

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DEĞİŞKEN KESİTLİ SİLİNDİRİK KABUK TAŞIYICI
SİSTEMLERİN SONLU ELEMANLARLA HESABI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İnş. Müh. Mehmet ŞAHİN**

Anabilim Dalı : İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ

Programı : YAPI MÜHENDİSLİĞİ

MAYIS 2004

**DEĞİŞKEN KESİTLİ SİLİNDİRİK KABUK TAŞIYICI
SİSTEMLERİN SONLU ELEMANLARLA HESABI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İnş.Müh. Mehmet ŞAHİN
(501991170)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 15 Nisan 2004
Tezin Savunulduğu Tarih : 21 Mayıs 2004**

**Tez Danışmanı : Prof.Dr. Ahmet Işın SAYGUN
Diğer Jüri Üyeleri Doç.Dr. Engin ORAKDÖĞEN
Y.Doç.Dr. Oğuz Cem ÇELİK**

MAYIS 2004

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışmada, uygulamada sıkça karşılaşılan eğri yüzeyli taşıyıcı sistemlerden, silindirik kabuk taşıyıcı sistemlerin sonlu elemanlar metodu ile hesabında uygulanabilen bir sonlu eleman tipi geliştirilmiştir. Geliştirilen bu elemanla, çeşitli tipteki silindirik kabuk sistemlerin birinci mertebe teorisine göre statik hesabı yapılabilir. Silindirik kabuk sistemlerin tasarımında, bu tezin yardımcı olacağını umuyorum.

Bu çalışmamda, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım ve gerek lisans, gerekse yüksek lisans eğitimim boyunca bana yakın ilgisini eksik etmeyen değerli hocam Prof. Dr. Ahmet Işın SAYGUN'a, bana her türlü desteği veren, bilgilerini paylaşan başta Y. Doç. Dr. Mecit Çelik olmak üzere bütün yapı statiği çalışma grubu öğretim üyelerine, çalışmalarımda bana yardımcı olan değerli meslektaşım İnş. Yük. Müh. Zihni TEKİN'e ve eğitim hayatım boyunca her konuda desteklerini gördüğüm aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Mayıs 2004

Mehmet ŞAHİN

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ	v
ŞEKİL LİSTESİ	vi
SEMBOL LİSTESİ	vii
ÖZET	ix
SUMMARY	xi
1. GİRİŞ	1
1.1 Konu	1
1.2 Konu İle İlgili Çalışmalara Genel Bakış	2
1.2.1 Plak Sistemlerine Sonlu Elemanlar Metodunun Uygulanması	3
1.2.2 Kabuk Sistemlerine Sonlu Elemanlar Metodunun Uygulanması	4
1.3 Bu Çalışmanın Amacı	5
2. İNCE KABUKLAR TEORİSİNİN ESAS BAĞINTILARI	6
2.1 Kabuller	6
2.2 Yüzey Geometrisi İle İlgili Tanımlar	6
2.3 Şekildeğiştirme-Yerdeğiştirme Bağlılıkları	10
2.4 Elastisite Bağlılıkları ve Kesit Tesirleri	13
2.5 Denge Denklemleri	15
2.6 Kabuklarda İç Kuvvetlerin İş İfadeleri	17
2.7 Dönel Kabuklar	18
2.7.1 Silindirik Kabuklarda Şekildeğiştirme-Yerdeğiştirme Bağlılıkları	20
3. SONLU ELEMANLAR METODU İLE SİLİNDİRİK KABUK TAŞIYICI SİSTEMLERİN HESABI	21
3.1 Yöntemin Esasları, Tanımlar	21
3.2 Sonlu Elemanlar Yöntemi Denklemlerinin Elde Edilmesi	22
3.3 Sonlu Elemanlarda Seçilen Yerdeğiştirme Fonksiyonlarının Genel Özelliklerinin İrdelenmesi	27
3.4 Sistemin Hesabında İzlenen Yol	29
4. SİLİNDİRİK SONLU ELEMAN	32
4.1 Deplasman Fonksiyonlarının Seçilişi	32
4.1.1 Literatürde Verilen Bazı Silindirik Sonlu Eleman Tiplerinin İrdelenmesi	33
4.1.2 Birim Durum Fonksiyonlarının x Değişkenine Bağlı İfadelerin Bulunması	35
4.1.3 Birim Durum Fonksiyonlarının θ Değişkenine Bağlı İfadelerin Bulunması	38
4.1.4 Eleman Uç Deplasman Parametresi Sayısı ve Birim Durum Fonksiyonları	43

4.1.5 Rijid Yer Değiştirme Kriterinin İrdelenmesi	47
4.1.6 Geometrik Uygunluk şartlarının İrdelenmesi	48
4.2 Kesit Tesirleri ve Uç Deplasmanları Arasında Bağıntılar	50
4.3 Eleman Rijidlik Matrisi	56
4.3.1 Sabit Kesitli Elemanda Rijitlik Matrisi	57
4.3.2 Değişken Kesitli Elemanda Rijitlik Matrisi	59
4.4 Yükleme Matrisi	62
4.5 Sıcaklık Değişmesi Matrisi	67
5. SAYISAL ÖRNEKLER	70
5.1 Örnek: 1	70
5.2 Örnek: 2	75
5.3 Örnek: 3	80
5.4 Örnek: 4	84
6. SONUÇLAR	92
KAYNAKLAR	94
ÖZGEÇMİş	96

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 4.1 : x Değişkenine Bağlı Şekil Fonksiyonları	36
Tablo 4.2 : θ Değişkenine Bağlı Şekil Fonksiyonları	41
Tablo 4.3 : Birim Deplasman Fonksiyonlarının Çarpımı	46
Tablo 4.4,a : Silindirik Elemanda Deformasyon ve Deplasman Bileşenleri	52
Tablo 4.4,b : Silindirik Elemanda Deformasyon ve Deplasman Bileşenleri	53
Tablo 4.4,c : Silindirik Elemanda Deformasyon ve Deplasman Bileşenleri	54
Tablo 4.4,d : Silindirik Elemanda Deformasyon ve Deplasman Bileşenleri	55
Tablo 4.5 : Sayısal İntegrasyon Değerleri	61
Tablo 5.1 : Örnek:1 Yükleme:1 Deplasman ve Kesit Tesirleri	72
Tablo 5.2 : Örnek:1 Yükleme:2 Deplasman ve Kesit Tesirleri	73
Tablo 5.3 : Örnek:1 Yükleme:3 Deplasman ve Kesit Tesirleri	74
Tablo 5.4 : Örnek:2 Yükleme:1 Deplasman ve Kesit Tesirleri	76
Tablo 5.5 : Örnek:2 Yükleme:2 Deplasman ve Kesit Tesirleri	77
Tablo 5.6 : Örnek:2 Yükleme:3 Deplasman ve Kesit Tesirleri	78
Tablo 5.7 : Örnek:3 Denklem Sayısı ve Deplasmanlar	82
Tablo 5.8 : Örnek:4 1-1 Kesiti Deplasman ve Kesit Tesirleri	86
Tablo 5.9 : Örnek:4 2-2 Kesiti Deplasman ve Kesit Tesirleri	87
Tablo 5.10 : Örnek:4 3-3 Kesiti Deplasman ve Kesit Tesirleri	88

