulunan jeton sayısı  $M(p, \tau)$  ifadesi ile verilmektedir. Petri ağındaki herhangi bir  $t$  geçişinin ateşlenebilirlik koşulu ise (2.1)'deki gibidir.

$$M(p, \tau) \geq I(t, p) ; \forall p \in \bullet t \quad (2.1)$$

Şekil 2.4'te görülen şekilde zaman ifadesi  $t_1$  geçişine  $d$  birim zaman (bz.) kadar bir zaman atanmıştır.



**Şekil 2.4 : ZPA örneği.**

Şekil 2.4'de verilen ağda  $t_1$  geçişi  $\tau$  zamanında ateşlenebilir olsun.  $t_1$  geçişinin  $\tau_0$  anında ateşlenmesiyle  $p_1$  yerinden;  $p_1$  yerinden  $t_1$  geçişine doğru olacak şekilde yönelmiş giriş oku ağırlığı kadar sayıda jeton eksilir. Geçişe atanmış  $d$  birim zaman (bz.) kadar süre boyunca giriş yerinden eksilen bu jetonlar sistemde gözükmez ve sistemde anlık jeton kaybı olur.  $d$  bz. kadar atanmış süre sonunda,  $\tau+d$  anında,  $t_1$  geçişinden  $p_2$  yerine atanmış çıkış oku ağırlığınca jeton çıkış yerine,  $p_2$  yerine, gider [8].

Zamanlandırılmış Petri ağı sistemleri incelenirken, geçişlere atanan veya ağı içinde bulunduğu anın zamanı olarak birim zaman (bz.) kullanılmıştır. Bu birim zaman, ele alınan sisteme ve içinde bulunulan duruma göre çeşitli zaman ölçü birimleri olabilir. Zamanlandırılmış Petri ağında mümkün olan herhangi bir geçişin ateşlenmesiyle  $[f_i, \tau]$  zaman aralığında sistemdeki jeton değişimini matematiksel olarak (2.2)'deki gibi ifade edilir.

$$M(p, \tau) = M(p, f_i) + \left\{ \phi[\tau - (f_i + d_i)] \cdot O(\hat{t}, p) - \phi(\tau - f_i) \cdot I(\hat{t}, p) \right\} \quad (2.2)$$

Burada  $\hat{t} \in T$ ,  $\forall p \in P$  de olacak şekildedir.  $f_i$  ise ateşlenen  $\hat{t}$  geçişinin ateşleme zamanını gösterir.  $\phi(x)$  fonksiyonu ise şu şekilde tanımlanmıştır.

$$\phi(x) = \begin{cases} 1; & x \geq 0 \\ 0; & x < 0 \end{cases} \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

Şekil 2.4’de verilen ağda  $t_1$  geçişinin  $\tau_0$  anında ateşlenmesiyle  $p_1$  ve  $p_2$  yerlerindeki jeton dağılımını (2.3) kullanılarak hesaplanabilir.  $t_1$  geçişinin  $\tau_0$  anında ateşlenmesiyle  $p_1$  yerindeki bulunan jeton sayısı;

$$\begin{aligned} M(p_1, \tau) &= M(p_1, \tau_0) + \left\{ \phi[\tau - (\tau_0 + d_{t_1})] \cdot O(t_1, p_1) - \phi(\tau - \tau_0) \cdot I(t_1, p_1) \right\} \\ &= 1 + \left\{ \phi[\tau - (\tau_0 + d_{t_1})] \cdot 0 - \phi(\tau - \tau_0) \cdot 1 \right\} \\ &= 1 - \phi(\tau - \tau_0) \end{aligned}$$

Eğer  $\tau < \tau_0$  ise  $M(p_1, \tau) = 1 - \phi(\tau - \tau_0) = 1 - 0 = 1$

Eğer  $\tau \geq \tau_0$  ise  $M(p_1, \tau) = 1 - \phi(\tau - \tau_0) = 1 - 1 = 0$

şeklinde bulunur.  $t_1$  geçişinin  $\tau_0$  anında ateşlenmesiyle  $p_2$  yerindeki bulunan jeton sayısı; ,

$$\begin{aligned} M(p_2, \tau) &= M(p_2, \tau_0) + \left\{ \phi[\tau - (\tau_0 + d_{t_1})] \cdot O(t_1, p_2) - \phi(\tau - \tau_0) \cdot I(t_1, p_2) \right\} \\ &= 0 + \left\{ \phi[\tau - (\tau_0 + d_{t_1})] \cdot 1 - \phi(\tau - \tau_0) \cdot 0 \right\} \\ &= \phi[\tau - (\tau_0 + d_{t_1})] \end{aligned}$$

Eğer  $\tau < \tau_0 + d_{t_1}$  ise  $M(p_2, \tau) = \phi[\tau - (\tau_0 + d_{t_1})] = 0$

Eğer  $\tau \geq \tau_0 + d_{t_1}$  ise  $M(p_2, \tau) = \phi[\tau - (\tau_0 + d_{t_1})] = 1$

şeklinde bulunur. Kobayashi [21] tarafından zamanlandırılmış renkli Petri ağları için kullanılan bu yöntem, Ergan Z.H. [16] tarafından da çeşitli yönleri geliştirilerek kullanılmıştır.

(2.2)’de verilen matematiksel modelde ateşlenen geçişe ait mümkün olma zamanı (enabling time) (2.1) ile verilen ifadenin geçerli olma zamanı- ile ateşlenme zamanının (firing time) birbirine eşit olduğu kabulü ile yapılmıştır. Gerçekte ise herhangi bir  $t \in T$  geçişinin ateşlenebilirlik koşulunun sağlandığı an ile ateşlenme zamanı arasında bir süre vardır. Eğer bu  $\epsilon_t$  gecikmesini modele tanımlamaz isek; bu yerin  $\tau_x$  anında kazandığı jetonlar yine bu yerin çıkışındaki geçişin  $\tau_x$  anında ateşlenmesi ile kaybolacaktır ve bu yerde jetonlar anlık olarak gözükecektir. Bu

durumu engellemek için bir gecikme konulur. Zamanlanmış Petri ağında, geçişin mümkün olduğu an  $e_t$  ile geçişin ateşlenme anını ise  $f_t$  ile gösterilmektedir. Bu iki zaman arasında  $f_t = e_t + \varepsilon_t$  gibi bir ilişki vardır. Burada  $\varepsilon_t$  mümkün olma zamanı ile ateşlenme arasında olan geçişe ait gecikmedir. E kümesini ise geçişlere ait mümkün olma ve ateşlenme zamanları arasında gecikmelerin bulunduğu kümedir ve  $E \triangleq \{\varepsilon_{ti} \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$  şeklinde tanımlanır. Yapılan bu yaklaşımı da kullanarak (2.2) ile verilen matematiksel modeli geliştirilmesi ile bulunan yeni model (2.4)'teki gibidir.

$$M(p, \tau) = M(p, e_t) + \left\{ \phi[\tau - (e_t + \varepsilon_t + d_t)] \cdot O(\hat{t}, p) - \phi[\tau - (e_t + \varepsilon_t)] \cdot I(\hat{t}, p) \right\} \quad (2.4)$$

Burada  $\hat{t} \in T, \forall p \in P$  de olacak şekildedir.  $e_t$  ise ateşlenen  $\hat{t}$  geçişinin mümkün olma zamanını,  $\varepsilon_t$  mümkün olma zamanı ile ateşlenme arasında olan geçişe ait gecikmeyi gösterir.  $\phi(x)$  fonksiyonu ise (2.3)'teki gibidir.

Yapılan bu matematiksel modeli daha büyük sistemleri modellemekte yetersiz kalmaktadır. Çünkü bir sistemde, aynı zaman içinde birden fazla farklı geçişe ait ateşlenme olabilmektedir. Merlin [12] tarafından zamanlı Petri ağları üzerine yapılan çalışmalarda, aynı anda iki geçişin mümkün olamayacağı, modelin bu yönde yetersiz olduğu belirtilmiştir. Bu bağlamda farklı geçişlerin aynı anda ateşlenmesi ifadesini modele dahil edilerek bulunan matematiksel model geliştirilebilir. Farklı geçişlerin aynı anda ateşlenip sistemdeki jeton dağılımları değiştirmesi durumunu modellemek için (2.4)'teki ifadede, bir yerde bulunan jeton sayısını bulmak için ateşlenen her geçiş için ayrı ayrı  $\phi(x)$  fonksiyonu bulunur ve bunların toplamı şeklinde jeton dağılımları hesaplanarak model geliştirilir.

$$M(p, \tau) = M(p, e_t) + \sum_{\hat{t} \in \theta_t(\tau)} \left\{ \phi[\tau - (e_t + \varepsilon_t + d_t)] \cdot O(\hat{t}, p) - \phi[\tau - (e_t + \varepsilon_t)] \cdot I(\hat{t}, p) \right\} \quad (2.5)$$

Burada  $\hat{t} \in T, \forall p \in P$  olacak şekildedir.  $e_t$  ve  $\varepsilon_t$  (2.4)'teki gibidir.  $\theta_t(\tau)$  fonksiyonu ise (2.6)'daki tanımlanmıştır.

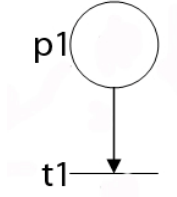
$$\theta_t(\tau) \triangleq \{\hat{t} \in T \mid \hat{t}, [e_t, \tau] \text{ aralığında ateşlenebilirlik koşulunu sağlamaktadır.}\} \quad (2.6)$$

### 2.2.1 Ateşlenebilirlik derecesinin bulunması

Herhangi bir  $t \in T$  geçişi,  $\bullet t$  kümesindeki jeton sayısına bağlı olarak birden fazla peş peşe ateşlenebilmektedir. Bir  $t \in T$  geçişinin  $\tau$  anında kaç kez ateşleneceği,  $fd_t(\tau): T \rightarrow N$  ile gösterilen ateşlenebilirlik derecesi (firing degree-fd) ile ifade edilmektedir.  $t$  geçişinin  $\tau$  anındaki ateşlenebilirlik derecesi yerlerde bulunan jetonlara, yerlerden çıkan jetonlara ve geçişler arasındaki önceliklere göre çeşitli şekillerde belirlenmektedir. Ergan Z.H. [16] tarafından yapılan çalışmada ok ağırlıklarının sadece bir olduğu durumlarda ateşlenme derecesi bulunmuştur. Ayrıca Holliday M. ve Vernon M. [22] tarafından yapılan çalışmada bir geçişin arka arkaya ateşlenebilmesinden sadece bahsedilmiştir.

#### 2.2.1.1 Bir giriş yerine sahip geçiş ile bir çıkış geçişine sahip yerin birleşmesi halinde geçişe ait ateşlenebilirlik derecesinin bulunması

Şekil 2.5'te görülen ağda, tek çıkış okuna sahip giriş yeri ile tek giriş yeri olan geçişi göstermektedir.



Şekil 2.5 : 2.2.1.1 durumuna örnek bir Petri ağı.

Böyle bir sisteme ait ateşlenebilirlik derecesi (2.7) yardımıyla bulunabilir.

$$fd_t = \text{floor} \left( \frac{M(p, \tau)}{I(t, p)} \right) \quad (2.7)$$

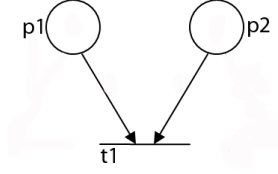
$\text{floor}(\cdot)$  fonksiyonu içindeki gerçek sayıyı en yakın bir alt tamsayıya yuvarlayan fonksiyonu göstermektedir. (örneğin  $\text{floor}(2.2)=2$ ,  $\text{floor}(4.0)=4$ ,  $\text{floor}(3.6)=3$ ) Örneğin şekil 2.5'te görülen ağ için  $p_1$  yerinde 8 jeton bulunsun ve  $p_1$  den  $t_1$  giden ok ağırlığı ise 3 olsun. Bu durumda  $t_1$  yerinin ateşlenebilirlik derecesi;

$$fd_{t_1} = \text{floor} \left( \frac{8}{3} \right) = 2$$

olarak elde edilir.

### 2.2.1.2 Sadece bir çıktı okuna sahip yerlerin beslediği ortak çıkış geçişinin ateşlenebilirlik derecesinin bulunması

Şekil 2.6’da sadece tek çıktı okuna sahip yerlerin beslediği ortak çıkış geçişi görülmektedir.



**Şekil 2.6 :** 2.2.1.2 durumuna örnek bir Petri ağı.

Verilen bu sisteme ait ateşlenebilirlik derecesi (2.8) yardımıyla bulunur.

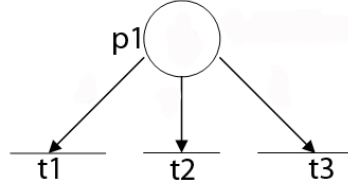
$$fd_t(\tau) = \min_{p \in \bullet t} \left[ \text{floor} \left( \frac{M(p, \tau)}{I(t, p)} \right) \right], t \in p \bullet, \forall p \in \bullet t \quad (2.8)$$

Birden fazla giriş yerine sahip ve bu giriş yerlerinin de sadece tek çıkış oku olan geçişlerin ateşlenebilirlik derecesi bulurken izlenen yol, tek giriş yeri olan ve bu giriş yerinden de bir çıkış okunun bulunan geçişin ateşlenebilirlik derecesi bulunurken uygulanan metodun (2.2.1.1’deki metod) her giriş yeri için uygulanıp minimumunu alma işlemine dayanır. Şekil 2.6 ‘de gözüken ağda,  $p_1$  yerinde 5 tane jeton,  $p_2$  yerinde ise 9 tane jeton bulunusun ve  $I(t_1, p_1) = 2$  ve  $I(t_1, p_2) = 3$  olsun. Bu durumda  $t_1$  geçişinin ateşlenebilirlik derecesi (2.8) yardımıyla bulunabilir.

$$fd_{t_1}(\tau) = \min \left[ \text{floor} \left( \frac{M(p_1, \tau)}{I(t_1, p_1)} \right), \text{floor} \left( \frac{M(p_2, \tau)}{I(t_1, p_2)} \right) \right] = \min \left[ \text{floor} \left( \frac{5}{2} \right), \text{floor} \left( \frac{9}{3} \right) \right] = \min(2, 3) = 2$$

### 2.2.1.3 Tek bir giriş yerinden bir çok geçişin beslenmesi durumunda geçişlerin ateşlenebilirlik derecelerinin bulunması

Şekil 2.7’ de tek bir giriş yeri olan birden fazla geçiş görülmektedir.



**Şekil 2.7 :** 2.2.1.3 durumuna örnek bir Petri ağı.

Böyle bir ağda geçişlerin ateşlenebilirlik dereceleri (2.9) yardımıyla bulunabilir.

$$fd_t(\tau) = \left[ \underbrace{\left\{ \text{floor} \left( \frac{M(p, \tau)}{\sum I(\hat{t}, p)} \right) \right\}}_{A_p} + \underbrace{fd_{c_t}^p}_{B_p} \right] ; \hat{t} \in p \bullet \quad (2.9)$$

(2.9) ile geçişlere ateşlenebilirlik derecesi, her geçiş için ayrı ayrı  $A_p$  ve  $B_p$  ile belirtilmiş ifadeler toplanarak bulunur. Mümkün olan bir  $\hat{t} \in T$  geçişinin ateşlenebilirlik derecesini bulmada yardımcı olan  $A_p$  bileşenini bulurken önce ateşlenebilirlik derecesi bulunmak istenen geçişe ait giriş yeri tespit edilir. Sonra belirlenen giriş yeri için  $(p \in \bullet \hat{t})$ , bu giriş yeri ile bu giriş yerinin çıktısında bulunan geçişler  $(t \in p \bullet)$  arasında bağlantı kuran giriş oklarının ağırlıklarının toplamı bulunur. Daha sonra, ilk adımda belirlenen giriş yerine ait toplam jeton sayısı, elde edilen ok ağırlıkları toplamına bölünür. Elde edilen sonuca floor fonksiyonu uygulanır ve floor fonksiyonundan elde edilen sonuç  $A_p$  değeridir.  $A_p$  ile belirtilen kısımda, geçişe ait giriş yerinden  $(\forall p \in \bullet t)$  bu yerin çıktısında bulunan her geçiş  $(\forall t \in p \bullet)$  ortak olarak aynı anda en fazla kaç defa ateşleyeceği sayısı bulunur.

$B_p$  ile belirtilen kısımda ise giriş yerinin çıktısından bulunan yerlerin aynı anda en fazla kaç defa ateşleneceği bilgisi ( $A_p$  ifadesi) bulunduktan sonra yerde kalması düşünülen jetonlarla, bu giriş yerinin çıktısında bulunan geçişler arasından mümkün olanların kaç defa ateşleneceği bilgisi bulunur. Geçişlerin ortak olarak aynı anda en fazla ateşlenmeleri sonrasında yerde kalması düşünülen jeton sayısı ise (2.10) yardımıyla bulunur.

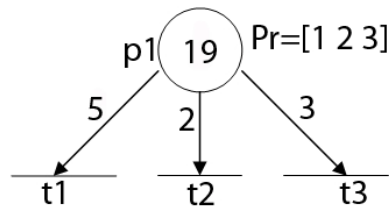
$$M'(p, \tau) = M(p, \tau) - A_p \cdot \sum I(\hat{t}, p) ; \hat{t} \in p \bullet \quad (2.10)$$

$B_p$  ifadesinin hesaplanacağı durum, çelişki (conflict) durumunu göstermektedir.

Çelişki durumu, eğer çeşitli ateşlenmeler sonucunda ulaşılan yeni durumda, birden fazla geçişin ortak giriş yerinde, ortak girdi yerinin çıkışında bulunan geçişleri; farklı anlarda ateşlemeye yetecek kadar sayıda jeton mevcut ama aynı anda ateşlemeye yetecek kadar jeton bulunmadığı durumda mümkün olan geçişler arasında ortaya çıkmaktadır. Eğer çelişki durumunda  $A_p$  ile belirtilen ifade yani aynı anda kaç kez ateşlenme olacağı, hesaplanmaya çalışırsa bu değer sıfır çıkmaktadır. Çelişki durumunda, ortak girdi yerlerinin çıkışında bulunan mümkün olan geçişler arasında öncelik atanmasına (priority) bakılarak önceliği olan geçişin ateşlenmesi yapılır. Eğer ateşlenmesi düşünülen geçişin ateşlenmesi sonrasında kalması düşünülen jetonlar başka geçişleri mümkün kılıyorsa yine ateşlenme önceliğine bakarak ağda hiçbir geçiş mümkün olmayıncaya kadar geçişlerin ateşlenmesine devam edilir. (2.11)'deki eşitsizliği her iki taraftanda sağlayan geçişlerin arasında çelişki olduğu söylenir.

$$I(\hat{t}, p) \leq M(p, \tau) < \sum I(\hat{t}, p) ; \forall \hat{t} \in p \quad (2.11)$$

Eşitlik (2.11)'deki eşitsizliği sağlayan geçişler arasında, öncelik ataması işleminde öncelik ataması fonksiyonundan yararlanılır. Bu fonksiyon  $Pr : T \rightarrow N$  şeklinde tanımlanır ve  $Pr \triangleq \{Pr(t_i) \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$  dir. Yani ateşlenme önceliği fonksiyonu her geçiş için tam sayı şeklinde atanmış sayılardan oluşur ve sırasıyla  $T$  kümesinin elemanlarına karşı gelir. Örneğin verilen bir Petri ağında geçişlerin kümesi  $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$  şeklinde ve bu ağa ait öncelik atama fonksiyonu  $Pr = [5 \ 3 \ 2 \ 1 \ 4]$  şeklinde verilsin. Bu arada geçişleri ateşlenme önceliği en önce olandan başlayarak sıralanırsa,  $t_4 \ t_3 \ t_2 \ t_5 \ t_1$  şeklindedir. Yani ateşlenme önceliği en küçük olan ateşlenme ilk olarak ateşlenmektedir. Şekil 2.8'da verilen Petri ağında, üç geçişin ayrı ayrı ateşlenebilirlik derecesini bulurken çelişki durumu ortaya çıkmaktadır.



**Şekil 2.8 : Örnek bir Petri ağı**

(2.9) uyarınca önce  $A_p$  ile belirtilen kısım hesaplanır yani  $p_1$  yerinin çıkışında

bulunan geçişlerin aynı anda en fazla kaç kere ateşleneceği bulunur.

$$fd_t(\tau) = \left\lceil \left\{ \text{floor} \left( \frac{M(p, \tau)}{\sum I(t, p)} \right) \right\} + fd_c \right\rceil$$

$$A_{p1} = \left\{ \text{floor} \left( \frac{19}{10} \right) \right\} = 1$$

Sonra  $B_p$  kısmı bulurken, geçişlerin aynı anda en fazla ateşlenmelerinin bittiği düşünülüp sonra yerde kalması düşünülen jeton sayısına göre işlem yapılır. Kalması düşünülen jeton sayısı uyarınca öncelik ataması doğrultusunda  $B_p$  kısmı hesaplanır. Önce  $A_{p1}$  kısmının ateşlenmesi sonucunda  $p_1$  yerinde kalması düşünülen jeton sayıları **(2.10)** yardımıyla bulunur.

$$M'(p_1, \tau) = M(p_1, \tau) - A_{p1} \cdot \sum I(\hat{t}, p_1)$$

$$M'(p, \tau) = 19 - 1 \cdot 10 = 9$$

Ortak olarak aynı anda en fazla sayıda(1) tüm çıkış geçişlerinin ateşlenmeleri sonucu  $p_1$  yerinde 9 tane jeton kalmaktadır. Kalan bu 9 jeton geçişlerin ateşlenmeleri arasında çelişki oluşturmaktadır. **(2.11)** yardımıyla çelişki durumuna bakılabilir.

$$I(\hat{t}, p) \leq M(p, \tau) < \sum I(\hat{t}, p) ; \forall \hat{t} \in p \cdot M(p, \tau) \geq I(\hat{t}, p)$$

$$I(t_1, p_1) = 5 \leq 9 < \sum I(\hat{t}, p_1) = I(t_1, p_1) + I(t_2, p_1) + I(t_3, p_1) = 10$$

$$I(t_2, p_1) = 2 \leq 9 < \sum I(\hat{t}, p_1) = I(t_1, p_1) + I(t_2, p_1) + I(t_3, p_1) = 10$$

$$I(t_3, p_1) = 3 \leq 9 < \sum I(\hat{t}, p_1) = I(t_1, p_1) + I(t_2, p_1) + I(t_3, p_1) = 10$$

**(2.11)** ile verilen çelişki koşulunda sağlanmaktadır. Çelişki, yerde bulunan jeton sayısı, bu yerin çıktısında bulunan ve mevcut olan jetonlarla ayrı ayrı mümkün olabilecek geçişler arasında aynı zamanda ateşlenmeye olanak sağlamıyor ama ayrı ayrı ateşlenmeye olanak sağlıyorsa gerçekleşir. Örnekte ise,  $p_1$  yerinde kalan 9 jeton ile ayrı ayrı olacak şekilde hem  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  ateşlenmesi gerçekleşebilir. Bu durumda öncelik ataması fonksiyonunda verilen değer bakarak ateşlenmeler gerçekleştirilir.  $t_1$  geçişi diğer geçişlerden öncelikli olduğundan ( $\Pr(t_1) = 1$ ) önce  $t_1$  geçişi ateşlenir.  $p_1$  yerinde kalan jeton sayısı (9)  $p_1$ 'den  $t_1$ 'e doğru yönlendirilmiş ok ağırlığı sayısına (5) bölünür ve sonra floor fonksiyonu uygulanarak ( $\text{floor}(9/5)=1$ ) ve

$fd_{ct1}^{p1} = 1$  bulunur. Çelişki durumundan sonra geriye kalması düşünülen jeton sayısını **(2.12)** yardımıyla bulunabilir.

$$M^j(p, \tau) = M^{j-1}(p, \tau) - fd_{ct}^{p1} \cdot I(\hat{t}, p) ; j=2,3,\dots ; \hat{t} \in p \bullet \quad (2.12)$$

Şekil 2.8 için çelişki durumunda geri kalan jeton sayısı aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$M''(p_1, \tau) = M'(p_1, \tau) - fd_{ct1}^{p1} \cdot I(t_1, p_1)$$

$$M''(p_1, \tau) = 9 - 1 \cdot 5 = 4$$

Kalan 4 jeton **(2.11)**'e göre  $t_2$  ve  $t_3$  arasında çelişki oluşturmaktadır. Kalan 4 jeton, öncelikli olan geçiş için kullanılır.  $t_2$  geçişi daha öncelikli olduğu için  $t_2$  geçişi önce ateşlenir ve  $p_1$  yerinde kalan jeton sayısı(4)  $p_1$  den  $t_2$  'e doğru yönlendirilmiş ok ağırlığı sayısına(2) bölünür ve sonra floor fonksiyonu uygulanarak ( $\text{floor}(4/2)=2$ )  $fd_{ct2}^{p1} = 2$  bulunur. Geriye kalan jeton sayısı yine **(2.12)** yardımıyla aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$M'''(p_1, \tau) = M''(p_1, \tau) - fd_{t2}^{p1} \cdot I(t_2, p_1)$$

$$M'''(p_1, \tau) = 4 - 2 \cdot 2 = 0$$

Geriye jeton kalmadığı için tüm geçişlerin ateşlenebilirlik derecesi şöyledir:

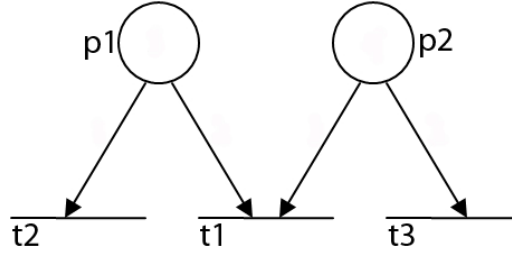
$$fd_{t1}(\tau) = \left[ \left\{ \text{floor} \left( \frac{M(p_1, \tau)}{\sum I(\hat{t}, p_1)} \right) \right\} + fd_{ct1}^{p1} \right] = 1 + 1 = 2$$

$$fd_{t2}(\tau) = \left[ \left\{ \text{floor} \left( \frac{M(p_1, \tau)}{\sum I(\hat{t}, p_1)} \right) \right\} + fd_{ct2}^{p1} \right] = 1 + 2 = 3$$

$$fd_{t3}(\tau) = \left[ \left\{ \text{floor} \left( \frac{M(p_1, \tau)}{\sum I(\hat{t}, p_1)} \right) \right\} + fd_{ct3}^{p1} \right] = 1 + 0 = 1$$

#### **2.2.1.4 Birden fazla ortak giriş yerinden beslenen ve bu giriş yerlerinden de farklı geçişlere ok yönlenmesi halindeki geçişler için ateşlenebilirlik derecesinin bulunması**

Şekil 2.9'da birden fazla ortak giriş yerinden beslenen ve bu giriş yerlerinden de farklı geçişlere ok yönlenmiş haldeki geçişlerin yer aldığı ağ gözükmektedir.



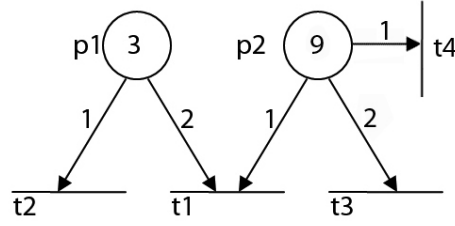
**Şekil 2.9 :** 2.2.1.4 duruma ait örnek bir Petri ağı.

