

127091

**ZAMAN SERİSİ ÇÖZÜMLEMESİNDE
BÖLÜNTÜSEL BÜTÜNLEŞME**

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Müh. M. Berk ATAMAN
(507001130)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 2 Ocak 2002
Tezin Savunulduğu Tarih : 17 Ocak 2002

Tez Danışmanı :

TC. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOĞRULAMA MERKEZİ
Doç.Dr. Burç ÜLENGİN

Diğer Jüri Üyeleri:

Prof.Dr. Ümit ŞENESEN

Doç.Dr. Emre ALPER (B.Ü.)

OCAK 2002

127091

ÖNSÖZ

Bu çalışma süresince bana katlanan ve yardımlarıyla destek olan Ar. Gör. Özlem KÖSTEKLİ'ye, bazı bilgisayar kodlarında yardımlarını esirgemeyen Günay USTA'ya ve elbette tüm çalışmalarımız sırasındaki sonsuz yol göstericiliği için danışmanım, hocam Doç. Dr. Burç ÜLENGİN'e büyük bir teşekkür borçluyum.

Ocak, 2002

M. Berk ATAMAN



İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ	v
ŞEKİL LİSTESİ	vi
ÖZET	viii
SUMMARY	ix
1. GİRİŞ	1
2. ZAMAN SERİSİ ÇÖZÜMLEMESİNDE ZAMAN ALANI YAKLAŞIMI	7
2.1 Zaman serisi çözümlemesinde temel istatistiksel büyüklükler	7
2.2 Durağan ve Durağan Olmayan Olasılıklı Süreçler	11
2.3 Zaman serilerinde eğilim ve bütünleşme	15
2.4 Birim kök sınamaları	25
3. ZAMAN SERİLERİNDE SIKLIK ALANI YAKLAŞIMI	30
3.1 Spektral gösterim	31
3.2 Periodogram	37
3.3 Durağanlık, birim kökler ve spektral çözümleme bağlantıları	41
4. BÖLÜNTÜSEL BÜTÜNLEŞME	49
4.1 Bölüntüsel bütünleşmenin tanımı ve temel özellikleri	54
4.2 Bölüntüsel bütünleşme katsayısının kestirim teknikleri	71
4.2.1 Hurst R/S yaklaşımı	71
4.2.2 Lo Geliştirilmiş R/S	72
4.2.3 Granger-Joyeux Gridal yaklaşım	73
4.2.4 GPH Log-periodogram kestiricisi	74
4.2.5 Sowell en yüksek olabilirlik yaklaşımı	78
4.2.6 Robinson Log ACV yaklaşımı	82
4.2.7 Robinson en küçük uzaklık yaklaşımı	83
4.2.8 Robinson APER yaklaşımı	84
4.2.9 Robinson Log Periodogram yaklaşımı	85
4.2.10 Robinson GSE yaklaşımı	87
4.2.11 TSB en küçük uzaklık yaklaşımı	88
4.2.12 Fox ve Taqqu EYO yaklaşımı	91

5. BÖLÜNTÜSEL BÜTÜNLEŞME KATSAYISI KESTİRİM YÖNTEMLERİNİN BAŞARILARININ MONTE CARLO BENZETİMLERİ İLE KARŞILAŞTIRILMASI	93
5.1 Monte Carlo benzetimleri yazın özeti	93
5.2 Monte Carlo benzetimi	97
6. TÜRKİYE İÇİN SEÇİLMİŞ MAKROEKONOMİK BÜYÜKLÜKLERİN BÖLÜNTÜSEL BÜTÜNLEŞME DERECELERİNİN İNCELENMESİ	111
7. GENEL DEĞERLENDİRME VE SONUÇ	125
KAYNAKLAR	131
EKLER	136
ÖZGEÇMİŞ	139



TABLO LİSTESİ

	Sayfa No
Tablo 4.1: Farklı d değerleri ile türetilmiş bölüntüsel bütünleşik gürültünün ardışık bağımlılık katsayıları.....	54
Tablo 4.2: Bölüntüsel bütünleşik gürültünün özellikleri.....	59
Tablo 5.1: $T=100$ örneklem büyüklüğünde sapma.....	99
Tablo 5.2: $T=250$ örneklem büyüklüğünde sapma.....	100
Tablo 5.3: $T=500$ örneklem büyüklüğünde sapma.....	101
Tablo 5.4: $T=100$ örneklem büyüklüğünde kök hata kareleri ortalaması.....	105
Tablo 5.5: $T=250$ örneklem büyüklüğünde kök hata kareleri ortalaması.....	106
Tablo 5.6: $T=500$ örneklem büyüklüğünde kök hata kareleri ortalaması.....	107
Tablo 6.1: Seçilmiş makroekonomik büyüklükler.....	111
Tablo 6.2: Birim kök sınamalarının sonuçları.....	111
Tablo 6.3: Sıklık alanında yapılan kestirim sonuçları.....	112
Tablo 6.4: Sowell EYO yöntemi ile kestirilmiş ARFIMA(p, d, q) modelleri.....	113

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa No
Şekil 1.1: Zaman serisi çözümlemesinde süreçler.....	3
Şekil 1.2: Belirlenme adımının ayrıntılı akışı.....	4
Şekil 2.1: (2.16) ve (2.20) veri üretim süreçlerine göre üretilen serilerinin zaman içindeki değişimi.....	19
Şekil 2.2: (2.21) veri üretim sürecine göre üretilen saf rassal yürüyüş serisinin zaman içindeki değişimi.....	19
Şekil 2.3: Veri üretim süreci $y_t = 0.2y_{t-1} + \varepsilon_t$ formunda olan serinin zaman içindeki değişimi.....	20
Şekil 2.4: Deterministik eğilimli serinin şoka verdiği tepki.....	20
Şekil 2.5: Yığılımlı rassal yürüyüş serisinin şoka verdiği tepki.....	21
Şekil 2.6: Saf rassal yürüyüş serisinin şoka verdiği tepki.....	22
Şekil 2.7: Deterministik eğilimli serinin kısmi ve tam bağım-Şekli.....	22
Şekil 2.8: Yığılımlı rassal yürüyüş serisinin kısmi ve tam bağım-Şekli.....	23
Şekil 2.9: Saf rassal yürüyüş serisinin kısmi ve tam bağım-Şekli.....	23
Şekil 2.10: Durağan AR(1) sürecinin kısmi ve tam bağım-Şekli.....	24
Şekil 3.1: Değişik ardışık bağlanım parametreleri için AR(1) sürecinin spektral yoğunluk fonksiyonu $[y_t = \phi y_t + \varepsilon_t, \phi = -0.5, 0, 0.5]$	42
Şekil 3.2: Rassal yürüyüş sürecinin spektral yoğunluk fonksiyonu $[y_t = \phi y_t + \varepsilon_t, \phi = 1]$	43
Şekil 3.3: Değişik MA parametreleri için MA(1) sürecinin spektral yoğunluk fonksiyonu.....	43
Şekil 3.4: AR(1) sürecinin spektral yoğunluğu(a) ve periodogramı(b).....	45
Şekil 3.5: Rassal yürüyüş serisinin spektral yoğunluğu(a) ve periodogramı(b).....	46
Şekil 3.6: Birinci dereceden fark alınmış rassal yürüyüşün spektral yoğunluğu.....	47
Şekil 4.1: Bölüntüsel bütünleşme katsayısının kestirim teknikleri.....	52
Şekil 4.2: Farklı d değerleri için bölüntüsel bütünleşik gürültünün kuramsal spektral yoğunluğu.....	63
Şekil 4.3: $d = 0.5$ ile türetilmiş bölüntüsel bütünleşik gürültünün zaman içindeki davranışı.....	64
Şekil 4.4: $d = 0.3$ ile türetilmiş bölüntüsel bütünleşik gürültünün zaman içindeki davranışı.....	64
Şekil 4.5: $d = -0.3$ ile türetilmiş bölüntüsel bütünleşik gürültünün zaman içindeki davranışı.....	65
Şekil 4.6: $d = -0.5$ ile türetilmiş bölüntüsel bütünleşik gürültünün zaman içindeki davranışı.....	65
Şekil 4.7: $d = 0.5$ ile türetilmiş bölüntüsel bütünleşik gürültünün ardışık bağlanım fonksiyonu.....	66
Şekil 4.8: $d = 0.3$ ile türetilmiş bölüntüsel bütünleşik gürültünün ardışık bağlanım fonksiyonu.....	66

Şekil 4.9: $d = -0.3$ ile türetilmiş bölüntüsel bütünleşik gürültünün ardışık bağlanım fonksiyonu.....	67
Şekil 4.10: $d = -0.5$ ile türetilmiş bölüntüsel bütünleşik gürültünün ardışık bağlanım fonksiyonu.....	67
Şekil 4.11: $d=0.5$ için spektral yoğunluk.....	68
Şekil 4.12: $d=0.3$ için spektral yoğunluk.....	68
Şekil 4.13: $d=-0.3$ için spektral yoğunluk.....	69
Şekil 4.14: $d=-0.5$ için spektral yoğunluk.....	69
Şekil 5.1: Benzetim döngüsü.....	98
Şekil 5.2: Farklı örneklem büyüklüklerinde GPH kestiricisinin sapması.....	108
Şekil 5.3: Farklı örneklem büyüklüklerinde Robinson GSE kestiricisinin sapması.....	108
Şekil 5.4: Farklı örneklem büyüklüklerinde Robinson APER kestiricisinin sapması.....	108
Şekil 5.5: Farklı örneklem büyüklüklerinde Robinson log periodogram kestiricisinin sapması.....	109
Şekil 5.6: Farklı örneklem büyüklüklerinde Phillips geliştirilmiş log periodogram kestiricisinin sapması.....	109
Şekil 5.7: Farklı örneklem büyüklüklerinde Sowell EYO kestiricisinin sapması.....	109
Şekil 6.1: (a) <i>Lip</i> değişkeni için ACF'ler (b) <i>Lip</i> değişkeni için PACF'ler (c) <i>Lip</i> değişkeninin birinci farkı için spektral yoğunluk (d) 0.50 ile bölüntüsel fark alınmış <i>Lip</i> değişkeni için spektral yoğunluk.....	116
Şekil 6.2: (a) <i>Lcpi</i> değişkeni için ACF'ler (b) <i>Lcpi</i> değişkeni için PACF'ler (c) <i>Lcpi</i> değişkeninin birinci farkı için spektral yoğunluk (d) 0.41 ile bölüntüsel fark alınmış <i>Lcpi</i> değişkeni için spektral yoğunluk.....	117
Şekil 6.3: (a) <i>Lse</i> değişkeni için ACF'ler (b) <i>Lse</i> değişkeni için PACF'ler (c) <i>Lse</i> değişkeninin birinci farkı için spektral yoğunluk (d) 0.50 ile bölüntüsel fark alınmış <i>Lse</i> değişkeni için spektral yoğunluk.....	118
Şekil 6.4: (a) <i>Lm</i> değişkeni için ACF'ler (b) <i>Lm</i> değişkeni için PACF'ler (c) <i>Lm</i> değişkeninin birinci farkı için spektral yoğunluk (d) 0.48 ile bölüntüsel fark alınmış <i>Lm</i> değişkeni için spektral yoğunluk.....	119
Şekil 6.5: (a) <i>Lx</i> değişkeni için ACF'ler (b) <i>Lx</i> değişkeni için PACF'ler (c) <i>Lx</i> değişkeninin birinci farkı için spektral yoğunluk (d) 0.49 ile bölüntüsel fark alınmış <i>Lx</i> değişkeni için spektral yoğunluk.....	120
Şekil 6.6: (a) <i>Lg</i> değişkeni için ACF'ler (b) <i>Lg</i> değişkeni için PACF'ler (c) <i>Lg</i> değişkeninin birinci farkı için spektral yoğunluk (d) 0.24 ile bölüntüsel fark alınmış <i>Lg</i> değişkeni için spektral yoğunluk.....	121
Şekil 6.7: (a) <i>Le</i> değişkeni için ACF'ler (b) <i>Le</i> değişkeni için PACF'ler (c) <i>Le</i> değişkeninin birinci farkı için spektral yoğunluk (d) 0.29 ile bölüntüsel fark alınmış <i>Le</i> değişkeni için spektral yoğunluk.....	122
Şekil 6.8: (a) <i>Lm2</i> değişkeni için ACF'ler (b) <i>Lm2</i> değişkeni için PACF'ler (c) <i>Lm2</i> değişkeninin birinci farkı için spektral yoğunluk (d) 0.49 ile bölüntüsel fark alınmış <i>Lm2</i> değişkeni için spektral yoğunluk.....	123
Şekil 6.9: (a) <i>Lm1</i> değişkeni için ACF'ler (b) <i>Lm1</i> değişkeni için PACF'ler (c) <i>Lm1</i> değişkeninin birinci farkı için spektral yoğunluk (d) 0.43 ile bölüntüsel fark alınmış <i>Lm1</i> değişkeni için spektral yoğunluk.....	124

ZAMAN SERİSİ ÇÖZÜMLEMESİNDE BÖLÜNTÜSEL BÜTÜNLEŞME

ÖZET

Zaman serisi çözümlemesi durağan olmama durumunun özel bir hali olan bütünleşme kavramının ortaya konmasıyla dramatik bir gelişim sürecine girmiştir. Bölüntüsel bütünleşme olarak bilinen yeni bir kavramın bulgulanmasıyla 1980'lerin ortalarından başlayarak bu gelişim daha da hızlanmıştır. Zaman serisi modellerine dayatılan katı koşullar artık varlıklarını sürdürmezler. Tam sayılı bütünleşme kısıtı yerini herhangi bir bölüntü olabilen bütünleşmeye bırakmıştır. Box-Jenkins anlamında geleneksel $ARIMA(p,d,q)$ modelleri çok daha geniş bir model ailesi olan $ARFIMA(p,d,q)$ veri üretim süreçlerine evrilmiştir. Bu çalışmanın temel amacı bölüntüsel bütünleşme ve uzun süreli hafıza konusundaki yazını modelleme yaklaşımının geçirdiği evrimi netleştirmek için ilk günlerinden son dönemdeki gelişmeleri de kapsayacak şekilde özetlemek ve bölüntüsel bütünleşme katsayısı kestirim yöntemlerinin performanslarını karşılaştırmaktır. İkincil amaç ise bölüntüsel bütünleşme ve sıklık alanı çözümlemesi için Türkçe terim önermektir. Çalışmada durağan olmama ve uzun süreli hafızanın zaman alanı gösterimleri verilmiş ve bunların sıklık alanındaki yansımaları özetlenmiştir. Çalışmanın bir bölümü hem sıklık hem de zaman alanında yapılan on iki bölüntüsel bütünleşme katsayısı kestirim yöntemini açıklar. Kavuşmaz davranışı bilinen dokuz yöntemden seçilen altısının performansı üç farklı örneklem büyüklüğünde, on farklı bütünleşme derecesi için Monte Carlo benzetimi yardımıyla karşılaştırılır. Sonuçlar Sowell tam en yüksek olabilirlik yönteminin diğerlerini geride bıraktığını, Robinson GSE kestiricisinin $ARFIMA(0,d,0)$ süreçleri için ikinci en iyi yöntem olduğunu göstermektedir. Geweke ve Porter-Hudak log periodogram kestiricisi öncekileri izlemektedir. Bu seçilen yöntemler daha sonra Türkiye makroekonomik verilerine uygulanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Bölüntüsel Bütünleşme, Zaman serileri, Uzun süreli hafıza, Monte Carlo Benzetimi, Türkiye

FRACTIONAL INTEGRATION IN TIME SERIES ANALYSIS

SUMMARY

Time series analysis has gone through a dramatic evolution since the concept of integration as a special case of non-stationarity was introduced. Now, from mid 1980's this evolutionary change is accelerated by the recognition of a new concept, known as the fractional integration. The strict conditions imposed to time series models no longer exist and the integer integration restriction left its place to any fractional integration level. The traditional –in the Box-Jenkins sense- ARIMA (p,d,q) models are evolved to a much more general family of models, known as the ARFIMA(p,d,q) data generation processes. The main purpose of this study is to overview the earliest and the most recent literature on fractional integration and long memory models to clarify the evolution that the modeling approach has gone into, and compare the performance of fractional integration parameter estimation methods. As a secondary purpose the study aims to propose Turkish terminology for fractional integration and frequency domain analysis. In the study time domain representation of non-stationarity and long memory is given and the connection between these specific conditions in the frequency domain is explained. A chapter in the study defines twelve fractional integration parameter estimation procedures in both time and frequency domain. The performance of selected six methodologies out of nine, whose asymptotic distribution is of known type are compared by a Monte Carlo simulation in three different sample sizes, with ten different integration values and with 1000 replications. The results indicated that Sowell exact maximum likelihood estimator outperforms the others, and Robinson GSE seems to be the second most reliable estimator for the ARFIMA(0, d ,0) process. The performance of this estimator is followed by Geweke and Porter-Hudak log periodogram estimator. The selected best performing methodologies are then applied to Turkish macroeconomic data.

Keywords: Fractional Integration, Time Series, Long Memory, Monte Carlo Simulation, Turkey

1. GİRİŞ

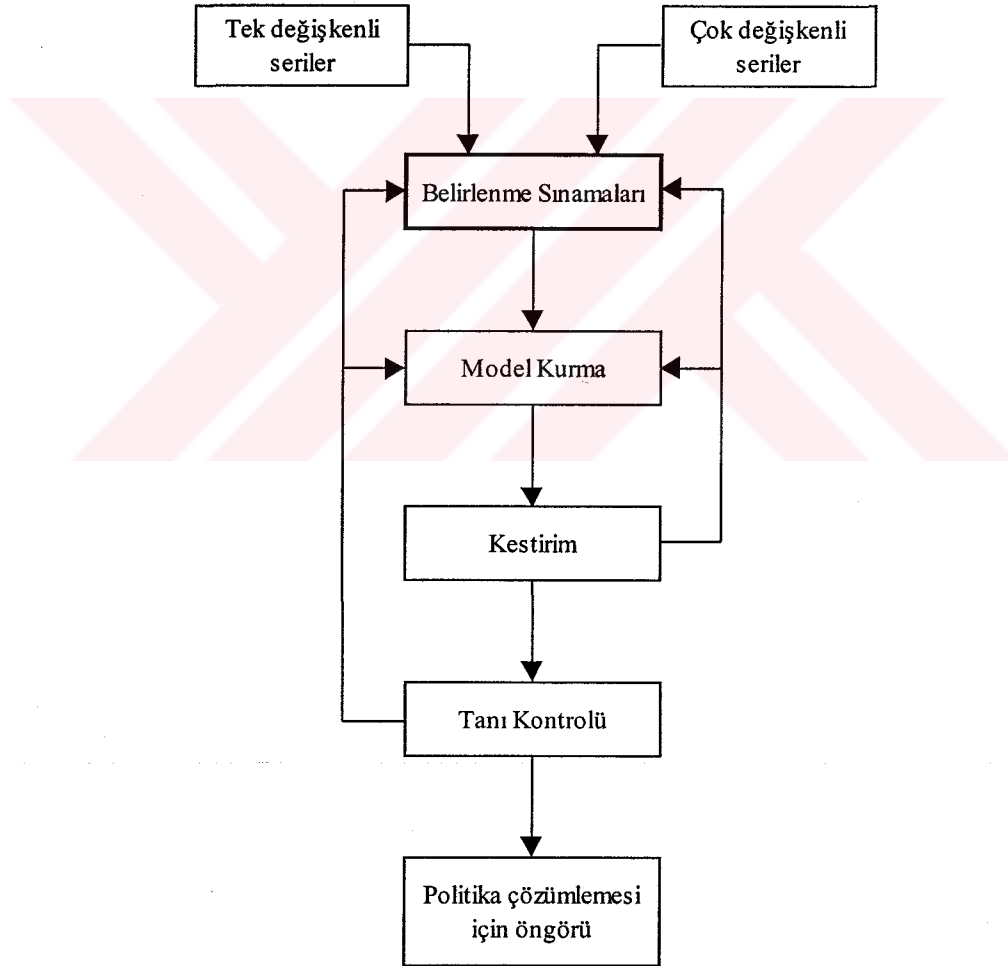
Zaman serisi çözümlemesi ekonometrisyenler için oldukça önemli bir modelleme yaklaşımıdır çünkü ekonometrik zaman serisi modelleri örneklem dışı kestirim yapmak amacıyla kullanılır. Örneklem dışı kestirim yapma zorunluluğunun temel nedeni politikaların belirlenmesine yöneliktir. Bu, politika benzetimi olarak algılanmamalıdır. Sözü edilen kestirimler geleceğin resmini görmek ve ona göre adım atmak için yapılırlar. Doğru politikaları yol verecek doğru öngörünün yapılabilmesi için ekonomik büyüklüğün eğilim, bağlanım, kriz durumlarında verdiği tepki vs. dikkatle ele alınmalıdır. İleriye dönük yatırım planlarının yapılmasında kullanılmak üzere satışların kestirilmesi istenebilir, ya da enflasyon oranının, faizlerin ve talebin. Bireylerin ve/veya kurumların kestirim yapma istekleri ileriye için birtakım sözler vermeleri ve konum belirleme çabalarıdır. Bu kestirimler yapılırken gelecek hakkında hiçbir bilgi olmadığından geçmiş tek veri kaynağını oluşturmaktadır. Kolay olan geçmişe bakarak dış-değer-biçim yoluna gidilmesidir ancak bu tür kestirimler değişimlere ayak uyduramamaları anlamında hatalı kabul edilirler. Gelişmiş modeller ise geçmişteki değişimin yapısını anlayarak gelecekteki değişimin yönünü ve büyüklüğünü kestirmeye çalışırlar. Devletlerin ekonomik kestirim tekniklerinin yoğun bir kullanıcısı ve çoğunlukla üreticisi olduğu gerçeği unutulmamalıdır. Devlet, para veya döviz kuru politikaları oluştururken ekonominin gelecek durumunu bilmek isteyecektir. Makroekonomik modeller, makroekonomik politikaların belirlenmesinde tutarlı bir çerçevenin çizilmesi anlamında önemli bir rol oynamaktadır.

Zaman serisi modellemesi her ne kadar mühendislik alanında türetilmiş bir konu olsa da sosyal bilimlerde de yoğun ilgi görmekte ve kullanılmaktadır. Bu modellerin nedensellik temelli regresyon modellerine göre temel avantajı değişkenlerin geçmişini incelemek yoluyla davranış kalıplarını kolaylıkla açıklayabilmesi ve öngörü amacıyla kullanılabilmesidir. Nedensellik temelli regresyon modellerinde ileriye dönük bir kestirim yapılması için araştırılan değişken dışındaki tüm değişkenlerin kestirim dönemindeki değerlerinin bilinmesi bir zorunluluktur. Ancak

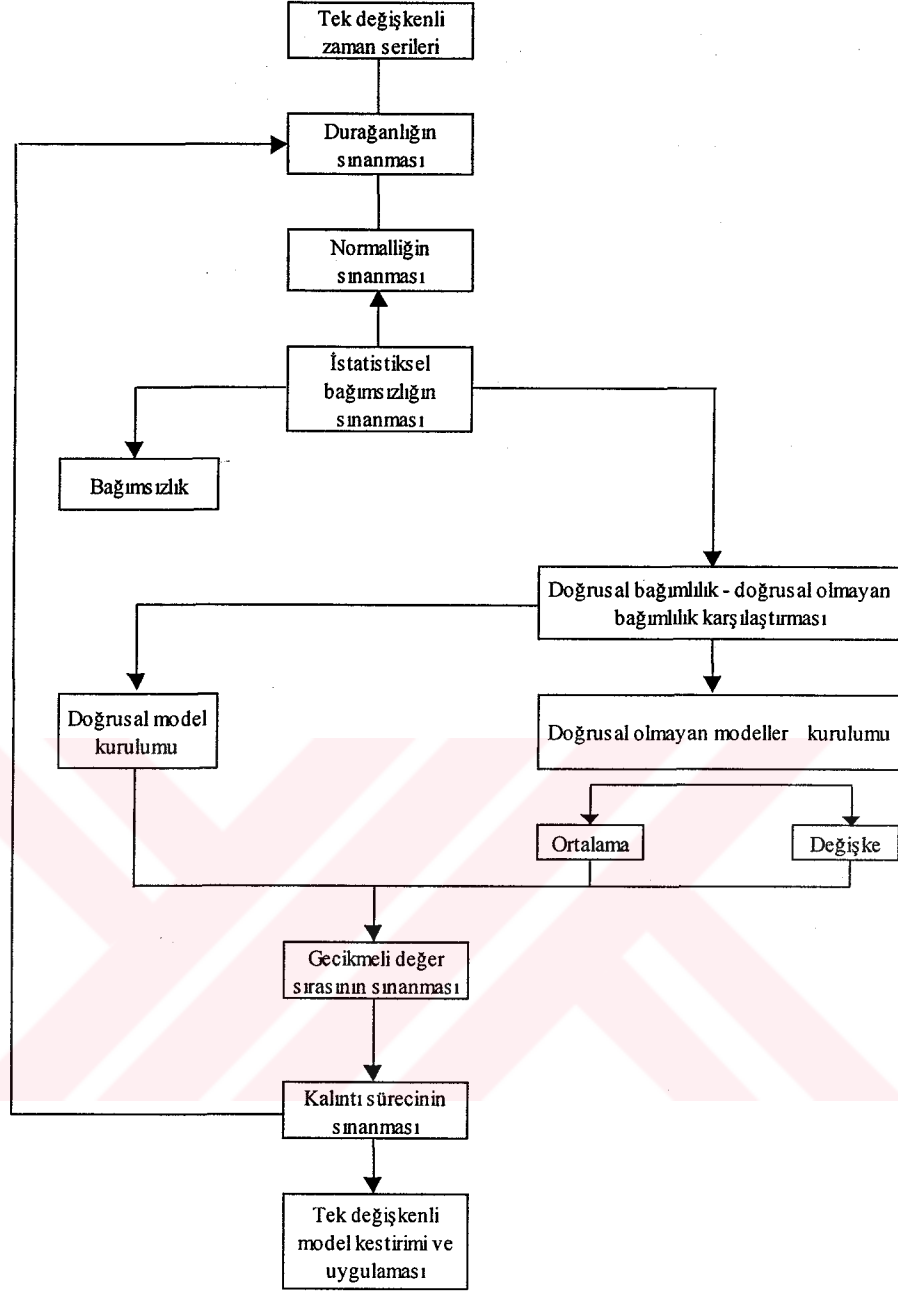
uygulamada bu bilginin elde olduğu durumlarla karşılaşmak olanaksızdır. Kurulan model bir zaman serisi modeli ise henüz gerçekleşmemiş olayların yaratacağı ekonomik büyüklükleri kullanmak durumundadır ki bu da olanaksızdır.   z m yolu modelin diğer değişkenlerinin söz konusu dönem için kestirilmesi ve bu kestirim değerlerinin asıl kestirim sürecine girdi olarak alınması olabilir. Ancak bu da güvenilir olmayan sonuçlar verecektir. Bu nedenle bir serinin kendi geçmişine bakarak ileriye dönük öngörülerde bulunmak daha fazla tercih edilen bir yöntemdir. Birden çok değişkenin birbirleriyle ilişikleri ile birlikte davranış kalıplarının incelenmesi ise daha karmaşık modeller aracılığıyla yapılabilir. Model kurma aşamasında en önemli nokta bir değişkenin çevrimlerdeki yapısını veya söz konusu değişkenin üretimini sağlayan, geri plandaki süreci öğrenmektir. Veri  retim sürecinin çözülmesi oldukça zordur.

şekil 1.1 zaman serisi modellemesinin en genel akış şekli olarak değerlendirilebilir. Bu şekildeki en zor ve önemli aşama belirlenme bölümüne karşılık gelmektedir. Örneklem dışı kestirim yapmak amacıyla kurulan zaman serisi modellerinin doğru belirlenmiş olması bir zorunluluktur. Tek bir doğru model tanımlaması olmadığı gerçeği göz önüne alındığında, karmaşık yapıların sonuçlarının bütünleşik bir şekilde kullanılması zorunluluğu ortaya çıkmaktadır. şekil 1.2 ise model belirlenme aşamalarını ayrıntılandırmaktadır. Her bir adım belirlenme yolunda varlığı sınanması gereken bazı özel durumları içerir. Bu  zel durumların ilki ve en önemlisi zaman serisinin durağanlığının sınanmasıdır. Durağanlık modellerin temelinde yatan bir varsayım olduğu için sağlanması zorunlu bir koşuldur. Durağanlık, kabaca, zamandan bağımsız beklenen değer ya da değişkenlik olarak tanımlanabilir. Zaman serisi bir eğilime sahipse durağanlıktan söz edilemez. İki farklı eğilim türü ile karşılaşmak olasıdır. Bunlardan ilki salt zamana bağlı artış veya azalıştır, deterministik eğilim olarak bilinir. İkindisi ise olasılıklı eğilimdir ve zaman bağlı değişkenliğin yapısı öncekinden farklıdır. Olasılıklı eğilime sahip seriler fark alma işlemi ile durağanlaştırılırken deterministik eğilim serileri eğilim kaldırılması ile durağan hale getirilebilirler. Eğer bir seri fark alma işlemi ile durağan hale geliyorsa bütünleşik (integrated) seri olarak anılır. Belirlenme aşamasındaki bir sonraki adım durağan serilerin geçmiş dönemleri ile ilişkili olup olmadığının, başka bir deyişle bağımlılığının sınanmasıdır. Eğer serinin geçmiş dönem değerlerinden bağımsız olduğu bulunursa seri rassal bir hareket yapıyordur ve modellenemez. Eğer bağımlılık

varsa bu bağımlılığın yapısına oturan modeller kurulmaya çalışılır ve en uygun seçilmesi için çeşitli sınamalar yapılır veya istatistikler hesaplanır. Çalışmanın kapsamının dışında kaldığı için bu sınamalar ayrıntılı bir şekilde incelenmeyecektir. Aslında çalışmanın konusu olan bölüntüsel bütünleşme (fractional integration) sürecin en başında araştırılması gereken durumdur. Bölüntüsel bütünleşme bir durağan olma/olmama sorunu olarak nitelendirilen bütünleşmenin özel bir halidir. Atlanması halinde, model belirlenme sürecinin devamı geri dönülemeyecek hatalar barındıracaktır. Örneğin deterministik eğilim sergileyen bir seri fark alınarak, ya da bütünleşik bir seri eğilim kaldırma ile durağanlaştırılmaya çalışılırsa çok temel bir hata yapılmış olur. Aslında bölüntüsel bütünleşik bir seriye sadece bütünleşik bir seri gibi fark alma işlemi uygulanırsa ciddi bir bilgi kaybı meydana gelir.



Şekil 1.1: Zaman serisi çözümlemesinde süreçler



Şekil 1.2: Belirlenme adımının ayrıntılı akışı

Zaman serisi çözümlmeleri temelde iki alan üzerinde yapılır. Bunlardan ilki ekonometrisyenler tarafından daha fazla kullanılmakta olan zaman alanı olarak tanımlanabilir. Serinin zaman içindeki davranışı incelenir ve modellenir. Bu durum, zaman serisini oluşturan gözlemlerin belli bir dizi şeklinde ölçümlenmiş değerler olduğu gerçeğine dayanır. Zaman-alanı yaklaşımında ardışık bağılanım (autocorrelation) fonksiyonu çok önemli bir rol oynar. Ardışık bağılanım fonksiyonu

ve özellikleri ilerleyen bölümlerde ele alınacaktır. Bu yaklaşımın alması sıklık alanı tanımlamasıdır. Burada serilerin davranışı zaman boyutu yerine trigonometrik denklikler yardımıyla incelenir ve modellenir. Daha teknik bir söyleyişle, sıklık alanının ardında yatan temel varsayım deterministik eğilim göstermeyen herhangi bir zaman serisinin belli sayıda çevrimsel yapıya parçalanabileceğidir. Kısaca sıklık alanı yaklaşımında zaman boyutunu dönemler ve çevrimler karşılar. Bu çevrimlerin uzunluğu, üçer aylık dalgalanmalar türünden ilgilenilen bir uzunluk olabileceği gibi serinin özelliklerini ortaya çıkaran bir uzunluk olarak da belirlenebilir. Örneğin sonsuz uzunlukta bir çevrim eğilimi incelerken, dört çeyreklik bir çevrim mevsimsel yapıyı aydınlatmaya çalışmaktadır. Bu anlamda bütün zaman alanı büyüklüklerinin sıklık alanında karşılıklarını bulmak olasıdır. Hem matematiği hem de yorumlanması açısından daha karmaşık olduğu için geri planda kalması doğaldır.

Zaman serisi çözümlemesini yatay kesit yöntemlerinden ayıran temel özellik, zaman serisi denildiğinde bir ardılık ve önsellik ilişkisinin olmasıdır. Ancak yatay kesit kestirimleri yaparken ardılık veya önsellik sonuçları etkilemeyecektir, çünkü gözlemlerin zaman sırasından bahsetmek olası değildir. Zaman serileri tanımlanırken t ve $t-1$ anları kilit noktaları oluştururlar. Bunun nedeni genellikle modellemenin ekonomik büyüklüğün t ve $t-1$ anlarındaki değerleri arasındaki ilişkinin yapısına dayandırılmasıdır. İstatistiksel dilde açıklamak gerekirse değişkenin t ve $t-1$ anlarındaki değerleri bağımlıdır, ve kendi geçmişi ile ilişkili olduğu için ardışık bağlanım kavramını karşılar. Her zaman bir önceki dönemle ilişkili olma zorunluluğu çok katı bir kural olacağından k dönem öncesiyle bağlanımdan da bahsedilebilir. Zaman serileri çözümlemesinde dikkate alınması zorunlu beş kilit durumdan bahsetmek olasıdır. Bunlar (1) eğilim, (2) mevsimsellik, (3) etkileyici veri noktaları, (4) zamanla değişen değişkenlik ve (5) doğrusal olmama olarak sayılabilir. Bu çalışmanın kapsamı serilerin sergilediği eğilimin türü ile sınırlandırılmıştır. Serilerin durağan olduğu varsayımı altında çeşitli modelleme tekniklerinden bahsedilebilir. Bunlardan en yaygın olanı Box-Jenkins (1976) veya ARIMA tekniğidir. Ardışık bağımlı –seri kendi geçmiş değerlerinden etkilenmektedir– bütünleşik –geçmiş değerleriyle bağlanımın derecesi– hareketli ortalama –kendi hatasını öğrenen modeller– (ARIMA) yönteminin yanı sıra eşanlı regresyon modelleri ve VAR (vektör ardışık bağlanım) modelleri de sıkça kullanılmaktadır. Box-Jenkins’in 1976’da yayınladıkları kitap yeni bir kestirim araçları kuşağının yolunu açmıştır (Günar).

1995). Bu teknik tek ya da eşanlı denklemlerin kurulması yerine zaman serilerinin olasılık özelliklerini, '*bırakın da veriler konuşsun*' felsefesiyle çözümlemeyi vurguluyordu. Bu yaklaşımda bir değişken sadece kendi gecikmeli değerleri ve olasılıklı hata terimleri yardımıyla açıklanmaktaydı. Bu nedenle BJ-ARIMA modellerine kuramsız modeller denildiği de bilinmektedir, çünkü herhangi bir kuramdan türetilmezler.

Zaman serilerine ilişkin temel özellikleri açıklamaya başlamadan önce bir konunun daha ele alınması gerekmektedir. Bir serinin modellemesine geçilmeden önce ilk olarak birinci farkların değişkenliği açısından durağan bir hale getirilmesi gerekmektedir. Bu nedenle zaman serisi çözümlemesinde serinin aslı ile çalışmak yerine doğal logaritması ile çalışmak genel kabul görmüş bir yoldur. Böylelikle üstel eğilim doğrusal hale getirilmiş olacaktır. Bu nedenle bu çalışmada kullanılan tüm değişkenler –halihazırda göreceli yapıda olan, işsizlik oranı, pazar payı gibi değişkenler dışında- doğal logaritması alınmış olarak kullanılacaktır. Aksi halde birinci fark serisi zaman içinde artan bir değişkenliğe sahip olur.

Bu çalışmanın yapısı şöyle açıklanabilir: ikinci bölümde zaman serileri için temel istatistiksel büyüklükler ortaya konmuş ve serilerin eğilim yapıları, durağan olma ve olmama durumları geleneksel zaman serisi çözümlemesinin kullandığı biçimden çok kısa süreli bellek – uzun süreli bellek tartışması üzerinden açıklanmıştır. Üçüncü bölüm bölüntüsel bütünleşme kavramının açıklanmasına temel oluşturacak sıklık alanı yaklaşımını özetlemekte ve sıklık alanı ile zaman alanı arasındaki bağları kurmaktadır. Dördüncü bölüm ise bölüntüsel bütünleşmenin tanımını, kavuşmazdaki (asymptotic) özelliklerini tanımlamakta ve yazında önerilmiş bölüntüsel bütünleşme katsayısı kestirim tekniklerini özetlemektedir. Burada zaman alanı ve sıklık alanı yaklaşımları ayırımında on üç yöntem incelenmektedir. Zaman alanında ise eşanlı ve tekil kestirim yöntemleri ayırımını gidilmiştir. İzleyen beşinci bölümde bölüntüsel bütünleşme parametre tahmin yöntemlerinin performansı Monte Carlo benzetimleri aracılığıyla karşılaştırılmakta ve yüksek performanslı kestirim teknikleri ortaya çıkarılmaktadır. Çalışmanın altıncı bölümü seçilen parametre kestirim yöntemlerinin Türkiye'ye ait bazı makroekonomik büyüklüklere uygulanmasını ve uzun dönem modellerinin ortaya konmasını içermektedir. Yedinci bölüm çalışmanın sonuçlarını özetler ve genel bir değerlendirme sunar.

2. ZAMAN SERİSİ ÇÖZÜMLEMESİNDE ZAMAN ALANI YAKLAŞIMI

Zaman serisi çözümlemeleri temelde iki alan üzerinde yapılır. Bunlardan ilki ekonometrisyenler tarafından daha fazla kullanılmakta olan zaman alanı olarak tanımlanabilir. Serinin zaman içindeki davranışı incelenir ve modellenir. Bu durum, zaman serisini oluşturan gözlemlerin belli bir dizi şeklinde ölçümlenmiş değerler olduğu gerçeğine dayanır. Zaman-alanı yaklaşımında ardışık bağlanım (autocorrelation) fonksiyonu çok önemli bir rol oynar. Ardışık bağlanım fonksiyonu ve özellikleri ilerleyen bölümlerde ele alınacaktır. Bu yaklaşımın alması sıklık alanı tanımlamasıdır. Burada serilerin davranışı zaman boyutu yerine trigonometrik denklikler yardımıyla incelenir ve modellenir. Daha teknik bir söyleyişle, sıklık alanının ardında yatan temel varsayım deterministik eğilim göstermeyen herhangi bir zaman serisinin belli sayıda çevrimsel yapıya parçalanabileceğidir. Kısaca sıklık alanı yaklaşımında zaman boyutunu dönemler ve çevrimler karşılar. Bu çevrimlerin uzunluğu, üçer aylık dalgalanmalar türünden ilgilenilen bir uzunluk olabileceği gibi serinin özelliklerini ortaya çıkaran bir uzunluk olarak da belirlenebilir. Örneğin sonsuz uzunlukta bir çevrim eğilimi incelerken, dört çeyreklik bir çevrim mevsimsel yapıyı aydınlatmaya çalışmaktadır. Bu anlamda bütün zaman alanı büyüklüklerinin sıklık alanında karşılıklarını bulmak olasıdır. Hem matematiği hem de yorumlanması açısından daha karmaşık olduğu için geri planda kalması doğaldır. Bu bölümde zaman serisi modellemesine zaman alanı penceresinden bakılmış ve temel istatistiksel büyüklükler incelendikten sonra durağan olma ve olmama durumlarının karşılıkları gösterilmiştir.

2.1 Zaman serisi çözümlemesinde temel istatistiksel büyüklükler

Zaman serisi modellerin yapı taşı beyaz gürültü (white noise) adıyla bilinen “iyi huylu” (well-behaved) bir olasılıklı süreçtir. Bir beyaz gürültü $\{\varepsilon_t\}$, $t = -\infty, +\infty$ olarak tanımlanır ve

$$E[\varepsilon_t] = E[\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots] = 0 \quad (2.1)$$

$$E[\varepsilon_t \varepsilon_{t-j}] = \text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-j}) = 0 \quad (2.2)$$

$$\text{var}[\varepsilon_t] = \text{var}[\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots] = \sigma_\varepsilon^2 \quad (2.3)$$

sıfır ortalama, geçmiş değerleri ile ilişkili olmama ve sabit değişke koşullarını sağlar. Box-Jenkins'in (1976) sunduğu modelleme yaklaşımında amaç bir zaman serisinin olası tüm hareketlerini ortaya çıkarmak ve matematiksel kalıplarla ifade ermektr. Geriye kalan, davranış biçim asla modellenemeyen beyaz gürültü olacaktır. Bu anlamda Box-Jenkins modelleme algoritmasının duruş noktası da belirlenmiş olur. Birinci koşul ortalamanın zaman içinde sabit kaldığını ve sıfıra eşit olduğunu söyler. İkinci koşul ardışık bağlanımın var olmamasını gösterir. Eğer ε_t yüksekse ε_{t+1} değerinin de yüksek olması için bir neden yoktur. O halde beyaz gürültü serisinin modellenmesi gerekli değildir (Cochrane, 1997), ayrıca olanaksızdır. Bir paranın atılmadan önce yazı mı yoksa tura mı geleceğinin bilinmeyeceği gibi, beyaz gürültünün davranışının da ne olacağı kestirilemez. Buna daha sonra değinilecektir. Üçüncü koşul ise koşullu değişkenliğin var olmadığının göstergesidir.

Box-Jenkins temelli zaman serisi çözümlemesi giriş bölümünde kısaca bahsedildiği gibi serinin geçmiş değerleri (AR) ve kurulan modelin geçmiş hataları (MA) üzerine kuruludur. Bu anlamda serilerin beyaz gürültünün doğrusal bileşiminden oluştuğunu söylemek yanlış olmayacaktır. Bir ARMA modeli genel olarak şu şekilde tanımlanabilir:

$$\text{ARMA}(p, q): z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \dots + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots \quad (2.4)$$

Bu ifadede p modelin kendi geçmiş değerlerinde, q ise beyaz gürültü terimlerinde ne kadar geriye gidileceğini göstermektedir. Yukarıdaki tanımlamadan da kolayca görülmektedir ki z_t serisi, bir beyaz gürültü dizisi ve bir başlangıç değeri ile tanımlanabilmektedir. Gösterim kolaylığı açısından gecikme işlemcisi, L –bazı kitaplarda B – kullanılmaktadır. Bir matematik işlemcisi gibidir, başına geldiği değişkene kendine has bir etki yapar. Örneğin, $Lx_t = x_{t-1}$ veya $L^2 x_t = x_{t-2}$ gibi. En genel anlamda bir ARMA(p,q) modeli şu şekilde gösterilebilir:

$$\text{ARMA}(p,q): \Phi(L)(z_t - \mu) = \Theta(L)\varepsilon_t \quad (2.5)$$

Bu gösterim tekniğiyle (2.4) ifadesi şu şekilde açılabilir:

$$z_t = \phi_1 L + \phi_2 L^2 + \dots + \phi_p L^p + \varepsilon_t + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q \quad (2.6)$$

Zaman serisi çözümlemesinde kurulacak modellerin temel özelliklerine kendi geçmiş değerleri ile arasındaki ilişki üzerinden ulaşılır. İstatistik yazınında iki değişkenin ortak değişimini temel alan ilişki göstergesi ise bağlanım (correlation) katsayısıdır. O halde serinin k dönem önceki değerleri ile arasındaki ilişkiye ardışık bağlanım katsayısı adını vermek yerinde olacaktır. Ardışık bağlanım katsayısı ilişkinin yönünü (artı veya eksi) ve gücünü gösterir. Bu durumda ele alınan z_t serisi ve z_{t-k} serisi ayrı rassal değişkenler olarak kabul edilmiş olur ve iki rassal değişken arasında hesaplanan ilişki katsayısına ardışık bağlanım katsayısı adını vermek yanlış olmaz. k sıfırdan büyük herhangi bir tamsayı olabileceği için birden çok ardışık bağlanım katsayısı hesaplanabilir. Ancak örneklem verileri üzerinden gidildiği zaman k değeri için bir sınır tanımlanmalıdır ve bu yazında genellikle $k \leq n/4$ olarak kabul edilir.

Anakütleye ait dolaysız bir ölçüm her zaman mümkün olmadığından örneklem verileri üzerinden anakütle katsayıları hakkında çıkarsamalar yapmak durumunda kalırız. Çeşitli k değerleri için kuramsal anakütle ardışık bağlanım katsayısı aşağıdaki eşitlik yardımıyla tanımlanır.

$$\rho_k = \frac{\text{cov}(z_t, z_{t+k})}{\sigma_z^2} \quad (2.7)$$

Burada $\sigma_z^2 E[z_t - \mu_z]^2$ ve μ_z anakütle ortalamasının beklenen değeri tanımlanmaktadır. Ardışık bağlanım katsayısına temel oluşturan büyüklük ise ortak değişimin göstergesi ortak değişkidir (covariance). Bu büyüklüğün açılımının yapılması ilerleyen bölümlerdeki gösterimler için bir zorunluluktur.

$$\gamma_k = \text{cov}(z_t, z_{t-k}) = E[(z_t - \mu)(z_{t-k} - \mu)] \quad (2.8)$$

Bununla kurulacak bir analogi üzerinden örneklem ardışık bağlanım katsayısını ise aşağıdaki eşitlikle hesaplamak olasıdır.

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (z_t - \bar{z})(z_{t+k} - \bar{z})}{\sum_{t=1}^n (z_t - \bar{z})^2} \quad (2.9)$$

Ortak değişke gösterimi (2.8)'de $k=0$ kabul edildiğinde hesaplanan değer ise değişkeye (γ_0) denk olmaktadır. O halde şu eşitliği yazmak yanlış olmayacaktır:

$$r_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \quad (2.10)$$

Ardışık bağlanım katsayıları $k=1$ değerinden başlamak koşuluyla $k=2, 3, \dots, K$ değerine kadar hesaplanması sonucunda oluşan katsayılar bütününe örneklem ardışık bağlanım fonksiyonu (SACF – Sample AutoCorrelation Function) adı verilir. Benzer şekilde ortak değişkeler hesaplanırsa fonksiyon SACVF (Sample AutoCoVariance Function) adını almaktadır. Herhangi bir ardışık bağlanım katsayısı yalnızca örnekleme sürecinden kaynaklanan nedenlerle sıfırdan farklı bir değer almış olabilir. O halde bu katsayının önemini kendi standart hatası ile karşılaştırarak belirlemek olasıdır. Bartlett'in önerdiği yaklaşık standart hata aşağıdaki şekilde tanımlanır (Pankratz, 1991).

$$s(r_k) = \left(1 + 2 \sum_{j=1}^{k-1} r_j^2 \right)^{1/2} n^{-1/2} \quad (2.11)$$

Hesaplanan örneklem ardışık bağlanım katsayısının sıfırdan farklı olup olmadığı $H_0: \rho_k = 0$ ön savı ile sınanabilir ve $t=(r_k-\rho_k)/s(r_k)$ sonucu elde edilen değer standart normal dağılım tablosundaki seçilen anlamlılık düzeyine karşılık gelen kritik değer ile karşılaştırılarak karar verilir.

Aynı zamanda kısmi ardışık bağlanım katsayılarından da, PACF (Partial AutoCorrelation Function) bahsetmek olasıdır. Söz konusu büyüklük, serinin t ve $t-k$ anları arasındaki ilişkiyi $t+1$ 'den $t-k-1$ 'e kadar olan ilişkilerinin etkisini giderdikten sonra göstermektedir. Bu katsayının önemi de standart hatası ile karşılaştırarak hesaplanabilir. Kısmi ardışık bağlanım katsayısının standart hatası ise $n^{-1/2}$ olarak kabul edilmektedir.

Box-Jenkins (1976) ARMA(p, q) modelleme yaklaşımının ardında söz konusu serinin durağan olduğu varsayımının yatmaktadır. İzleyen alt bölümde zaman serilerindeki durağanlık kavramı açıklanacak ve durağan olmayan süreçlere giriş yapılacaktır. Bir serinin durağan olup olmaması, durağan değilse nasıl bir tavra sahip olduğu onun hafıza yapısı hakkında bilgi vermekte, bu nedenle zaman serisi modellemesine geçilmeden önce serinin durağanlık durumunun incelenmesi önemli bir adım olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu durum incelenmeden kurulacak modeller hatalı olabilir.

1.2 Durağan ve Durağan Olmayan Olasılıklı Süreçler

Bir serinin durağanlığını tanımlamak olasılıklı süreçler teorisine kadar uzanır. Her zaman serisinin bir olasılıklı ya da rassal süreç ile türetildiği düşünülebilir. O halde belli bir zaman aralığında izlenen seri bu rassal sürecin dışavurumudur –başka bir deyişle örneklemidir. Anakütleyle ilgili çıkarsamalar yapılırken örneklem bilgisi kullanıldığından, bir zaman serisi modelinde de geride yatan rassal süreç temel alınmalıdır.

ARMA süreçlerinin momentleri hesaplandığında açıkça görülecektir ki bu değerler zamandan bağımsızdır. Bunu açıklamak için önce bazı tanımlamalar yapmak yerinde olacaktır. Y_t şu özellikleri taşıyan olasılıklı bir süreç olsun:

$$E[Y_t] = \mu \quad (2.12)$$

$$Var(Y_t) = E[(Y_t - \mu)^2] = \sigma^2 \quad (2.13)$$

$$Cov(Y_t) = \gamma_k = E[(Y_t - \mu)(Y_{t+k} - \mu)] \quad (2.14)$$

Tanım 1.1: Bir Y_t süreci, $\{Y_{t-s}, \dots, Y_t, \dots, Y_{t+s}\}$ dizisinin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu her s değeri için t 'den bağımsız ise kuvvetli durağandır.

Tanım 1.2: Bir Y_t süreci, $E(Y_t)$, $E(Y_t^2)$ sonlu ve $E(Y_t Y_{t-j})$ t 'den bağımsız, j 'ye bağlı ise zayıf durağandır veya kovaryans açısından durağandır denir.

Teknik tanımlamayı (Cochrane, 1997) verdikten sonra bu kavramları açıklayalım. Zayıf olasılıklı durağan süreçlerin ortalaması ile değişkesi zaman içinde değişmeyen ve iki dönem arasındaki ortak değişkesi bu ortak değişkenin hesaplandığı döneme değil de yalnızca iki dönem arasındaki uzaklığa bağlı olan olasılıklı bir süreçtir (Gujarati, 1995). Eğer Y_t 'nin başlangıç noktası t anından $t+m$ anına kaydırılırsa zayıf durağan olasılıklı süreç olarak tanımlanan serilerin ortalaması, değişkesi ve ortak değişkesinin t anında hesaplananlarla aynı kalması beklenir. Bu koşullar sağlanmıyorsa serinin durağanlığından söz edilemez. Örneğin serinin ortalamasında ortaya çıkan bir kayma durağanlığı bozar. Ortalama düzeyin izlenen zaman içinde sıçramalar yapması, başka bir deyişle bir dış etki sonucu bir önceki platosundan başka bir platoya oturması bu durumu doğurur. Tanım 1.2'nin ikinci derece momenti olan değişkesinin sonlu olması ise şöyle açıklanabilir: Eğer serinin değişkenliği zaman bağlı olarak farklılık gösteriyorsa seri değişke açısından durağan olma özelliğini kaybetmektedir. Tüm bu tanımlamalara rağmen durağanlığın genellikle yanlış kavrandığını söylemek olasıdır. Örneğin, koşullu ortak değişkeler zaman içinde değişkenlik gösterse de seri hala durağan olabilir. Tanım, koşullu olmayan ortak değişkelerin zamanın bir fonksiyonu olmaması gerektiğini içermektedir. Durağanlık ilgili daha ayrıntılı bilgi Brockwell-Davis (1991), Mills (1992) ve Enders (1995)'te bulunabilir.

Durağanlık kavramı ile eğilim arasındaki bağı kurmadan önce ilerleyen bölümlerde bahsedilecek bir konuyu da ele almak yararlı olacaktır. Bir zaman serisi ortak değişke açısından durağan olduğu sürece doğrusal bir ARMA gösterimine sahiptir. İleri ARMA modelleri bu anlamda çok geniş bir model ailesi oluşturmaktadır. Bu, Wold parçalama teoremi olarak bilinmektedir.

Herhangi bir sıfır ortalamalı ortak değişke açısından durağan bir süreç aşağıdaki şekilde ifade edilebilir (Cochrane, 1997):

$$z_t = \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j \varepsilon_{t-j} + \eta_t \quad (2.15)$$

Burada

1. $\varepsilon_t \equiv z_t - P(z_t | z_{t-1}, z_{t-2}, \dots)$.
2. $P(\varepsilon_t | z_t, z_{t-1}, \dots) = 0$, $E(\varepsilon_t z_{t-j}) = 0$, $E(\varepsilon_t) = 0$, $E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2$ tüm t değerleri için aynı ve tüm $t \neq s$ için $E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0$.
3. $\Theta(L)$ 'nin tüm kökleri birim çemberin üzerinde veya dışında, (birim kök olmaması halinde tersinebilir.
4. $\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j^2 < \infty, \theta_0 = 1$.
5. $\{\theta_j\}$ ve $\{\varepsilon_s\}$ benzersizdir.
6. η_t doğrusal deterministiktir.