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1 : Kovariant Baz Vektörleri	7
Şekil 2.2 : Ortogonal Yüzey Parçası	8
Şekil 2.3 : Teğet Düzlemi İçerisinde Kalan Eğrilikler	9
Şekil 2.4 : Yüzey Elemanına Ait Deplasman Bileşenleri	10
Şekil 2.5 : Kabuk Elemanında Gerilme ve Deformasyon Bileşenleri	13
Şekil 2.6 : Ortogonal Kabuk Elemanına Etkiyen Kesit Tesirleri ve Dış Yükler	15
Şekil 2.7 : Dönel Kabuk Yüzeyi	19
Şekil 3.1 : Kabuk Yüzeyinden Geçen Ayırıt	28
Şekil 4.1 : Silindirik Sonlu Elemanda Koordinat Sistemi ve Deplasman Bileşenleri	32
Şekil 4.2 : Ana Doğrultudaki Uç Deplasmanları	36
Şekil 4.3 : Boy Değişimi İhmal Edilen Daire Eksenli Çubuğun Deplasman Bileşenleri	38
Şekil 4.4 : Daire Eksenli Çubukta Uç Deplasmanları	40
Şekil 4.5 : Silindirik Sonlu Elemanda Uç Deplasmanları Sırası ve Yönleri	44
Şekil 4.6 : Ayrıta Dik Dönme Bileşenlerinin Pozitif Yönleri	45
Şekil 4.7 : Farklı İki Silindirik Elemanın Birleşimi	48
Şekil 4.8 : Farklı Üç Silindirik Elemanın Birleşimi	50
Şekil 4.9 : Silindirik Tonoz	66
Şekil 5.1 : Sabit Kesitli Silindirik Su Deposu	70
Şekil 5.2 : Silindirik Sonlu Elemanda Dönel Simetrik Deplasman Bileşenleri	71
Şekil 5.3 : Su basıncı İçin w Deplasmanı N_0 ve M_s Kesit Tesiri Değerleri	72
Şekil 5.4 : Sabit Sıcaklık İçin w Deplasmanı N_0 ve M_s Kesit Tesiri Değerleri	73
Şekil 5.5 : Farklı Sıcaklık İçin w Deplasmanı N_0 ve M_s Kesit Tesiri Değerleri	74
Şekil 5.6 : Lineer Değişken Kesitli Silindirik Su Deposu	75
Şekil 5.7 : Su Basıncı İçin w Deplasmanı N_0 ve M_s Kesit Tesiri Değerleri	76
Şekil 5.8 : Sabit Sıcaklık İçin w Deplasmanı N_0 ve M_s Kesit Tesiri Değerleri	77
Şekil 5.9 : Farklı Sıcaklık İçin w Deplasmanı N_0 ve M_s Kesit Tesiri Değerleri	78
Şekil 5.10 : Tekil Yük Etkisi Altındaki Silindirik Kabuk Eleman	80
Şekil 5.11 : Tekil Yük Etkisi Altındaki Silindirik Kabuk Elemanda Deplasman Bileşenleri	81
Şekil 5.12 : Silindirik Kabuk Elemanın Değişik Şekillerdeki Eleman Ağları	81
Şekil 5.13 : Denklem Sayısı ve Deplasmanlar	83
Şekil 5.14 : Sabit Kesitli Silindirik Yanmış Klinker Deposu	84
Şekil 5.15a : Sonlu Eleman Ağı	85
Şekil 5.15b : Sonlu Eleman Ağı	85
Şekil 5.16 : 1-1 Kesiti w Deplasmanı N_0 ve M_s Kesit Tesiri Değerleri	89
Şekil 5.17 : 2-2 Kesiti w Deplasmanı N_0 ve M_s Kesit Tesiri Değerleri	89
Şekil 5.18 : 3-3 Kesiti w Deplasmanı N_0 ve M_s Kesit Tesiri Değerleri	90

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$	:Kartezyen Koordinat Sistemi Eksenleri
$\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$	:Düzlem Eğrisel Koordinat Sistemi Eksenleri
$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$	:Kovariant Baz Vektörü Bileşenleri
$\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$	:Asal Eğrilikler
$\mathbf{d}\omega_1, \mathbf{d}\omega_2$	:Jeodezik Açılı Değişimleri
ρ_1, ρ_2	:Jeodezik Eğrilikler
$\mathbf{V}$	:Deplasman Vektörü
$\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$	:Asal Eğrilik Yarıçapları
$\mathbf{d}\theta_1, \mathbf{d}\theta_2$	:Asal Eğrilik Yarıçaplarına Karşı Gelen Merkez Açılı
ϵ_1, ϵ_2	:Uzama Deformasyonları
γ_1, γ_2	:Kayma Deformasyonları
γ_{12}	:Toplam Kayma Deformasyonu
β_1, β_2	:Asal Eğrilik Düzlemleri İçinde Eğrisel Koordinatlara Ait Teğetlerin Dönemeleri
χ_1, χ_2	:Asal Eğrilik Değişimleri
τ	:Burulma Eğriliği
E	:Elastisite Modülü
ν	:Poisson Oranı
ϵ	:Isı Genleşme Katsayısı
σ_1, σ_2	:Sırasıyla s_1, s_2 Eksenlerine Paralel Yüzey Normal Gerilmeleri
σ_{12}	: s_2 Eksenine Paralel Kayma Gerilmesi
σ_{21}	: s_1 Eksenine Paralel Kayma Gerilmesi
N_1, N_2	:Sırasıyla s_1, s_2 Eksenlerine Paralel Yüzey Normal Kuvvetleri
N_{12}	: s_2 Eksenine Paralel Kesme Kuvveti
N_{21}	: s_1 Eksenine Paralel Kesme Kuvveti
M_1, M_2	:Sırasıyla s_2 ve s_1 Eksenlerine Paralel Eğilme Momentleri
M_{12}, M_{21}	: Sırasıyla s_1 ve s_2 Eksenlerine Paralel Burulma Momentleri
B	:Uzama Deformasyonu Rijitliği
D	:Eğilme Deformasyonu Rijitliği
I_{ij}	:Bir i İç Kuvvet Durumunun Geometrik Uygunluk Şartlarını Sağlayan Bir j Deplasman Durumunda Yaptığı İş
$[v]_i$	:Yer Değiştirmeler Matrisi
$[\epsilon]_i$	:Uzama Deformasyonları Matrisi
$[\chi]_i$	:Eğilme Deformasyonları Matrisi
$[N]_i$	:Uzama Deformasyonları Sonucunda Oluşan Kesit Tesirleri Matrisi
$[M]_i$	:Eğilme Deformasyonları Sonucu Oluşan Kesit Tesirleri Matrisi