Verilen bu sisteme ait ateşlenebilirlik derecesi bulmak diğer yöntemlerde olduğu gibi tek bir matematiksel ifadeyle çıkartmak zordur. Çünkü sistemdeki geçişler birbirleriyle ortak giriş yerleri ve ortak çıkış okları vasıtasıyla bağlantılıdır. Bu bağlamda verilen ağda, yerlerdeki jeton sayısı, ok ağırlıklarının sayısı giriş yerlerinin çıkışında bağlantılı olan tüm geçişlerin ateşlenebilirlik derecesinin bulunmasında önemli rolü vardır. Burada herhangi bir geçişin ateşlenebilirlik derecesini bulmada yardımcı olacak en önemli ifade **(2.13)**'de verilmiştir.

$$fd_t^{temp}(\tau) = \min_{p \in \bullet t} \left[ \underbrace{\left\{ \text{floor} \left( \frac{M(p, \tau)}{\sum I(\hat{t}, p)} \right) \right\}}_{A_p} + \underbrace{fd_{c_t}^p}_{B_p} \right], \hat{t} \in p \bullet, \forall p \in \bullet t \quad (2.13)$$

**(2.13)**'deki verilen ifade **(2.9)** de verilen ifadenin her giriş yeri için tekrarlanmış olanıdır ve bu tekrar sonuçlarının minimumunu almaya dayanır. Yani temelde birden fazla ortak giriş yerine sahip geçişin ateşlenebilirlik derecesini bulmak, tek giriş yerinden beslenen birçok geçişin olduğu ve bu geçişlerinden bir tanesinin ateşlenebilirlik derecesini bulan ifadenin, geçişin giriş yerinde bulunan her bir giriş yeri için elde edilip en sonunda en küçüğünü almaya dayanır.

Bir geçiş için  $fd_t^{temp}$  bulunduktan sonra eğer bu geçişin giriş yerinde bulunan yerler için bulunan  $A_p$  ve  $B_p$  değerleri ile  $fd_t^{temp}$  arasında  $A_p + B_p > fd_t^{temp}$  gibi bir ilişki varsa bu yerlerin çıkışlarında bulunan diğer geçişlerin ateşlenebilirlik derecesi için tekrar düzenleme yapılması gereklidir. Örneğin şekil 2.10'da verilen Petri ağında yer alan  $t_1$  geçişinin ateşlenebilirlik derecesini hesaplınsın.



**Şekil 2.10 :** Örnek bir Petri ağı.

$t_1$  geçişinin giriş yerleri  $p_1$  ve  $p_2$  yerleridir.  $p_1$  yerinden çıkan okların ağırlıkları ise  $p_1$  den  $t_2$  geçişine doğru olacak şekilde 1 ağırlıklı ok ve  $p_1$  den  $t_1$  geçişine doğru 2 ağırlıklı ok vardır.  $p_1$  yerinden çıkan okların ağırlıkları toplamı 3'tür. Aynı şekilde  $p_2$  yerinden çıkan okların ağırlıkları ise  $p_2$  yerinden  $t_1$  geçişine doğru olacak şekilde 1 ağırlıklı ok,  $p_2$  yerinden  $t_3$  geçişine doğru 2 ağırlıklı ok,  $p_2$  yerinden  $t_4$  geçişine doğru 1 ağırlıklı ok vardır.  $p_2$  yerinden çıkan okların ağırlıkları toplamı 4'tür. Bu yerlerde bulunan jeton sayısı toplamı, bu yerlerden çıkan ok ağırlıkları toplamına bölünüp çıkan sonuçlara ayrı ayrı floor fonksiyonun uygulanırsa  $A_p$  ile belirtilen kısım yani  $p_1$  ve  $p_2$  yerlerinden, bu yerlerin çıkışlarında bulunan geçişleri ortak olarak aynı anda en fazla kaç kez ateşleneceği varsayılan sayı bulunur.

$$A_{p1} = \text{floor} \left( \frac{M(p_1, \tau)}{\sum I(t, p_1)} \right) = \text{floor}(3/3) = 1$$

$$A_{p2} = \text{floor} \left( \frac{M(p_2, \tau)}{\sum I(t, p_2)} \right) = \text{floor}(9/4) = 2$$

$B_p$  ile belirtilen kısmı uygulamak için önce  $A_p$  ile belirtilen ateşlenmeler sonrasında bu yerlerde kalması düşünülen jeton sayısına göre, bu yerlerden çıkan ok ağırlıklarına göre çelişki durumunun olup olmadığına (2.11) yardımıyla bakılır. Önce  $A_{p1}$  kısmının ateşlenmesi sonucunda  $p_1$  yerinde kalması düşünülen jeton sayılarının (2.10) yardımıyla bulunur.

$$M^j(p, \tau) = M^{j-1}(p, \tau) - A_{p1} \cdot \sum I(t, p)$$

$$M'(p_1, \tau) = M(p_1, \tau) - A_{p1} \cdot [I(t_1, p_1) + I(t_2, p_1)]$$

$$M'(p_1, \tau) = 3 - 1 \cdot [2 + 1] = 0$$

$p_1$  yerinin çıkışındaki geçişler aynı anda en fazla 1 defa ateşlenebilmektedir ve bu

ateşlenme sonucunda  $p_1$  yerinde hiç jeton kalmamaktadır. Yani çelişki oluşturabilecek bir durum yoktur ve  $B_{p_1}$  kısmından bulunacak ifade yoktur  $B_{p_1}=0$  olmaktadır. Sonra  $A_{p_2}$  kısmının ateşlenmesi sonucunda  $p_2$  yerinde kalması düşünülen jeton sayılarının (2.10) yardımıyla bulunur.

$$M^j(p, \tau) = M^{j-1}(p, \tau) - A_{p_1} \cdot \sum I(\hat{t}, p)$$

$$M'(p_2, \tau) = M(p_2, \tau) - A_{p_2} \cdot [I(t_1, p_1) + I(t_3, p_1) + I(t_4, p_1)]$$

$$M'(p_2, \tau) = 9 - 2 \cdot [1 + 2 + 1] = 1$$

$p_2$  yerinin çıkışındaki geçişler aynı anda en fazla 2 defa ateşlenmesi düşünülmektedir ve bu ateşlenme sonucunda  $p_2$  yerinde 1 tane jeton kalmaktadır. Kalan 1 jeton ateşlenmesi mümkün olabilecek  $t_1$  ve  $t_4$  arasında öncelikli olan geçiş için kullanılır.  $t_1$  geçişi daha öncelikli olduğunu varsayarsak  $t_1$  geçişi önce ateşlenir ve  $p_1$  yerinde kalan jeton sayısı (1)  $p_1$ 'den  $t_1$ 'e doğru yönlendirilmiş ok ağırlığı sayısına (1) bölünür ve sonra floor fonksiyonu uygulanarak ( $\text{floor}(1/1)=1$ )  $fd_{ct1}^{p1} = 1$  bulunur. Geriye kalan jeton sayısı (2.12) yardımıyla hesaplanırsa,

$$M''(p_1, \tau) = M'(p_1, \tau) - fd_{ct1}^{p1} \cdot I(t_1, p_1)$$

$$M''(p_1, \tau) = 1 - 1 \cdot 1 = 0$$

bulunur. Bulunan  $A_p$  ve  $B_p$  değerleri sonrasında  $t_1$  geçişinin ateşlenebilirlik derecesi,

$$fd_{t_1}^{\text{temp}}(\tau) = \min \left\{ \left\lceil \text{floor} \left( \frac{M(p_1, \tau)}{\sum I(\hat{t}, p_1)} \right) \right\rceil + fd_{ct1}^{p1}, \left\lceil \text{floor} \left( \frac{M(p_2, \tau)}{\sum I(\hat{t}, p_2)} \right) \right\rceil + fd_{t2}^{p1} \right\}$$

$$fd_{t_1}^{\text{temp}}(\tau) = \min \left\{ \left\lceil \text{floor} \left( \frac{3}{3} \right) \right\rceil + 0, \left\lceil \text{floor} \left( \frac{9}{4} \right) \right\rceil + 1 \right\} = \min(1, 3) = 1$$

olarak bulunur.  $fd_{t_1}^{\text{temp}}$  değeri  $t_1$  geçişinin ateşlenebilirlik derecesidir. Ama burada dikkat edilmesi gereken husus,  $t_1$  geçişinin ateşlenmesine  $p_2$  tarafından gelmesi düşünülen ateşlenebilirlik katsayısı ( $A_{p_2} + B_{p_2}$ ), hesaplanan ateşlenebilirlik derecesinden fazla çıkmıştır. Bunun sebebi,  $p_1$  yeri tarafından  $t_1$  geçişine gelecek olan jeton sayısının kısıtlı olmasıdır.  $p_2$  yerinden  $t_1$  geçişi için hesaplanan  $A_{p_2}$  ve

$B_{p_2}$  değerleri ile  $fd_{t_1}^{temp}$  değeri arasında  $A_p + B_p > fd_t^{temp}$  koşuluna bakılarak  $p_2$  yerinden çıkan oklarla  $t_1$  dışında kalan geçişler için yeniden ateşlenebilirlik derecesi hesaplanmalıdır.

$$A_{p_2} + B_{p_2} > fd_{t_1}^{temp}$$

$$2 + 1 > 1$$

Verilen eşitsizlik sağlanmıştır.  $t_1$  geçişinin  $fd_{t_1}^{temp}$  kez ateşlenmesi ile  $p_2$  yerinde kalan jetonlar  $p_2$  yerinin,  $t_1$  dışında kalan diğer çıkış geçişlerinde ( $t_3$  ve  $t_4$ ) harcanacak şekilde dağılırlar.  $p_2$  yerinde  $t_1$  geçişinin ateşlenmesi sonucunda kalması düşünülen jeton sayısı **(2.12)** yardımıyla yeniden hesaplanır.

$$M'(p_2, \tau) = M(p_2, \tau) - fd_{t_1}^{temp} \cdot I(t_1, p_2)$$

$$M'(p_2, \tau) = 9 - 1 \cdot 1 = 8$$

Kalan jetonlar  $p_2$  yerinden çıkan oklarla bağlanan  $t_3$  ve  $t_4$  geçişlerinde kullanılacaktır. Yani bu durumda, bu geçişlerin ateşlenebilirlik derecesi bulunurken tek bir giriş yerinden birçok geçişin beslenmesi durumundaki **(2.9)** esas alınarak işlem yapılmalıdır.  $p_2$  yerinin  $t_1$  geçişinin haricinde çıktısında bulunan geçişler ( $t_3$  ve  $t_4$ ) için  $A_{p_2}$  ifadesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$A_{p_2} = \text{floor}\left(\frac{8}{3}\right) = 2$$

$B_p$  ile belirtilen kısmı uygulamak için önce  $A$  ile belirtilen ateşlenmeler sonrasında bu yerlerde kalan jeton sayısına **(2.10)** yardımıyla bakılır.

$$M''(p_2, \tau) = M'(p_2, \tau) - A_{p_2} \cdot [I(t_3, p_2) + I(t_4, p_2)]$$

$$M''(p_2, \tau) = 8 - 2 \cdot (2 + 1) = 2$$

Kalan 2 jeton  $t_3$  ve  $t_4$  arasında öncelikli olan geçiş için kullanılır.  $t_3$  geçişi daha öncelikli olduğunu varsayarsak  $t_3$  geçişi önce ateşlenir ve  $p_2$  yerinde kalan jeton sayısı (2)  $p_2$  den  $t_3$  'e doğru yönlendirilmiş ok ağırlığı sayısına (2) bölünür ve sonra floor fonkiyonu uygulanarak ( $\text{floor}(2/2)=1$ ) ve  $fd_{ct3}^{p_2} = 1$  bulunur. Geriye kalan jeton sayısı **(2.11)** yardımıyla hesaplanır.

$$M'''(p_2, \tau) = M''(p_2, \tau) - fd_{ct3}^{p2} \cdot I(t_3, p_2)$$

$$M'''(p_2, \tau) = 2 - 1 \cdot 2 = 0$$

Geriye jeton kalmadığı için mümkün olan başka geçiş yoktur. Bulunan bu değerler doğrultusunda  $t_3$  ve  $t_4$  geçişlerinin ateşlenebilirlik derecesi hesaplanırsa,

$$fd_{t_3}(\tau) = \left[ \left\{ \text{floor} \left( \frac{M(p_2, \tau)}{\sum I(t, p_2)} \right) \right\} + fd_{ct3}^{p2} \right]$$

$$fd_{t_3}(\tau) = \left[ \left\{ \text{floor} \left( \frac{8}{2+1} \right) \right\} + 1 \right] = 2 + 1 = 3$$

$$fd_{t_4}(\tau) = \left[ \left\{ \text{floor} \left( \frac{M(p_2, \tau)}{\sum I(t, p_2)} \right) \right\} + fd_{ct4}^{p2} \right]$$

$$fd_{t_4}(\tau) = \left[ \left\{ \text{floor} \left( \frac{8}{2+1} \right) \right\} + 0 \right] = 2$$

olarak bulunur. Burada sonuca dikkat edilmesi gerekir.  $t_1$  geçişi olmadığını düşündüğümüz durumda hesapladığımız  $t_3$  ve  $t_4$  geçişlerinin ateşlenebilirlik derecesi 2 iken,  $t_1$  geçişinin ateşlenmesi durumunu dikkate aldığımızda  $t_1$  ve  $t_2$  geçişlerinin ateşlenebilirlik derecesi 1,  $t_3$  geçişinin ateşlenebilirlik derecesi 3 çıkarken,  $t_4$  geçişinin ateşlenebilirlik derecesi 2 çıkmıştır. Birden fazla ortak giriş yerinden beslenen ve bu giriş yerlerinden de farklı geçişlere ok yönlmesi halindeki geçişler için ateşlenebilirlik derecesinin bulunurken geçişlerin birbiri ile bağlantılı olduğunu ve geçişlerin ateşlenebilirlik derecesini bulmada yerdeki jeton sayısı yerden geçişlere doğru yönlendirilmiş okların ağırlık sayıları etkili olmaktadır. Bu durumda her bir geçişi ayrı değerlendirmek yanlış olur. Tüm geçişler için ortak bir işlem üzerinden gidilmelidir.

Eğer herhangi bir  $t$  geçişine ait  $fd_t(\tau) \geq 1$  ise  $t$  geçişi  $\tau$  anında  $fd_t(\tau)$  kez peş peşe ateşlenebilmektedir.  $f_t^1 = e_t + \varepsilon_t$  olmak üzere birden fazla ateşlenebilir halde bulunan  $t$  geçişinin ateşlenme anları **(2.14)**'deki gibi verilmektedir.

$$f_t^{j+1} = f_t^j + \varepsilon_t ; j \in \{1, 2, \dots, [fd_t(\tau) - 1]\} \quad (2.14)$$

### 2.3 Genelleştirilmiş Zamanlı Petri Ağı Matematiksel Modeli

Bu yapılan geliştirmeler sonunda zamanlanmış Petri ağı  $ZPA(P, T, I, O, M_0, \tau_0, D, E, Pr)$  şeklinde ifade edilir. Tüm bu yapılan matematiksel geliştirmeler sonucunda eğer mümkün olan bir  $t$  geçişi  $e_i$  anında mümkün oluyorsa  $[e_i, \tau]$  zaman aralığında işaretlemelerde (2.15)'deki gibi bir değişiklik meydana gelir:

$$M(p, \tau) = M(p, e_i) + \sum_{i \in \theta_i(\tau)} \left[ \sum_{k=1}^{fd_i(\tau)} \left\{ \phi[\tau - (e_i + k\varepsilon_i + d_i)] O(\hat{t}, p) - \phi[\tau - (e_i + k\varepsilon_i)] I(\hat{t}, p) \right\} \right] \quad (2.15)$$

Eğer verilen  $\tau$  anında tüm yerlerdeki jeton sayısı (2.15) matrisel halde yazılırsa;

$$\begin{bmatrix} M(p_1, \tau) \\ M(p_2, \tau) \\ M(p_3, \tau) \\ \vdots \\ M(p_n, \tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(p_1, e_i) \\ M(p_2, e_i) \\ M(p_3, e_i) \\ \vdots \\ M(p_n, e_i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi(\tau - (e_i + \varepsilon_i + d_i)) & \phi(\tau - (e_i + 2\varepsilon_i + d_i)) & \dots & \phi(\tau - (e_i + fd_i \cdot \varepsilon_i + d_i)) \\ \phi(\tau - (e_i + \varepsilon_i + d_i)) & \phi(\tau - (e_i + 2\varepsilon_i + d_i)) & \dots & \phi(\tau - (e_i + fd_i \cdot \varepsilon_i + d_i)) \\ \phi(\tau - (e_i + \varepsilon_i + d_i)) & \phi(\tau - (e_i + 2\varepsilon_i + d_i)) & \dots & \phi(\tau - (e_i + fd_i \cdot \varepsilon_i + d_i)) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \phi(\tau - (e_i + \varepsilon_i + d_i)) & \phi(\tau - (e_i + 2\varepsilon_i + d_i)) & \dots & \phi(\tau - (e_i + fd_i \cdot \varepsilon_i + d_i)) \end{bmatrix} \cdot$$

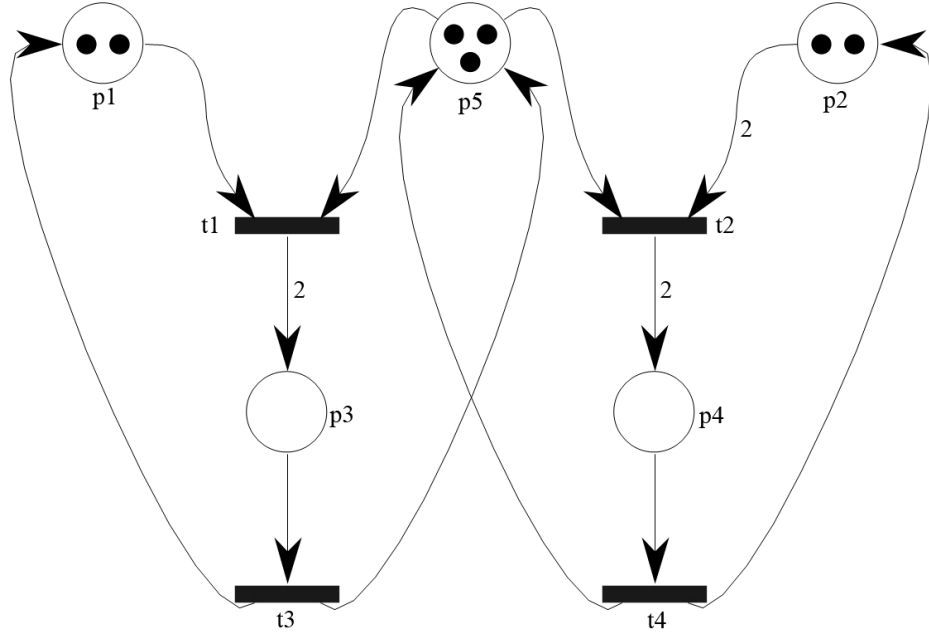
$$\begin{bmatrix} O(p_1, \hat{t}) & O(p_2, \hat{t}) & \dots & O(p_m, \hat{t}) \\ O(p_1, \hat{t}) & O(p_2, \hat{t}) & \dots & O(p_m, \hat{t}) \\ O(p_1, \hat{t}) & O(p_2, \hat{t}) & \dots & O(p_m, \hat{t}) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ O(p_1, \hat{t}) & O(p_2, \hat{t}) & \dots & O(p_m, \hat{t}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \phi(\tau - (e_i + \varepsilon_i)) & \phi(\tau - (e_i + 2\varepsilon_i)) & \dots & \phi(\tau - (e_i + fd_i \cdot \varepsilon_i)) \\ \phi(\tau - (e_i + \varepsilon_i)) & \phi(\tau - (e_i + 2\varepsilon_i)) & \dots & \phi(\tau - (e_i + fd_i \cdot \varepsilon_i)) \\ \phi(\tau - (e_i + \varepsilon_i)) & \phi(\tau - (e_i + 2\varepsilon_i)) & \dots & \phi(\tau - (e_i + fd_i \cdot \varepsilon_i)) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \phi(\tau - (e_i + \varepsilon_i)) & \phi(\tau - (e_i + 2\varepsilon_i)) & \dots & \phi(\tau - (e_i + fd_i \cdot \varepsilon_i)) \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} I(p_1, \hat{t}) & I(p_2, \hat{t}) & \dots & I(p_m, \hat{t}) \\ I(p_1, \hat{t}) & I(p_2, \hat{t}) & \dots & I(p_m, \hat{t}) \\ I(p_1, \hat{t}) & I(p_2, \hat{t}) & \dots & I(p_m, \hat{t}) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ I(p_1, \hat{t}) & I(p_2, \hat{t}) & \dots & I(p_m, \hat{t}) \end{bmatrix}$$

Burada  $\hat{t} \in T \mid \hat{t}, [e_i, \tau]$  aralığında ateşlenebilirlik koşulunu sağlayan geçişlerdir.

#### Örnek:

Şekil 2.11'de gösterilen zamanlandırılmış Petri ağına  $D=[3 \ 2 \ 1 \ 2]$  birim zaman(bz.),  $E=[0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 1]$  bz. ve  $Pr=[2 \ 3 \ 1 \ 4]$  olarak verilmektedir. Bu ağın  $[0 \ 3]$  bz. aralığında işaretleme vektörlerinin elde edilmesi incelensin. Bu ağa ait başlangıç işaretlemesine,  $M_0 = [2 \ 2 \ 0 \ 0 \ 4]^T$ , göre  $\tau_0 = 0$  anında mümkün olan geçişler  $t_1$  ve  $t_2$ 'dir.



**Şekil 2.11 : Örnek bir Petri ağı.**

$\tau_0 = 0$  anında  $t_1$  ve  $t_2$  geçişlerinin ateşlenebilirlik dereceleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$fd_{t_1}^{temp}(\tau_0) = \min \left[ \left\{ \text{floor} \frac{M(p_1, \tau_0)}{\sum I(t, p_1)} \right\} + fd_{ctl}^{p_1}, \left\{ \text{floor} \frac{M(p_5, \tau_0)}{\sum I(t, p_5)} \right\} + fd_{ctl}^{p_5} \right]$$

$$fd_{t_1}^{temp}(\tau_0) = \min \left[ \left\{ \text{floor} \frac{2}{1} \right\} + fd_{ctl}^{p_1}, \left\{ \text{floor} \frac{3}{2} \right\} + fd_{ctl}^{p_5} \right]$$

$A_{p_1}$  hesaplandıktan sonra  $p_1$  yerinde kalması düşünülen jeton sayısı **(2.10)** yardımıyla hesaplanır.

$$M'(p_1, \tau) = M(p_1, \tau) - A_{p_1} \cdot \sum I(t, p_1)$$

$$M'(p_1, \tau) = 2 - 2 \cdot 1 = 0$$

Geriye jeton kalmadığı için çelişki oluşturacak bir durum yoktur ve  $fd_{ctl}^{p_1} = 0$ 'dır.  $p_5$  yerinde kalan jeton sayısı **(2.12)** yardımıyla hesaplanır.

$$M'(p_5, \tau) = M(p_5, \tau) - A_{p_5} \cdot \sum I(t, p_5)$$

$$M'(p_5, \tau) = 3 - 1 \cdot 2 = 1$$

$p_5$  yerindeki kalan jeton sayısı yüzünden  $t_1$  ve  $t_2$  geçişleri arasında çelişki orta çıkartmaktadır ve öncelik atamasına göre de  $t_1$  geçişinin  $t_2$  geçişine göre önceliği

vardır. Sonraki adımda  $p_5$  yerinde kalan jeton sayısı (1)  $p_5$  den  $t_1$ 'e doğru yönlendirilmiş ok ağırlığı sayısına(1) bölünür ve sonra floor fonksiyonu uygulanarak ( $\text{floor}(1/1)=1$ ) ve  $fd_{ct1}^{p5}=1$  bulunur. Geriye kalan jeton sayısını **(2.12)** yardımıyla bulunur.

$$M''(p_5, \tau) = M'(p_5, \tau) - fd_{t_1}^{p5} \cdot I(t_1, p_5)$$

$$M''(p_5, \tau) = 1 - 1 \cdot 1 = 0$$

Geriye jeton kalmadığı için ateşlenebilirlik derecesi işlemi tamamlanmıştır.  $fd_{ct1}^{p5}=1$  olarak bulunur. Ayrıca  $fd_{ct2}^{p5}=0$  olarak bulunur.

$$fd_{t_1}^{\text{temp}}(\tau_0) = \min \left[ \left\{ \text{floor} \frac{2}{1} \right\} + fd_{ct1}^{p1}, \left\{ \text{floor} \frac{3}{2} \right\} + fd_{ct1}^{p5} \right]$$

$$fd_{t_1}^{\text{temp}}(\tau_0) = \min \left[ \left\{ \text{floor} \frac{2}{1} \right\} + 0, \left\{ \text{floor} \frac{3}{2} \right\} + 1 \right]$$

$$fd_{t_1}^{\text{temp}}(\tau_0) = \min [2 + 0, 1 + 1] = \min(2, 2) = 2$$

$t_2$  geçişi içinde ateşlenebilirlik derecesi bulunur.

$$fd_{t_2}^{\text{temp}}(\tau_0) = \min \left[ \left\{ \text{floor} \frac{M(p_2, \tau_0)}{\sum I(t_i, p_2)} \right\} + fd_{ct2}^{p2}, \left\{ \text{floor} \frac{M(p_5, \tau_0)}{\sum I(t_j, p_5)} \right\} + fd_{ct2}^{p5} \right]$$

$$fd_{t_2}^{\text{temp}}(\tau_0) = \min \left[ \left\{ \text{floor} \frac{2}{2} \right\} + fd_{ct2}^{p2}, \left\{ \text{floor} \frac{3}{2} \right\} + fd_{ct2}^{p5} \right]$$

$A_{p2}$  hesaplandıktan sonra  $p_2$  yerinde kalması düşünülen jeton sayısı **(2.10)** yardımıyla hesaplanır.

$$M'(p_2, \tau) = M(p_2, \tau) - A_{p2} \cdot \sum I(t_2, p_2)$$

$$M'(p_2, \tau) = 2 - 1 \cdot 2 = 0$$

Geriye jeton kalmadığı için çelişki oluşturacak bir durum yoktur ve  $fd_{ct2}^{p2}=0$ 'dır.

Ayrıca  $t_1$  geçişinin ateşlenme derecesi bulunurken,  $p_5$  yerindeki jeton sayısının  $t_1$  ve  $t_2$  geçişleri arasında çelişki katsayıları bulunurken  $fd_{ct2}^{p5}=0$  olarak bulunmuştu.