Birinci özellik ε_t 'yi serinin doğrusal kestirim hataları olarak tanımlar. $P(\cdot|.)$ kestirim değerlerini gösterir. Üçüncü özellik, ε_t 'nin, z_t 'nin gecikmeli değerleri üzerinden ifade edilebileceğini gösterir. Eğer $\Theta(L)$ invertible olmasaydı, bir önceki açıklama geçerliliğini yitirirdi. Teoremin bundan sonraki koşuluna geçmeden önce hatırlanması zorunlu bir özelliği ele alalım. Tüm AR süreçleri sürekli yerine koyma yöntemiyle $MA(\infty)$, tüm MA süreçleri de aynı yöntemle $AR(\infty)$ şeklinde gösterilebilir. Dördüncü özellik durağanlıktan kaynaklanmaktadır. Eğer θ kareleri sonlu toplam vermeseydi, değişke sonsuz olurdu. Altıncı özellik seride sinüs eğrisinin hareketlerine izin vermektedir. İkinci ve beşinci özellikler açıktır.

Veri alınan bir zaman serisinde (2.12)-(2.14) koşullarının aynı anda sağlanıp sağlanmadığının kontrol edilmesi oldukça zordur. (2.12)'in geçerliliğini sınamak için kullanılacak bir test istatistiği serinin değişkesinin hesaplanmasını gerektirir –ki bu değer (2.13) koşulunu sağlamak durumundadır. Bu ve benzeri nedenlerden dolayı pratikte üç koşulun eş anlı sağlanıp sağlanmadığı kontrol edilmez.

Buraya kadar yapılan kısa açıklamalar ışığında durağanlık ve durağan olmama ile ilgili şu iki kavramın ortaya çıktığı görülebilir: (1) Zaman serilerindeki durağanlık ortalamanın kaymasından kaynaklanıyor olabilir. (2) Zaman serilerinin ortak değişke

yapısı başlangıç noktası farklı alındığında orijinalden ayrı bir yapıya bürünüyor olabilir. Bu, zaman serilerinde bir eğilimin varlığını imlemektedir. Bir çok ekonomik ve finansal büyüklük yükselme yönelimi olan eğilim sergiler. Zaman serisi modellemesi bir yapıyı tanımlamaya çalışırken “yukarı yönelimli eğilim” bir sınırsızlık ve kestirilemezlik durumu dayatır. O halde modelleme öncesi eğilimin ortadan kaldırılması gerekmektedir. Çünkü eğilim baskın harekettir ve kısa dönemli hareketleri baskılar. Onların görülmesini ve modellenmesini engeller. Ancak ve ancak eğilimin etkisi ortadan kaldırıldığında bu hareketler görülebilir ve modellenenebilir hale gelecektir. İleriye dönük kestirimler yapılırken bu eğilim bilgisi elbette yeniden dikkate alınacaktır.

(2.12)-(2.14) koşullarının getirdiği kısıtlamalar, örneğin bir $AR(p)$ modeli ile çalışırken serinin durağanlık veya eğilim yapısı incelenerek aşılabilir. Bu durum $AR(p)$ modelinin katsayı değerlerinin veya deterministik kısmının söz konusu koşulların hangisini sağlamadığı ile bağlantılandırılabilir. Zaman serilerinde iki eğilim türünden bahsedilebilir: Bunlardan ilki göreceli olarak daha basit olan deterministik eğilimdir. İkincisi ise, kökü olasılıklı süreçlere dayandığı için o isimle anılan, olasılıklı eğilimdir. Eğilimin türü zaman serisinin sahip olduğu hafızayı da ortaya çıkarmaktadır.

Bu noktada yukarıda sözü geçen hafıza kavramını açmak yararlı olacaktır. Bir zaman serisinin hafızası yediği bir şoka verdiği tepkinin incelenmesi ile ortaya çıkmaktadır. Bunu iki boyutta değerlendirmek gerekir. Diyelim ki bir makroekonomik büyüklük 1994 yılının dördüncü ayında yaşanan bir krizin etkisi ile daha önce izlediği yoldan çıksın. 1994:04 anından sonraki her bir ayda nasıl davrandığını incelersek iki olası durumla karşılaşabiliriz. Ya belli bir zaman geçtikten sonra önceki yoluna dönecektir ya da dönmeyecektir. Bu, dikkate alınması gereken birinci boyuttur. Eski yoluna ya da eğilime dönme deterministik, dönmeme ise olasılıklı eğilim sergileyen serilere has bir özelliktir. İkincisi ise bu şokun etkisini ne kadar süre üzerinde taşıdığıdır. Zaman serisi çözümlemesinde bu olası durumlar hakkında katı kurallar yoktur. Bir seri yukarıda bahsedilen iki davranışın da özelliklerini birlikte taşıyor olabilir ancak hangisi baskın ise ona uygun tepki verecektir. Ya da herkes tarafından bilinen bir yapıda tepki vermeyecektir. Bir serinin eğilim yapısı ile ilgili tartışmayı genişletebilmek için olası durumları teknik bir şekilde açıklamak yerinde olacaktır.

2.3 Zaman serilerinde eğilim ve bütünleşme

Bu alt bölümde durağanlık ile zaman serisinin sergilediği eğilim arasındaki bağ kurulmaktadır. Serinin durağan olmamasının bir nedeni değişkenin bütünleşme derecesine bağlıdır. Bu konu ilerleyen bölümlerde daha ayrıntılı olarak ele alınacaktır. Ancak şimdilik d inci dereceden bütünleşik bir seri d kez fark alınarak durağan ve tersinebilir bir $ARIMA(p,d,q)$ ile gösterilebilir, tanımı ile başlayalım. Böyle bir serinin bütünleşme yapısı $I(d)$ ile gösterilir. Box-Jenkins tarafından önerilen modelleme yaklaşımının en genel formu olan ardışık bağımlı bütünleşik hareketli ortalama süreci $ARIMA(p,d,q)$, $\Phi(L)(1-L)^d(z_t - \mu) = \Theta(L)\varepsilon_t$ şeklinde ifade edilmektedir ve bu bölümden sonra hep bu gösterimiyle ele alınacaktır.

Dickey-Fuller'in (1979) bir birim kök sınaması önermeleri ile birlikte Nelson ve Plosser'in (1982) zaman serilerini geride yatan eğilimlerine göre ayrıştırma önerileri zaman serisi çözümlemesinin ekonometri yazınında daha da önemli bir noktaya oturmasına neden olmuştur. 1979 yılına kadar serilerin eğilimleri sadece deterministik eğilimle tanımlanıyor ve olasılıklı eğilimin varlığı hissediliyor ancak adı koyulamıyordu. Oysa bazı zaman serileri deterministik eğilimleri ile bazıları ise olasılıklı eğilimleri ile daha iyi açıklanabilmektedir. İkisi arasındaki temel ayırım (Greene, 2000) deterministik eğilimli serilerin yediği bir şoktan sonra ortalama düzeye dönüş özelliği sergilerken olasılıklı eğilime sahip serilerin böyle bir özelliği barındırmamasıdır. Sözü edilen ayırım önceki bölümde hafıza kavramıyla açıklanmıştı. İki tanımlama bağdaştırılınca ortaya çıkan tablo, deterministik eğilimi olan serilerin hafızalı bir yapısı olduğu ve bir şok yemesi halinde belli bir süre sonra tekrar eski yoluna, eğilimine, gireceğini, olasılıklı eğilim sergileyen serilerin ise hafızasız olduğunu, başka bir deyişle bir şok yediği zaman eski yoluna dönmediğini göstermektedir. İki durum her zaman birbirinden bağımsız ortaya çıkmaz, her iki eğilim türü de aynı seri de bulunabilir.

Deterministik eğilim sergileyen bir zaman serisinin veri üretim süreci aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$y_t = \delta + \beta \cdot t + u_t \quad (2.16)$$

Burada ε_t sıfır ortalamalı sabit değışkeli beyaz gürültü olmak koşuluyla $\Phi(L)u_t = \Theta(L)\varepsilon_t$ şeklinde gösterilebilir. $\Phi(L)$ ve $\Theta(L)$ sırasıyla durağan ve tersinebilir. Bu tip serilerin koşulsuz ya da uzun dönem ortalama düzeyleri $E[y_t] = \delta + \beta \cdot t$ olmaktadır. Geçmiş ya da o anki şokların serinin uzun dönem ortalama düzeyi üzerinde bir etkisi yoktur ve uzun dönem kestirim hatalarının belirsizliği sınırlıdır. Deterministik eğilim sergileyen zaman serileri eğilim-durağan seriler olarak da adlandırılabilir.

Bir zaman serisinin genel eğilim denklemi ardışık bağlanım gösterimi kullanılarak

$$y_t = \delta + \beta \cdot t + \phi_1 y_{t-1} + u_t \quad (2.17)$$

şeklinde ifade etmek de olasıdır. (2.17) denkleminde $y_t - \delta - \beta \cdot t = z_t$ kabul edildiğinde söz konusu AR(1) süreci sürekli yerine koyma yoluyla MA(∞) formuna taşınabilir.

$$z_t = (\phi_1)^t z_0 + \sum_{j=1}^t (\phi_1)^{t-j} \varepsilon_j \quad (2.18)$$

Burada z_0 örneklem öncesi başlangıç değeridir. $|\phi_1| < 1$ olduğu zaman (2.18) denkleminde z_0 'ın etkisi azalmakta ve yakın şoklar daha eskilerine oranla daha etkili hale gelmektedir. Aslında uzun dönemde geçmiş şokların etkisi ortadan kalkmaktadır, ya da etkileri geçicidir denilebilir. Aynı zamanda eğilim denklemini

$$\Delta z_t = (\phi_1 - 1)z_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.19)$$

şeklinde yazmak da olasıdır. Buradan görülmektedir ki $|\phi_1| < 1$ olduğu zaman serinin gecikmeli değerlerinin artı işaretli olanları seride azalmaya, eksi işaretli değerleri ise artışa neden olmaktadır. z_t 'nin artı veya eksi değer alması deterministik eğilimin üzerine çıkmasına veya altına inmesine karşılık gelir. Böylelikle $|\phi_1| < 1$ olduğu zaman seri ortalama dönüş hareketi yapar demek yanlış olmayacaktır.

Bunun karşıt durumu olan olasılıklı eğilime sahip serilerin veri üretim süreci

$$y_t = \alpha + y_{t-1} + u_t \quad (2.20)$$

şeklinde karşımıza çıkar. Burada ε_t sıfır ortalamalı sabit değışkeli beyaz gürültü olmak koşuluyla $\Phi(L)u_t = \Theta(L)\varepsilon_t$ şeklinde gösterilebilir. $\Phi(L)$ ve $\Theta(L)$ sırasıyla durağan ve tersinebilirdir. Bunu aynı zamanda

$$(1 - L)y_t = u_t \quad (2.21)$$

şeklinde de gösterebilirdik. (2.21) ifadesi $\phi_1=1$ olan özel durumdur. Yazında saf rassal yürüyüş olarak bilinir. Seri bu tip bir eğilime sahipse ortalama düzeye dönme özelliğini taşımaz, hafızasızdır. (2.20) ifadesi yığılımlı rassal yürüyüş olarak bilinmektedir. Benzer şekilde $MA(\infty)$ formuna taşınabilir.

$$y_t = y_0 + \alpha \cdot t + \sum_{j=1}^t \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t \quad (2.22)$$

(2.22) ile tanımlanan seri anakütle modelinde sonsuz rassal değışken değerin toplamı olarak hesaplanır ve uzun dönem değışkisi $\text{var}(y_t) = t \text{var}(\varepsilon_t)$ $t \rightarrow \infty$ durumunda $\text{var}(y_t) \rightarrow \infty$ olur. Öyleyse bir rassal yürüyüş değışke açısından durağan olmaktan uzaktır denilebilir. Serinin ortalamasının zaman içinde değışmesinden kaynaklanan durağan olmama bir şekilde ortadan kaldırılrsa bile olasılıklı eğilimin yarattığı durağan olmama durumu hâlâ sorun olarak kalacaktır. Çünkü serinin farklı dönemleri arasındaki ilişki sadece uzaklığa değil zamana da bağılı olmaktadır.

Granger ve Newbold'un (1974) bu konu üzerindeki çalışmaları göstermektedir ki yığılımlı rassal yürüyüş ve eğilim-durağan süreçlerle üretilen veriler arasında yapılacak regresyon analizleri aslında seriler hiçbir şekilde ilişkili olmasa bile anlamlı sonuçlar doğuracaktır. Değışkenler arasındaki anlamlı ilişki sadece veri üretim süreçlerinin benzerliğinden kaynaklanmaktadır.

Şu ana kadar adı geçen serilerin durağan olmama durumları veri üretim sürecinin karakteristik denkleminin kökleri ile de açıklanabilir. Veri üretim süreci (2.21) formunda iken karakteristik denklemin tek bir kökü vardır ve bire eşittir. (1)

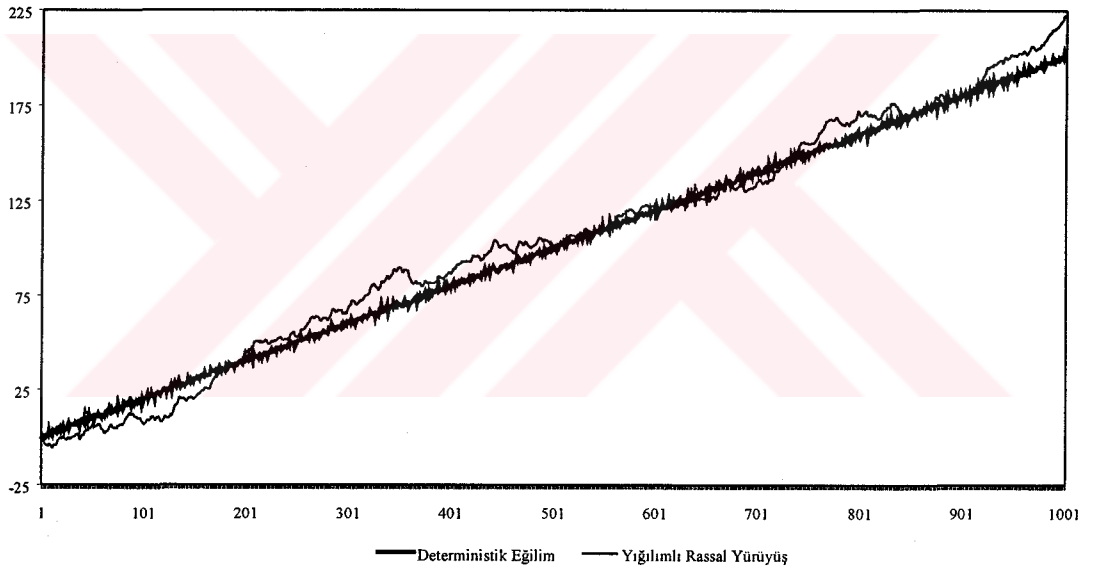
gösterimi yerine daha karmaşık bir $AR(p)$ tercih edildiğinde ortaya çıkan polinomun karakteristik köklerinin incelenmesi de serinin bütünleşme derecesi hakkında bilgi verecektir. Söz konusu polinomun kökleri birim çember üzerinde ise birim kökün varlığına işaret eder ve serinin durağan olmadığını, başka bir deyişle bütünleşik olduğunu gösterir. Eğer tek bir birim kökün varlığından söz ediyorsak serinin birinci dereceden bütünleşik olduğunu söyleyebiliriz. Böyle bir yapı sergileyen seri birinci dereceden fark alma işlemiyle durağan hale getirilebilir ve $I(d)$ şeklinde gösterilir (Franses, 1998). Birim köklerle ilgili sınamalara ilerleyen bölümlerde kısaca değinilecektir.

Geleneksel zaman serisi ekonometrisi yazını bütünleşme derecesinin bir tam sayı olduğu inancına fazla kapılmıştır. Oysa ki deterministik eğilim sergilemeyen bir serinin veri üretim sürecinin birim kökü olmaksızın durağan olmadığı görülebilir. Bu gerek daha önce belirtilen (2.12)-(2.14) koşulları üzerinden ya da Wold parçalama teoremi aracılığıyla ortaya çıkarılabilir. Bu katı kural bütünleşme katsayısının herhangi bir değer (gerçek sayı) almasına izin vermek koşuluyla rahatlatılabilir –ki bu da bölüntüsel bütünleşme adı verilen durağan olmama durumunu karşılar. Burada bölüntüsel bütünleşme ile ilgili daha fazla ayrıntıya girilmeyecektir. Çünkü çalışmanın dördüncü bölümünün tamamı bölüntüsel bütünleşmiş serilere ayrılmıştır.

Buraya kadar en düşük düzeyde tutmaya çalıştığımız teknik tanımlamaları kısa bir süre için bir kenara bırakıp sözü edilen farklı eğilim yapısına sahip veri üretim süreçlerini yapay seriler üzerinden inceleyelim. Buraya kadar açıklanan veri üretim süreçleri sırasıyla deterministik eğilim $y_t = \delta + \beta \cdot t + u_t$, saf rassal yürüyüş $y_t = y_{t-1} + u_t$ ve yığılımlı rassal yürüyüş olan $y_t = \delta + y_{t-1} + u_t$ 'dir. Burada seçilen süreçlerin hiçbiri ortalama açısından durağanlık göstermez. Bunlara ek olarak bir de $y_t = \phi_1 y_{t-1} + u_t$ veri üretim sürecini ele alalım. Rassal yürüyüş ailesinin tamamının değişke açısından durağan olmadığını da göstermiştik. Bunları kullanarak, serilerin şoklara verdiği tepkileri, kısmi ve kısmi olmayan ardışık bağımlılık fonksiyonlarının kısa dönem ve uzun dönem davranışlarını incelemeye çalışacağız. Bu amaçla sıfır ortalamalı sabit değişkeli bir beyaz gürültü serisinden rassal olarak 1000 adet gözlem seçilmiş ve aynı hata terimleri kullanılarak aşağıdaki veri üretim süreçlerine uyan seriler üretilmiştir.

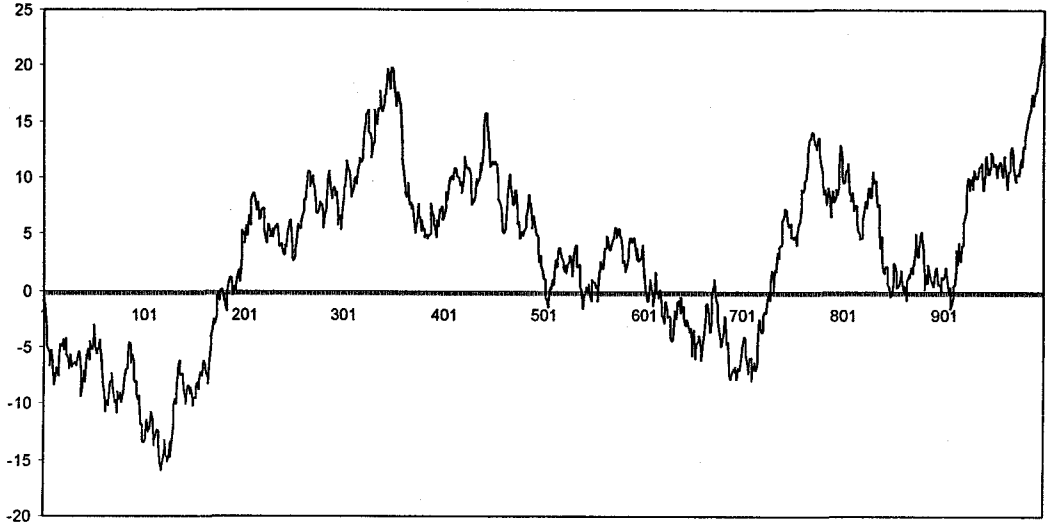
Üretilen serilerin ilki $y_t = 0.2t + \varepsilon_t$ veri üretim sürecine uyan deterministik eğilim sergileyen bir örnektir. İkincisinin veri üretim süreci $y_t = 0.2y_{t-1} + \varepsilon_t$ formunda olan bir durağan AR(1) serisidir. Üçüncü seri ise (2.21) ile gösterilen saf rassal yürüyüştür. Sonuncu seri ise yığılımlı rassal yürüyüş serisidir, geride yatan veri üretim süreci $y_t = 0.2 + y_{t-1} + \varepsilon_t$ formundadır.

Aşağıdaki şekilde deterministik eğilim sergileyen seri ile yığılımlı rassal yürüyüş serisinin zaman içindeki hareketleri gösterilmektedir. Kabaca yapılan bir incelemeyle deterministik eğilimli serinin zamana bağlı olarak düzenli bir şekilde arttığı ve bu düzgün doğrunun çevresinde küçük sapmalara sahip olduğu görülebilir. Yığılımlı rassal yürüyüş serisi ise önceki benzer bir harekete sahip olsa da çok daha fazla dalgalanmaktadır.

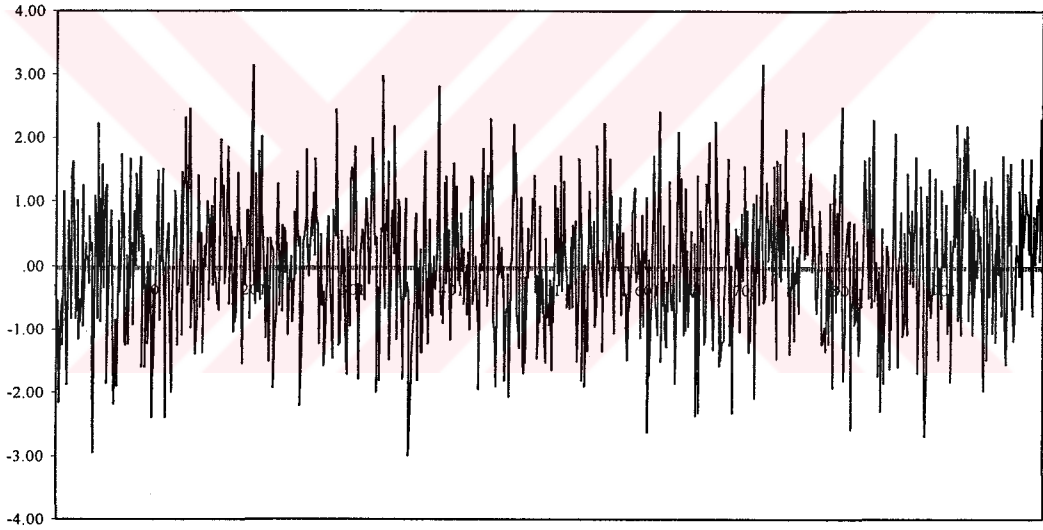


Şekil 2.1: (2.16) ve (2.20) veri üretim süreçlerine göre üretilen serilerinin zaman içindeki değişimi

Aşağıdaki iki şekil ise saf rassal yürüyüş ve AR(1) süreci ile tanımlanan serilerin zaman içindeki hareketlerini gösterir. Şekil 2.2 ile Şekil 2.3 karşılaştırıldığı zaman ilkinin kesinlikle durağan olmadığı kolaylıkla söylenebilir. Ne farklı zaman aralıklarında ortalama sabit kalıyordur ne de değişke zamandan bağımsızdır. Oysa Şekil 2.3 ile gösterilen durağan süreç sıfır ortalama etrafında rassal bir harekete sahiptir ve değişkesi de zaman için de sabit kalıyordur.

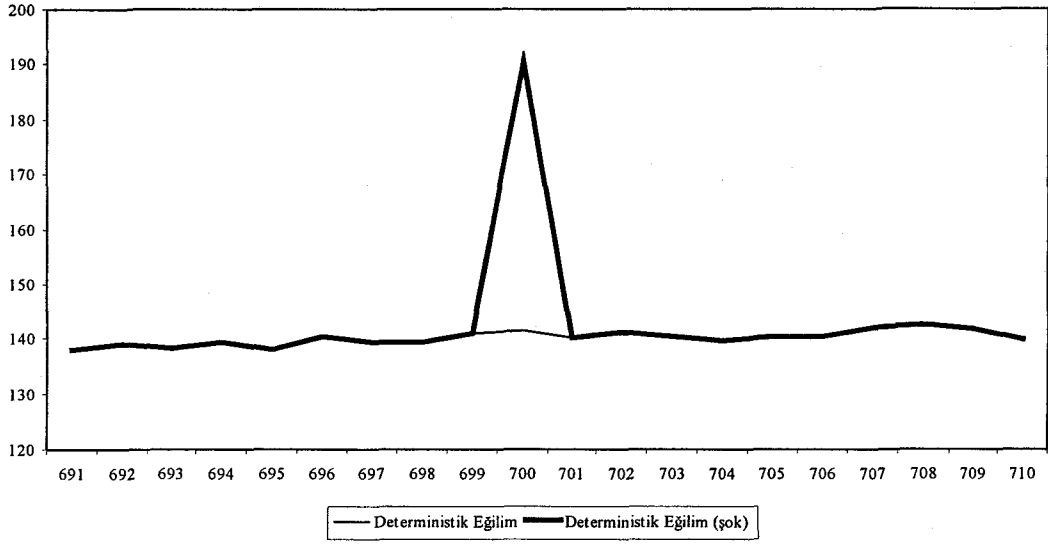


Şekil 2.2: (2.21) veri üretim sürecine göre üretilen saf rassal yürüyüş serisinin zaman içindeki değişimi



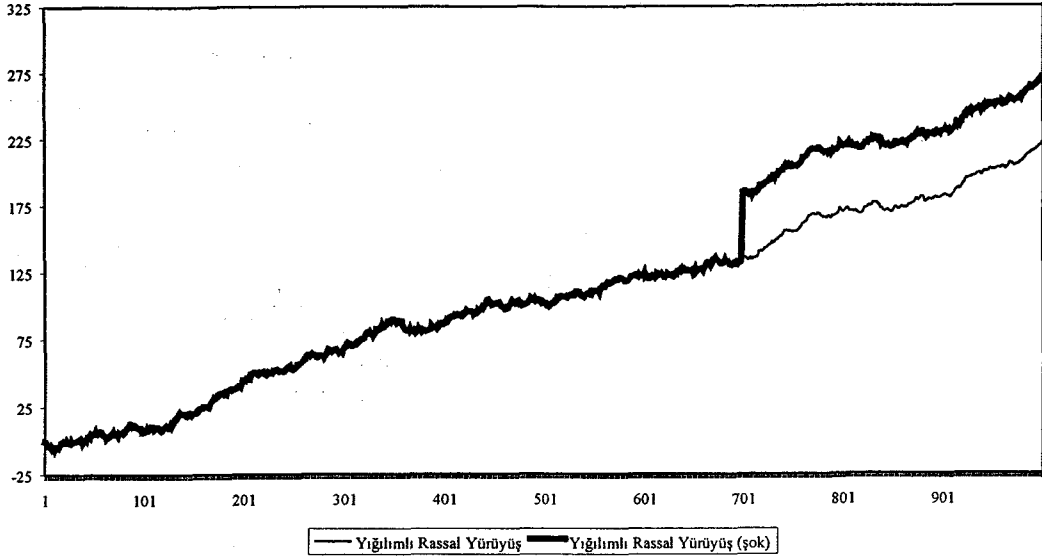
Şekil 2.3: Veri üretim süreci $y_t = 0.2y_{t-1} + \varepsilon_t$ formunda olan serinin zaman içindeki değişimi

Şimdi de serilerin yedikleri şoklara verdikleri tepkiler açısından nasıl davrandıklarını ve hafıza durumlarını inceleyelim. Serilerin tamamına $t=700$ anında bir şok verilmiş ve bundan sonraki davranışları incelenmiştir. Şekil 2.4'te (2.16) veri üretim sürecine uyan deterministik eğilimli seri yer almaktadır. Şekilden de açıkça görüldüğü gibi şok yedikten hemen sonra eski yoluna dönüp $0.2t$ etrafındaki dalgalanmasına devam etmektedir.



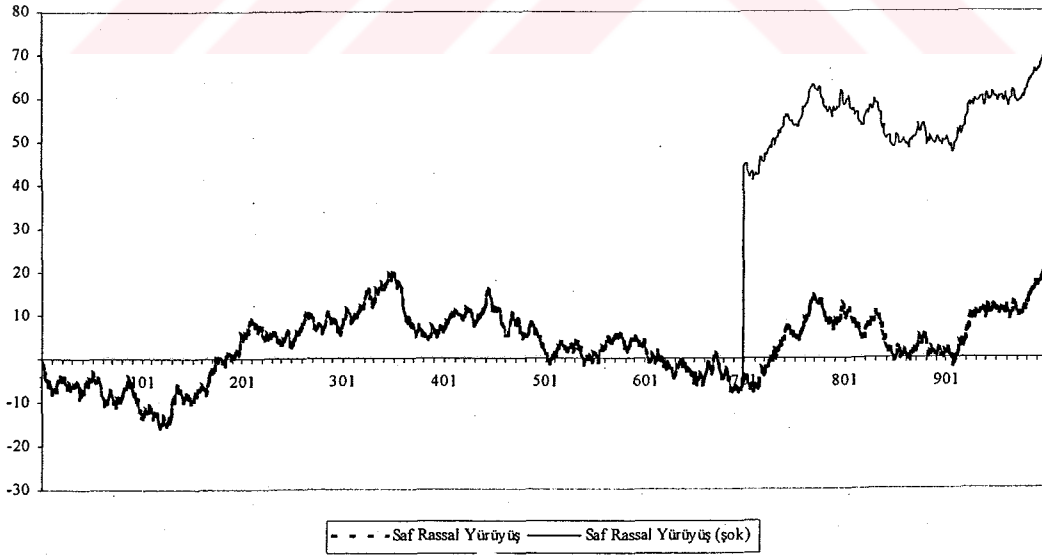
Şekil 2.4: Deterministik eğilimli serinin şoka verdiği tepki

Şekil 2.5'te veri üretim süreci yığılımlı rassal yürüyüş olan bir serinin yediği bir şoka verdiği tepki görülmektedir. Daha önce bu davranış türünü hafızasız bir yapı olarak nitelendirmiş ve şoktan sonra eski yoluna dönmediğini söylemiştik. Bu davranış kalıbı şekilde de açıkça görülmektedir. Ancak bölüntüsel bütünleşme bölümünde de tekrar değineceğimiz hafıza kavramına paralellik sağlamak amacıyla buradan sonra bu tip davranış kalıpları olan serilere, yediği şokun etkisini unutmadığı için, hafızalı yapılar adını vereceğiz. Bu durumda bunun deterministik eğilimli serilerdeki karşılığı ise hafızasız yapılar olacaktır. Böyle bir tanımlama dönüşünün nedenini çok ayrıntıya girmeden şu şekilde açıklayabiliriz. Bölüntüsel bütünleşik seriler $I(1)$ veya $I(2)$ gibi bütünleşme derecesine sahip serilere oranla çok daha uzun süre bir şokun etkisini taşırlar. O nedenle bölüntüsel bütünleşik seriler uzun süreli hafızaya sahip seriler olarak bilinirken, diğerleri kısa süreli hafızaya sahip seriler olarak anılırlar.



Şekil 2.5: Yığılımlı rassal yürüyüş serisinin şoka verdiği tepki

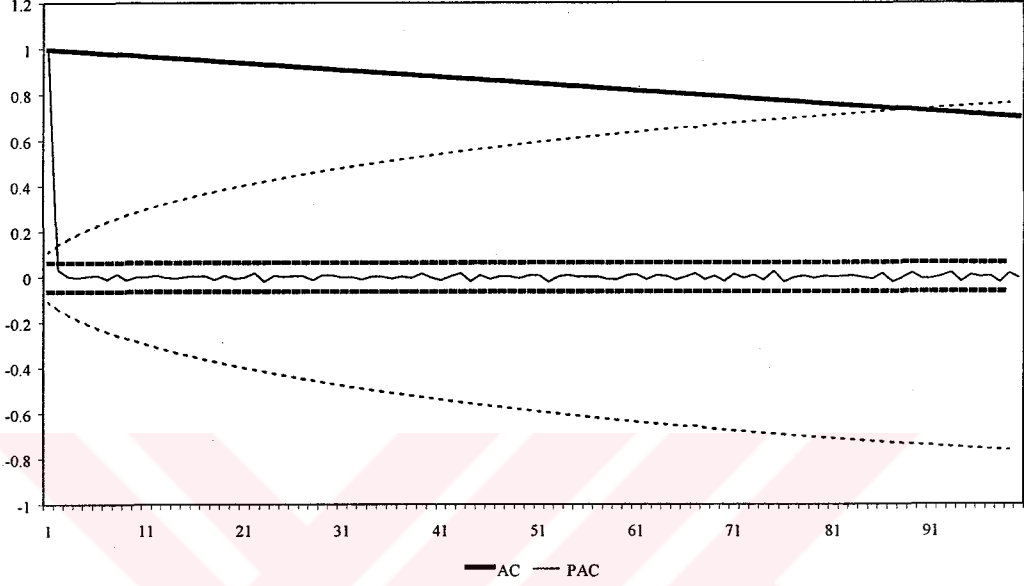
Son olarak saf rassal yürüyüş veri üretim sürecine sahip serinin şok karşısında nasıl davrandığını inceleyelim. Şekil 2.6'da karşılaşılan durumu şu şekilde özetlemek olasıdır. $t=700$ anında yenilen şokla beraber seri yolundan çıkmış ve yeni bir düzeyde şok anından önceki hareketine devam eder olmuştur. Bu durum izleyen alt bölümde kalıcı ortalama düzey kayması olarak açıklanacaktır.



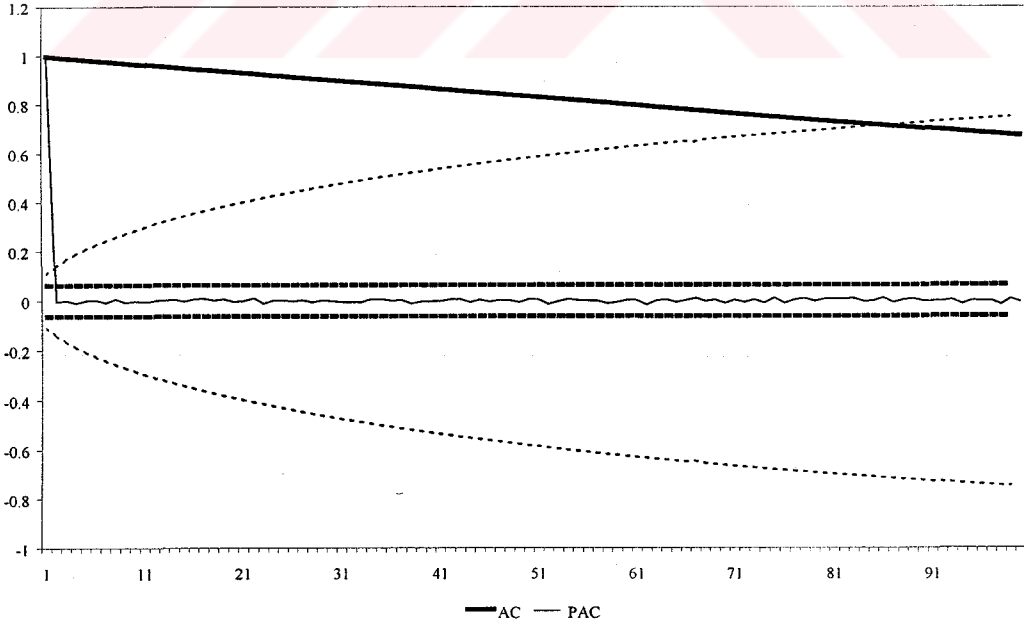
Şekil 2.6: Saf rassal yürüyüş serisinin şoka verdiği tepki

Serilerin zaman içindeki davranışlarının ve olası şoklara karşı verdikleri tepkilerin incelenmesinden sonra denklem (2.9) veya (2.10) ile tanımlanan ardışık bağımlılık

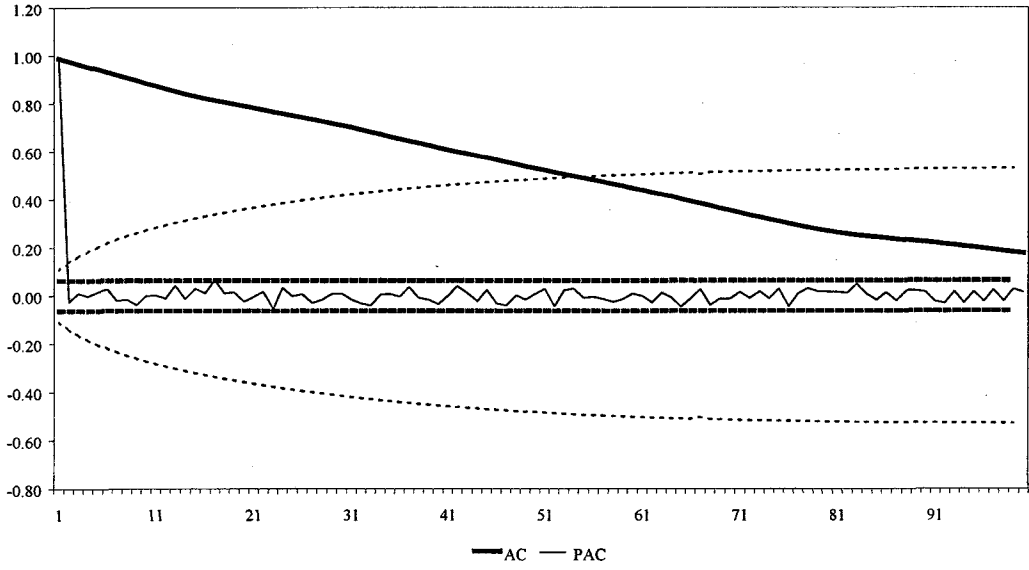
fonksiyonlarının yapısı ele alınacaktır. Bir sonraki alt bölümde incelenen birim kök sınamalarının kullanılmaya başlamasından önce bir serinin durağan olup olmadığı bağım-çizimleri (correlogram) yardımıyla belirlenmekteydi. Şekil 2.7 ve Şekil 2.8 dikkatle incelendiği zaman hemen hemen birbirinin aynı olduğu görülebilir. Oysa iki bağım-çizim birbirinden apayrı iki eğilime sahip zaman serisinden elde edilmiştir.



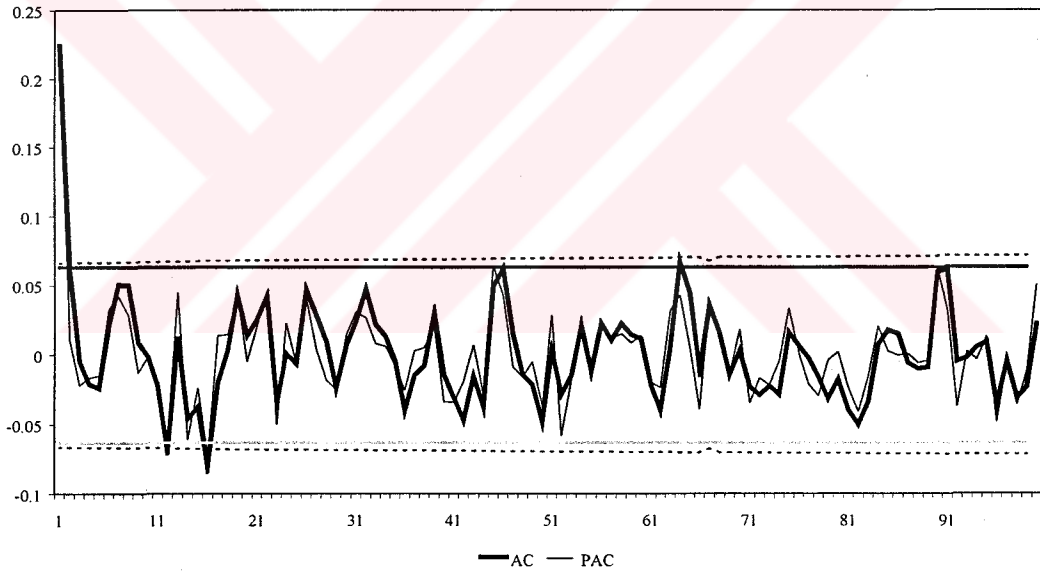
Şekil 2.7: Deterministik eğilimli serinin kısmi ve tam bağım-çizimi



Şekil 2.8: Yığılımlı rassal yürüyüş serisinin kısmi ve tam bağım-çizimi



Şekil 2.9: Saf rassal yürüyüş serisinin kısmi ve tam bağımlılık çizimi



Şekil 2.10: Durağan AR(1) sürecinin kısmi ve tam bağımlılık çizimi

Yukarıdaki şekiller incelendiği zaman kolaylıkla görülecektir ki durağan olmayan bir seri kendini ardışık bağımlılık fonksiyonunun davranışından belli etmektedir. Durağan olmama geçmiş dönemlerle sıkı bir bağa sahip olma olarak düşünüldüğünde bunun nedeni de ortaya konmuş olur. Geleneksel zaman serisi çözümlemesi birim kök ve diğer durağanlık testlerinin yokluğunda bir serinin durağan olup olmadığını bu şekiller yoluyla anlamaktaydı. ACF yavaş yavaş sıfıra inerken, PACF'nin hızla sıfıra

inmesi serinin eğilim sergilediğinin en büyük kanıtı olarak kabul edilmekteydi ve fark alma işlemi ile durağanlaştırmanın gerekli olduğunu gösterirdi. Ancak şekillerde görülen üç farklı durağan olmadığı bilinen serinin ayrımını yapmak imkansızdı. Şekil 2.7 ve Şekil 2.8'i daha ayrıntılı ele alalım. Box-Jenkins ARIMA tekniğinde ardışık bağlanım fonksiyonunun modelin MA katsayıları hakkında, kısmi ardışık bağlanım fonksiyonunun ise AR katsayıları ile ilintili olduğu bilinmektedir. Şekil 2.7'de de Şekil 2.8'de de gecikmenin bir olduğu durumda aldığı değer bire çok yakındır. Bu bize yığılımlı rassal yürüyüş veya birim kök durumunu mu gösterir yoksa deterministik eğilimin bir işareti midir? Bu ayrımı sadece ardışık bağlanım ya da kısmi ardışık bağlanımlara bakarak yapmak imkansızdır. İki veri üretim sürecinin de ardışık bağlanım fonksiyonu monoton olarak azalmakta, kısmi ardışık bağlanım ise ikinci gecikmeden başlayarak sıfır dolaylarında belli bir kalıba uymayan hareketler yapmaktadır. Ancak birim kök testlerinin yazına girdiği andan başlayarak artık kolaylıkla biliyoruz ki saf rassal yürüyüş veri üretim sürecine sahip bir serinin ardışık bağlanım fonksiyonu düzeyde üstel olarak azalan bir yapı sergilemektedir, veya yığılımlı rassal yürüyüş serileri monoton olarak azalan bir ardışık bağlanım fonksiyonuna sahiptir. Artık zaman serisi modellemesi ile uğraşanların ellerinde çok daha güçlü bir araç olan birim kök testleri vardır. Bu nedenle geleneksel yöntemler sadece genel bir bilgi edinmek amacıyla kullanılır hale gelmiştir. Ama biz yine de bu konuya yoğun bir şekilde değinmeye çalıştık çünkü bölüntüsel bütünleşik serileri bütünleşik serilerden ayırt etmek için yine bu yöntemlere başvuracağız.

2.4 Birim kök sınamaları

Ekonometrisyenler ve zaman serisi çözümlemesi yapanlar ekonomik büyüklüklerin eğilim yapılarını modellerken birim köklerle yüz yüze gelmek zorunda kalabilirler. Bunu yakalayabilmek için çeşitli sınamalar geliştirilmiştir. Sadece ACF ve SACF şekillerine bakarak serinin durağan olup olmaması kolaylıkla görülebilirken birim köke sahip olup olmadığını anlamak hiç de kolay değildir. Önceki bölümde kısaca söz edildiği gibi zaman serilerinin önemli bir özelliği, olasılıklı eğilim durumunun özel bir hali olan, AR modelinin veya ARMA modelinin AR bölümünün $(1-L)$ bileşenini içermesidir. Başka bir deyişle, AR polinomu aşağıdaki şekilde parçalanabilir.

$$\begin{aligned}
\phi_p(L) &= 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p \\
&= (1-L)(1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \dots - \alpha_{p-1} L^{p-1}) \\
&= (1-L)\phi_{p-1}(L)
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Bir zaman serisinin veri üretim sürecinin birim kök içerip içermediğinin sınanması ilk olarak Dickey-Fuller (1979) tarafından önerilmiştir. Yazarlar tarafından geliştirilen sınamalar üç farklı veri üretim sürecine uyar. Bunlardan ilki $y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$ formundadır ve saf rassal yürüyüş sıfır ön savını sıfır ortalamalı AR(1) almaşığına karşı sınar. Kullanılan sınama denklemi

$$\Delta y_t = (\rho - 1)y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{2.24}$$

formundadır. Başka bir veri üretim süreci ise $y_t = \beta + \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$ olabilir. Burada saf rassal yürüyüş ön savı sıfır ortalamalı olmayan AR(1) sürecine karşı sınanır. Kullanılan sınama denklemi

$$\Delta y_t = \beta + (\rho - 1)y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{2.25}$$

formundadır. Dickey-Fuller sınamaları olarak bilinen bu denklemler ardışık bağımlılık sorunundan dolayı yanıltıcı sonuçlar verebilir. Bu nedenle geliştirilmiş DF (ADF) sınamalarının kullanılması önerilmiştir. (2.24) ve (2.25) denklemleri açıklayıcı değişken olarak serinin birinci farkının gecikmeli değerlerini içerir.

(2.24) ve (2.25) denklemlerinden görülebileceği gibi ADF sınaması deterministik bileşen içermez. Ancak önceki bölümlerde bir serinin iki eğilim türünü de aynı anda içerebileceği söylenmişti. Bu bağlamda ADF sınama denklemi deterministik bileşeni içerecek şekilde genişletilebilir.

$$y_t - \mu - \delta \cdot t = \phi_1(y_{t-1} - \mu - \delta \cdot (t-1)) + \varepsilon_t \tag{2.26}$$

Denklem (2.26) şu şekilde de yazılabilir:

$$y_t = (1 - \phi_1)\mu + \phi_1\delta + (1 - \phi_1)\delta \cdot t + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.27)$$

$\phi_1 \neq 1$ koşulunda ifade

$$y_t = \mu^* + \delta^* \cdot t + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.28)$$

olarak yazılır. Oysa $\phi_1=1$ koşulu sağlanmış olsaydı (2.27)

$$y_t = \delta + y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.29)$$

halini alırdı. Bu durumda ADF sınama denklemi

$$\Delta y_t = \mu^{**} + \delta^{**} \cdot t + (\rho - 1)y_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t \quad (2.30)$$

olarak kullanılır. Bu da üçüncü tip veri üretim sürecidir. Yığılımlı rassal yürüyüş ön savını eğilim durağan AR(1) sürecine karşı sınar. Tüm bu sınama denklemlerinin sonucunda tahmin edilen y_{t-1} değişkeninin katsayısı $H_0: \rho=1$ sıfır ön savı kurularak değerlendirilir. Ön savın başka bir gösterimi H_0 : Birim kök yoktur (veya seri durağandır) şeklinde olabilir. Karar kuralı bilinen t -sınamasına benzer ancak kritik değerler Student- t dağılımınıninkilerle aynı değildir. Söz konusu kritik değerler MacKinnon (1991) ve Davidson ve MacKinnon (1993) tarafından hesaplanmıştır.

ADF ve DF elbette ekonometri yazını tarafından yalnız bırakılmamış, çok sayıda sınama önerilmiştir. Phillips-Perron (1988) bunların en çok kullanılanlarından. Kwiatkowski ve diğ. (1992) KPSS olarak anılan bir başka sınama önermişlerdir. Bu sınama birim kök sınaması olarak değil durağanlık sınaması olarak bilinir. DF tipi sınamalar olasılıklı eğilimi deterministik eğilimle karşılaştırır ve birim kök ön savı reddedilemediği zaman olasılıklı eğilim modelini deterministik eğilim modeline tercih ederler (Franses, 1998). Bu bağlamda KPSS farklı bir yaklaşım sergiler ve durağanlığı sıfır ön savı olarak alır. Deterministik eğilim sergileyen bir zaman serisi için

$$S_t = \sum_{i=1}^t \hat{e}_i \quad (2.31)$$

kısmi toplam serisinin, deterministik eğilim için I(1), olasılıklı eğilim için I(0) olduğu düşüncesine dayanır. Burada kalıntılar $y_t = \hat{\tau} + \hat{\delta} \cdot t + \hat{e}_t$ yardımcı regresyonundan üretilmektedir. (2.31) denklemi $S_t = S_{t-1} + e_t$ şeklinde yazılabileceği için tüm kalıntılar sıfır olmadığı halde değişkenin sıfır olması olasılıklı eğilimin olmadığını gösterir. Bir sına istatistiği elde etmek için

$$\eta = n^{-2} \sum_{t=1}^n S_t^2 \quad (2.32)$$

ifadesi ele alınır ve durağanlık sıfır ön savı olasılıklı eğilim karşısına göre aşağıdaki gibi hesaplanan bir sına istatistiği üzerinden hesaplanır.

$$\hat{\eta} = \frac{n^{-2} \sum_{t=1}^n S_t^2}{s^2(l)} \quad (2.33)$$

Burada $s^2(l)$ e_t 'nin uzun dönem değişkesi

$$s^2(l) = n^{-1} \sum_{t=1}^n \hat{e}_t^2 + 2n^{-1} \left[\sum_{j=1}^l w(j,l) \sum_{t=j+l}^n \hat{e}_t \hat{e}_{t-s} \right] \quad (2.34)$$

$w(j,l)$ ağırlığı $1-j/(l+1)$ olarak hesaplanır. Başka ağırlıklar kullanmak da olasıdır. Burada $l = n^{1/2}$ olarak seçilir. Benzetim çalışmaları bunu destekler. Söz konusu sına tek kuyrukta yapılır. Şu ana kadar anlatılan birim kök ve durağanlık sınamaların tümü mevsimsel dalgalanma ve aşırı değer içermeyen zaman serileri varsayımı altında incelenmiştir. Ancak gerçek hayat verilerinde bu şekilde sorunsuz veri setleri ile karşılaşmak çok da kolay değildir. Mevsimsel dalgalanma gösteren serilerle çalışılması durumunda önce serinin bu etkiden arındırılması ve sonra durağanlık sınamalarının yapılması bir çözüm yolu olarak görülebilir. Ancak mevsimsel birim köklerin olası varlığı bu yolla göz ardı edilmiş olur. Yazında üçer aylık ve aylık sıklıklarla ölçülen büyüklükler için Hylleberg ve diğ. (1990) tarafından geliştirilen mevsimsel birim kök sınamaları kullanılmaktadır. Mevsimsel

hareketliliğe sahip seriler arasında yapılacak çözümlemelerde karşılaşılan düzmece regresyon durumu geride yatan veri üretim sürecindeki, klasik anlamdaki birim kökler yerine –ki HEGY (1990) yöntemi üçer aylık sıklıkta ölçülen veriler için $(1-L)(1+L)(1-iL)(1+iL)$ dalgalarını dikkate alır- mevsimsel birim köklerden de kaynaklanabilir. Burada $(1-L)$ klasik birim kökü karşılarken $(1+L)$, $(1-iL)$ ve $(1+iL)$ mevsimsel bütünleşme bilgisinin taşındığı dalgalardır. Sözü edilen sorunlardan biri de aşırı değerlerin, ortalama kaymalarının ve değişen eğilim yapılarının varlığında birim kök sınamalarıdır. Perron (1989, 1990) ortalama düzey kaymalarının ve varlığı yadsınan aşırı değerlerin aslında durağan olmayan serileri durağanmış gibi göstereceğinden bahseder. Franses ve Haldrup (1994) toplamsal aşırı değer içeren serilerde birim kök sınama denkleminin söz konusu olayın gerçekleştiği tarihe konulan bir kukla değişkenle geliştirilmesi gerektiğini söyler. Perron ve Vogelsang (1992) ortalama düzey kaymalarının kukla değişkenlerle tanımlanması gerektiğini ileri sürer ve bu tip sınama denklemleri için kritik değerleri üretir.

3. ZAMAN SERİLERİNDE SIKLIK ALANI YAKLAŞIMI

Zaman serilerinin sıklık alanında yapılan çözümlemesi aynı zamanda spektral çözümleme olarak da anılır. Bu bölüm, çalışmada kullanılan spektral çözümleme tekniklerine ve sıklık alanına giriş niteliği taşımaktadır. Okuyucuya genel bir bilgi vermeyi amaçlar, ileri boyutları kapsam dışında tutulmuştur. Çünkü sıklık alanında çözümleme –her gün kullanılan- zaman alanı yaklaşımının alması olduğu için zaman serisi ekonometrisi kadar geniş bir konudur. Söz edilen nedenlerden dolayı bu bölümde spektral analiz genel hatlarıyla incelenecek ve zaman alanında yapılan çözümlemenin yalnız durağanlık açısından sıklık alanındaki karşılıkları ele alınacaktır.