$[Q]_i$	:Yüzeye Dik Olan Kesme Kuvvetleri Matrisi
$[q]_i$	:Yayılı Yük Bileşenleri Matrisi
$[\varepsilon]_T$	:Sabit Sıcaklık Deformasyonları Matrisi
$[\chi]_T$	:Farklı Sıcaklık Deformasyonları Matrisi
X_j	:Tabii Durumda Sistemin j inci Deplasman Parametresinin Aldığı Değer
$[D]$	:Elastisite Matrisi
k_{ij}	:Elemanın Rijitlik Matrisi
$[K]$	:Sistem Rijidlik Kare Matrisi
$[X]$	:Bilinmeyen Uç Deplasman Parametrelerinin Alt Alta Yazılmasından Oluşan Kolon Matrisi
$[P]$	:Herhangi Bir i Terimi Dış Yüklerin i Birim Durumunda Yaptığı İş Olan, Sistem Yükleme Kolon Matrisi
$[P]_{i,T}$	:n Boyutlu Sistem Sıcaklık Değişimi Yükleme Kolon Matrisini Göstermektedir.
X, Y, Z	:Dik Eksen Takımı
$x=0, \theta=0$	:Silindirik Koordinatlarda Başlangıç Noktası
x	:Silindirik Koordinatlarda Doğrusal Yöndeki Değişken
θ	:Silindirik Koordinatlarda Açısal Doğrultudaki Değişken
a	:Silindirik Elemanın Ana Doğru Boyu
α	:Silindirik Elemanın Merkez Açısı
r	:Silindirik Elemanın Yarıçapı
u, v	:Sırasıyla x ve θ Serbest Değişkenleri Doğrultusundaki Deplasman Bileşenleri
w	:Ortalama Yüzey Normali Doğrultusundaki Deplasman Bileşeni
β_s	:Doğrusal Eksen Yönündeki Dönme Bileşeni
β_θ	:Açısal Eksen Yönündeki Dönme Bileşeni
β_z	:Yüzey Normali Doğrultusundaki Dönme Bileşeni
$\delta_x, \delta_y, \delta_z$	:Sırasıyla X, Y, Z Eksenleri Doğrultusundaki Yerdeğiştirme Bileşenleri
$\theta_x, \theta_y, \theta_z$	:Sırasıyla X, Y, Z Eksenlerine Göre Dönme Bileşenleri
$[d]$	:Eleman Uç Deplasman Parametrelerini Gösteren Kolon Matrislerdir
$[A_d]$	:Her İki Doğrultudaki Yardımcı Birim Deplasman Fonksiyonlarının Çarpımlarından Oluşan Matris
$[B_d]$	:Birim Deplasman Durumlarında Düğüm Noktalarında Meydana Gelen Deformasyonları Veren Matris
h	:Silindirik Elemanın Kalınlığı
N_s	:Ana Doğrultudaki Normal Kuvvet
N_θ	:Açısal Doğrultudaki Normal Kuvvet
M_s	:Ana Doğrultudaki Eğilme Momenti
M_θ	:Açısal Doğrultudaki Eğilme Momenti

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1 Konu

Silindirik kabuk taşıyıcı sürekli sistemleri, serbestlik derecesi sonlu sayıda olan ayrık bir sisteme dönüştürüp, cebirsel bir denklem takımını çözerek hesaplamaya dayanan sayısal hesap metodları son yıllarda oldukça önemli gelişmeler göstermiştir. Bilgisayarların gelişmesi ve mühendislik problemlerinde bunlardan yararlanma olanaklarının artması ile elde edilen, sayısal hesapların kolay ve hızlı yapılabilme imkanı, bu metodların öneminin artmasına yol açmıştır.

Bu metodların içinde özellikle sonlu elemanlar metodu, sisteme ait özelliklerin, mesnet şartları ve dış etkilerin sürekli veya ani değişimlerini ve sistem sınırlarının düzgün olmaması halini kolaylıkla gözönüne alma olanağını yaratmakta, ve bunun sonucu olarak da matematik güçlükler nedeniyle çözülemeyen karışık sistemlerin hesabına imkan vermektedir. Silindirik kabuk sistemin belirli bölgelerinde eleman boyutlarını nisbeten küçülterek yüzey boyunca eleman yayılımının istendiği gibi düzenlenebilmesi, ve dolayısıyla bölgesel etkilerin önemli olması halinde bu değerlerin yeter doğrulukla bulunabilmesi imkanı metodun diğer bir üstünlüğü olmaktadır. Ayrıca özellikle matris deplasman metodu olmak üzere çubuk sistemleri için geliştirilmiş matris metodlarının sonlu elemanlara ayrılmış sistemlere kolaylıkla uygulanabilmesi metodun bir avantajı olarak düşünülebilir.

Klasik şekliyle bu metodda sonlu elemanlara bölünen bir sürekli sistemin elemanlarının yalnız düğüm noktası denen noktalarından birbirlerine bağlı olduğu kabul edilir. Eleman yüzeylerinin şekildeğiştirilmesi ise, bu düğüm noktalarındaki deplasman bileşenleri ve bunların koordinat değişkenlerine göre bazı türevlerinden oluşan uç deplasman parametrelerinin birim değerlerine karşı gelen deplasman fonksiyonlarının lineer kombinasyonu olarak belirlenebilir. Bu şekildeğiştirme durumuna ait yüklemenin ise yalnız düğüm noktalarında uç deplasman parametreleri

doğrultusundaki uç kuvvetlerinden oluştuğu düşünülmektedir. Bu fiktif uç kuvvetleri gerçekte eleman kenar kesitleri boyunca etkiyen yayılı gerilme bileşenlerini temsil etmektedir. Sisteme gelen yüklerin de yalnız düğüm noktalarından etkiyebileceği kabulü sonucunda yayılı dış etkiler de düğüm noktalarına etkiyen uç kuvvetlerine dönüştürülür. Uç kuvvetleri ile uç deplasmanları arasındaki matris bağıntıları, birim deplasman durumlarının tanımlayan deplasman fonksiyonlarından, veya elemanda dengede iç kuvvet durumlarından hareket edilerek tayin edilebilir. Örneğin matris deplasman metodu ile hesap yapılması halinde sonlu eleman metodu denklem sisteminin bu kabuller sonucu düğüm noktaları denge denklemlerinden ibaret olacağı açıktır.

Metodun bu klasik şekli yerine, sonlu elemanlar metodu denklemlerinin, sistemin bütünü göz önüne alınıp enerji teoremlerinden yararlanarak çıkarılması, problemin fiziki anlamına, yapılan kabullere ve yükleme terimlerine açıklık getirdiğinden daha uygun düşmektedir. Bölüm: 3.1 de virtüel iş teoremiyle sonlu elemanlar metodu denklemlerinin elde edilmesi açıklanacaktır.

1.2 Konu İle İlgili Çalışmalara Genel Bakış

Düzlemsel sürekli sistemleri, levha probleminde kafes sistem çubuklarından, plak probleminde ise ızgara sistem çubuklarından oluşan sonlu elemanlara ayırarak hesap etme düşüncesi ilk defa Hrennikoff tarafından [4] de ortaya atılmıştır. Sürekli ortamı, ayrık bir çubuk sistemine dönüştürmek yerine belirli bir geometrik şekle sahip sonlu boyutlu sürekli elemanlara ayırma düşüncesi ise ilk defa Argypis [5] ve Clough, Turner, [6] tarafından ele alınmıştır. Bu çalışmalarda düzlemi içindeki dış etkiler altında bulunan levha sistemlerinin hesabı için sırasıyla 8 serbestlik dereceli dikdörtgen ve 6 serbestlik dereceli üçgen levha sonlu elemanlar geliştirilmiştir. Levha probleminin sonlu elemanlar metodu ile hesabı için, elemanların serbestlik derecesinde ve seçilmiş deplasman fonsiyonlarında farklılıklar bulunan çok sayıda yayın bu çalışmaları izlemiştir.