Bu durumda  $t_2$  geçişinin ateşlenebilirlik katsayısı;

$$fd_{t_2}^{temp}(\tau_0) = \min \left[ \left\{ \text{floor} \frac{2}{2} \right\} + fd_{ct2}^{p2}, \left\{ \text{floor} \frac{3}{2} \right\} + fd_{ct2}^{p5} \right]$$

$$fd_{t_2}^{temp}(\tau_0) = \min \left[ \left\{ \text{floor} \frac{2}{2} \right\} + 0, \left\{ \text{floor} \frac{3}{2} \right\} + 0 \right]$$

$$fd_{t_2}^{temp}(\tau_0) = \min [1, 1] = 1$$

Her iki geçiş içinde ateşlenebilirlik derecesi bulunurken giriş yerlerinden gelmesi planlanan ateşlenebilirlik dereceleri eşit ve sonunda bulunan geçişin ateşlenebilirlik derecesine eşit olduğu için  $fd_{t_2}^{temp}$  ve  $fd_{t_1}^{temp}$  değerleri bu geçişler için ateşlenebilirlik derecesi olur.  $\tau_0 = 0$  anında  $t_1$  geçişi ard arda iki defa,  $t_2$  geçişi ise bir defa mümkün olma(enable) durumundadır. (2.6)'ya göre,  $\theta_1(\tau_0) = t_1 \cup t_2$  şeklindedir. (2.15)'e göre  $[0, 3]$  bz. aralığında  $p_1$  yerindeki jeton sayısı şöyledir.

$$M(p_1, \tau) = M(p_1, e_t) + \sum_{\hat{t} \in \theta_1(t_1, t_2)} \left[ \sum_{k=1}^{fd_{\hat{t}}(\tau)} \left\{ \phi(\tau - (e_{\hat{t}} + k\varepsilon_{\hat{t}} + d_{\hat{t}}))O(\hat{t}, p_1) - \phi(\tau - (e_{\hat{t}} + k\varepsilon_{\hat{t}}))I(\hat{t}, p_1) \right\} \right]$$

$$\begin{aligned} M(p_1, \tau) = M(p_0, \tau_0) &+ \phi[\tau - (e_{t_1} + \varepsilon_{t_1} + d_{t_1})]O(t_1, p_1) - \phi[\tau - (e_{t_1} + \varepsilon_{t_1})]I(t_1, p_1) \\ &+ \phi[\tau - (e_{t_1} + 2\varepsilon_{t_1} + d_{t_1})]O(t_1, p_1) - \phi[\tau - (e_{t_1} + 2\varepsilon_{t_1})]I(t_1, p_1) \\ &+ \phi[\tau - (e_{t_2} + \varepsilon_{t_2} + d_{t_2})]O(t_2, p_1) - \phi[\tau - (e_{t_2} + \varepsilon_{t_2})]I(t_2, p_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(p_1, \tau) = M(p_0, \tau_0) &+ \phi[\tau - (0 + 0.1 + 3)]O(t_1, p_1) - \phi[\tau - (0 + 0.1)]I(t_1, p_1) \\ &+ \phi[\tau - (0 + 2 \cdot 0.1 + 3)]O(t_1, p_1) - \phi[\tau - (0 + 2 \cdot 0.1)]I(t_1, p_1) \\ &+ \phi[\tau - (0 + 0.2 + 2)]O(t_2, p_1) - \phi[\tau - (0 + 0.2)]I(t_2, p_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(p_1, \tau) &= 2 + \phi[\tau - 3.1] \cdot 0 - \phi[\tau - 0.1] \cdot 1 + \phi[\tau - 3.2] \cdot 0 - \phi[\tau - 0.2] \cdot 1 + \phi[\tau - 2.2] \cdot \\ &\quad \cdot 0 - \phi[\tau - 0.2] \cdot 0 \\ &= 2 + 0 - \phi[\tau - 0.1] + 0 - \phi[\tau - 0.2] - 0 - 0 \\ &= 2 - \phi[\tau - 0.1] - \phi[\tau - 0.2] \end{aligned}$$

$\tau \in [0, 0.1)$  bz. ise

$$M(p_1, \tau) = 2 + (0 - 0) + (0 - 0) + (0 - 0) = 2$$

olarak elde edilir. Bu durumda  $\tau$  zamanı,  $t_1$  ve  $t_2$  geçişlerinin ateşlenme zamanlarından küçük olduğu için bu geçişler ateşlenmez ve  $p_1$  yerinde jeton değışikliği olmaz.

$\tau \in [0.1, 0.2)$  bz. ise,

$$M(p_1, \tau) = 2 + (0 - 1) + (0 - 0) + (0 - 0) = 1$$

olarak elde edilir. Bu durumda  $\tau$  zamanı,  $t_1$  geçişinin ateşlenme zamanından büyük

olduğu için  $t_1$  geçişi birinci kez ateşlenir ve  $p_1$  yerinden bir jeton eksilir.  $t_2$  geçişinin  $p_1$  yeriyle herhangi bir ok bağlantısı olmadığı için  $t_2$  geçişinin ateşlenmesinin  $p_1$  yerinde herhangi bir işaretleme değişimine etkisi yoktur.

$\tau \in [0.2, 3]$  bz. ise ,

$$M(p_1, \tau) = 2 + (0-1) + (0-1) + (0-0) = 0$$

olarak elde edilir. Bu durumda ise  $t_1$  geçişi iki kez ateşlenmiş olacaktır ve  $p_1$  yerinden iki jeton eksilir.

$p_2$  yeri için  $M(p_2, \tau)$ , (2.15)'e göre  $[0, 3]$  bz. aralığında yazılırsa;

$$M(p_2, \tau) = M(p_2, e_t) + \sum_{\hat{t} \in \theta\{t_1, t_2\}} \left[ \sum_{k=1}^{fd_{\hat{t}}(\tau)} \left\{ \phi(\tau - (e_{\hat{t}} + k\varepsilon_{\hat{t}} + d_{\hat{t}}))O(\hat{t}, p_2) - \phi(\tau - (e_{\hat{t}} + k\varepsilon_{\hat{t}}))I(\hat{t}, p_2) \right\} \right]$$

$$\begin{aligned} M(p_2, \tau) = M(p_2, \tau_0) &+ \phi[\tau - (e_{t_1} + \varepsilon_{t_1} + d_{t_1})]O(t_1, p_2) - \phi[\tau - (e_{t_1} + \varepsilon_{t_1})]I(t_1, p_2) \\ &+ \phi[\tau - (e_{t_1} + 2\varepsilon_{t_1} + d_{t_1})]O(t_1, p_2) - \phi[\tau - (e_{t_1} + 2\varepsilon_{t_1})]I(t_1, p_2) \\ &+ \phi[\tau - (e_{t_2} + \varepsilon_{t_2} + d_{t_2})]O(t_2, p_2) - \phi[\tau - (e_{t_2} + \varepsilon_{t_2})]I(t_2, p_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(p_2, \tau) = M(p_2, \tau_0) &+ \phi[\tau - (0 + 0.1 + 3)] \cdot 0 - \phi[\tau - (0 + 0.1)] \cdot 0 \\ &+ \phi[\tau - (0 + 2 \cdot 0.1 + 3)] \cdot 0 - \phi[\tau - (0 + 2 \cdot 0.1)] \cdot 0 \\ &+ \phi[\tau - (0 + 0.2 + 2)] \cdot 0 - \phi[\tau - (0 + 0.2)] \cdot 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(p_2, \tau) &= 2 + \phi[\tau - 3.1] \cdot 0 - \phi[\tau - (0.1)] \cdot 0 + \phi[\tau - 3.2] \cdot 0 - \phi[\tau - 0.2] \cdot 0 + \phi[\tau - 2.2] \cdot \\ &\quad \cdot 0 - \phi[\tau - 0.2] \cdot 2 \\ &= 2 - \phi[\tau - 0.2] \cdot 2 \end{aligned}$$

$\tau \in [0, 0.2)$  bz. ise

$$M(p_2, \tau) = 2 - \phi[\tau - 0.2] \cdot 2 = 2$$

şeklinde bulunur. Bu zaman aralığında mümkün olan geçiş yoktur.

$\tau \in [0.2, 3]$  bz. ise ,

$$M(p_2, \tau) = 2 - \phi[\tau - 0.2] \cdot 2 = 0$$

şeklinde bulunur. Bu zaman aralığında  $t_2$  geçişi ateşlenir ve  $p_2$  yerindeki jetonlar eksilir.

$p_3$  yeri için  $M(p_3, \tau)$ , (2.15)'e göre  $[0, 3]$  bz. aralığında yazılırsa;

$$M(p_3, \tau) = M(p_3, e_t) + \sum_{\hat{t} \in \theta\{t_1, t_2\}} \left[ \sum_{k=1}^{fd_{\hat{t}}(\tau)} \left\{ \phi(\tau - (e_{\hat{t}} + k\varepsilon_{\hat{t}} + d_{\hat{t}}))O(\hat{t}, p_3) - \phi(\tau - (e_{\hat{t}} + k\varepsilon_{\hat{t}}))I(\hat{t}, p_3) \right\} \right]$$

$$\begin{aligned}
M(p_3, \tau) &= M(p_3, \tau_0) + \phi[\tau - (e_{t_1} + \varepsilon_{t_1} + d_{t_1})]O(t_1, p_3) - \phi[\tau - (e_{t_1} + \varepsilon_{t_1})]I(t_1, p_3) \\
&\quad + \phi[\tau - (e_{t_1} + 2\varepsilon_{t_1} + d_{t_1})]O(t_1, p_3) - \phi[\tau - (e_{t_1} + 2\varepsilon_{t_1})]I(t_1, p_3) \\
&\quad + \phi[\tau - (e_{t_2} + \varepsilon_{t_2} + d_{t_2})]O(t_2, p_3) - \phi[\tau - (e_{t_2} + \varepsilon_{t_2})]I(t_2, p_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M(p_3, \tau) &= M(p_3, \tau_0) + \phi[\tau - (0 + 0.1 + 3)] \cdot 2 - \phi[\tau - (0 + 0.1)] \cdot 0 \\
&\quad + \phi[\tau - (0 + 2 \cdot 0.1 + 3)] \cdot 2 - \phi[\tau - (0 + 2 \cdot 0.1)] \cdot 0 \\
&\quad + \phi[\tau - (0 + 0.2 + 2)] \cdot 0 - \phi[\tau - (0 + 0.2)] \cdot 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M(p_3, \tau) &= 0 + \phi[\tau - 3.1] \cdot 2 - \phi[\tau - (0.1)] \cdot 0 + \phi[\tau - 3.2] \cdot 2 - \phi[\tau - 0.2] \cdot 0 + \phi[\tau - 2.2] \cdot \\
&\quad \cdot 0 - \phi[\tau - 0.2] \cdot 0 \\
&= \phi[\tau - 3.1] \cdot 2 + \phi[\tau - 3.2] \cdot 2
\end{aligned}$$

$\tau \in [0, 3]$  bz. ise

$$M(p_3, \tau) = \phi[\tau - 3.1] \cdot 2 + \phi[\tau - 3.3] \cdot 2 = 0$$

şeklinde bulunur. Bu zaman aralığında  $p_3$  yeri, verilen analiz zaman aralığında  $t_1$  geçişinin ateşlenmesinin bitmemesinden dolayı hiçbir jetona sahip olamaz.

$p_4$  yeri için  $M(p_4, \tau)$ , (2.15)'e göre  $[0, 3]$  bz. aralığında yazılırsa;

$$M(p_4, \tau) = M(p_4, e_t) + \sum_{\hat{t} \in \theta\{t_1, t_2\}} \left[ \sum_{k=1}^{fd_{\hat{t}}(\tau)} \left\{ \phi(\tau - (e_{\hat{t}} + k\varepsilon_{\hat{t}} + d_{\hat{t}}))O(\hat{t}, p_4) - \phi(\tau - (e_{\hat{t}} + k\varepsilon_{\hat{t}}))I(\hat{t}, p_4) \right\} \right]$$

$$\begin{aligned}
M(p_4, \tau) &= M(p_4, \tau_0) + \phi[\tau - (e_{t_1} + \varepsilon_{t_1} + d_{t_1})]O(t_1, p_4) - \phi[\tau - (e_{t_1} + \varepsilon_{t_1})]I(t_1, p_4) \\
&\quad + \phi[\tau - (e_{t_1} + 2 \cdot \varepsilon_{t_1} + d_{t_1})]O(t_1, p_4) - \phi[\tau - (e_{t_1} + 2 \cdot \varepsilon_{t_1})]I(t_1, p_4) \\
&\quad + \phi[\tau - (e_{t_2} + \varepsilon_{t_2} + d_{t_2})]O(t_2, p_4) - \phi[\tau - (e_{t_2} + \varepsilon_{t_2})]I(t_2, p_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M(p_4, \tau) &= M(p_4, \tau_0) + \phi[\tau - (0 + 0.1 + 3)] \cdot 0 - \phi[\tau - (0 + 0.1)] \cdot 0 \\
&\quad + \phi[\tau - (0 + 2 \cdot 0.1 + 3)] \cdot 0 - \phi[\tau - (0 + 2 \cdot 0.1)] \cdot 0 \\
&\quad + \phi[\tau - (0 + 0.2 + 2)] \cdot 2 - \phi[\tau - (0 + 0.2)] \cdot 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M(p_4, \tau) &= 0 + \phi[\tau - 3.1] \cdot 0 - \phi[\tau - (0.1)] \cdot 0 + \phi[\tau - 3.2] \cdot 0 - \phi[\tau - 0.2] \cdot 0 + \phi[\tau - 2.2] \cdot \\
&\quad \cdot 2 - \phi[\tau - 0.2] \cdot 0 \\
&= \phi[\tau - 2.2] \cdot 2
\end{aligned}$$

$$\tau \in [0, 2.2) \text{ bz. ise } M(p_4, \tau) = \phi[\tau - 2.2] \cdot 2 = 0$$

şeklinde bulunur. Bu zaman aralığında  $p_4$  yeri,  $t_2$  geçişinin ateşlenmesinin bitmemesinden dolayı hiçbir jetona sahip olamaz.

$\tau \in [2.2, 3]$  bz. ise ,

$$M(p_4, \tau) = \phi[\tau - 2.2] \cdot 2 = 2$$

şeklinde bulunur. Bu zaman aralığında  $p_4$  yeri,  $t_2$  geçişinin ateşlenmesinin bitmesinden dolayı ve  $t_2$  geçişinden bu yere gelen giriş ok ağırlığı 2 olduğu için 2 jetona sahiptir.

$p_5$  yeri için  $M(p_5, \tau)$ , (2.15)'e göre  $[0, 3]$  bz. aralığında yazılırsa;

$$M(p_5, \tau) = M(p_5, e_i) + \sum_{\hat{t} \in \theta\{t_1, t_2\}} \left[ \sum_{k=1}^{fd_{\hat{t}}(\tau)} \left\{ \phi(\tau - (e_i + k\varepsilon_i + d_i))O(\hat{t}, p_5) - \phi(\tau - (e_i + k\varepsilon_i))I(\hat{t}, p_5) \right\} \right]$$

$$\begin{aligned} M(p_5, \tau) = M(p_5, \tau_0) &+ \phi[\tau - (e_{t_1} + \varepsilon_{t_1} + d_{t_1})]O(t_1, p_5) - \phi[\tau - (e_{t_1} + \varepsilon_{t_1})]I(t_1, p_5) \\ &+ \phi[\tau - (e_{t_1} + 2 \cdot \varepsilon_{t_1} + d_{t_1})]O(t_1, p_5) - \phi[\tau - (e_{t_1} + 2 \cdot \varepsilon_{t_1})]I(t_1, p_5) \\ &+ \phi[\tau - (e_{t_2} + \varepsilon_{t_2} + d_{t_2})]O(t_2, p_5) - \phi[\tau - (e_{t_2} + \varepsilon_{t_2})]I(t_2, p_5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(p_5, \tau) = M(p_5, \tau_0) &+ \phi[\tau - (0 + 0.1 + 3)] \cdot 0 - \phi[\tau - (0 + 0.1)] \cdot 1 \\ &+ \phi[\tau - (0 + 2 \cdot 0.1 + 3)] \cdot 0 - \phi[\tau - (0 + 2 \cdot 0.1)] \cdot 1 \\ &+ \phi[\tau - (0 + 0.2 + 2)] \cdot 0 - \phi[\tau - (0 + 0.2)] \cdot 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(p_5, \tau) &= 3 + \phi[\tau - 3.1] \cdot 0 - \phi[\tau - (0.1)] \cdot 1 + \phi[\tau - 3.2] \cdot 0 - \phi[\tau - 0.2] \cdot 1 + \phi[\tau - 2.2] \cdot \\ &\quad \cdot 0 - \phi[\tau - 0.2] \cdot 1 \\ &= 3 - \phi[\tau - (0.1)] - \phi[\tau - 0.2] - \phi[\tau - 0.2] \\ &= 3 - \phi[\tau - (0.1)] - 2 \cdot \phi[\tau - 0.2] \end{aligned}$$

$\tau \in [0, 0.1)$  bz. ise

$$M(p_5, \tau) = 3 - 0 - 0 - 0 = 3$$

şeklinde bulunur. Bu zaman aralığında mümkün olan geçiş yoktur.

$\tau \in [0.1, 0.2)$  bz. ise ,

$$M(p_5, \tau) = 3 - \phi[\tau - (0.1)] - \phi[\tau - 0.3] - \phi[\tau - 0.2] = 3 - 1 - 0 - 0 = 2$$

şeklinde bulunur. Bu zaman aralığında sadece  $t_1$  geçişi ilk kez ateşlenir ve  $t_1$  ateşlenmesiyle  $p_5$  yerinden 1 jeton eksilir.

$\tau \in [0.2, 3]$  bz. ise ,

$$M(p_5, \tau) = 3 - \phi[\tau - (0.1)] - \phi[\tau - 0.2] - \phi[\tau - 0.2] = 3 - 1 - 1 - 1 = 0$$

şeklinde bulunur. Bu zaman aralığında  $t_1$  geçişi iki kez ve  $t_2$  geçişi ise bir kez ateşlenir ve bu geçişlerin ateşlenmesiyle  $p_5$  yerinden 3 jeton eksilir.

Verilen ağa ait  $[0, 3]$  bz. zaman aralığında işaretleme değişimi çizelge 2.1 de görülmektedir.

**Çizelge 2.1 :** Verilen ağa ait  $[0, 3]$  bz. aralığında işaretleme değişimi.

| $\tau$       | İşaretleme Vektörü  |
|--------------|---------------------|
| $[0, 0.1)$   | $[2, 2, 0, 0, 3]^T$ |
| $[0.1, 0.2)$ | $[1, 2, 0, 0, 2]^T$ |
| $[0.2, 2.2)$ | $[0, 0, 0, 0, 1]^T$ |
| $[2.2, 3]$   | $[0, 0, 0, 2, 0]^T$ |

#### 2.4 Erişilebilirlik Analizi

Verilen bir ağın erişilebilirlik kümesi, ağın verilen başlangıç işaretlemesinden,  $m_0$ , başlayarak çeşitli geçişlerin ateşlenmelerinden sonra elde edilen bütün işaretlenmelerini kapsayan kümedir. Zamanlandırılmış Petri ağının erişilebilirlik kümesi  $C(ZPA, \tau_f)$  şeklinde gösterilir. Erişilebilirlik ağacı oluşturulurken Ergan [16] tarafından oluşturulan yaklaşım temel alınmıştır. Verilen bir ağın erişilebilirlik kümesinin elde edilmesinde, analizin başlangıç zamanından ( $\tau_0$ ) analizin biteceği zamana ( $\tau_f$ ) kadar önce ilk adımda mümkün olan geçişler belirlenir ve bu mümkün olan geçişlerin ateşlenebilirlik dereceleri bulunur. İkinci adımda ise ateşlenebilir halde bulunan geçişler, mümkün olma zamanları ile ateşlenme zamanları arasındaki gecikme ( $\epsilon_t$ ) kadar bekledikten sonra ateşlenir ve eğer birden fazla ateşlenme derecesine sahip olan geçişler var ise ateşlenmeleri arasında  $\epsilon_t$  kadar zaman beklendikten sonra ateşlenir. Üçüncü adımda ise başlatılan geçişler için ateşlenme gecikmeleri ( $d_t$ ) kadar zaman geçtikten sonra ateşlenmeleri tamamlanır. Bu üç adım sürekli olarak birbirini takip ederek verilen analiz bitiş zamanına kadar devam eder. İkinci ve üçüncü adım sonlarında elde edilen yeni işaretleme vektörü  $C(ZPA, \tau_f)$  kümesine girilir. Eğer içinde bulunulan zaman analiz bitiş zamanına eşit ise analiz sona erdirilir.

Erişilebilirlik analizinin yapılmasında FT, FCT, MV, MVT, ET gibi bir takım yardımcı kümeler tanımlanmıştır ve bu kümelerin yardımıyla analiz daha kolay yapılmaktadır. FT, FCT vektörler kümesinden oluşmaktadır ve bu vektörlerin her biri bir geçişe karşı düşmektedir ve başlangıç anında bu kümeler boş kümedir.

FT kümesi, analizin devam ettiği zaman içinde, ateşlenebilir olan geçişlerin, mümkün olan geçişlerin, ateşlenme anlarının tutulduğu kümedir. Eğer bazı geçişler birden fazla ateşlenebiliyor ise, bu geçişin ilk ateşlenmeden sonraki anları  $E_t$  kümelerinden yararlanılarak bulunur ve FT kümesine işlenir. Örneğin  $T=\{t_1, t_2, t_3\}$  olan bir ağda  $t_1$  geçişi  $\tau$  anında mümkün olsun ve ateşlenme derecesi de 3 olsun. Bu durumda  $\tau$  anında mevcut FT kümesi  $FT=\{[\tau+\varepsilon_{t_1} \ \tau+2\varepsilon_{t_1} \ \tau+3\varepsilon_{t_1}][]\}$  şeklinde verilir. Burada  $t_2$  ve  $t_3$  geçişlerine karşı gelen boş vektörler vardır.

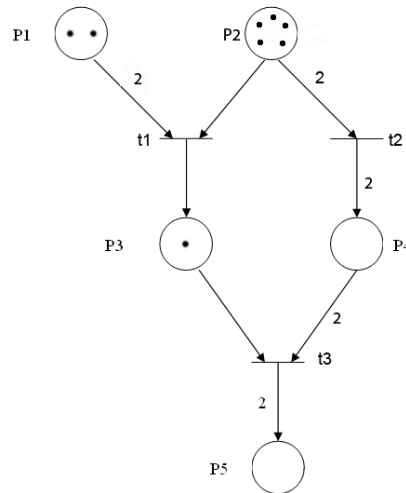
FCT kümesinde ise ateşlenmesine başlanılan geçişlerin, ateşlenmelerinin tamamlanma anları tutulur. Bir geçişin tamamlanma anı geçişin başlama zamanına geçişin bekleme süresi ilave edilerek bulunur. Yine aynı örnek için  $\tau+\varepsilon_{t_1}$  anında FCT kümesi  $FCT=\{[\tau+\varepsilon_{t_1}+d_{t_1}][]\}$  şeklindedir.  $t_1$  geçişinin ikinci ateşlenmesine başlama anı olan  $\tau+2\varepsilon_{t_1}$  anında ise bu güncellenerek  $FCT=\{[\tau+\varepsilon_{t_1}+d_{t_1} \ \tau+2\varepsilon_{t_1}+d_{t_1}][]\}$  şeklinde olur.  $t_1$  geçişinin üçüncü ateşlenmesine başlama anı olan  $\tau+3\varepsilon_{t_1}$  anında ise bu güncellenerek  $FCT=\{[\tau+\varepsilon_{t_1}+d_{t_1} \ \tau+2\varepsilon_{t_1}+d_{t_1} \ \tau+3\varepsilon_{t_1}+d_{t_1}][]\}$  şeklinde olur.

MV kümesindeki vektörler, ulaşılan işaretlemeleri gösterir. MVT kümesinin elemanları MV kümesinin elemanlarının, ulaşılan işaretleme vektörlerinin, elde edilme zamanlarını gösterir. ET kümesi ulaşılan her işaretlemeye, ateşlenebilir halde bulunan geçişlerin bulunduğu kümesidir. Vektör elemanları, eğer o elemana karşı gelen geçiş mümkün ise 1 değerini, mümkün değilse 0 değerini alırlar.

Erişilebilirlik kümesinin bulunması için önce  $\tau_0$  başlangıç anında mümkün olan geçişler ve bunların ateşlenebilirlik derecesi belirlenir ve bu andaki işaretleme vektörü MV içine kaydedilir. Mümkün olan geçişler ET kümesine kaydedilir. Sonra belirlenen geçişlerin ilk ateşlenmesi başlatılır ve ilk ateşlenmeler sonunda elde edilen işaretleme vektörü de ikinci eleman olarak MV kümesine kaydedilir. Ayrıca FT ve FCT kümeleri de güncellenir. Daha sonra analiz zamanı bir adım ilerletilir. Adım miktarı tüm durumları analiz edebilmek, durumları atlamamak için uygun bir değer seçilmelidir. Analizde kullanılacak adım miktarı E kümesinin elemanlarının en büyük ortak böleni şeklinde seçilirse tüm durumlar analizde işlenmiş olmaktadır. Ardından adım kadar ilerledikten sonra eğer mevcut ise geçişlerin ikinci ve sonraki

ateşlenmeleri gerçekleştirilir ve elde edilen işaretleme MV içine kaydedilir. Ayrıca FT ve FCT kümeleri de uygun şekilde güncellenmelidir. Bu işlem başlangıç işaretlemesinde en fazla sayıda ateşlenebilen geçişin son ateşlenmesini yapıncaya kadar devam eder. Adım kadar ilerlemeler sonunda her bir geçişin tamamlanma anlarından minimumuna ulaşıldığında ilgili geçişin ateşlenmesi tamamlanır ve jetonlar gerekli çıktı yerlerinde oluşur. Bu durumda elde edilen yeni işaretleme vektörü de MV vektör içine kaydedilir. Ayrıca her adım kadar ilerlemelerle zaman artırımı sonunda artan zaman ifadesinin değeri de MVT içine yüklenir. Bir sonraki adımda ise tamamlanan geçişler sonrasında ateşlenebilir hale gelen yeni geçişlerin olup olmadığına bakılır. Eğer yeni ateşlenmeler var ise ET kümesine kaydedilir. Eğer ateşlenebilir hale geçen ateşlenmeler var ise bunların ateşlenmelerine başlanır ve FT, FCT kümelerine yeni değerler girilir. Bundan sonra yine en erken tamamlanması gereken ateşlenme tamamlanır. Buraya kadar belirtilen işlemler döngüler halinde analizin bitiş zamanına  $\tau_f$  kadar gerçekleştirilir. Bu işlemler sırasında oluşan her yeni zaman değeri MVT kümesine, her yeni işaretleme ise MV kümesine girilir ve en sonda elde edilen MV kümesi bizim MVT içindeki zaman değerlerine karşı düşen zamanlarla beraber erişilebilirlik kümesini oluşturur.

Şekil 2.12’de görülen Petri ağında  $m_0 = [2 \ 5 \ 1 \ 0 \ 0]^T$  olarak, ağdaki geçişlere ait  $E = [0.1 \ 0.2 \ 0.3]$  bz.,  $D = [3 \ 2 \ 1]$  bz. ve  $Pr = [2 \ 1 \ 3]$  şeklinde verilmektedir. Ağın  $[0 \ 4]$  bz. aralığında erişilebilirlik ağacını çıkaracak olursak önce başlangıç anında,  $\tau = 0$  bz. ,  $MV_0 = [2 \ 5 \ 1 \ 0 \ 0]^T$  ,  $MVT_0 = 0$  ,  $ET_0 = [1 \ 1 \ 0]$  olarak edilir.