Hiç de derinlemesine olmayan gözlemler emek sunumu ile ücret, para sunumu ile faiz oranı ve gayrimenkul piyasa getirileri ile tüketim arasında bir ilişki olduğunu söyleyecektir. Peki bu ilişkinin gerçek yapısı nasıldır? Bu üç değişken çifti farklı sıklıklarda ilişkilidir, denilebilir. Ücretlerdeki geçici bir artış emek sunumunda büyük bir artışı tetikleyebilir. Kalıcı bir artışın ise daha düşük bir etkisi olabilir. Para sunumu ile faiz oranları arasında kısa dönemde ters yönlü bir ilişki varken uzun dönemde bu ilişki aynı yönlü olmaktadır. Yüksek sıklıkta gayrimenkul piyasası getirilerinin tüketim değişkeni üzerinde hiçbir etkisi yokken, uzun dönemde bu iki değişkenin eşbütünleşik olduğu söylenebilir. Bu kısa örnekten yola çıkarak milli geliri ele alalım. Milli gelirin değişkenliğinin kaynağı nedir, sorusunu sormak olasıdır. Bu soruya verilecek cevaplar ise farklı olacaktır. En düşük sıklıktaki, başka bir deyişle en uzun çevrimdeki değişkenliğinden bahsedildiği zaman uzun dönemdeki büyümeden bahsetmekteyizdir ve gelişme ekonomistlerinin alanına girilmiş olur. Orta sıklıkta olduğu zaman iş çevrimlerinden bahsedilmektedir ve makroekonomistlerin alanındadır. Yüksek sıklıktaki değişkenlik kısa dönemli dalgalanmaları karşılar ve teknik çözümlemecilerin peşine düştüğü bir konudur.

Neden ve ne zaman spektral çözümlemenin tercih edildiği ayrı bir tartışma konusudur. Genellikle spektral çözümleme farklı boylardaki mevsimsel

dalgalandırmaları belirlemeye çalışırken, zaman alanında yapılan çalışmalar bu dalga boyları hakkında önsel bilgiye sahip olunduğu zaman kullanılmaktadır. Peki zaman ve sıklık alanı yaklaşımlarını çözümlemede nasıl kullanırız? Zaman alanı söz konusu olduğunda $\{(y_t)\}_{t=1}^T$ serisi budanmış bir seridir ve belli bir zaman penceresinden incelenir. Sıklık alanında ise $\{y(\omega)\}_{\omega=0}^{2\pi}$ formundaki veri filtre edilerek belli sıklık aralıkları gözlem altına alınır. O halde kendini yineleyen periyodik bir hareketin varlığı bulunamaz ise serinin bir beyaz gürültü olduğu söylenebilir.

3.1 Spektral gösterim

Bir durağan zaman serisinin spektral gösterimi, onu ilişkisiz rassal katsayıları olan sinusoidal bileşenlerin toplamı olacak şekilde parçalara ayırır. Aslında bir anlamda serinin ortak değişim fonksiyonu sinusoidlere ayrılmaktadır. Spektral çözümlemenin temeli herhangi bir periyodik yapının sinüs ve kosinüs dalgaları ile modellenebileceği gerçeğine dayanmaktadır. Bu tanımlamayı biraz daha açmaya çalışalım. Spektral çözümleme bir zamana serisinin periyodik davranış kalıplarını incelemeyi amaçlar. Çözümlemenin amacı periyodik bileşenleri olan karmaşık bir zaman serisini geri planda yatan belli dalga boylarındaki sinusoidal fonksiyonlara ayırtırmaktır. Bu anlamda “spektrum” ifadesi bu tür bir çözümleme için uygun bir eğretilime olmaktadır. Bir güneş ışını ile çalıştığımızı düşünelim. İlk bakışta farklı dalga boylarındaki ışığın rassal (beyaz gürültü) bir toplamı olarak gözükür. Ancak bu ışığın önüne bir prizma yerleştirdiğimiz zaman farklı dalga boylarındaki ışığı veya ışığı oluşturan periyodik bileşenleri birbirinden ayırabiliriz. Aslında bu teknik yardımıyla ışığın farklı kaynaklarını görür hale gelmekteyizdir. O halde, geri plandaki önemli periyodik bileşenleri belirlemekle merak edilen bir konu hakkında bir şeyler öğrenmiş oluruz. Bu bağlamda bir zaman serisine spektral çözümleme uygulamak, serinin dalga boylarını ve geri plandaki periyodik hareketlerin önemini belirlemek için bir prizmadan geçirmek olacaktır. Başarılı bir girişimle araştırmacı, zaman serisinin az sayıdaki yinelenen farklı uzunluklara sahip çevrimleri ortaya çıkarabilir.

Bir $\{x_t\}$ serisi

$$x_t = A \cos(\omega t + \theta) \quad (3.1)$$

ile ifade edilebilir. Burada A genliği, ω sıklığı ve θ da fazı göstermektedir. Periyot ise λ ile gösterilir ve $2\pi/\omega$ ile hesaplanır. $\omega=0$, λ 'nın sonsuz olmasına neden olur ve uzun dönem hareketi gösterir. $\omega=\pi$ ise periyodun 2 olmasına karşılık gelir ve yakın dönem, daha doğrusu olası en küçük çevrimin değeri olur.

Bir sinüs ya da kosinüs fonksiyonunun dalga boyu (sıklık) birim zamandaki çevrim sayısı (n) olarak ifade edilir. Örneğin bir postanede bulunan mektup sayısı yılda 12 çevrime sahiptir. Her ayın ilk günlerinde faturalar nedeniyle çok miktarda mektup postalanır, ay ortasına doğru bu sayı azalır ve ay sonuna doğru yeniden artar. Bu nedenle her ay postanede bulunan mektup sayısı bir tam çevrim yapacaktır. O halde, eğer çözümleme birimi bir yıl ise, yılda on iki çevrim gerçekleştiği için n on ikiye eşit olur.

Bir sinüs ya da kosinüs fonksiyonunun periyodu olan T bir tam çevrim için gerekli olan süre olarak tanımlanır. O halde sıklığın karşılığıdır veya $T=1/n$ olur, denilebilir. Postane örneğine geri dönersek yıl bazında ele alınan aylık çevrim $1/12=0.0833$ olur ve serinin 0.0833 yıl uzunluğunda bir periyodu olduğu söylenebilir.

Daha önce de belirtildiği gibi spektral çözümlemenin amacı asıl seriyi geri planında yatan farklı sıklılardaki sinüs ve kosinüs fonksiyonlarına parçalamaktır. Bunu gerçekleştirmenin bir yolu çoklu regresyon modeli kurmaktan geçer. Bağımlı değişken gözlemlenen zaman serisi, bağımsız değişkenler ise tüm olası kesikli sıklıklardır. Böyle bir regresyon modeli aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$y_t = a_0 + [a_k \cos(\lambda_k t) + b_k \sin(\lambda_k t)]; k = 1, \dots, q \quad (3.2)$$

Denklemden λ birim zamandaki radyan cinsinden ifade edilen sıklıktır. O halde $\lambda = 2\pi\nu_k$ ve $\nu_k = k/q$ olmaktadır.

Burada önemli olan farklı boylardaki sinüs ve kosinüs fonksiyonlarını uygulamadaki hesaplama sorununu kavramaktır. Kosinüs katsayısı a_k ve sinüs katsayısı b_k ilgili fonksiyonların veri ile ne derece ilişkili olduğunu gösteren regresyon katsayılarıdır.

Toplamda q farklı sinüs ve kosinüs fonksiyonundan bahsetmekteyiz. Sezgisel olarak serindeki gözlem sayısından daha fazla sinüs ve kosinüs fonksiyonuna sahip olamayacağımız açıktır. Daha fazla ayrıntıya girmeden, eğer zaman serisinde N gözlem varsa $N/2+1$ kosinüs fonksiyonu ve $N/2-1$ sinüs fonksiyonu olacağı söylenebilir. Başka bir deyişle, gözlem sayısı kadar farklı sinusoidal dalga olacaktır. Böylelikle seriyi geri planda yatan fonksiyonlar cinsinden özdeş-baskılamak olası hale gelecektir.

Özetlemek gerekirse spektral çözümleme farklı sıklıklardaki sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının gözlemlenen zaman serisi ile ilişkisini belirlemektedir. Eğer güçlü bir ilişki ortaya çıkarılmışsa (sinüs veya kosinüs fonksiyonunda) araştırmacı söz konusu sıklıkta güçlü bir periyodik hareket olduğu kararına varabilir.

Spektral çözümleme ele alınırken yukarıdaki yapısal denklem karmaşık sayılarla ifade edilir. Biz de burada bu gösterimi kullanmaktayız. Bu durumda katsayı kestirim süreci bir serinin gerçek ve hayali parçalara (real and imaginary parts) ayrıldığı Fourier dönüşümü olmaktadır. O halde, sezgisel olarak, sinüs ve kosinüs fonksiyonlarını içeren denklem (3.2) karmaşık sayılarla da yazılabilir. Aslında bu şekilde yapılan hesaplamalar daha düzenli ve kolay olmaktadır.

Bu yaklaşım tercih edildiğinde spektral çözümlemede karmaşık trigonometri kullanır. Aşağıda bahsedilen eşitlikler ve tanımlar bölüm içerisindeki konuların ve geçişlerin anlaşılması için gerekli ve yeterlidir.

$e^{i\omega}$ gibi bir fonksiyonun Taylor açılımı ile

$$e^{i\omega} = \cos \omega + i \sin \omega \quad (3.3)$$

olduğu bulunabilir.

$\cos^2 \omega + \sin^2 \omega = 1$ denkliği kullanılarak

$$\cos \omega = \frac{1}{2}(e^{i\omega} + e^{-i\omega}) \quad (3.4)$$

$$\sin \omega = \frac{1}{2}(e^{i\omega} - e^{-i\omega}) \quad (3.5)$$

olduğu görülebilir.

Bir de karmaşık sayılarla ilgili şu özellikten bahsedilebilir.

$$a + bi = ce^{i\omega} \quad (3.6)$$

Burada $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ ve $\omega = \arg \tan(b/a)$ olmaktadır.

Spektral çözümlemenin kuramsal açıklamalarına başlamak için $\{(y_t)\}_{t=-\infty}^{\infty}$ olan sıfır ortalamalı durağan bir süreç ele alalım. Ortak değişke γ_k daha önceki bölümde (1.8) ile tanıtılmıştı. γ_k serisinin kesinlikle toplanabilir olduğu ve bu toplamın sonlu olduğu varsayılmaktadır. Bu durum alt bölüm 2.2'de ortak değişke durağan süreçler anlatılırken değinilmiş olan 2.12-2.14 koşullarının farklı bir gösterimidir. Bir zaman serisinin ortak değişke üretim fonksiyonu

$$\gamma(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k z^k \quad (3.7)$$

ile gösterilebilir. Burada $z = e^{i\omega}$, ω herhangi bir gerçekte sayıdır. Bu fonksiyon 2π ile bölündüğü zaman spektrum veya spektral yoğunluk fonksiyonu elde edilir. Aşağıdaki eşitlik çalışmanın ilerleyen bölümlerinde çokça karşımıza çıkacaktır.

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{-ik\omega} \quad (3.8)$$

Spektral yoğunluk fonksiyonu bir zaman serisi sürecinin ortak değişke dizisine çok benzer bir özelliğidir. γ_k gibi ortak değişke dizisine sahip bir zaman serisi için spektral yoğunluk herhangi bir ω değeri için hesaplanabilir. Ortak değişkelerin, sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının bakışıklık özelliği ve kutupsal değerler kullanılarak aşağıdaki basitleştirilmiş yoğunluk fonksiyonu üretilebilir.

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left[\gamma_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \cos(\omega k) \right], \quad \omega \in [0, \pi] \quad (3.9)$$

Granger ve Newbold (1977) spektral yoğunluk fonksiyonunun gerçekte ve sıfırdan büyük olduğunu göstermişlerdir.

Bunların yanı sıra basit trigonometri k bir tamsayı iken $\sin(\omega + 2\pi k) = \sin(\omega)$ olduğunu, kısaca $(-\pi, \pi)$ aralığı dışında periyodik olduğunu gösterir. Aynı zamanda (3.8) denklemi için $f(\omega) = f(-\omega)$ olduğu da görülebilir. Bu nedenle $f(\omega)$ genellikle $0 \leq \omega \leq \pi$ aralığında çizilir.

Şimdi de spektrum ve ortak değişkenler arasındaki bağlantıdan bahsedelim.

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) \cos(\omega k) d\omega \quad (3.10)$$

(3.10) ile gösterilen eşitlik, ortak değişken dizileri ve spektral yoğunluk fonksiyonlarının bir zaman serisine bakılabilecek iki farklı pencere olduğu anlamına gelmektedir (Greene, 2000). Birincisi zaman alanı yaklaşımını ikincisi ise sıklık alanı yaklaşımını karşılar. O halde daha teknik bir söyleyişle, γ_k dizisi ile $f(\omega)$ fonksiyonu bir Fourier dönüşüm çiftidir, denilebilir. Biri dolaysız bir şekilde diğerinden türetilir. Bu durumda γ_k dizisini dikkate alan zaman alanı çözümlemesi ile $f(\omega)$ fonksiyonunu kullanan sıklık alanı çözümlemesi kuramsal olarak eşittir.

Bu noktada neden karmaşık sayılar ve Fourier dönüşümlerinin kullanıldığı sorusu ortaya çıkabilir. Granger ve Newbold (1977) sıklık alanında yapılan işlemlerin sonucunda bulunanların çok daha kolaylıkla kanıtlandığını ve yorumlandığını söylerler. Ancak bu gündelik model kullanıcıları için geçerli olmayabilir. Burada sıklık alanı tekniğinin savunusunu vermeyeceğiz ama bazı durumlarda kullanılması gerektiği inancını taşımaktayız. Örneğin $z = x\Im y$ gibi karmaşık bir işlem tanımlayalım. Bunu zaman alanında yapmak olasıdır. Ancak bunun zorluğu biliniyorsa ve $\Im'$ -sıklık alanına dönüştürülmüş bileşen- çok daha kolay ele alınabiliyorsa, x ve y de sıklık alanına çevrilip $z' = x'\Im' y'$ işlemi yapılır. Sonra bulgu yeniden zaman alanına çevrilebilir.

Bütün zaman serileri gerçek sayılardan oluşurken gösterimlerde karmaşık sayıların kullanımına gelirse Cochran'e (1997) göre aslında bunun gerekli olmadığını görürüz. Bütün işlemler gerçek sayılar kullanılarak yapılabilir. Yine de, karmaşık sayılarla çalışmak daha kolaydır. Bunun nedeni gerçek sayılarla işlem yaparken aslında iki gerçek büyüklüğü –genlik ve faz- dikkate alıyoruzdur. Karmaşık sayılar kullanıldığında ise gerçek ve hayali bölümler tek bir simge altında toplanmaktadır. Cochran (1997) bunu

$$y_t = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x(\omega)| \cos(\omega t + \phi(\omega)) d\omega \quad (3.11)$$

eşitliği olan ters Fourier dönüşümü ile açıklar. Bu ifade de genlik $|x(\omega)|$ gerçek sayısı ile ve her sıklıktaki faz bileşenini ise $\phi(\omega)$ ile gösterilmektedir. Ancak karmaşık sayılı halinde ω sıklığı için $|x(\omega)|$ 'nin büyüklüğü genliği, fazı ise faz bileşenini karşılamaktadır. Böylelikle incelemeye alınan iki değer tek değere indirgenmiş olur.

Şimdi de $f(\omega)/\gamma_0$ fonksiyonunu ele alalım. Sıklık $[-\pi, \pi]$ aralığında ve $k=0$ iken $f(\omega) > 0$ olduğundan

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\omega)}{\gamma_0} d\omega = 1 \quad (3.12)$$

eşitliği bulunabilir. Bu ifade bir olasılık yoğunluk fonksiyonunun özelliklerine sahiptir. Spektral çözümlemenin nasıl yorumlandığının daha iyi anlaşılabilmesi için (3.12) kullanılarak genel bir spektral dağılım fonksiyonu olan

$$F(\omega) = \int_{-\pi}^{\omega} \frac{f(\omega)}{\gamma_0} d\omega \quad (3.13)$$

tanımlanır. $F(\omega)$, ω $-\pi$ 'den π 'ye doğru giderken monoton olarak azalmayan bir fonksiyondur. Bunun yanı sıra $F(-\pi)=0$, $F(\pi)=1$ ve $1-F(-\omega)=F(\omega)$ olduğu söylenebilir. O halde (3.10) eşitliğinin karmaşık sayılarla ifade edilmiş biçimi şimdi de

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\omega} dF(\omega) \quad (3.14)$$

şeklinde yazılabilir. Denklem (3.14) ardışık bağımlılık dizisinin spektral gösterimidir (Granger ve Newbold, 1977).

Sıklık alanı yaklaşımı ile ilgili genel bilgiyi verdikten sonra bölüntüsel bütünleşme katsayısının kestiriminde çokça karşımıza çıkacak olan periodograma geçmek yerinde olacaktır.

3.2 Periodogram

Eğer $\{y_t\}$ $\chi(\cdot)$ gibi bir ortak değişke fonksiyonuna ve $f(\cdot)$ gibi bir spektral yoğunluğa sahip durağan bir zaman serisi ise $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ gözlemleri kullanılarak elde edilen $\hat{\gamma}(\cdot)$ nasıl $\chi(\cdot)$ 'nin örneklem analogu olarak düşünülüyorsa benzer şekilde $I_n(\cdot)$ ile gösterilen periodogram da $2\pi f(\cdot)$ 'nin örneklem analogu olarak düşünülebilir (Brockwell ve Davis, 1996).

Periodogramın nasıl oluştuğunu gösterebilmek için aşağıdaki karmaşık sayılar vektörünü ele alalım.

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Şimdi de $\omega_k = 2\pi k/n$ sıklıklarını düşünelim. Burada k , $[-(n-1)/2]$ ile $[n/2]$ arasındaki herhangi bir tam sayı olsun. Bu seri F_n olarak bilinir ve örneklem büyüklüğü n olan seri için Fourier sıklıkları olarak anılır. F_n , $(-\pi, \pi]$ aralığının bir alt kümesidir. Buna uyan bir şekilde n vektör bulunabilir.

$$\mathbf{e}_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} e^{i\omega_k} \\ e^{2i\omega_k} \\ \vdots \\ e^{ni\omega_k} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$e_1, \dots, e_n$ 'nin ortonormal olduğunu düşünürsek

$$\mathbf{y} = \sum_{k=-[(n-1)/2]}^{[n/2]} a_k \mathbf{e}_k \quad (3.16)$$

olarak ele alınabilir. Brockwell ve Davis (1991) aşağıdaki eşitliği kanıtlar.

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n y_t e^{-it\omega_k} \quad (3.17)$$

$\{a_k\}$ dizisi $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ serisinin kesikli Fourier dönüşümleri olarak bilinir.

(3.16) denkleminin t inci bileşeni

$$y_t = \sum_{k=-[(n-1)/2]}^{[n/2]} a_k [\cos(\omega_k t) + i \sin(\omega_k t)], \quad t = 1, \dots, n \quad (3.18)$$

olarak yazılabilir. Böylelikle (3.16)'ın, y_t 'nin $\omega_k \in F_n$ sıklıklarında sinüs dalgalarının doğrusal bir bileşimi olarak gösterilebileceği ortaya çıkar.

$\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ şeklinde bir zaman serisinin periodogramı aşağıdaki eşitlik aracılığıyla bulunur (Brockwell ve Davis, 1991, 1996).

$$I_n(\lambda) = \frac{1}{n} \left| \sum_{t=1}^n y_t e^{-it\lambda} \right|^2 \quad (3.19)$$

Eğer λ Fourier sıklıklarından, ω_k biri ise $I_n(\omega_k) = |a_k|^2$ sağlanır ve ω_k sıklığındaki periodogram değerinin aslında $a_k e_k$ ifadesinin bu kareler toplamına yaptığı katkı olduğu anlaşılır.

Şimdi de periodogramın spektral yoğunluğun, $2\pi f(.)$, bir analogu olduğunu gösterelim. (3.8)'in geçerli olduğu varsayımı altında eğer $y_1, y_2, \dots, y_n$ birer gerçek sayı ise ve ω_k –sıfır hariç- herhangi bir Fourier sıklığı ise,

$$I_n(\omega_k) = \sum_{h < n} \hat{y}_h e^{-ih\omega_k} \quad (3.20)$$

olduğu söylenebilir.

Buraya kadar anlatılan bölümü diğer yaklaşımla ele alalım. Sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının birbirinden bağımsız olduğu, başka bir deyişle dik oldukları bilinmektedir. O halde her sıklıktaki katsayılarının karelerini toplamak yoluyla periodogramı elde edebiliriz.

$$P_k = b_k^2 + a_k^2 (N/2) \quad (3.19)$$

Burada P_k periodogramın ν_k sıklığındaki değeri ve N ise serinin toplam uzunluğu olarak alınmaktadır. Periodogram değerleri, verinin, karşılık gelen sıklık veya periyottaki değişkesi (kareler toplamı) olarak yorumlanabilir.

Greene (2000) periodogramın spektral yoğunluğun doğal bir kestiricisi olduğunu söylerken istatistiksel bir sorunun varlığını da vurgular. Örneklem değişkesi ve $(n-1)$ ortak değişke hesaplanırken n gözlemle n katsayı tahmin edilmiş olur. Bu sıfır serbestlik derecesi gibi kabul edilemeyecek bir durumu ortaya çıkarır. Bunu aşmak için çeşitli yöntemler önerilmiştir. Bunlardan biri $L < n$ ortak değişke hesabına dayanan budanmış (truncated) periodogram kullanımıdır. Burada L yaklaşım olarak $2(n^{1/2})$ alınır. İkinci öneri ise bir ağırlık grubunu içerir ve gecikme penceresi kestiricisi olarak bilinir.

Diğer yaklaşımın gözünden bu sorun şu şekilde ele alınabilir. Bazı durumlarda çözümlemede kullanılan sıklıklarla serinin geri planında yatan fonksiyonların sıklıkları uyuşmayabilir. Bu gibi durumlarda söz konusu sıklığın etkisi komşu sıklıklara sızmaya başlayacaktır. Araştırmacı, aslında sadece bir güçlü sinüs ya da kosinüs fonksiyonu olmasına rağmen, iki komşu sıklıkta yüksek periodogram değerleri ile karşılaşabilir. Bu durumda yapılabilecek işlemlerden biri periodogramın

düzgünleştirmek olabilir. Bu yolla araştırmacı genel sıklık bölgelerini veya serinin periyodik hareketine katkıda bulunan spektral yoğunluğu tanımlar. Bu işlem gecikme penceresi olarak bilinir.

Uygulamada gerçek yaşam verileri ile çalışırken geri planda yatan belli sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının sıklıklarının tam anlamıyla belirlemek çok da önemli değildir. Daha doğrusu, periodogram değerleri rasgele dalgalanmalara sahip olduğu için, araştırmacı çok sayıda karmakarışık peridogram tepelerine rastlayabilir. Bu durumda, en önemli spektral yoğunluk sıklıkları bulunmak istenebilir. Bunlar serinin periyodik hareketine en fazla katkırı yapan birden çok komşu sıklığı içeren sıklık alanlarıdır. Bunların ortaya çıkarılışı, periodogramın düzgünleştirilmesi ile başarılabılır.

Spektral yoğunluk, gecikme penceresi varlığında

$$f_L(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h \leq n} w(h/n) \hat{\gamma}_h e^{ih\omega} \quad (3.20)$$

fonksiyonu ile tahmin edilir. (3.20) ifadesinde $w(\cdot)$ gecikme penceresidir, ağırlıklar olarak da anılır. Dikdörtgensel, Bartlett, Daniel, Tukey ve Parzen yazındaki gecikme pencereleridir. Bu ve periodogramın düzeltilmesiyle ilgili daha fazla bilgi için Brockwell ve Davis'e (1991) başvurulabilir.

Bu alt bölümü spektral yoğunluk fonksiyonunun güven aralıklarından bahsederek bitireceğiz. Güven aralıklarının hesabında iki farklı teknik kullanılmaktadır. Bunlardan ilki χ^2 yaklaşımıdır. Buna göre v , $\hat{f}$ 'nin denk serbestlik derecesi olmak üzere, log-spektral yoğunluğun güven aralığı seçilen anlamlılık düzeyinde

$$P[\ln \hat{f}(\omega_j) + \ln v - \ln \chi_{1-\alpha/2}^2(v), \\ \ln \hat{f}(\omega_j) + \ln v - \ln \chi_{\alpha/2}^2(v)] = 1 - \alpha \quad ; \quad 0 < \omega_j < \pi$$

olarak hesaplanır. İkinci güven aralığı hesaplama yöntemi ise Normal yaklaşımı kullanır. Buna göre % 95 güven aralığı

$$\ln \hat{f}(\omega_j) \pm 1.96 \left(\sum_{k \leq n} W_n^2(k) \right)^{1/2}$$

ile hesaplanır. Burada $W_n(k)$ bir ağırlık fonksiyonu dizisidir.

3.3 Durağanlık, birim kökler ve spektral çözümleme bağlantıları

Bir zaman serisinin birim köke sahip olup olmamasının bize onun hafıza yapısı hakkında bilgi verdiğini belirtmiştik. Bu bağlamda olasılıklı eğilim sergileyen serilerin hafızalı olduğunu da söylemiştik. Artık birim kök özel durumunun, başka bir deyişle rassal yürüyüşün hafızasının uzun süreli olduğunu söylemenin zamanı gelmiştir. Yediği şokun etkisini unutmaz ve uzak dönemler arasında güçlü bir bağımlılık durumu yaratır. Silverberg ve Verspogen'in (1999) dediği gibi uzak geçmiş bugünü etkilemekte ve geleceği yapılandırmaktadır.

Sıklık alanı yaklaşımı anlatılırken verilen örneklerde uzun dönemle ilgili bilginin düşük sıklıklardan elde edildiğinden kısaca bahsetmiştik. Şimdi rahatlıkla bir serinin uzun dönem davranışını sıfır sıklığındaki hareketi belirler demekte hiçbir sakınca yoktur. Bu alt bölümün ilerleyen aşamalarında geçen bölümlerde ürettiğimiz durağan ve durağan olmayan serilerin spektral yoğunlukları ve periodogramları incelenecek ve söz konusu durumların bu şekillere nasıl yansıdığı ele alınacaktır. Bundan önce bölüntüsel bütünleşme katsayısının kestiriminde kullanılan yöntemlerin anlaşılmasında yararlı olacağı düşünüldüğünden bazı AR, MA ve ARMA süreçlerinin spektral yoğunluklarını inceleyeceğiz.

Öncelikle şu tanımla başlayalım (Brockwell ve Davis, 1996). $\{y_t\}$ sıfır ortalamalı ve $f(\omega)$ gibi bir spektral yoğunluğa sahip durağan bir seri olsun. Aynı zamanda $\Psi = \{\psi_j, j = 0, \pm 1, \dots$ tam anlamıyla toplanabilir olsun. $(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty)$. O zaman

$$Y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j y_{t-j}$$

sıfır ortalamalı durağan bir süreç olur ve spektral yoğunluğu ise

$$f_Y(\omega) = |\Psi(e^{-i\omega})|^2 f_y(\omega) = \Psi(e^{-i\omega})\Psi(e^{i\omega})f_y(\omega)$$

formundadır. Burada $\Psi(e^{-i\omega}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j e^{-ij\omega}$ olarak kullanılmaktadır. Buna aktarım fonksiyonu adı verilir, kareli hali ise güç aktarım fonksiyonu olarak bilinmektedir.

Bu durumda eğer $\{y_t\}$, $\phi(L)y_t = \theta(L)u_t$ sürecine uyan bir ARMA(p, q) gösterimine sahipse spektral yoğunluk fonksiyonu

$$f_y(\omega) = \frac{\sigma^2 |\theta(e^{-i\omega})|^2}{2\pi |\phi(e^{-i\omega})|^2} ; \quad -\pi \leq \omega \leq \pi \quad (3.21)$$

olarak bulunabilir. ARMA sürecinin spektral yoğunluk fonksiyonu trigonometrik polinomların bölümü olarak hesaplandığından kesirli spektral yoğunluk olarak anılır.

Bu tanımlı beyaz gürültü, AR(1), MA(1) ve ARMA(1,1) süreçlerine uygulayalım. Sıfır ortalamalı sabit değışkeli bir beyaz gürültü serisinin spektral yoğunluğu düz olacaktır. $\gamma(0) = \sigma^2$ ve tüm diğerk k değerkleri için $\gamma(k) = 0$ olduğundan $f_{bg}(\omega) = \sigma^2 / 2\pi$ olacaktır.

Şimdi de $y_t = \phi y_{t-1} + u_t$ formunda bir AR(1) süreci düşünelim. Burada u_t sıfır ortalamalı sabit değışkeli bir beyaz gürültü serisidir.

$$\begin{aligned} f_{AR(1)}(\omega) &= \frac{\sigma^2}{2\pi(1-\phi^2)} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \phi^k (e^{-ik\omega} + e^{ik\omega}) \right) \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi(1-\phi^2)} \left(1 + \frac{\phi e^{i\omega}}{1-\phi e^{i\omega}} + \frac{\phi e^{-i\omega}}{1-\phi e^{-i\omega}} \right) \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi(1-2\phi \cos \omega + \phi^2)} \end{aligned}$$

$\phi = 1$ özel durumunu karşılayan rassal yürüyüş veri üretim sürecinin spektral yoğunluğu ise şu şekildedir:

$$f_{ry}(\omega) = \frac{\sigma^2}{4\pi(1-\cos \omega)}$$

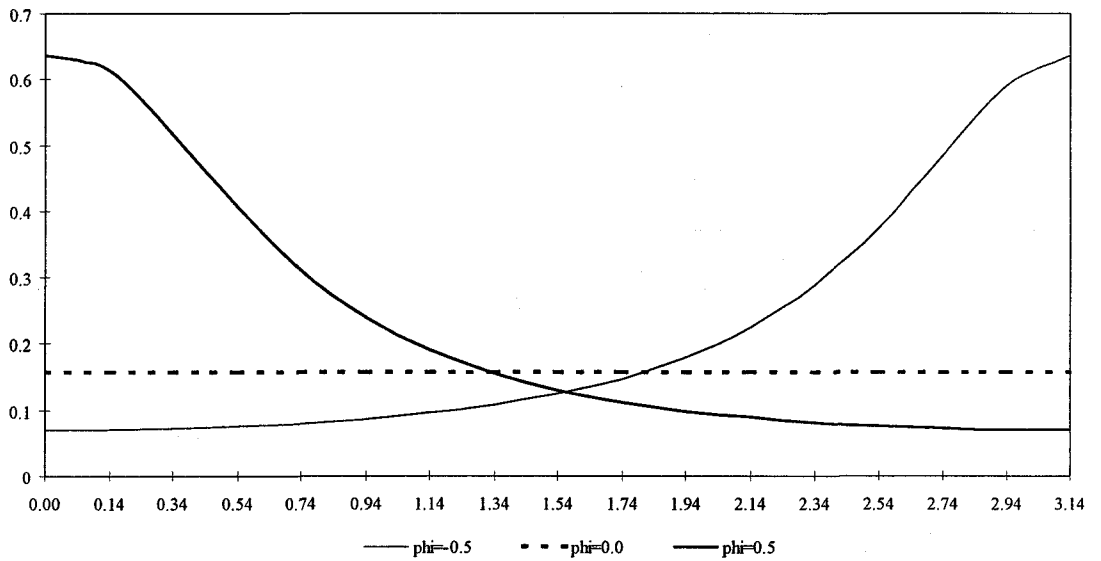
$y_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$ veri üretim sürecine sahip MA(1) serilerinin değişkesi $\gamma_0 = (1 + \theta^2)\sigma_\varepsilon^2$, bir gecikmeli ortak değişkesi ise $\gamma_1 = \theta\sigma_\varepsilon^2$ formundadır. Daha büyük gecikmeler için ortak değişke değeri sıfırdır. Bu durumda MA(1) sürecinin spektral yoğunluğu aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$$f_{MA(1)}(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} (1 + 2\theta \cos(\omega) + \theta^2)$$

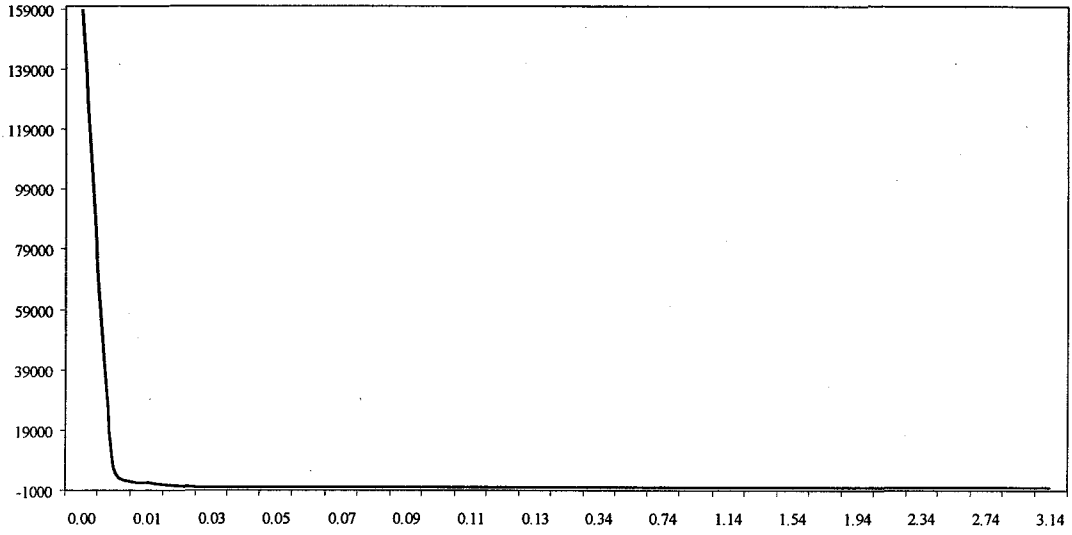
Son olarak da ARMA(1,1) sürecinin spektral yoğunluk fonksiyonunu ele alalım. Denklem (3.21) yardımıyla bu sürecin spektral yoğunluğu şu şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} f_{ARMA(1,1)}(\omega) &= \frac{\sigma^2 (1 + \theta e^{i\omega})(1 + \theta e^{-i\omega})}{2\pi (1 - \phi e^{i\omega})(1 - \phi e^{-i\omega})} \\ &= \frac{\sigma^2 (1 + \theta^2 + 2\theta \cos \omega)}{2\pi (1 + \phi^2 + 2\phi \cos \omega)} \end{aligned}$$

Aşağıdaki grafiklerde çeşitli ϕ ve θ değerleri için süreçlerin şekilleri görülebilir. Şekil 3.1'de AR(1) süreci yer almaktadır. Bu şekilde AR(1) sürecinin ϕ katsayısı -0.5, 0.0 ve 0.5 olarak seçilmiştir. Katsayı değeri artı doğrusu üzerinde bire yaklaştıkça spektral yoğunluğun düşük sıklık değerleri yükselmektedir. Şekil 3.2'de ise rassal yürüyüş serisinin spektral yoğunluk fonksiyonu görülebilir.

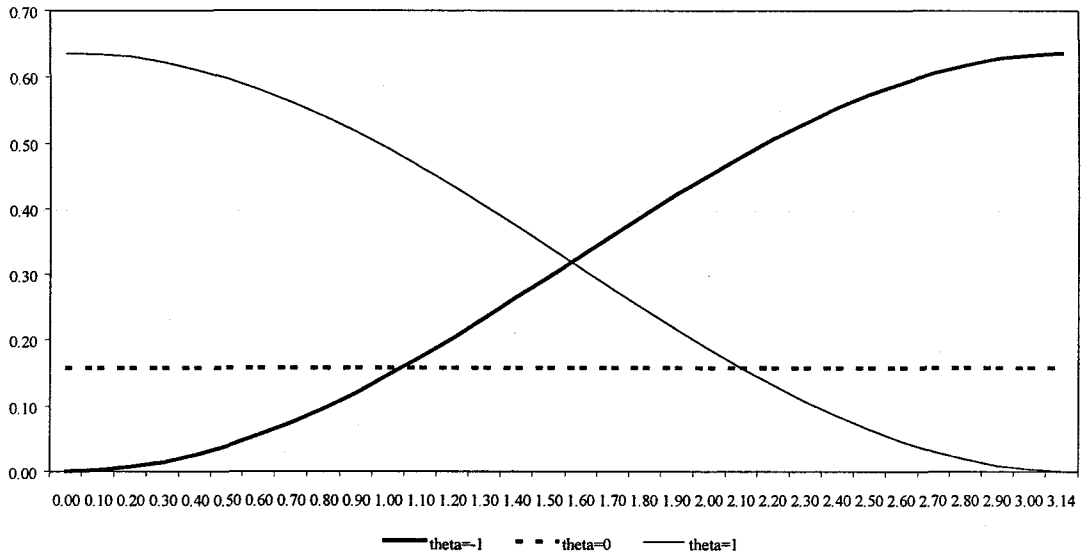


Şekil 3.1: Değişik ardışık bağlanım katsayıları için AR(1) sürecinin spektral yoğunluk fonksiyonu [$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$, $\phi = -0.5, 0, 0.5$]



Şekil 3.2: Rassal yürüyüş sürecinin spektral yoğunluk fonksiyonu
 $[y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t, \phi = 1]$

Uzun süreli hafızaya sahip serilerin rassal yürüyüş sürecinin davranış kalıplarını sergilediğini tekrar vurgulamak yerinde olacaktır. Uzun dönem davranışı gösteren düşük frekans spektral yoğunluk $\omega \rightarrow 0$ hareketini yaptığında sonsuza yakınsar. Bu anlamda bir serinin birim köke sahip olup olmadığı spektral yoğunluk fonksiyonunun sıfır sıklığındaki hareketi incelenerek bulunabilir. Durağan bir AR(1) serisi ise geometrik hızla artan veya azalan bir görünüme sahiptir. Şimdi de MA(1) süreçlerini inceleyelim. Kuramsal modelde θ katsayısı -1 , 0 ve 1 olarak seçildiğinde aşağıdaki davranış kalıplarıyla karşılaşılacaktır.

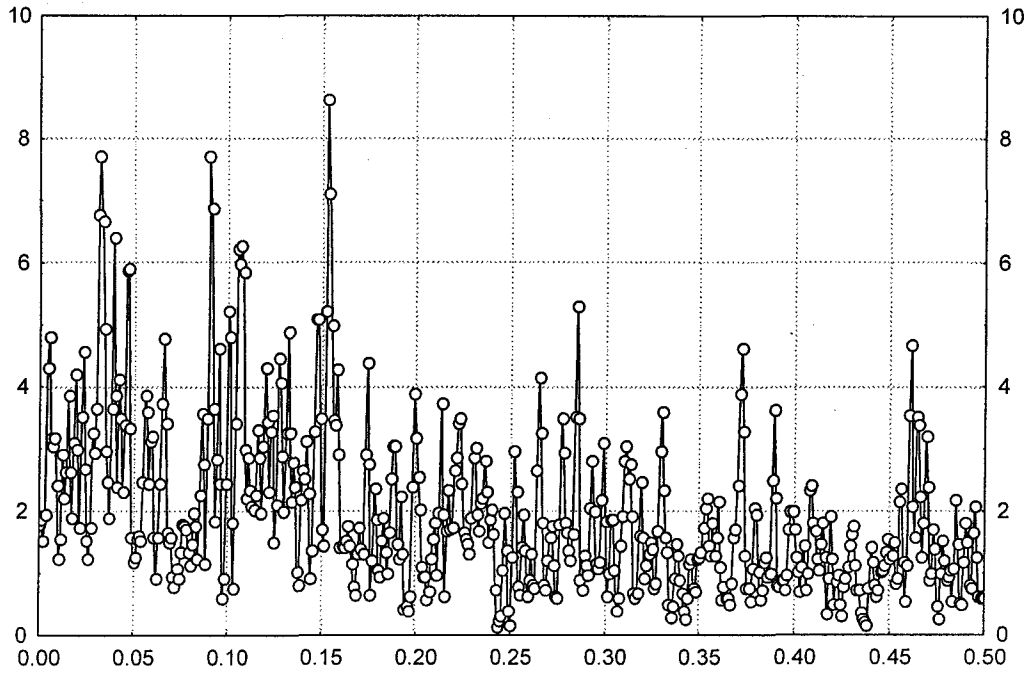


Şekil 3.3: Değişik MA katsayıları için MA(1) sürecinin spektral yoğunluk fonksiyonu

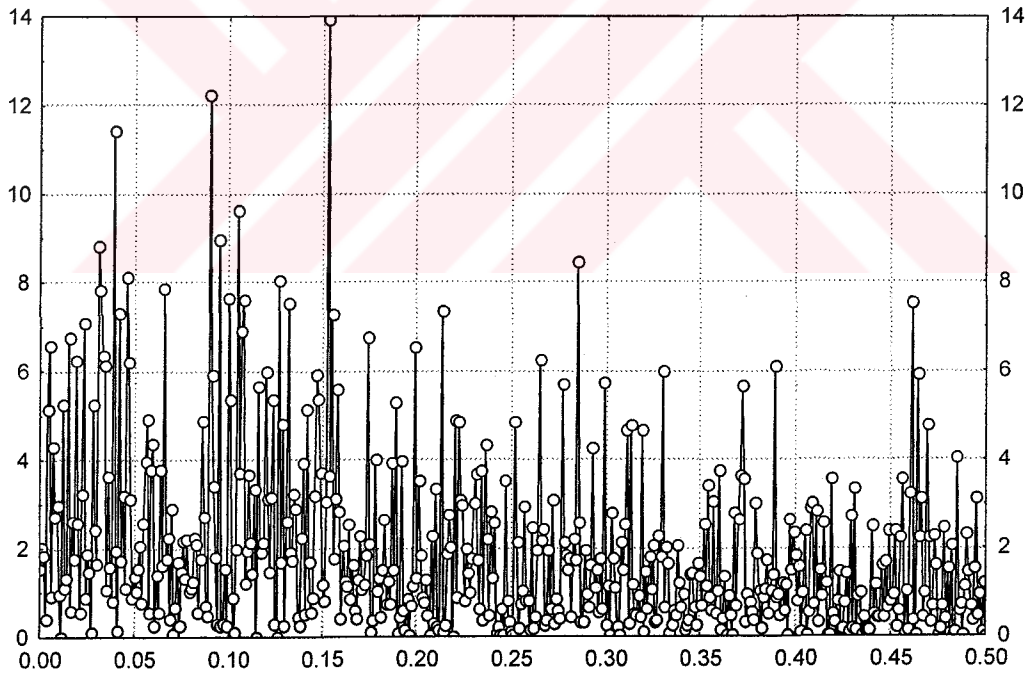
ARMA(1,1) gösterimine sahip veri üretim sürecinin kontrol edilmesi gereken katsayı sayısı fazla olduğu için burada incelemeye alınmayacaktır. O halde son olarak ikinci bölümde türetilen serilerin ikisinin spektral yoğunluk fonksiyonlarını ve periodogramlarını inceleyelim. Alt bölüm 2.3'te üretilen seriler şöyleydi: İlki, veri üretim süreci $y_t = 0.2y_{t-1} + \varepsilon_t$ formunda olan bir durağan AR(1) serisidir. İkinci seri ise (2.21) ile gösterilen saf rassal yürüyüştür.

İncelemeye başlamadan önce şu uyarıyı yapmakta yarar vardır. Zaman serisinin ortalamasının çıkarılması ve durağanlığı elde etmek için eğilimden kurtarılması genelde tercih edilen bir durumdur. Aksi halde periodogram ve yoğunluk fonksiyonu, ilk -sıfır sıklığındaki- kosinüs katsayısının büyüklüğü altında ezilecektir. Bir anlamda ortalama, sıfır sıklığındaki bir çevrimdir, denilebilir. Benzer şekilde periyodik hareketlerin varlığı araştırılırken eğilim durumu da fazla önem taşımamaktadır. Eğer etkileri giderilmezse serideki ilgilenilen periyodik hareketleri gizleyeceklerdir. Ancak biz bu noktada serinin eğilim yapısının daha doğrusu hafıza süresinin sıklık alanında yapılan şekillere nasıl yansıdığını araştırdığımız için bu yolu tercih etmeyeceğiz. Öncelikle $y_t = 0.2y_{t-1} + \varepsilon_t$ veri üretim sürecine sahip AR(1) serisini ele alalım. Şekil 3.4'te sırasıyla spektral yoğunluğu ve periodogramı görülebilir. Şekiller incelendiğinde hem spektral yoğunluğun hem de periodogramın özel bir davranış tarzına sahip olmadığı rahatlıkla anlaşılabacaktır. O halde serinin kısa süreli hafızaya sahip olduğunu söyleyebiliriz.

Şekil 3.5, uzun süreli hafızaya sahip olduğu bilinen rassal yürüyüş serisinin spektral yoğunluğu ve periodogramını göstermektedir. Bu tip serilerin tipik özelliği olan düşük sıklıkta sonsuza yakınsama davranışını sergiler. Fark alınarak durağanlaştığı bilinen serinin sadece spektral yoğunluğunu inceleyerek durağan olduğu bilinen AR(1) süreci ile karşılaştıralım. Şekil 3.6 ile Şekil 3.5 arasındaki paralellik kolaylıkla görülebilir. Seri durağanlaşmıştır, uzun süreli hafızanın etkisi ortadan kalkmıştır.

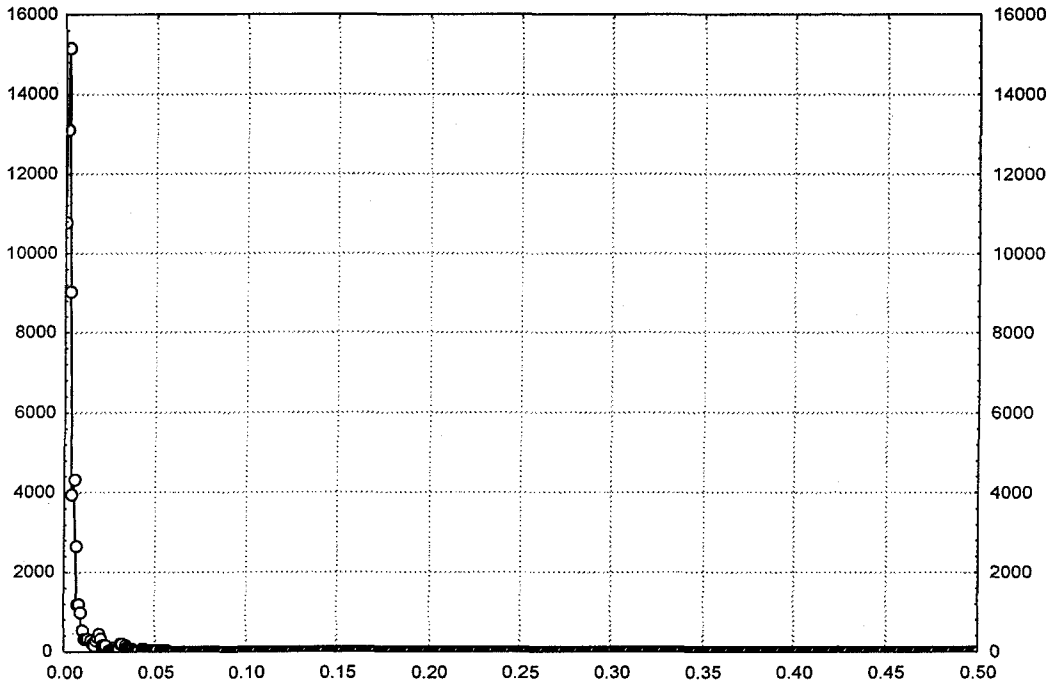


(a)

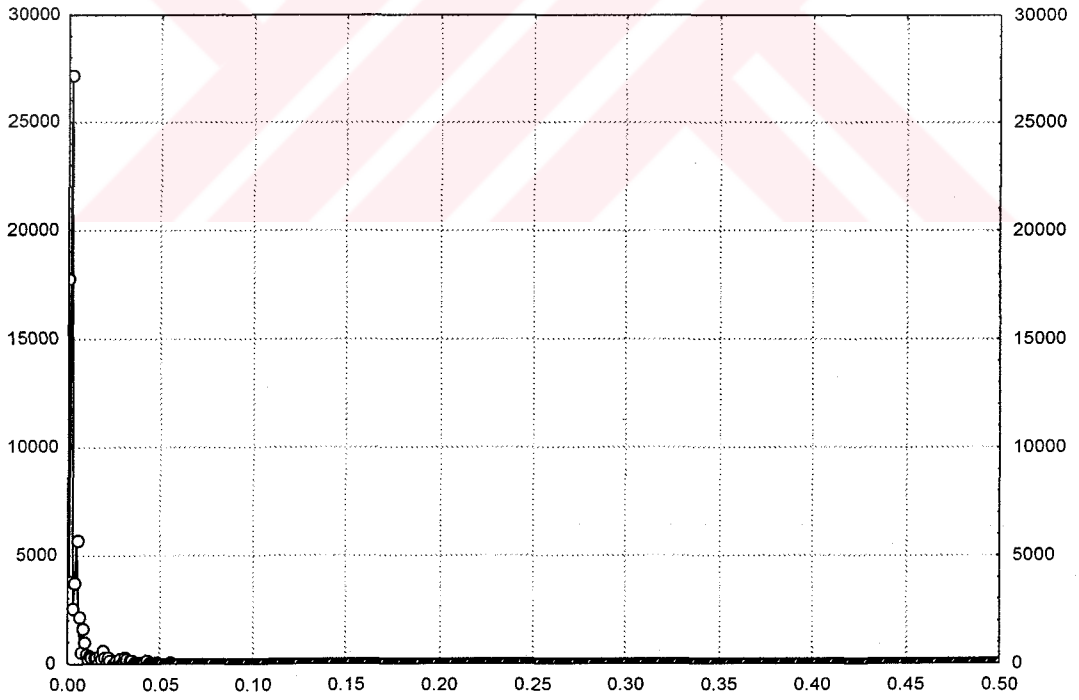


(b)

Şekil 3.4: AR(1) sürecinin spektral yoğunluğu (a) ve periodogramı (b)

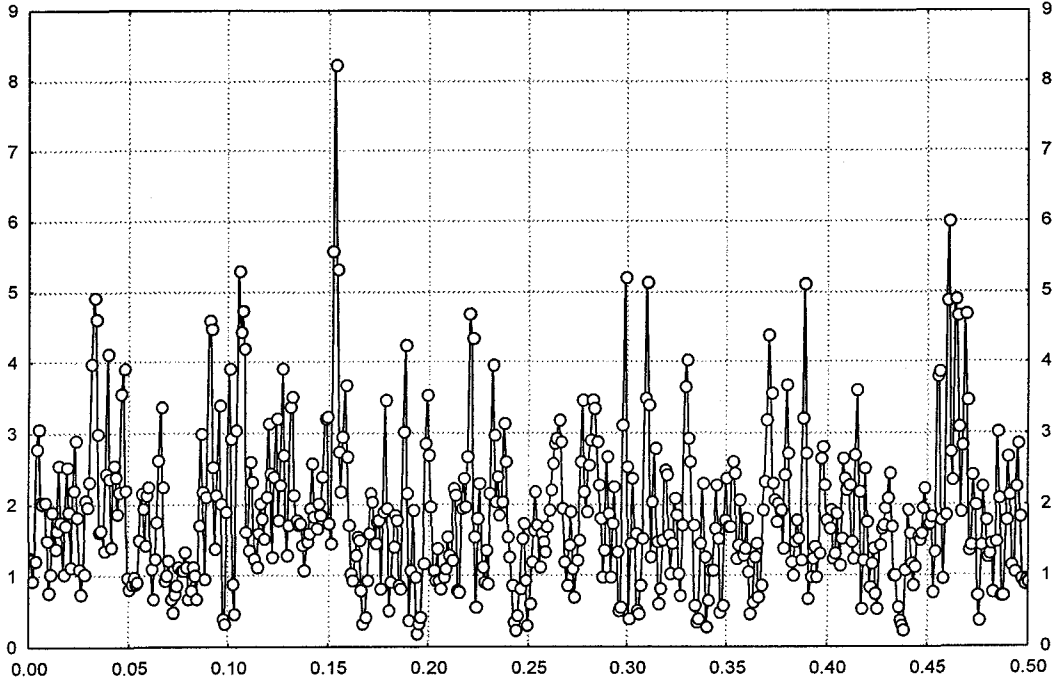


(a)



(b)

Şekil 3.5: Rassal yürüyüş sürecinin spektral yoğunluğu (a) ve periodogramı (b)



Şekil 3.6: Birinci dereceden fark alınmış rassal yürüyüşün spektral yoğunluğu

Bu kısa incelemeler ile bölüm sona ermektedir. Spektral yoğunluk ve periodogramın bölüntüsel bütünleşik serilerde nasıl davrandığı bir sonraki bölümde ardışık bağlanım fonksiyonu ile birlikte inceleyeceğiz. Aynı zamanda spektral çözümleme çıktılarını da bölüntüsel bütünleşme katsayısının kestirim sürecinde doğrudan kullanacağız.