1.2.1 Plak Sistemlerine Sonlu Elemanlar Metodunun Uygulanması

Düzlemine dik dış etkiler altındaki plak sonlu elemanlarda düğüm noktaları uç deplasmanları olarak düzlemine dik deplasman bileşeni yanında, bunun koordinat değişkenlerine göre türevlerinden ibaret olan dönme bileşenlerinin de alınması gerekmektedir. Komşu elemanlar arasında geometrik uygunluk şartlarının sağlanması için deplasmanlarla beraber ayrıta dik dönme bileşeninin sürekliliğinin de gerekli olması, plak sonlu elemanlarda uygun deplasman fonksiyonlarının seçimini levha elemanlara göre güçleştirmektedir. Dikdörtgen plak sonlu elemanlarla ilgili çalışmada, [7], her düğüm noktasında plak düzlemine dik deplasman bileşeni ile, dönme bileşenlerinden oluşan toplam 12 serbestlik dereceli eleman geliştirilmiştir. Bu çalışmada, ayrıtlar boyunca komşu elemanlar arasında ayrıta dik dönme bileşenlerinin sürekliliğinin sağlanmaması sakınca yaratmaktadır. Bu sakıncayı yok edecek şekilde [8] de, her iki doğrultuda üçüncü derece polinomlarının çarpımlarından oluşan bir deplasman yüzeyinden hareket ederek bir sonlu eleman geliştirilmiştir. Bu taktirde düğüm noktalarının burulma eğriliği de ilave uç deplasman parametresi olarak seçilip, eleman serbestlik derecesinin 16'ya çıkarılması zorunlu olmaktadır.

Üçgen plak sonlu elemanlarda ise, ayrıtlar boyunca uygunluk şartlarının tam sağlanması ancak eleman serbestlik derecesi sayısını arttırarak mümkün olabilir. Bu şartların tam olarak sağlanması zorunluluğu bulunmadığından, farklı serbestlik dereceli ve değişik deplasman fonksiyonlarından hareket ederek geliştirilen üçgen elemanlar çeşitli yayınlarda önerilmiştir. Bunlar arasında bu şeklin doğal koordinatı sayılabilecek alan koordinatları cinsinden deplasman fonksiyonlarını ifade eden çalışmaların daha uygun sonuçlar verdiği görülmektedir. Üçgen plak sonlu elemanlarda ayrıtlar boyunca uygunluk şartlarının tam olarak sağlanması için serbestlik derecesinin en az 18 olması ve düğüm noktalarında deplasman ve dönme bileşenleri yanında eğrilik bileşenlerinin de uç deplasman parametresi olarak seçilmesi gerektiği [3] den bilinmektedir.

1.2.2 Kabuk Sistemlerine Sonlu Elemanlar Metodunun Uygulanması

Kabuk sistemlerine sonlu elemanlar metodunun uygulanmasına ait çalışmaların bir bölümünde, sistem düzlemsel sonlu elemanlarla idealleştirilmektedir. Özellikle üçgen düzlem sonlu elemanlar en genel bir kabuk sistemine dahi uygulanabilmektedir. Bununla birlikte bu şekilde bir idealleştirmenin bazı güçlükleri ve sakıncaları vardır.

Kabuk sistemlerinin düzlemsel elemanlarla idealleştirilmesi halinde dış etkiler altında kabuk sisteminin gerçek davranışı ancak yaklaşık olarak ve eleman boyutlarını çok küçültmek şartı ile ifade edilebilir. Bunun sonucu serbestlik derecesi yüksek, az sayıda elemanla yeterli sonuçlar elde etme olanağı ortadan kalkmaktadır.

Ayrıca eleman özel eksenlerinin sistem eksenlerine dönüştürülmesinde, sistem rijidlik matrisinin kurulmasında bazı sayısal zorluklarla karşılaşmaktadır. Bunun sebebi, genellikle düzlemsel elemanlarda düzlemi içinde veya düzleme dik şekil değiştirme durumları için düzleme dik doğrultuda dönme bileşenlerinin uç deplasman parametresi olarak seçilmemiş olmasıdır. Bu özellik nedeniyle sistem rijidlik matrisinin bazı hallerde singüler olması ihtimali ortaya çıkmaktadır.

Kabuk şekline uygun eğrisel sonlu elemanların kullanılması bu sakıncaları önlemektedir. Bu tip elemanlardan referans listesinde [9] ile [14] numaraları arasında belirtilen yayınlarda geliştirilen sonlu elemanların detaylı olarak incelenmesi ve özelliklerin belirtilmesi ileride, Bölüm: 4.1.2 de yapılacaktır.

Gerek dönel kabuk sistemlerinin yaygın bir uygulama alanının bulunması, gerekse bu sistemlerin eksenel simetri özelliğinin bazı basitleştirmelere imkan vermesi, sonlu elemanlar metodu ile bu sistemlerin hesabı için çok sayıda çalışmanın yapılmasına neden olmuştur. Tam dönel elemanlardan hareket ederek sistemin dönel simetrik deformasyonu incelenebildiği gibi deplasmanlar ve dış etkilerin açısız doğrultuda Fourier serisine açılması ile bu sistemlerin genel dış etkiler altında hesabı yapılabilir.

Diğer taraftan, örneğin [13] deki gibi genel kabuk yüzeylerinin asal doğrultularını ayırarak alan genel kabuk elemanlar ile veya düzlem dörtgensel ve üçgensel

elemanlar ile, her ne kadar bu tür problemlerin çözülebileceği düşünülse bile, bu tip sistemlerde dış etkiler altında sistem davranışının iyi bir şekilde ifade edilememesi, ve genellikle polinom şeklinde seçilen bu tip elemanlara ait deplasman fonksiyonlarının Bölüm: 3.3 de açıklanacak yakınsaklık kriterlerinin bir kısmını sağlamaması mümkündür. Bu taktirde yakınsaklık hızının düşük olacağı, ve yeter doğrulukta sonuçların alınmasının ancak çok fazla sayıda eleman almakla mümkün olabileceği söylenebilir.

1.3 Bu Çalışmanın Amacı

Bu özellikler dikkate alınarak, bu çalışmadaki silindirik sonlu eleman geliştirilmiştir. [1] de tanımlanan elemanın birim durumlara ait yerdeğiştirme fonksiyonlarında bazı değişiklikler ve basitleştirmeler yapılarak elde edilen bu elemanda kalınlığın da değişken olabileceği öngörülmüş ve eleman rijidlik ve yükleme matrisleri Gauss integral noktaları kullanarak sayısal integrasyonla bulunmuştur.

Geliştirilen elemanda dış etkiler altında sistemin davranışı iyi bir şekilde ifade edilmiş, yakınsaklık kriterleri ve bazı özel haller dışında geometrik uygunluk şartları tam olarak sağlanmıştır. Ayrıca statik dış yükler yanında, sabit ve farklı sıcaklık değişimleri matrisleri de bulunarak değişik dış etki tipleri için hesap yapılabilmektedir. Bu elemanın yukarıda belirtilen sonlu elemanlar ile gerek özellikleri ve gerekse sayısal uygulamalarından bulunan sonuçlar bakımından karşılaştırılması ilerdeki bölümlerde yapılacaktır.

BÖLÜM 2. İNCE KABUKLAR TEORİSİNİN ESAS BAĞINTILARI

Bölüm 4 te yararlanmak amacı ile, bu bölümde Kirchhoff-Love hipotezine dayanan ince elastik kabukların lineer eğilmeli teorisinin esas bağıntıları, Novozhilov teorisi [15] esas alınarak kısaca gözden geçirilecektir.