**Şekil 2.12 :** Erişilebilirlik analizi için örnek Petri ağı.

(2.13)'e göre verilen başlangıç işaretlemesine göre geçişlerin ateşlenebilirlik derecesi bulunabilir.

$$fd_{t_1}(\tau) = \min \left\{ \left\lceil \frac{M(p_1, \tau)}{\sum I(\hat{t}, p_1)} \right\rceil + fd_{t_1}^{p_1}, \left\lceil \frac{M(p_2, \tau)}{\sum I(\hat{t}, p_2)} \right\rceil + fd_{t_1}^{p_2} \right\}$$

$$fd_{t_1}(\tau) = \min \left\{ \left\lceil \frac{2}{2} \right\rceil + fd_{t_1}^{p_1}, \left\lceil \frac{5}{3} \right\rceil + fd_{t_1}^{p_2} \right\}$$

$fd_{t_1}^{p_1}$ ,  $t_1$  geçişinin ateşlenmesi sonucunda  $p_1$  yerinde kalması düşünülen jeton sayısına göre bulunur.

$$M'(p_1, \tau) = M(p_1, \tau) - A_{p_1} \cdot I(t_1, p_1)$$

$$M'(p_1, \tau) = 2 - 1 \cdot 2 = 0$$

$p_1$  yerinde  $t_1$  geçişinin ateşlenmesi sonrasında hiç jeton kalmamaktadır ve bunun sonucu olarak çelişki oluşturabilecek bir durumda yoktur. Bu durumda  $fd_{t_1}^{p_1} = 0$  olarak bulunur.  $fd_{t_1}^{p_2}$  ise,  $p_2$  yerinde  $t_1$  ateşlenmesi sonrasında kalması düşünülen jeton sayısına göre bulunur.

$$M'(p_2, \tau) = M(p_2, \tau) - A_{p_2} \cdot [I(t_1, p_2) + I(t_2, p_2)]$$

$$M'(p_2, \tau) = 5 - 1 \cdot 3 = 2$$

$p_2$  yerinde  $t_1$  ateşlenmesi sonrasında kalması düşünülen jeton sayısı 2 dir ve kalan bu 2 jeton  $t_1$  ve  $t_2$  arasında önceliği olan geçişte kullanılacaktır.  $t_2$  geçişinin,  $t_1$  geçişine göre ateşlenme önceliği vardır ve bu kalan 2 jeton,  $p_2$  yerinden  $t_2$  geçişine doğru yönlendirilmiş ok ağırlık sayısına (2) bölünürse bulunan sonuç (1)  $t_2$  geçişinin çelişki durumundan elde etmesi düşünülen ateşlenebilirlik derecesi  $fd_{t_2}^{p_2} = 1$  olur. Ayrıca geriye kalması düşünülen jeton sayısına göre  $fd_{t_1}^{p_2}$  hesaplanabilir.

$$M''(p_2, \tau) = M'(p_2, \tau) - fd_{t_2}^{p_2} \cdot I(t_2, p_2)$$

$$M''(p_2, \tau) = 2 - 1 \cdot 2 = 0$$

Geriye jeton kalmadığı yani çelişki durumunu oluşturabilecek bir durum olmadığı için  $fd_{t_1}^{p_2} = 0$  olarak bulunur.  $t_1$  geçişinin ateşlenebilirlik derecesi, elde edilen bilgiler doğrultusunda hesaplanabilir.

$$fd_{t_1}(\tau) = \min \left\{ \left\lfloor \frac{M(p_1, \tau)}{\sum I(\hat{t}, p_1)} \right\rfloor + fd_{t_1}^{p_1}, \left\lfloor \frac{M(p_2, \tau)}{\sum I(\hat{t}, p_2)} \right\rfloor + fd_{t_1}^{p_2} \right\}$$

$$fd_{t_1}(\tau) = \min \left\{ \left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor + 0, \left\lfloor \frac{5}{3} \right\rfloor + 0 \right\} = \min(1, 1) = 1$$

$t_1$  geçişinin ateşlenebilirlik derecesi bulunurken,  $p_1$  ve  $p_2$  yerlerinden gelen  $A_p$  ve  $B_p$  değerlerinin toplamı ile minimumu alınarak bulunan son ateşlenebilirlik derecesi birbirine eşit olduğu için geçişlerin ateşlenebilirlik derecesini tekrar düzenlemeye gerek yoktur.  $t_2$  geçişine ait ateşlenebilirlik derecesi ise (2.9) yardımıyla bulunabilir.

$$fd_{t_2}(\tau) = \left\lfloor \frac{M(p_2, \tau)}{\sum I(t_2, p_2)} \right\rfloor + fd_{t_2}^{p_2}$$

$$fd_{t_2}(\tau) = \left\lfloor \frac{5}{3} \right\rfloor + 1 = 2$$

Verilen ağ için adım miktarı  $\text{adım} = \text{OBEB}(0.1, 0.2, 0.3) = 0.1$  olarak bulunur. Böylece  $\tau = 0$  bz. anında FT kümesi  $FT = \{[0.1] [0.2 \ 0.4] []\}$  şeklinde oluşmaktadır. Burada  $[0.1]$   $t_1$  geçişine karşı gelen elemandır ve  $t_1$  geçişinin 0.1 bz. anında ateşleneceğini,  $[0.2 \ 0.4]$  ise  $t_2$  geçişine karşı düşmektedir ve  $t_2$  geçişinin birinci ateşlenmesinin 0.2 bz. , ikinci ateşlenmesinin de 0.4 bz. anında olacağını gösterir.  $[]$  elemanı ise  $t_3$  geçişinin bu zaman diliminde ateşlenebilir olmadığını gösterir. Ardından adım miktarı kadar ilerlenir ve  $\tau = 0.1$  bz. anında  $t_1$  geçişinin ilk ateşlenmesine başlanır ve geçişin giriş yerlerinden jetonlar eksilir. Buna bağlı olarak  $MV_1 = [0 \ 4 \ 1 \ 0 \ 0]^T$ ,  $MVT_1 = 0.1$ ,  $ET_1 = [0 \ 1 \ 0]$  şeklindedir ve FT kümesi güncellenerek  $FT = \{[] [0.2 \ 0.4] []\}$  şeklini alır. Ayrıca FCT kümesi de  $FCT = \{[3.1] [] []\}$  halini alır. FCT kümesinin elemanı olan 3.1 bz.'da başlatılan  $t_1$  geçişinin ateşlenmesinin 3.1 bz. da tamamlanacağını gösterir. Ardından adım kadar ilerlenir.  $\tau = 0.2$  bz. anına varılır.  $\tau = 0.2$  bz. anında  $t_2$  geçişinin ilk ateşlenmesi yapılır. Buna göre  $MV_2 = [0 \ 2 \ 1 \ 0 \ 0]^T$  işaretlemesine ulaşılır ve  $ET_2 = [0 \ 1 \ 0]$   $MVT_2 = 0.2$  olur. FT kümesi de güncellenerek  $FT = \{[] [0.4] []\}$  halini alır. Ayrıca FCT kümesi de güncellenerek  $FCT = \{[3.1] [2.2] []\}$  şeklini alır. Ardından bir adım kadar daha ilerlendiğinde  $\tau = 0.3$  bz. anında ateşlenen FT kümesinde bu anda ateşlenebilen geçiş

bulunmadığı için zaman bir adım kadar daha ilerletilir.  $\tau=0.4$  bz. anında ise  $t_2$  geçişinin 2. ateşlenmesine başlanılır ve  $MV_3 = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$ ,  $MVT_3 = 0.4$ ,  $ET_3 = [0 \ 0 \ 0]$  halini alır. FT ve FCT kümeleri de güncellenerek  $FT = \{\emptyset \ \emptyset \ \emptyset\}$ ,  $FCT = \{[3.1] \ [2.2 \ 2.4] \ \emptyset\}$  halini alırlar. Bu anda FT kümesi boş küme olduğundan yani ateşlenecek başka geçiş olmadığı için  $e_t = \min(FCT) = 2.2$  olarak elde edilmektedir ve  $\tau=2.2$  bz. anında  $t_2$  geçişinin  $\tau=0.2$  bz. anında başlatılan geçişi tamamlanmaktadır. Bu halde  $MV_4 = [0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 0]^T$ ,  $MVT_4 = 2.2$ ,  $ET_4 = [0 \ 0 \ 1]$  kümeleri elde edilir ve  $t_3$  geçişi mümkün olmaktadır.  $t_3$  geçişinin ateşlenebilirlik derecesi (2.8) yardımıyla  $fd_{t_3} = 1$  olarak bulunur ve FT kümesi güncellenerek  $FT = \{\emptyset \ \emptyset \ [2.5]\}$  halini alır. FCT kümesi ise  $FCT = \{[3.1] \ [2.4] \ \emptyset\}$  olmaktadır.  $\tau=2.4$  bz. anında ise  $t_2$  geçişinin 0.4 bz. anında başlatılan geçişi tamamlanır.  $MV_5 = [0 \ 0 \ 1 \ 4 \ 0]^T$ ,  $MVT_5 = 2.4$ ,  $ET_5 = [0 \ 0 \ 1]$  şeklinde bulunur. Ağ bu durumdayken  $t_3$  geçişinin ateşlenebilirlik derecesi tekrar (2.8) yardımıyla hesaplanırsa  $fd_{t_3} = 1$  olarak bulunur. FT kümesindeki  $t_3$  geçişine ait ateşlenme zamanı tekrar güncellenmez. Çünkü mevcut FT kümesinde ( $FT = \{\emptyset \ \emptyset \ [2.5]\}$ ) 1 defa ateşlenmek için bekleyen bir zaten  $t_3$  geçişi vardır. Bu durumun sebebi ise  $p_3$  yerine olan 1 jeton ilk ateşlenmede harcanacak ve  $t_3$  geçişinin ikinci ateşlenmesini engelleyecektir. Bu durumda FT ve FCT kümeleri ise  $FT = \{\emptyset \ \emptyset \ [2.5]\}$ ,  $FCT = \{[3.1] \ \emptyset \ \emptyset\}$  şeklini alırlar.  $\tau=2.5$  bz. anında ise  $t_3$  geçişinin ateşlenmesi başlatılır.  $MV_6 = [0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0]^T$ ,  $MVT_6 = 2.5$ ,  $ET_6 = [0 \ 0 \ 0]$  olur ve FT kümesi de güncellenerek  $FT = \{\emptyset \ \emptyset \ \emptyset\}$  halini alır. FCT kümesi ise  $FCT = \{[3.1] \ \emptyset \ [3.5]\}$  halini alır.  $\tau=3.1=\min(FCT)$  olduğu anda 0.1 bz. anında başlanılan  $t_1$  geçişinin ateşlenmesi tamamlanır ve  $MV_7 = [0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 0]^T$ ,  $MVT_7 = 3.1$ ,  $ET_7 = [0 \ 0 \ 1]$  olur ve  $t_3$  geçişi tekrar mümkün olur. FT kümesi de güncellenerek  $FT = \{\emptyset \ \emptyset \ [3.4]\}$  halini alır. FCT kümesi ise  $FCT = \{\emptyset \ \emptyset \ [3.5]\}$  halini alır.  $\tau=3.4$  bz. anında  $t_1$  geçişinin tamamlanmasından sonra mümkün olan ise  $t_3$  geçişinin ateşlenmesine başlanır.  $MV_8 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ,  $MVT_8 = 3.4$ ,  $ET_8 = [0 \ 0 \ 0]$  olarak bulunur. FT ve FCT kümeleride güncellenerek  $FT = \{\emptyset \ \emptyset \ \emptyset\}$ ,  $FCT = \{\emptyset \ \emptyset \ [3.5 \ 4.4]\}$  halini alır.  $\tau=3.5$  bz.

anında ise  $t_2$  geçişinin sonlanmasından sonra mümkün olan  $t_3$  geçişi tamamlanır.

$$MV_9 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2]^T, \quad MVT_9 = 3.5, \quad ET_9 = [0 \ 0 \ 0], \quad FT = \{\emptyset\}, \quad FCT = \{\emptyset \ [4.4]\}$$

şeklini almaktadır. Bu aşamadan bir sonraki adım istenilen analiz aralığının dışında kaldığı için erişilebilirlik analizi bu noktada bitmektedir. Elde edilen MV ve MVT kümeleri ise aşağıdaki şekilde bulunur.

$$MVT = \{0, 0.1, 0.2, 0.4, 2.2, 2.4, 2.5, 3.1, 3.4, 3.5\}$$

$$MV = \{[2 \ 5 \ 1 \ 0 \ 0]^T, [0 \ 4 \ 1 \ 0 \ 0]^T, [0 \ 2 \ 1 \ 0 \ 0]^T, [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]^T, [0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 0]^T, [0 \ 0 \ 1 \ 4 \ 0]^T, \\ [0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0]^T, [0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 0]^T, [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2]^T\}$$

şeklinde bulunur.

#### 2.4.1 Erişilebilirlik analizinde kilitlenme durumu

Eğer ulaşılan yeni işaretleme vektöründe ateşlenebilirlik koşulunu saplayan bir geçiş yoksa ve o anda ateşlenmesi devam eden geçiş de yoksa sistem çıkmaza girmiş kilitlenmiş demektir. Erişilebilirlik analizi yapılırken yeni bir duruma ya ateşlenme başladığı anda yada ateşlenme tamamlanma anında varılır. Ateşlenmelerin başladığı an sistemde geçici durumdur, asıl olan durum ise ateşlenmelerin tamamlanması sonucu elde edilen durumdur. Eğer ateşlenmelerin tamamlanması sonucu erişilen yeni durumda ateşlenebilen geçiş yoksa sistem kilitlenmiştir demektir. Bu durum sistem üzerinden anlatılırsa eğer  $FT = \emptyset$  ve  $\tau = \max(FCT)$  ise sistem çıkmazı oluşmaktadır. Eğer  $FT = \emptyset$  ve  $\tau < \max(FCT)$  ise sistem çıkmazı oluşmamaktadır çünkü tamamlanması devam eden geçişler vardır.

#### 2.5 Yazılım

Zamanlandırılmış Petri ağları için bu bölümde önerilen ve geliştirilen matematiksel eşitlikler, erişilebilirlik ağacının elde edilebilmesi için önerilen analiz adımları MathWorks firmasının MATLAB adı altında sunmuş olduğu yazılım ve benzetim geliştirme ortamının altında yazılımsak olarak gerçekleştirilmiştir. Yazılımın ana akışı erişilebilirlik ağacının oluşturulmasında bilgi verildiği şeklindedir. Yazılım, ana fonksiyon altında çalışan ATES, ATES2, faz1, faz2 ve goster adı altında 5 adet fonksiyondan oluşmaktadır. ATES fonksiyonu, geçilen yeni işaretlemelerde geçişlere ait ateşlenebilirlik derecesini bulmakta, ATES2 fonksiyonu ateşlenebilirlik derecesi

bulunduktan sonra erişilebilirlik ağacında bahsedilen FCT ve FT kümelerini bulmakta, faz1 fonksiyonu ateslenmenin başlaması ile birlikte yerlerden eksilen jeton sayısını bulmakta, faz2 fonksiyonu ateslenmenin tamamlanması ile birlikte çıkış yerlerinde oluşacak jeton sayısını bulmakta, goster fonksiyonu ise programdan zaman ve işaretleme çıktısı almakta kullanılır. Ekler kısmında yazılımı ve bu yazılım kullanılarak yapılan analizler yer almaktadır.

### 3. ZAMAN TUTMALI PETRİ AĞLARI (HOLDING TIME PETRİ NETS)

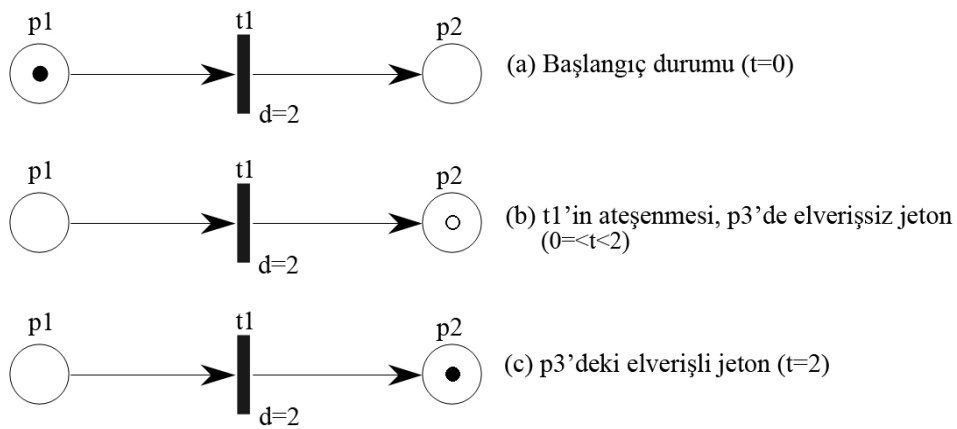
Zamanlandırılmış Petri ağları için Bowden Fred tarafından temeli oluşturulan bu yaklaşımda, ağın yerlerinde bulunan jetonlar elverişli (available-reserved) ve elverişsiz (unavailable-unreserved) olarak ikiye ayrılmıştır. Elverişli olarak isimlendirilen jetonlar geçişi mümkün kılabilirken, elverişsiz olarak isimlendirilen jetonlar geçişi mümkün kılamazlar [17]. Modele göre mümkün olan bir geçiş ateşlendiğinde, geçişin giriş yerindeki jetonun eksilmesi ile geçişin çıkış yerinde jetonun oluşması aynı anda gerçekleşir. Geçiş ateşlendiği zaman giriş yerinden sadece elverişli jetonlar eksilirken, çıkış yerinde oluşan jetonlar elverişsiz jetonlardır. Bu elverişsiz olan jetonlar, tutma süresi (holding time) boyunca elverişsiz olarak kalırlar. Bu süre (tutma süresi) sonunda elverişsiz olan jetonlar elverişli jetona dönüşürler. Böyle tutma süresine (holding time) sahip Petri ağlarına zaman tutmalı Petri ağı (ZTPA) adı verilir. (Holding time Petri nets-HTPNs)

Oluşturulan bu modelde, tutma süresi (holding time) ağdaki geçişler tarafından veya geçişlere ait çıkış yerleri tarafından veya geçişe ait çıkış oku tarafından tarafından belirlenebilir [17]. Tutma süresi, olayın başlama anından olayın bitiş anına kadar olan zaman dilimi içerisinde olayın devam etme süresini göstermektedir. Bowden yaklaşımlarında, tutma süresinin geçişler tarafından belirlendiği şekilde Petri ağını modellemiştir. Bu çalışmada da, Petri ağındaki geçişlerin olaylara karşı düştüğü ve her olayın gerçekleşmesi için belli bir süre gerektirdiğinden yola çıkarak süre tutmalı Petri ağlarında tutma süresinin geçişler tarafından belirlendiği model ele alınacaktır. Zamanlandırılmış Petri ağlarında olduğu gibi süre tutmalı Petri ağında da sistem 5 sistem dinamiği üzerine kurulmuştur.  $ZTPA = \{P, T, I, O, Mo, D\}$  şeklinde gösterilir. P ağda var olan sonlu yerlerin kümesini, T sonlu geçişlerin kümesini, I geçişe ait giriş oklarının fonksiyonu, O geçişe ait çıkış oklarının fonksiyonu, Mo başlangıç işaretlemesini, D her bir geçişe atanmış tutma sürelerini gösterir. Petri ağındaki jetonlar elverişli ve elverişsiz olarak ikiye ayrıldığı için işaretleme; elverişli jetonlar vasıtasıyla yapılan işaretleme ve elverişsiz jetonlar vasıtasıyla yapılan işaretleme olmak üzere ikiye ayrılır. Elverişli jetonlarla yapılan işaretleme klasik Petri ağında

olduğu gibi yerlerde bulunan elverişli jeton sayını gösterir ve  $A_M$  ile ifade edilir. Elverişsiz jetonlarla yapılan işaretleme, yerlerde bulunan elverişsiz jeton sayısını ve bu elverişsiz jetonların elverişli jetona dönüşeceği zamanı gösteren  $U_M$  ile yapılır. Başlangıç işaretlemesi,  $M_0$ , başlangıç anında yerlerde bulunan elverişli ( $A_{M_0}$ ) ve elverişsiz ( $U_{M_0}$ ) olan jeton kümelerinin birleşimiyle ifade edilir.  $U_M(p)=(n,y)$  ile ifadesinde  $n$  sayısı  $p$  yerinde olan elverişsiz jeton sayısını,  $y$  ise bu  $n$  tane jetonun  $y$  zamanında elverişli olacağını gösterir. Bir geçişin mümkün kılınması için gerekli şart (3.1)'de verilmiştir.

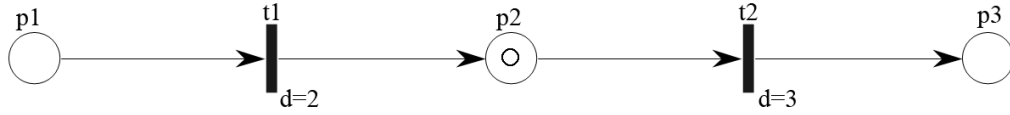
$$A_M(p) \geq I(t,p) ; \forall p \in \bullet t \quad (3.1)$$

Grafiksel gösterimde yine aynı çemberler yerleri, çizgiler geçişleri gösterirken; yerlerde bulunan elverişli olan jetonlar içi dolu siyah noktalarla, elverişsiz olan jetonlar ise içi boş siyah noktalarla gösterilir. Şekil 3.1'de ağın geçişi tarafından belirlenmiş süre tutmalı bir ağın adım adım işleyişini gösterilmektedir.



**Şekil 3.1 : Süre tutmalı Petri ağı örneği.**

Başlangıç anında ( $\tau=0$ )  $p_1$  yerinde bulunan jeton elverişli olduğundan  $t_1$  geçişi (3.1) uyarınca bu anda mümkündür. (Şekil 3.1, a durumu)  $t_1$  geçişinin  $\tau=0$  anında ateşlenmesiyle  $p_1$  yerinden giriş oku ağırlığınca jeton eksilir ve çıkış yerinde ise çıkış oku ağırlığınca elverişsiz jeton yaratılır. Yaratılan bu elverişsiz jetonlar, ateşlenmenin başlama anına ( $\tau=0$ ) geçişe atanmış tutulan sürenin ( $d=2$ ) eklenmesiyle elde edilen zamana ( $0+2=2$ ) kadar olan aralıkta  $[0, 2)$  çıkış yerinde elverişsiz olarak tutulur. ( $U_M(p)=(1,2)$ )



**Şekil 3.2 :** Süre tutmalı Petri ağı örneği.

Eğer,  $\tau=0$  başlangıç anında  $p_1$  yerinde 1 jetonu bulunan şekil 3.1’de gösterilen ağın  $p_2$  yerinin çıkışına  $t_2$  gibi bir geçiş ekleyip  $0 \leq \tau < 2$  zaman aralığında bakarsak şekil 3.2’deki gibi bir ağ elde edilmiş olur. Bu ağda  $0 \leq \tau < 2$  zaman aralığında  $p_2$  yerinde elverişsiz jetonlar bulunduğu için  $t_2$  geçişi mümkün değildir.  $\tau=2$  zamanında bu geçiş ateşlenebilir.  $0 \leq \tau < 2$  zaman aralığında sistemde mümkün olan hiç bir geçiş olmadığı için sistem kilitlenmiştir diye düşünülebilir ama gerçekte ise sistem kilitlenmemiştir. Çünkü sistemde devam eden bir geçiş vardır. Sistem, ancak geçişin ateşlenmesi bittikten sonra ulaşılan yeni durumda (elverişsiz jetonlar elverişli duruma döndükten sonraki halde) bir geçişi mümkün kılmıyorsa kilitlenmelidir.

Buraya kadar süre tutmalı Petri ağları sözsel olarak incelenmiştir. Sistemleri analiz etmek, kontrolünü sağlamak, büyük ve karmaşık sistemleri kontrol altında çalıştırmak için oluşturulan modelin matematiksel bağıntılarını çıkararak gerek kağıt üzerinde gerekse bilgisayar ortamında kontrol etmek daha kolay olacaktır. Bu bağlamda, çeşitli zamanlarda sistemin yerlerinde bulunan jeton gruplarını bulmak için, zaman ifadesinin işaretleme fonksiyona bir değişken olarak eklendiği formüller gereklidir. Süre tutmalı Petri ağında işaretleme elverişli ve elverişsiz jetonlar üzerinden yapıldığı için yerlerde bulunan jetonlar elverişli ve elverişsiz diye iki ayrı formülle hesaplanmalıdır. Mümkün olan herhangi bir geçişin  $f_t$  anında ateşlenmesiyle  $[f_t, f_t + d_t]$  zaman aralığında elverişli jetonların oluşturduğu işaretlemede meydana gelen değişim (3.2) ile gösterilmiştir.

$${}^A M'(p, \tau) = \underbrace{{}^A M(p, f_t)}_K + \underbrace{\sum \left[ \underbrace{{}^U M(p, f_t)}_L \phi(\tau - y) \right]}_L - \underbrace{\left[ \phi(\tau - f_t) I(t, p) \right]}_M + \underbrace{\left[ \phi(\tau - f_t - d_t) O(t, p) \right]}_N \quad (3.2)$$

Burada  $t \in T, \forall p \in P$  de olacak şekildedir.  $f_t$  ise ateşlenen  $t$  geçişinin ateşleme zamanını gösterir.  $\phi(x)$  fonksiyonu ise (3.3) şekilde tanımlanmıştır.

$$\phi(x) = \begin{cases} 1; & x \geq 0 \\ 0; & x < 0 \end{cases} ; x \in \mathbb{R} \quad (3.3)$$

K ile gösterilen ifade, ateşlenme anında yerde elverişli olarak bulunan toplam jeton sayısı göstermektedir. L ile gösterilen ifadede, yerde ateşlenme öncesinde başka geçişlerin ateşlenmesi sonucunda oluşan ve “y” anında elverişli olacak şekilde olan elverişsiz jetonların ayrı ayrı toplamı ifade edilmektedir. M ile gösterilen ifade yerin çıktı yerinde bulunan bir geçişin ateşlenmesi ile yerden eksilecek olan elverişli jeton sayısı göstermektedir. N ile gösterilen ifade de ise ateşlenen geçişin çıktı yerinde bulunan elverişsiz halde olan jetonlardan gerekli süre zarfı sonunda elverişli hale geçen jeton sayısı gösterilmektedir.

Mümkün olan herhangi bir geçişin  $f_t$  anında ateşlenmesiyle  $[f_t, f_t + d_t]$  zaman aralığında elverişsiz jetonların oluşturduğu işaretleme (3.4) ile gösterilmiştir.

$${}^U M'(p, \tau) = \underbrace{\left\{ \left[ \phi(\tau - f_t) O(t, p) \right] - \left[ \phi(\tau - f_t - d_t) O(t, p) \right] \right\}}_P, \underbrace{(f_t + d_t)}_R \cup (n, y) \quad (3.4)$$

(3.4)' de P ile gösterilen kısımda mümkün olan geçişin ateşlenmesi sonucu geçişin çıkış yerinde bulunan yere ait zamana göre elverişsiz olan jeton sayısı ve bu jetonların ne zaman elverişli olacağı gözükmektedir. R ile ilgili kısımda ise ilgili geçişin ateşlenmesinden daha önce ateşlenen geçişlerin sonucunda yerde bulunan elverişsiz olan jeton sayıları ve elverişli olma zamanları gözükmektedir.

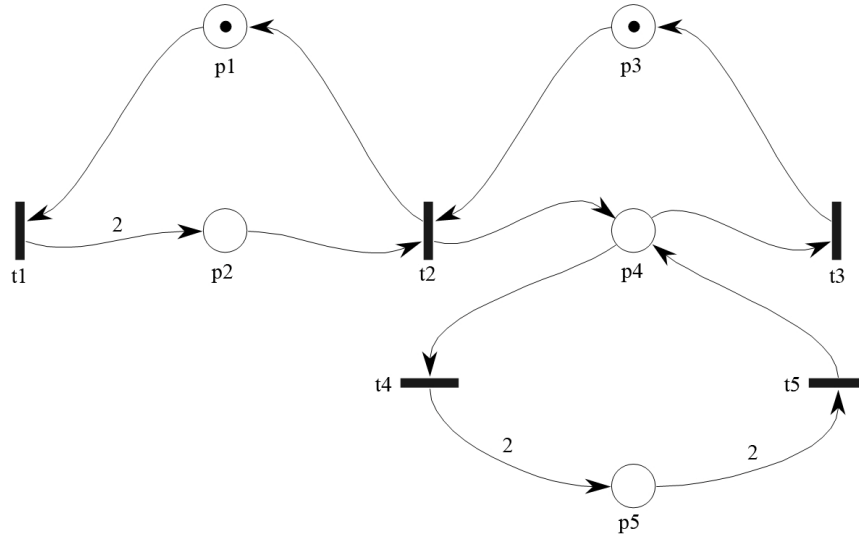
Bu yaklaşımda bir geçişin mümkün olma anı ile ateşlenme anının aynı olduğu varsayılmıştır. Gerçekte ise mümkün olan herhangi bir geçişin mümkün olma zamanı ile ateşlenme zamanı arasında belli bir zaman farkı vardır. Bu arada olan fark, Merlin tarafından [12] sunulan zamanlı Petri ağı modeli yapısında atanan gecikmeye benzer yapıdadır. Eğer bir geçişinin mümkün olma zamanı ile ateşlenme zamanını arasına  $\varepsilon_t$  gibi bir gecikme koyarak (3.3) ve (3.4) deki formülleri yeniden düzenlenirse sırasıyla (3.5) ve (3.6)'daki eşitlikler elde edilir.

$${}^A M'(p, \tau) = \underbrace{{}^A M(p, e_t)}_{Ke} + \underbrace{\sum \left[ {}^U M(p, e_t) \phi(\tau - y) \right]}_{Le} - \underbrace{\left[ \phi(\tau - e_t - \varepsilon_t) I(t, p) \right]}_{Me} + \underbrace{\left[ \phi(\tau - e_t - \varepsilon_t - d_t) O(t, p) \right]}_{Ne} \quad (3.5)$$

ve

$${}^uM'(p, \tau) = \underbrace{\left\{ \left[ \phi(\tau - e_t - \varepsilon_t) O(t, p) \right] - \left[ \phi(\tau - e_t - \varepsilon_t - d_t) O(t, p) \right] \right\}}_{Pe}, \underbrace{(e_t + \varepsilon_t + d_t)}_{\substack{\cup(n, y) \\ Re}} \quad (3.6)$$

Elde edilir. **E** kümesini ise geçişlere ait mümkün olma ve ateşlenme zamanları arasında gecikmelerin bulunduğu kümedir ve  $E \triangleq \{\varepsilon_{ti} \mid i \in (1, 2, \dots, n)\}$  şeklinde tanımlanır. Eşitlik (3.5) ve (3.6)'da  $\tau$  zamanı  $[e_t, e_t + \varepsilon_t + d_t]$  zaman aralığında bakılmalıdır. Şekli 3.3'de de basit anlamda bir makine ve bir tampondan oluşmuş üretim sistemine ait örnek Petri ağı modeli görülmektedir



**Şekil 3.3 :** Basit bir üretim sistemine ait Petri ağı modeli.

Bu ağa ait yer ve geçişlere ait açıklamalar çizelge 3.1'de görülmektedir. Bu örnekte, geçişlere atanmış zaman ifadesi birim zaman (bz.) olarak alınmıştır. Birim zaman saat, dakika, saniye gibi herhangi bir zaman ifadesi olabilmektedir.