4. BÖLÜNTÜSEL BÜTÜNLEŞME

Bütünleşme kavramı daha önceki bölümlerde kısaca ele alınmıştı. O tanımla kurulacak analogi üzerinden, bir serinin bölüntüsel fark alma işlemiyle durağanlaştığı biliniyorsa bölüntüsel bütünleşik olduğu söylenebilir. Gösterim yine $I(d)$ aracılığıyla yapılacaktır. Bu durumdaki farklılık d nin bir tamsayı olma zorunluluğunun ortadan kalkmasındadır. Sözü edilen bütünleşme derecelerinin ve ilgili filtrelerin gecikme işlemcisiyle gösterimi şu şekilde olacaktır: en genel anlamda fark alma $(1-L)^d x_t$ ile gösterilebilir. $d = 1$ durumu birinci dereceden fark almaya karşılık gelir ve işlem $\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$ şeklinde yapılır. $d=2$ ise ikinci dereceden fark almadır, ya da başka bir deyişle birinci fark serisinin farklarıdır. $\Delta^2 x_t = \Delta x_t - \Delta x_{t-1} = x_t - 2x_{t-1} + x_{t-2}$ ile gösterilir ve hesaplanır. d mutlak değerce birden küçük bir değer aldığı zaman bölüntüsel fark alma işlemi uygulanır. Bu işlem sonsuzdur.

$$(1-L)^d = 1 - dL - \frac{1}{2!}d(1-d)L^2 - \frac{1}{3!}d(1-d)(2-d)L^3 - \dots - \frac{1}{j!}d(1-d)\dots((j-1)-d)L^j$$

$I(1)$ modelleri durağan olmayan, olasılıklı eğilim modelleri olarak bilinmektedir. Ortalamaları ve değişimleri zaman içinde durmadan yükselir, kestirim hataları sınırsızdır ve şokların etkisi kalıcıdır. Bir de asla modellenemeyen beyaz gürültü durumundan bahsetmiştik. Bu bölümde ele alacağımız veri üretim süreci iki uç noktanın arasında durmaktadır.

Bir zaman serisinin süregelen bir bileşeni varsa, belli bir anda seride oluşan bir değişim olduğu gibi kalıyorsa ya da eğilime dönme davranışı sergilemiyorsa genel anlamda o serinin en genel anlamda bütünleşik bir zaman serisi olduğu söylenebilir. Böyle bir durumda makroekonomik bir şokun önemli bir bölümü söz konusu seride varlığını sürdürmeye devam edecektir. Anlamlı bir süregelim bileşeninin varlığında tüm dalgalanmalar kalıcı hareketler doğururlar. Böyle bir yapı genellikle AR gösteriminde birim köklerin varlığının araştırılmasıyla ortaya çıkarılmaya çalışılır.

Daha önceki bölümlerde de kısaca değindiğimiz gibi eğer ARIMA gösteriminde birim kök bulunuyorsa seri bir rassal yürüyüş ve durağan parçaların toplamı olarak ifade edilebilir.

Durağan olmadığı açıkça görülen zaman serileri fark alındığı zaman sürekli değişen artı ve eksi ardışık bağımlılık yapısı sergilemeye başlayabilirler. Bu, aşırı fark alınmış olduğunun bir göstergesidir. Fark alınmaz ise seri $I(0)$ olarak kabul edilmiş olur. Ancak seri uzak dönemler arasında anlamlı ardışık bağımlılık özelliğini göstermektedir. Fark alınırsa $I(1)$ olduğu varsayımı yapılmış olur. Ama serinin düzeyi de fark alınmış hali de bir soruna işaret ediyorsa bütünleşme derecesinin sıfır ile bir arasında olması gerektiği kolaylıkla anlaşılabilir. Haubrich'e (1983) göre klasik birim kök testlerinde fark alınarak durağanlaştırılan serinin, eğilim-durağan serilere tercih edilme kararı arada duran bir model sınıfını göz ardı etmektedir.

Eğer serinin ARMA gösteriminin karakteristik kökleri iki yönde de birden farklı değerler alıyorsa ve serinin durağan olmadığı biliniyorsa tamamen farklı istatistiksel araçların kullanımı zorunlu hale gelecektir. Bu da, bölüntüsel bütünleşme konusuna girer.

Görgül olarak gözlemlenmiş zaman serileri fark alma işlemlerinden sonra durağanlık varsayımını sağlasa da uzak gözlemler arasında güçlü bir bağımlılık sergiliyor olabilir –ki bu hiçbir anlamda göz ardı edilemez. Mills'e (1992) göre bu süregelim durumu Hurst fenomeni ya da “Yusuf etkisi” olarak bilinir. Yusuf etkisinin çıkış noktası eski bir öyküye dayanır. Yakup'un oğullarından Yusuf, kardeşleri tarafından bir kuyuya atılıp ölüme terk edildiğinde oradan geçen bir kervan tarafından bulunur ve köle olarak satılmak üzere kente götürülür. Köleliği sırasında çevresindekilerin gördüğü rüyalara getirdiği açıklamaların gerçek çıkması fark edilmesine ve firavun tarafından yüceltilmesine neden olur. Firavunun gördüğü bir rüya olan yedi sıska ineğin yedi semiz ineği yemesini yedi bolluk yılını yedi kıtlık yılının izleyeceği şeklinde yorumlar. Bu da gerçek çıkar. Aslında uzun dönemli bir kestirim yapmıştır. Söz konusu yapı, büyük değerlerin aynı işaretli büyük değerlerce izlenmesi eğilimi olarak da açıklanabilir. Öyle ki seriler bir çevrimler dizisine girmiştir ve bu çevrimlerin uzunluğu toplam örneklem büyüklüğü ile karşılaştırılabilecek kadar fazladır.

Şimdiye kadar kuramsız zaman serisi modellerini Box-Jenkins tekniğine dayandırıyor ve $ARIMA(p,d,q)$ ile gösteriyorduk. Buradaki bütünleşme derecesinin bir tamsayı olması zorunluluğu çok kısıtlayıcı olduğundan bölüntüsel bütünleşme kavramı ortaya konulmuş ve klasik Box-Jenkins $ARIMA$ süreci, ardışık bağımlı bölüntüsel bütünleşik hareketli ortalama süreci $ARFIMA(p,d,q)$ haline getirilmiştir. Bu gösterimdeki bütünleşme katsayısı d herhangi bir gerçek sayı olabilir. O halde $ARFIMA(p,d,q)$ modellerinin $ARIMA(p,d,q)$ modellerinin bir genellemesi olduğunu söylemek yanlış olmayacaktır. $ARFIMA$ modelleri, uzak dönemler arasında güçlü bir bağımlılık sergileme yeteneklerinden dolayı uzun süreli hafızaya sahip süreçler sınıfında incelenirler. O halde çok uzun dönemlerde anlamlı ardışık bağlanıma sahip olan seriler için uzun süreli hafıza modellerinin kullanımı bir gereklilik olmaktadır. Bu yaklaşım durağan olmayan serilerin modellenmesini çok ileri bir boyuta taşımıştır, denilebilir.

Bölüntüsel bütünleşme katsayısı bir serinin uzun dönem davranış tarzını kolaylıkla yakalar ve klasik $ARIMA$ modellerinin barındırdığı sorunları içermez. Sowell (1992) kökleri birim çemberin dışında olan $ARMA(p,q)$ modellerinin uzun dönem davranışları modellemedeki yeteneksizliğini vurgularken bazı sorunlardan bahseder. Öncelikle, uzun dönem hareketlerini yakalayan katsayılar, katsayı uzayının sınırlarında bulunduğundan kavuşmaz dağılımları kestirimi güçleştirecek derecede zayıf örneklem dağılımları yaratırlar. Ayrıca $ARMA$ modellerinin uzun dönem davranışlarını yakalaması sorunludur çünkü eğer bir AR ya da MA katsayısı bu tür davranışı yakalarsa kısa dönem davranışına kısıtlar dayatmaya başlar. Bu da kısa dönem modelinin geçerliliğini yitirmesi anlamına gelir. Bir de model seçim kriterleri açısından sorunlu bir boyuttan bahsedilebilir. En yüksek olabilirlik teknikleri katsayı değerlerini verinin periodogramı ile katsayısal modelin farklı sıklıklarda hesaplanan spektral yoğunluğu arasındaki farkı en küçükleyecek biçimde seçerler. Böyle bir durumda kısa dönemli davranışa daha iyi oturmasına neden olacak bir modelin seçimi uzun dönemli davranış modelinden ödün verilmesine yol açabilir. Bu gibi sorunların üstesinden gelmek için katsayısal olmayan kestirim teknikleri tercih edilebilir, ya da çok daha geniş kapsamlı modeller dikkate alınabilir.

Buraya kadar bölüntüsel bütünleşik serilerle ilgili genel bir bilgi verdik. Ancak henüz nereden kaynakladığı hakkında ayrıntıya girmedik. Baillie (1996) uzun süreli hafıza

modelleri veya bölüntüsel bütünleşme üzerine kurulu ekonometri yazını özetlediği çalışmasında bunu da ele alır. Zaman serisi çözümlemesinin birçok konusu gibi bölüntüsel bütünleşmenin kökü de mühendislik alanında yatmaktadır. Özellikle hidroloji ve klimatoloji alanlarında çalışan istatistikçilerin büyük katkısı olan bölüntüsel bütünleşme Hurst (1951, 1957), Mandelbrot ve Wallis (1968), Mandelbrot (1972) ve McLeod ve Hipel (1978) tarafından ilk kez ele alınmıştır. En önemli katkısı ise klasik ARIMA modellemesinin Wold teoreminin model katsayılarına üstel ya da geometrik azalma dayatan koşullarının her zaman geçerli olmadığını göstermekle sağlamıştır. Bir sürecin etki-tepki katsayılarının azalma hızını etkileyen katı kuralları gevşetmiştir, denilebilir (Baillie, 1996).

Yazında bölüntüsel bütünleşme katsayısının kestirimine yönelik birçok tekniğe rastlamak olasıdır. Bunları, çalışılan alan ve kestirim adımlarına göre gruplamak olasıdır. En alt seviyede tek ya da iki adımlı kestirim teknikleri yer alır. Bir üst seviyedeki ayırım ise zaman alanında ve sıklık alanında gerçekleştirilen kestirim teknikleri anlamında olmaktadır. Şekil 4.1 bu çalışma kapsamına alınmış kestirim tekniklerini yukarıda bahsedilen ayırımlarda gösterir. İki adımlı teknikler genellikle ilk önerilen yöntemlerdir. Bu teknikler kullanılırken öncelikle bölüntüsel bütünleşme katsayısı kestirilir, sonra bu katsayı kullanılarak zaman serisine fark alma işlemi uygulanır ve elde edilen seri ARMA modelleri ile incelenir. Bu tekniklerin eleştirisine ileride değineceğiz. Ama şimdilik bu eleştiriler sonucunda, tüm katsayıların aynı anda kestirildiği en yüksek olabilirlik teknikleri kullanılmaya başlanmış olduğu söylenebilir.

Zaman serisi çözümlemesi ve ekonometri yazınında bölüntüsel bütünleşik serilerle ilgili çok sayıda çalışma ile karşılaşmak olasıdır. Ancak bunların ağırlıklı bir bölümü kuramsal içerikli iken daha az sayıda uygulamaya rastlanılabilir. Baillie (1996) çalışmasının yayınlandığı tarihe kadar olan süre için bir yazın özeti derlemiştir. Bu çalışmada bölüntüsel bütünleşik serilerin kullanıldığı alanlara göre bölümler ayrılmıştır. Bu çalışma elbette ki Baillie'nin çalışması kadar kapsamlı değildir ancak yine de kuramsal makalelerin tamamını içermektedir. Granger (1980), Granger ve Joyeux (1980) ve Hosking (1981, 1994) bölüntüsel bütünleşme kavramının ortaya atıldığı ve geliştirildiği çalışmalardır. Katsayı kestirim yöntemlerinin önerildiği Hurst (1951), Mandelbrot (1972), Granger ve Joyeux (1980), Janacek (1982), Geweke ve

Porter-Hudak (1983), Fox ve Taquu (1986), Lo (1991), Sowell (1992), Robinson (1990, 1994, 1995) Tieslau ve diğ. (1996) ve Phillips (1999) çalışmaları içeriğe dahil edilmiştir.

Bölüntüsel Bütünleşme Katsayısının Kestirimi

Zaman Alanı

Tek adımlı

Granger-Joyeux Gridal (1980)
Sowell-EYO (1992)
Chung-Baillie CSS (1993)

İki adımlı

R/S (1972)
Lo MR/S (1991)
TSB-EKU (1996)
Robinson Log-ACVF (1990)
Robinson EKU (1994)

Sıklık Alanı

Tek adımlı

Fox-Taquu EYO (1986)

İki adımlı

GPH (1983)
Robinson GSE (1995)
Robinson LPE (1995)
Robinson APER (1995)

Şekil 4.1: Bölüntüsel bütünleşme katsayısının kestirim teknikleri

Yazında elbette bundan daha fazla çalışma yer almaktadır. Bunlardan en önemlileri şöyle sayılabilir: Diebold ve Rudebusch (1989) Nelson-Plosser veri setine Geweke-Porter Hudak yaklaşımını uygulamış ve aslında birim köke sahip olduğu düşünülen serilerin bölüntüsel bütünleşik olduklarını ortaya koymuşlardır. Sowell (1990) bu çalışmayı eleştirdiği makalesinde Geweke ve Porter-Hudak kestiricisinin sapmalı olduğunu ortaya koymuş ve aynı zamanda birim kök ve deterministik eğilim önsavlarının bölüntüsel bütünleşik serilerin içinde de incelenebileceğini göstermiştir.

Cheung (1993) döviz kurlarını Fox-Taquu ve Sowell yaklaşımları ile ayrı ayrı modellemiş ve bu modelleri karşılaştırmıştır. Benzer bir çalışma da Cheung ve Diebold (1994) tarafından yürütülmüş ve Sowell yaklaşımıyla Fox-Taquu yaklaşımı incelemeye alınmıştır. Silverberg ve Verspagen (1999) ekonomik büyümeyi bölüntüsel bütünleşik seriler bağlamında ele almıştır. Agiakloglou ve diğ. (1993) ve Hurvich ve Beltrao (1993) bölüntüsel bütünleşme katsayısının Geweke ve Porter-Hudak yaklaşımıyla hesaplanmasındaki sapmayı incelemişlerdir. Smith ve diğ. (1997) üç farklı kestirim tekniğini benzetim yordamıyla karşılaştırmış ve en yüksek olabilirlik tekniklerinin daha üyü bir performansa sahip olduğunu göstermişlerdir. Diebold ve Rudebusch (1991) birim kök sınamalarının, Lee ve Schmidt (1996) KPSS sınamasının bölüntüsel almaşıkları karşısındaki güçlerini incelemişler ve birim köklerin zayıf, KPSS'nin ise daha güçlü olduğunu bulmuşlardır. Martin ve Wilkins (1999), Baum ve diğ. (1999) ve Wright (1999) bölüntüsel bütünleşik serileri inceleyen başka çalışmalar yürütmüşlerdir.

4.1 Bölüntüsel bütünleşmenin tanımı ve temel özellikleri

Bölüntüsel bütünleşme ile ilgili önsel bilgi iki yolla elde edilebilir. Bunlardan ilki ardışık bağlanım fonksiyonundaki monoton azalma olabilir. Çalışmanın birinci bölümünde zaman serilerinde temel istatistiksel büyüklükler ele alınırken $ARMA(p,q)$ gösterimine sahip bir serinin k inci gecikme dönemindeki ardışık bağlanım katsayısının k sonsuza yaklaştıkça sıfıra yakınsadığını göstermiştik. Şimdi de $ARFIMA(p,d,q)$ gösterimine sahip bir durağan sürecin ise çok daha yavaş bir hızla azalan ardışık bağımlılık fonksiyonuna sahip olduğunu belirtelim. Farklı bütünleşme derecelerine sahip serilerin farklı gecikme dönemlerindeki ardışık bağımlılık katsayılarının özetlendiği Tablo 4.1 bu durumu özetlemektedir.

O halde yavaşça azalan ardışık bağımlılık fonksiyonuna sahip serilerin uzun süreli hafızaya, hızla azalan ardışık bağımlılık fonksiyonuna sahip serilerin kısa süreli hafızaya sahip olduğunu söylemek yanlış olmayacaktır. Bu durumda, bir zaman serisinin uzun dönem davranışı modellenmek isteniyorsa bunun yakalanmasına izin verecek bir modelin göz önüne alınması gerekir. Ancak böyle bir model parsimonluk koşulundan bahsetmek anlamsız olur. Bu tip modellerde bölüntüsel bütünleşme

katsayısı d , zaman serisinin yüksek gecikmeli ardışık bağlanım yapısını açıklayacak şekilde seçilmelidir.

Tablo 4.1: Farklı d değerleri ile türetilmiş bölüntüsel bütünleşik gürültünün ardışık bağımlılık katsayıları

K	1	2	3	4	5	10	25	50	75	100
$d = 0.9$	0.98	0.96	0.94	0.93	0.91	0.85	0.71	0.51	0.40	0.35
$d = 0.7$	0.92	0.88	0.85	0.83	0.81	0.73	0.62	0.50	0.41	0.39
$d = 0.5$	0.67	0.55	0.50	0.45	0.40	0.32	0.15	0.25	0.16	0.13
$d = 0.3$	0.42	0.33	0.32	0.29	0.26	0.18	0.16	0.11	0.12	0.11
$d = 0.1$	0.08	0.06	-0.01	0.00	-0.01	0.04	0.04	-0.06	0.04	-0.01
$d = -0.1$	-0.13	-0.02	-0.02	-0.03	-0.03	0.01	0.05	0.04	0.02	0.00
$d = -0.3$	-0.22	-0.04	-0.06	-0.04	0.03	0.00	-0.05	-0.01	-0.01	0.04
$d = -0.5$	-0.38	0.00	-0.05	0.00	-0.01	0.00	0.02	0.00	0.04	-0.01

Serilerin süregelim bileşenleri içerip içermemesinin sıklık alanı yaklaşımında düşük sıklık dinamikleri incelenerek ortaya çıkarılabileceğini belirtmiştik. Bu da önsel bilginin elde edilebileceği ikinci yoldur. Uzun süreli hafızaya sahip yapılar ve ARIMA modellemesindeki tamsayı d koşulunun etkisi spektral çözümleme ile incelenebilir. Bir zaman serisi ancak spektral yoğunluk fonksiyonu, sıklık sıfıra yaklaşırken sınırsız bir biçimde artıyorsa,

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} f(\omega) = \infty,$$

uzun süreli hafızaya sahiptir, denilebilir. Eğer zaman serisi kesinlikle ARMA sürecine uyuyorsa veya kısa süreli hafızaya sahipse

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} f(\omega) = c$$

$c > 0$ koşulunu sağlar. Ancak buradaki durum tamsayıli bütünleşmeden mi yoksa bölüntüsel bütünleşmeden mi kaynaklanmaktadır, şimdilik bilinemez. Uzun süreli hafıza durumunu spektrum üzerinden bulgularabileceğimizi biliyoruz. Birçok ekonomik veya finansal zaman serisinin düzeyde çizilen spektral yoğunluklarının sıfır sıklığında sonsuza yaklaştığını da biliyoruz. Bu sonuçlar, bir zaman öncesine kadar bize birinci dereceden fark alma zorunluluğunu göstermekteydi. Ancak fark alma işleminden sonra çizilecek spektrum sıfır sıklıkta hiçbir değer almayabilir. Bu tür bir davranış bölüntüsel bütünleşik serilere hastır, aşırı fark alma işleminin

spektral karşılığıdır ve d katsayısının sıfır ile bir arasında olduğunu açıkça gösterir. Bu tarzda davranışlar sergileyen seriler her bazda periyoda sahiptirler ve özel bir zaman ölçeği olmadığından aperiodyik çevrimler olarak bilinirler.

Tüm bu sözel açıklamaların ardından şu tanımlamayla bölüntüsel bütünleşme kavramını kuramsal olarak ele alalım. Bir ARMA süreci olan $\{y_t\}$ serisi y_t ve y_{t+k} gözlemleri arasındaki ortak değişke (bağımlılık) k sonsuza yaklaştıkça azalıyorsa kısa süreli bir hafızaya sahip seri olarak anılır. Ardışık bağlanım fonksiyonunun gecikme değeri sonsuza yaklaştıkça nasıl azaldığı daha önceki bölümlerde ele alınmıştı. Uzun süreli hafızaya sahip serilerde ise bu davranış

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(k) = Ck^{2d-1} \quad (4.1)$$

olarak kendini gösterir. Bu ifadede $C \neq 0$ ve $d < 1/2$ olduğu kabul edilir. Bunun sıklık alanındaki karşılığı ise

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} f(\omega) = C'\omega^{-2d} \quad (4.2)$$

şeklinde olur. Bu denklemlerden bir sürecin hafızasının d katsayısına bağlı olduğu görülebilir (Hosking, 1981). Ortak değişke durağan bir zaman serisinin uzun süreli hafızaya sahip olduğunun söylenebilmesi için (4.3) ve (4.4) özelliklerine sahip olması istenir (McLeod ve Hipel, 1978; Baillie, 1996).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n |\rho(k)| = \infty \quad (4.3)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} f(\omega) = \infty \quad (4.4)$$

Ayrıca bir zaman serisinin hafıza yapısını kısmi toplamının davranışı da belirler.

$S_T = \sum_{t=1}^T y_t$ olmak üzere, bir serinin iki noktası arasındaki uzaklık arttıkça aralarındaki en yüksek bağımlılık küçülürse bu seri kısa süreli hafızaya sahiptir, denilir. $\sigma^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} E[S_T^2 / T]$ vardır ve sıfır değildir. Bu koşul sağlanmıyorsa serinin hafızası uzun sürelidir.

$(1-L)^d y_t = \varepsilon_t$, $0 < |d| < 1/2$ bölüntüsel bütünleşik serilerin en temel halidir ve bölüntüsel bütünleşik gürültü olarak bilinir. ARFIMA(p, d, q) ise daha karmaşık bir modeldir ve ardışık bağımlı bölüntüsel bütünleşik hareketli ortalama modeli olarak anılır. Her iki gösterimdeki $(1-L)^d$ terimi binom açılımı ile $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \pi_j L^j$ halini alır. Bu eşitlikte $\pi_0 = 1$ ve

$$\pi_j = \frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(j+1)\Gamma(-d)} = \prod_{0 < k \leq j} \frac{k-1-d}{k} \quad (4.5)$$

ile gösterilir, AR(∞) olarak bilinir. $\Gamma(\cdot)$, gamma fonksiyonudur.

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt & x > 0 \\ \infty & x = 0 \\ x^{-1} \Gamma(1+x) & x < 0 \end{cases}$$

Brockwell ve Davis (1991, 1996) bölüntüsel bütünleşik gürültü ile ilgili şu teoremi ortaya koyarlar. Eğer $d \in (-0.5, 0.5)$ ise $\{y_t\}$ için deterministik olmayan durağan çözüm $y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} = (1-L)^{-d} \varepsilon_t$,

$$\psi_j = \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(j+1)\Gamma(d)} \quad (4.6)$$

formunda olan bir MA(∞) gösterimidir. Bölüntüsel bütünleşik seriler için $f(\cdot)$, $\gamma(\cdot)$, $\rho(\cdot)$ ve $\alpha(\cdot)$ sırasıyla spektral yoğunluk, ortak değişke, ardışık bağımlım ve kısmi ardışık bağımlım fonksiyonu olmak üzere

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} |1 - e^{-i\omega}|^{-2d} = \frac{\sigma^2}{2\pi} |4 \sin^2(\omega/2)|^{-d} \quad ; -\pi \leq \omega \leq \pi \quad (4.7)$$

$$\gamma(0) = \sigma^2 \frac{\Gamma(1-2d)}{\Gamma^2(1-d)} \quad (4.8)$$

$$\rho(h) = \frac{\Gamma(h+d)\Gamma(1-d)}{\Gamma(h-d+1)\Gamma(d)} = \prod_{0 < k \leq h} \frac{k-1+d}{k-d} ; h=1,2,\dots \quad (4.9)$$

$$\alpha(h) = \frac{d}{h-d} ; h=1,2,\dots \quad (4.10)$$

denklikleri geçerlidir. Bunların nasıl ortaya çıktığı Hosking (1981, 1994), Granger (1980) ve Granger ve Joyeux (1980)'den görülebilir.

x sonsuza giderken $\Gamma(x)$ fonksiyonunun yakınsadığı değer Stirling tarafından gösterilmiştir.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Gamma(x) = \sqrt{2\pi} e^{-x+1} (x-1)^{x-1/2}$$

Bu yakınsama özelliği (4.5), (4.6) ve (4.9)'a uygulandığında

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \pi_j = \frac{j^{-d-1}}{\Gamma(-d)} \quad (4.11)$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \psi_j = \frac{j^{d-1}}{\Gamma(d)} \quad (4.12)$$

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \rho(h) = h^{2d-1} \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(d)} \quad (4.13)$$

olur ve (4.13) sonucunda bölüntüsel bütünleşik gürültü (4.1) anlamında uzun süreli hafızaya sahiptir, denilir. Spektral yoğunluk açısından incelendiğinde $\omega \rightarrow 0$ durumunda $\sin(\omega) = \omega$ olduğundan

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \omega^{-2d} \quad (4.14)$$

eşitliği sağlanır. (4.14) sonucu (4.2) anlamında uzun süreli hafızaya sahiptir, denilir.

Şimdi de ARFIMA(p, d, q) durumunu ele alalım. Eğer $\{y_t\}$ durağan ve aşağıdaki fark denklemini sağlayan bir seri ise ARFIMA sürecidir, denilebilir.

$$\phi(L)(1-L)^d y_t = \theta(L)\varepsilon_t \quad ; \quad d \in (-0.5, 0.5) \quad (4.15)$$

Burada ε_t beyaz gürültü, ϕ ve θ sırasıyla p ve q dereceli polinomlardır. Eğer $(1-L)^d y_t$ bir ARMA(p, q) süreci ise $\{y_t\}$ $d \in (-0.5, 0.5)$ olan bir ARFIMA(p, d, q) modeli olarak anılır. Bu seri $z_t = \phi(L)\theta^{-1}(L)y_t$, $(1-L)^d z_t = \varepsilon_t$ ve $\phi(L)y_t = \theta(L)z_t$ koşulunu sağlar. O halde $\{y_t\}$ bölüntüsel bütünleşik gürültüden oluşmuş bir ARMA sürecidir. Şimdi de (4.15) ile gösterilen ifadenin çözümünün varlığını ve tekliğini inceleyelim. $\phi(\cdot)$ ve $\theta(\cdot)$ polinomlarının ortak sıfır değerlerine sahip olmadığı varsayımı altında

- Eğer $|z|=1$ için $\phi(z) \neq 0$ eşitliğinden söz edilebiliyorsa (4.15) ifadesinin tek ve deterministik olmayan çözümü $y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j (1-L)^{-d} \varepsilon_{t-j}$ olacaktır. Burada $\psi_j = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j z^j = \theta(z)/\phi(z)$ şeklindedir.
- Çözüm ancak ve ancak $|z|=1$ için $\phi(z) \neq 0$ ise nedenseldir.
- Çözüm ancak ve ancak $|z|=1$ için $\theta(z) \neq 0$ ise tersinebilirdir.
- Çözüm, $d \neq 0$ için ardışık bağımlılık fonksiyonu

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(k) = Ck^{2d-1}$$

koşulunu ve spektral yoğunluk fonksiyonu

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{|\theta(e^{-i\omega})|^2}{|\phi(e^{-i\omega})|^2} |1 - e^{-i\omega}|^{-2d} = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left[\frac{\theta(1)}{\phi(1)} \right]^2 \omega^{-2d}$$

koşulunu sağlıyorsa nedensel ve tersinebilirdir.

Buraya kadar anlatılan ve Granger (1980), Granger ve Joyeux (1980) ve Hosking (1981, 1994) tarafından türetilen temel dağılım özelliklerini aşağıdaki Tablo 4.2 toparlayalım.

Tablo 4.2: Bölüntüsel bütünleşik gürültünün özellikleri

Katsayılar	Kavuşmaz davranışı
<u>Sonsuz MA gösterimi</u>	
$\psi_k = \Gamma(k+d)/\{\Gamma(d)\Gamma(k+1)\}$	
$\psi_k = \psi_{k-1} \{(k-1+d)/k\}$	$\psi_k \approx \{\Gamma(d)\}^{-1} k^{d-1}$
$\psi_k = \prod_{0 < j \leq k} [(j-1+d)/j]$	
<u>Sonsuz AR gösterimi</u>	
$\pi_k = \Gamma(k-d)/\{\Gamma(-d)\Gamma(k+1)\}$	
$\pi_k = \pi_{k-1} \{(k-1-d)/k\}$	$\pi_k \approx \{\Gamma(-d)\}^{-1} k^{d-1}$
$\pi_k = \prod_{0 < j \leq k} [(j-1-d)/j]$	
<u>Ardışık Bağlanım</u>	
$\rho_1 = d/(1-d)$	
$\rho_k = \prod_{0 < i \leq k} \{(i-1+d)/(i-d)\}$	$\rho_k \approx \{\Gamma(1-d)/\Gamma(d)\} k^{2d-1}$
$\rho_k = \{\Gamma(k+d)\Gamma(1-d)\}/\{\Gamma(k-d+1)\Gamma(d)\}$	
<u>Kısmi ardışık bağlanım</u>	
$\phi_{kk} = d/(k-d)$	
<u>Spektral Yoğunluk</u>	
$f(\omega) = (\sigma^2/2\pi) [2 \sin(\omega/2)]^{-2d}$	$f(0) < 0 \quad d \leq 0$

Peki bu özel yapıyı ortaya çıkaran koşullar nelerdir? Bu soruya verilecek ilk cevap Granger (1980) yaklaşımı olarak bilinir ve yatay kesitte heterojen olan ekonomik büyüklüklerin dinamik toplamlarından kaynaklandığı gerçeğine dayanır. Bu konuya az sonra değineceğiz. Soruya verilebilecek ikinci yanıt ise doğal olarak yatay kesitte heterojenlik yaratan teknoloji yayılımının gelişim yaratıcı etkisi olmaktadır.

Dinamik denklemlerin, başka bir deyişle gecikmeli bağımlı değişken içeren denklemlerin toplanmasıyla elde edilen verilerin ekonometri yazınında kullanılan modellerden temel özellikleri açısından farklılaştığı Granger (1980) tarafından vurgulanır.

Bu açıklamayı daha ayrıntılı bir şekilde incelenmeden önce bütünleşik seriler cebirine göz atmanın yararlı olacağı inancındayız. Eğer $x_t \sim I(d)$ olan bir seri ise ve $y_t = (1-L)^{-d'} x_t$ filtresi uygulanırsa $y_t \sim I(d+d')$ olur. Şimdi de x_{1t} ve x_{2t} gibi iki seri düşünölsün. Bu serilerin bütünleşme dereceleri sırasıyla d_1 ve d_2 ise,

$\tilde{x}_t = x_{1t} + x_{2t}$ ile oluşturulan yeni serinin bütünleşme derecesi $\max(d_1, d_2)$ olacaktır. Son olarak da daha karmaşık bir ifade ele alalım. Eğer $x_t = a(L)y_t + \varepsilon_t$ şeklinde bir ilişki kuruluyorsa ve $y_t \sim I(d_y)$, $\varepsilon_t \sim I(d_\varepsilon)$ ve $a(L)$ d inci dereceden bir bütünleştirici filtre $-a(L) = (1+L)^d$ - ise $d_x = \max(d_\varepsilon, d + d_y)$ olacaktır.

Dinamik denklemlerin toplamını incelemek için x_{1t} ve x_{2t} gibi iki değişken düşünelim. Bunlar $x_{jt} = \alpha_j x_{j,t-1} + \varepsilon_{jt}$, $j=1,2$ ile üretilmiş seriler olsun. Toplamları $\tilde{x}_t = x_{1t} + x_{2t}$ serisinin ARMA(2,1) modeline sahip olduğu görülebilir (Granger, 1980). Modelin AR bölümü $(1 - \alpha_1 L)(1 - \alpha_2 L)$ olur. Eğer her biri AR(1) sürecine uyan, farklı α değerleri olan N bağımsız seri toplanmış olsaydı, kökler arasında sadeleşme olmadığı sürece ARMA($N, N-1$) sürecine uyan modeller ortaya çıkardı. Farklı bir yaklaşım spektral yoğunluğu dikkate alarak uygulanabilir.

$$\tilde{x}_t = \sum_{j=1}^N x_{jt}$$

ve

$$f_j(\omega) = \left\{ \sigma^2 / 2\pi \right\} |1 - \alpha_j e^{-i\omega}|^{-2}$$

olmak üzere, her bileşen bağımsız olduğu için

$$\tilde{f}(\omega) = \sum_{j=1}^N f_j(\omega)$$

olarak karşımıza çıkardı.

Eğer α_j 'ler $F(\alpha)$ gibi bir dağılım fonksiyonuna sahip anakütleden çekilmiş rassal değişkenler ise

$$\tilde{f}(\omega) = N \frac{\sigma^2}{2\pi} \int \frac{1}{|1 - \alpha e^{-i\omega}|^2} dF(\alpha)$$

eşitliği sağlanır. Granger (1980) $F(\alpha)$ 'nın $[0,1]$ aralığındaki beta dağılımına uyduğunu kabul eder. Burada beta dağılımının şu özel halini kullanır.

$$\begin{aligned} dF(\alpha) &= \frac{2}{B(p,q)} \alpha^{2p-1} (1-\alpha^2)^{q-1} d\alpha & 0 \leq \alpha \leq 1 \\ dF(\alpha) &= 0 & \alpha \notin [0,1] \end{aligned}$$

Buradan yola çıkarak oluşturulan yeni spektral yoğunlukta α 'nın katsayısı

$$\frac{2}{B(p,q)} \int_0^1 \alpha^{2p+k-1} (1-\alpha^2)^{q-2} d\alpha$$

olmaktadır ve bu katsayı Fourier açılımı spektrumdan elde edilen k dönem gecikmeli ortak değişke değerine eşittir.

$$\tilde{\gamma}_k = \frac{B(p+k/2, q-1)}{B(p,q)} = \frac{\Gamma(q-1)}{B(p,q)} \frac{\Gamma(p+k/2)}{\Gamma(p+k/2+q-1)}$$

k 'nın yükselen değerleri için ortak değişke fonksiyonu $Ak^{(1-q)}$ değerine yakınsar ve bunu (4.1) ifadesinin ortak değişke haliyle karşılaştırsak $\tilde{x}_t \sim I(1-q/2)$ olduğu görülebilir. Eğer $q>1$ olursa $(1-q/2)<1/2$ olur ve değişke sonludur. Eğer $0<q<1$ olursa değişke sonsuz olacaktır. Buradan görülmektedir ki bütünleşme derecesi p 'ye bağımlı değildir. Bu nedenle $dF(\alpha)$ 'nın şekli kestirimle ilintili değildir.

Başka bir yaklaşım da ε_{jt} 'nin beyaz gürültü olduğu varsayımının gevşetilmesiyle ortaya çıkar. Bu durumda veri üretim süreci $x_{jt} = \alpha_j x_{j,t-1} + y_{jt}$ olacaktır. y_{jt} 'nin spektral yoğunluğunun $f_y(\omega, \theta_j)$ olduğu ve y_{jt} 'lerin bağımsızlığı düşünüldüğünde

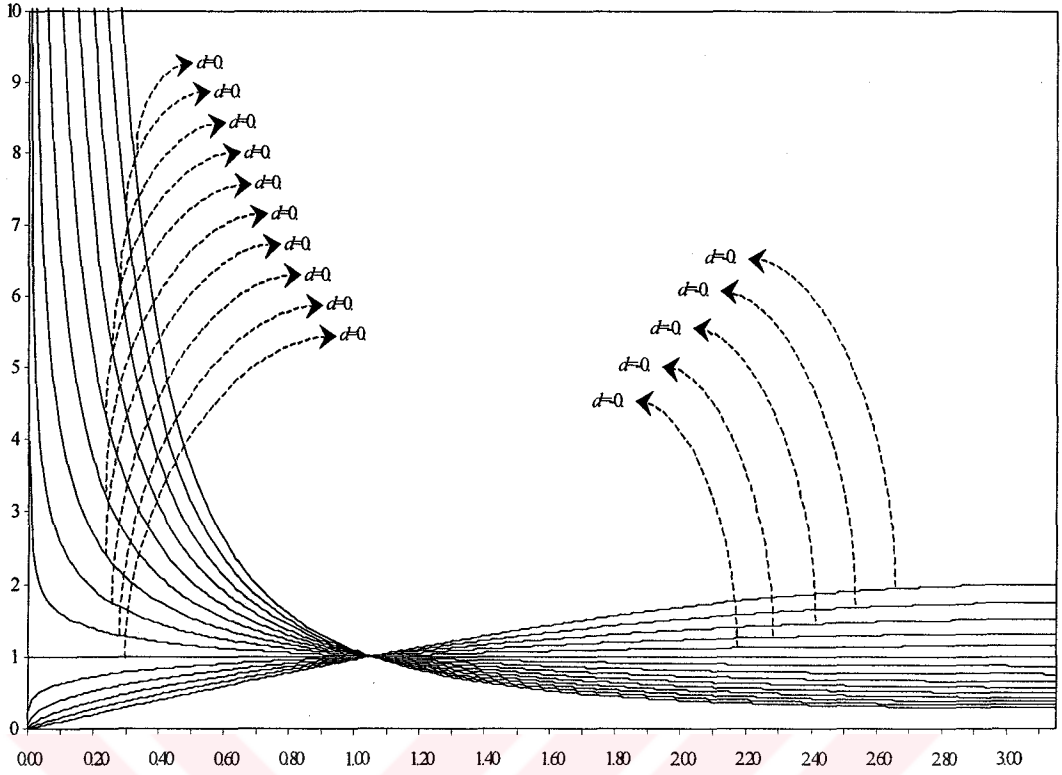
$$\tilde{f}(\omega) = NE_\theta [f_y(\omega, \theta)] \int \frac{1}{|1-\alpha e^{-i\omega}|^2} dF(\alpha)$$

formunu alır ve önceki varsayımlar aracılığıyla eğer $y_t \sim I(d_y)$ ise $\tilde{x}_t \sim I(d_y + 1 - q)$ olduğu bulunabilir (Granger, 1980).

Bu noktaya kadar bölüntüsel bütünleşmenin tanımından, bölüntüsel bütünleşik serilerin kavuşmaz dağılımlarından ve hangi nedenlerle ortaya çıkabileceklerinden bahsettik. Şimdi de aşağıdaki veri üretim süreçleriyle üretilmiş birkaç serinin düzeyinin zaman içindeki hareketini, ardışık bağımlım fonksiyonlarının uzun dönemli hareketlerini, spektral yoğunluklarını ve periodogramlarını inceleyeceğiz. Daha önce de belirttiğimiz gibi bir serinin uzun süreli hafızaya sahip olup olmadığının önsel bilgisini bu şekiller yardımıyla elde edebiliriz. Anlatılanları toparlayalım ve bu özetin izleklerini üretilmiş serilerde arayalım.

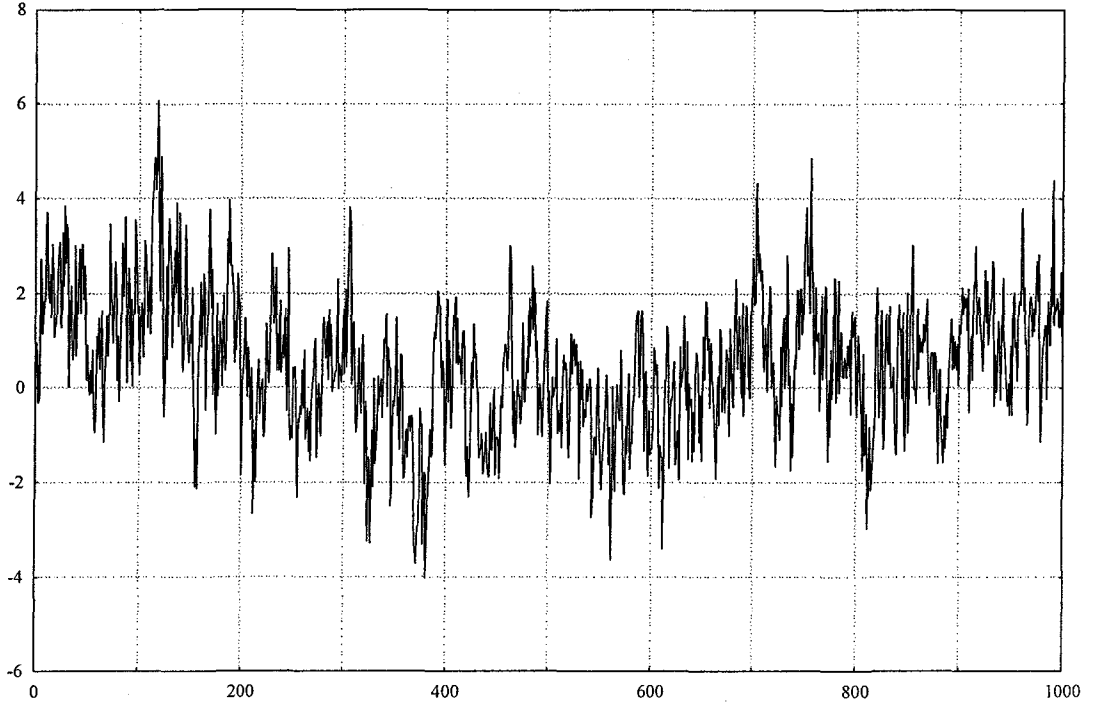
Bölüntüsel bütünleşik zaman serilerinin en önemli özelliği uzak dönemler arası güçlü bir bağımlılık sergilemesidir. Gözlemler arasında ARMA yapısıyla oluşan bağımlılık geometrik bir hızla azalırken bölüntüsel bütünleşme yapısıyla oluşan bağımlılık çok daha yavaş olan hiperbolik hızla azalır. O halde gözlemler arası uzak dönem bağımlılığı sadece bölüntüsel bütünleşme katsayısı ile belirlenir, denilebilir. Bu özellikler ardışık bağımlılık ve spektral yoğunluk fonksiyonlarının şekillerinden görülebilir. Eğer bölüntüsel bütünleşme katsayısı $0 < d < 1/2$ aralığındaysa süreç güçlü ve aynı yönlü bağımlılık sergiler. Bu, sıklık alanında kendini spektral yoğunluk fonksiyonunun sıklık sıfıra yaklaştıkça sonsuza ıraksaması şeklinde gösterir. Zaman alanında ortak değişke değerlerinin artı olarak kalması ve yavaşça azalması bu durumun bir göstergesi olarak kabul edilir. Eğer $-1/2 < d < 0$ ise süreç ters yönlü güçlü bağımlılık sergiler. Böyle bir yapı sıklık alanında kendini sıklık sıfıra yaklaştıkça azalan bir spektral yoğunluk fonksiyonu ile belli eder. Zaman alanı karşılığı ise yavaşça azalan eksi işaretli ortak değişkelerdir.

Öncelikle kuramsal spektral yoğunluk fonksiyonunun farklı bölüntüsel bütünleşme katsayılarında nasıl bir özellik sergilediğini ele alalım. (4.7) ifadesi kullanılarak d katsayısı -0.5 ile 0.9 arasında değiştirilerek Şekil 4.2 elde edilmiştir. Şekil 4.2’den de kolaylıkla görüleceği üzere sıfırdan büyük ve sıfırdan küçük bölüntüsel bütünleşme katsayılarının spektral yoğunlukta farklı yansımaları vardır. Bir önceki paragrafta anlatılanlarla uyumlu olduğu da şekilden görülebilir.

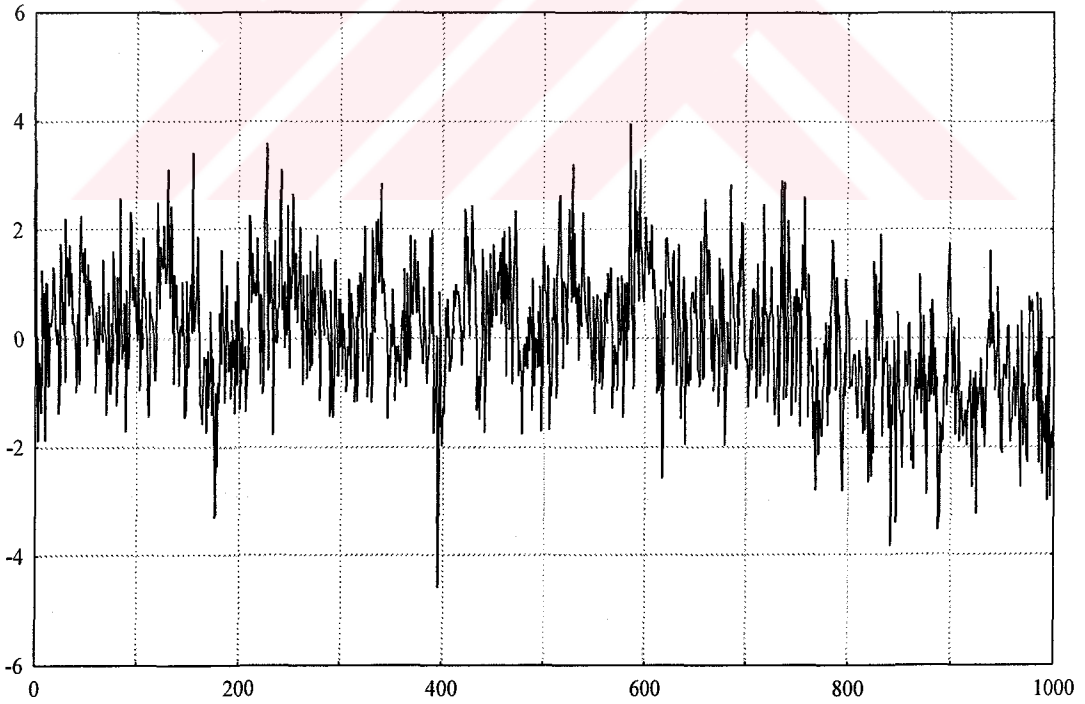


Şekil 4.2: Farklı d değerleri için bölüntüsel bütünleşik gürültünün kuramsal spektral yoğunluğu

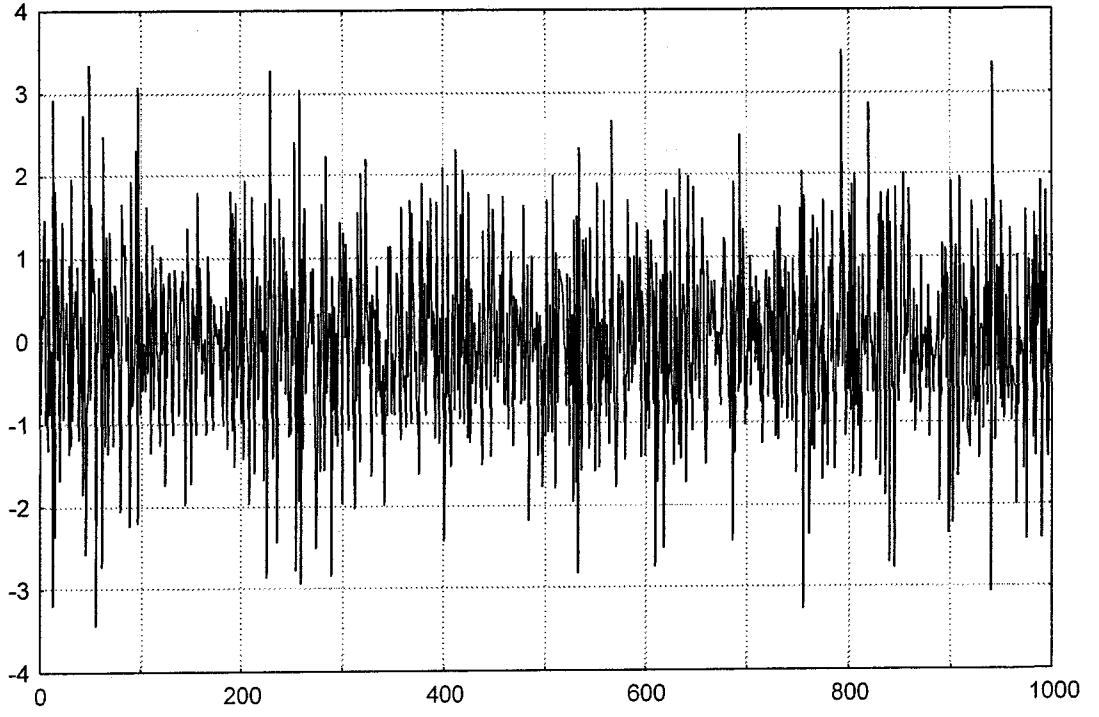
Bundan sonraki incelemeleri gerçekleştirebilmek için ARFIMA(0, d ,0) sürecine uyan 1000 gözlemlili dört seri üretilmiştir. Bu serilerde bölüntüsel bütünleşme katsayısı sırasıyla $d = 0.5$, $d = 0.3$, $d = -0.3$ ve $d = -0.5$ olarak seçilmiştir. Öncelikle bu serilerin zaman içinde nasıl davrandığını gözlemlemek için Şekil 4.3, 4.4, 4.5 ve 4.6'yı ele alalım. İlk iki şekil bölüntüsel bütünleşme katsayısının sıfırdan büyük olduğu durumlara aittir. Durağan bir görünüm sergileseler de d değeri sıfırdan uzaklaştıkça seri rassal yürüyüş üretim sürecine sahip zaman serilerinin hareket tarzına bürünmeye başlar. Bölüntüsel bütünleşme katsayısının sıfırdan küçük olduğu durumlarda ise serinin davranışını yakalamak kolay olmaktan çıkar. Ancak genel olarak bakıldığında bir beyaz gürültü serisine benzer. Zaman içindeki hareketi açısından daha çok bir beyaz gürültüye benzese de diğer özellikleri açısından ondan çok farklıdır. Bunun yakalanabileceği en önemli noktalar ardışık bağımlılık fonksiyonu ve spektral yoğunluğu olarak belirlenmektedir.