2.1 Kabuller

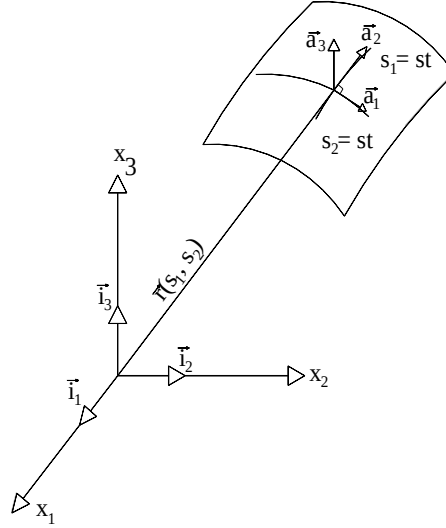
1. Kabuklarda kalınlık diğer geometrik boyutlara göre küçüktür.
2. Kabuk ortalama yüzeyine dik doğrultuda normal gerilmeler ihmal edilebilecek mertebede küçüktür.
3. Şekil değiştirmemiş sistemde yüzey normali üzerindeki noktaların meydana getirdiği doğru, şekildeğişimi sırasında rijid deplasman yaparak yine doğru kalır, ve bu doğru şekildeğiştirmiş ortalama yüzeye diklik özelliğini korur. Kirchhoff-Love hipotezi diye bilinen bu kabul, çubuk sistemlerdeki Bernouilli Navier hipotezine karşı gelmektedir.
4. Gerilme deformasyon bağıntılarında Hooke kanunu geçerlidir.
5. Yerdeğiştirmeler kabuk kalınlığına göre küçük olup, denge denklemleri ve geometrik uygunluk şartlarında, ikinci mertebe etkiler ihmal edilebilir. Süperpozisyon kuralı geçerlidir.

2.2 Yüzey Geometrisi İle İlgili Tanımlar

Kabuk ortalama yüzeyi, kabuk kalınlığının orta noktalarının geometrik yeri olarak tanımlanır. Bu ortalama yüzey, x_1, x_2, x_3 Kartezyen koordinatlarında

$$\begin{aligned}x_1 &= f_1(s_1, s_2) \\x_2 &= f_2(s_1, s_2) \\x_3 &= f_3(s_1, s_2)\end{aligned}\tag{2.1}$$

parametrik denklemleriyle belirlenir. Yüzeye ait herhangi bir P noktası, yüzeyin eğrisel koordinatları denilen s_1 ve s_2 nin bir değer çiftine karşı gelmektedir.



Şekil 2.1 Kovariant Baz Vektörleri

Yüzey üzerindeki bir noktada kovariant baz vektörleri,

$$\vec{r} = x_1(s_1, s_2)\vec{i}_1 + x_2(s_1, s_2)\vec{i}_2 + x_3(s_1, s_2)\vec{i}_3 \quad (2.2)$$

yer vektörünün s_1 ve s_2 ye göre türetilmesiyle bulunur.

$$\vec{a}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s_1} \quad \vec{a}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s_2} \quad (2.3)$$

Kovariant baz vektörünün üçüncü bileşeni ise;

$$\vec{a}_3 = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|} \quad (2.4)$$

şeklinde yüzeye dik birim vektördür.

Bundan sonraki işlemlerde daima kullanılan eğrisel koordinat sisteminin ortogonal olduğu yani:

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0 \quad (2.5)$$

eşitliğinin sağlandığı kabul edilecektir.

Yüzey baz vektörlerinin boyları A ve B ile gösterilirse:

$$A = \sqrt{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1} \quad B = \sqrt{\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_2} \quad (2.6)$$

yazılabilir. Kabuk üzerindeki herhangi bir yay elemanının boyu:

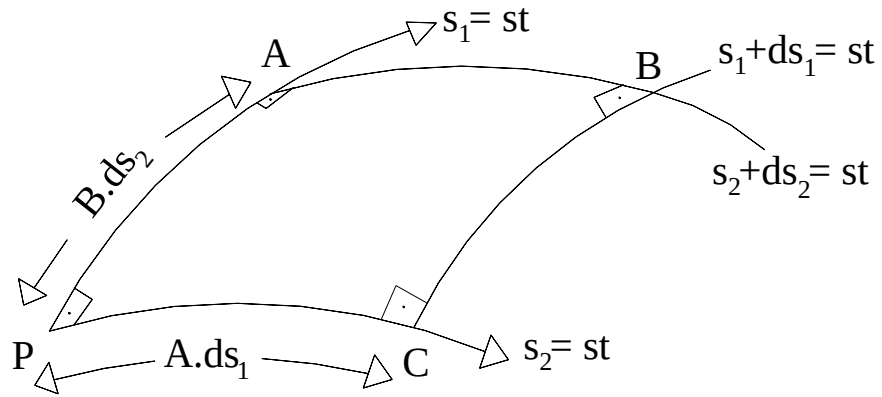
$$ds^2 = A^2 ds_1^2 + B^2 ds_2^2 \quad (2.7)$$

şeklinde hesaplanabileceği gibi, s_1 , s_1+ds_1 ve s_2 , s_2+ds_2 eğrilerinin sınırladığı bir yüzey elemanı da, kenar boyları $A.ds_1$ ve $B.ds_2$ olan Şekil 2.2 deki gibi ortogonal bir yüzey parçası olacaktır.

Bilindiği gibi ortogonal koordinat sisteminde, $s_2=st$ ve $s_1=st$ eğrilerine ait asal eğrilikler sırasıyla;

$$k_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{A^2} \cdot \rho_3 \cdot \frac{\partial}{\partial s_1} (\rho_1) \quad (2.8)$$

$$k_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{B^2} \cdot \rho_3 \cdot \frac{\partial}{\partial s_2} (\rho_2)$$

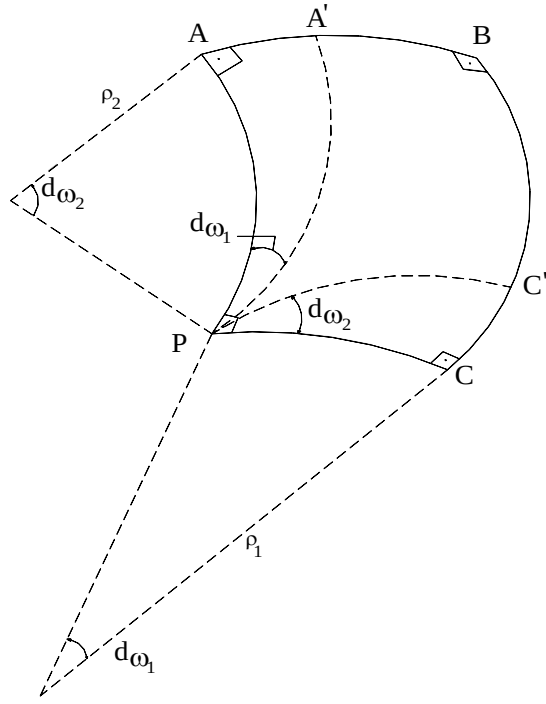


Şekil 2.2 Ortogonal Yüzey Parçası

şeklinde ifade edilebilir. Burada R_1 ve R_2 asal eğrilik yarıçaplarıdır. Asal eğrilikler birbirini dik kesen iki düzlem içinde bulunurlar.