Verilen bu örnek ağda  $D = \{2, 3, 4, 1, 2\}$  ve  $E = \{0.2, 0.1, 0.3, 0.2, 0.4\}$  olarak verilmiş olsun. Başlangıç zamanı  $\tau_0 = 0$  olarak verilsin. Bu ağa ait başlangıç işaretlemesi  ${}^AM(p, \tau_0) = [10100]$  ve  ${}^uM(p, \tau_0) = [00000]$  şeklinde olup bu başlangıç işaretlemesine göre  $\tau_0 = 0$  anında (3.1) uyarınca sadece  $t_1$  geçişi mümkündür. Mümkün olan bu geçişin ateşlenmesiyle,  $e_{t1} = 0$  anından  $e_{t1} + \varepsilon_{t1} + d_{t1}$  ( $0 + 0.2 + 2 = 2.2$ ) anına kadar,  $[0, 2.2]$  olan işaretlemede meydana gelecek değişiklik (3.5) ve (3.6) yardımıyla hesaplanabilir.

**Çizelge 3.1 :** Şekil 3.3’de verilen modelde yer alan yer geçişlerin açıklamaları.

| Yer   | Açıklama                                   |
|-------|--------------------------------------------|
| p1    | Tampon belleğin elverişli olduğu durum     |
| p2    | İşlenecek kısım tamponda olduğu durum      |
| p3    | Makinenin elverişli konuma geçtiği durum   |
| p4    | Makinenin parçayı işlemeye aldığı durum    |
| p5    | Makinenin bozulduğu durum                  |
| Geçiş | Açıklama                                   |
| t1    | İşlenecek bölümün tampondan alınması olayı |
| t2    | Makine işleme başlaması olayı              |
| t3    | Makine işlemi bitirmesi olayı              |
| t4    | Makinenin bozulması olayı                  |
| t5    | Makinenin tamir olması olayı               |

$t_1$  geçişinin sadece  $p_1$  ve  $p_2$  geçişleriyle bağlantı vardır. Bu bağlamda  $p_1$  yerinden  $t_1$  geçişine doğru yönlendirilmiş ok ağırlığı 1,  $I(t_1, p_1)=1$ ,  $t_1$  geçişinden  $p_2$  yerine doğru yönlendirilmiş ok ağırlığı ise 1,  $O(t_1, p_2)=2$ , dir.  $t_1$  geçişinin ateşlenmesiyle sadece bu geçişin giriş ve çıkışındaki yerler etkilenecektir.  $t_1$  geçişinin ateşlenmesi sürecinde diğer yerler için işaretleme fonksiyonundaki değişime bakmaya gerek yoktur.  $p_1$  yerinde başlangıç durumunda elverişsiz jeton olmadığı için  $p_1$  yeri için yapılacak hesaplamalarda (3.5) ve (3.6) eşitliklerindeki  $Le$  ve  $Re$  ifadeleri sıfır çıkacaktır. Çünkü ağda başlangıç durumundayken elverişsiz jeton yoktur.  $p_1$  yeri için işaretlemeye meydana gelen değişiklik önce elverişli jetonlar üzerinden sonrada elverişli jetonlar üzerinden aşağıdaki gibi bulunabilir.

$${}^A M'(p_1, \tau) = {}^A M(p_1, e_{t1}) + \sum [{}^U M(p_1, e_t) \phi(\tau - y)] - [\phi(\tau - e_{t1} - \varepsilon_{t1}) I(t_1, p_1)] + [\phi(\tau - e_{t1} - \varepsilon_{t1} - d_{t1}) O(t_1, p_1)]$$

$${}^A M'(p_1, \tau) = 1 + 0 - [\phi(\tau - 0 - 0.2) \cdot 1] + [\phi(\tau - 0 - 0.2 - 2) \cdot 0]$$

$${}^A M'(p_1, \tau) = 1 - [\phi(\tau - 0 - 0.2) \cdot 1]$$

$${}^A M'(p_1, \tau) = 1 - \phi(\tau - 0.2)$$

Eğer  $\tau \in [0, 0.2)$  ise,  ${}^A M'(p_1, \tau) = 1 - \phi(\tau - 0.2) = 1$  olarak bulunur. Eğer  $\tau \in [0.2, 2.2]$  ise,  ${}^A M'(p_1, \tau) = 1 - \phi(\tau - 0.2) = 1 - 1 = 0$  olarak bulunur. Sonra  $p_1$  yerindeki elverişsiz olan jeton dağılımı hesaplanır.

$${}^U M'(p_1, \tau) = \{[\phi(\tau - e_{t1} - \varepsilon_{t1}) O(t_1, p_1) - \phi(\tau - e_{t1} - \varepsilon_{t1} - d_{t1}) O(t_1, p_1)], (e_{t1} + \varepsilon_{t1} + d_{t1})\} \cup (n, y)$$

$${}^U M'(p_1, \tau) = \{[\phi(\tau - 0 - 0.2) \cdot 0 - \phi(\tau - 0 - 0.2 - 2) \cdot 0], (0 + 0.2 + 2)\} \cup (0, 0)$$

$\tau \in [0, 2.2]$  zaman aralığı için elverişsiz jetonların oluşturduğu işaretleme  ${}^U M'(p_1, \tau) = (0, 2.2)$  'dır. Sonra  $p_2$  yeri için jeton dağılımı elverişli ve elverişsiz jetonların dağılım fonksiyonları ile bulunur.

$${}^A M'(p_2, \tau) = {}^A M(p_2, e_{t1}) + \sum [{}^U M(p_2, e_i) \phi(\tau - y)] - [\phi(\tau - e_{t1} - \epsilon_{t1}) I(t_1, p_2)] + [\phi(\tau - e_{t1} - \epsilon_{t1} - d_{t1}) O(t_1, p_2)]$$

$${}^A M'(p_2, \tau) = 0 + 0 - [\phi(\tau - 0 - 0.2) \cdot 0] + [\phi(\tau - 0 - 0.2 - 2) \cdot 2]$$

$${}^A M'(p_2, \tau) = \phi(\tau - 2.2) \cdot 2$$

Eğer  $\tau \in [0, 2.2)$  ise  ${}^A M'(p_2, \tau) = \phi(\tau - 2.2) \cdot 2 = 0$  olarak bulunur. Eğer  $\tau = 2.2$  ise  ${}^A M'(p_2, \tau) = \phi(\tau - 2.2) \cdot 2 = 2$  olarak bulunur. Sonra elverişsiz jetonların dağılımlarının oluşturduğu işaretleme hesaplanır.

$${}^U M'(p_2, \tau) = \{[\phi(\tau - e_{t1} - \epsilon_{t1}) O(t_1, p_2) - \phi(\tau - e_{t1} - \epsilon_{t1} - d_{t1}) O(t_1, p_2)], (e_{t1} + \epsilon_{t1} + d_{t1})\} \cup (n, y)$$

$${}^U M'(p_2, \tau) = \{[\phi(\tau - 0 - 0.2) \cdot 2 - \phi(\tau - 0 - 0.2 - 2) \cdot 2], (0 + 0.2 + 2)\} \cup (0, 0)$$

$${}^U M'(p_2, \tau) = \{[\phi(\tau - 0.2) \cdot 2 - \phi(\tau - 2.2) \cdot 2], 2.2\}$$

Eğer  $\tau \in [0, 0.2)$  ise,

$${}^U M'(p_2, \tau) = \{[\phi(\tau - 0.2) \cdot 2] - [\phi(\tau - 2.2) \cdot 2]\} , 2.2\}$$

$${}^U M'(p_2, \tau) = [(0 - 0), 2.2] = (0, 2.2)$$

Eğer  $\tau \in [0.2, 2.2)$  ise,

$${}^U M'(p_2, \tau) = \{[\phi(\tau - 0.2) \cdot 2] - [\phi(\tau - 2.2) \cdot 2]\} , 2.2\}$$

$${}^U M'(p_2, \tau) = [(2 - 0), 2.2] = (2, 2.2)$$

Eğer  $\tau = 2.2$  ise ,

$${}^U M'(p_2, \tau) = \{[\phi(\tau - 0.2) \cdot 2] - [\phi(\tau - 2.2) \cdot 2]\} , 2.2\}$$

$${}^U M'(p_2, \tau) = [(2 - 2), 2.2] = (0, 2.2)$$

Olarak bulunur.  $t_1$  geçişinin ateşlenmesi  $\tau = 2.2$  anında sona ermektedir. Ulaşılan yeni durumda  $t_2$  geçişi mümkündür.  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  ve  $p_4$  geçişleri  $t_2$  ile bağlantılı oldukları için bu yerler için işaretleme fonksiyonlarına bakılması yeterlidir.  $p_5$  yerinden bu geçişe bağlı olarak bir değişiklik olmayacağı için  $p_5$  yeri için işaretleme

fonksiyonuna bakılmasına gerek yoktur. Önce  $p_2$  yeri için işaretleme fonksiyonu bulunur.

$$^A M'(p_2, \tau) = ^A M(p_2, e_{t_2}) + \sum [^U M(p_2, e_{t_2}) \cdot \phi(\tau - y)] - [\phi(\tau - e_{t_2} - \varepsilon_{t_2}) \cdot I(t_2, p_2)] + [\phi(\tau - e_{t_2} - \varepsilon_{t_2} - d_{t_2}) \cdot O(t_2, p_2)]$$

$$^A M'(p_2, \tau) = ^A M(p_2, 2.2) + \sum [^U M(p_2, 2.2) \cdot \phi(\tau - y)] - [\phi(\tau - 2.2 - 0.1) \cdot I(t_2, p_2)] + [\phi(\tau - 2.2 - 0.1 - 3) \cdot O(t_2, p_2)]$$

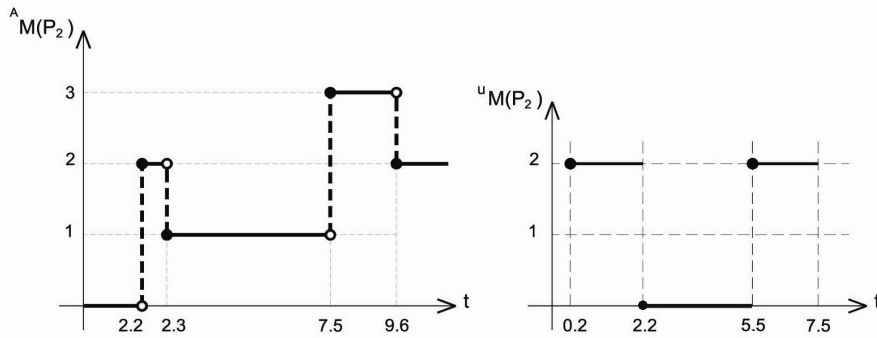
$$^A M'(p_2, \tau) = 2 + 0 - [\phi(\tau - 2.3) \cdot 1] + [\phi(\tau - 5.3) \cdot 0] = 2 - \phi(\tau - 2.3)$$

Eğer  $\tau \in [2.2, 2.3]$  ise  $^A M'(p_2, \tau) = 2 - \phi(\tau - 2.3) = 2$  olur. Eğer  $\tau \in [2.2, 5.3]$  ise  $^A M'(p_2, \tau) = 2 - \phi(\tau - 2.3) = 1$  olur. Elverişsiz jetonların dağılımlarının oluşturduğu işaretleme aşağıdaki gibidir.

$$^U M'(p_2, \tau) = \{[\phi(\tau - e_{t_2} - \varepsilon_{t_2}) O(t_2, p_2) - \phi(\tau - e_{t_2} - \varepsilon_{t_2} - d_{t_2}) O(t_2, p_2)], (e_{t_2} + \varepsilon_{t_2} + d_{t_2})\} \cup (n, y)$$

$$^U M'(p_2, \tau) = \{[\phi(\tau - 2.2 - 0.1) \cdot 0 - \phi(\tau - 2.2 - 0.1 - 3) \cdot 0], (2.2 + 0.1 + 3)\} \cup (0, 0) = (0, 5.3)$$

$\tau \in [2.2, 5.3]$  zaman aralığı için elverişsiz jetonların oluşturduğu işaretleme  $^U M'(p_2, \tau) = (0, 5.3)$  'dır. Buraya kadar  $p_2$  yeri için bulunan jeton dağılımları ağda yer alan diğer yerler için de aynı yöntemle yapılabilir.  $p_2$  yerinde bulunan elverişli ve elverişsiz olan jetonların zamana bağlı değişimi şekil 3.4'de gösterilmiştir.



**Şekil 3.4 :**  $p_2$  yerinde bulunan elverişli ve elverişsiz jeton dağılımı.

$p_2$  yeri için yapılan bu değişim grafiği ağda bulunan diğer yerler içinde yapılabilir. (3.5) ve (3.6)'daki formüllere bölüm 2 de olduğu gibi geçişlere ait eş zamanlı ateşlenme özelliği ve çeşitli ateşlenmeler sonucu gelinen yeni durumda geçişler arasındaki çelişki durumunu çözmek için öncelik ataması yapılarak daha da geliştirilebilir. İkinci bölümde geliştirilen modelde geçişin ateşlenmesi ile sistemde anlık jeton kaybı gözükmemekte, sistemde kilitlenme zaman zaman sistemde yer alan

yerlerde hiç jeton bulunmamaktadır. Bunun için sistemin belli bir bölümünü alıp onun üzerinden işlem yapmak yerine sistemi ateşlenme zamanlarıyla global olan zamanı bir bütün olarak inceleme yapılması gereklidir. Süre tutmalı Petri ağı modelinde ise sistem anlık jeton kaybı durumu yoktur. Geçiş ateşlenmesinde geçiş için ayrılan (rezerve edilen) jetonu göstermek için jetonlar elverişli ve elverişsiz olarak ikiye ayrılmıştır ve işaretleme bunlar üzerinden yapılmıştır. Burada sistemi kontrol etmek ve alt sistemlere ayırıp onlar üzerinden işlem daha kolay gibi gözükmektedir. Ama işaretleme ikiye ayrıldığı için işlem karmaşıklığı daha fazladır.



#### 4. STOKASTİK ZAMANLANDIRILMIŞ PETRİ AĞLARI

Çeşitli büyüklük ve biçimdeki Petri ağları; eş zamanlılık, tutarlılık gibi birçok özelliğe sahip sistemlerin niteliksel özellikleri belirlemede kullanılır. Sistemin niceliksel bakımdan analiz etmede, Petri ağına ait önceden belirlenen PA tabanlı tekniklerin kullanımı temel modele zaman özelliklerinin eklenmesiyle elde edilebilir [24]. Bu olgusal gerçekliğin Petri ağına uygulanması epeyce uzun bir zamandır devam etmekte ve çok farklı yaklaşımlar literatürde göze çarpmaktadır. En başta gelen temel yaklaşımlar;

- Petri ağı elementlerine (ya geçişlerine ya yerlerine yada oklarına) zaman olgusunun eklenmesi,
- Zamanlandırılmış geçişler için, ateşlenme mantığı arasındaki yaklaşımlar (anlık ateşlenmeler yada üç aşamada gerçekleşen ateşlenmeler)
- Zamanın doğasına ait yaklaşımlar (deterministik yada olasılıksal zaman ifadesi)

şeklindedir. Bu aşamada Petri ağına zamana ait belirtme ifadesi, Petri ağına geçişe bir gecikme atanması göz önüne alınarak elde edilecektir. Geçişe ait ateşlenmenin, anlık olduğu kabulü yapılacaktır. Yani geçişe ait giriş yerinden jetonların eksilme anı ile çıkış yerinde oluşacak jetonların oluşma anı aynı zaman içinde gerçekleşecektir. Geçişe ait ateşlenme gecikmesi olasılıksal bir yapıda olup, gecikmeye ait ya olasılık yoğunluk fonksiyonu (probability density function, pdf) yada olasılık dağılım fonksiyonu (probability distribution function, PDF) ilgili geçişe belirtilmesi gerekmektedir. En basit anlamda geçişe atanmış bütün gecikmeler negatif üstel olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olduğu kabul edilmelidir.

Rasgele (stokastik) olarak zamanlandırılmış Petri ağları-RZPA (stochastic timed Petri nets, STPN), klasik Petri ağı yaklaşımına, geçişlere rasgele ateşlenme zamanları atanarak elde edilmiş modeldir [7]. Bu model aslında rasgele (stokastik) bir işlem yürüten yüksek seviyeli bir Petri ağı modelidir. RZPA tabanlı performans değerlendirmesi ele alınan sisteme göre daha avantajlı olabilir çünkü ele alınan

sisteme ait değerlendirme yeterince doğrulukla elde edilebilir ve daha genel sonuçlar üretebilmektedir.

Bu bölüm içerisinde önce stokastik işlemin temellerine yer verilecek sonra, stokastik Petri ağlarına kısaca değinilecek ve arkasından genelleştirilmiş stokastik Petri ağları ele alınacaktır.

#### 4.1 Stokastik İşlem (Stochastic Process)

Stokastik işlem, (stochastic process) zaman anlamı olan bir parametrenin işlevi gibi olasılıksal yapıya ait bir olayı tanımlamada yararlı bir matematiksel modeldir. Stokastik olaylar; tahmin edilemeyen ani hava değişimleri, herhangi bir aletin bozulması, günün herhangi bir saatinde markette yada sahil kenarında bulunan insan sayısı, kartla veya zarla oynanan oyunlardaki şans durumu gibi herhangi bir durum olabilir [25]. Stokastik işlem, rasgele değişkenlere dayanmaktadır. Rasgele değişkenlerin aldığı değerler kümesi durum uzayı (state space),  $S$ , olarak tanımlanır. Rasgele değişkenlerin, alabileceği her değer için olasılıkların bulunduğu küme olasılık uzayını oluşturur.

$X$ , rasgele bir değişken olarak kabul edilsin. Eğer  $X$ 'in mümkün olan her değeri sayılabilir ise bu rasgele değişken, ayrık (discrete) olarak adlandırılır.  $X$ 'in hangi değeri alacağı bilinmediği için,  $X$  rasgele değişkeninin  $\chi$  değeri alabilmesi,  $p_X(\chi)$  olasılık fonksiyonu ile (4.1)'de gösterildiği gibi verilir [25].

$$p_X(\chi) = P[X = \chi] \quad (4.1)$$

Burada  $\chi$  herhangi bir reel sayı olabilir ve  $0 \leq p_X(\chi) \leq 1$  olarak verilir.  $p_X(\chi)$ ,  $X$  değerine ait olasılık kütle fonksiyonu (probability mass function, pmf) olarak adlandırılır. Eğer  $X$  değişkeni  $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \chi_5$  değerlerini sırasıyla  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$  olasılıklarıyla alıyorsa (4.2)'deki eşitlik geçerli olacaktır.

$$\sum_{i=1}^5 p_i = 1 \quad (4.2)$$

X değişkeninin, belli bir kümenin içinden  $\chi_i$  gibi bir değer alacağı varsayalım ve bu  $\chi_i$  'de, 'a' gibi bir değerden küçük ve eşit olsun. Bu durumda değişkenin  $\chi_i$  değerini alma olasılığı (4.3)'teki gibidir.

$$F_X(a) = \sum_{\chi \leq a} p_X(\chi) \quad (4.3)$$

$F_X(a)$  'ya X değişkeninin kümülatif (birikimli) dağılım fonksiyonu (cumulative distribution function) adı verilir. Kümülatif dağılım fonksiyonunun diğer bir gösterilimi ise (4.4)'teki gibidir.

$$F_X(\chi) = P[X \leq \chi] ; 0 \leq F_X(\chi) \leq 1 \quad (4.4)$$

Eğer X değişkeni sürekli zamanlı ise, kümülatif dağılım fonksiyonu (4.5)'teki gibi hesaplanır.

$$F_X(a) = P[X \leq a] = \int_{-\infty}^a f_X(\chi) d\chi \quad (4.5)$$

Burada  $f_X(\chi)$  , X değişkenine ait olasılık yoğunluk fonksiyonu (probability density function, pdf) olarak adlandırılır ve (4.6)'daki özelliğe sahiptir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(\chi) d\chi = 1 \quad (4.6)$$

Olasılık yoğunluk fonksiyonu, olasılık dağılım fonksiyonu üzerinden (4.7) yardımıyla hesaplanabilir.

$$f_X(\chi) = \frac{d}{d\chi} F_X(\chi) \quad (4.7)$$

Olasılık yoğunluk fonksiyonunun, (4.8)'de olduğu gibi negatif üstel yoğunluk fonksiyonu şeklinde kullanımı yaygındır.

$$f_X(\chi) = \lambda e^{-\lambda\chi} \quad (4.8)$$

Burada  $\lambda$  olasılık yoğunluk fonksiyonuna ait bir parametre (oran) şeklinde olup, bu fonksiyon  $\chi < 0$  olduğu değerler için geçersizdir. Bu tanımlanan yoğunluk fonksiyonu üzerinden olasılık dağılım fonksiyonu (4.9)'daki gibi hesaplanabilir.

$$F_X(a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda \chi} d\chi = 1 - e^{-\lambda a} ; a \geq 0 \quad (4.9)$$

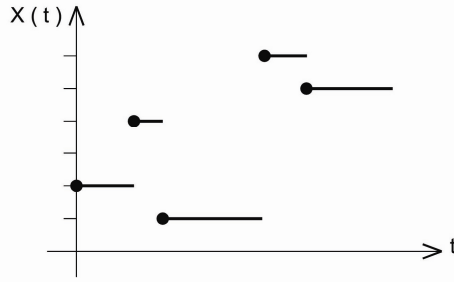
(4.9)'da  $a < 0$  ise  $F(a)=0$ 'dır [25]. Bu tanımlamalar altında stokastik işlem,  $\{X(t), t \in T\}$  aynı olasılık uzayı içinde tanımlanan rasgele değişkenler kümesidir. Bu değişkenlerin aldığı değerler S durum uzayında yer alır ve endekslenmiş parametre t,  $T=[0, \infty)$  şeklinde tanımlanan küme içinde yer alır [24]. En genel anlamda stokastik işlemlerin olasılıksal karakterlerini tanımlamak oldukça zordur. Olasılıksal karakter tanımlamalarını daha basite indirgeyen bir stokastik işlem sınıfı, Markov işlemleridir (Markov process). Markov işlemleri, (4.10)'daki Markovian özelliklerini, sağlayan stokastik işlemdir.

$$\begin{aligned} P\{X(t) \leq \chi \mid X(t_n) = \chi_n, X(t_{n-1}) = \chi_{n-1}, \dots, X(t_1) = \chi_1, X(t_0) = \chi_0\} = \\ = P\{X(t) \leq \chi \mid X(t_n) = \chi_n\} ; t > t_n > t_{n-1} > \dots > t_1 > t_0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Bu özelliğe göre, bir sistemin gelecek zamandaki davranışı (herhangi bir t anındaki) sadece sistemin şimdiki durumuna ( $t_n$  zamanındaki) bağlıdır ve sistemin geçmiş zamandaki durumlarından bağımsızdır. Yani markov işlemi, belleksiz olma özelliğine sahiptir. Markov işlemi gerçek zamanlı sistemlerde pek karşılaşılmaz da, ayrık olaylı sistemlerin stokastik modellerini kurmada oldukça kullanışlıdır. En önemli özelliği ise basit analiz özelliklerinin olmasıdır. Ayrık olay uzayındaki, Markov işlemi, Markov zinciri (Markov chain, MC) ile adlandırılır. Eğer t parametresi ayrık ise bu işlem ayrık olaylı Markov zinciri (discrete time Markov chain, DTMC), eğer t sürekli ise sürekli zamanlı Markov zinciri olarak adlandırılır (continuous time markov chain, CTMC).

## 4.2 Sürekli Zamanlı Markov Zinciri (SZMZ)

Stokastik işlemleri grafiksel halde göstermek için, zamana bağlı fonksiyon kümelerinden oluşan örnek yörünge (sample path) adı verilen bir yöntem kullanılır [24]. Şekil 4.1'de sürekli zamanlı markov zincirine ait örnek yörünge gözükmektedir.



**Şekil 4.1 :** Sürekli zamanlı markov zincirine ait örnek yörünge (sample path).

Her yatay parça, durum içerisinde geçirilen zamanı göstermektedir. Markovian özelliği, sistemin bir durumu içinde kalınan zamanın üstel olarak dağıtılmış rasgele değişkenler olmasını gerektirir. Markov zincirindeki negatif üstel olasılık yoğunluk fonksiyonu (4.11)'deki gibidir.

$$f_x(\chi) = \lambda e^{-\lambda \chi} u(\chi) \quad (4.11)$$

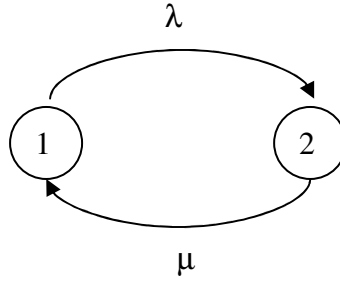
Şeklinde olup,  $u(\chi)$  birim basamak fonksiyonu,  $\lambda$  ise yoğunluk fonksiyonuna ait parametre (veya oran) şeklinde açıklanır. Olasılık yoğunluk fonksiyonu sadece belleksizlik özelliği için süreklidir ve (4.12)'deki özelliği sağlar.

$$P\{X > \chi + a \mid X > a\} = P\{X > \chi\} \quad (4.12)$$

Bu yüzden; herhangi bir zaman anından, sistemin ileride içerisinde kalacağı zaman miktarı, bu zamana kadar sistemin içinde olduğu geçmiş zamandan bağımsızdır, sadece şu anki duruma bağlıdır. Yani geçmiş değerlerden bağımsızdır.  $\lambda$  parametre ile verilen üstel dağıtılmış rasgele değişkenin ortalaması  $\lambda^{-1}$ 'dir.