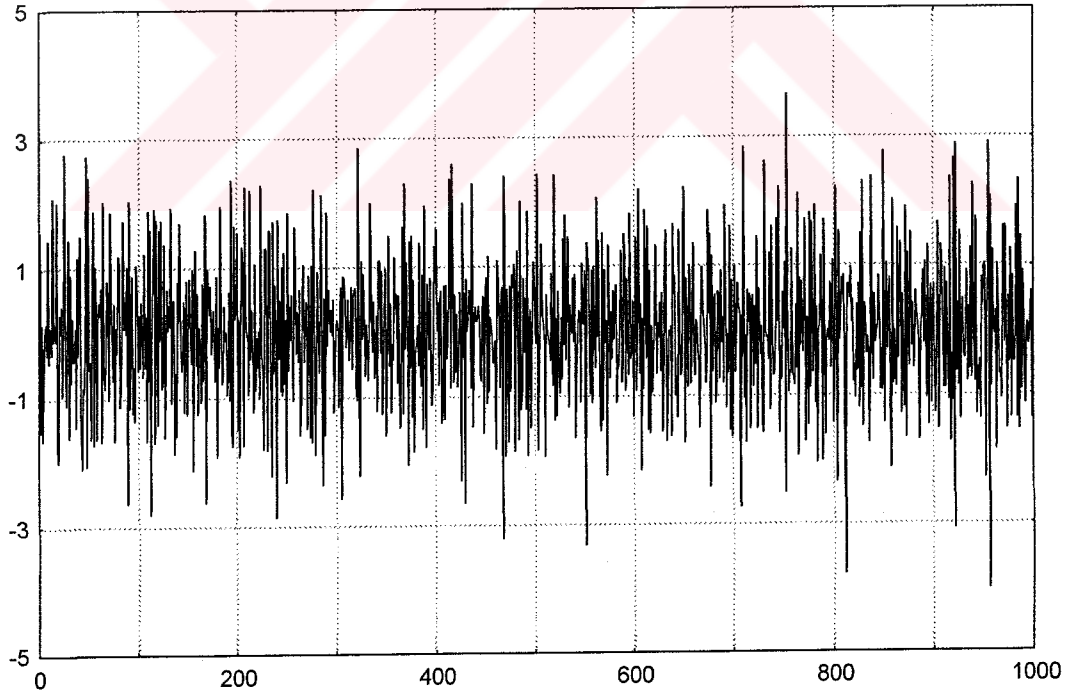
Şekil 4.3: $d = 0.5$ ile türetilmiş bölüntüsel bütünleşik gürültünün zaman içindeki davranışı



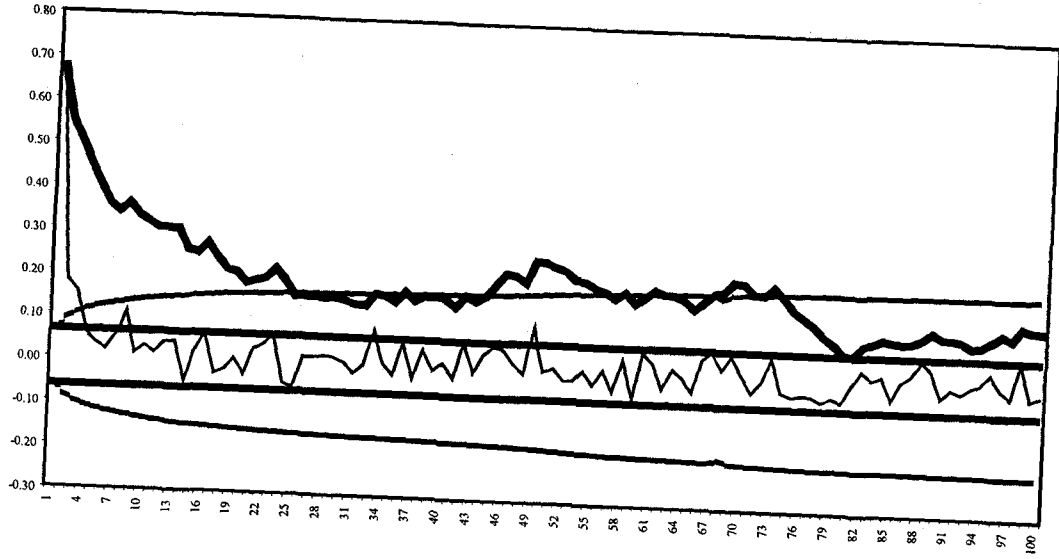
Şekil 4.4: $d = 0.3$ ile türetilmiş bölüntüsel bütünleşik gürültünün zaman içindeki davranışı



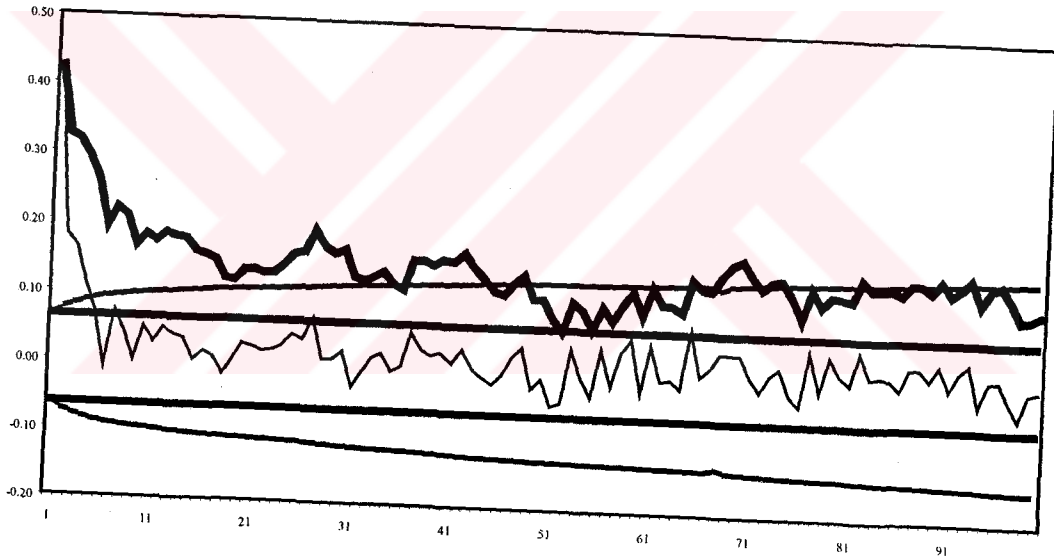
Şekil 4.5: $d = -0.3$ ile türetilmiş bölüntüsel bütünleşik gürültünün zaman içindeki davranışı



Şekil 4.6: $d = -0.5$ ile türetilmiş bölüntüsel bütünleşik gürültünün zaman içindeki davranışı



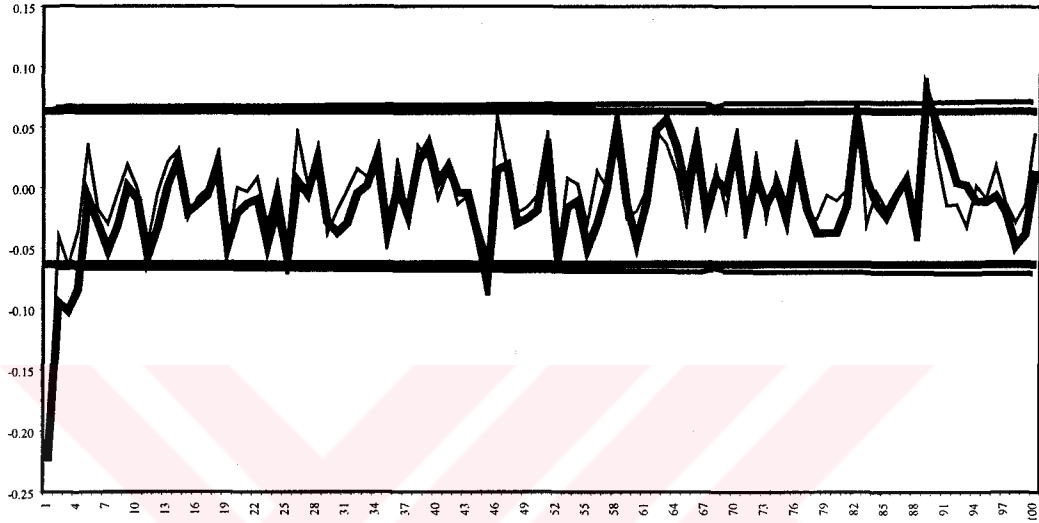
Şekil 4.7: $d = 0.5$ ile türetilmiş bölüntüsel bütünleşik gürültünün ardışık bağlanım fonksiyonu



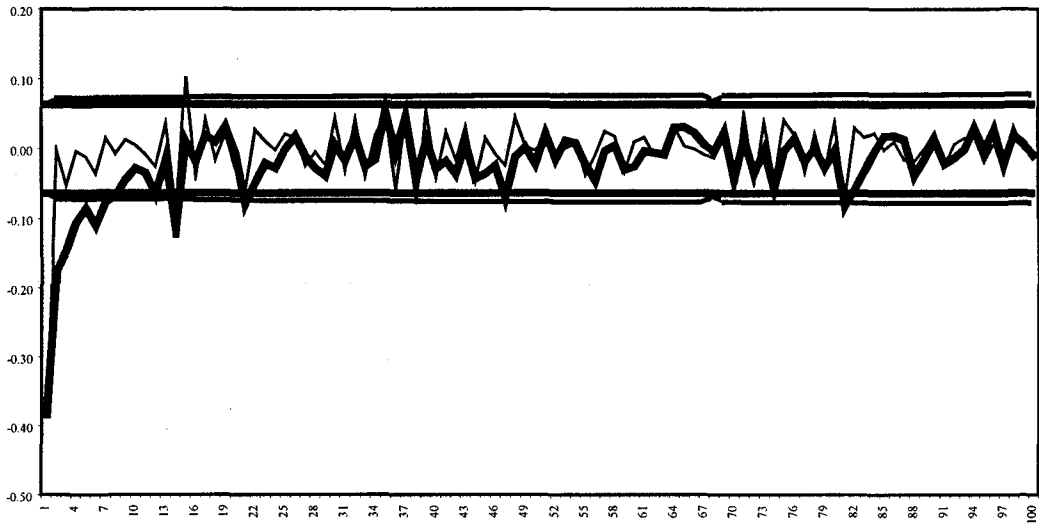
Şekil 4.8: $d = 0.3$ ile türetilmiş bölüntüsel bütünleşik gürültünün ardışık bağlanım fonksiyonu

Şekil 4.7 ve 4.8 bölüntüsel bütünleşme katsayısı sıfırdan büyük iki serinin ardışık bağlanım, kısmi ardışık bağlanım ve Bartlett güven aralıklarını göstermektedir. Bunlar incelendiğinde serilerin uzak dönemler arasında güçlü ve anlamlı bir ilişki sergilediği kolaylıkla görülebilir. Her ne kadar ikinci bölümde ele alınan serilerin ardışık bağlanım fonksiyonları kadar düzenli bir azalış sergilemeseler de istatistiksel açıdan anlamsız bağımlılık noktasına (ardışık bağlanım fonksiyonunun $2 \times$ standart hata bandının altına girmesi) ulaşmaları uzun zaman almaktadır (yaklaşık 75

gecikmeden sonra bandın dışına çıkmamaya başlar). Şekil 4.9 ve 4.10 ise bölüntüsel bütünleşme katsayısı sıfırdan küçük iki serinin ardışık bağlanım fonksiyonlarını göstermektedir. Burada ise daha önce belirtildiği üzere sıfırdan küçük yüksek bir değerden başlayan değerler yavaşça artarak güven aralıklarının içine girmektedir. Göreli olarak önceki yapılardan daha farklı gözükse de, bu durum rassal olarak üretilen serilerden kaynaklanıyor olabilir.

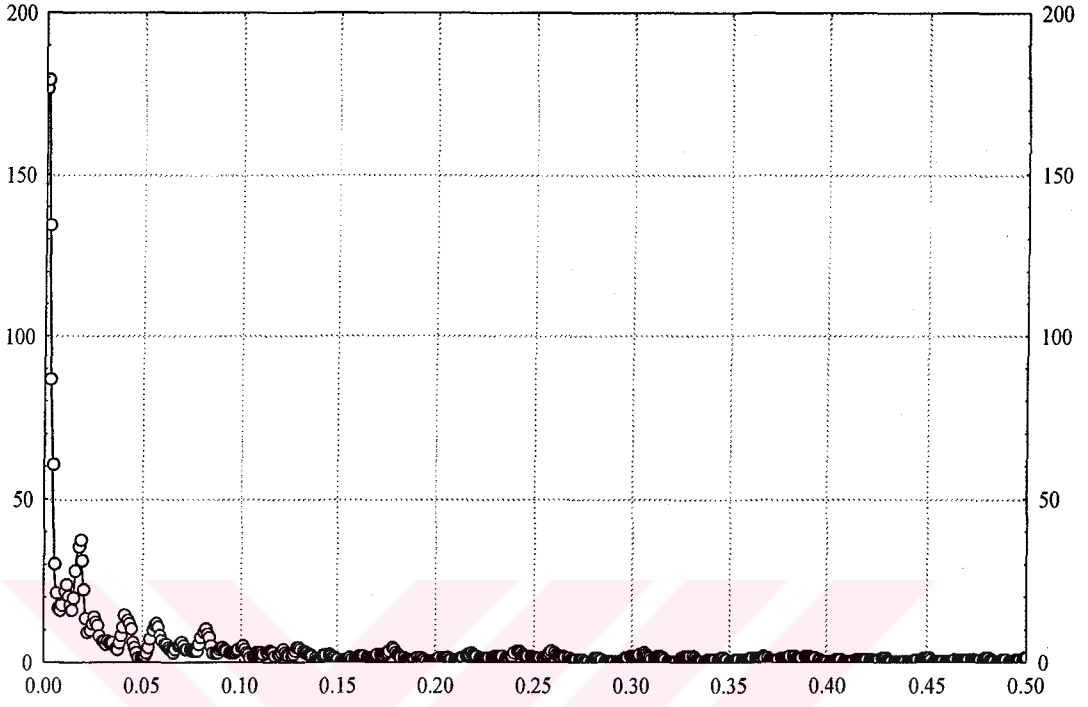


Şekil 4.9: $d = -0.3$ ile türetilmiş bölüntüsel bütünleşik gürültünün ardışık bağlanım fonksiyonu

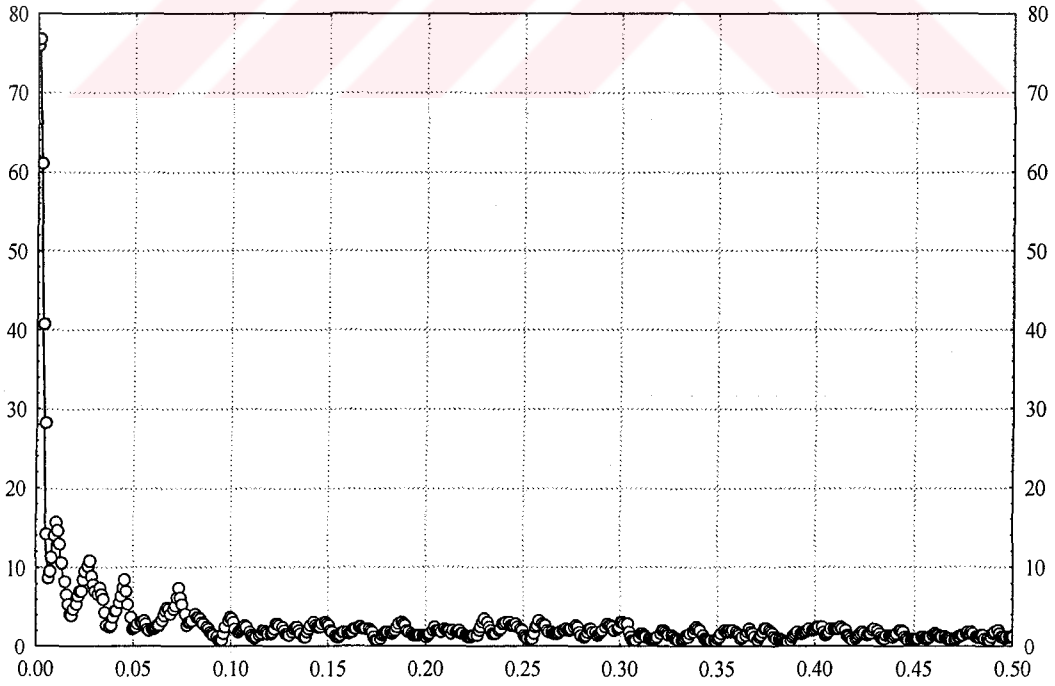


Şekil 4.10: $d = -0.5$ ile türetilmiş bölüntüsel bütünleşik gürültünün ardışık bağlanım fonksiyonu

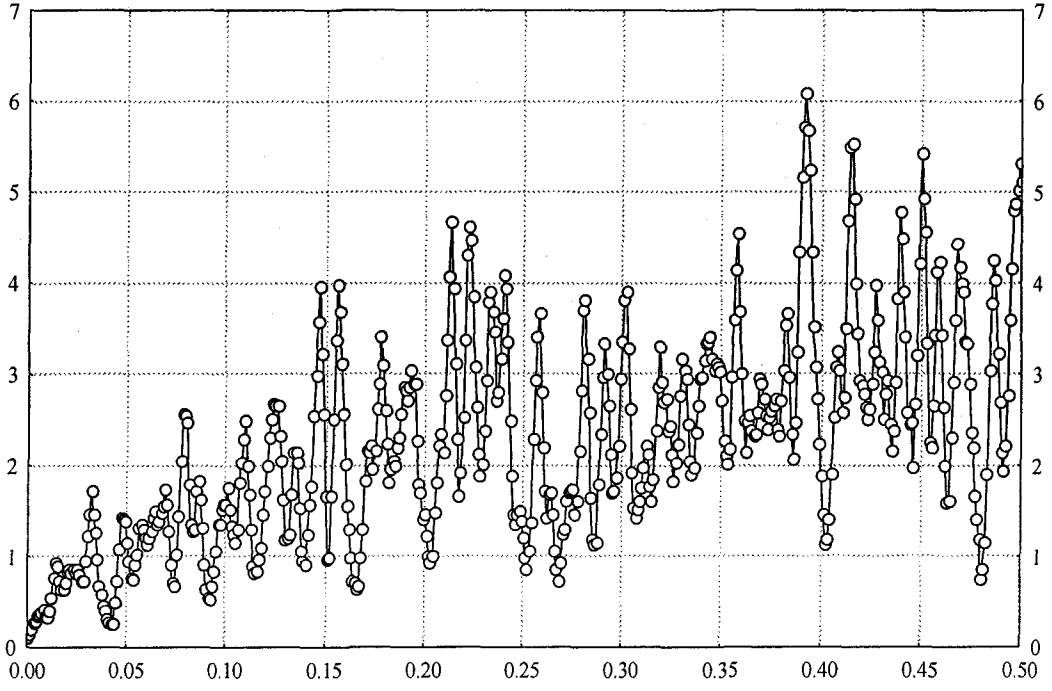
Üretilmiş bölüntüsel bütünleşik seriler için son olarak spektral yoğunluk fonksiyonları ele alınacaktır. Bütünleşme derecesinin nasıl olduğunun önsel bilgisini almanın son yöntemi de spektral yoğunluğu –veya periodogramı- incelemektir.



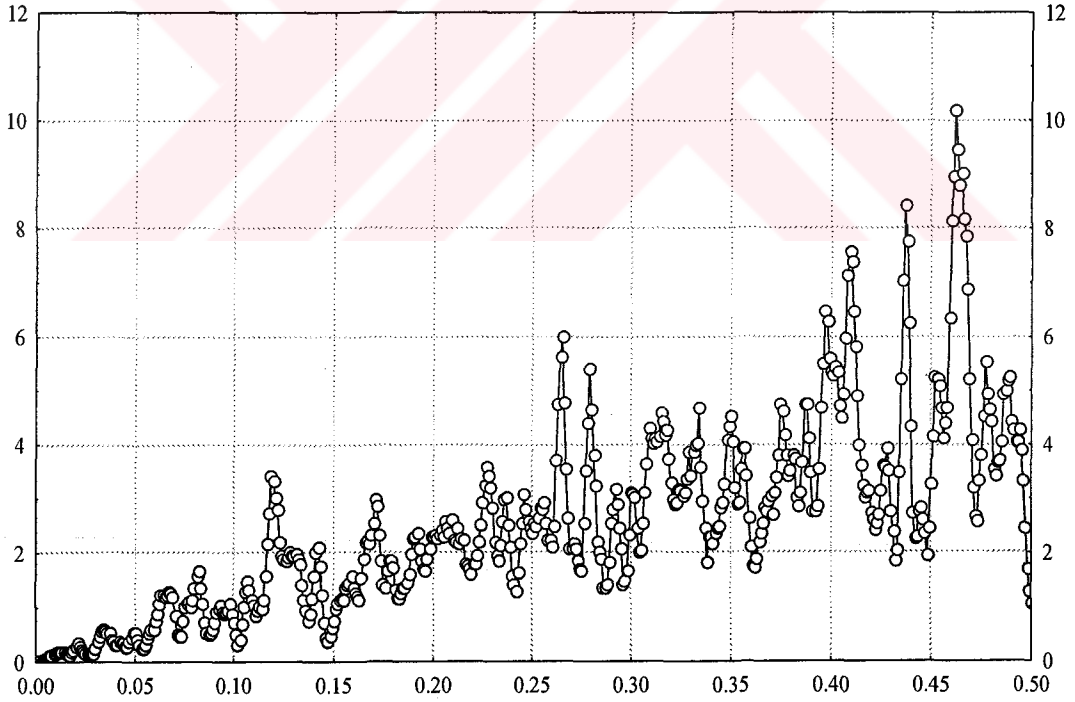
Şekil 4.11: $d=0.5$ için spektral yoğunluk



Şekil 4.12: $d=0.3$ için spektral yoğunluk



Şekil 4.13: $d=-0.3$ için spektral yoğunluk



Şekil 4.14: $d=-0.5$ için spektral yoğunluk

Sıfırdan büyük bölüntüsel bütünleşme katsayısına sahip serilerin spektral yoğunluklarının tipik özelliği Şekil 4.2'den de anlaşılacağı üzere sıklık sıfırdan 3.14'e yaklaştıkça çok yüksek değerlerden düşük değerlere üstel olarak azalan bir yapı sergilemeleridir. Şekil 4.11 ve 4.12 bu anlamda iyi birer örnektir. Sıfırdan küçük bölüntüsel bütünleşme katsayısının spektral yansıması Şekil 4.13 ve 4.14'te görülebilir. Hareket tarzı yine Şekil 4.2'deki ile tutarlıdır ve sıfır sıklıkta çok küçük değerlerden başlayarak sıklık 3.14'e yaklaşık bir öncekine oranla çok daha yavaş bir hızla artan bir fonksiyon görüntüsü çizer.

Buraya kadar, kuramsal kavramlar ve uygulamadaki karşılıkları ele alınmıştır. Bir zaman serisinin nasıl bir bütünleşme yapısına sahip olduğu bilgisinin önsel işaretleri açıklanmış ve şekiller yardımıyla gösterilmiştir. Bu noktadan sonra artık bölüntüsel bütünleşmenin varlığı istatistiksel sınamalar aracılığıyla incelenecektir.

4.2 Bölüntüsel bütünleşme katsayısının kestirim teknikleri

Bölüntüsel bütünleşme katsayısının kestirilmesi gereken bir model bileşeni olduğunu söylemiştik. Bu katsayı ile ilgili kestirim teknikleri bu bölümün giriş sayfalarında özetlenmişti. O nedenle ayrıntıya girmeden katsayı kestirim yöntemlerini incelemeye başlayalım.

4.2.1 Hurst R/S yaklaşımı

Uzun süreli hafıza modellerinin ilk istatistiksel ölçütü Hurst (1951) tarafından önerilmiş ve Mandelbrot (1972, 1975) tarafından da kullanılmış olan yeniden ölçeklendirilmiş aralık istatistiğidir. R/S adıyla anılmasının nedeni istatistiğin R_T/s_T oranından hesaplanmasından kaynaklanır. Burada R_T aralığı ve s_T ise örneklem standart sapmasını göstermektedir.

$$R_T = \max_{0 \leq j \leq T} \left\{ \sum_{j=1}^T (y_j - \bar{y}) \right\} - \min_{0 \leq j \leq T} \left\{ \sum_{j=1}^T (y_j - \bar{y}) \right\} \quad (4.16)$$

Hurst (1951) ve Lo (1991)

$$p \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{R_T / s_T}{T^{-H}} \right\} = c \quad (4.17)$$

gibi bir sabit olduğunu göstermişlerdir. R/S çözümlemesinin mantığı (4.17) ifadesinden yola çıkılarak oluşturulan

$$\log \left\{ E \left[\frac{R_T}{s_T} \right] \right\} \approx c + H[\log(T)] \quad (4.18)$$

Denkliğinin varlığına dayanır ve Hurst katsayısı H , $\log[R_T / s_T] / \log[T]$ üzerinden hesaplanır. Başka bir yöntem de (4.18) ifadesini bir regreasyon denklemi olarak kabul etmek ve en küçük karelerle eğim katsayısını kestirmek olabilir.

Kısa süreli hafızaya sahip bir sürecin H katsayısı $1/2$ 'ye eşit olduğundan, kestirilen H katsayısının $1/2$ 'yi aşması durumunda uzun süreli hafızanın varlığı bulunmuş olacaktır. Kuramcılar, R/S istatistiğinin kısa süreli hafıza sürecine de sahip verinin varlığından ve değişen değişke özelliğinden berkliğini kaybettiğini vurgulamışlardır.

4.2.2 Lo Geliştirilmiş R/S

Bir önceki alt bölümde Hurst R/S istatistiğinin değişen değişke ve kısa süreli hafıza durumlarına karşı berkliğinin olmadığı Lo (1991) tarafından belirtildiğinden bu durumlardan etkilenmeyecek bir şekilde geliştirilmiştir. Lo R/S istatistiği de $\{y_t\}$ gibi bir serinin uzun süreli hafızaya sahip olup olmadığını sınamak için kullanılır. Ancak daha genel anlamda $y_t = \mu + \varepsilon_t$ ile tanılanan bir süreci sıfır önsavı olarak alır. Kısa süreli hafızaya sahip süreçler, sonlu ARMA modelleri ve koşullu değişkeye sahip modeller de sıfır önsavının içindedirler.

Bu katsayı kestirimi için n gözlemlili, $\bar{y}$ ortalamalı bir $\{y_t\}$ ve q gecikme değeri olduğunu düşünelim. Lo geliştirilmiş R/S (1991) aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$Q_n = R_n / \hat{\sigma}_n(q) = \frac{1}{\hat{\sigma}_n(q)} \left[\max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^k (y_j - \bar{y})^2 - \min_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^k (y_j + \bar{y})^2 \right] \quad (4.19)$$

(4.19) ifadesinde yer alan standart sapma ise

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_n(q) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k (y_j - \bar{y})^2 + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^q w_j(q) \sum_{i=j+1}^n (y_i - \bar{y})(y_{i-j} - \bar{y}) \\ &= \hat{\gamma}_0 + 2 \sum_{j=1}^q w_j(q) \hat{\gamma}_j \end{aligned} \quad (4.20)$$

ile hesaplanır. Buradaki $w_j(q)$ Bartlett penceresi olan, $q < n$ için $1-j/(q+1)$ 'dir.

(4.19) ile gösterilen denklemin payı sürecin hafızasını kısmi toplamalar üzerinden ölçümler (Haubrich, 1983). Beyaz gürültü uzun süre toplamın üzerinde kalmazken, rassal yürüyüş sürecine sahip bir seri sıfırın altında veya üzerinde uzun zaman kalır ve kısmi toplamalar hızla büyür. Bölüntüsel bütünleşik süreçler ise bu iki uç durum arasındadır.

Lo (1991)

$$V_n(q) = \frac{Q_n(q)}{\sqrt{n}} \quad (4.21)$$

için dağılımın kavuşmaz davranışını da inceler. Aralığın dağılım fonksiyonu

$$F(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (1 - 4x^2 j^2) e^{-2x^2 j^2} \quad (4.22)$$

formundadır (Baillie, 1996). Lo (1991) dağılımın kritik değerlerini türetir. Ancak bu ölçütle ilgili en önemli sorun q , gecikme sayısının ne olacağının kararında yaşanır.

4.2.3 Granger-Joyeux Gridal yaklaşım

Spektral yoğunluk fonksiyonu $f(\omega) = \alpha(1 - \cos \omega)^{-d}$, $\alpha > 0$, $-1 < d < 1$ formunda olan bir zaman serisi düşünelim. Bu formda spektral yoğunluğa sahip bir zaman serisinin

modellenmesinde kullanılacak yaklaşım, spektral yoğunluğu sözü edilene benzer bir ARMA ya da ARIMA modeli aramak olabilir. Ancak bu yaklaşımda katsayılar analitik olmadığından standart yakınsaklık kuramı geçerliliğini yitirir. Uygulamada, serilerin sadece düşük sıklıklarda Şekil 4.2 formunda spektral yapıya sahip olması beklenir. Diğer sıklıklarda ise daha farklı kalıplara sahip olduğu düşünülebilir. Daha farklı kalıplar kısa süreli hafıza modeli ARMA gösteriminin doğurduğu sonuçlar olabilir. Bunlar uzun dönem kestirimleriyle çok da ilintili değilken, düşük sıklıklara oturan modeller daha fazla önem kazanmaktadır. O halde bir $AR(p)$ modeli 10 ya da 20 adım öte kestirimlerde kullanışlıdır. Eğer $p=50$ olursa daha yüksek dereceden bir modelin kullanılması zorunluluk haline gelir. Ancak uzun süreli hafıza modellerinde d katsayısı uzak adımlardaki ilişkiyi yakalar ve daha parsimon bir modelin kurulmasına olanak tanır.

Granger ve Joyeux (1980) bu tartışmaları $AR_d(p)$ modelinin d 'nin -0.9 'dan $+0.4$ 'e kadar olan aralıktaki gridal tarama aracılığıyla kurulması gerektiği önerisiyle sonlandırırlar. Çeşitli d değerleri için modeller kurulur, 10 veya 20 adım öte kestirimler yapılır ve her bir model için ortalama hata kareleri hesaplanır. Bu değeri en küçükleyen d değeri doğru katsayı olarak seçilir. Yöntemin optimal olmadığı açıktır. Bu nedenle yazında daha sonra kullanılmamıştır. Ancak bilgisayar ortamında yapılan hesaplamaların çok hızlandığı gerçeği kabul edildiğinde başka karşılaştırma araçları ile bir yöntem olarak kullanılabilir.

4.2.4 GPH Log-periodogram kestiricisi

Geweke ve Porter-Hudak (1983) –bundan sonra GPH- bölüntüsel Gaussian gürültü ile bütünleşik serileri genelledikleri ve denk olduklarını gösterdikleri çalışmada, bölüntüsel bütünleşme katsayısının kestirimine yönelik, yazında en çok kullanılan yöntemi önermişlerdir. Kestiricinin zayıflıkları ortaya konmuş olsa da (Agiakloglou ve diğ., 1993, Hurvich ve Beltrao, 1993) hâlâ tüm çalışmalar da kullanılan bir yöntemdir.

Durağan zaman serilerinin spektral yoğunluk fonksiyonlarının sıfır sıklığında sınırlı ve ardışık bağımlılık fonksiyonlarının üstel olarak azalan bir yapıya sahip olduğunu daha önce belirtmiştik. Bunların yanı sıra ARMA modellerinin bu tür süreçlerin düşük sıklıktaki spektral yoğunluk fonksiyonuna iyi uyum sağlamadığını, bu nedenle

uzun dönem kestirimlerinin geçerliliğine çekinceli bakılması gerektiğini de belirtelim. GPH bu tartışmalardan ve Granger ve Joyeux (1980) ve Hosking (1981) çalışmalarından etkilenerek spektral yoğunluk fonksiyonunun sıfır sıklığı çevresinde ω^r , $1 < r < 2$ formunda davrandığı ve ardışık bağımlılık fonksiyonunun kesinlikle toplanabilir olmadığı aradaki model sınıfını incelemişlerdir. Sıfır sıklığında sınırsız spektral yoğunluğa sahip olup da birinci dereceden fark alındığı zaman bu değer kaybolduğu özel veri üretim süreci –bölüntüsel bütünleşik seriler- $(1 - L)^d y_t = \varepsilon_t$, $d \in [-1/2, 1/2]$ ile gösterilebilir. Bu tip bir serinin spektral yoğunluğu

$$f(\omega, d) = \frac{\sigma^2}{2\pi} |1 - e^{-i\omega}|^{-2d} = \frac{\sigma^2}{2\pi} [4 \sin^2(\omega/2)]^{-d} \quad (4.23)$$

formunda olacaktır. Hurst (1951) tarafından ilk kez önerilen bölüntüsel Gaussian gürültü için spektral yoğunluğun

$$f(\omega, H) = \sigma^2 (2\pi)^{-2H-2} \Gamma(2H+1) \sin(\pi H) 4 \sin^2(\omega/2) \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| n + \frac{2\omega}{H} \right|^{-2H-1} \quad (4.24)$$

olduğu düşünüldüğünde H katsayılı genel bölüntüsel Gaussian gürültünün spektral yoğunluğunun, $H-1/2$ katsayılı genel bütünleşik serilerin spektral yoğunluğuna denk olduğu görülecektir. Bu sonuç H ve d arasındaki geçişin $H=d+1/2$ olduğunu gösterir (Kanıt için bkz. GPH, 1983, sayfa 224). Ancak GPH bölüntüsel bütünleşme katsayısı kestiricisinin hesaplanması bu yolla yapılmaz.

GPH yaklaşımını incelemek için $(1 - L)^d x_t = u_t$ olan bir süreç düşünelim. Burada u_t durağan, doğrusal ve $f_u(\omega)$ formunda sınırlı ve sürekli bir spektral yoğunluğa sahip olsun. Bu durumda $\{x_t\}$ serisinin spektral yoğunluğu aşağıdaki gibi olur.

$$f_x(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} [4 \sin^2(\omega/2)]^{-d} f_u(\omega) \quad (4.25)$$

Tüm değerler sıfırdan büyük olduğuna göre logaritmaları alınabilir.

$$\ln[f_x(\omega)] = \ln\left[\frac{\sigma^2 f_u(\omega)}{2\pi}\right] - d \ln[4 \sin^2(\omega/2)] + \ln\left[\frac{f_u(\omega)}{f_u(0)}\right] \quad (4.26)$$

Örneklem büyüklüğü T iken harmonik ordinatlar $\omega_{j,t} = 2\pi j/T$ ve $I(x_{j,t})$ bu ordinatlardaki periodogram olduğuna göre

$$\ln[I(\omega_j)] = \ln\left[\frac{\sigma^2 f_u(0)}{2\pi}\right] - d \ln\left[4 \sin^2\left(\frac{\omega_j}{2}\right)\right] + \ln\left[\frac{f_u(\omega_j)}{f_u(0)}\right] + \ln\left[\frac{I(\omega_j)}{f_x(\omega_j)}\right] \quad (4.27)$$

denklemini kurulabilir. Bu bir regresyon denklemi olarak düşünüldüğünde log periodogram bağımlı değişkeni, $\ln[\sigma^2 f_u(0)/2\pi]$ sabit terimi, d eğim katsayısını, $\ln[4 \sin^2(\omega_j/2)]$ açıklayıcı değişkeni karşılar. $\ln[f_u(\omega_j)/f_u(0)]$, sıfır sıklığı çevresindeki harmonik ordinatlar dikkate alındığında göz ardı edilebilir. (4.27) ifadesinin son terimi $-c$ (Euler sabiti) ortalama ve $\pi^2/6$ değişke ile benzer ve bağımsız dağılır ve hata terimi gibi düşünülebilir (Geweke ve Porter-Hudak, 1983). Önerilen katsayı kestiricisi, harmonik ordinatlardaki log periodogramın $j = 1, \dots, g(T)$ örneklemini için sabit terim ve $\ln[4 \sin^2(\omega_j/2)]$ üzerindeki regresyonunun eğim katsayısıdır. Burada $g(T)$ bölüntüsel bütünleşme katsayısı kestiriminin kavuşmazda normal dağılmasını sağlayacak şekilde seçilmelidir. GPH (1983) kestiriciyi önerdikleri teoremden $g(T)$ ile ilgili bir merkezi limit teoremi de ortaya koyarlar ve $g(T)$ 'nin aşağıdaki koşulları sağlaması gerektiğini belirtirler.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} g(T) = \infty, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} g(T)/T = 0$$

Bu koşulları sağlayan $n = g(T)$ örneklem büyüklüğünde log periodogramın en küçük kareler regresyonu için

$$p \lim b_1 = -d$$

olduğu söylenebilir (Teorem ve kanıtı için bkz. GPH, 1983, sayfa 226). GPH bölüntüsel bütünleşme katsayısının güvenilir kestirimler vermesi için $g(T)$ 'nin nasıl seçilmesi gerektiği kuramsal olarak ortaya konulmuştur. Ancak uygulamada bu

koşulları sağlayan örneklem büyüklüğünün nasıl belirleneceği sorunu ortadan kalkmamıştır. Yazarların önerisi $g(T)=T^\alpha$ ($\alpha = 0.5, 0.6, 0.7$) şeklinde bir hesaplama değildir. Ayrıca, GPH $g(T)$ 'nin seçimini kurulacak ARFIMA(p,d,q) modeli ile yapılacak 20 adım öte kestirimlerin ortalama hata karelerini en küçükleyecek α değerinin seçilmesini de önerirler. Yaptıkları benzetimler sonucunda güvenilir kestirimler veren α değerinin 0.55 ile 0.60 arasında değiştiğini vurgularlar.

Bir kere d katsayısı kestirildikten sonra $f_u(\omega) = f(\omega)/f(\omega, d)$ denkliği kullanılarak u_t serisinin spektral yoğunluğu bulunabilir. GPH (1983) bu işlem için şu süreci önerirler: (1) Dizinin kesin sonlu Fourier dönüşümü harmonik ordinatlarda hesaplanır, (2) Fourier dönüşümü uygulanan seri $(1 - e^{-i\omega})^d$ ile çarpılır, (3) Bu çarpıma kesin ters Fourier dönüşümü uygulanır ve (4) $f_u(\omega)$ 'nin modellenmesi için geleneksel yöntemler kullanılır.

Bir başka bölüntüsel bütünleşme katsayısı kestirim yöntemine geçmeden önce bir yöntem olara ele almadığımız ancak dikkat edilmesi gerektiğine inandığımız üç farklı kestiriciden daha bahsedelim. Bunlardan ilki Janacek (1982) tarafından önerilen ve GPH gibi log periodogram değerleri üzerinden hesaplanan bir katsayıdır. Ancak bu kestiricinin kavuşmaz özellikleri ile ilgili bir çıkarım olmadığından yazında kullanılmaz. İkincisi ise Shea (1990) tarafından önerilmiştir. Yazar, GPH log periodogram denkleminin en küçük kareler yerine en yüksek olabilirlik tekniği kullanılarak kestirilmesi gerektiğini öne sürer.

Üçüncü yöntem ise Phillips'in (1999a, 1999b) geliştirilmiş log periodogram kestiricisidir. Aslında Phillips'in çıkarımı bölüntüsel bütünleşik seriler yaklaşımını kullanarak birim kökün varlığını araştırmaktır, çünkü Phillips ve Kim (1999) log periodogram denkleminin kestirilen d değerinin bir ile sınırlandırılmış olduğunu gösterirler. Phillips (1999a), çalışmasındaki bir teoreme toplanabilirlik özelliğini kullanarak bölüntüsel bütünleşik serilerin kesikli Fourier dönüşümlerini aşağıdaki şekilde ifade eder.

$$f_u(\omega) = f_x(\omega)D_n(e^{i\omega}; d) + \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}(\tilde{X}_{\omega 0}(d) - e^{in\omega}\tilde{X}_{\omega n}(d))$$

Bu ifadede

$$\tilde{X}_{\omega n}(d) = \tilde{D}_{n\omega}(e^{-i\omega}L; d)X_x = \sum_{p=0}^{n-1} \tilde{d}_{\omega p} e^{-ip\omega} X_{n-p}$$

olmaktadır. $t < 0$ için $u_t = 0$, ve $X_t = 0$ varsayılır, $\tilde{X}_{\omega 0}(d) = 0$ olur. Bu durumda

$$f_u(\omega) = f_x(\omega)D_n(e^{i\omega}; d) - \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}(e^{i\omega} \tilde{X}_{\omega n}(d))$$

olacaktır. Bu son gösterimde zaman serisinin spektral yoğunluğu ile hata terimlerinin spektral yoğunluğu arasındaki ilişki $\tilde{X}_{\omega n}(d)$ ile düzeltilmiş olarak gösterilir. Bu gösterim iki önemli bileşenin varlığını ortaya çıkarır. Bunlardan ilki fark alma filtresinin transfer fonksiyonu ile ölçeklendirilmiş hata terimlerinin kesikli Fourier dönüşümleridir. İkincisi ise gözlemlerin ağırlıklandırılmış sinusoidal toplamıdır.

$\omega_s = 2\pi s / n$ ile hesaplanan temel sıklıklarda

$$f_x(\omega_s) = \frac{1}{1 - e^{i\omega_s}} \left[f_u(\omega_s) - e^{i\omega_s} \frac{X_n}{\sqrt{2\pi n}} \right]$$

eşitliği karşımıza çıkar. Bu ifadenin karesi alınarak elde edilen periodogramın logaritması alındığında ise Phillips geliştirilmiş log periodogram kestiricisi karşımıza çıkar.

$$\log |f_x(\omega_s)|^2 = -2 \log |1 - e^{i\omega_s}| + \log \left| f_u(\omega_s) - e^{i\omega_s} \frac{X_n}{\sqrt{2\pi n}} \right|^2$$

4.2.5 Sowell en yüksek olabilirlik yaklaşımı

Sowell (1992) ekonomik ve finansal zaman serisi modellerinin uzak gözlemler arasındaki güçlü bağımlılığı yakalamakta zayıf olduğunu başka bir anlamda bu modellerde bölüntüsel bütünleşmenin dikkate alınmadığını öne sürerek en etkin olduğunu savunduğu bir en yüksek olabilirlik kestiricisi önermiştir.

$$\phi(L)(1-L)^d y_t = \theta(L)\varepsilon_t \quad (4.28)$$

(4.28) bölüntüsel bütünleşik ardışık bağımlı hareketli ortalama modellerinin en genel gösterimidir. Bu gösterimde $\phi(L)$ p ya da daha küçük dereceden, $\theta(L)$ q ya da daha küçük bir dereceden polinom olup kökleri birim çemberin dışındadır ve kökler basittir. $d < 1/2$ olarak varsayılır ve hata terimleri sıfır ortalama ve sabit değişke ile normal dağılmaktadır. Sowell'in iki adımlı ARFIMA modellemesini reddettiği nokta önce bölüntüsel bütünleşme katsayısının kestirilmesi sonra bu değer kullanılarak fark alınan serilerin geleneksel yöntemler aracılığıyla modellenmesidir. Bunun savunusunu verirken $(1-L)^d$ filtresinin sonsuz gecikmeli bir polinom olarak kurulduğunu, oysa gözlemlenen serilerin ise sonlu olduğunu belirtir. GPH (1983) dönüştürme süreci bu etkiden kendinin kurtarmaktadır, ancak başka bir sorun ortaya çıkar. Bölüntüsel bütünleşme katsayısının kestirimi için kurulan denklemler kısa süreli hafıza süreçlerinin etkisindedir. Bu boyut bilinmediği zaman kestirimlerin güvenilirliğinden bahsetmek olanaksızlaşır.

Bu ve benzeri nedenlerden ötürü Sowell modelin tüm bilinmeyen katsayılarının aynı anda kestirildiği yöntemi önermiştir. Nasıl işlediğini görmek için $y_t \sim N_T(0, \Sigma)$ dağılımlı bir seri ele alalım. Normal olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(y_t, \Sigma) = 2\pi^{-T/2} |\Sigma|^{-1/2} e^{-\frac{1}{2} y_t' \Sigma^{-1} y_t} \quad (4.29)$$

formunda ifade edilebilir.

Bir de, durağanlığın ortak değişke fonksiyonunun Toeplitz formunda olması gerekliliğini dayatmasını dikkate alalım.

$$\Sigma = [\gamma(|i-j|)] = (-i)^{|i-j|} \frac{\Gamma(1-2d)}{\Gamma(1-d+|i-j|)\Gamma(1-d-|i-j|)} \quad (4.30)$$

Kurulacak modelin katsayılarını en yüksek olabilirlik yöntemiyle kestirmek olabilirlik fonksiyonunun veri katsayılar kümesi için değerlendirilmesini zorunlu kılar. Bu da ortak değişke matrisinin modelin katsayıları cinsinden yazılmasını

gerektirir. Ortak değişke fonksiyonunun katsayısallaştırılması y_t 'nin spektral yoğunluğunun modelin katsayıları cinsinden yazılması ve ortak değişke fonksiyonunun

$$\gamma(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_y(\omega) e^{i\omega k} d\omega \quad (4.31)$$

aracılığıyla hesaplanması yoluyla gerçekleştirilir. Sowell (1992) y_t 'nin spektral yoğunluğunu iki adımda hesaplar. $u_t = (1-L)^d y_t$ olan serinin spektral yoğunluğu ilk sırada hesaplanır, sonra da y_t 'nin spektral yoğunluğuna geçilir.

$\phi(L)u_t = \theta(L)\varepsilon_t$ gösteriminin bir ARMA(p, q) modeli olduğu bilinmektedir. O halde bu modelin Wold gösterimi

$$u_t = \frac{\theta(L)}{\phi(L)} \varepsilon_t$$

şeklinde olacaktır. Bölümün başında yapılan polinom köklerinin birim çemberin dışında oluşu varsayımından yola çıkılarak

$$\phi(x) = \prod_{j=1}^p (1 - \phi_j x) \quad ; \quad |\phi_j| < 1$$

yazılabilir. O halde u_t 'nin spektral yoğunluğu

$$f_u(\omega) = \frac{|\theta(\lambda)|^2}{|\phi(\lambda)|^2} \sigma^2 = |\theta(\lambda)|^2 \sigma^2 \prod_{j=1}^p (1 - \phi_j \lambda)^{-1} (1 - \phi_j \lambda^{-1})^{-1} \quad ; \quad \lambda = e^{i\omega} \quad (4.32)$$

olarak hesaplanır.

$\theta(x)$ sonlu dereceden olduğu için $|\theta(\lambda)|^2$ teriminin her elemanı üsteleri artı ve eksi işaretli polinomlar olarak yazılabilir. O halde

$$|\theta(\lambda)|^2 = \sum_{l=-q}^q \psi(l) \lambda^l$$

$$\psi(l) = \sum_{s=\max(0,l)}^{\min(q,q-1)} \theta_s \theta_{s-l}$$

olur. En genel anlamda ARMA gösteriminin spektral yoğunluğu

$$f_u(\omega) = \sigma^2 \sum_{l=-q}^q \psi(l) \lambda^l \sum_{j=1}^p \lambda^p \xi_j \left[\frac{\phi_j^{2p}}{1 - \phi_j \lambda} - \frac{1}{1 - \phi_j^{-1} \lambda} \right] ; \quad \lambda = e^{i\omega} \quad (4.33)$$

ile gösterilebilir (Sowell, 1992).

$f_y(\omega) = |1 - \lambda|^{-d} f_u(\omega)$ olduğundan, (4.33) denkliği bu ifadede yerine konulduğunda ARFIMA(p, d, q) sürecinin spektral yoğunluğu ortaya çıkar.

$$f_y(\omega) = \sigma^2 \sum_{l=-q}^q \sum_{j=1}^p \psi(l) \lambda^{p+l} \xi_j \left[\frac{\phi_j^{2p}}{1 - \phi_j \lambda} - \frac{1}{1 - \phi_j^{-1} \lambda} \right] \times |1 - \lambda|^{-d} ; \quad \lambda = e^{i\omega} \quad (4.34)$$

(4.34) ifadesindeki ξ_j terimi

$$\left[\rho_j \prod_{i=1}^p (1 - \rho_i \rho_j) \prod_{m \neq j} (\rho_j - \rho_m) \right]^{-1}$$

olarak yazılmaktadır. Ortak değişkeler, (4.34) ifadesini (4.31)'te yerine koymak yoluyla elde edilebilir. Spektral yoğunluğun özelliklerinden ötürü bu ifade aşağıdaki integralin hesabına indirgenir.

$$C(d, h, \rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^{2p}}{1 - \rho e^{-i\omega}} - \frac{1}{1 - \rho^{-1} e^{-i\omega}} \right] \times |1 - e^{-i\omega}|^{-d} e^{-i\omega h} d\omega$$

Ortak değişkeler ise

$$\gamma(s) = \sigma^2 \sum_{l=-q}^q \sum_{j=1}^p \psi(l) \xi_j C(d, p+l-s, \rho_j)$$

ile hesaplanır. Sowell (1992) ortak değişkelerin hesaplanma sürecini daha etkin bir hale getirmek için hipergeometrik bir fonksiyon kullanılabileceğini öne sürer ve $C(d, h, \rho)$ teriminin şu şekilde de yazılabileceğini gösterir.

$$C(d, h, \rho) = \frac{\Gamma(1-2d)\Gamma(d+h)}{\Gamma(1-d+h)\Gamma(1-d)\Gamma(d)} \times [\rho^{2p} F(d+h, 1; 1-d+h; \rho) + F(d-h, 1; 1-d-h; \rho) - 1]$$

Burada $F(a, b; c; x)$ hipergeometrik fonksiyondur.

Sowell'in en yüksek olabilirlik yöntemiyle bölüntüsel bütünleşme katsayısı hesaplama yöntemi şu şekilde çalışır: Önce AR polinomu parçalar ayrılır, ξ_j 'ler hesaplanır. Değişik d , h ve ϕ değerleri için $c(d, h, \phi)$ 'ler bulunur ve ortak değişke fonksiyonu hesaplanır. Cholesky parçalanması ve ortak değişke matrisinin tersinin determinantı hesaplanarak log olabilirlik değeri bulunur. Bu değer en küçüklenene kadar süreç devam eder. Başlangıç değerleri ise R/S veya GPH kullanılarak hesaplanır.

4.2.6 Robinson Log ACV yaklaşımı

Robinson (1990), Delgado ve Robinson (1994) $\phi(L)(1-L)^d(y_t - \mu) = \theta(L)\varepsilon_t$ formundaki uzun süreli hafıza modellerinin aslında $(1-L)^d(y_t - \mu) = e_t$ gibi basit bir modeli içinde barındırdığını ileri sürer. Uygun p ve q değerleri için (gecikme polinomlarının dereceleri) yapılacak d kestirimleri güvenilir olabilir. Ancak her zaman p ve q değerlerinin ne olduğu bilgisine sahip olmak olası değildir. Bu nedenle Robinson, uzun süreli hafıza süreçlerinin sadece (4.13) ve (4.14) özellikleri kullanılarak yapılacak kestirimlerinin kısa dönem dinamiklerinden etkilenmeyeceğini ileri sürer. Bu yol sadece serinin uzun dönem davranışıyla ilgilenildiği için yarı katsayısal olarak değerlendirilebilir.

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \gamma_j = cj^{2d-1} \quad (4.35)$$

(4.35) özelliği incelendiğinde j 'nin büyük değerleri için ortak değişkelerin hepsinin sıfırdan büyük olduğu görülür. O halde aşağıdaki denklemi yazmak yanlış olmayacaktır.

$$\log \gamma_j \approx \log c + (2d - 1) \log j \quad j \rightarrow \infty \quad (4.36)$$

Bu ilişki d açısından doğrusal olma avantajına sahiptir. Ortak değişkeleri örneklemden hesaplanan ortak değişkelerle değiştirerek aşağıdaki en küçük kareler regresyonu hesaplanabilir.

$$\log \hat{\gamma}_j = \log c + (2d - 1) \log j \quad j = n - r, \dots, n - 1 \quad (4.37)$$

Burada $r < n$ olan büyük bir tamsayıdır.

4.2.7 Robinson en küçük uzaklık yaklaşımı

Robinson (1990) log ACV hesaplama anlamında kolay olsa da örneklemden hesaplanan ortak değişkeler bazı durumlarda sıfırdan büyük olmayabilir. Bu nedenle Robinson alması bir yordam önermiştir (Robinson, 1990; Delgado ve Robinson, 1994). Bu kestirici, örneklem ortak değişke değerleri ile cj^{2d-1} arasındaki uzaklığın karesini en yüksek j değerleri için en küçükleme ile elde edilir.

$$(\hat{d}, \hat{c}) = \arg \min_{c, d} \sum_{j=n-r}^{n-1} [\hat{\gamma}_j - cj^{2d-1}]^2 \quad (4.38)$$

(4.38) ifadesinden c 'nin çıkarılması ile aşağıdaki fonksiyon elde edilir.

$$\hat{d} = \arg \max_d \left[\frac{\left\{ \sum_{j=n-r}^{n-1} \hat{\gamma}_j j^{2d-1} \right\}^2}{\sum_{j=n-r}^{n-1} j^{2(2d-1)}} \right] \quad (4.39)$$

Yazında (4.39) kestiricisinin kullanımına Delgado ve Robinson (1994) dışında rastlanmamıştır. Bunun nedeni bu kestiriciye ait kavuşmaz özelliklerinin türetilmemiş olması olabilir. Bu nedenle Robinson en küçük uzaklık yaklaşımı daha ayrıntılı incelenmeyecektir.

4.2.8 Robinson APER yaklaşımı

Lobato ve Robinson (1996) tarafından önerilen bölüntüsel bütünleşme katsayısı kestiricisi Hurst'ün tanımladığı H katsayısını kullanır. $H \in (1/2, 1)$ spektral yoğunluğun sıfır sıklığı çevresindeki şeklini etkiler. Bu anlamda kestirim yöntemi yarı katsayısaldır. Spektral yoğunluk sadece sıfır sıklığı çevresinde katsayısallaştırılır. Bölüntüsel bütünleşme katsayısının kestirimi m eşit uzaklıktaki sıklığın periodogram değerlerinin ortalaması üzerinden gerçekleştirilir. Robinson (1994) ve Lobato ve Robinson (1996) GPH yaklaşımını geliştirmişlerdir. Hatırlanacağı üzere GPH kestiricisi $\omega_j = 2\pi j / n$ ordinatlarında hesaplanan

$$I(\omega_j) = \frac{1}{2\pi n} \left| \sum_{t=1}^n y_t e^{it\omega_j} \right|^2 ; \quad j = 1, 2, \dots, m < n/2 \quad (4.40)$$

periodogram değerlerine dayanmaktadır. Robinson en düşük l sıklığın katkısının kırılması yoluyla kestiriciyi geliştirmeye çalışır. Buradaki l değerinin nasıl seçileceği hakkında henüz bir bilgi elde edilmemiştir ancak örneklem büyüklüğü sonsuza yaklaştıkça $l/m \rightarrow 0$ koşulunun sağlanması gerekir. Aynı zamanda y_t 'nin Gaussian olması da varsayılır. Kırılma ve Gaussianlık log periodogramın hesaplanmasındaki matematiksel zorlukları ortadan kaldırmak için tercih edilmiştir. Lobato ve Robinson (1996) periodogram değerlerinin ağırlıklı ortalamasının daha kolaylıkla ele alınacağını öne sürdükleri için

$$\hat{F}(\omega) = \frac{2\pi}{n} \sum_{j=1}^{[n/2\pi]} I(\omega_j) \quad (4.41)$$

büyüklüğünü önerirler. $[\cdot]$ hesaplanan değerin tamsayı kısmını gösterir.

Kullanıcı tarafından seçilen $q \in (0,1)$ değeri için aşağıdaki basit kestirici önerilmiştir.

$$\hat{H}_q = 1 - \frac{1}{2 \log q} \log \left\{ \frac{\hat{F}(q\omega_n)}{\hat{F}(\omega_n)} \right\} \quad (4.42)$$

Robinson bu kestirimin örneklem büyüklüğü sonsuza yaklaştıkça olasılıksal olarak anakütle katsayısına yakınsadığını göstermiştir. (4.42) ifadesinden de anlaşılabileceği gibi Hurst katsayısının kestirim değerleri m ve q 'nun seçimine göre farklılık gösterecektir. Harmonik ordinat sayısı m 'nin nasıl belirleneceği Delgado ve Robinson (1994) çalışmasında belirtilmiştir. Kullanıcının tercihine bırakılan q 'nun seçimi ise yöntemin en kısıtlayıcı yönüdür. Lobato ve Robinson (1996) yaptıkları Monte Carlo benzetimleri aracılığıyla $q = 0.5$ seviyesinin optimal olduğu sonucuna varırlar. Ancak kestiriciyi önerdikleri çalışmada $q = 0.8$ olarak kullandıkları da gözden kaçırılmamalıdır.

Bir başka bölüntüsel bütünleşme katsayısı kestirim yöntemine geçmeden önce hesaplanan katsayının normal ve normal olmayan kısıt dağılımları ele alınacaktır. $H \in (1/2, 3/4)$ durumunda kısıt dağılımı normaldir ve örneklem büyüklüğü sonsuza yaklaştıkça (4.43) ile ifade edilir.

$$m^{1/2}(\hat{H}_q - H) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{(1 + q^{-1} - 2q^{1-2H})(1-H)^2}{(\log q)^2 (3-4H)}\right) \quad (4.43)$$

$H \in (3/4, 1)$ durumunda ise kısıt dağılımı normal değildir ve örneklem büyüklüğü sonsuza yaklaştıkça (4.44) ile ifade edilir.

$$m^{2-2H}(\hat{H}_q - H) \xrightarrow{d} \frac{(1 - q^{2H-2})(1-H)\Gamma(2-2H)\cos((1-H)\pi)}{\log q \cdot 2\pi^{2-2H}} T \quad (4.44)$$

4.2.9 Robinson Log Periodogram yaklaşımı

Bölüntüsel bütünleşme katsayısının yarı katsayısal kestiricilerinden GPH yaklaşımının zaman serilerinin bu özel bütünleşme haline kısıtlı bir pencereden baktığı Robinson (1995) tarafından ileri sürülmüştür. En düşük sıklık değerlerinin

kestirim sürecinin dışında bırakılması gerekliliğini savunarak yeni bir kestirici önerilmiştir.