$s_2 = st$ ve $s_1=st$ eğrilerinin o noktadaki teğet düzlemi içerisinde kalan eğrilikleri ise jeodezik eğrilik adını alır. Şekil 2.3 deki gibi, bir PABC ortogonal yüzey elemanında, P noktasından geçen BC ve AB kenarlarına paralel PA' ve PC' eğrileri çizilsin. Yüzey elemanı tanımını uyarınca, kenar boyları:

$$\begin{aligned} \overline{PC} &= A.ds_1 \\ \overline{AB} &= A.ds_1 + \frac{\partial}{\partial s_2} (A.ds_1).ds_2 = (A + \frac{\partial A}{\partial s_2}.ds_2)ds_1 \\ \overline{PA} &= B.ds_2 \\ \overline{BC} &= B.ds_2 + \frac{\partial}{\partial s_1} (B.ds_2).ds_1 = (B + \frac{\partial B}{\partial s_1}.ds_1)ds_2 \end{aligned} \quad (2.9)$$



Şekil 2.3 Teğet Düzlemi İçerisinde Kalan Eğrilikler

şeklinde olduklarından, jeodezik açı değişimleri için şekilden,

$$d\omega_1 = \frac{\overline{AA'}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{AB} - \overline{PC}}{\overline{PA}} = \frac{\left(A + \frac{\partial A}{\partial s_2} . ds_2 \right) ds_1 - A . ds_1}{B ds_2} = \frac{1}{B} . \frac{\partial A}{\partial s_2} . ds_1 \quad (2.10)$$

$$d\omega_2 = \frac{\overline{CC'}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{BC} - \overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\left(B + \frac{\partial B}{\partial s_1} . ds_1 \right) ds_2 - B . ds_2}{A ds_1} = \frac{1}{A} . \frac{\partial B}{\partial s_1} . ds_2$$

yazılabilir. O halde jeodezik eğrilikler

$$\overline{PC} = A . ds_1 = \rho_1 . d\omega_1$$

$$\overline{PA} = B . ds_2 = \rho_2 . d\omega_2$$

eşitlikleri de şekilden görülerek,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_1} &= \frac{d\omega_1}{\overline{PC}} = \frac{1}{AB} . \frac{\partial A}{\partial s_2} \\ \frac{1}{\rho_2} &= \frac{d\omega_2}{\overline{PA}} = \frac{1}{AB} . \frac{\partial B}{\partial s_1} \end{aligned} \quad (2.11)$$

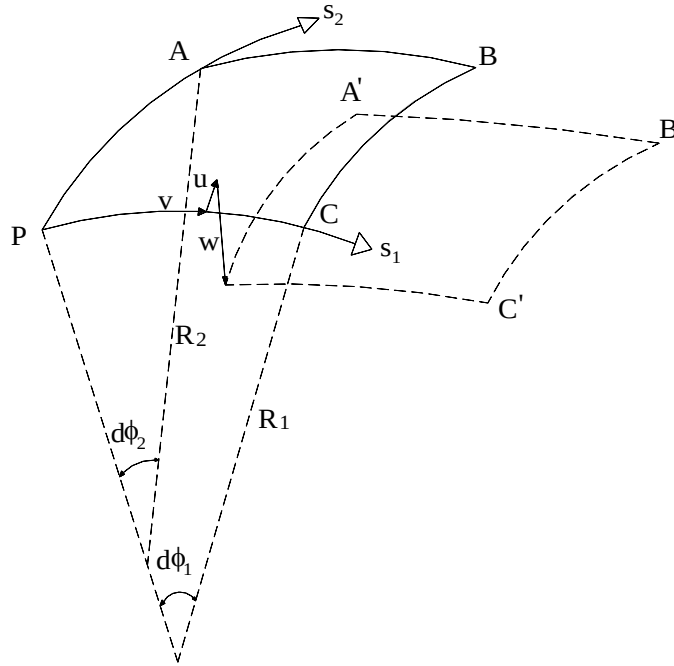
olarak bulunur.

2.3 Şekildeğiştirme -Yerdeğiştirme Bağlıları

Şekil 2.4 de görüldüğü gibi, v ve u deplasman bileşenleri sırasıyla $s_2=st$ ve $s_1=st$ eğrileri üzerindedir. Pozitif yönleri s_1 ve s_2 eğrisel koordinatlarının artış yönü ile aynı seçilecektir. w deplasman bileşeni ise kabuk ortalama yüzeyine dik doğrultudadır ve R_1 asal eğrilik yarıçapını azaltacak şekilde ise pozitif kabul edilecektir. Buna göre $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ sırasıyla kovariant baz vektörleri doğrultusunda birim vektörler olmak üzere, deplasman vektörü için

$$\mathbf{V} = v.\mathbf{e}_1 + u.\mathbf{e}_2 - w.\mathbf{e}_3 \quad (2.12)$$

yazılabilir.



Şekil 2.4 Yüzey Elemanına Ait Deplasman Bileşenleri

A. ds_1 ve B. ds_2 boyutlarında Şekil 2.4'deki yüzey elemanında R_1 ve R_2 asal eğrilik yarıçaplarına karşı gelen merkez açıları sırasıyla $d\phi_1$ ve $d\phi_2$ olduğuna göre:

$$d\phi_1 = \frac{A.ds_1}{R_1} \quad (2.13)$$

$$d\phi_2 = \frac{B.ds_2}{R_2}$$

bağıntılarının yazılabileceği görülmektedir.

Şekil değiştirdikten sonra s_1 boyunca uzama deformasyonu için, Şekil 2.3 ve Şekil 2.4 den:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{v + \frac{\partial v}{\partial s_1} ds_1 - v}{A ds_1} + \frac{(\rho_1 + u) d\omega_1 - \rho_1 d\omega_1}{\rho_1 d\omega_1} + \frac{(R_1 - w) d\phi_1 - R_1 d\phi_1}{R_1 d\phi_1} \\ &= \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial v}{\partial s_1} + \frac{u}{\rho_1} - \frac{w}{R_1} = \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial v}{\partial s_1} + \frac{u}{AB} \cdot \frac{\partial A}{\partial s_2} - \frac{w}{R_1}\end{aligned}\quad (2.14)$$

bulunur. Burada ilk terim v deplasman bileşeninin artımı, ikincisi ρ_1 jeodezik eğrilik yarıçapının değişimi, üçüncü terim ise R_1 asal eğrilik yarıçapının değişimi sonucu meydana gelmektedir.

Benzer şekilde ε_2 için de

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial s_2} + \frac{v}{AB} \frac{\partial B}{\partial s_1} - \frac{w}{R_2}\quad (2.15)$$

yazılabilir.

PABC elemanında kayma deformasyonu $\hat{APC}$ açısının değişimi olarak tanımlanabilir.

$\overline{PC}$ yay elemanının doğrultu değişimi:

$$\gamma_1 = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial s_1} ds_1 - u}{A ds_1} - \frac{v}{\rho_1} = \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial u}{\partial s_1} - \frac{v}{AB} \cdot \frac{\partial A}{\partial s_2}\quad (2.16)$$

şeklindedir. Burada ilk terim s_1 boyunca u deplasmanının artımından, ikinci terim ise jeodezik eğrilik nedeniyle, P noktasının s_1 üzerinde v kadar hareket etmesinden ileri gelmektedir.

Benzer şekilde $\overline{PA}$ yay elemanının toplam doğrultu değişimi için:

$$\gamma_2 = \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial v}{\partial s_2} - \frac{u}{AB} \cdot \frac{\partial B}{\partial s_1}\quad (2.17)$$

yazılabilir. O halde şekil değiştirmeden önce dik açı olan $\hat{APC}$ açısının küçülmesi yani toplam kayma deformasyonu:

$$\gamma_{12} = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial u}{\partial s_1} + \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial v}{\partial s_2} - \frac{v}{AB} \cdot \frac{\partial A}{\partial s_2} - \frac{u}{AB} \cdot \frac{\partial B}{\partial s_1} \quad (2.18)$$

şeklinde elde edilir.