Pratikte SZMZ'ya durumu geçiş diyagramlarıyla (state transition rate diyagram) yada geçiş oran matrisi (transition rate matrix, infinitesimal generator, Q) ile gösterilirler. Durum geçiş diyagramı durumlar ve durumlar arasındaki geçişi göstermek için yönlendirilmiş oklardan oluşmaktadır. Oklar, üstel olarak dağıtılmış fonksiyonun parametresi ile etiketlenmiştir. Geçiş oran matrisi boyutlar sistemin durumları ile aynı olacak şekilde olan kare matristir. Matrisin köşe elemanlarının dışında kalan elemanlar, bir durumdan diğer duruma geçişi gösteren geçiş parametreden oluşur. Köşe elemanları ise, kendisinin bulunduğu satırdaki elemanların toplamını sıfıra ulaştıracak şekilde seçilir. Şekil 4.2'de de örnek bir durum geçiş diyagramı

gözükmektedir. Bu diyagramda 1 numaralı durumun kapının kapalı olmasını, 2 numaralı durum is kapının açık olduğu durumu göstermektedir.



**Şekil 4.2 :** Örnek bir durum geçiş diyagramı.

Bu diyagram için geçiş oran matrisi ise aşağıdaki gibidir.

$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \beta & -\beta \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Bu örneğe göre 1 numaralı durumda ortalama kalma süresi  $\lambda^{-1}$  iken 2 numaralı durumda ortalama kalma süresi  $\mu^{-1}$ 'dir. Sürekli zamanlı Markov zincir modelinin çözümü, durum uzayı üzerinden olasılık toplam fonksiyonunun ya keyfi bir t zamanında ya da kararlı koşul altında hesaplanmasıyla elde edilir. Kararlı bir koşulda veya kararlı durum olasılık kütle fonksiyonu (steady state probability mass function) mevcut olduğunda, başlangıç durumundan bağımsız olacak şekilde, SZMZ'nin ergodik olduğu söylenir [24,26]. SZMZ'nin t anında i durumunda olmasının olasılığı, (4.13)'deki gibi gösterilir.

$$\pi_i(t) = P\{X(t) = i\} \quad (4.13)$$

Eğer bu tanımlama üzerinden sisteme ait olasılık kütle fonksiyonu (4.14)'deki gibi yazılabilir.

$$\pi(t) = \{\pi_1(t), \pi_2(t), \pi_3(t), \dots\} \quad (4.14)$$

Bu sistemin t anında 1, 2, 3 gibi durumlarında bulunma olasılığını gösterir. Bu gösterilimden sonra herhangi t anı için sistemin olasılık kütle fonksiyonu (4.15)'de gösterilmiştir.

$$\pi(t) = \pi(0)e^{Qt} \quad (4.15)$$

Eğer sistemin davranışı, zaman ifadesinden bağımsız olarak elde edilebiliyorsa o sistemin homojen olduğu söylenir. Böylece sistemin başlangıç anı keyfi olarak seçilebilir. Eşitlik (4.16) koşulu altında SZMZ'nin homojen olarak adlandırılır[7, 25].

$$P\{X(t) \leq \chi \mid X(t_n) = \chi_n\} = P\{X(t - t_n) \leq \chi \mid X(0) = \chi_n\} \quad (4.16)$$

Homojenlik ve ergodik SZMZ olduğunu kabulü altında, sistemin i durumunda olması olasılığı (4.17)'deki yazılabilir.

$$\pi_i = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{X(t) = i\} ; \sum_i \pi_i = 1 \quad (4.17)$$

Bu durumda sisteme ait olasılık kütle fonksiyonu (4.18)'deki gibi yazılabilir.

$$\pi = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots\} \quad (4.18)$$

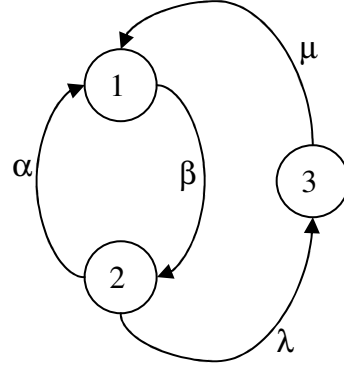
Sisteme ait olasılık kütle fonksiyonu, başlangıç durumundan bağımsız olduğu için  $\pi(t)$  herhangi bir  $t \geq 0$  için  $\pi$ 'ye eşittir. Ayrıca bu durumda  $\pi$ 'ye SZMZ'ne ait kararlı durum olasılık kütle fonksiyonu denir.  $\pi$ 'nin bulunması geçiş oran matrisi (Q) yardımıyla (4.19)'daki gibi hesaplanabilir [7, 24, 25, 27].

$$\pi Q = 0 ; \sum_i \pi_i = 1 \quad (4.19)$$

Lineer denkleminin çözülmesiyle bulunur. (4.19) eşitliğini daha açık bir biçimde (4.20)'deki gibi yazılabilir.

$$q_{ii}\pi_i + \sum_{k \neq i} q_{ki}\pi_k = 0 ; i=0,1,2,\dots \quad (4.20)$$

Şekil 5.3'de örnek bir durum geçiş diyagramı verilmiş olup 1 numaralı durum makinenin durması, 2 numaralı durum makinenin çalışması, 3 numaralı durum ise makinenin bozulmasını göstermektedir.



**Şekil 4.3 :** Makinenin çalışmasına ait durum geçiş diyagramı.

Şekil 4.3’de verilen durum geçiş diyagramına ait oran matrisi aşağıdaki gibidir.

$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -\beta & \beta & 0 \\ \alpha & -(\alpha + \mu) & \mu \\ \lambda & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \end{matrix}$$

SZMZ modelini elde etmek için, zamana ait birkaç özellikten söz edilmesi gerekir. Sisteme ait gelecek durumlar sadece şu andaki duruma bağlıdır ve geçmişteki durumlara bağlı değildir. Bu bilgiler altında şekil 5.3’de verilen örnek için aşağıdaki gibi açıklamalar yapılabilir:

- Makinenin durmasına ait zaman periyodu  $\beta$  parametresi ile üstel olarak dağıtılmıştır.
- Makinenin çalışmasına ait zaman periyodu  $\alpha$  parametresi ile üstel olarak dağıtılmıştır.
- Makinenin tamir süresi  $\mu$  parametresi ile üstel olarak dağıtılmıştır.
- Sağlam bir makinenin bozuluncaya kadarki ömür süresi  $\lambda$  parametresi ile üstel olarak dağıtılmıştır [24].

SZMZ ergodik olduğundan kararlı durum olasılık dağılım fonksiyonları eşitlik (4.19) yardımıyla çözülebilir.

$$\beta\pi_1 = \alpha\pi_2 + \lambda\pi_3$$

$$(\alpha + \mu)\pi_2 = \beta\pi_1$$

$$\lambda\pi_3 = \mu\pi_2$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

Bu dört denklemden de, sisteme air kararlı durum olasılıkları aşağıdaki gibi elde edilirler.

$$\pi_1 = \frac{1}{\lambda(\alpha + \beta) + \mu(\lambda + \beta)} \cdot \lambda(\alpha + \mu)$$

$$\pi_2 = \frac{1}{\lambda(\alpha + \beta) + \mu(\lambda + \beta)} \cdot \lambda\beta$$

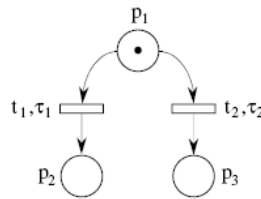
$$\pi_3 = \frac{1}{\lambda(\alpha + \beta) + \mu(\lambda + \beta)} \cdot \beta\mu$$

### 4.3 Zamanlandırılmış Petri Ağlarından Hafıza Özellikleri (Memory Policy)

Zamanlandırılmış Petri ağlarında her geçişe, bu geçiş süresini tanımlayan belli bir gecikme etiketi eklenmiştir. Bir geçişin mümkün olması ile bu geçişe ait gecikme bilgisi, bu geçişin süre ölçerine (zamanlayıcı, timer) yüklenir. Bu süre ölçer, belirlenen gecikme değerinden azalırken, sıfıra ulaştığı noktada geçiş ateşlenir. Bu mantık doğrultusunda Petri ağında, aralarında çelişki durumu bulunan geçişler için süre ölçer bilgisine dayanarak 3 farklı bellek özelliği belirlenebilir [7, 22, 30]

#### 4.3.1 Yeniden örnekleme (Resampling)

Bu yaklaşımda, aralarında çelişki bulunan geçişlerden birinin ateşlenmesi sonucunda diğer geçişlerin süre ölçer bilgisinin herhangi bir yerde saklanmayacağını, bir sonraki mümkün olmadaki yeniden ilk değerini alacağını belirtir.

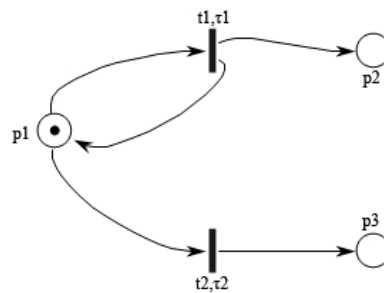


**Şekil 4.4 :** Örnek bir yarış modeli.

Şekil 4.4’de gösterilen Petri ağı başlangıç zamanı  $\tau=0$  zamanında verilmiş olsun. Bu zamanda  $t_1$  ve  $t_2$  geçişleri mümkün olur ve bu geçişlerin süre ölçerlerine geçişlerin gecikmeleri olan  $\tau_1$  ve  $\tau_2$  değerleri yüklenir. Süre ölçerler, yüklenen bu değerlerden sabit bir hızda azalmaya başlar. Hangi süre ölçer önce sıfıra ulaşırsa o geçiş ateşlenir. Burada  $\tau_1 < \tau_2$  olsun. Bu durumda  $t_1$  geçişine ait süre ölçer önce sıfıra ulaşacaktır ve  $t_1$  geçişi ateşlenip  $p_2$  yeri jeton kazanacaktır. Diğer taraftan  $t_2$  geçişine ait süre ölçer

$\tau_2 - \tau_1$  değerinde kalacaktır. Eğer bu ağda  $\tau_1 + x$  kadar süre sonra  $p_1$  yeri tekrar jetona sahip olursa, bu durumda yine  $t_1$  ve  $t_2$  geçişlerinin süre ölçerlerine sırasıyla  $\tau_1$  ve  $\tau_2$  değeri yüklenir. Yani  $t_2$  geçişine ait süre ölçer başlangıçtaki değeriyle yüklenmiştir (restart) ve  $\tau_2 - \tau_1$  değeri sistemden kaybolmuştur. Bu şekildeki yaklaşıma yeniden örnekleme denir ve her yeni ateşlenmede sistemde geçmişe ait bir örnek yoktur.

#### 4.3.2 Mümkün olma hafızası (Enabling Age Memory)



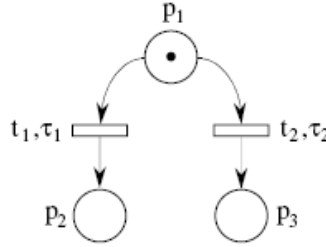
**Şekil 4.5 :** Mümkün olma hafızası modeline örnek bir Petri ağı.

Şekil 4.5’de gösterilen Petri ağına başlangıç zamanı  $\tau=0$  zamanında verilmiş olsun. Bu zamanda  $t_1$  ve  $t_2$  geçişleri mümkün olur ve bu geçişlerin süre ölçerlerine geçişlerin gecikmeleri olan  $\tau_1$  ve  $\tau_2$  değerleri yüklenir. Süre ölçerler, yüklenen bu değerlerden sabit bir hızda azalmaya başlar. Hangi süre ölçer önce sıfıra ulaşırsa o geçiş ateşlenir. Burada  $\tau_1 < \tau_2$  olsun. Bu durumda  $t_1$  geçişine ait süre ölçer önce sıfıra ulaşacaktır ve  $t_1$  geçişi ateşlenip  $p_1$  ve  $p_2$  yerleri jeton kazanacaktır. Diğer taraftan  $t_2$  geçişine ait süre ölçer  $\tau_2 - \tau_1$  değerinde kalacaktır. Bu ateşlenme sonrasında ulaşılan yeni durumda  $p_1$  yerinde yine jeton vardır ve yine  $t_1$  ve  $t_2$  geçişleri mümkündür. Bu defa  $t_1$  geçişe ait süre ölçere yine  $\tau_1$  değeri yüklenirken,  $t_2$  geçişine ait süre ölçere ise  $\tau_2 - \tau_1$  yüklenerek ateşleme süreci başlatılacaktır. Yani ateşlenme sonrası ulaşılan yeni durumda, mümkün olan geçişler arasında önceki durumda mümkün olupta ateşlenemeyen geçiş mevcut ise, ulaşılan bu yeni durumda bu geçişe ait süre sayara önceki ateşlenme sonrasında arda kalan değeri ( $\tau_2 - \tau_1$ ) yüklenir (continue mechanism). Eğer ateşlenme sonrası ulaşılan yeni durumda, bir önceki ateşlenmede çelişki durumundan etkilenip ateşlenemeyen geçiş, mümkün değilse bu geçişe ait arda kalan sayıcı değeri ( $\tau_2 - \tau_1$ ) sistemden silinir (restart mechanism).

Verilen bu örnek için bakıldığında ise  $t_2$  geçişe yeni durumda mümkün olmasaydı bu geçişe ait değer sistemden silinirdi. Sistemde arda kalan bu değerler geçişe atanan mümkün olma hafıza değişkeninde (enabling age memory) saklanır. Böylece sistemde geçmişe ait değerler hafızada tutulur.

#### 4.3.3 Hafıza yaşı modeli (Age Memory)

Bu model, mümkün olma yaşı modelinin daha dar kapsamlı olanıdır. Mümkün olma yaşı modelinde ulaşılan yeni durumda, bir önceki ateşlenmeden etkilenip ateşlenemeyen geçiş, geçiş mümkün değilse ona ait arda kalan sayıcı değeri sıfırlanıyordu. Hafıza yaşı modelinde ise bu değer, geçişe atanmış hafıza yaşı değişkeninde(age memory variable) saklanarak sistemin hafızasında tutulmaktadır.



**Şekil 4.6 :** Hafıza yaşı modeline örnek bir Petri ağı.

Şekil 4.6’da gösterilen Petri ağı başlangıç zamanı  $\tau=0$  zamanında verilmiş olsun. Bu zamanda  $t_1$  ve  $t_2$  geçişleri mümkün olur ve bu geçişlerin süre ölçerlerine geçişlerin gecikmeleri olan  $\tau_1$  ve  $\tau_2$  değerleri yüklenir. Süre ölçerler, yüklenen bu değerlerden sabit bir hızda azalmaya başlar. Hangi süre ölçer önce sıfıra ulaşırsa o geçiş ateşlenir. Burada  $\tau_1 < \tau_2$  olsun. Bu durumda  $t_1$  geçişine ait süre ölçer önce sıfıra ulaşacaktır ve  $t_1$  geçişi ateşlenip  $p_2$  yeri jeton kazanacaktır. Diğer taraftan  $t_2$  geçişine ait süre ölçer  $\tau_2 - \tau_1$  değerinde kalacaktır. Hafıza yaşı modelinde arda kalan bu  $\tau_2 - \tau_1$  değeri bir sonraki ateşlemeler için  $t_2$  geçişine ait hafıza yaşı değişkeninde saklanacaktır.

#### 4.4 Stokastik Petri Ağları-SPA (Stochastic Petri Nets,SPN)

Stokastik Petri ağı altı sistem dinamiği ile tanımlanır.  $SPN=\{P, T, I, O, M_0, \Lambda\}$  şeklindeki bir küme ile ifade edilir. Burada  $P, T, I, O, M_0$  ifadeleri işaretlenmiş zamansız Petri ağındaki değişkenlerdir.

- $P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$  sonlu yerlerin kümesini
- $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  sonlu geçişlerin kümesini  $P \cup T \neq \emptyset; P \cap T = \emptyset$  dir.
- $I : (P \times T) \rightarrow N$  geçişler için giriş oklarının fonksiyonunu
- $O : (P \times T) \rightarrow N$  geçişler için çıkış oklarının fonksiyonunu
- $M_0 = P \rightarrow N$  başlangıç işaretlemesi gösterir.

$\Lambda: T \rightarrow R$ , her bir geçişe karşı düşen ateşleme oranlarının (firing rate) kümesini gösterir.  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  şeklinde gösterilir. Stokastik Petri ağında, ateşlenme gecikmeleri geçişlere ilişkilendirilmiştir. Geçişe atanan sürenin, ilgili geçiş ateşlenmeden önce geçirilmesi, harcanması gerekir. Geçişe atanan bu süre, negatif üstel olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip rasgele değişkendir.  $t_k$  geçişine ilişkilendirilmiş  $\lambda_k$  değeri, ateşlenme oranı, olasılık yoğunluk fonksiyonuna ait bir parametredir.  $\lambda_k$  değeri sistemdeki işaretleme durumundan bağımsız olabileceği gibi sistemdeki işaretlemeye bağlı olarakta değişebilir. SPA'da yer alan  $t_i$  geçişinin gecikmesinin gösteren rasgele değişken olan  $x_i$ 'nin üstel azalan olasılık yoğunluk fonksiyonu, (4.21)'de; olasılık dağılım fonksiyonu ise (4.22)'de gösterilmiştir.

$$f_{x_i}(\chi) = \lambda_i e^{-\lambda_i \chi} \quad (4.21)$$

$$F_{x_i}(\chi) = 1 - e^{-\lambda_i \chi} \quad (4.22)$$

Sürekli zamanlı Markov zinciri modelini en basit anlamda çözmek, rasgele değişkenlerin olasılık yoğunluk fonksiyonlarını negatif üstel biçimde seçilmesi ile mümkün olur. Bu şekilde seçilme sonucuyla sistemin belleksiz olma özelliği sağlanır. Petri ağları içinde aynı durum geçerlidir. Bir Petri ağında, içinde bulunan işaretlemeden, mümkün olan bir geçişin ateşlenmesi ile geçilecek yeni durumun, sistemin daha önceki işaretlemelerinden bağımsız olması için atanan olasılık yoğunluk fonksiyonlarının negatif üstel seçilmesi gereklidir. Böylece ayrık olaylı bir sistemi çözmek çok daha kolay olacaktır. Negatif üstel biçimde seçilen olasılık yoğunluk fonksiyonu ile ayrıca sistemin sürekli zamanda çözümü de sağlanmış olur [27]. Bu bağlamda [24, 25] tanımlanan ve sistemin hafıza özelliklerini tanımlayan yeniden örnekleme (resampling), hafıza yaşı (age memory) ve mümkün olma

hafızası (enabling memory) gibi modellerin arasındaki fark ortadan kalkmaktadır. Çünkü üstel olarak dağıtılmış olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip bir Petri ağında, bir geçişin ateşlenmesi sonucunda bu geçiş ile çelişki durumunda olan ve ateşlenemeyen başka bir geçişin, süre ölçerinde kalan zaman miktarı ile mümkün olma anındaki zaman miktarı aynı olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahiptir. Yani sistem belleksiz olduğu için, her yeni ulaşılan durumda geçişe ait gecikmenin yeniden başlatıldığı yönünde bir yargıya varılabilir [24, 25].

Stokastik Petri ağlarında geçişlerin ateşlenmesi anlık bir olaydır. Yani giriş yerlerinden jetonların eksilme anı ile çıkış yerlerinde jetonların oluşma anı aynıdır. Ayrıca stokastik Petri ağlarındaki ateşlenmeler, önseçimli (preselection model) değil de, yarış (race model) şeklindedir. Yani bir yerin çıktısında bulunan geçişlerden hangisinin süre sayısı önce sıfıra ulaşırorsa o geçiş ateşlenir. Yani sistemin herhangi bir işaretlemesinde kalma süresi, o işaretlemede mümkün olan geçişlerin gecikmelerinin minimumu kadardır. Stokastik Petri ağlarında temel olan model yarış modeli temelinde olduğundan bu ağa ait nitel özellikler, (qualitative behaviour) zamansız Petri ağı özellikleri ile tamamen aynıdır. Örneğin SPA'ya ait erişilebilirlik ağacı, bu yapıda olan zamansız Petri ağı ile tamamen aynıdır. Diğer bir özellik ise iki geçişe ait süre sayıların aynı anda sıfıra ulaşamayacağıdır. Yani aynı anda iki geçiş birden ateşlenemez.

Herhangi bir durumda kalma süresi üstel olarak dağıtılmış durumdadır ve bu işaretleme ortalama kalma süresi (4.23)'deki gibidir.

$$\left[ \sum_{i: t_i \in E(M_j)} \lambda_i \right]^{-1} \quad (4.23)$$

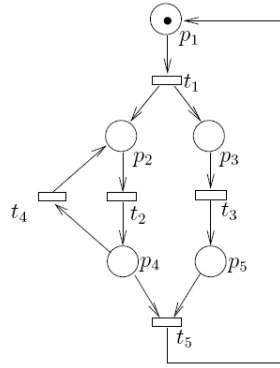
$E(M_j)$ ,  $M_j$  işaretlemede mümkün olan geçişlerin kümesidir. SPA'da bulunan tüm geçişler üstel olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip gecikmeye sahip olmasından dolayı, herhangi bir işaretlemede mümkün olan  $t_k$  geçişinin ateşlenme olasılığı (4.24)'deki gibidir.

$$P\{t_k \mid M_j\} = \frac{\lambda_k}{\sum_{i: t_i \in E(M_j)} \lambda_i}, \quad t_k \in E(M_j) \quad (4.24)$$

SZMZ’de yer alan durum geçiş diyagramları, SPA’da erişilebilirlik ağacı çıkartılarak elde edilebilir. Erişilebilirlik ağacında bir durumdan diğerine geçişte ateşlenen geçişin ateşlenme oranı, durumlar arası geçişi gösteren oka etiketlenerek durum geçiş diyagramı elde edilebilir. Böylece elde edilen erişilebilirlik ağacı, durum geçiş diyagramına karşı düşer. SPA’ya ait geçiş oran matrisi ise erişilebilirlik ağacı üzerinden oluşturulan durum geçiş diyagramları vasıtasıyla elde edilebilir. Böylece verilen ağa ait kararlı durum değışkenleri, SZMZ olduğu gibi (4.25)’deki eşitliklerin çözümü ile elde edilebilir.

$$\pi Q = 0 ; \sum_i \pi_i = 1 \quad (4.25)$$

$\pi_i$ ,  $M_i$  işaretlemesine ait kararlı durum olasılığını gösterir. Şekil 4.7’de verilen stokastik Petri ağına ait  $\Lambda=\{2,1,1,3,2\}$  şeklindedir.  $\tau=0$  anında  $M_0=(1,0,0,0,0)$  şeklinde olup, bu işaretlemeyle sadece  $t_1$  geçişi mümkündür.  $t_1$  geçişinin mümkün olması ile ateşlenmesi arasındaki zaman  $\lambda_1$  parametresi ile üstel olarak dağıtılmıştır ve bu geçişin ateşlenmesi için ortalama geçen süre  $\lambda_1^{-1}$  dir.



**Şekil 4.7 :** Örnek Stokastik Petri ağı.

$t_1$  geçişi ateşlendiği zaman ağ  $M_1 = (0,1,1,0,0)$  durumuna geçer. Bu işaretleme ile  $t_2$  ve  $t_3$  geçişlerinin ikisi birden eş zamanlı olarak mümkün olur. Eğer Önce  $t_2$  geçişinin ateşlendiği varsayarsak sistem  $M_2 = (0,0,1,1,0)$  durumuna gider. Eğer Önce  $t_3$  geçişinin ateşlendiği varsayarsak sistem  $M_3 = (0,1,0,0,1)$  durumuna gider.  $M_1$  durumundan sonra gidilecek bir sonraki işaretleme geçişler arasındaki yarışa

bağlıdır ve hangi geçişe ait gecikme daha kısa ise o yarışı kazanır.  $M_1$  işaretlemesindeyken  $t_2$  geçişinin ateşlenme olasılığı aşağıdaki gibidir.

$$P\{t_2 \mid M_1\} = P[X_2 < X_3] = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_3}$$

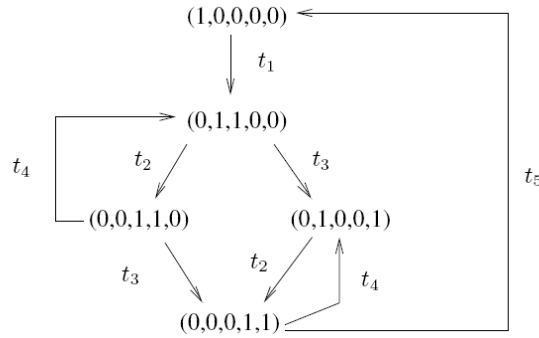
Aynı şekilde  $M_1$  durumunda  $t_3$  geçişinin ateşlenme olasılığı aşağıdaki gibidir.

$$P\{t_3 \mid M_1\} = P[X_3 < X_2] = \frac{\lambda_3}{\lambda_2 + \lambda_3}$$

$M_1$  işaretlemesine kalma süresi ise  $t_2$  ve  $t_3$  geçişlerinin gecikmelerinin minimumu kadardır. Bu işlem olasılık dağılım fonksiyonları üzerinden aşağıdaki gibi bulunabilir.

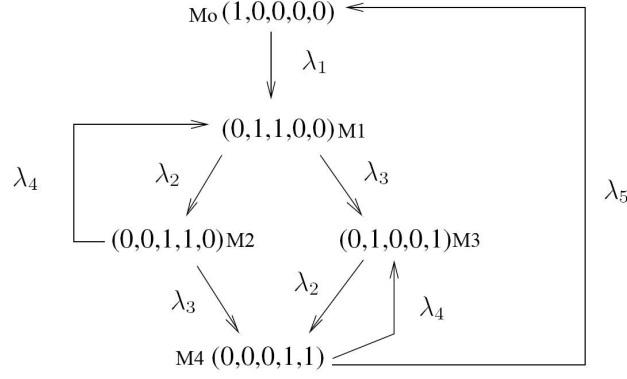
$$\begin{aligned} P[\min(X_2, X_3) \leq \chi] &= P[X_2 \leq \chi \text{ veya } X_3 \leq \chi] \\ &= 1 - P[X_2 > \chi \text{ ve } X_3 > \chi] \\ &= 1 - e^{-\lambda_2 \chi} e^{-\lambda_3 \chi} \\ &= 1 - e^{-(\lambda_2 + \lambda_3) \chi} \end{aligned}$$

Yani  $M_1$  işaretlemesinde kalma süresi  $(\lambda_2 + \lambda_3)$  parametresi ile üstel olarak dağıtılmıştır ve bu işaretlemede ortalama kalma süresi  $(\lambda_2 + \lambda_3)^{-1}$  dir.  $M_1$  işaretlemesinden diğer işaretlemelere geçiş olasılığı,  $M_1$  durumunda harcanan zamandan bağımsızdır. Buda SPN'yi SZMZ dönüştüğünü gösterir. Şekil 4.7'de gösterilen ağa ilişkin erişilebilirlik ağacı şekil 4.8'de gösterilmiştir.



**Şekil 4.8 :** Verilen ağa ait erişilebilirlik ağacı.

Erişilebilirlik ağacındaki her işaretleme SZMZ'de her bir duruma karşı gelmektedir ve erişilebilirlik ağacında durumlara arasındaki her ok, o geçişe ait ateşlenme oran parametresi ile işaretlenir. Bu durumda şekil 4.9'daki zincir elde edilir.



**Şekil 4.9 :** SPA'ya ait Markov zinciri.

Şekil 4.9 doğrultusunda elde edilen durum geçiş oran matrisi ise aşağıdaki gibidir.