Bir ARFIMA(p,d,q) sürecinin, Brockwell ve Davis (1991) gösteriminde, spektral yoğunluğunun (4.45) formunda olduğu bilinmektedir.

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{|\theta(e^{-i\omega})|^2}{|\phi(e^{-i\omega})|^2} |1 - e^{-i\omega}|^{-2d} \quad (4.45)$$

Robinson (1995) geliştirilmiş log periodogram kestiricisi için GPH (1983) yaklaşımındaki tanımların yanı sıra aşağıdaki ifadeleri kullanır.

$$a_j = -\log(4 \sin^2(\omega_j)/2) \quad (4.46)$$

$$\bar{a} = (m-l)^{-1} \sum_{j=l+1}^m a_j \quad (4.47)$$

$$s_l = \sum_{j=l+1}^m (a_j - \bar{a})^2 \quad (4.48)$$

$$\bar{d}(l) = \frac{\sum_{j=l+1}^m (a_j - \bar{a}) \log[I(\omega_j)]}{s_l} \quad (4.49)$$

Burada m harmonik ordinatları, l kırılma sayısını karşılar. Benzer şekilde $\bar{d}(l)$ ifadesini (4.50) şeklindeki regresyon denklemiyle de göstermek olasıdır. Bölüntüsel bütünleşme katsayısı denklemin eğim katsayısına eşit olacaktır.

$$\log[I(\omega_j)] = c + da_j + u_j \quad ; \quad j = l+1, \dots, m \quad (4.50)$$

GPH (1983) önerisi (4.49) eşitliğinin özel bir hali olan $\bar{d}(0)$ 'a karşılık gelmektedir. Çünkü yazarlar sadece sıfır sıklığının çevresini inceleme alanı olarak belirlemişlerdir.

Delgado ve Robinson (1994)

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} 4 \sin^2(\omega/2) = \omega^2$$

koşulundan yola çıkarak (4.50) regresyon denkleminde $-\log(4 \sin^2(\omega_j)/2)$ yerine $-2 \log \omega_j$ kullanılabileceğini öne sürerler ve bölüntüsel bütünleşme katsayısının kestirimi için şu eşitliği önerirler.

$$\hat{d} = -\frac{1}{2} \frac{\sum_{j=l+1}^m \left(\log \omega_j - m^{-1} \sum_{j=l+1}^m \log \omega_j \right) \log I(\omega_j)}{\sum_{j=l+1}^m \left(\log \omega_j - m^{-1} \sum_{j=l+1}^m \log \omega_j \right)} \quad (4.51)$$

(4.51) ifadesinde l kırılma sayısıdır. Robinson (1995) bu kestirici ile ilgili aşağıdaki dağılımın geçerli olduğunu belirtir.

$$2m^{1/2}(\hat{d} - d) \xrightarrow{d} N(0, \pi^2/6) \quad (4.52)$$

4.2.10 Robinson GSE yaklaşımı

Robinson (1995) Gaussian yarı katsayısal kestiricisinde bölüntüsel bütünleşme katsayısını Hurst anlamında ele alır ve öz-benzerlik katsayısı olarak adlandırır. Önerilen kestirici bazı açılardan GPH (1983) ve Robinson log periodogram (1995) kestiricilerini baskılar. Çünkü kavuşmazda daha etkindir, Gaussianlikten daha zayıf varsayımlara sahiptir, düşük sıklıktaki kırılma işlemi ve kullanıcı tarafından seçilen q değeri bu süreçte işin içine girmez.

$I(\omega_j)$ en genel anlamda periodogram olmak üzere şu amaç fonksiyonu tanımlanır:

$$Q(G, H) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \log \left[G \omega_j^{1-2H} + \frac{\omega_j^{2H-1}}{G} I(\omega_j) \right] \quad (4.53)$$

(4.53) amaç fonksiyonu kullanılarak Hurst katsayısı

$$\hat{H} = \arg \min_{H \in \theta} R(H)$$

ile hesaplanır. Bu ifadede

$$R(H) = \log \hat{G}(H) - (2H - 1) \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \log \omega_j \text{ ve}$$

$$\hat{G}(H) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \omega_j^{2H-1} I(\omega_j)$$

olmaktadır. Bu kestiricide örneklem büyüklüğü tek ise $m = (n-1)/2$, çift ise $m = n/2$ olarak alınır. $\hat{H}$, $f(\omega) = G_0 |\omega|^{1-2H_0}$ katsayısal modelindeki H_0 değerinin Gaussian bir kestiricisi olur. Bu kestirim istatistiğinin kısıt dağılımı

$$m^{1/2}(\hat{H} - H_0) \xrightarrow{d} N(0, 1/4) \quad (4.54)$$

olarak bilinir (Robinson, 1995). Kısıt dağılımının değişkenin tüm H_0 değerleri için sabit kaldığı, başka bir deyişle anakütle Hurst katsayısının değerinden bağımsız olduğu görülebilir. Tüm diğer bilinmeyenlerden bağımsız olması anlamında katsayı kestiriminde rahatlıkla kullanılabilir.

4.2.11 TSB en küçük uzaklık yaklaşımı

Tieslau ve diğ. (1996) –bundan sonra TSB- örneklem ve anakütle ardışık bağımlılık katsayıları arasındaki uzaklığı en küçükleyecek bir bölüntüsel bütünleşme katsayısı kestirim yöntemi önermişlerdir. Bu kestirim yöntemi, bölüntüsel bütünleşme katsayısını kısa dönem dinamiklerini belirleyen ARMA yapısının etkisinden bağımsız olan yüksek dereceli ardışık bağlanım değerlerini –çünkü ardışık bağlanım katsayılarının azalma hızı sadece d' ye bağımlıdır- kullanarak hesaplaması anlamında cezp edicidir.

En küçük uzaklık kestiricisi için $k, k+1, \dots, k+n$; $k \neq 1$ ardışık bağımlılık katsayısı kullanılır. Bir y_t sürecinin ardışık bağımlılık fonksiyonunun ρ_j ile gösterildiğini düşünelim. ARFIMA(0, d ,0) süreci bir tek d katsayısına bağımlıdır ve anakütle

ardışık bağımlılık katsayıları d 'nin bir fonksiyonudur. Bunu (4.9) denklemiyle göstermiştik.

$$\rho(h) = \frac{\Gamma(h+d)\Gamma(1-d)}{\Gamma(h-d+1)\Gamma(d)} = \prod_{0 < k \leq h} \frac{k-1+d}{k-d} ; h=1,2,\dots$$

Örneklem ardışık bağımlılık katsayılarının hesaplanması bilinen yolla gerçekleştirilir.

$$\hat{\rho}_j = \frac{\sum_{t=1}^{T-j} (y_t - \bar{y})(y_{t+j} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2}$$

O halde ilk n anakütle ve örneklem ardışık bağımlılık katsayısından şu vektörler oluşturulur.

$$\rho(d) = [\rho_1(d) \ \rho_2(d) \ \dots \ \rho_n(d)]' \quad (4.55)$$

$$\hat{\rho} = [\hat{\rho}_1 \ \hat{\rho}_2 \ \dots \ \hat{\rho}_n]' \quad (4.56)$$

TSB (1996) bölüntüsel bütünleşme katsayısını aşağıdaki fonksiyonu en küçükleyen d değeri olarak seçmeyi önerirler.

$$S(d) = [\hat{\rho} - \rho(d)]' W [\hat{\rho} - \rho(d)] \quad (4.57)$$

(4.57) ifadesinde W bakışık, artı-tanımlı bir ağırlık matrisidir. Kavuşmazdaki optimal ağırlık matrisi $W=C^{-1}$ olarak kullanılır. C , örneklem ardışık bağımlılık değerlerinin değişke ortak değişke matrisidir. Daha genel olan ARFIMA(p,d,q) sürecine geçmeden önce bu kestiricinin dağılım özelliklerini inceleyelim. Hosking (1996) $d \in (-1/2, 1/4)$ için

$$\sqrt{T}[\hat{\rho} - \rho(d)] \rightarrow N(0, C) \quad (4.58)$$

olduğunu gösterir. Bu ifadede kavuşmaz ortak değişke matrisi C 'nin elemanları Hosking'e göre $i, j = 1, \dots, n$ için

$$c_{i,j} = \sum_{s=1}^{\infty} (\rho_{s+1} - \rho_{s-i} - 2\rho_s \rho_i)(\rho_{s+j} - \rho_{s-j} - 2\rho_s \rho_j) \quad (4.59)$$

ile tanımlanır. TSB (1996) ARFIMA(0,d,0) süreci için (4.58) ifadesini aşağıdaki gibi geliştirirler.

$$\sqrt{T}[\hat{\rho} - \rho(d)] \rightarrow N[0, (D' C^{-1} D)^{-1}] \quad (4.60)$$

(4.60)'da yer alan D vektörü, $n \times 1$ boyutlu, $\partial \rho(d) / \partial d$ ile hesaplanan türevler vektörüdür.

Eğer zaman serisi ARFIMA(p, d, q) sürecine sahipse ve p ile q dereceleri biliniyorsa TSB en küçük uzaklık kestiricisi hesaplama açısından zor olsa da kavramsal olarak o kadar da zor değildir. $l = p + q$ ve ψ l boyutlu bir AR ve MA katsayıları vektörü olsun. $\lambda = [d, \psi']$ olarak tanımlandığında $\rho(\lambda)$ ve $D_\lambda = \partial \rho / \partial \lambda$ olarak yazılabilir. Hosking'in (4.58) yakınsaklığı aynı koşullar geçerli olmak üzere ARFIMA(p, d, q) süreçleri için de geçerlidir. O halde

$$\sqrt{T}[\hat{\lambda} - \lambda] \rightarrow N[0, (D'_\lambda C^{-1} D_\lambda)^{-1}] \quad (4.61)$$

olarak yazılabilir.

TSB aynı zamanda ardışık bağımlılık katsayılarının oranlanması ile en küçük uzaklık kestiricisinin uygulanabileceğini belirtir ancak kavuşmaz davranışı hakkında bir çıkarım yapmaz.

$$[\rho_{k+1} / \rho_k \quad \rho_{k+2} / \rho_k \quad \dots \quad \rho_{k+n} / \rho_k] \quad ; \quad T \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$$

Bu kestirici Robinson tarafından önerilen en küçük uzaklık tekniğine çok benzerdir. Hatırlanacağı üzere Robinson en küçük uzaklık yaklaşımı yüksek j değerleri için ortak değişkelerin j^{2d-1} 'e orantılı olduğunu kabul eder. İki kestirici arasındaki en

önemli fark Robinson uzaklıkların karesini en küçüklemesinden kaynaklanır. Bu, ağırlık matrisinin etkin olmayan bir yansımasıdır (Tieslau ve diğ., 1996).

4.2.12 Fox ve Taqqu EYO yaklaşımı

Bu yöntem literatürde önerilmiş ikinci en yüksek olabilirlik kestiricisi olmanın yanında sıklık alanındaki tek en yüksek olabilirlik kestiricisi olma özelliğini de taşır. Güçlü bağımlılık sergileyen bir Gaussian dizinin spektral yoğunluğu $f(x, \theta)$ ile gösterilir ve x sonsuza yaklaştıkça $f(x, \theta) \sim |x|^{-\alpha(\theta)} L_\theta(x)$ koşulunu sağlar. Burada θ bilinmeyen katsayılar vektörüdür. Yöntem, uzun süreli hafıza bilgisini taşıyan katsayının diğer bilinmeyenlerden ayrı olarak kestirilmesi yerine eş anlı bir kestirim olarak önerilmiştir. Fox & Taqqu en yüksek olabilirlik kestiricisini tanımlamadan önce bazı ifadeleri açıklamak yararlı olacaktır.

$\sigma^2 R_N(\theta)$ söz konusu serinin $N \times N$ boyutundaki ortak değişke matrisidir ve elemanları $r_{j-k}(\theta)$ ile gösterilir. Temelde Whittle tarafından önerilen yaklaşımı kullanır. Bu yaklaşım

$$\frac{1}{\sigma} \exp \left\{ -\frac{Z' A_N(\theta) Z}{2N\sigma^2} \right\} \quad (4.62)$$

ifadesinin en büyüklenmesi şeklinde tanımlanabilir. Burada Z ortalamadan farkları alınmış zaman serisi vektörü ve $A_N(\theta)$ ise $N \times N$ boyutlu ortak değişke matrisidir. Bu ortak değişke matrisinin elemanları

$$a_j(\theta) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ijx} [f(x, \theta)]^{-1} dx \quad (4.63)$$

ile hesaplanabilir. Önerilen $\bar{\theta}_N$ ve $\bar{\sigma}_N^2$ kestirimleri (4.62) ifadesini en büyükleyecek θ ve σ^2 değerleridir. Bu işlem, $\bar{\theta}_N$ büyüklüğünü, (4.64) ifadesini en küçükleyecek şekilde seçmekle aynıdır.

$$\sigma^2_N(\theta) = \frac{Z' A_N(\theta) Z}{N} \quad (4.64)$$

Daha sonra $\bar{\sigma}_N^2 = \sigma^2_N(\bar{\theta}_N)$ işlemiyle bu değer de hesaplanabilir. Bunun için

$$\sigma_N^2(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x, \theta)]^{-1} I_N(x) dx \quad (4.65)$$

eşitliğin kullanılması daha yararlı olacaktır. (4.65) ifadesindeki $I_N(x)$ bileşeni periodogram değerleridir. Bunu, ARFIMA süreçlerine uyacak şekilde genellemek için şunları tanımlamak gerekir. $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_r)$ ve $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_q)$ olmak üzere $g(x, \xi) = \sum_{j=0}^p \xi_j x_j$ ve $h(x, \phi) = \sum_{j=0}^p \phi_j x_j$, AR ve MA bileşenleridir. Polinomların birim kökü yoktur. $0 < d < 0.5$ bölgesi için spektral yoğunluk (4.66) ile tanımlanır.

$$f(x, d, \phi, \xi) = C |e^{ix} - 1|^{-2d} \left| \frac{g(e^{ix}, \xi)}{h(e^{ix}, \phi)} \right|^2 \quad (4.66)$$

Önerilen kestirim tekniği için (4.66) ifadesindeki C değerinin kestirilmek istenen katsayılar cinsinden yazılması gerekmektedir. Bu eşitlik (4.67)'de görülebilir.

$$C = C(d, \phi, \xi) = \exp \left[-\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left[|e^{ix} - 1|^{-2d} \left| \frac{g(e^{ix}, \xi)}{h(e^{ix}, \phi)} \right|^2 \right] \right] \quad (4.67)$$

Fox ve Taqqu (1986) kestiriciyi tanımladıkları çalışmalarında ilgili teoremlerin hepsini kanıtlarlar ancak bir benzetim çalışması veya gerçek yaşam verisi üzerinde bir uygulama yapmazlar.

Bundan sonraki bölümlerde yukarıda açıklanan yöntemlerin sapmasızlık durumları incelenecek ve yüksek performans sergileyen yöntemler Türkiye için seçilmiş makroekonomik büyüklüklere uygulanacaktır.

5. BÖLÜNTÜSEL BÜTÜNLEŞME KATSAYISI KESTİRİM YÖNTEMLERİNİN BAŞARILARININ MONTE CARLO BENZETİMLERİ İLE KARŞILAŞTIRILMASI

Bir önceki bölümde zaman serisi çözümlemesi yazınında önerilmiş bölüntüsel bütünleşme katsayısı kestirim yöntemleri özetlenmiştir. Genellikle katsayı kestirim yöntemleri önerildiği zaman çeşitli benzetim çalışmaları aracılığıyla kestiricilerin davranışları ve sapmaları incelenir. Yazında bu bölümde olduğu kadar ayrıntılı olmasa da bununla ilgili çalışmalara rastlamak olasıdır (Geweke ve Porter-Hudak, 1983, Sowell, 1992, Cheung, 1993, Cheung ve Diebold, 1994, Smith ve diğ. 1997).

Çalışmanın bu bölümünde öncelikle bu yöntemlerin sapmasızlık durumları ele alınarak karşılaştırıldığı yazın özetlenmiş ve sonra da en önemli boşluk olarak görülen eşanlı karşılaştırma yapılmıştır. Çünkü yukarıda bahsedilen çalışmaların tamamı ayrı veri setleri üzerinden çalışmış ve sonuçları raporlamışlardır. Bu çalışmada ise tüm yöntemler aynı veri setleri üzerinden üretilmiştir.

5.1 Monte Carlo benzetimleri yazın özeti

Agiakloglou ve diğ. (1993) kısa süreli hafıza bileşenlerinin, AR ve/veya MA, varlığında GPH kestiricisinin davranışını incelemişler ve sapmalı olduğunu göstermişlerdir. $\phi(L)(1-L)^d y_t = \theta(L)\varepsilon_t$ modelinde d katsayısı da diğerleri gibi kestirilmesi zorunlu bir katsayıdır. Bu kestirim sürecinde kısa süreli hafıza bileşenleri ile uzun süreli hafıza bileşenlerinin birbirinden ayrılması olası değildir. Böyle bir ayırım AR ve MA katsayılarının önsel bilgisinin gerektirir. Oysa uygulamada böyle bir bilgiye sahip olmak olanaklı değildir. Önceki bölümde de söz edildiği gibi GPH kestiricisi geliştirilirken $\ln[f_u(\omega_j)/f_u(0)]$ bileşeni sabit olduğu gerekçesi öne sürülerek denklemden çıkarılır. Aslında $f_u(\omega_j)$, $u_t = (1-L)^d y_t$ olarak ifade edildiğinde kısa süreli hafıza bileşenlerinin de bilgisini içerir.

GPH kestiricisinin davranışını incelemek için 100 gözlemlili AR(1) veri üretim süreci seriler üretilmiştir. Bu benzetim de d katsayısının gerçek değeri sıfırdır. 1000 tekrarlı benzetim sonucunda sıfırdan büyük yüksek AR katsayılarının varlığında $d=0$ ön savının reddedildiği görülür. Bunun nedeni AR katsayısının sıfırdan büyük yüksek değerleri için logaritması alınmış spektrum beklenildiği gibi düzgün değildir. Daha çok bölüntüsel bütünleşik bir serinin spektral yoğunluğuna benzer. Bu sapma kuramsal düzeyde şöyle açıklanabilir. $z = -\ln[4 \sin^2(\omega_j/2)]$ olmak üzere

$$E(\hat{d}) = \frac{\sum_{j=1}^k (z_j - \bar{z}) E[\ln I(\omega_j)]}{\sum_{j=1}^k (z_j - \bar{z})^2}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadede log periodogramın beklenen değerinin hesaplanması gerekir. Agiakloglou ve diğ. (1993) $E[\ln I(\omega_j)] = \ln f(\omega_j) + \text{sabit}$ eşitliğinden yola çıkarak AR(1) süreci için

$$E[\ln I(\omega_j)] = -\ln(1 - 2\phi \cos \omega_j + \phi^2) + \text{sabit}$$

ve MA(1) süreci için

$$E[\ln I(\omega_j)] = -\ln(1 - 2\theta \cos \omega_j + \theta^2) + \text{sabit}$$

olduğunu gösterirler. Bu ifadenin ilgili yere konması sonucunda d kestiricisinin zaten sapmalı olduğu kolaylıkla görülebilir. Yapılan benzetimler sonucunda $\phi \geq 0.7$ bölgesinde sapmanın büyük örneklemelerde bile ciddi bir seviyeye ulaştığını belirtirler. Benzer şekilde sıfırdan büyük yüksek MA katsayılarının varlığında da kestirici sapmalı olmaktadır.

Hurvich ve Beltrao (1993) benzer şekilde $\ln[f_u(\omega_j)/f_u(0)]$ teriminin sabitliğini incelemişlerdir. Bu çalışmada GPH regresyon yönteminin özelliklerini incelemek için normal periodogram ordinatlarının, $I(\omega_j)/f(\omega_j)$, kavuşmaz davranışı gözlem altına alınır. GPH (1983) $I(\omega_j)/f(\omega_j)$ teriminin kavuşmazda sabit ortalamalı

bağımsız ve eş dağıldığını, bu nedenle kullanılan regresyon denkleminin kalıntılarının da $-\gamma$ (Euler sabiti) ortalamalı ve $\pi^2/6$ değişkeli bağımsız ve eş dağılıma sahip olduğunu söylerler. Hurvich ve Beltrao (1993)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E [I(\omega_j) / f(\omega_j)]$$

değerinin hem d 'ye hem de j 'ye bağlı olduğunu gösterirler. Bu anlamda GPH kestiricisi zayıftır. Ama birçok yönteme göre daha az varsayım barındırdığından daha fazla tercih edilir.

GPH kestiricisi ile ilgili benzetim çalışmaları Geweke ve Porter-Hudak (1983), Sowell (1992) ve Smith ve diğ. (1997) tarafından yapılmıştır. GPH (1983) Levinson-Durbin-Whittle tekrarlı algoritmasını kullanarak benzetim için veri üretirler. Bu algoritma Toeplitz matrisinin Cholesky parçalanması üzerine kuruludur. 50, 100 ve 300 gözlemlili seriler üretilerek 300 tekrarlı bir benzetim yapılır. d katsayısı 0.2, 0.35 ve 0.44 olarak seçilmiştir. Üretilen seriler bölüntüsel bütünleşik gürültüdür, kısa süreli hafızanın etkisi yoktur. Bu benzetimin sonucuna göre kestirilen d katsayısının güven aralığının dışına kalan gerçek d katsayılarının yüzdesi örneklem büyüklüğü arttıkça azalmaktadır (T=50 için %12.3'ten T=300 için %6.7'ye).

Sowell (1992) eş anlı kestirim olanağı sağlayan en yüksek olabilirlik tekniğini önerdiği çalışmada GPH, Sowell en yüksek olabilirlik ve Fox ve Taqqu en yüksek olabilirlik yöntemlerini benzetimler yardımıyla karşılaştırmıştır. Sowell çalışmasında ARFIMA(0,d,0), ARFIMA(1,d,0) ve ARFIMA(0,d,1) veri üretim süreçlerini ele alır. ARFIMA(0,d,0) süreci için 100 gözlemlili 100 tekrarlı benzetim çalışmasından GPH kestiricisindeki sapmanın $d \in (-1/2, 1/2)$ bölgesinin sınırlarına yaklaştıkça arttığı görülmüştür. Bu araştırmanın ilginç olan sonucu ARFIMA(1,d,0) süreçli serilerde GPH'nın en yüksek olabilirlik kestiricilerine oranla daha yüksek performans sergilerken ARFIMA(0,d,1) süreçli serilerde Sowell en yüksek olabilirlik kestiricisinin hepsinden daha yüksek performans sergilemesidir.

Smith ve diğ. (1997) ARFIMA(1,d,0), ARFIMA(0,d,1) ve ARFIMA(1,d,1) veri üretim süreçli modelleri kullanarak 256 gözlemlili seriler üretilip 500 tekrarlı bir Monte Carlo benzetimi yapmışlardır. GPH log periodogram regresyon denkleminde kullanılacak ordinat sayısının belirlenmesinde $m=T^\alpha$ kuralını $\alpha=0.5, 0.6$ ve 0.7 için

üç farklı değer olarak seçerler. ARFIMA(1, d ,0) veri üretim sürecinde değişen m değerleri için d kestirimleri farklılık gösterir. m arttıkça kestirilen d değeri de yükselir. d katsayısının sapması d 'nin gerçek değerlerinden bağımsızdır. Ancak AR bileşeni ile aynı yönlü bir sapmadan söz edilebilir. Bu sonuç Sowell (1992) ve Cheung (1993) ile de uyumludur. ARFIMA(0, d ,1) veri üretim süreçlerinde ise sapmak gerçek d değerinden bağımsızken sıfırdan büyük MA katsayıları ile artma eğilimi sergiler. Bu sonuç da Sowell (1992) ile tutarlıdır. ARFIMA(1, d ,1) veri üretim süreci zaman serilerinde d katsayısının GPH ile kestirimlerindeki sapma, AR ve MA katsayılarının yaklaşık aynı büyüklükte ve ters işaretli olmaları durumunda daha azdır. Farklı bileşimlerde ise AR ve MA katsayısının büyük olanının işareti sapmanın yönünü belirler.

Sowell (1992) en yüksek olabilirlik kestiricisi kısa süreli hafızanın d kestirimlerini etkileyeceği düşüncesinden yola çıkarak eş anlı bir kestirim yöntemi önerir. Sowell bu çalışmada yaptığı Monte Carlo benzetiminde ARFIMA(0, d ,0) veri üretim sürecine sahip zaman serilerinin en yüksek olabilirlik kestirimlerinin gerçek d değerlerinden bağımsız olduğunu gösterir. ARFIMA(1, d ,0) ve ARFIMA(0, d ,1) serilerinde ise en yüksek olabilirlik kestiricisi iyi bir performans sergilemektedir. Cheung ve Diebold (1994) zaman alanı ve sıklık alanında önerilen iki en yüksek olabilirlik kestiricisini karşılaştırdıkları çalışmada, ARFIMA(0, d ,0) veri üretim sürecini d 'nin ± 0.05 , ± 0.15 , ± 0.25 , ± 0.35 ve ± 0.45 değerleri için 50, 100, 300 ve 500 örneklem büyüklüklerinde 1000 tekrarlı bir Monte Carlo benzetimi yaparlar. Bunun sonucunda sapma ile ilgili varılan üç sonuç ilgi çekicidir. Her iki yöntemde de – Fox&Taqqu EYO (sıklık alanında) ve Sowell EYO (zaman alanında)- sapma sıfırdan küçüktür. Bu sonuç Sowell'de de (1992) görülebilir. İkinci olarak sabit bir örneklem büyüklüğü ve sabit bir d katsayısı için küçük örneklem büyüklüğü ve küçük d seviyelerinde Sowell EYO, Fox&Taqqu EYO'dan daha küçük bir sapma yaratmaktadır. Örneklem büyüklüğünün ve d 'nin büyük olduğu noktalarda ise sıklık alanında gerçekleştirilen en yüksek olabilirlik kestiricisi daha düşük sapmalar verir. Son olarak da sabit bir örneklem büyüklüğünde d 'nin değeri büyüdükçe Sowell en yüksek olabilirlik kestiricisindeki sapma az da olsa artma eğilimindedir. Smith ve diğ.nin (1997) çalışmasında az öncekilerle uyumlu sonuçlar raporlanmıştır. Sapma her zaman sıfırdan küçüktür. Değişen AR ve MA katsayıları için Sowell EYO sistemli bir hareket yapmaz. Ancak bu noktada bir sorunun dile getirilmesi

gerekmektedir. Sowell en yüksek olabilirlik kestiricisi serinin ortalamasının bilindiğini ve sifıra eşit olduğunu varsayar. Uygulamada böyle bir sorunla karşılaşılması zorunlu değildir. O halde ortalaması çıkartılmış serilerle çalışmak alması bir yol olarak karşımıza çıkabilir. Cehung ve Diebold (1993) ile Smith ve diğ. (1997) bu durumu da ayrı ayrı incelemişlerdir. İki çalışmanın ortak sonucu ortalaması çıkartılmış serilerin d katsayısı kestirimleri yine her zaman sıfırdan küçüktür ama sapma sabit örneklem büyüklüğünde artan d değerleri ile birlikte yükselmektedir.

Robinson APER kestiricisinin performansını inceleyen Monte Carlo benzetimleri sadece Lobato ve Robinson (1996) ile Smith ve diğ. (1997) çalışmalarında yer alır. Lobato ve Robinson (1996) kestiricinin sapma durumunu doğrudan incelemeyiz. Sadece farklı q ve m değerleri için nasıl davrandığını dikkate alır. Kestiricinin $q=0.5$ için daha iyi sonuç verdiği ancak yüksek m değerlerinde bazen $q=0.8$ 'in daha az sapma yarattığı sonucuna varılır. Smith ve diğ. (1997) m 'nin $T^{0.5}$ değerinden daha yükselmesinin ARFIMA(1, d ,0) ve ARFIMA(0, d ,1) veri üretim süreçli zaman serilerinde sapmayı arttırdığını belirtirler.

5.2 Monte Carlo benzetimi

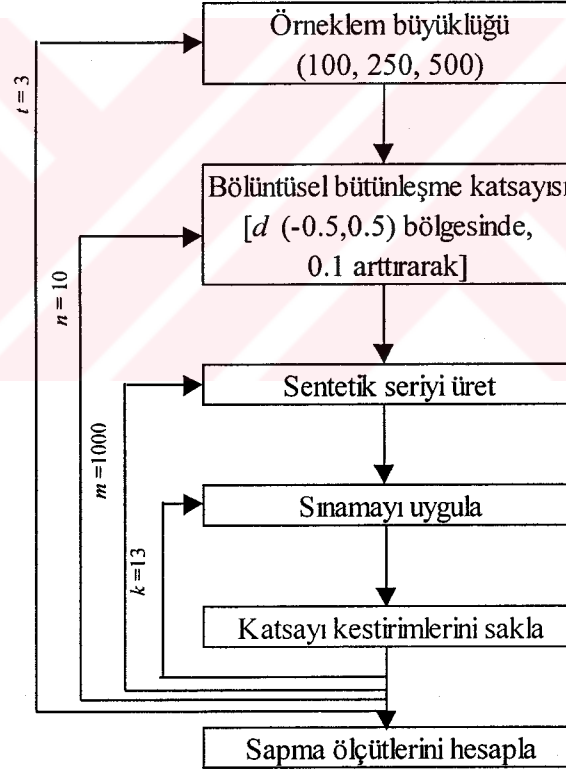
Yazındaki yukarıda sözü edilen boşluğu doldurmak amacıyla bir benzetim çalışmasının yapılmasına karar verilmiştir. Yapılan Monte Carlo benzetiminin ilgi odağı bölüntüsel bütünleşme katsayısı kestirim tekniklerinin performansının incelenmesidir. Granger ve Joyeux gridal yaklaşım, Robinson Log ACVF ve en küçük uzaklık kestiricileri kavuşmaz özelliklerinin türetilmemiş olmasından, Fox ve Taqqu en yüksek olabilirlik ve TSB en küçük uzaklık kestricileri yazılmış bir bilgisayar programı olmamasından, Hurst R/S ve Lo R/S ise bir kestirim tekniği olmaktan öte uzun süreli hafızanın varlığı araştıran bir sınama olduğundan dolayı kapsam dışında bırakılmıştır. Bu yöntemler dışarıda bırakıldığında elde, GPH log periodogram, Robinson GSE, Robinson Log periodogram, Sowell en yüksek olabilirlik, Robinson APER ve Phillips Log Periodogram kalmaktadır. Robinson log periodogram kestiricisi daha önceki bölümlerden de hatırlanacağı üzere l ve m gibi seçimi kullanıcı tercihine bırakılmış iki değere bağımlıdır. Robinson (1996) l 'nin katsayı kestirimlerini dramatik bir şekilde etkilemediğini söyler. Bu nedenle Monte

Carlo benzetiminde $l=2$ kabul edilmiştir. Neden $l=0$ olarak seçilmediği sorusuna verilecek yanıt ise şudur: Hatırlanacağı üzere Robinson log periodogram denkleminin temelinde düşük sıklıktaki periodogram değerlerinin kırılması yatmaktadır. Aynı zamanda $d(l)$ ile de gösterilen kestirici $l=0$ halinde GPH log periodogram kestiricisi ile aynı olmaktadır. Bu nedenle bu çalışmada $l=2$ olarak kabul edilir. Robinson log periodogram denkleminde kullanılacak ordinat sayısı m ise T^α ile belirlenir. Bu Monte Carlo benzetiminde α sırasıyla 0.5, 0.7 ve 0.9 olarak seçilmiştir. Robinson APER kestiricisi ise $0 < q < 1$ gibi kullanıcı tarafından seçilen bir katsayıya bağlıdır. Robinson (1995) $q = 0.5$ 'in optimal olduğunu belirtirken Delgado ve Robinson (1994) çalışmalarında $q = 0.8$ olarak kullanırlar. Buradan yola çıkarak bu çalışmada q değeri sırasıyla 0.25, 0.50 ve 0.75 olacak şekilde kullanılmıştır. Phillips'in geliştirdiği GPH log periodogram kestiricisinde ise kullanılacak harmonik ordinat sayısı önem kazanır. $m = T^\alpha$ ile hesaplanan değer için α , sırasıyla 0.5, 0.7 ve 0.9 olarak seçilmiştir. Bu bölümün başlangıcında değinilen bir başka tartışma da Sowell en yüksek olabilirlik kestiricisinde kullanılacak ortalamadır. İki farklı seçenek vardır: örneklem ortalamasını sifıra eşit varsaymak veya örneklem ortalaması çıkartılmış serilerle çalışmak. Bunlardan herhangi birini tercih etmeden her ikisi de gözlem altına alınmıştır.

Söz konusu Monte Carlo benzetiminde her yöntem için 1000 tekrar yapılmış ve üç farklı örneklem büyüklüğü için yinelenmiştir ($T=100, 250, 500$). Benzetim döngüsü Şekil 5.1 yardımıyla daha kolay anlaşılabilir. Sentetik seriler RATS 4.1 kullanılarak üretilmiştir. Üretilen seriler ARFIMA(0, d ,0) veri üretim sürecine uyar. Bölüntüsel bütünleşik gürültüdür, başka bir deyişle kısa süreli hafızanın etkisinden bağımsızdır. Bölüntüsel bütünleşme katsayısı $(-0.5, 0.5)$ aralığından seçilmiştir. Çünkü katsayı kestirim yöntemleri de sadece bu aralıkla ilgilenirler. Katsayılar $(0.5, 1)$ aralığında yer alıyorsa birinci dereceden fark alınmış serilere uygulanarak gerçek bölüntüsel bütünleşme katsayısına ulaşılabilir. Program, bu benzetimi yaparken Davies ve Harte yöntemini kullanır. Öncelikle sıfır ortalamalı, bir standart sapmalı normal dağılıma uyan bir seriden v vektörünü oluşturacak hatalar seçilir. Sonra istenilen $T \times T$ ortak değişke matrisi Σ oluşturulur. Bu matris, ortak değişkelerden oluşan Toeplitz matrisidir. Ortak değişkeler ise Hosking (1981) tarafından tanımlandığı şekliyle üretilir.

$$\gamma_x(\tau) = \frac{\Gamma(1-2d)\Gamma(d+\tau)}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)\Gamma(1-d+\tau)}\sigma_\varepsilon^2$$

Sonra oluşan ortak değişke matrisine Cholesky parçalanması uygulanır ($\Sigma = PP'$, P alt üçgen olmak üzere). Son olarak sentetik seriler $y = Pv$ şeklinde üretilir. Açıkça görülecektir ki $\text{cov}(y) = PP' = \Sigma$ koşulu sağlanmaktadır. Bu Monte Carlo benzetiminde GPH log periodogram, Robinson GSE, Robinson APER ve Robinson log periodogram kestirimleri RATS 4.1 ile, Sowell en yüksek olabilirlik kestiricisi Ox 3.0 ile ve Phillips log periodogram ise STATA 6.0 ile gerçekleştirilmiştir. Aşağıdaki altı tabloda Monte Carlo benzetiminin sonuçları farklı örneklem büyüklükleri için sapma ve kök hata kareleri ortalaması göstergeleri kullanılarak özetlenmiştir.



Şekil 5.1: Benzetim döngüsü

Tablo 5.1: $T=100$ örneklem büyüklüğünde sapma*

	d										
	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	-0.1	-0.2	-0.3	-0.4	-0.5	
GPH Log Periodogram	0.022	0.007	0.004	0.006	0.002	-0.010	0.008	0.009	0.024	0.057	
Robinson GSE Kestiricisi	-0.003	0.000	-0.012	-0.008	-0.013	-0.013	-0.010	-0.004	0.000	0.011	
Robinson APER ($q=0.25$)	-0.313	-0.259	-0.224	-0.198	-0.186	-0.149	-0.142	-0.110	-0.095	-0.070	
Robinson APER ($q=0.50$)	-0.211	-0.164	-0.119	-0.080	-0.064	-0.025	-0.008	0.018	0.044	0.065	
Robinson APER ($q=0.75$)	-0.240	-0.214	-0.185	-0.172	-0.162	-0.147	-0.178	-0.141	-0.144	-0.160	
Robinson Log Periodogram ($l=2, \alpha=0.5$)	0.018	0.002	0.007	-0.003	0.003	0.010	0.026	0.002	-0.017	0.027	
Robinson Log Periodogram ($l=2, \alpha=0.7$)	-0.019	-0.008	-0.009	-0.008	0.004	0.009	0.016	0.009	0.023	0.035	
Robinson Log Periodogram ($l=2, \alpha=0.9$)	-0.114	-0.088	-0.075	-0.041	-0.018	0.035	0.053	0.077	0.111	0.135	
Phillips Log Periodogram ($\alpha=0.5$)	0.050	0.073	0.078	0.105	0.156	0.298	0.387	0.491	0.589	0.725	
Phillips Log Periodogram ($\alpha=0.7$)	0.020	0.046	0.041	0.058	0.090	0.164	0.212	0.265	0.339	0.412	
Phillips Log Periodogram ($\alpha=0.9$)	0.007	0.028	0.020	0.039	0.056	0.106	0.131	0.168	0.220	0.265	
Sowell En Yüksek Olabilirlik ($\mu = X$)	-0.093	-0.067	-0.056	-0.050	-0.047	-0.042	-0.038	-0.033	-0.026	-0.016	
Sowell En Yüksek Olabilirlik ($\mu = 0$)	-0.011	-0.023	-0.018	-0.015	-0.014	-0.013	-0.013	-0.012	-0.012	-0.012	

* Ortalama sapma: $E(\hat{\theta} - \theta)$, kestirilen katsayı ile kuramsal değer arasındaki farkın beklenen değeri

Tablo 5.2: $T=250$ örneklem büyüklüğünde sapma*

	d										
	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	-0.1	-0.2	-0.3	-0.4	-0.5	
GPH Log Periodogram	0.007	0.002	0.018	0.010	0.000	0.010	0.009	0.029	0.023	0.046	
Robinson GSE Kestiricisi	0.006	0.001	-0.007	-0.004	-0.006	-0.007	-0.005	-0.001	0.006	0.010	
Robinson APER ($q=0.25$)	-0.250	-0.218	-0.184	-0.159	-0.151	-0.116	-0.113	-0.110	-0.094	-0.093	
Robinson APER ($q=0.50$)	-0.195	-0.154	-0.124	-0.105	-0.081	-0.065	-0.072	-0.064	-0.066	-0.045	
Robinson APER ($q=0.75$)	-0.180	-0.140	-0.112	-0.081	-0.078	-0.056	-0.071	-0.049	-0.037	-0.026	
Robinson Log Periodogram ($l=2, \alpha=0.5$)	-0.004	-0.006	-0.004	-0.005	-0.007	0.000	0.005	0.000	0.003	0.010	
Robinson Log Periodogram ($l=2, \alpha=0.7$)	-0.004	-0.005	0.000	-0.007	-0.004	0.002	0.006	0.010	0.010	0.020	
Robinson Log Periodogram ($l=2, \alpha=0.9$)	-0.078	-0.062	-0.047	-0.034	-0.018	0.020	0.038	0.053	0.074	0.094	
Phillips Log Periodogram ($\alpha=0.5$)	0.048	0.065	0.065	0.136	0.187	0.366	0.489	0.613	0.717	0.888	
Phillips Log Periodogram ($\alpha=0.7$)	0.022	0.032	0.038	0.062	0.088	0.178	0.238	0.306	0.357	0.462	
Phillips Log Periodogram ($\alpha=0.9$)	0.008	0.018	0.019	0.032	0.044	0.095	0.128	0.165	0.196	0.255	
Sowell En Yüksek Olabilirlik ($\mu = X$)	-0.052	-0.030	-0.024	-0.022	-0.020	-0.018	-0.017	-0.015	-0.011	-0.005	
Sowell En Yüksek Olabilirlik ($\mu = 0$)	-0.007	-0.008	-0.006	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	-0.005	

* Ortalama sapma: $E(\hat{\theta} - \theta)$, kestirilen katsayı ile kuramsal değer arasındaki farkın beklenen değeri

Tablo 5.3: $T=500$ örneklem büyüklüğünde sapma*

	d										
	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	-0.1	-0.2	-0.3	-0.4	-0.5	
GPH Log Periodogram	0.024	0.000	0.010	0.007	0.002	-0.003	-0.002	0.011	0.029	0.035	
Robinson GSE Kestiricisi	0.008	0.002	0.001	0.000	-0.003	-0.002	-0.001	0.002	0.003	0.009	
Robinson APER ($q=0.25$)	-0.194	-0.153	-0.113	-0.091	-0.065	-0.058	-0.043	-0.032	-0.025	-0.016	
Robinson APER ($q=0.50$)	-0.156	-0.113	-0.077	-0.045	-0.036	0.001	-0.009	0.017	0.019	0.029	
Robinson APER ($q=0.75$)	-0.159	-0.127	-0.101	-0.080	-0.076	-0.070	-0.076	-0.072	-0.070	-0.078	
Robinson Log Periodogram ($l=2, \alpha=0.5$)	0.010	-0.009	0.009	0.006	0.000	-0.008	0.008	0.003	0.004	0.041	
Robinson Log Periodogram ($l=2, \alpha=0.7$)	0.009	0.006	0.003	-0.002	0.002	0.004	0.000	0.008	0.006	0.019	
Robinson Log Periodogram ($l=2, \alpha=0.9$)	0.007	0.005	-0.001	0.001	0.001	0.001	-0.001	0.004	0.005	0.008	
Phillips Log Periodogram ($\alpha=0.5$)	0.047	0.055	0.077	0.124	0.197	0.405	0.516	0.674	0.802	0.934	
Phillips Log Periodogram ($\alpha=0.7$)	0.021	0.028	0.033	0.053	0.088	0.182	0.238	0.319	0.381	0.462	
Phillips Log Periodogram ($\alpha=0.9$)	0.008	0.014	0.018	0.025	0.043	0.087	0.114	0.151	0.190	0.226	
Sowell En Yüksek Olabilirlik ($\mu = X$)	-0.034	-0.015	-0.012	-0.011	-0.010	-0.009	-0.009	-0.007	-0.005	-0.001	
Sowell En Yüksek Olabilirlik ($\mu = 0$)	-0.006	-0.004	-0.002	-0.002	-0.002	-0.002	-0.002	-0.002	-0.002	-0.002	

* Ortalama sapma: $E(\hat{\theta} - \theta)$, kestirilen katsayı ile kuramsal değer arasındaki farkın beklenen değeri

Öncelikle uzun süreli hafızanın, başka bir deyişle bölüntüsel bütünleşme katsayısının sapmasızlık durumunu inceleyelim. Tablo 5.1-5.2 farklı kestirim yöntemleri kullanılarak hesaplanmış d katsayısının farklı örneklem büyüklüğü kırılımında sapmalarını özetlemektedir. Değerlendirmeler başlangıçta $T=100$ için yapılmış, diğer örneklem büyüklüklerinde farklılık görülmüşse daha ileride açıklanmıştır. Sabit örneklem büyüklüğünde GPH log periodogram yaklaşımı ile kestirilen bölüntüsel bütünleşme katsayısının sapması belirli bir hareket tarzına sahip değildir. Artan veya azalan d değerleri ile ilişkisinden söz edilemez. Robinson GSE kestiricisinde ise sapma katsayı uzayının sınırlarına yaklaşıldıkça GPH yaklaşımının sapmasına göre mutlak değerce daha küçük değerler almaktadır. Ancak arada kalan bölge için ikisi arasında net bir ayrım yapmak olanaklı değildir.

Robinson APER kestiricisinde ise, farklı q değerleri için yapılan benzetimler sonucunda mutlak değerce en küçük sapmayla, Lobato ve Robinson (1996) çalışmasında da belirtildiği gibi $q=0.5$ seviyesinde karşılaşılmaktadır. Ancak bu benzetimin ilginç sonucu bölüntüsel bütünleşme katsayısı 0.5'ten -0.5'e doğru giderken sapmanın mutlak değerce azalma göstermesidir. Başka bir deyişle bölüntüsel bütünleşme katsayısı ile sapma arasında ters yönlü bir ilişki vardır, denilebilir. Bu sonuç Smith ve diğ. (1997) sonucuyla uyumludur, ancak söz konusu çalışmada vurgulanmaz. GPH log periodogram ve Robinson GSE ile karşılaştırıldığında $d>0$ bölgesinde diğerlerine göre daha fazla sapma sergilerken, $d<0$ bölgesi için APER kestiricisi diğerleriyle hemen hemen aynı performansı sergilemektedir. Robinson log periodogram kestiricisinde sabit l değeri için üç farklı α değeri (0.5, 0.7 ve 0.9) kullandığımızı belirtmiştik. Bu değerlerden 0.5'in, diğer ikisine oranla sapmasızlık anlamında çok daha yüksek performans sergilediği görülmektedir. Katsayı uzayının sınırlarında sapma en yüksek değerine ulaşır, ancak d katsayıları ile önemli bir ilişkiyi sahip değildir. Robinson log periodogram kestiricisinin performansı ($l=2$, $\alpha=0.5$ için) Robinson APER'e göre, GPH log periodogram ve Robinson GSE kestiricilerinin performansına daha yakındır. Phillips'in geliştirilmiş log periodogram kestiricisi harmonik ordinat sayısı arttıkça (α , 0.5'ten 0.9'a doğru yaklaştıkça) daha küçük sapmalar vermektedir. Ancak sapma her zaman için sıfırdan büyüktür. Tüm harmonik ordinat sayılarında bölüntüsel bütünleşme katsayısı azaldıkça sapma artmakta, ve $d<0$ bölgesinde dramatik bir

boyuta varmaktadır. Böyle bir durumla karşılaşılmasının nedeni log periodogram kestiricisinin birim kök sınamalarında da kullanılabilecek bir hale getirilmesine çalışılması olabilir. Phillips (1999a, 1999b) kestiricinin kavuşmaz dağılımın $d=1$ sınırında özellikleri bilinmeyen bir dağılıma yakınsadığını söyler, $d<0$ bölgesi için bir çıkarsama yapmaz, sadece bölüntüsel bütünleşme katsayısının kestiriminde de kullanılabileceğini vurgular. Kestirim sapması incelenen son yöntem Sowell en yüksek olabilirlik yaklaşımıdır. Yöntemin her iki seçeneğinde de sapma sıfırdan küçüktür. Bu sonuç da yazındaki diğer benzetim çalışmalarıyla tutarlıdır (Sowell, 1992, Cheung ve Diebold, 1994, Smith ve diğ., 1997). Yöntem, örneklem ortalaması çıkartılarak sıfır ortalamalı bir seri haline getirilmesi halinde, sıfır varsayılan ortalama almaşığına göre daha fazla sapma yaratır. Her iki durum için de d değerleri ile sapma arasında bir ilişki tanımlanamaz.

Örneklem büyüklüğü arttıkça sabit bölüntüsel bütünleşme katsayısı seviyesinde, Phillips geliştirilmiş log periodogram kestiricisi dışında tüm diğer yöntemler daha düşük sapma sergilemeye başlarlar. Söz konusu kestiricide bu durum, $d>0$ için diğerleri ile benzer bir halde iken $d<0$ bölgesinde katsayı uzayının sınırına yaklaştıkça artma eğilimi sergiler. Robinson log periodogram kestiricisinin örneklem büyüklüğünün artmasıyla gösterdiği gelişme, GPH log periodogram ve Robinson GSE kestiricilerinin önüne geçmesi ile sonuçlanır. Örneklem büyüklüğünün artmasının Sowell en yüksek olabilirlik yaklaşımı üzerinde yarattığı etki ise, $T=100$ durumunda iyi performans sergilediği belirtilen GPH ve Robinson GSE kestiricileriyle arasındaki farkın açılması yönündedir.

Tablo 5.4: $T=100$ örneklem büyüklüğünde kök hata kareleri ortalaması (RMSE)*

	d										
	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	-0.1	-0.2	-0.3	-0.4	-0.5	
GPH Log Periodogram	0.299	0.286	0.294	0.291	0.290	0.293	0.306	0.310	0.296	0.322	
Robinson GSE Kestircisi	0.108	0.103	0.104	0.100	0.108	0.108	0.102	0.108	0.107	0.105	
Robinson APER ($q=0.25$)	0.377	0.328	0.316	0.316	0.322	0.306	0.320	0.318	0.322	0.307	
Robinson APER ($q=0.50$)	0.254	0.223	0.213	0.213	0.229	0.281	0.298	0.303	0.330	0.356	
Robinson APER ($q=0.75$)	0.300	0.304	0.317	0.361	0.385	0.445	0.505	0.530	0.583	0.614	
Robinson Log Periodogram ($l=2, \alpha=0.5$)	0.544	0.525	0.537	0.506	0.525	0.527	0.537	0.525	0.531	0.541	
Robinson Log Periodogram ($l=2, \alpha=0.7$)	0.227	0.222	0.226	0.227	0.224	0.228	0.228	0.226	0.230	0.246	
Robinson Log Periodogram ($l=2, \alpha=0.9$)	0.173	0.156	0.145	0.132	0.123	0.131	0.136	0.147	0.170	0.183	
Phillips Log Periodogram ($\alpha=0.5$)	0.294	0.302	0.305	0.336	0.350	0.449	0.533	0.622	0.719	0.846	
Phillips Log Periodogram ($\alpha=0.7$)	0.159	0.169	0.167	0.186	0.196	0.255	0.301	0.352	0.423	0.494	
Phillips Log Periodogram ($\alpha=0.9$)	0.120	0.123	0.122	0.133	0.139	0.175	0.194	0.232	0.281	0.327	
Sowell En Yüksek Olabilirlik ($\mu = X$)	0.110	0.102	0.101	0.101	0.101	0.099	0.097	0.095	0.092	0.090	
Sowell En Yüksek Olabilirlik ($\mu = 0$)	0.029	0.067	0.076	0.080	0.082	0.085	0.086	0.087	0.088	0.088	

* Kök hata kareleri ortalaması: $\sqrt{E(\hat{\theta} - \theta)^2}$

Tablo 5.5: $T=250$ örneklem büyüklüğünde kök hata kareleri ortalaması (RMSE)*

	d										
	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	-0.1	-0.2	-0.3	-0.4	-0.5	
GPH Log Periodogram	0.220	0.221	0.221	0.217	0.211	0.221	0.216	0.233	0.217	0.229	
Robinson GSE Kestircisi	0.066	0.066	0.065	0.064	0.065	0.067	0.065	0.067	0.065	0.070	
Robinson APER ($q=0.25$)	0.284	0.267	0.249	0.237	0.246	0.243	0.253	0.255	0.255	0.272	
Robinson APER ($q=0.50$)	0.223	0.196	0.189	0.194	0.206	0.234	0.264	0.277	0.292	0.310	
Robinson APER ($q=0.75$)	0.212	0.199	0.213	0.217	0.260	0.325	0.378	0.377	0.428	0.480	
Robinson Log Periodogram ($l=2, \alpha=0.5$)	0.371	0.365	0.372	0.384	0.368	0.361	0.384	0.374	0.376	0.371	
Robinson Log Periodogram ($l=2, \alpha=0.7$)	0.144	0.135	0.140	0.140	0.140	0.135	0.143	0.139	0.143	0.134	
Robinson Log Periodogram ($l=2, \alpha=0.9$)	0.108	0.096	0.085	0.080	0.072	0.073	0.080	0.089	0.104	0.118	
Phillips Log Periodogram ($\alpha=0.5$)	0.227	0.233	0.240	0.269	0.324	0.476	0.598	0.713	0.823	0.975	
Phillips Log Periodogram ($\alpha=0.7$)	0.117	0.121	0.125	0.135	0.164	0.245	0.304	0.370	0.424	0.523	
Phillips Log Periodogram ($\alpha=0.9$)	0.073	0.077	0.076	0.084	0.092	0.136	0.170	0.205	0.236	0.294	
Sowell En Yüksek Olabilirlik ($\mu = X$)	0.062	0.057	0.058	0.058	0.058	0.057	0.057	0.056	0.055	0.054	
Sowell En Yüksek Olabilirlik ($\mu = 0$)	0.017	0.045	0.049	0.050	0.051	0.052	0.053	0.053	0.053	0.054	

* Kök hata kareleri ortalaması: $\sqrt{E(\hat{\theta} - \theta)^2}$

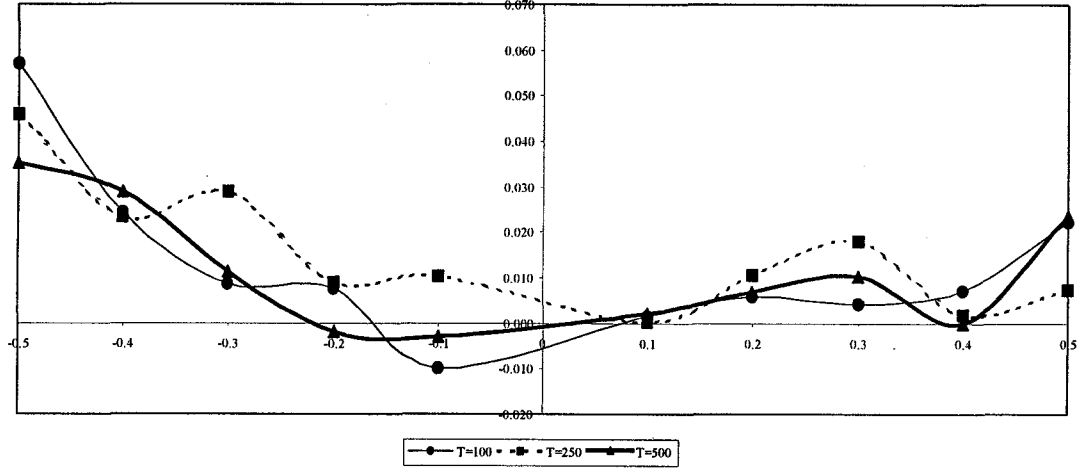
Tablo 5.6: $T=500$ örneklem büyüklüğünde kök hata kareleri ortalaması (RMSE)*

	d										
	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	-0.1	-0.2	-0.3	-0.4	-0.5	
GPH Log Periodogram	0.177	0.174	0.171	0.169	0.177	0.170	0.170	0.175	0.177	0.177	
Robinson GSE Kestircisi	0.049	0.047	0.048	0.046	0.048	0.045	0.046	0.047	0.048	0.050	
Robinson APER ($q=0.25$)	0.216	0.185	0.159	0.158	0.152	0.170	0.174	0.182	0.189	0.194	
Robinson APER ($q=0.50$)	0.172	0.147	0.133	0.127	0.141	0.172	0.197	0.210	0.221	0.244	
Robinson APER ($q=0.75$)	0.178	0.170	0.175	0.185	0.219	0.270	0.305	0.341	0.368	0.391	
Robinson Log Periodogram ($l=2, \alpha=0.5$)	0.255	0.253	0.252	0.267	0.258	0.252	0.260	0.258	0.269	0.255	
Robinson Log Periodogram ($l=2, \alpha=0.7$)	0.097	0.101	0.098	0.096	0.095	0.098	0.099	0.097	0.094	0.101	
Robinson Log Periodogram ($l=2, \alpha=0.9$)	0.054	0.053	0.054	0.054	0.054	0.056	0.053	0.052	0.052	0.052	
Phillips Log Periodogram ($\alpha=0.5$)	0.185	0.187	0.213	0.242	0.287	0.496	0.611	0.762	0.885	1.015	
Phillips Log Periodogram ($\alpha=0.7$)	0.087	0.094	0.098	0.110	0.140	0.236	0.290	0.374	0.442	0.522	
Phillips Log Periodogram ($\alpha=0.9$)	0.048	0.051	0.053	0.059	0.075	0.118	0.145	0.182	0.224	0.259	
Sowell En Yüksek Olabilirlik ($\mu = X$)	0.040	0.037	0.038	0.038	0.038	0.038	0.038	0.037	0.037	0.036	
Sowell En Yüksek Olabilirlik ($\mu = 0$)	0.014	0.032	0.034	0.035	0.035	0.036	0.036	0.036	0.036	0.036	

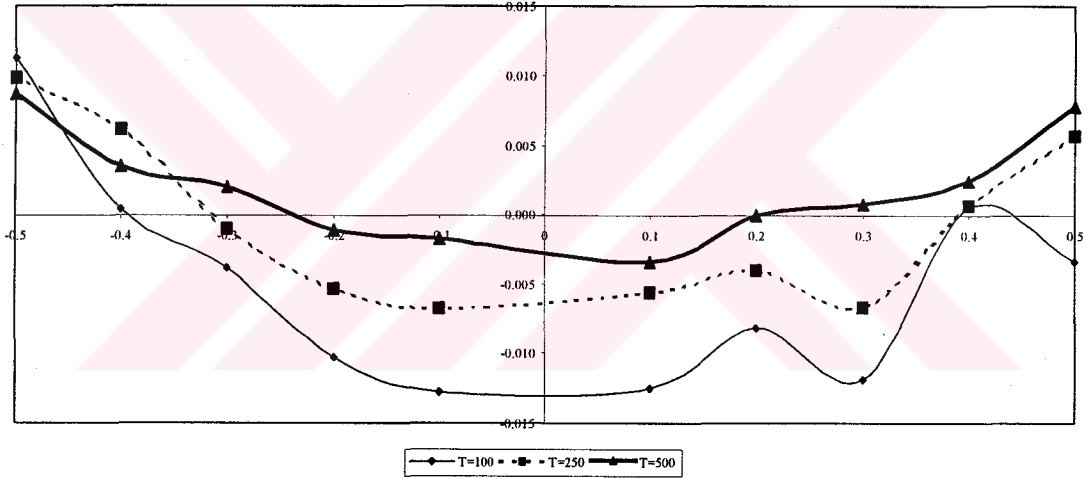
* Kök hata kareleri ortalaması: $\sqrt{E(\hat{\theta} - \theta)^2}$

Şimdi de benzetim sonuçlarını kök hata kareleri ortalaması açısından ele alalım. Tablo 5.4-5.6 yapılan Monte Carlo benzetimini kök hata kareleri ortalaması açısından özetlemektedir. Sabit örneklem büyüklüğünde ($T=100$) Phillips geliştirilmiş log periodogram kestiricisi dışında hiçbir kestiricide değişen bölüntüsel bütünleşme katsayıları ile kök hata kareleri ortalaması arasında tanımlı bir ilişki yoktur. Phillips geliştirilmiş log periodogram kestiricisi ile d değerleri arasında ters yönlü bir ilişkinin varlığı rahatlıkla görülebilir. Tüm bölüntüsel bütünleşme katsayıları için Robinson GSE ve Sowell en yüksek olabilirlik kestiricileri en düşük kök hata kareleri ortalaması değerine sahiptir. Bu iki yöntemi, söz konusu ölçüt anlamında, GPH log periodogram ve Robinson log periodogram ($l=2$, $\alpha=0.5$) izler. Robinson APER kestiricisi için $q=0.5$ yine en iyi q değeri olarak karşımıza çıkar. Phillips geliştirilmiş log periodogram kestiricisi incelendiğinde ise denklemde kullanılacak gözlem sayısını, başka bir deyişle harmonik ordinatları belirleyen α değeri arttıkça, $d>0$ bölgesi için, kestiricinin kök hata kareleri ortalaması ölçütünün yüksek performanslı olarak kabul edilebilecek dört yönteminkine yaklaştığı görülür. Örneklem büyüklüğünün artmasıyla tüm kestiricilerde kök hata kareleri ortalaması doğal olarak düşmektedir. Yukarıda belirtilen ilişkiler ise hemen hemen aynı kalmaktadır. Sadece Robinson log periodogram kestiricisi GPH log periodogram kestiricisinin bir adım önüne geçecek kadar gelişme gösterir. İlerleyen sayfalarda yer alan altı şekil (Şekil 5.2-5.7) seçilmiş altı bölüntüsel bütünleşme katsayısı kestirim yönteminin üç farklı örneklem büyüklüğündeki sapmasızlık durumunu görselleştirmektedir. Bu şekiller incelendiğinde kolaylıkla görülecektir ki Sowell EYO, Robinson APER ve Phillips geliştirilmiş log periodogram kestiricileri dışındaki yöntemlerde sapma katsayı uzayının sınırlarına yaklaştıkça artmaktadır. Yukarıda sayılan yöntemlerden Sowell EYO ve Robinson APER kestiricilerinin sapması $d>0$ bölgesinde katsayı uzayının sınırına yaklaştıkça artarken, Phillips geliştirilmiş log periodogram kestiricisinde ise durum tam ters yöndedir. Sowell EYO kestiricisinin sapması $d<0.3$ bölgesinde değişkenlik göstermezken, diğer yöntemlerde dalgalı bir seyir izler. Örneklem büyüklüğü arttıkça dalgalanmanın şiddeti azalır. Bu bağlamda incelendiğinde, ARFIMA(0, d ,0) veri üretim süreçli seriler için ele alınan alması yöntemlerden GPH log periodogram, Robinson GSE ve Sowell en yüksek olabilirlik kestiricilerinin küçük örneklemelerde diğerlerine oranla daha başarılı kestirimler yaptığı söylenebilir. Bu nedenle, küçük örneklem durumunda sözü edilen

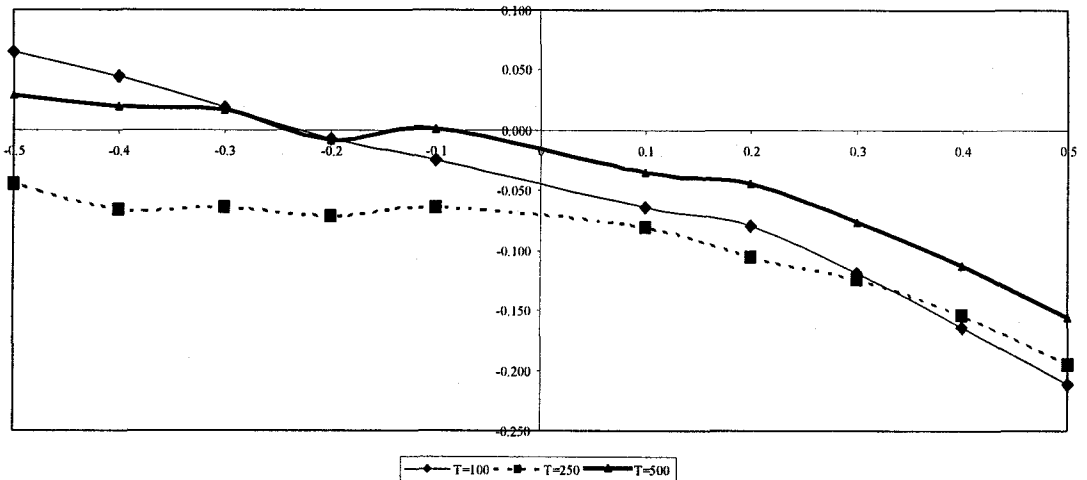
kestiricilerin kullanılması yerinde olacaktır. Örneklem büyüklüğünün fazla olması durumunda bu gruba Robinson log periodogram kestiricisinin de eklenmesi yanlış olmaz.



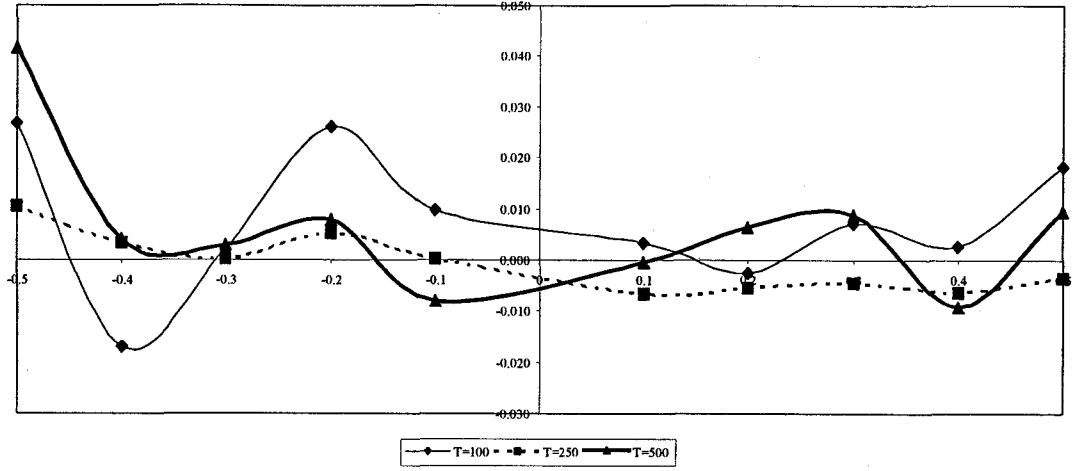
Şekil 5.2: Farklı örneklem büyüklüklerinde GPH kestiricisinin sapması



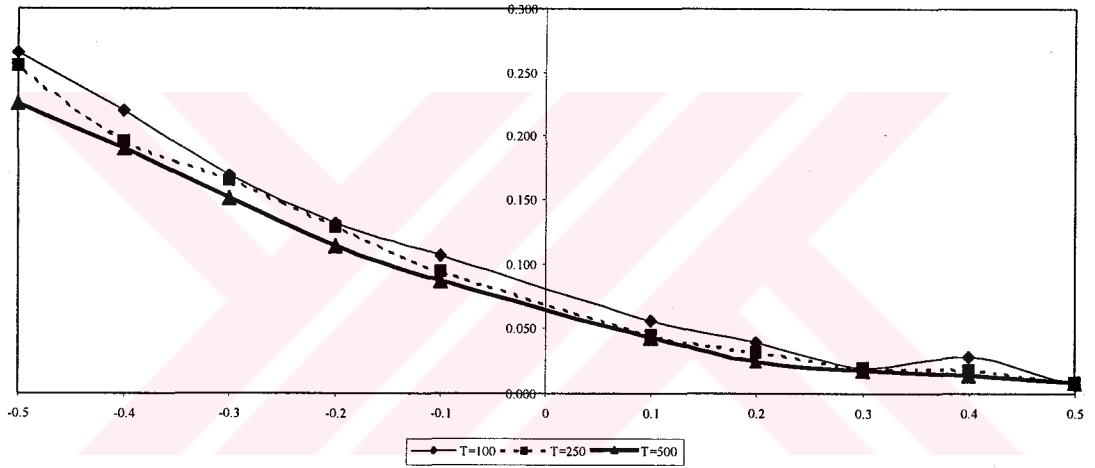
Şekil 5.3: Farklı örneklem büyüklüklerinde Robinson GSE kestiricisinin sapması



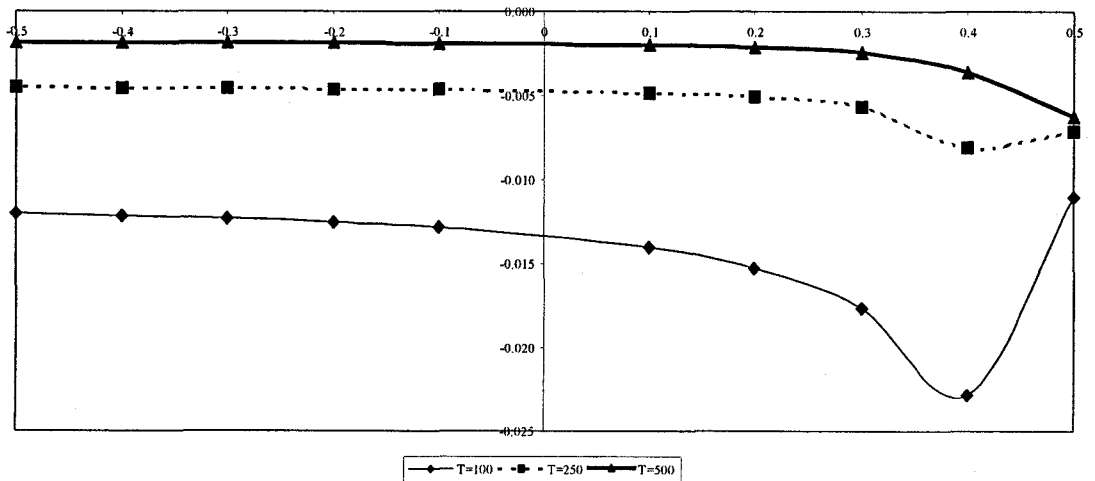
Şekil 5.4: Farklı örneklem büyüklüklerinde Robinson APER kestiricisinin sapması



Şekil 5.5: Farklı örneklem büyüklüklerinde Robinson log periodogram kestiricisinin sapması



Şekil 5.6: Farklı örneklem büyüklüklerinde Phillips geliştirilmiş log periodogram kestiricisinin sapması



Şekil 5.7: Farklı örneklem büyüklüklerinde Sowell EYO kestiricisinin sapması

6. TÜRKİYE İÇİN SEÇİLMİŞ MAKROEKONOMİK BÜYÜKLÜKLERİN BÖLÜNTÜSEL BÜTÜNLEŞME DERECELERİNİN İNCELENMESİ

Çalışmanın dördüncü bölümünde incelenen bölüntüsel bütünleşme katsayısı kestirim yöntemlerinin performansları beşinci bölümde karşılaştırılmış ve GPH log periodogram, Robinson GSE ve Sowell en yüksek olabilirlik kestiricilerinin ARFIMA(0,d,0) veri üretim süreçli seriler için sapma anlamında yüksek performans sergilediği sonucuna varılmıştır. Büyük örneklem durumunda Robinson log periodogram kestiricisinin de bu grubun bir üyesi olabileceği vurgulanmıştır. Çalışmanın altıncı bölümü ise bu seçilen katsayı kestirim yöntemlerini kullanarak Türkiye'ye ait on seçilmiş makroekonomik büyüklüğün bölüntüsel bütünleşik olup olmadığını sorgulamak amacını güder. Bunun temel nedeni söz konusu makroekonomik büyüklüklerin çeşitli ekonometrik çalışmalarda birim köke sahip, birinci dereceden bütünleşik seriler olarak ele alınmış olmalarıdır. Eğer bölüntüsel bütünleşik seriler oldukları bulunursa kurulan modellerin belirlenme hatası barındırdığı ortaya çıkar ve kestirimler güvenilir olmaktan uzaklaşır. Çünkü d . dereceden fark almak yerine birinci fark alınmış seriler kullanıldıysa zaman serisi aslında değişkenin barındırmadığı çevrimsel bir yapıya sahip hale getirilir ve bunun üzerinden kurulan modeller geçerliliklerini yitirirler. Benzer şekilde tek denklemlilik ekonometrik modeller düzemece regresyon sorunundan kurtulmak için fark alınmış seriler üzerinden hesaplanır. Eğer d . dereceden bütünleşik değişkenler $I(1)$ oldukları kararıyla birinci farkları alınarak denkleme yerleştirilirse, $I(0)$ yerine $I(d-1)$ değişkenlerle katsayılar kestirilmiş olur, ki bu modellerin de doğru belirlenmiş olmalarından söz etmek olanaklı değildir.

Yukarıda kısaca değinilen modelleme yanlışlarına fırsat tanımamak için aşağıdaki tabloda sıralanan değişkenlerle çeşitli denemeler yapılmıştır. Verilerin tamamı Türkiye Cumhuriyeti Merkez Bankası elektronik veri dağıtım sisteminden sağlanmış, aylık bazda ölçülmüş verilerdir. Çalışmanın ilk bölümünde değinildiği gibi değişkenlerin tamamı üstel eğilimin etkisini gidermek ve birinci fark serisini değişken açısından durağan hale getirmek için doğal logaritması alınmış olarak kullanılmıştır.

Tablo 6.1: Seçilmiş makroekonomik büyüklükler

Değişken	İlk gözlem	Son gözlem	Kısaltma
Tüketici fiyat endeksi	1987:01	2001:10	<i>Lcpi</i>
Sanayi üretim endeksi	1986:01	2001:03	<i>Lip</i>
İMKB 100 endeksi	1986:01	2001:12	<i>Ls</i>
İthalat	1984:01	2001:08	<i>Lm</i>
İhracat	1984:01	2001:08	<i>Lx</i>
Külçe altın fiyatı	1984:01	2001:10	<i>Lg</i>
Dolar kuru	1981:01	2001:12	<i>Le</i>
Para Arzı (M2)	1991:01	2001:03	<i>Lm2</i>
Para Arzı (M1)	1991:01	2001:03	<i>Lm1</i>

Bölüntüsel bütünleşme katsayısı kestirimine geçmeden önce tüm değişkenler birim kök sınavasından geçirilmiş ve tam sayılı bütünleşme dereceleri belirlenmeye çalışılmıştır. Bu işlemde ADF sınavası kullanılmış ve rassal yürüyüş, yığılımlı rassal yürüyüş ve deterministik eğilimli yığılımlı rassal yürüyüş durumları ayrı ayrı incelenmiştir. Ardışık bağımlılığın etkisini giderecek bağımlı değişkenin gecikmeli değeri, Akaike bilgi kriterini (AIC) en küçükleyen anlamlı gecikme uzunluğu olarak seçilmiştir. Tablo (6.2) bu sınavaların sonuçlarını özetlemektedir. Buna göre İMKB ulusal 100 endeksi dışındaki tüm değişkenler için durağanlık ya da birim kök yoktur sıfır önsavı reddedilmektedir. Seriler birinci dereceden bütünleşiktir ya da başka bir deyişle $I(1)$ 'dir.

Tablo 6.2: Birim kök sınavalarının sonuçları

	<i>Lip</i>	<i>Lcpi</i>	<i>Ls</i>	<i>Lm</i>	<i>Lx</i>	<i>Lg</i>	<i>Le</i>	<i>Lm2</i>	<i>Lm1</i>
<i>y</i>									
Saf	2.52	1.13	1.91	1.33	2.42	3.82	6.90	-0.62	0.86
$\phi(L)\Delta y$	12	12	3	12	12	12	2	12	2
<i>c</i>	-1.38	-0.24	-1.00	-1.16	-0.57	1.07	1.41	-0.62	-2.24
$\phi(L)\Delta y$	12	12	3	12	12	1	2	4	2
<i>c, t</i>	-2.46	-2.40	-4.82	-3.00	-2.10	-1.67	-1.60	-2.90	1.29
$\phi(L)\Delta y$	12	12	10	12	12	1	2	11	2
Δy									
<i>c</i>	-5.16	-2.34	-3.97	-3.67	-3.86	-8.64	-3.44	-3.31	-9.35
$\phi(L)\Delta y$	11	11	12	11	12	0	11	12	12

Bu durumda söz konusu değişkenlerle kurulacak modellerde durağanlığın sağlanması, düzmece regresyonun önlenmesi için birinci farklarla çalışılması gerekmektedir. Ancak bu, biraz önce değinildiği gibi sorgulanması gereken bir

sonuçtur. Seriler bölüntüsel bütünleşik de olabilirler. Bunun için sırasıyla GPH log periodogram, Robinson GSE ve Sowell en yüksek olabilirlik yaklaşımları kullanılarak bölüntüsel bütünleşme katsayıları kestirilmeye çalışılmıştır. Tablo 6.3 GPH log periodogram ve Robinson GSE katsayı kestirimlerini ve standart hataları özetlemektedir.

Tablo 6.3: Sıklık alanında yapılan kestirim sonuçları

Değişken	GPH log periodogram kestirimi			Robinson GSE kestirimi		
	m	d	std. hata	m	d	std. hata
<i>Lip</i>	14	0.815	0.112	86	0.681	0.054
<i>Lcpi</i>	14	1.011	0.013	89	0.897	0.053
<i>Ls</i>	14	1.052	0.059	96	0.895	0.051
<i>Lm</i>	15	1.274	0.213	106	0.705	0.049
<i>Lx</i>	15	1.002	0.076	106	0.688	0.049
<i>Lg</i>	15	0.997	0.028	107	0.888	0.048
<i>Le</i>	16	0.985	0.017	120	0.898	0.046
<i>Lm2</i>	9	0.948	0.026	35	0.893	0.085
<i>Lm1</i>	9	1.030	0.028	35	0.891	0.085
ΔLip	13	-0.527	0.105	61	-0.490	0.054
$\Delta Lcpi$	13	0.214	0.043	63	0.180	0.062
ΔLs	13	-0.0264	0.004	67	0.090	0.012
ΔLm	14	-0.566	0.070	72	-0.440	0.053
ΔLx	14	0.015	0.003	72	-0.500	0.064
ΔLg	14	0.091	0.015	73	0.190	0.031
ΔLe	15	0.094	0.011	80	0.160	0.032
$\Delta Lm2$	8	-0.029	0.003	29	-0.450	0.081
$\Delta Lm1$	8	0.409	0.082	29	-0.050	0.006

Tablo 6.3 incelendiğinde GPH log periodogram yaklaşımıyla kestirilen katsayıların hepsinin bire çok yakın olduğu görülebilir. Bu da uzun süreli hafıza modelleri ailesine ait bir katsayıdır ancak $d \in (-.05, 0.5)$ bölgesinin dışına düşmektedir. Robinson GSE kestiricileri ise GPH'ya oranla daha düşük kestirim değerleri vermektedir. Beşinci bölümdeki benzetim çalışmasının sonuçlarından yola çıkarak değerlendirilirse Robinson GSE kestiricisinin daha güvenilir olduğu sonucuna varılabilir. Ancak burada başka bir tartışma devreye girer. Daha önceki bölümlerde de değinildiği gibi uzun süreli hafızanın etkisini yakalayan bölüntüsel bütünleşme katsayısının kestirimi, özellikle sıklık alanında çalışan yarı katsayısal yöntemler kullanıldığında kısa süreli hafızanın varlığından etkilenmektedir. Çözümlemeye alınan verilerin gerçek hayat verisi olduğu düşünülürse, onların ARFIMA(0,d,0) ve üretim sürecine uymasını beklemek yanlış olacaktır. ARFIMA(p,d,q) veri üretimi

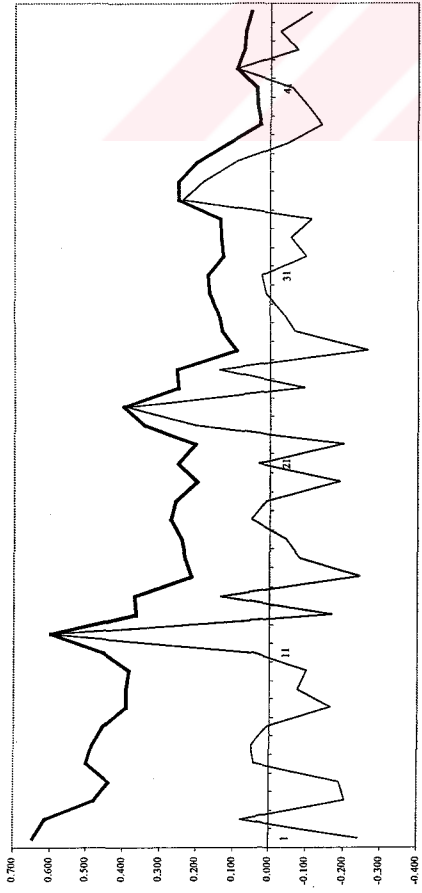
süreçli serilerde bölüntüsel bütünleşme katsayısının en etkin ve sapmasız kestiricisi, tüm katsayıların eş anlı değerlendirildiği en yüksek olabilirlik yaklaşımı kullanıldığında elde edilebilir. Bu anlamda Sowell en yüksek olabilirlik kestiricisi kısa süreli hafızanın etkisinden bağımsız bölüntüsel bütünleşme katsayı kestirimleri verecektir. Bu nedenle söz konusu en yüksek olabilirlik kestirim sonuçları Tablo 6.4'te özetlenmiştir. Gerekli hallerde deterministik eğilim ve/veya mevsimsel hareketliliği yakalayan kukla değişkenler kullanılmıştır.

Tablo 6.4: Sowell EYO yöntemi ile kestirilmiş ARFIMA(p, d, q) modelleri

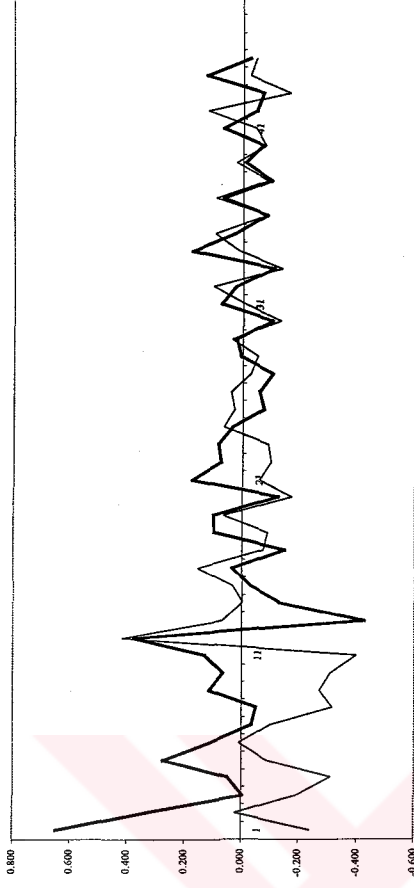
Değişken	ARFIMA(p, d, q)	Deterministik eğilim (t) Mevsimsel kuklalar (s)	d kestirimi	std. hata
<i>Lip</i>	ARFIMA(1, d ,0)	t, s	0.50	0.01
<i>Lcpi</i>	ARFIMA(2, d ,1)		0.41	0.05
<i>Ls</i>	ARFIMA(1, d ,1)	t, s	0.50	0.00
<i>Lm</i>	ARFIMA(2, d ,1)	t, s	0.48	0.02
<i>Lx</i>	ARFIMA(2, d ,1)	t, s	0.49	0.01
<i>Lg</i>	ARFIMA(1, d ,0)	t	0.24	0.07
<i>Le</i>	ARFIMA(1, d ,0)	t	0.29	0.07
<i>Lm2</i>	ARFIMA(1, d ,1)	t	0.49	0.02
<i>Lm1</i>	ARFIMA(1, d ,2)	s	0.43	0.08

Tablo 6.4, aslında $d \in (-.05, 0.5)$ bölgesine ait bütünleşme katsayılarına sahip olan serilerin, yarı katsayısal yöntemler kullanılarak kestirilen bölüntüsel bütünleşme düzeylerinin, yalnızca kısa süreli hafızanın etkisiyle kendisinden çok daha yüksek değerler aldığını açıkça ortaya koymaktadır. O halde, kısa süreli hafıza yapısı hakkında bilgi sahibi olunmayan serilerin –ki bu bilgiye sahip olmak gerçek yaşam verileri için olanaksız görünmektedir- yarı katsayısal yöntemler yerine eş anlı katsayı kestirim fırsatı sunan en yüksek olabilirlik yöntemleriyle modellenmesi gerektiğini söylemek çok da yanlış olmayacaktır. Bu çıkarım, en rahat şekilde, ileride sunulan şekillerin incelenmesi ile anlaşılabilir. Zaman serisi modelleri, zaman alanında değerlendirilirse, örneklem ardışık bağlanım ve kısmi ardışık bağlanım fonksiyonlarına uyan modeller oluşturmaya çalışırlar. Sıklık alanında değerlendirildiği zaman ise örneklem spektral yoğunluğuna yaklaşan modeller tercih edilir, denilebilir. Yukarıdaki kısa tartışmanın kaçınılmaz sonucu şudur: Gerçeğe daha yakın d ile filtre edilmiş serinin spektral yoğunluk fonksiyonu (veya ACF ile PACF) yerine –eğer birim kök varsa- birinci dereceden fark alınmış serinin spektral yoğunluk fonksiyonuna yaklaşılmaya çalışılır. Bu belirlenme hatası, daha ileri aşamalarda hatalı kestirimler veren modellerin kullanılmasına neden olur. İthalat için

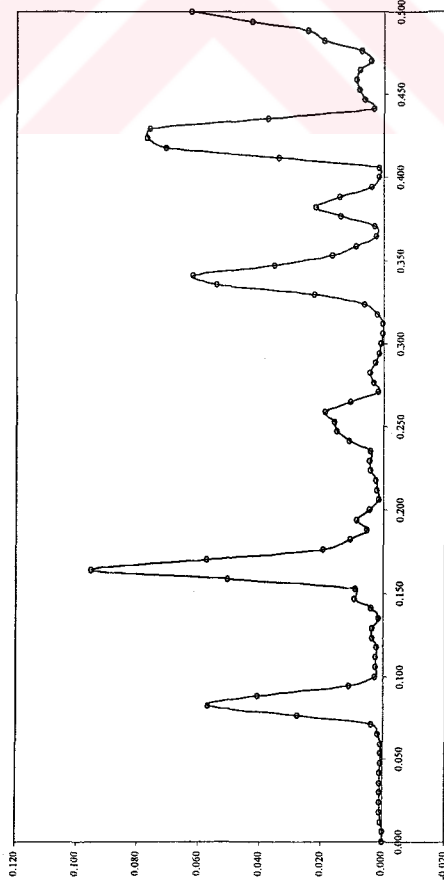
yapılan kestirimler incelenecek olursa klasik yaklaşımla serinin birim kökü olduğu sonucuna varılır. Bu görüş GPH log periodogram ve Robinson GSE ile yapılan bölüntüsel bütünleşme katsayısı kestirimlerinde de kendini ortaya koyar. O halde birinci dereceden fark almak bir zorunluluk haline gelir. Bunun gerçekliğini sorgulamak amacıyla birinci fark alındıktan sonra elde edilen serilere bir kez daha GPH ve GSE yöntemleri uygulanmıştır. Beklenti d katsayısının sıfır çıkması yönündedir. Ancak hiçbir seri için sıfır değerine ulaşamaz. Bazı seriler için sıfırdan büyük bazı seriler içinde sıfırdan küçük bölüntüsel bütünleşme katsayıları hesaplanmıştır. Bu sonuç, birinci farkın üzerine bir de d kadar daha fark alma zorunluluğu anlamına gelir. O zaman seriler $1+d$ dereceden bütünleşik olarak karşımıza çıkarlar. Bu durum güvenilmezdir. Zaten ithalat için yapılan spektral çözümlemede birinci dereceden fark alma aşırı fark alma işlemi olarak kendini sıfır sıklıkta sıfır spektral yoğunluk (Şekil 6.4c) ve ardışık bağımlılık fonksiyonunda anlamlı pozitif ve negatif rasgele hareket eden ardışık bağımlılık katsayıları olarak (Şekil 6.4a) gösterir. Aynı zamandan birinci farkı alınmış ithalat serisinin spektral yoğunluğu sıfırdan küçük bir bölüntüsel bütünleşme katsayısına sahip serinin hareketine benzer bir hareket yapmaktadır. Oysa bölüntüsel fark alınmış ithalat serisinin ardışık bağımlılık fonksiyonu düzenli bir azalma gösterir (Şekil 6.4b) ve spektral yoğunluğu tipik bir AR(1) serisinde olduğu gibi sıfır sıklıkta sonlu bir noktadan başlayarak eğrisel azalan bir hareket tarzı (Şekil 6.4d) sergiler. Benzer durumlar öteki şekiller yardımıyla diğer seriler incelendiğinde de görülebilir.



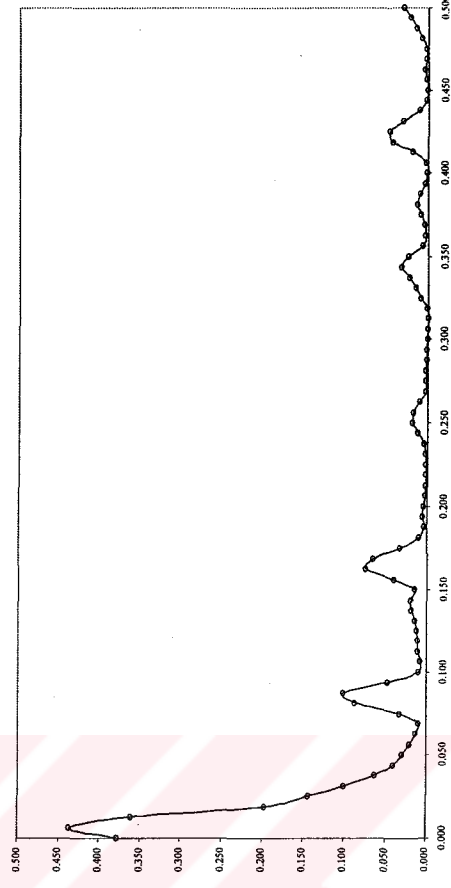
(a)



(b)

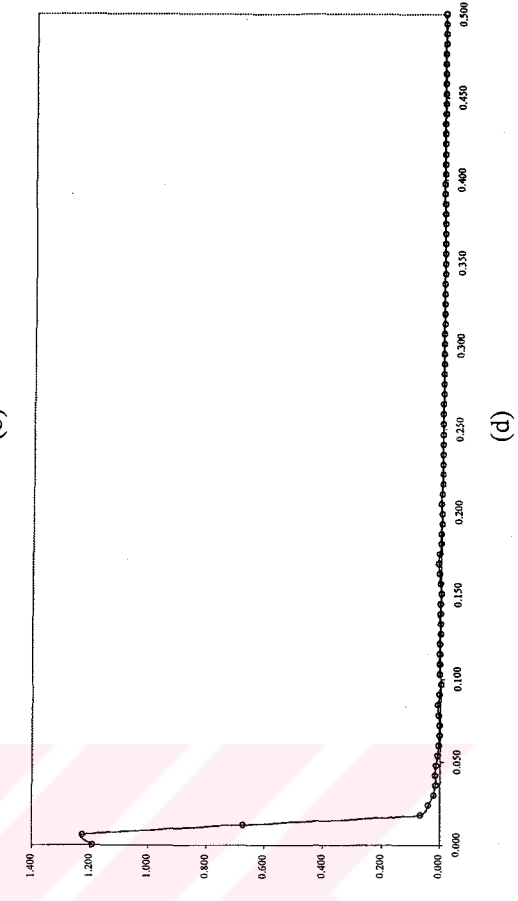
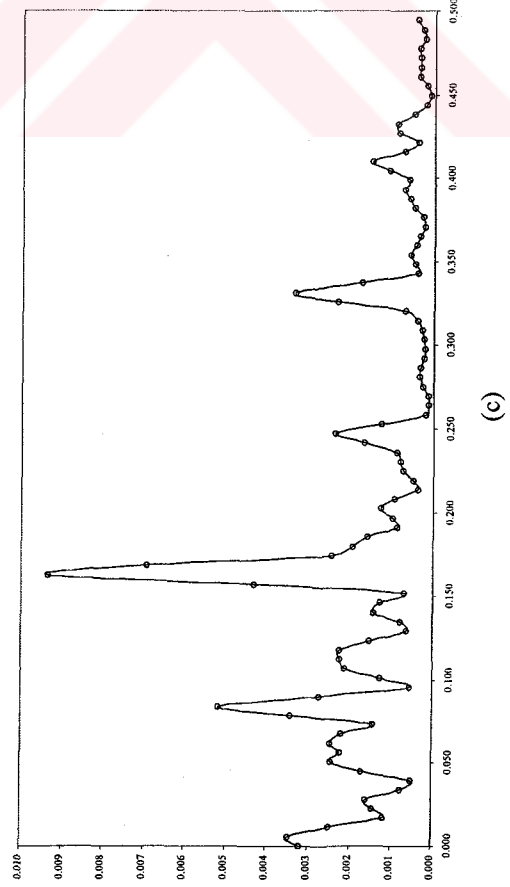
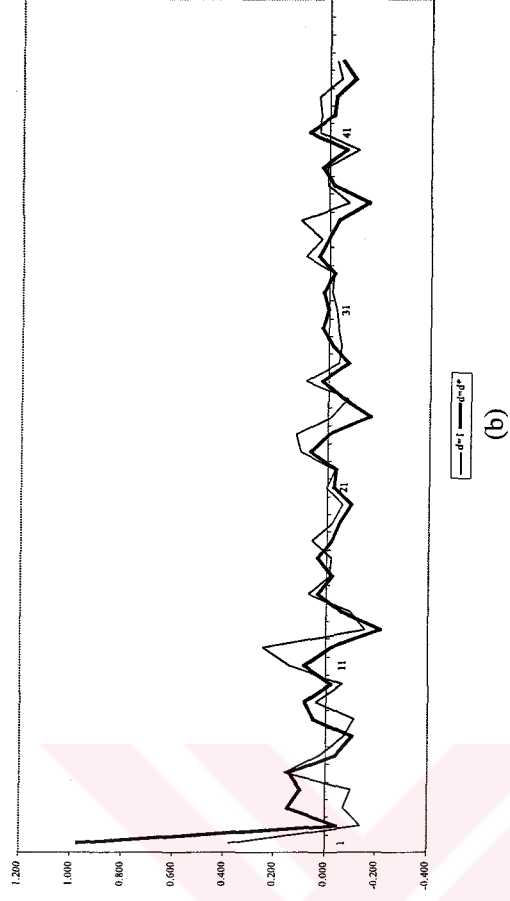
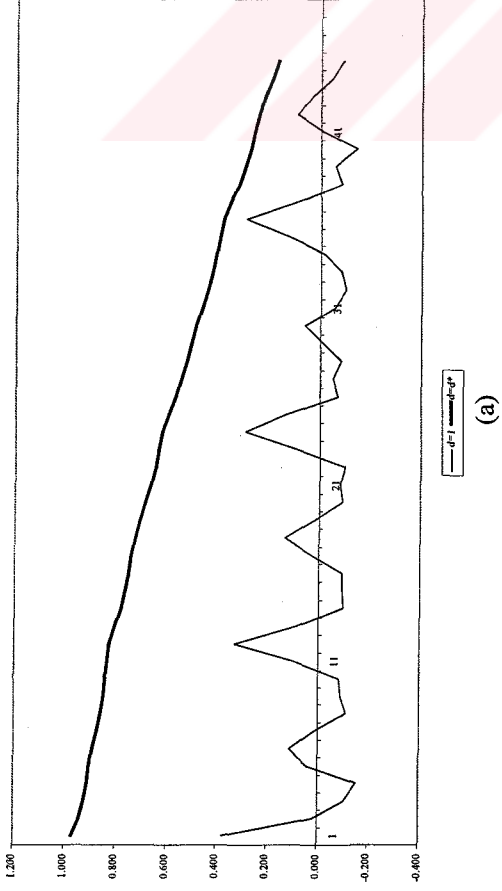


(c)

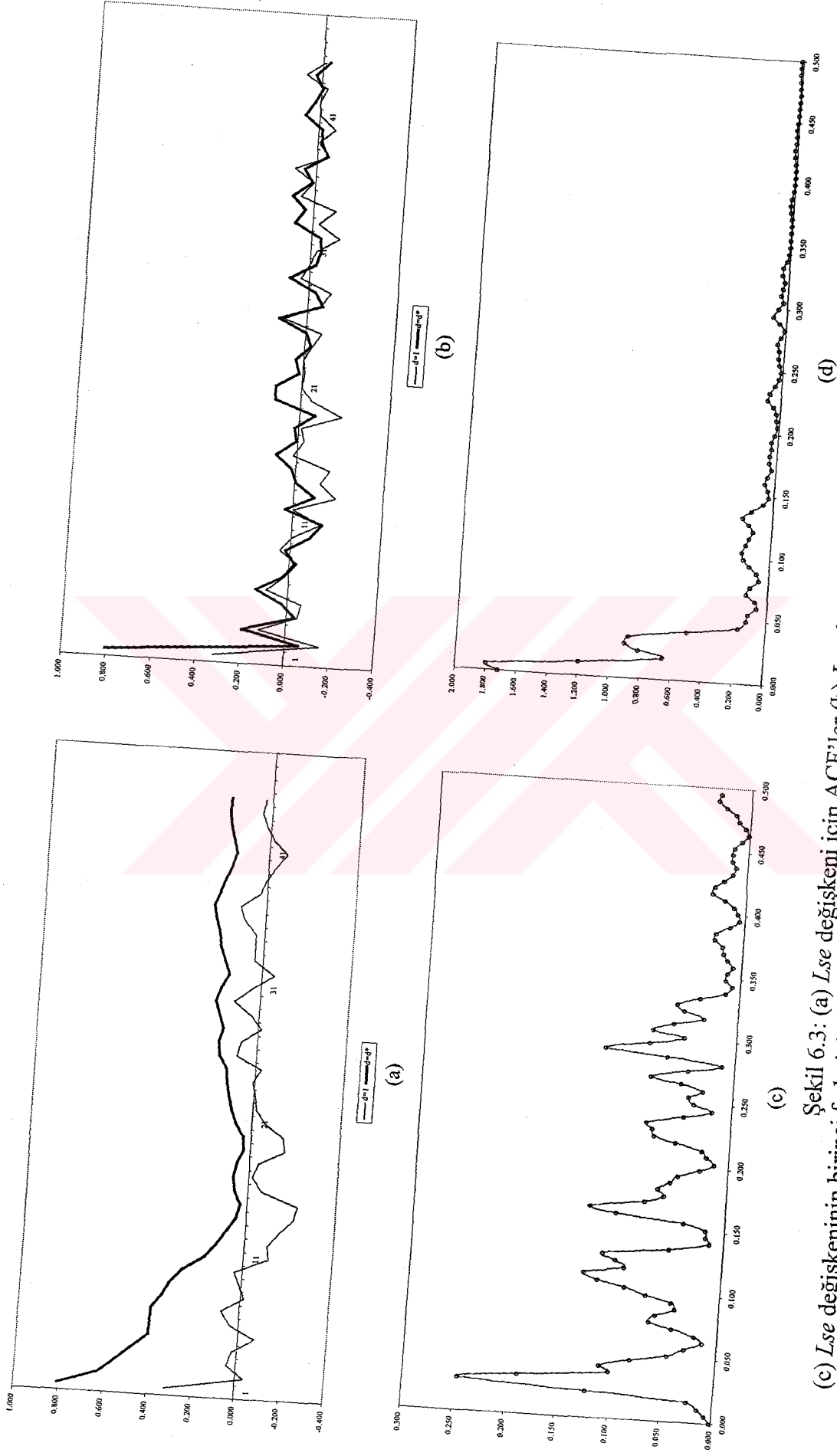


(d)

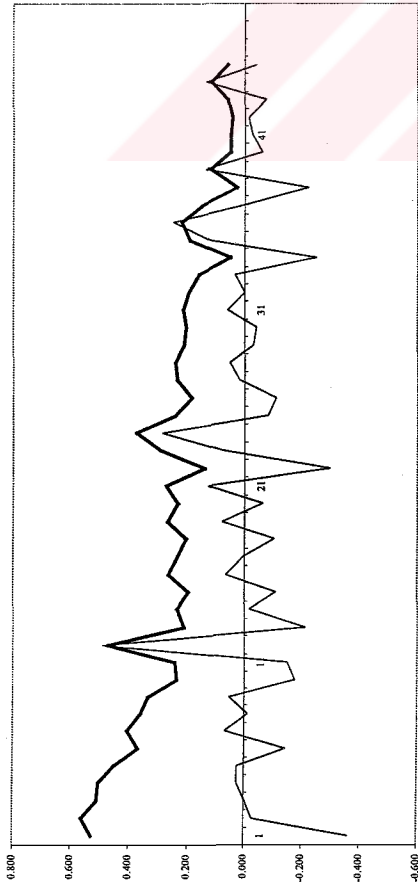
Şekil 6.1: (a) *Lip* değişkeni için ACF'ler (b) *Lip* değişkeni için PACF'ler
(c) *Lip* değişkeninin birinci farkı için spektral yoğunluk (d) 0.50 ile bölüntüsel fark alınmış *Lip* değişkeni için spektral yoğunluk



Şekil 6.2: (a) $Lcpi$ değişkeni için ACF'ler (b) $Lcpi$ değişkeni için PACF'ler
(c) $Lcpi$ değişkeninin birinci farkı için spektral yoğunluk (d) 0.41 ile bölüntüsel fark alınmış $Lcpi$ değişkeni için spektral yoğunluk

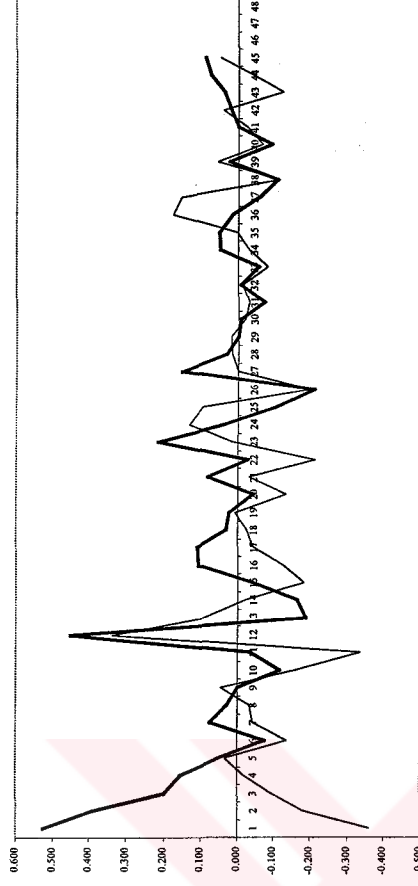


Şekil 6.3: (a) Lse değişkeni için ACF'ler (b) Lse değişkeni için PACF'ler (c) Lse değişkeninin birinci farkı için spektral yoğunluk (d) 0.50 ile bölünmüş Lse değişkeni için spektral yoğunluk



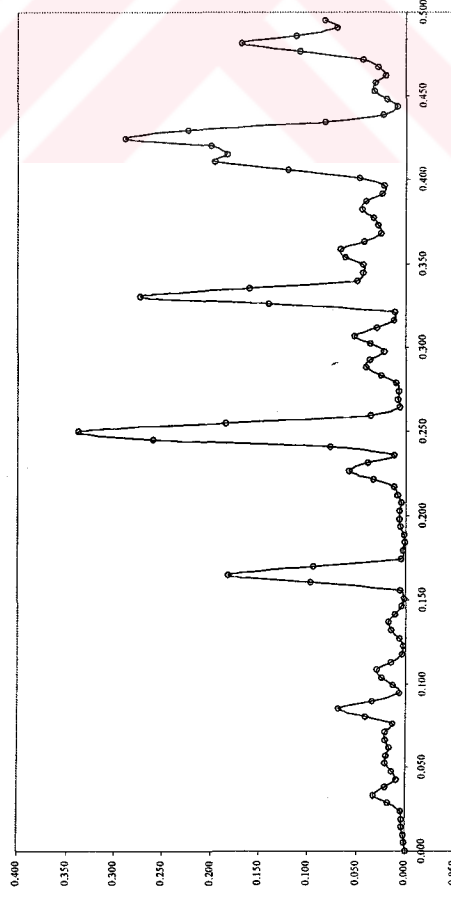
— $\hat{\rho}_k$ — $\hat{\rho}_k^*$

(a)

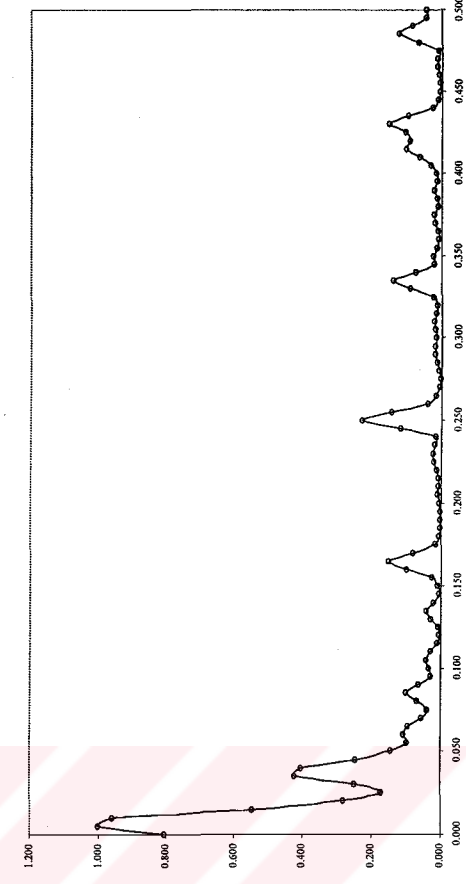


— $\hat{\rho}_k$ — $\hat{\rho}_k^*$

(b)

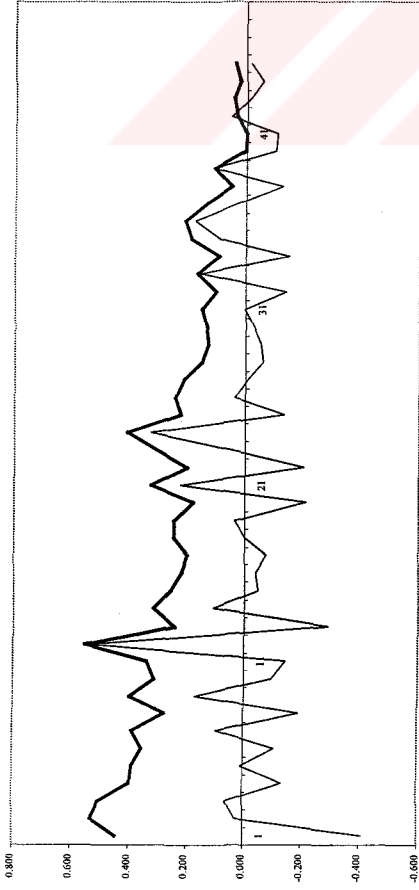


(c)

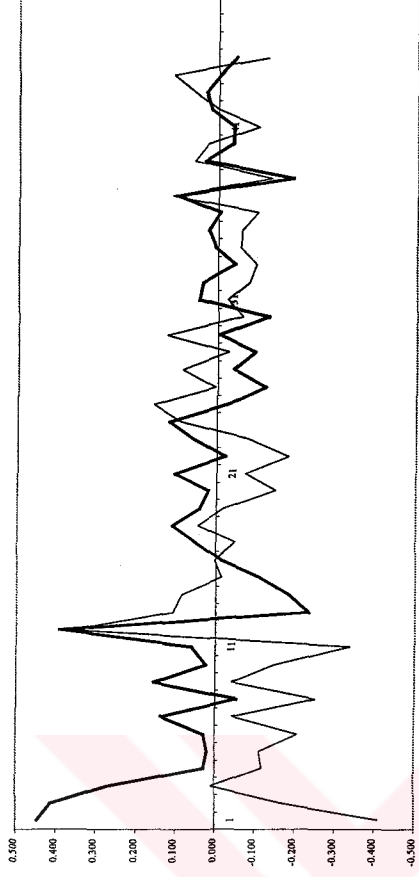


(d)