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda_2 + \lambda_3) & \lambda_2 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_4 & -(\lambda_3 + \lambda_4) & 0 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 \\ \lambda_5 & 0 & 0 & \lambda_4 & -(\lambda_1 + \lambda_5) \end{bmatrix}$$

Ağa ait  $\pi = [\pi_0 \ \pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3 \ \pi_4]$  şeklinde olup, SPA'ya ait kararlı durum olasılıkları (4.25)'deki lineer denklem takımlarının çözülmesiyle aşağıdaki elde edilirler.

$$\pi_0 = \pi_4 = \frac{5}{43}; \pi_1 = \frac{8}{43}; \pi_2 = \frac{2}{43}; \pi_3 = \frac{23}{43}$$

#### 4.5 Genelleştirilmiş Stokastik Petri Ağları

Stokastik Petri ağlarının çözüm metodunun karmaşık olması, uygulanabilirliği kısıtlamaktadır. Petri ağının büyüklüğü ve karmaşıklığı arttıkça, erişebilirlik ağacında bulunan durumların sayısı da buna paralel olarak artar ve bunun sonucu olarak SPA'yı analiz etmek gittikçe zorlaşır [7]. Ayrıca her zaman sistemde bulunan her geçişe belli bir zaman ifadesi ekleyerek onun gecikmesini modellemek istenmeyebilir. Zaman ifadesinin eklenmesiyle sistemin karmaşıklığı artmaktadır. Zaman ifadesi sistemde önemli derecede etki yaratacak olaylara, geçişlere atanması modeli çıkarılan örneğe göre uygun olabilmektedir. Bu sebeplerden dolayı SPA yapısına zamansız geçişler (immediate transitions) eklenmiştir. Zamansız geçişler

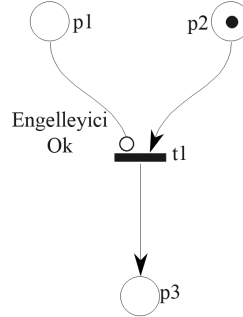
sistemde, çok kısa süre alan olayları, lojik bir atama gibi yaklaşımları modellemek için kullanılırlar [30].

Genelleştirilmiş stokastik Petri ağlarında, stokastik Petri ağına zamansız geçişler eklenerek oluşturulmuştur. Yani sistemde geçişleri üstel olarak dağıtılmış rasgele değişkenli zamanlı geçişler ile zamansız geçişler bulunmaktadır. Zamansız olan geçişler mümkün olur olmaz hemen ateşlenirler. Zamanlı geçişlerin ateşlenmesi aynı stokastik Petri ağında olduğu gibidir. Grafiksel gösterilimde kalın yatay çizgiler zamanlı geçişleri, ince yatay çizgiler ise zamansız geçişleri sembolize etmektedir. Genelleştirilmiş stokastik Petri ağları (GSPA), SPA olduğu gibi 6 sistem kümesi ile ifade edilmektedir.  $GSPA = \{P, T, I, O, Mo, \Lambda\}$  şeklinde olup ilk 5 değişken SPA’ da olduğu gibidir.  $\Lambda$  kümesinin elemanları, zamanlı geçişler için SPA’da olduğu gibi geçişe ait ateşlenme parametresini gösterir. Bu küme zamansız geçişler için  $\infty$  sembolü ile gösterilirler. Petri ağının içinde bulunduğu işaretleme, sadece zamanlı geçişleri mümkün kılıyorsa bu işaretlemeye gerçek işaretleme (tangible marking), eğer zamanlı geçişlerin yanında en azından bir tane zamansız geçişi mümkün kılıyorsa bu işaretlemeye gerçek olmayan (vanishing marking) adı verilir. Eğer ulaşılan bir işaretlemede hem zamansız geçişler hem de zamanlı geçişler mümkün olabilecek durumda ise, bu durumda zamansız geçişlerin, zamanlı geçişe göre ateşlenme önceliği vardır. Eğer ulaşılan bir işaretlemede birden fazla zamansız geçişi mümkün kılıyorsa bu durumda hangi zamansız geçişin ateşleneceği konusunda zamansız geçişler arasında olasılık dağılım fonksiyonu tanımlanır (random switch).  $E(M_i)$ ,  $M_i$  işaretlemesinde mümkün olan zamansız geçişleri gösteren küme olsun.  $E(M_i) = \{t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{ik}\}$  olsun. Bu durumda bu geçişler arasındaki olasılık dağılımı (switching distribution)  $Pr(t_{ij})$  ile gösterilsin. ( $j=1,2,\dots,k$ ) Bu durumda (4.26)’daki gibi zamansız geçişler arasındaki olasılıkların toplamı 1 olacak şekildedir.

$$\sum_{j=1}^k Pr(t_{ij}) = 1 \quad (4.26)$$

$t_{ij}$  geçişinin  $Pr(t_{ij})$  olasılığıyla ateşleneceği gösterilmiş olur. Eğer zamansız bir geçişe atanan olasılık sıfır ise bu geçiş mümkün olmamış gibi davranır.

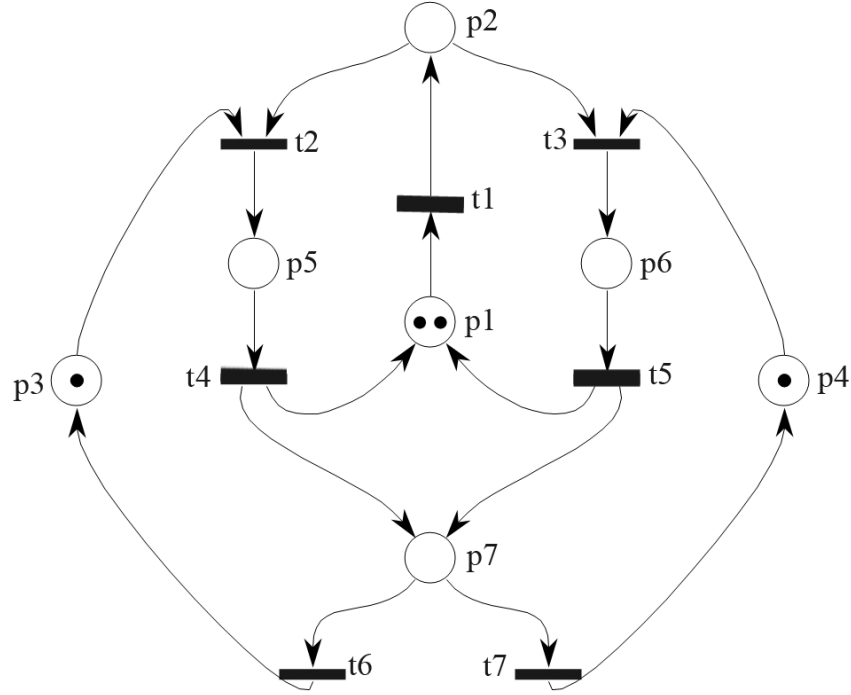
GSPA modellemesi içine engelleyici ok (inhibitor arc) yapısı ilave edilmiştir. Bu yapı ile geçişe bağlanan giriş yerlerinde jeton olduğu sürece geçiş bu mümkün olabilecek, bu yerlerde jeton yokken geçiş mümkün olamayacaktır [20].



**Şekil 4.10 :** Engelleyici Ok gösterilimi.

Şekil 4.10’da görülen Petri ağından bulunan engelleyici ok ile  $t_1$  geçişinin ateşlenmesi sağlanmıştır. Çünkü  $p_2$  yerine bulunan jetonla birlikte,  $t_1$  geçişine engelleyici ok ile bağlanan  $p_1$  yerinde jeton olmayışı geçişi mümkün kılmıştır. Eğer  $p_1$  yerinde jeton olsa idi mümkün olma koşulu sağlanmamış olacaktır. Engelleyici ok, sistem bulunan diğer okların tersi mantıkla çalışmaktadır.

GSPA’nin içinde zamansız geçişlerin olması, modelleme yönünde basitleştirme sağlamanın yanında aynı zaman içinde birden çok defa geçişlerin ateşlenebilirliği söz konusu olmaktadır. GSPA analiz yöntemlerinin temelinde SPA’yı analiz yöntemleri bulunmaktadır. GSPA analizinde, GSPA sınırlı olduğu, erişilebilirlik ağacının sonlu olması, zamanlı geçişlere atanan ateşlenme oranlarının zamandan bağımsız olduğu ve kilitlenmesiz bir sistem olduğu kabulleri vardır. Kilitlenmesiz bir sistem olduğu kabulü, başlangıç durumuna sıfırdan farklı bir olasılıkla ulaşabilirliği ortaya çıkartmaktadır [7].



**Şekil 4.11 : Örnek GSPA modeli.**

Şekil 4.11’de GSPA’da  $t_1, t_4, t_5$  geçişleri zamanlı geçişler iken  $t_2, t_3, t_6, t_7$  geçişleri ise zamansız geçişlerdir.  $t_1$  geçişinin ateşlenme oranı işaretlemeye bağımlı olup,  $p_1$  yerinde bulunan jeton sayısının ‘u’ katı kadardır.  $t_4$  geçişinin ateşlenme oranı ‘v’ ,  $t_5$  geçişinin ateşlenme oranı ‘z’ kadardır.  $t_6$  ve  $t_7$  geçişleri her zaman çelişkide olan zamansız geçişler olup bu geçişler arasında anahtarlamalı olasılık dağılımı (switching distribution) yapılmalıdır.  $p_2, p_3$  ve  $p_4$  yerlerindeki jetonların sayısı aynı anda birden fazla olursa  $t_2$  ve  $t_3$  geçişleri arasında da olasılık dağılımı yapılması gerekmektedir. Şekil 4.11’de gösterilen ağ için zamansız geçişler arasında olan olasılık dağılımları aşağıdaki gibidir.

$$\Pr(t_2) = \frac{M(p_3)}{M(p_3) + M(p_4)} ; \Pr(t_3) = \frac{M(p_4)}{M(p_3) + M(p_4)} ; \Pr(t_6) = \Pr(t_7) = \frac{1}{2}$$

Başlangıç anında,  $p_1$  yerinde 2 jeton vardır böylece  $t_1$  geçişine ateşlenme parametresi  $2u$  kadardır.  $t_1$  geçişi üstel olarak dağıtılmış rasgele gecikmesini doldurduktan sonra, ortalama  $1/2u$  kadar süre, ateşlenir.  $t_1$  geçişinin ateşlenmesi bittikten sonra  $p_2$  yeri 1 jeton kazanır ve  $t_2$  veya  $t_3$  geçişlerinden biri ateşlenebilir.

Bu geçişlerin ateşlenme oranları  $p_2$ ,  $p_3$  ve  $p_4$  yerlerinde eşit sayıda jeton bulunduğu için  $1/2$  'dir. Bu olasılık dahilinde  $t_2$  geçişinin ateşlendiği varsayalım. Bu durumda  $p_5$  yeri 1 jeton kazanacaktır ve en son işaretlemeye  $t_1$  ve  $t_4$  zamanlı geçişleri mümkün olacaktır.  $t_1$  geçişinin ateşlenme olasılığı,

$$\frac{u}{u + v}$$

İken  $t_4$  geçişinin ateşlenme olasılığı,

$$\frac{v}{u + v}$$

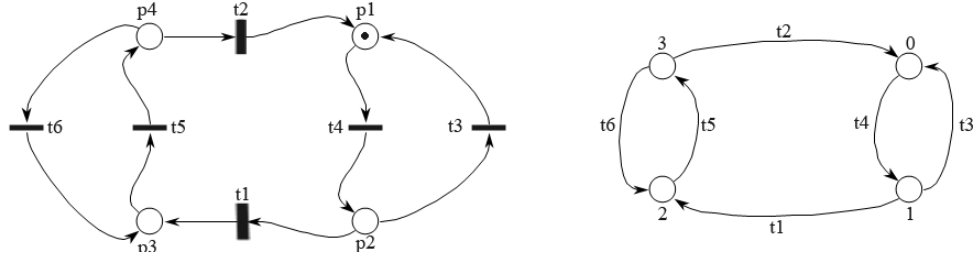
şeklindedir. Eğer  $t_1$  geçişinin önce ateşlendiği varsayalım. Bu durumda zamansız geçiş olan  $t_3$  zamansız geçişi mümkün olur. Zaman kaybetmeden  $t_3$  geçişi ateşlenir. Böylece sistemin ateşlenmesi sürüp gider. GSPA erişebilirlik ağacı, aynı yapıdaki zamansız PN ve SPA'ya daha dardır. Çünkü çelişki durumundaki zamansız geçişlere öncelik atanması bazı durumlara ulaşmayı engeller.

GSPA analiz etmede literatürde birçok metot mevcuttur. Bunlardan en yaygın olanları Molloy [19] tarafından sunulan çalışma ile Ajmone Marsan [20] tarafından sunulan çalışmalardır.

#### **4.5.1 GSPA Analiz Yöntemleri**

##### **4.5.1.1 SPA analiz yönteminin genişletilmiş hali ile analiz**

Bu yöntem Molloy tarafından sunulmuştur [19]. Bu metotta ağda bulunan tüm zamansız geçişlere 'x' gibi keyfi olan çok yüksek ateşlenme oranı parametresi eklenerek zamanlı geçiş haline getirilmiştir. Böylece sistemdeki tüm işaretlemeler gerçek işaretlemeye dönecek ve GSPA çözümü SPA'nın çözümüne dönüşecektir. Bu dönüşüm yapıldıktan sonra kararlı durum olasılık dağılımları, x değişkenin sonsuz limitine göre bulunur. Bu metodu, çok sayıda durum değişkeni olduğunda, kararlı durum olasılıklarını x değişkeni cinsinden çözmek kadar kolay değildir. Bunun yerine pratikte, x yerine oldukça büyük bir sayı değeri atanıp işlem yapmak daha kolay olabilmektedir. Bu metot geçiş oran matrisinin büyüklüğünü arttıracığı için ve bunun sonucu olarak hesaplama zorluğu çıkaracağından dolayı tercih edilmez.



**Şekil 4.12 :** Örnek GSPA modeli ve erişilebilirlik ağacı.

Şekil 4.12’de verilen GSPA’da  $t_1$  ve  $t_2$  geçişleri zamanlı geçişler olup sırasıyla  $\lambda_1$  ve  $\lambda_2$  ateşlenme oranına sahiptir. Ağa ait erişilebilirlik ağacı durumları  $M_0 : 1000, M_1 : 0100, M_2 : 0010, M_3 : 0001$  şeklindedir. Ağda bulunan zamansız geçişlere  $x$  ateşlenme oranı atayarak oluşturulan geçiş oran matrisi aşağıdaki gibidir.

$$Q = \begin{bmatrix} -x & x & 0 & 0 \\ x & -(x + \lambda_1) & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & -x & x \\ \lambda_2 & 0 & x & -(x + \lambda_2) \end{bmatrix}$$

Kararlı durum olasılık vektörü  $\pi = [\pi_0 \pi_1 \pi_2 \pi_3]$ ,  $\pi Q = 0$  ve  $\sum_{i=0}^3 \pi_i = 1$  denklemleri çözülerek elde edilir.

$$\pi_0 = (1 + \frac{\lambda_1}{x}) \frac{1}{d}, \pi_1 = \frac{1}{d}, \pi_2 = (1 + \frac{\lambda_1}{x}) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 d}, \pi_3 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 d}; d = \frac{2\lambda_1}{x} + 2(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}) + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{x}$$

Eğer bu  $x$ ’ e bağımlı olarak bulunana kararlı durum olasılık dağılımları, sonsuz limitinde bakılarak bulunabilir.

$$x \rightarrow \infty$$

$$\pi_0 = \pi_1 = \frac{\lambda_1}{2(\lambda_1 + \lambda_2)}, \pi_2 = \pi_3 = \frac{\lambda_2}{2(\lambda_1 + \lambda_2)}$$

#### 4.5.1.2 İndirgenmiş markov zinciri yöntemiyle çözüm

Bu yöntem Balbo, Marsan [20] tarafından önerilmiştir. İlk metotta önerilen gerçek olmayan işaretlemelere ilk başta ‘ $x$ ’ gibi bir ateşlenme oran parametresi verip onları gerçek işaretleme yaptıktan sonra ‘ $x$ ’ bağımlı kararlı durum değişkenleri bulmak kolay değildir. Hem daha sonradan ‘ $x$ ’ değerine bağımlı olarak bulunan hesaplamaların sonsuz limitinde sistemin kararlı durum değişkenleri bulmak işlemleri daha da karmaşıktır. Ayrıca gerçek sistemlerde erişilebilirlik ağacı, çok

büyük çıkmaktadır ve bu durumda hesaplama yapmak daha da zordur. Balbo, Marsan ve Conte yaptıkları çalışmada [20, 25, 30] gerçek olmayan işaretlemelerin sistemde, geçiş olasılık matrisinin büyüttüğünü ve bunun sonucu olarak hesaplama işlerini zorlaştırdığını, zaman zaman hesaplamaların olanaksız olduğunu savunmuşlardır. Stokastik işlemlerin zamandan bağımsız olacak şekilde kararlı durum olasılıkları için tanımlanmış olan gömülü Markov zincirinden (embedded markov chain), gerçek olmayan işaretlemeleri (vanishing states) çıkartmak için, gerçek işaretlemeler üzerinden indirgenmiş gömülü markov zinciri (reduced embedded markov chain) tanımlanmıştır.

Bu metotta erişilebilirlik ağacının elemanları, gerçek olan işaretlemeler ve gerçek olmayan işaretlemeler üzerinden ikiye ayrılırlar. Erişilebilirlik ağacında bulunan durumlar için aşağıdaki tanımlamalar yapılabilir.

$S \triangleq$  Erişilebilirlik ağacındaki tüm işaretlemelerin kümesi,  $|S| = k_s$

$S_t \triangleq$  Erişilebilirlik ağacındaki gerçek işaretlemelerin kümesi,  $|S_t| = k_t$

$S_v \triangleq$  Erişilebilirlik ağacındaki gerçek olmayan işaretlemelerin kümesi,  $|S_v| = k_v$

$S = S_t \cup S_v$  ;  $S_t \cap S_v = \emptyset$  ;  $k_s = k_t + k_v$

Şeklinde tanımlanabilir. Bu veriler doğrultusunda geçiş olasılık matrisi (4.27)'deki gibi yazılabilir.

$$U = A + B = \begin{matrix} & \begin{matrix} k_v & k_t \end{matrix} \\ \begin{matrix} k_v \\ k_t \end{matrix} & \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} + \begin{matrix} & \begin{matrix} k_v & k_t \end{matrix} \\ \begin{matrix} k_v \\ k_t \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ E & F \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (4.27)$$

A matrisinin elemanları, sistemin gerçek olmayan (vanishing) bir işaretlemeden, ya yine gerçek olmayan işaretlemeye (C) ya da gerçek bir işaretlemeye (D) gitme olasılığını gösterir. B matrisinin elemanları, sistemin gerçek bir işaretlemeden, ya yine gerçek bir işaretlemeye (F) ya da gerçek olmayan bir işaretlemeye (E) gitme olasılığını gösterir. A matrisinin elemanları zamansız geçişlere atanan, geçiş ateşlenme olasılığı (random switch) yardımıyla hesaplanırken, B matrisinin elemanları zamanlı geçişlere atanan, geçiş ateşlenme oran parametresi (firing rates) yardımıyla hesaplanır. Metodun gösterilimin kolay olması için,  $i$  ve  $j$ 'nin keyfi gerçek işaretlemeyi ( $i, j \in S_t$ ),  $r$  ve  $s$ 'nin gerçek olmayan işaretlemeyi ( $r, s \in S_v$ )

gösterdiğini kabul edilsin.  $c_{rs}$ ,  $d_{ij}$ ,  $e_{is}$ ,  $f_{ij}$  'de sırasıyla C, D, E, F matrislerinin alt elemanı olsun. Bu durumda i ve j gibi iki gerçek zamanlı işaretleme arasındaki geçiş olasılık matrisi şu şekilde tanımlanır.

$$u'_{ij} = f_{ij} + \sum_{r \in S_v} e_{ir} \Pr[r \rightarrow s] d_{sj} ; i, j \in S_t ; r, s \in S_v \quad (4.28)$$

Burada eşitlikte;  $f_{ij}$ , i gibi gerçek bir durumdan j gibi gerçek bir duruma geçiş olasılığını gösterir.  $e_{ir}$ , i gibi gerçek bir işaretlemeden r gibi gerçek olmayan bir işaretlemeye geçiş olasılığını gösterir.  $\Pr[r \rightarrow s] d_{sj}$  ise gerçek olmayan r gibi bir durumdan, gerçek olan j gibi bir işaretlemeye, birkaç adımda gerçek olmayan bir işaretleme üzerinden geçiş olasılığını gösterir. Durum geçiş olasılık matrisini ( $U'$ ) hesaplamak için (4.28) genel bir biçimde (4.29) şeklinde yazılabilir.

$$U' = F + EGD \quad (4.29)$$

Burada G matrisinin her elemanı olan  $g_{rs}$ , gerçek olmayan bir işaretlemeden ( $M_r$ ), sadece gerçek olmayan işaretlemeler üzerinden giderek, gerçek olmayan bir işaretlemeye ( $M_s$ ) birkaç adımda gitme olasılığını gösterir.  $C^n$  matrisinin elemanları olan,  $c_{rs}^n$  bileşenleri de, gerçek olmayan bir işaretlemeden ( $M_r$ ), sadece gerçek olmayan işaretlemeler üzerinden giderek, gerçek olmayan bir işaretlemeye ( $M_s$ ) 'n' adımda gitme olasılığını gösterir. Bu durumda G matrisi (4.30)'daki gibi tanımlanır.

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} C^n \quad (4.30)$$

$C^n$  ifadesi iki şekilde hesaplanabilir. Birincisi, eğer erişilebilirlik ağacında, gerçek olmayan durumlar arasında herhangi bir çevre, göz yok ise C matrisini üst üçgen şeklinde yazmaya olanak sağlayacak şekilde uygun bir üstel ifade mevcuttur. Bu durumda  $k_0 \leq k_v$  olacak şekilde C matrisi için (4.31) eşitliğini sağlar.

$$C^k = 0 ; \forall k \geq k_0 \quad (4.31)$$

Bu durumda (4.30) eşitliğini sağlayacak şekilde  $k_0$  sayısı mevcuttur ve sonsuz olan toplam, sonlu sayıdaki terimin toplamına dönüşür ve G matrisi (4.32)'deki gibi hesaplanabilir.

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} C^n = \sum_{n=0}^{k_0} C^n \quad (4.32)$$

Eğer gerçek olmayan durumlar arasında bir çevre mevcut ise, bu durumda sonsuz toplam (4.33)'deki gibi asimtotik bir değere dönüşür [20, 31].

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} C^n = [I - C]^{-1} \quad (4.33)$$

(4.29)'daki GD çarpım ifadesini yerine geçecek H ifadesi (4.34)'deki gibi tanımlanabilir.

$$H = GD = \begin{cases} (\sum_{h=0}^{k_0} C^h)D ; \text{gerçek olmayan durumlar arasında çevre yoksa} \\ [I - C]^{-1}D ; \text{gerçek olmayan durumlar arasında çevre varsa} \end{cases} \quad (4.34)$$

H matrisinin elemanları, verilen bir gerçek olmayan işaretlemeden, verilen bir gerçek işaretlemeye ilk defa olasılığını gösterir. Bu durumda herhangi iki gerçek olan işaretleme arasında geçiş olasılığı (4.35)'deki gibi hesaplanabilir.

$$u'_{ij} = f_{ij} + \sum_{r \in S_v} e_{ir} h_{rj} ; i, j \in S_t ; r \in S_v \quad (4.35)$$

(4.35)'deki ifade indirgenmiş gömülü markov zincirine ait geçiş olasılık matrisi en genel halde (4.36)'daki gibi yazılabilir.

$$U' = F + EH \quad (4.36)$$

Bu hesaplama yardımıyla sisteme ait kararlı durum olasılıklarını hesaplamak için  $Y = [y_1 y_2 \dots y_{k_t}]$  olan bir ek satır matris kullanılır. Bu vektörün i. elemanı olan  $y_i$ , işaretleme sürecinde  $M_i$  işaretlemesinin ortalama ziyaret edilme oranını verir. Yani erişilebilirlik ağacındaki bir işaretlemeye ulaşmak için,  $M_i$  işaretlemesi üzerinden kaç kez geçilmesi, yada bu işaretlemenin kaç kez kullanılması gerektiğinin sayısıdır. Y matrisi (4.37)'deki gibi bulunabilir.

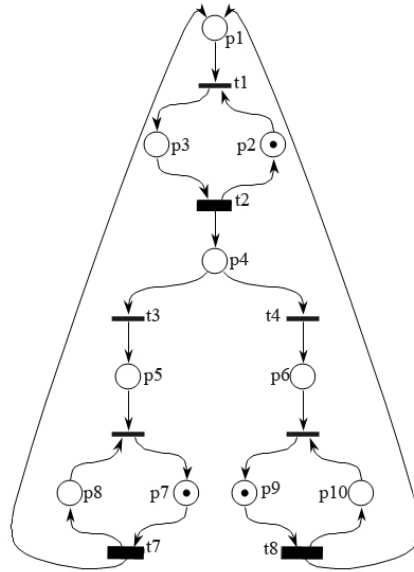
$$Y = Y \cdot U' ; \sum_{i=1}^{k_i} y_i = 1 \quad (4.37)$$

İfadeleri kullanılarak elde edilirler. Bu bilgiler doğrultusunda sisteme ait kararlı durum olasılıkları (4.38)'deki gibi bulunabilir.

$$\pi_i = \frac{y_i m_i}{\sum_{j=1}^{k_i} y_j m_j} ; m_i = \frac{1}{\sum_{t_k \in E(M_i)} \lambda_k} ; i=1,2,\dots,k_i \quad (4.38)$$

(4.38)'de  $m_i$ ,  $M_i$  işaretlemesinde kalınan ortalama zamanı verirken,  $\pi_i$ ,  $M_i$  işaretlemesine ait kararlı durum olasılığını verir.

Şekil 4.13'de basit bir üretim sisteminin Petri ağı modelini göstermektedir. Bu sistem M1 ve M2 gibi iki üretim makinesinden ve bu makinelere ham madde taşıyan taşıyıcıdan oluşmaktadır [7].



**Şekil 4.13 :** Basit üretim sisteminin Petri ağı modeli.

GSPA modeli 10 tane yerden, 3 tane zamanlı geçişten ( $t_2, t_7, t_8$ ) ve 5 tane zamansız geçişten ( $t_1, t_3, t_4, t_5, t_6$ ) oluşmaktadır. Bu ağa ait geçiş ve yerlerin açıklaması çizelge 5.1'de verilmiştir. Ağın başlangıç işaretlemesi  $M_0 = [010001010]^T$  şeklindedir.  $t_3$  ve  $t_4$  zamansız geçişleri arasında olasılık dağılımı (random switch) yapılması gerekmektedir. Eğer  $t_3$  geçişinin ateşlenmesi olasılığı  $q$  ise  $t_4$  geçişinin ateşlenme olasılığı  $1-q$  olur. Erişilebilirlik ağacını basitleştirmek adına sadece jeton olan

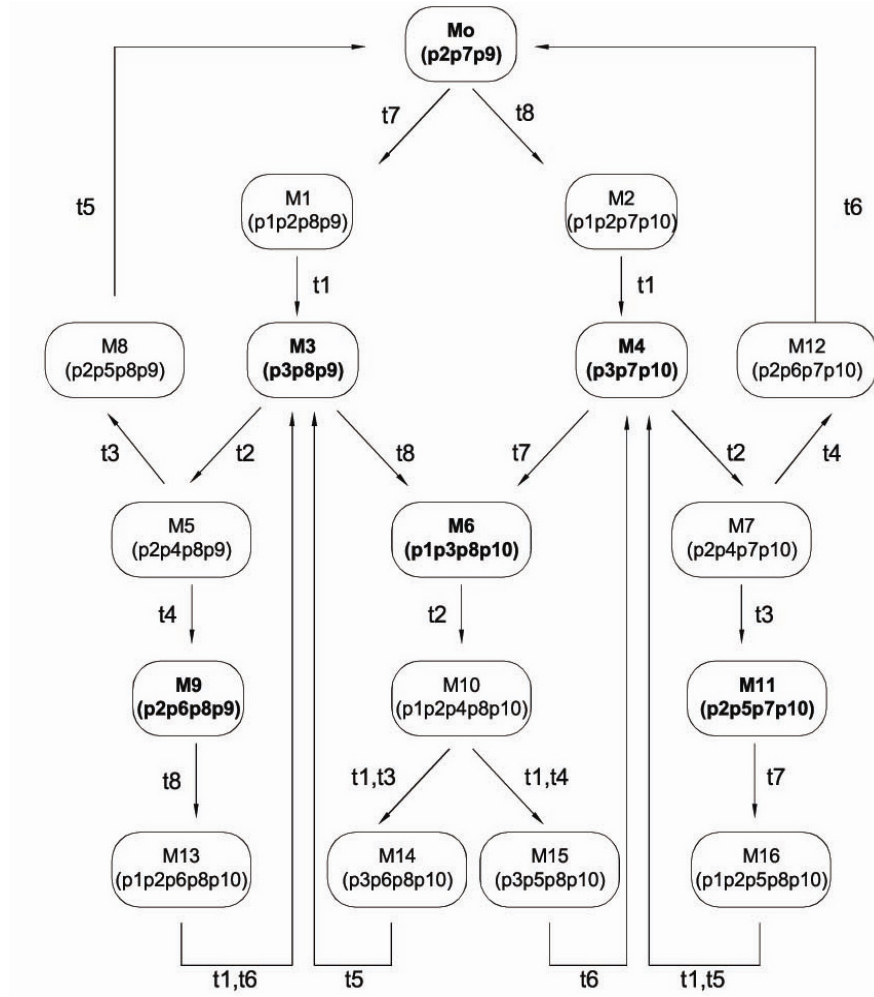
geçişlerin yazıldığı  $M_0 = p_2 p_7 p_9$  şeklindeki notasyon kullanılmıştır.  $p_2 p_7 p_9$  başlangıç işaretlemesi zamanlı geçişler olan  $t_7$  ve  $t_8$  geçişlerinin mümkün kılar böylece bu işaretlemesi gerçek işaretleme olur.

**Çizelge 4.1 :** Şekil 4.13’de gözüken ağda yer alan geçiş ve yerlerin açıklaması.

| Yerler            | Açıklama                                                    |                 |
|-------------------|-------------------------------------------------------------|-----------------|
| $p_1$             | Taşınmayı bekleyen ham madde sırası                         |                 |
| $p_2$             | Taşıyıcı boşta olduğu durum                                 |                 |
| $p_3$             | Taşıyıcının meşgul olduğu durum                             |                 |
| $p_4$             | Ham maddenin taşıyıcı tarafından taşınmasının bitme hali    |                 |
| $p_5$             | M1 makinesi boşta olmasını bekleyen ham madde kuyruk durumu |                 |
| $p_6$             | M2 makinesi boşta olmasını bekleyen ham madde kuyruk durumu |                 |
| $p_7$             | M1 makinesinin çalışması durumu                             |                 |
| $p_8$             | M1 makinesi boşta olması durumu                             |                 |
| $p_9$             | M2 makinesinin çalışması durumu                             |                 |
| $p_{10}$          | M2 makinesi boşta olması durumu                             |                 |
| Zamanlı Geçişler  | Açıklama                                                    | Ateşlenme Oranı |
| $t_2$             | Taşıyıcının taşımayı bitirmesi                              | $r_1$           |
| $t_7$             | M1 makinesinin işlemini bitirmesi                           | $r_2$           |
| $t_8$             | M2 makinesinin işlemini bitirmesi                           | $r_3$           |
| Zamansız Geçişler | Açıklama                                                    |                 |
| $t_1$             | Taşıyıcının, ham maddeyi taşımaya başlaması                 |                 |
| $t_3$             | Ham maddenin ,M1 makinesinde işlenmek için kuyruğa girmesi  |                 |
| $t_4$             | Ham maddenin ,M2 makinesinde işlenmek için kuyruğa girmesi  |                 |
| $t_5$             | M1 makinesinin çalışmaya başlaması                          |                 |
| $t_6$             | M2 makinesinin çalışmaya başlaması                          |                 |

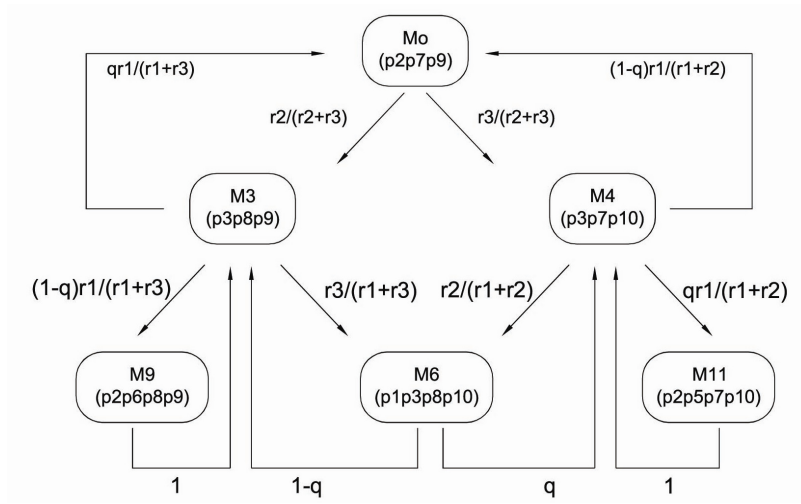
$t_7$  geçişinin bu işaretlemede ateşlenme olasılığı  $r_2 / r_2 + r_3$  şeklinde iken  $t_8$  geçişinin ateşlenme olasılığı  $r_3 / r_2 + r_3$ ’dir.  $t_7$  geçişinin ateşlenmesiyle gidilecek işaretleme  $p_1 p_2 p_8 p_9$  işaretlemesidir. Bu işaretleme  $t_1$  geçişi mümkün olabilmektedir ( $p_9$  yerinde jeton olmasına rağmen  $t_8$  geçişi mümkün olmaz çünkü zamansız olan geçişlerin, zamanlı geçişlere göre mümkün olma önceliği vardır.) ve zamansız bir geçiş mümkün olduğu için bu işaretleme gerçek olmayan bir işaretlemedir.  $t_1$  geçişinin ateşlenmesi ile ulaşılabilecek yeni işaretleme  $p_3 p_8 p_9$  olup gerçek bir işaretlemedir.

$t_2$  ve  $t_8$  geçişleri sırasıyla  $r_1 / r_1 + r_3$  ve  $r_3 / r_1 + r_3$  olasılıklarıyla ateşlenebilirler. Eğer  $t_2$  geçişi ateşlenirse yeni ulaşılabilecek işaretleme  $p_2p_4p_8p_9$  'dır ve bu işaretleme gerçek olmayan işaretlemedir. Bu işaretleme ile  $t_3$  ve  $t_4$  zamansız geçişleri arasında olasılık dağılımlarına ateşlenirler (random switch). Bu şekilde oluşturulan erişilebilirlik ağacı şekil 4.14'de görüldüğü gibidir.



**Şekil 4.14 :** Şekil 4.13' deki sistemin erişilebilirlik ağacı.

Bu ağaçta 6 tane gerçek işaretleme 11 tane gerçek olmayan işaretleme vardır.  $M_{13}$  ve  $M_{16}$  işaretlemelerinde eş zamanlı olarak iki zamansız geçişin ateşlenmesi mevcuttur. Çünkü bu işaretlemelerde bir geçişin ateşlenmesi diğer geçişin ateşlenmesi bozmamaktadır. Bu sisteme ait indirgenmiş gömülü markov zinciri şekil 4.15'de görülmektedir.



**Şekil 4.15 :** Sistemin indirgenmiş gömülü Markov zinciri.

$r_1 = r_2 = r_3 = 1$  ve  $q=0.4$  alınarak geçiş oran matrisleri aşağıdaki gibidir.

$$C = \begin{matrix} & \begin{matrix} M_1 & M_2 & M_5 & M_7 & M_8 & M_{10} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & M_{15} & M_{16} \end{matrix} \\ \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \\ M_5 \\ M_7 \\ M_8 \\ M_{10} \\ M_{12} \\ M_{13} \\ M_{14} \\ M_{15} \\ M_{16} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} M_0 & M_3 & M_4 & M_6 & M_9 & M_{11} \end{matrix} \\ \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \\ M_5 \\ M_7 \\ M_8 \\ M_{10} \\ M_{12} \\ M_{13} \\ M_{14} \\ M_{15} \\ M_{16} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$E = \begin{matrix} & M_1 & M_2 & M_5 & M_7 & M_8 & M_{10} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & M_{15} & M_{16} \\ \begin{matrix} M_0 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_6 \\ M_9 \\ M_{11} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$F = \begin{matrix} & M_0 & M_3 & M_4 & M_6 & M_9 & M_{11} \\ \begin{matrix} M_0 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_6 \\ M_9 \\ M_{11} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Bu matrisler elde edildikten sonra önce (4.34) yardımıyla H matrisi hesaplanır. H matrisinin elde edilirken önce gerçek olmayan işaretlemeler arasında çevre olup olmadığına erişilebilirlik ağacından bakılır. Şekil 5.14’de yer alan ağaca bakıldığında gerçek olmayan işaretlemeler arasında herhangi bir çevre olmadığı görülür. (4.31)’de görülen  $k_0$  sayısı denemelerin ardından 1 olarak bulunur. Çünkü  $C^h$  ifadesinde h değerini 1’den büyük olarak alınan her değer için ifade 0 (sıfır) çıkmaktadır. H ifadesi aşağıdaki şekilde bulunur.

$$H = \left( \sum_{h=0}^1 C^h \right) D = (C^0 + C^1) D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sonra (4.36) yardımıyla  $U'$  matrisi hesaplanır.

$$U' = F + EH = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0.5 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Buradan (4.37) yardımıyla  $Y$  vektörü aşağıdaki gibi bulunur.

$$y_0 = 38/300 ; y_3 = 70/300 ; y_4 = 80/300 ; y_6 = 75/300 ; y_9 = 21/300 ; y_{11} = 16/300$$

Son olarak (4.38) yardımıyla her bir işaretlemeye ait olasılık şu şekilde bulunur.

$$\begin{array}{ll} m_0 = 1/(r_2 + r_3) = 0.5 & \pi_0 = 19/206 \cong 0.09 \\ m_3 = 1/(r_1 + r_3) = 0.5 & \pi_3 = 35/206 \cong 0.17 \\ m_4 = 1/(r_1 + r_2) = 0.5 & \pi_4 = 40/206 \cong 0.19 \\ m_6 = 1/r_1 = 1 & \pi_6 = 75/206 \cong 0.36 \\ m_9 = 1/r_3 = 1 & \pi_9 = 21/206 \cong 0.10 \\ m_{11} = 1/r_2 = 1 & \pi_{11} = 16/206 \cong 0.07 \end{array}$$

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, klasik Petri ağlarında geçişlere ateşlenme gecikmesi atayarak zamanlandırılmış Petri ağları oluşturulmuştur. Bölüm 2 ve bölüm 3’de atanan ateşlenme gecikmeleri deterministik bir yapıya sahip iken bölüm 4 ‘deki modelde atanan gecikmeler rasgele değişkenlerdir.

Bölüm 2’de Petri ağının geçişlerine deterministik ateşlenme süreleri atanarak oluşturulan model aynı anda mümkün olan geçişlerin ateşlenmesine olanak sağlayacak yapıda ve ok ağırlıklarının birden büyük olması durumu içinde ateşlenebilirlik derecesi bulmaya yönelik kapsamlı bir modeldir. Bu modele ayrıca, geçişin mümkün olma zamanı ile ateşlenme zamanı arasına bir gecikme koyarak, ağın yerlerinde bulunan jetonların anlık olarak gözükmesi engellenmiştir. Oluşturulan bu model, daha önceden oluşturulan modellerde kısıtlama altına gidilen özellikleri ortadan kaldırmıştır. Önerilen bu model kullanılarak, ağa ait erişilebilirlik ağacı oluşturmasında kullanılacak metotlardan bahsedilmiştir. Bu metotlar kullanılarak, verilen herhangi bir sisteme ait kısıtlama olmaksızın erişilebilirlik ağacı elde edilebilmektedir. Matematiksel olarak uzun gözüken işlemlerin, karmaşık ve büyük ağları analiz etmede çıkaracağı zorluklar doğrultusunda MATLAB programında yazılım hazırlanmıştır ve çeşitli sistemler üzerinde erişilebilirlik ağacı çıkartılmıştır. Hazırlanan bu yazılım, kullanımı kolaylaştırmak ve sistemlere uygulanabilirliğini artırmak amacıyla görsel bir arayüz kullanılarak geliştirilebilir. Ayrıca erişilebilirlik ağacı elde edildikten sonra Petri ağına ait farklı özellikler(canlılık, tersine dönüşebilirlik, sınırlı olma v.b) incelenebilir. Geçişlere atanmış zaman ifadelerinin yanında, ağın yerlerine ve oklarına atanmış zaman ifadelerinin bulunduğu modellemeler yapılabilir. Ele alınan sistemin özellikleri doğrultusunda özel yaklaşımlarda bulunarak aynı ağ içerisinde hem geçişlerine hem yerlerine hem de oklarına zaman ifadesi atanmış toplu bir model oluşturulabilir.

Bölüm 3’de değinilen süre tutmalı Petri ağlarında zaman ifadesi yine ağın geçişlerine atanmıştır ve bu doğrultuda matematiksel model geliştirilmiştir. Bu metot da sistemdeki jetonların ateşlenme öncesi önseçimli olarak ayırılması esasına

dayanmaktadır. Bu önerilen metotta sistemdeki jetonlar, ateşlenme öncesinde ve ateşlenme tamamlandıktan sonra elverişli olarak; ateşlenme sırasında ise sistemde elverişsiz olarak gözükmektedir, ateşlenme sırasında sistemde herhangi bir jeton kaybı gözükmemektedir. Bu modelde, işaretleme elverişli ve elverişsiz jetonlar üzerinden yapıldığından sistemdeki işaretleme ikiye ayrılır. Bu işaretleme, matematiksel olarak daha karmaşık yapıda gözükmese de sistemin analizi daha rahat yapılabilmesine olanak sağlar. Burada yine ağın yerlerine ve oklarına zaman ifadeleri atayarak bütün bir model oluşturulup, sistemin tüm durumlarını ve sistem çıkmazı durumlarını elverişli ve elverişsiz jetonlar üzerinden işlemler yaparak daha kolay bir şekilde bulunabilir.

Bölüm 4’de klasik Petri ağ modeline rasgele ateşlenme gecikmeleri atayarak ağın analizi yapılmıştır. Bu model daha sistem çalışması hakkında önceden planlamalar yapmada, sistemi oluşturmadan önce genel bilgi sahibi olmak amacıyla kullanılabilir ve sistem hakkında tam bir doğruluk önermez. Bir sonraki aşamada stokastik Petri ağları kullanılarak sistem performansı üzerinde çalışılabilir.

Bölüm 2 ve 3 de belirtilen deterministik zaman atama işlemi bölüm 4’de bahsedilen stokastik süreç ile birleştirilerek melez Petri ağları üzerinde işlemler yapmak çalışılan sistemlere göre daha avantajlı sonuçlar sunabilir.

## KAYNAKLAR

- [1] **Cassandras C.G. and Lafortune S.**, 1999. *Introduction to Discrete Event Systems*, Kluwer Academic Publishers, 848 pages.
- [2] **Koussoulas N.T.**, 1994. Discrete Event Dynamic Systems: Which Model to Choose?, M.A. Bryds and K. Malinowski, *Computer Aided Control System Design*, *World Scientific Press*, pp. 495-513.
- [3] **Petri C.A.**, 1962. Kommunikation mit automaten, *PhD Thesis*, University of Bonn, West Germany, (1962).
- [4] **Kılınççı Ö.**, 2004. Basit Montaj Hattı Dengeleme Problemi Çözümü İçin Bir Petri Ağı Yaklaşımı, DEÜ Mühendislik Fakültesi, *Fen ve Mühendislik Dergisi*, Cilt:6, Sayı:2, S.1-15.
- [5] **Ramadge P.J. and Wonham W.M.**, 1987. Supervisory Control of a Class of Discrete Event Processes, *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 25, No. 1, pp. 206-230.
- [6] **Gelen G. Uzam M.**, 2008. Ayırık Olay Sistemlerinin R&W Yöntemi ve Petri Ağları Temelli Melez Kontrolü", *TOK 50. Yıl, Otomatik Kontrol Ulusal Toplantısı*, İTÜ - İstanbul, Bildiriler kitabı, Cilt 2, s. 719-724.
- [7] **Wang J.**, 1998. *TIMED PETRI NETS Theory and Application*, Kluwer Academic Publishers.
- [8] **Ramchandani C.**, 1974. Analysis of asynchronous concurrent systems by Petri nets, *PhD Thesis*, M.I.T., Cambridge.
- [9] **Ramamoorthy C. and Ho G.**, 1980. Performance evaluation of asynchronous concurrent systems using Petri nets, *IEEE Transaction on Software Engineering*, SE-6(5), 440-449
- [10] **Coolahan J. and Roussopoulos J.**, 1983. Timing requirements for time driven systems using augmented Petri nets, *IEEE Transaction on Software Engineering*, SE-9(5).
- [11] **Zhu J. and Denton R.**, 1988. Timed Petri nets their application to communication protocol specification, *Proceedings of the 21<sup>st</sup> IEEE Military Communication Conference*, San Diego, 195-198
- [12] **Merlin P. And Farber D.**, 1976. Recoverability of communication protocols – Implication of a theoretical study, *IEEE Transaction on Communications*, 1036-1043
- [13] **Berthomieu B. and Menasche M.**, 1983. An enumerative approach for analyzing time Petri nets, *Proceedings of IFIP Cong.*, Paris, 41-46.
- [14] **Zeugmann L. P.**, 1994. On Time Invariance in Time Petri Nets, *Workshop Concurrency, Specification & Programming*, Informatik- Berichte der HUB Nr. 36.
- [15] **Freedman P.**, 1991. Time, Petri nets, and robotics, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 417-433.
- [16] **Ergan Z.H.**, 2004. Zamanlandırılmış Petri Ağlarında Sistem Çıkma Analizi, *Yüksek lisans tezi*, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

- [17] **Bowden F.**, 2001. The modelling and Analysis of Command and Control Decision Processes using Extended Time Petri Nets, The University of Adelaide, Department of Applied Mathematics, *PhD thesis*.
- [18] **Natkin S.**, 1980. Les reseaux de Petri stochastiques et leur application a l'evaluation des systems informatiques, *These de Docteur Ingegnieur*, Paris, France
- [19] **Molloy M.**, 1981. On the integration of delay and throughput measures in distributed processing models, *PhD thesis*, Los Angeles
- [20] **Marsan A. M., Balbo G., Conte G.**, 1984. A Class of Generalized Stochastic Petri Nets for the Performance Evaluation of Multiprocessor Systems, *ACM Transactions on Computer Systems*, Vol.2, No.2, p 93-122.
- [21] **Marsan A. M., Balbo G., Bobbio A., Chiola G., Conte G., Cumani A.**, 1985. On Petri nets with stochastic timing, *Proceedings of the International Workshop on Timed Petri Nets*, p.80-87, Torino, Italy.
- [22] **Marsan A. M., Balbo G., Bobbio A., Chiola G., Conte G., Cumani A.**, 1989. The effect of execution policies on the semantics and analysis of stochastic Petri nets, *IEEE Transaction on Software Engineering*, p.832-846
- [23] **Holliday M. A. and Vernon K. M.**, 1987. A Generalized Timed Petri Net Model for Performance Analysis, *IEEE Transaction on Software Engineering*, Vol. SE-13 No.12
- [24] **Marsan M. A.**, 1990. Stochastic Petri Nets: an Elementary Introduction, Advances in Petri Nets 1989, *Springer Verlag, 'Lecture Notes in Computer Science'* n. 424
- [25] **Kritzinger P. S. and Bause F.**, 2002. *Introduction to Stochastic Petri Net Theory*. Vieweg Verlag, Germany in the series Advanced Studies in Computer Science, 250 pages. Second Edition.
- [26] **E. Cinlar**, 1975. *Introduction to stochastic Processes*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs
- [27] **Marsan M. A., Balbo G., Conte G., Donatelli S., Franceschinis G.**, 1994. Modelling With Generalized Stochastic Petri Nets, *Wiley Series in Parallel Computing John Wiley and Sons*. p.299
- [30] **Balbo G.**, 2007. Introduction to Generalized Stochastic Petri Nets, *7-th International School on Formal Methods for the Design of Computer, Communication and Software Systems: Performance Evaluation*
- [31] **Varga R.S.**, 1962, *Matrix Iterative Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ

## **EKLER**

**EK A.1 : Hazırlanan Program ile Yapılan Analiz Sonuçları**  
**EK A.2 : Bilgisayar Programı**

## EK A.1

Bölüm 2’de, şekil 2.12 ile verilen zamanlandırılmış Petri ağı için matematiksel olarak elde edilen erişilebilirlik ağacının, hazırlanan yazılım ile elde edilen sonuçları aşağıdaki gibidir.

->T=0.000 bz.da isaretleme M=25100  
t1 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=1  
t2 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=2  
t3 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
->T=0.100 bz.da isaretleme M=04100  
->T=0.200 bz.da isaretleme M=02100  
->T=0.400 bz.da isaretleme M=00100  
->T=2.200 bz.da isaretleme M=00120  
t1 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
t2 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
t3 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=1  
->T=2.400 bz.da isaretleme M=00140  
t1 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
t2 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
t3 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=1  
->T=2.500 bz.da isaretleme M=00020  
->T=2.700 bz.da isaretleme M=00020  
->T=3.100 bz.da isaretleme M=00120  
t1 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
t2 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
t3 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=1  
->T=3.400 bz.da isaretleme M=00000  
->T=3.500 bz.da isaretleme M=00002  
t1 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
t2 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
t3 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
->T=3.700 bz.da isaretleme M=00004  
t1 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
t2 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
t3 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
->T=4.400 bz.da isaretleme M=00006

t1 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0

t2 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0

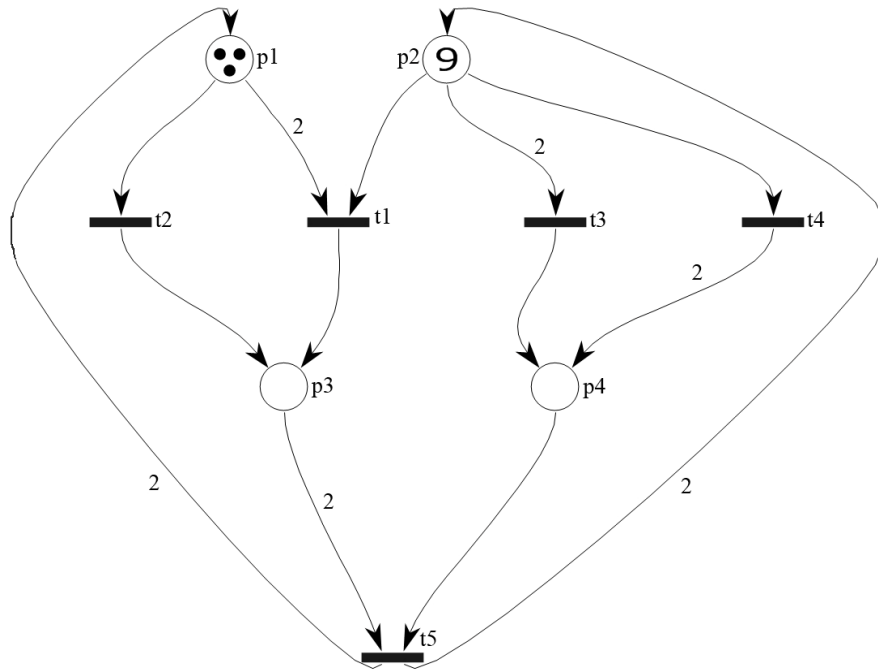
t3 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0

sistem kilitlenmiştir.

analiz sona ermistir.

Elapsed time is 0.244989 seconds.

Bu analiz Pentium 4 3.2 GHz işlemcili, 1GB RAM'li bir bilgisayarda yapılmıştır ve analiz süresi 244ms sürmüştür. Sistemin karmaşıklığı, geçiş ve yer sayısı artıkça analiz süresi artacaktır. Şekil A.1'de gösterilen zamanlandırılmış Petri ağına ilişkin,  $E=[0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.2 \ 0.1]$ ,  $D=[1 \ 2 \ 3 \ 2 \ 1]$ ,  $Pr=[2 \ 1 \ 3 \ 4 \ 5]$ ,  $Mo=[3 \ 9 \ 0 \ 0]$ ,  $To=0$ ,  $Tf=9$  şeklinde verilmiştir.



**Şekil A.1 :** Zamanlandırılmış örnek bir Petri ağı modeli.

**Çizelge 6.1 :** Hazırlanan yazılım ile bu ağa ilişkin hazırlanan erişilebilirlik ağacı aşağıdaki gibidir ve analiz 330ms sürmüştür.

->T=0.000 bz.da isaretleme M=3900  
t1 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=1  
t2 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=1  
t3 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=3  
t4 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=2  
t5 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
->T=0.100 bz.da isaretleme M=1800  
->T=0.200 bz.da isaretleme M=0800  
->T=0.200 bz.da isaretleme M=0700  
->T=0.300 bz.da isaretleme M=0500  
->T=0.400 bz.da isaretleme M=0400

->T=0.600 bz.da isaretleme M=0200  
 ->T=0.900 bz.da isaretleme M=0000  
 ->T=1.100 bz.da isaretleme M=0010  
 t1 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
 t2 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
 t3 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
 t4 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
 t5 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
 ->T=2.200 bz.da isaretleme M=0020  
 t1 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
 t2 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
 t3 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
 t4 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
 t5 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
 ->T=2.200 bz.da isaretleme M=0022  
 t1 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
 t2 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
 t3 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
 t4 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
 t5 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=1  
 ->T=2.300 bz.da isaretleme M=0001  
 ->T=2.400 bz.da isaretleme M=0003  
 t1 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
 t2 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
 t3 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
 t4 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
 t5 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
 ->T=3.300 bz.da isaretleme M=0004  
 t1 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
 t2 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
 t3 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
 t4 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
 t5 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
 ->T=3.300 bz.da isaretleme M=2204  
 t1 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
 t2 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=2  
 t3 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
 t4 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
 t5 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
 ->T=3.500 bz.da isaretleme M=1204  
 ->T=3.600 bz.da isaretleme M=1205  
 t1 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
 t2 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=1  
 t3 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
 t4 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
 t5 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
 ->T=3.700 bz.da isaretleme M=0205  
 ->T=3.800 bz.da isaretleme M=0205  
 ->T=3.900 bz.da isaretleme M=0206  
 t1 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0

t2 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
t3 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
t4 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
t5 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
->T=5.500 bz.da isaretleme M=0216  
t1 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
t2 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
t3 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
t4 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
t5 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
->T=5.700 bz.da isaretleme M=0226  
t1 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
t2 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
t3 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
t4 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
t5 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=1  
->T=5.800 bz.da isaretleme M=0205  
->T=5.800 bz.da isaretleme M=0215  
t1 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
t2 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
t3 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
t4 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
t5 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
->T=6.800 bz.da isaretleme M=2415  
t1 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
t2 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=2  
t3 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=1  
t4 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=1  
t5 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
->T=7.000 bz.da isaretleme M=1415  
->T=7.000 bz.da isaretleme M=1315  
->T=7.100 bz.da isaretleme M=1115  
->T=7.200 bz.da isaretleme M=0115  
->T=9.000 bz.da isaretleme M=0125  
t1 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
t2 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
t3 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
t4 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=0  
t5 gecisinin ateslenebilirlik derecesi=1  
analiz sona ermistir.  
Elapsed time is 0.330802 seconds.



## **ÖZGEÇMİŞ**

**Ad Soyad: Oktay YURTTAKAL**

**Doğum Yeri ve Tarihi: Karabük, 1985**

**Adres: İhlamurdere Cad. Türkali Mah. No: 77/12 Beşiktaş/İSTANBUL**

**Lisans Üniversite: Yıldız Teknik Üniversitesi**