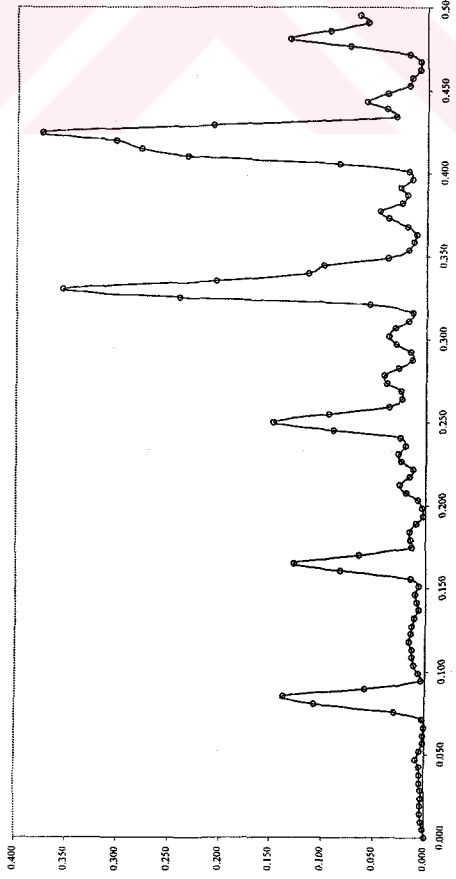
Şekil 6.4: (a) L_m değişkeni için ACF'ler (b) L_m değişkeni için PACF'ler
(c) L_m değişkeninin birinci farkı için spektral yoğunluk (d) 0.48 ile bölüntüsel fark alınmış L_m değişkeni için spektral yoğunluk



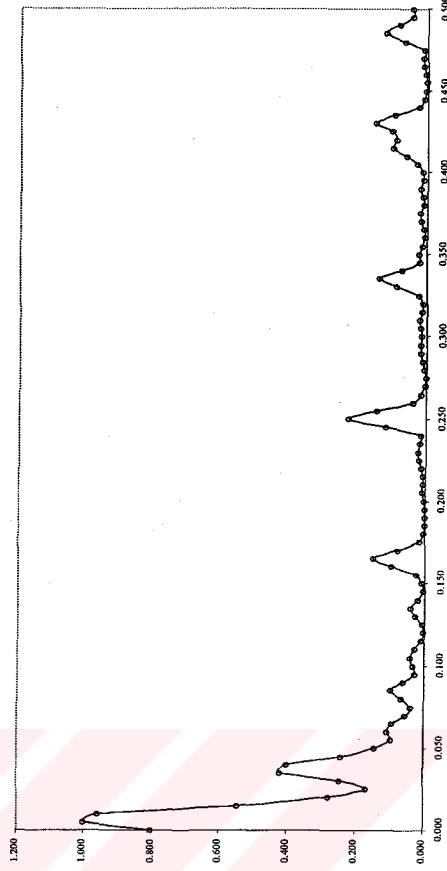
(a)



(b)

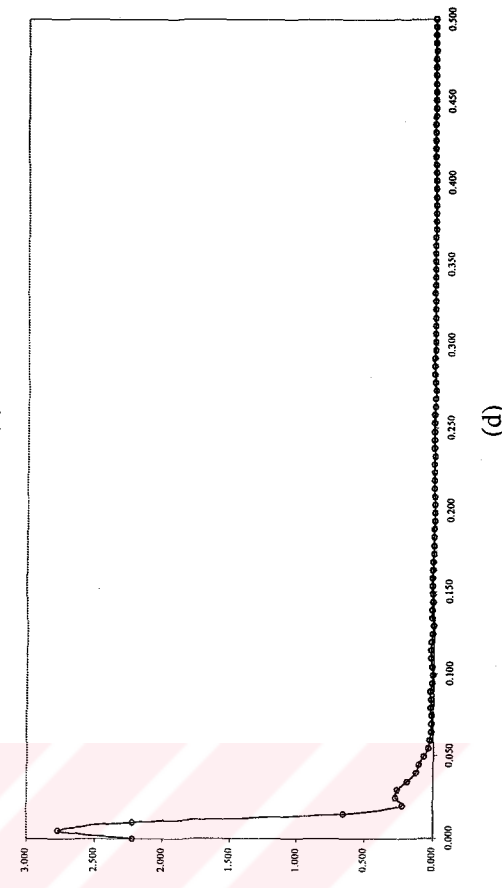
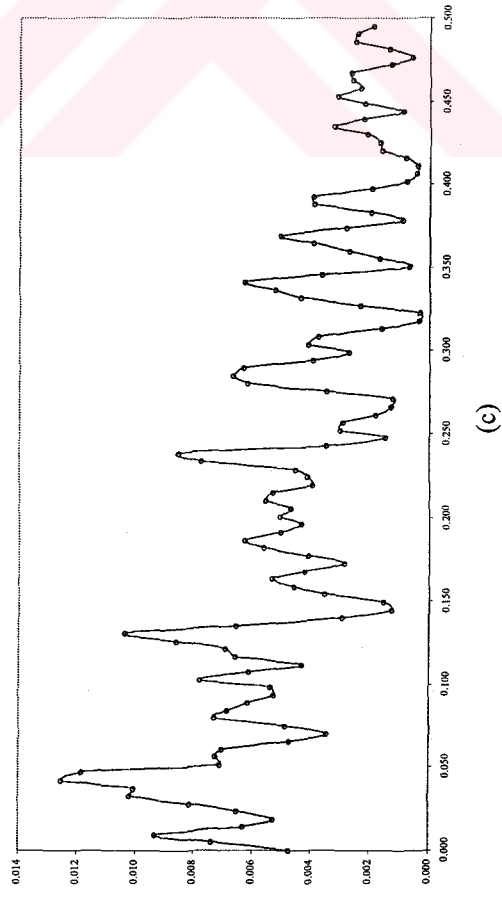
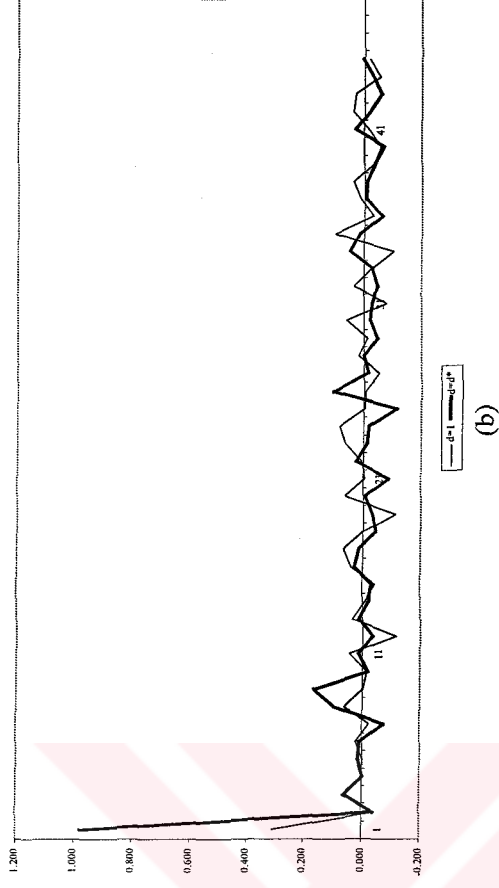
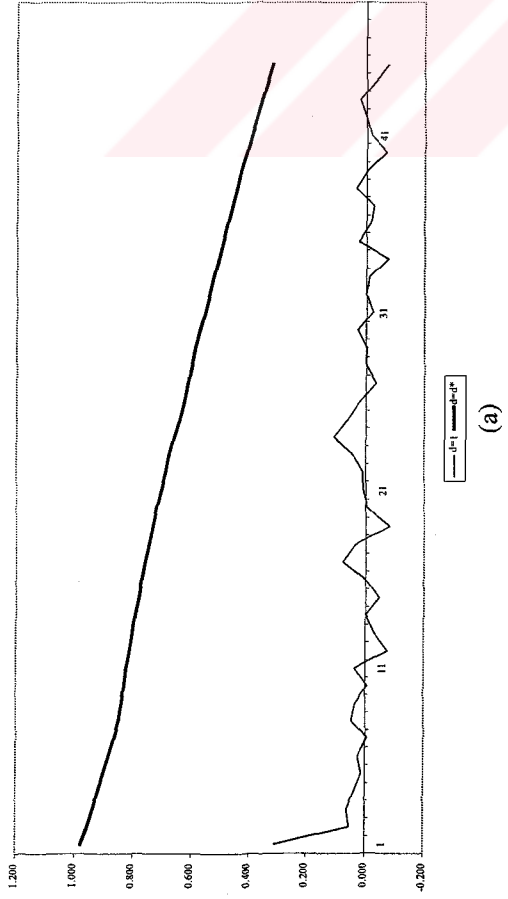


(c)

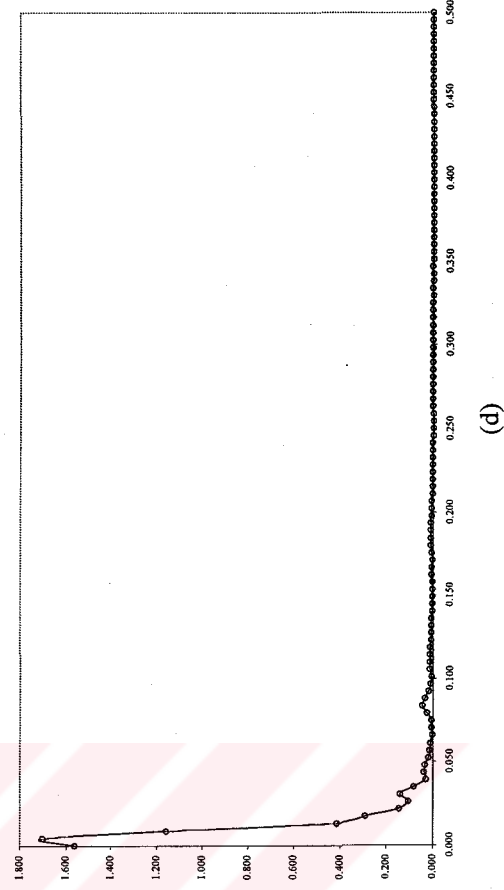
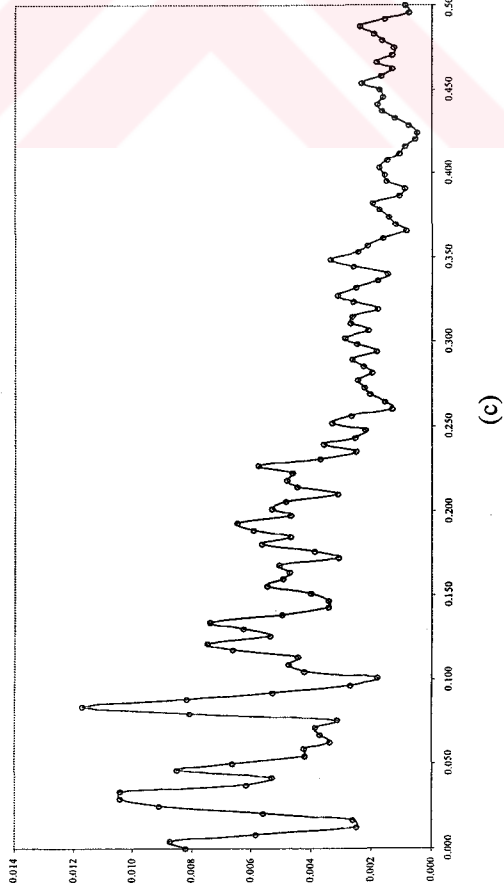
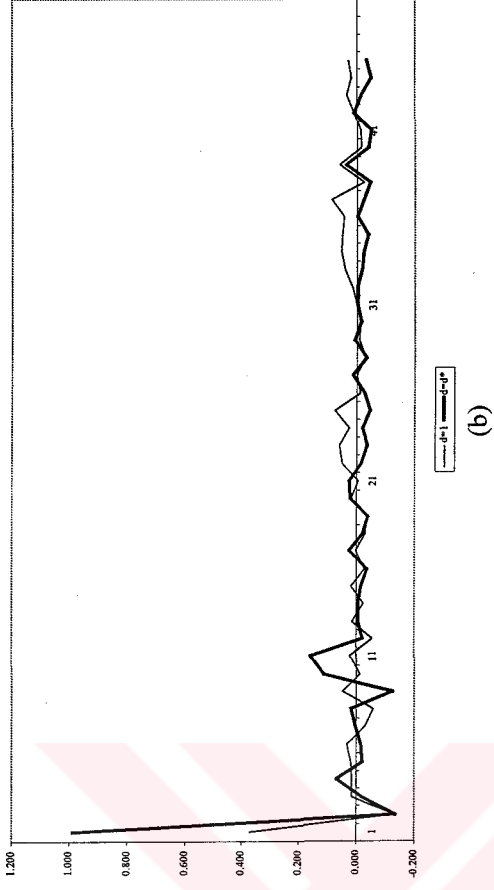
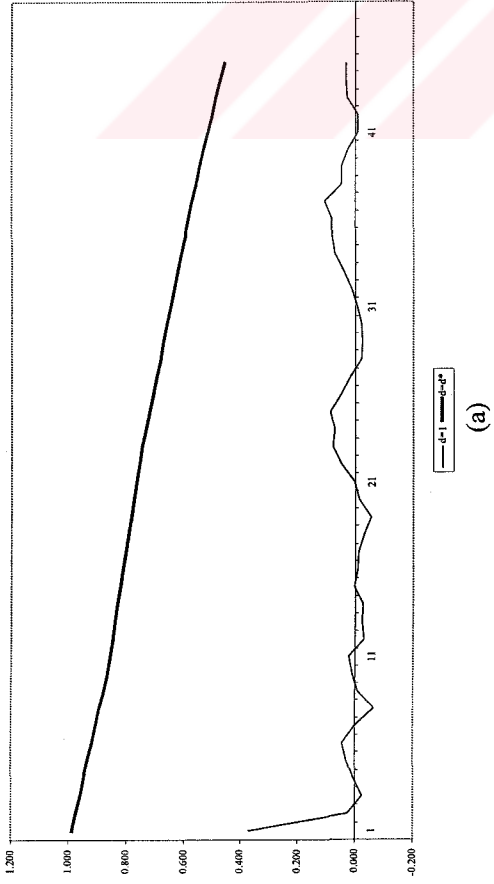


(d)

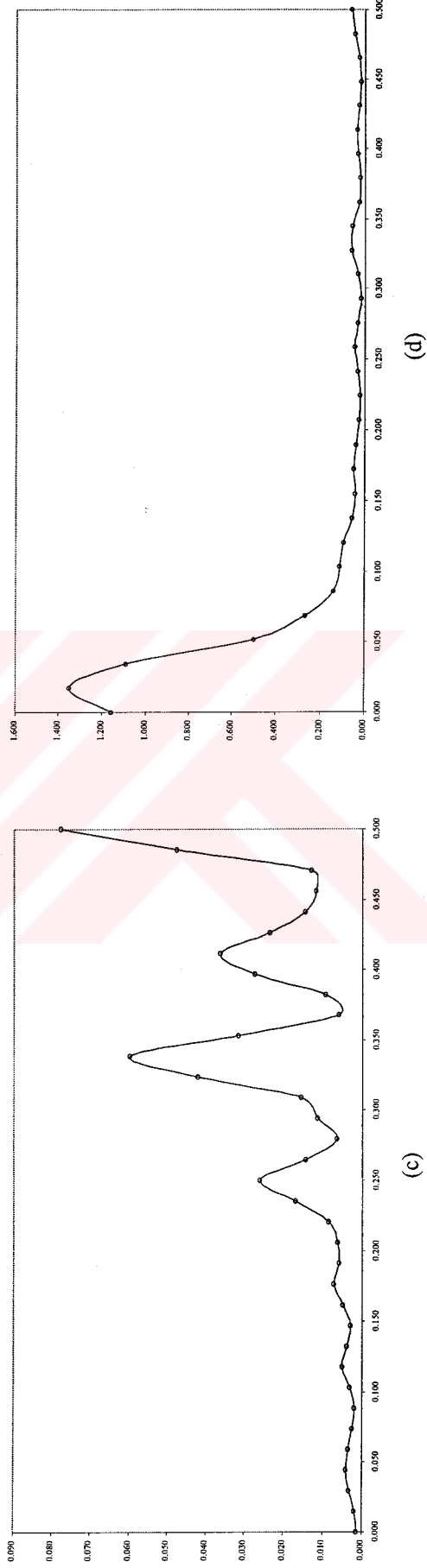
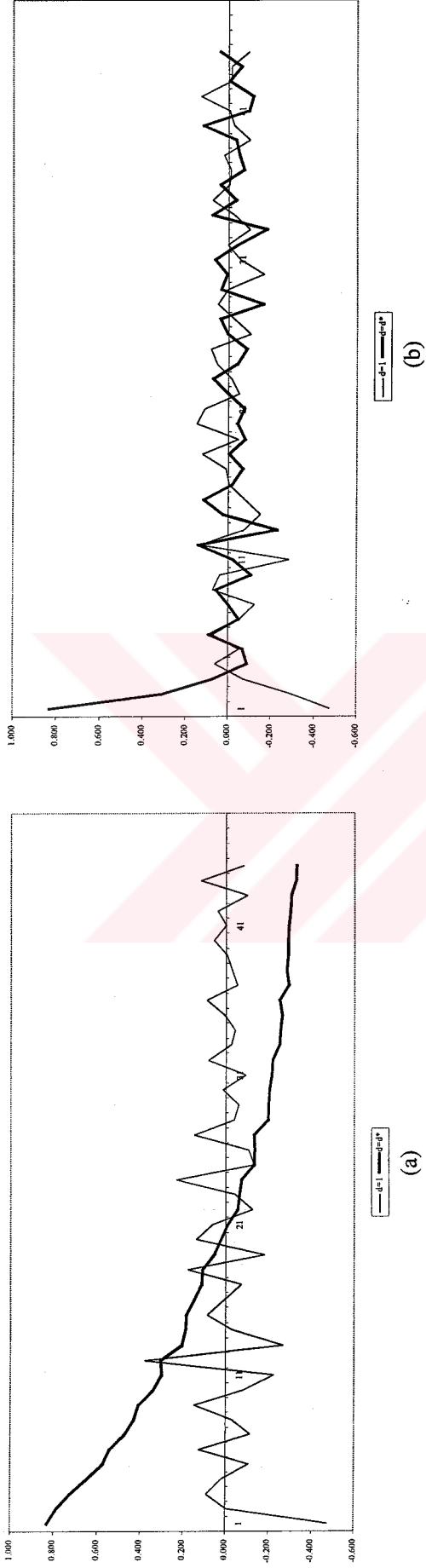
Şekil 6.5: (a) Lx değişkeni için ACF'ler (b) Lx değişkeni için PACF'ler
(c) Lx değişkeninin birinci farkı için spektral yoğunluk (d) 0.49 ile bölüntüsel fark alınmış Lx değişkeni için spektral yoğunluk



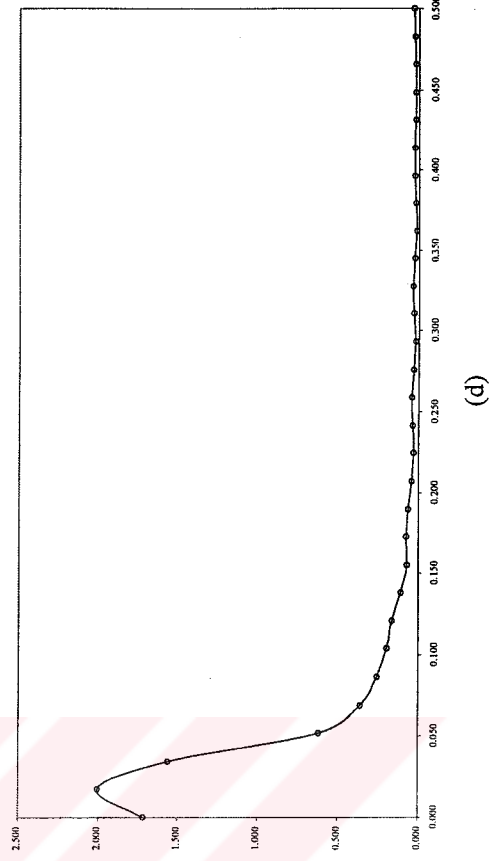
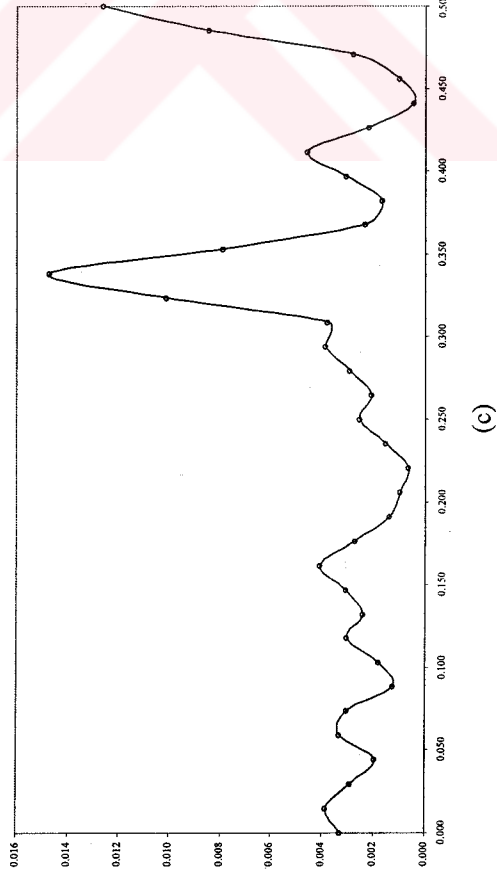
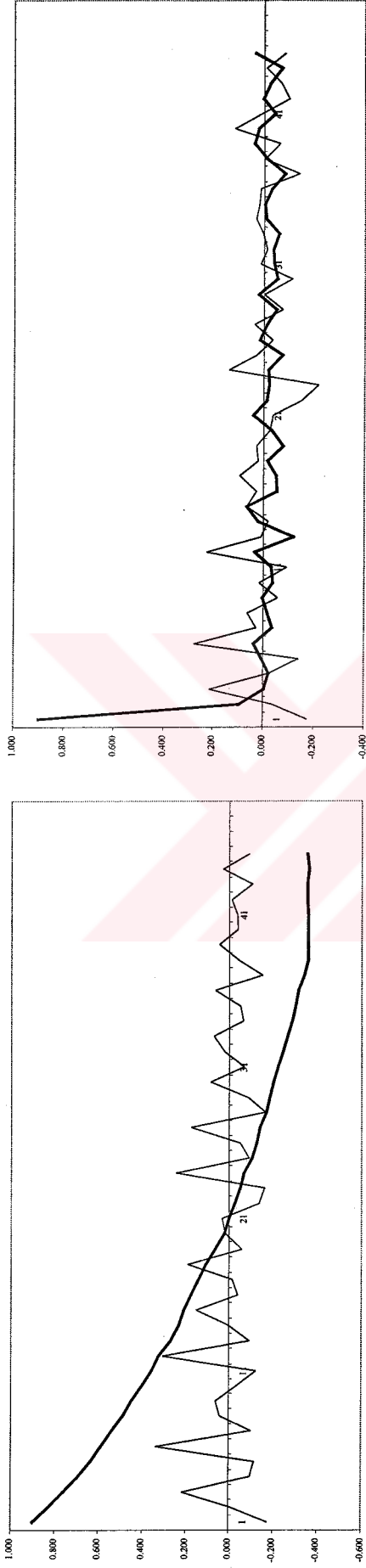
Şekil 6.6: (a) L_g değişkeni için ACF'ler (b) L_g değişkeni için PACF'ler
(c) L_g değişkeninin birinci farkı için spektral yoğunluk (d) 0.24 ile bölüntüsel fark alınmış L_g değişkeni için spektral yoğunluk



Şekil 6.7: (a) Le değişkeni için ACF'ler (b) Le değişkeni için PACF'ler
(c) Le değişkeninin birinci farkı için spektral yoğunluk (d) 0.29 ile bölüntüsel fark alınmış Le değişkeni için spektral yoğunluk



Şekil 6.8: (a) $Lm2$ değişkeni için ACF'ler (b) $Lm2$ değişkeni için PACF'ler
(c) $Lm2$ değişkeninin birinci farkı için spektral yoğunluk (d) 0.49 ile bölüntüsel fark alınmış $Lm2$ değişkeni için spektral yoğunluk



Şekil 6.9: (a) $Lm1$ değişkeni için ACF'ler (b) $Lm1$ değişkeni için PACF'ler
(c) $Lm1$ değişkeninin birinci farkı için spektral yoğunluk (d) 0.43 ile bölüntüsel fark alınmış $Lm1$ değişkeni için spektral yoğunluk

7. GENEL DEĞERLENDİRME VE SONUÇ

Bu çalışmada zaman serisi modellerinin kullanım alanları ve temel modelleme yaklaşımları açıklandıktan sonra ikinci bölümde zaman serileri için temel istatistiksel büyüklükler ortaya konmuş ve serilerin eğilim yapıları, durağan olma ve olmama durumları geleneksel zaman serisi çözümlemesinin kullandığı biçimden çok kısa süreli bellek – uzun süreli bellek tartışması üzerinden açıklanmıştır. Kısa veya uzun süreli belleğin zaman serisi çözümlemesinin temel görsel çıktıları olan ardışık bağımlılık ve kısmi ardışık bağımlılık fonksiyonlarında ne gibi form bozulmalarına yol açtığı da belirtilmiştir. Üçüncü bölüm bölüntüsel bütünleşme kavramının açıklanmasına temel oluşturacak sıklık alanı yaklaşımını özetlemekte ve sıklık alanı ile zaman alanı arasındaki bağları kurmaktadır. Bu bölümde sıklık alanının zaman alanında yapılan çözümlemelerin alması bir platformu olduğu gösterilmiş ve kısa veya uzun süreli hafıza modellerinin spektral çözümlemenin görsel çıktılarındaki yansımaları vurgulanmıştır. Dördüncü bölüm ise bölüntüsel bütünleşmenin tanımını, kavuşmazdaki özelliklerini tanımlamakta ve yazında önerilmiş bölüntüsel bütünleşme katsayısı kestirim tekniklerini özetlemektedir. Burada zaman alanı ve sıklık alanı yaklaşımları ayırımında on iki temel yöntem ve bunların çeşitlemeleri incelenmektedir. Zaman alanında ise eş anlı ve tekil kestirim yöntemleri ayırımını gidilmiştir. İzleyen beşinci bölümde bölüntüsel bütünleşme katsayı kestirim yöntemlerinin sapmasızlık anlamındaki performansı Monte Carlo benzetimleri aracılığıyla karşılaştırılmış ve yüksek performanslı kestirim teknikleri ortaya çıkarılmıştır. Yapılan benzetim çalışması üç farklı örneklem büyüklüğünde, 1000 tekrarlı, on farklı bütünleşme derecesini on üç farklı yöntemin kestirim sapmasızlığı için karşılaştırmayı içerir. Çalışmanın altıncı bölümü seçilen parametre kestirim yöntemlerinin Türkiye'ye ait bazı makroekonomik büyüklüklere uygulanmasını ve uzun dönem modellerinin ortaya konmasını içermektedir. Yedinci bölüm çalışmanın sonuçlarını özetler ve genel bir değerlendirme sunar.

Bu çalışma temelde klasik anlamdaki ardışık bağımlı bütünleşik hareketli ortalama modelleri olarak bilinen $ARIMA(p,d,q)$ veri üretim süreçleri türünün

devrini kapattığını ve yerini çok daha genel bir aile olan ardışık bağımlı bölüntüsel bütünleşik hareketli ortalama modelleri olarak bilinen ARFIMA(p,d,q) veri üretim süreçlerine bıraktığını vurgular. Bütünleşme kavramının katı tamsayılı bütünleşme kısıtları ortadan kalkmıştır. Seriler bir bölüntü derecesinden de bütünleşik olabilirler. Bu bağlamda $I(0)$ veya $I(1)$ gibi uzun süreli hafızanın kesikli durumları varlıklarını sürdüremezler, hatta hipotetik durumlar olarak kabul edilebilirler. Yazında önerilen çok sayıdaki farklı bölüntüsel bütünleşme katsayısı kestirim yöntemiyle bulunabilecek bölüntüsel bütünleşme dereceleri uyarınca alınacak bölüntüsel farklar yardımıyla durağan, kısa süreli hafızaya sahip seriler elde edilir. Durağanlık, giriş bölümünde de değinildiği gibi zaman serisi modellemesinin temel varsayımıdır, modellenecek serilerin durağan olma zorunlulukları vardır.

Granger (1980), Granger ve Joyeux (1980) ve Hosking (1981, 1994) bölüntüsel bütünleşme kavramının ortaya atıldığı ve geliştirildiği çalışmalar olduğu belirtilmiştir. Katsayı kestirim yöntemlerinin önerildiği Hurst (1951), Mandelbrot (1972), Granger ve Joyeux (1980), Janacek (1982), Geweke ve Porter-Hudak (1983), Fox ve Taqqu (1986), Lo (1991), Sowell (1992), Robinson (1990, 1994, 1995) Tieslau ve diğ. (1996) ve Phillips (1999) çalışmaları da içeriğe dahil edilmiştir. Durağan seriler elde etmek için yapılacak fark alma işleminin derecesini belirlemeyi hedefleyen yöntemlerin başarıları veya başka bir deyişle performanslarının sorgulanması gerekmektedir. Bunun için yukarıda sözü edilen Monte Carlo benzetimi yapılmış ve kavuşmaz dağılımı hakkında bilgi sahibi olunan yöntemler ve bunların çeşitlemeleri karşılaştırmalı olarak incelenmiştir. Bu benzetim sonucunda şu sonuçlara ulaşılmıştır.

- i. Sabit örneklem büyüklüğünde GPH log periodogram yaklaşımı ile kestirilen bölüntüsel bütünleşme katsayısının sapması belirli bir hareket tarzına sahip değildir. Artan veya azalan d değerleri ile ilişkisinden söz edilemez.
- ii. Robinson GSE kestiricisinde ise sapma katsayı uzayının sınırlarına yaklaşıldıkça GPH yaklaşımının sapmasına göre mutlak değerce daha küçük değerler almaktadır. Ancak arada kalan bölge için ikisi arasında net bir ayrım yapmak olanaklı değildir.

- iii. Robinson APER kestiricisinde ise, farklı q değerleri için yapılan benzetimler sonucunda mutlak değerce en küçük sapmayla, Lobato ve Robinson (1996) çalışmasında da belirtildiği gibi $q=0.5$ seviyesinde karşılaşılmaktadır. Ancak bu benzetimin ilginç sonucu bölüntüsel bütünleşme katsayısı 0.5 'ten -0.5 'e doğru giderken sapmanın mutlak değerce azalma göstermesidir. Başka bir deyişle bölüntüsel bütünleşme katsayısı ile sapma arasında ters yönlü bir ilişki vardır, denilebilir.
- iv. GPH log periodogram ve Robinson GSE ile karşılaştırıldığında $d>0$ bölgesinde diğerlerine göre daha fazla sapma sergilerken, $d<0$ bölgesi için APER kestiricisi diğerleriyle hemen hemen aynı performansı sergilemektedir.
- v. Robinson log periodogram kestiricisinde sabit l değeri için α 0.5 'in sapmasızlık anlamında yüksek performans sergilediği görülmektedir. Katsayı uzayının sınırlarında sapma en yüksek değerine ulaşır, ancak d katsayıları ile önemli bir ilişkiyi sahip değildir.
- vi. Robinson log periodogram kestiricisinin performansı ($l=2$, $\alpha=0.5$ için) Robinson APER'e göre, GPH log periodogram ve Robinson GSE kestiricilerinin performansına daha yakındır.
- vii. Phillips'in geliştirilmiş log periodogram kestiricisi harmonik ordinat sayısı arttıkça (α , 0.5 'ten 0.9 'a doğru yaklaştıkça) daha küçük sapmalar vermektedir. Ancak sapma her zaman için sıfırdan büyüktür. Tüm harmonik ordinat sayılarında bölüntüsel bütünleşme katsayısı azaldıkça sapma artmakta, ve $d<0$ bölgesinde dramatik bir boyuta varmaktadır.
- viii. Sowell en yüksek olabilirlik yönteminin her iki seçeneğinde de sapma sıfırdan küçüktür. Yöntem, örneklem ortalaması çıkartılarak sıfır ortalamalı bir seri haline getirilmesi halinde, sıfır varsayılan ortalama almaşığına göre daha fazla sapma yaratır. Her iki durum için de d değerleri ile sapma arasında bir ilişki tanımlanamaz.
- ix. Örneklem büyüklüğü arttıkça sabit bölüntüsel bütünleşme katsayısı seviyesinde, Phillips geliştirilmiş log periodogram kestiricisi dışında tüm diğer yöntemler daha düşük sapma sergilemeye başlarlar.

- x. Phillips geliştirilmiş log periodogram kestiricisinde bu durum, $d>0$ için diğerleri ile benzer bir halde iken $d<0$ bölgesinde katsayı uzayının sınırına yaklaştıkça artma eğilimi sergiler.
- xi. Robinson log periodogram kestiricisinin örneklem büyüklüğünün artmasıyla gösterdiği gelişme, GPH log periodogram ve Robinson GSE kestiricilerinin önüne geçmesi ile sonuçlanır.
- xii. Örneklem büyüklüğünün artmasının Sowell en yüksek olabilirlik yaklaşımı üzerinde yarattığı etki ise, $T=100$ durumunda iyi performans sergilediği belirtilen GPH ve Robinson GSE kestiricileriyle arasındaki farkın açılması yönündedir.
- xiii. Sabit örneklem büyüklüğünde ($T=100$) Phillips geliştirilmiş log periodogram kestiricisi dışında hiçbir kestiricide değişen bölüntüsel bütünleşme katsayıları ile kök hata kareleri ortalaması arasında tanımlı bir ilişki yoktur. Phillips geliştirilmiş log periodogram kestiricisi ile d değerleri arasında ters yönlü bir ilişkinin varlığı rahatlıkla görülebilir.
- xiv. Tüm bölüntüsel bütünleşme katsayıları için Robinson GSE ve Sowell en yüksek olabilirlik kestiricileri en düşük kök hata kareleri ortalaması değerine sahiptir. Bu iki yöntemi, söz konusu ölçüt anlamında, GPH log periodogram ve Robinson log periodogram ($l=2$, $\alpha=0.5$) izler.
- xv. Robinson APER kestiricisi için $q=0.5$ yine en iyi q değeri olarak karşımıza çıkar.
- xvi. Phillips geliştirilmiş log periodogram kestiricisi incelendiğinde ise denklemde kullanılacak gözlem sayısını, başka bir deyişle harmonik ordinatları belirleyen α değeri arttıkça, $d>0$ bölgesi için, kestiricinin kök hata kareleri ortalaması ölçütünün yüksek performanslı olarak kabul edilebilecek dört yönteminkine yaklaştığı görülür.

Bu bağlamda incelendiğinde, ARFIMA(0, d ,0) veri üretim süreçli seriler için ele alınan alması yöntemlerden GPH log periodogram, Robinson GSE ve Sowell en yüksek olabilirlik kestiricilerinin küçük örneklemelerde diğerlerine oranla daha

başarılı kestirimler yaptığı söylenebilir. Bu nedenle, küçük örneklem durumunda sözü edilen kestiricilerin kullanılması yerinde olacaktır. Örneklem büyüklüğünün fazla olması durumunda bu gruba Robinson log periodogram kestiricisinin de eklenmesi yanlış olmaz.

Bu karar verildikten sonra seçilen yöntemler Türkiye için dokuz makroekonomik büyüklüğe uygulanmış ve bu serilerin uzun süreli hafıza modelleri kurulmaya çalışılmıştır. GPH log periodogram yaklaşımıyla kestirilen katsayıların hepsinin bire çok yakındır. Bu da uzun süreli hafıza modelleri ailesine ait bir katsayıdır ancak $d \in (-.05, 0.5)$ bölgesinin dışına düşmektedir. Robinson GSE kestiricileri ise GPH'ya oranla daha düşük kestirim değerleri vermektedir. Benzetim çalışmasının sonuçlarından yola çıkarak değerlendirilirse Robinson GSE kestiricisinin daha güvenilir olduğu sonucuna varılabilir. Ancak burada başka bir tartışma devreye girer. Daha önceki bölümlerde de değinildiği gibi uzun süreli hafızanın etkisini yakalayan bölüntüsel bütünleşme katsayısının kestirimi, özellikle sıklık alanında çalışan yarı katsayısal yöntemler kullanıldığında kısa süreli hafızanın varlığından etkilenmektedir. Çözümlemeye alınan verilerin gerçek hayat verisi olduğu düşünülürse, onların ARFIMA(0,d,0) veri üretim sürecine uymasını beklemek yanlış olacaktır. ARFIMA(p,d,q) veri üretim süreci serilerde bölüntüsel bütünleşme katsayısının en etkin ve sapmasız kestiricisi, tüm katsayıların eş anlı değerlendirildiği en yüksek olabilirlik yaklaşımı kullanıldığında elde edilebilir. Bu anlamda Sowell en yüksek olabilirlik kestiricisi kısa süreli hafızanın etkisinden bağımsız bölüntüsel bütünleşme katsayı kestirimleri verecektir. Bu nedenle söz konusu en yüksek olabilirlik kestirimleri yapılmış ve son model olarak kullanılmıştır. Bu modelleme yaklaşımı gerekli hallerde deterministik eğilim ve/veya mevsimsel hareketliliği yakalayan kukla değişkenlerin kullanılmasına da fırsat tanır.

Sonuç olarak zaman serisi modellemesinin akışında ilk adım olarak görülen belirlenme sınamalarından biri olan bütünleşme sınamalarının kısıtlı yöntemlerle yapılmasının, sürecin geri kalan adımlarını tamamen etkileyecek sorunlar yaratabileceği gerçeği vurgulanmalıdır. Yanlış belirlenmiş modeller yanlış kurulacak ve yapılan kestirimler hatalı olacaktır. Bu kestirimlerin politika belirlenmesine yönelik kullanımı ise hatalı yönlendirmeler yaratabilir.

Bunun yanı sıra daha önceki bölümlerde belirtildiği gibi zaman serisi modelleri dışınka kurulacak bir ekonometrik modelin de durağanlığının sağlanmış olması gerekmektedir. Salt bütünleşme –veya eğilim yapısı- nedeniyle aslında var olmayan anlamlı ilişkiler, ekonometrik modeller kurulabilir. Bu durum düzemece regresyon olarak bilinmektedir. Klasik yaklaşım uyarınca durağanlaştırma için alınacak birinci dereceden fark, aslında bölüntüsel bütünleşik bir seride ($d-1$) gibi bir bütünleşme derecesi dayatacaktır. Bu da araştırmacıyı, gizli bir düzemece regresyon sorunuyla karşı karşıya bırakır, ancak araştırmacı bunun varlığından haberdar değildir. Bu ve benzeri nedenlerden ötürü zaman serileri ile yapılacak çalışmalarda serilerin bütünleşme derecelerini belirlemek için klasik yaklaşımın kısıtlı penceresinden değil, çağdaş modelleme anlayışının geniş bakış açısından faydalanmak gerekmektedir.



KAYNAKLAR

- Agiakloglou, C., Newbold, P. and Wohar, M., 1991.** Bias an Estimator of Fractional Difference Parameter, *Journal of Time Series Analysis*, **14**, 236-246
- Andersson, M.K., 2000.** Do Long-Memory Models Have Long Memory?, *International Journal of Forecasting*, **16**, 121-124.
- Baum, C.F., Barkoulas, J.T. and Çağlayan, M., 1998.** Long memory or Structural Breaks: Can Either Explain Non-stationary Real Exchange Rates Under the Current Float?, *Journal of International Financial Markets, Institutions of Money*, **9**, 359-376.
- Baillie, R.T., 1996.** Long memory processes and fractional integration in econometrics, *Journal of Econometrics*, **73**, 5-59
- Bowerman, B.L. and O'Connell, R.T., 1993.** Forecasting and time series: An applied approach, 3rd. Edition, Duxbury/Thomson Learning, New Jersey
- Brockwell, P.J. and Davis, R.A., 1996.** Introduction to time series and forecasting, Springer-Verlag, New York
- Brockwell, P.J. and Davis, R.A., 1991.** Time series: Theory and Methods, 2nd. Edition, Springer-Verlag, New York
- Cheung, Y.W. and Diebold, F.X., 1994.** On Maximum Likelihood Estimation of the Differencing Parameter of Fractionally-Integrated Noise with Unknown Mean, *Journal of Econometrics*, **62**, 301-316.
- Cheung, Y.W., 1993.** Long Memory in Foreign-Exchange Rates, *Journal of Business & Economic Statistics*, **1**, 93-101.
- Cochrane, J.H., 1997.** Time series for macroeconomics and finance, *Manuscript*
- Cromwell, J.B., Labys, W.C. and Terraza, M., 1994.** Univariate tests for time series models, Sage Publications, California

- Delgado, A.M. and Robinson P.M.,** 1994. New methods for the analysis of long-memory time-series: Application to Spanish inflation, *Journal of Forecasting*, **13**, 97-107.
- Dickey, D.A. and Fuller, W.A.,** 1979. Distribution of the estimator for autoregressive time series with a unit root, *Journal of American Statistical Association*, **74**, 427-431
- Diebold, F.X. and Rudebusch, G.D.,** 1991. On the power of Dickey-Fuller tests against fractional alternatives, *Economics Letters*, **35**, 155-160
- Diebold, F.X. and Rudebusch, G.D.,** 1989. Long memory and persistence in aggregate output, *Journal of Monetary Economics*, **24**, 108-209
- Fox, R. and Taquq, M.S.,** 1986. Large sample properties of parameter estimates for strongly dependent stationary Gaussian time series, *Annals of Statistics*, **14**, 517-532
- Franses, P.H.,** 1998. Time series models for business and economic forecasting, Cambridge University Press, Cambridge
- Geweke, J. and Porter-Hudak, S.,** 1983. The estimation and application of long memory time series models, *Journal of Time Series Analysis*, **4**, 221-238
- Gil Alana L.A. and Robinson M.,** 1997. Testing of unit root and other non-stationary hypotheses in macroeconomic time series, *Journal of Econometrics*, **80**, 241-268.
- Greene, W.H.,** 2000. Econometric Analysis, 4th. Edition, Prentice Hall, New Jersey
- Granger, C.W.J.,** 1980. Long memory relationships and the aggregation of dynamic models, *Journal of Econometrics*, **14**, 227-238
- Granger C.W.J. and Joyeux R.,** 1980. An Introduction to Long-Memory Time Series Models and Fractional Differencing, *Journal of Time Series Analysis*, **1**, 15-29.
- Granger, C.W.J. and Newbold, P.,** 1977. Forecasting economic time series, Academic Press, New York

- Granger, C.W.J. and Newbold, P., 1974.** Spurious regression in econometrics, *Journal of Econometrics*, **2**, 111-120
- Gujarati, D.N., 1995.** Basic Econometrics, 3rd. Edition, Istanbul
- Hall, S.G. (ed), 1994.** Applied Economic Forecasting Techniques, Harvester-Wheatsheaf, Cambridge
- Hassler, U. and Wolters, J., 1995.** Long Memory in Inflation Rates International Evidence, *Journal of Business & Economic Statistics*, **1**, 37-45.
- Haubrich, J.G., 1993.** Consumption and fractional differencing: Old and new anomalies, *Review of Economics and Statistics*, **75**, 767-772
- Hosking, J.R.M., 1996.** Asymtotic Distributions of the sample Mean, Autocovariances, and Autocorrelations of Long-Memory Time Series, *Journal of Econometrics*, **73**, 261-284.
- Hosking, J.R.M., 1984.** Modeling persistence in hydrological time series using fractional differencing, *Water Resources Reseach*, **20**, 1898-1908
- Hosking, J.R.M., 1981.** Fractional differencing, *Biometrika*, **68**, 165-176
- Hurst, H.E., 1951.** Long term storage capacity in reservoirs, *Tranactions of the American Society of Civil Engineers*, **116**, 770-799
- Hurvich, C.M. and Beltrao, K.I., 1991.** Asymptotics for the Low-Frequency Ordinates of the Periodogram of a Long-Memory Time Series, *Journal of Time Series Analysis*, **14**, 456-472
- Hylleberg, S., Engle, R.F., Granger, C.W.J. and Yoo, B.S., 1990.** Seasonal Integration and Cointegration, *Journal of Econometrics*, **44**, 215-238
- Janacek, G.J., 1982.** Determining the degree of differencing for time series via the log spectrum, *Journal of Time Series Analysis*, **3**, 177-183
- Kim, C.S. and Phillips, P.C.B., 1999.** Modified log periodogram regression, *Yale University Discussion Papers*
- Kwiatkowski, D., Phillips, P.C.B., Schmidt, P. and Shin, Y., 1992.** Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root, *Journal of Econometrics*, **54**, 15-178

- Lee, D. and Schmidt, P.**, 1996. On the Power of the KPSS test of Stationary Against Fractionally-Integrated Alternatives, *Journal of Econometrics*, **73**, 285-302.
- Lo, A.W.**, 1991. Long term memory in stock market prices, *Econometrica*, **59**, 1279-1314
- Lobato, I. and Robinson, P.M.**, 1996. Averaged Periodogram Estimation of Long Memory, *Journal of Econometrics*, **73**, 303-324.
- Mandelbrot, B.B.**, 1972. Statistical methodology for non periodic cycles: from the covariance to R/S analysis, *Annals of Economic and Social Measurement*, **1**, 259-290
- Mandelbrot, B.B. and Wallis, J.**, 1968. Noah, Joseph and operational hydrology, *Water Resources Research*, **4**, 909-918
- Martin, V.L. and Wilkins, N.P.**, 1999. Indirect Estimation of ARFIMA and VARFIMA Models, *Journal of Econometrics*, **93**, 149-175.
- Nelson, C.R. and Plosser, C.I.**, 1982. Trends and random walks in macroeconomic time series, *Journal of Monetary Economics*, **9**, 139-162
- Pankratz, A.**, 1991. Forecasting with dynamic regression models, John Wiley & Sons Inc., New York
- Parke, W.R.**, 1999. What is Fractional Integration?, *University of North Carolina Working Papers*
- Phillips, P.C.B.**, 1999a. Unit root log periodogram regression, *Yale University Discussion Papers*
- Phillips, P.C.B.**, 1999b. Discrete Fourier Transforms of Fractional Processes, *Yale University Discussion Papers*
- Robinson, P.M.**, 1995a. Gaussian semi-parametric estimation of long range dependence, *Annals of Statistics*, **23**, 1630-1661
- Robinson, P.M.**, 1995b. Log-Periodogram Regression of Time Series with Long Range Dependence, *The Analysis of Statistics*, **23**, 1048-1072.
- Robinson, P.M.**, 1990. Time series with strong dependence, *Advances in Econometrics: Six World Congress*, Cambridge

- Shea, G.S.**, 1991. Uncertainty and implied variance bounds for the expectations hypothesis of the interest rate term structure, *Empirical Economics*, **16**, 287-312
- Silverberg, G. and Verspagen, B.**, 1998. Long Memory in Time Series of Economic Growth and Convergence, *10th SASE Conference*, Vienna, Austria. July 13-16
- Smith, J., Taylor, N. And Yadav, S.**, 1996. Comparing the Bias and Misspecification in ARFIMA Models, *Journal of Time Series Analysis*, **18**, 507-527
- Sowell, F.**, 1992a. Maximum Likelihood estimation of stationary univariate fractionally integrated time series, *Journal of Econometrics*, **53**, 165-188
- Sowell, F.**, 1992b. Modeling Long-Run Behavior with the Fractional ARIMA Model, *Journal of Monetary Economics*, **29**, 277-302
- Sowell, F.**, 1990. The Fractional Unit Root Distribution, *Econometrica*, **58**, 495-505
- Tieslau, M.A., Schmidt, P. and Baillie, R.T.**, 1996. A Minimum Distance Estimator for Long-Memory Processes, *Journal of Econometrics*, **71**, 249-264
- Wright, J.H.**, 1999. A New Estimator of the Fractionally Integrated Stochastic Volatility Model, *Economics Letters*, **63**, 295-303

EK: VERİ ÜRETİM SÜRECİ, BENZETİM VE BÖLÜNTÜSEL FARK ALMA PROGRAM KODLARI

Bölüntüsel Bütünleşik veri üretimi için RATS 4.1 kodu

```
end all
allocate 1000
freq 1 500
compute rep=250
declare vect[series] seri(rep)
source(noecho) xgamma.src
source(noecho) arfsim.src
do j=1, rep
  compute n=500
  compute d=-0.1
  @arfsim d n y
  set seri(j) = y
end do j
print /seri
```

“FRACDIF.ADO” STATA 6.0 için Bölüntüsel fark alma kodu

```
program define fracdiff, rclass
  version 6

  syntax varlist(max=1) [if] [in] , D(real) [GENerate(string)]

  local generat = cond("`generate'" == "", "fracdiff", "`generate'")
  capture confirm new variable `generat'
  if _rc {
    di in r "`generat' already exists: " _c
    di in r "specify new variable with generate( ) option"
    exit 110
  }

  /* get time variables */
  qui tsset /* error if not set as time series */
  marksample touse
  _ts timevar, sort
  markout `touse' `timevar'
  tsreport if `touse', report
  if r(N_gaps) {
    di in red "sample may not contain gaps"
    exit
  }

  tempname stdif enddif endwt j depvar ii kk n
  tempvar wt
  local depvar `varlist'
  qui count if `touse'
  gen long `n' = sum(`touse')
  qui replace `touse' = 0 if `n'<13
  local stdif = 13
  local enddif = r(N)
  local endwt = `enddif'-`stdif'+1
```

```

qui gen `wt' = -`d' in 1/1
qui replace `wt' = `wt'[_n-1]*(_n-1-`d')/_n if _n>1
qui gen `generat' = `depvar' if `touse'
local ii = `stdif'
while `ii' <= `enddif' {
    local kk = 1
    while `kk' <= `ii'-1 {
        qui replace `generat' = `generat' + `depvar'[_n-`kk']*`wt'[_n-`kk'] in `ii'/'ii'
        local kk = `kk' + 1
    }
    local ii = `ii' + 1
}
end

exit

```

“ARFSIM.SRC” RATS 4.1 kodu

```

procedure arfsim d n x
type real *d
type integer *n
type series *x
declare cseries cb z
local integer Noninvert Nonsta r h
local real gx g1 g2 g3 g4 g5 gz
local series Gam U V gg xx fu fv
clear x
compute Noninvert = 0
compute Nonsta = 0
if (d>=-1).and.(d<-.5)
{
    compute Noninvert = 1
    compute d = d + 1
    compute n = n + 1
}
if (d>=.5).and.(d<1.5)
{
    compute Nonsta = 1
    compute d = d - 1
}
if d==0
{
    set x 1 n = %ran(1)
}

if d<>0
{
clear Gam U V gg
compute r = 0
@xgamma (r+d) g1
@xgamma (1.0-2*d) g2
@xgamma (r-d+1.0) g3
@xgamma (d) g4
@xgamma (1.0-d) g5
compute Gam(1) = g1*g2/(g3*g4*g5)
@xgamma d g4
do r = 1,n-1
    compute g1 = (%lngamma(r+d))
    compute g2 = (%lngamma(1.0-2*d))
    compute g3 = (%lngamma(r-d+1))

```

```

        compute g5 = (%lngamma(1-d))
        compute Gam(r+1) = g1+g2-(g3+g5)
        compute Gam(r+1) = exp(Gam(r+1))/g4
    end do r
    do r = 1,n,1
        compute gg(r) = Gam(r)
    end do r
    compute h = n
    do r = n-1,2,-1
        compute h = h + 1
        compute gg(h) = Gam(r)
    end do r
    rtoc
    # gg
    # cb
    fft cb 1 h
    conjugate cb 1 h
set u 1 n = %ran(1)
    compute u(1) = sqrt(2.0)*u(1)
    compute u(n) = sqrt(2.0)*u(n)
    set v 1 n = %ran(1)
    compute v(1) = 0.0
    compute v(n) = 0.0
    clear fu fv xx
    do r = 1,n
        compute fu(r) = u(r)
        compute fv(r) = v(r)
    end do r
    compute h = n
    do r = n-1,2,-1
        compute h = h + 1
        compute fu(h) = u(r)
        compute fv(h) = -v(r)
    end do r
cset z 1 h = %cplx(fu,fv)
    csqrt cb 1 h
    cset z 1 h = (cb*z)
    fft z 1 h
    conjugate z 1 h
    cset z 1 h = 1/(2*sqrt(n-1))*z
    ctor
    # z
    # xx
    set x 1 n = xx
}
if noninvert==1
{
    diff x
    compute n = n - 1
    compute d = d - 1
}
if nonsta==1
{
    accumulate x
    compute d = d + 1
}
}
END

```

ÖZGEÇMİŞ

M. Berk ATAMAN 1976 yılında İstanbul’da doğdu. 1994 yılında Özel Doğuş Lisesi’nden mezun oldu. 1998 yılında İTÜ İşletme Mühendisliği bölümünden mezun olduktan sonra Mimar Sinan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Programında yüksek lisans eğitimine başladı. 2000 yılında da İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü İşletme Mühendisliği programına girdi. Berk ATAMAN 1999 yılından beri İTÜ İşletme Fakültesi İşletme Mühendisliği bölümü Sayısal Yöntemler Anabilim dalında araştırma görevlisi olarak görev yapmaktadır.



EC YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