Benzer düşünce şekliyle asal eğrilik düzlemleri içinde eğrisel koordinatlara ait teğetlerin dönmelerinin

$$\beta_1 = \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial w}{\partial s_1} + \frac{v}{R_1} \quad (2.19)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial w}{\partial s_2} + \frac{v}{R_2}$$

olduğu görülebilir.

Deformasyon deplasman bağıntılarında Kirchhoff-Love hipotezine uygun olarak γ_{13} ve γ_{23} yüzey normal doğrultusunda kayma deformasyonlarının ihmal edilebilecek kadar küçük oldukları kabul edildiğinden, β_1 ve β_2 yüzeye normal üçüncü kovariant baz vektörü $\vec{d}_3$ ün şekil değiştirmeden sonraki dönme bileşenlerini de göstermektedirler.

χ_1 ve χ_2 asal eğrilik değişimleri için buna göre Şekil 2.4 ve 2.3 ün incelenmesiyle

$$\chi_1 = - \left(\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial \beta_1}{\partial s_1} + \frac{1}{\rho_1} \beta_2 \right) = - \left(\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial \beta_1}{\partial s_1} + \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial A}{\partial s_2} \beta_2 \right) \quad (2.20)$$

$$\chi_2 = - \left(\frac{1}{B} \cdot \frac{\partial \beta_2}{\partial s_2} + \frac{1}{\rho_2} \beta_1 \right) = - \left(\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial \beta_2}{\partial s_2} + \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial B}{\partial s_1} \beta_1 \right)$$

ifadeleri yazılabilir. Burada eksi işaretleri χ_1 ve χ_2 in Şekil 2.4 deki gibi pozitif eğrilikli bir kabukta R_1 ve R_2 asal eğrilik yarıçaplarını arttıracak şekilde ise pozitif kabul edilmelerinden ileri gelmektedir. Son olarak burulma eğriliği ifadesinin bulunması için $s_1 = st$ kesit elemanının β_2 dönme bileşeni ile, $s_1 + ds_1$ kesit elemanının $\frac{\partial(-)}{\partial s_1} ds_1$ artımı ile tekrarlanan dönme bileşenlerinin β_2 doğrultusuna izdüşümleri toplamının farkı alınarak, Ads_1 ara yay boyuna bölünmesi ve ikinci mertebe terimlerin terkedilmesi ile:

$$-\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial \beta_2}{\partial s_1} + \frac{1}{\rho_1} \cdot \beta_1 - \frac{1}{R_1} \cdot \gamma_2 = -\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial \beta_2}{\partial s_1} + \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial A}{\partial s_2} \cdot \beta_1 - \frac{\gamma_2}{R_1}$$

ifadesi hesaplanabilir. $s_2 = st$ ve $s_2 + ds_2 = st$ kesitlerinin rölâtif dönmesinden hareketle burulma ifadesi, benzer şekilde

$$-\frac{1}{B} \cdot \frac{\partial \beta_1}{\partial s_2} + \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial B}{\partial s_1} \cdot \beta_2 - \frac{\gamma_1}{R_2}$$

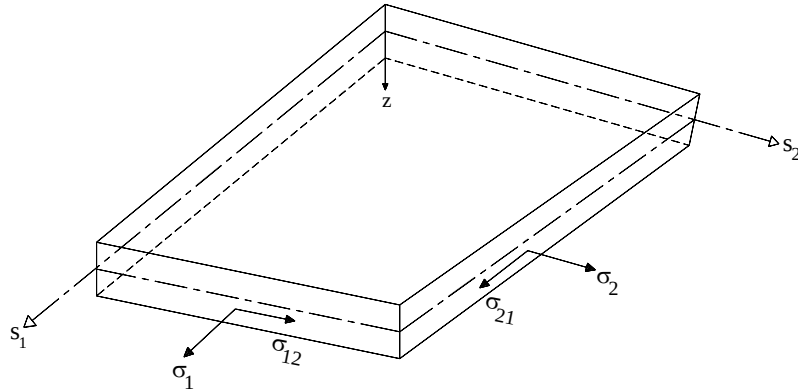
bulunur. Bu iki ifadenin eşit olduğu ispatlanabilir, [15], ve burulma eğriliği τ ile gösterilirse:

$$\tau = -\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial \beta_2}{\partial s_1} + \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial A}{\partial s_2} \cdot \beta_1 - \frac{\gamma_2}{R_1} = -\frac{1}{B} \cdot \frac{\partial \beta_1}{\partial s_2} + \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial B}{\partial s_1} \cdot \beta_2 - \frac{\gamma_1}{R_2} \quad (2.21)$$

yazılabilir.

2.4 Elastisite Bağlıları ve Kesit Tesirleri

Kabuk ortalama yüzeyinden z kotundaki bir noktada Hooke kanununa göre gerilme deformasyon bağıntıları, gerilme bileşenlerinin pozitif yönlerinin Şekil 2.5 deki gibi olması halinde:



Şekil 2.5 Kabuk Elemanında Gerilme Bileşenleri

$$\begin{aligned} \sigma_1^{(z)} &= \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\varepsilon_1^{(z)} + \nu \varepsilon_2^{(z)}) \\ \sigma_2^{(z)} &= \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\varepsilon_2^{(z)} + \nu \varepsilon_1^{(z)}) \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\sigma_{12}^{(z)} = \sigma_{21}^{(z)} = \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \gamma_{12}^{(z)}$$

şeklinde ifade edilirler. Burada, E elastisite modülünü, ν Poisson oranını göstermektedir. z kotundaki deformasyon bileşenlerinin, Bölüm: 2.1.3 de tanımlanmış ortalama yüzey deformasyonları cinsinden ifadelerinin

$$\varepsilon_1^{(z)} = \frac{1}{1 - \frac{z}{R_1}} \cdot (\varepsilon_1 + z \cdot \chi_1) \quad (2.23, a)$$

$$\varepsilon_2^{(z)} = \frac{1}{1 - \frac{z}{R_2}} \cdot (\varepsilon_2 + z \cdot \chi_2)$$

$$\gamma_{12}^{(z)} = \frac{1}{(1 - \frac{z}{R_1})(1 - \frac{z}{R_2})} \cdot (\gamma_{12} + 2z \cdot \tau) \quad (2.23, b)$$

olduğu görülebilir.

Gerilme bileşenlerinin, $s_1=st$ ve $s_2=st$ kesitlerindeki integralleri olarak,

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_{12} \\ M_1 \\ M_{12} \end{bmatrix} = \int_{z=-\frac{h}{2}}^{z=\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_1^{(z)} \\ \sigma_{12}^{(z)} \\ z\sigma_1^{(z)} \\ z\sigma_{12}^{(z)} \end{bmatrix} \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz \quad (2.24, a)$$

$$\begin{bmatrix} N_2 \\ N_{21} \\ M_2 \\ M_{21} \end{bmatrix} = \int_{z=-\frac{h}{2}}^{z=\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_2^{(z)} \\ \sigma_{21}^{(z)} \\ z\sigma_2^{(z)} \\ z\sigma_{21}^{(z)} \end{bmatrix} \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) dz \quad (2.24, b)$$

şeklinde kesit tesirleri bileşenleri tanımlanabilir. Kabuk kalınlığının diğer geometrik boyutlarına göre küçük olduğu kabulü uyarınca, (2.23) ve (2.24) bağıntılarında, yaklaşık olarak

$$1 - \frac{z}{R_1} \cong 1 \quad 1 - \frac{z}{R_2} \cong 1$$

alınır ve (2.25)

$$B = \frac{Eh}{1-\nu^2} \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

kısaltmaları yapılrısa kesit tesirleri için:

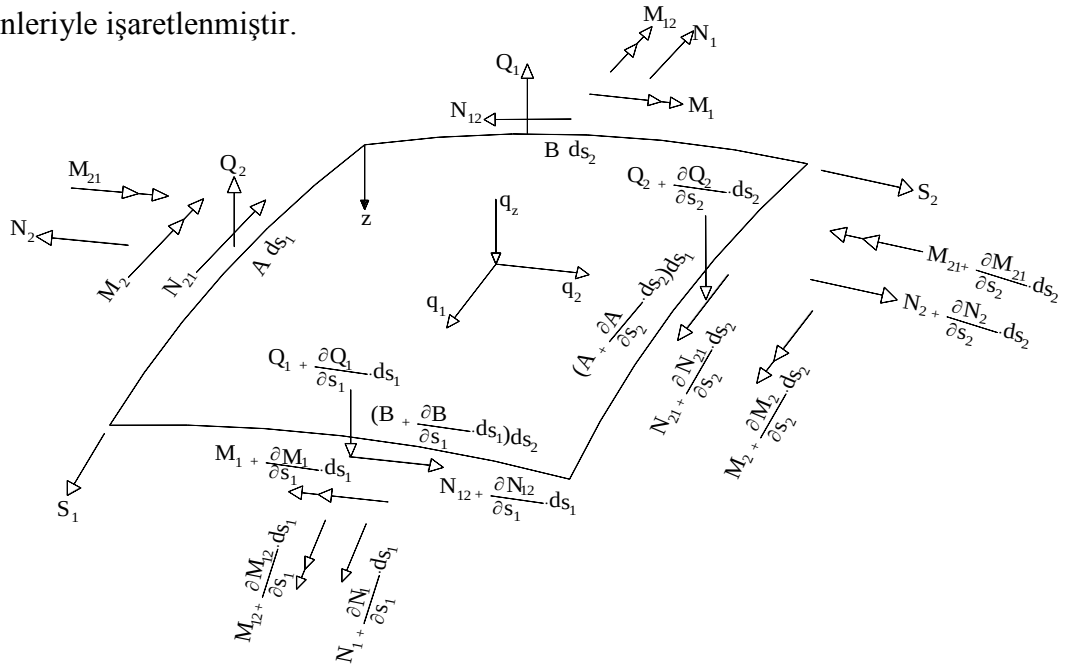
$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_{12} = N_{21} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} = \gamma_{21} \end{bmatrix} \quad (2.26, a)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_b \cong M_{12} \cong M_{21} \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ 2\tau \end{bmatrix} \quad (2.26, b)$$

ifadeleri bulunur. Bu bağıntılarla elde edilen kesit tesirlerinin pozitif yönleri Şekil 2.6 da gösterilmiştir.

2.5 Denge Denklemleri

Şekil 2.6 da ortogonal bir kabuk elemanına etkiyen kesit tesirleri ve dış yükler pozitif yönleriyle işaretlenmiştir.



Şekil 2.6 Kesit Tesirleri ve Dış Yükler

Bu etkiler altında kabuk denge denklemleri, ikinci mertebe büyüklükler ihmal edilerek,

$$\sum P_{s_1} = 0 \dots \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial s_1} (B.N_1) + \frac{\partial}{\partial s_2} (A.N_{21}) + \frac{\partial A}{\partial s_2} .N_{12} - \frac{\partial B}{\partial s_1} .N_2 \right\} - \frac{Q_1}{R_1} + q_1 = 0 \quad (2.27,a)$$

$$\sum P_{s_2} = 0 \dots \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial s_2} (A.N_2) + \frac{\partial}{\partial s_1} (B.N_{12}) + \frac{\partial B}{\partial s_1} .N_{21} - \frac{\partial A}{\partial s_2} .N_1 \right\} - \frac{Q_2}{R_2} + q_2 = 0 \quad (2.27,b)$$

$$\sum P_z = 0 \dots \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial s_1} (B.Q_1) + \frac{\partial}{\partial s_2} (A.Q_2) \right\} + \frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} + q_2 = 0 \quad (2.27,c)$$

$$\sum M_{s_1} = 0 \dots \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial s_2} (A.M_2) + \frac{\partial}{\partial s_1} (B.M_{12}) + \frac{\partial B}{\partial s_1} .M_{21} - \frac{\partial A}{\partial s_2} .M_1 \right\} - Q_1 = 0 \quad (2.27,d)$$

$$\sum M_{s_2} = 0 \dots \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial s_1} (B.M_1) + \frac{\partial}{\partial s_2} (A.M_{21}) + \frac{\partial A}{\partial s_1} .M_{12} - \frac{\partial B}{\partial s_1} .M_2 \right\} - Q_2 = 0 \quad (2.27,e)$$

$$\sum M_z = 0 \dots N_{21} - N_{12} + \frac{M_{12}}{R_1} - \frac{M_{21}}{R_2} = 0 \quad (2.27,f)$$

şeklinde bulunabilir.

Yüzey normalı etrafında moment denge denklemlerinde $N_{12} = N_{21}$ ve $M_{12} = M_{21}$ alınır, genel halde $R_1 \neq R_2$ olduğundan eşitliğin sağlanmadığı görülmektedir. Bu durum (2.24-a,b) denklemlerinde yapılan yaklaşımdan ileri gelmektedir. Nitekim bu bağıntılarda yaklaşım yapılmazsa

$$N_{12} - \frac{M_{12}}{R_1} = \int \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) \sigma_{12} dz$$

$$N_{21} - \frac{M_{21}}{R_2} = \int \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) \sigma_{21} dz$$

bulunur ve kesin şekliyle moment denge denklemi

$$\int \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) (\sigma_{21} - \sigma_{12}) dz \quad (2.28)$$

şeklinde elde edileceğinden $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ eşitliği sonucu özdeş olarak sağlandığı görülebilir.

$$N = N_{12} - \frac{M_{12}}{R_1} = N_{21} - \frac{M_{21}}{R_2} \quad ; \quad M_b = \frac{M_{12} + M_{21}}{2} \quad (2.29)$$

şeklinde tanımlanan fiktif kayma kuvveti ve burulma momenti (2.26) kesit tesirleri-deformasyon bağıntılarındaki

$$N = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \cdot \gamma_{12} \quad ; \quad M_b = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \cdot \tau \quad (2.30)$$

ifadelerine tam uymaktadır. N_{12} , N_{21} ile M_{12} ve M_{21} in kesin değerleri ise gerçekte yalnız γ_{12} ve τ cinsinden ifade edilemez. İnce kabuk teorisindeki bu belirsizlik, bilindiği gibi teorideki temel bağıntılarda kayma kuvvetleri ve burulma momentlerinin çoğunlukla N ve M_b cinsinden ifade edilebilecek şekilde girmesi sonucu bir sakınca yaratmamaktadır. Burulma momentlerinin kabuklarda küçük olması sonucu yaklaşık olarak

$$N \cong N_{12} \cong N_{21} \text{ ve } M_b \cong M_{12} \cong M_{21} \quad (2.31)$$

alınabilir, [15].

(2.27) nin ilk beş denkleminde Q_1 ve Q_2 nin yok edilmesiyle denge denklemlerini

$$\begin{aligned} F_1^*(N_1, N_2, N, M_1, M_2, M_b) + q_1 &= 0 \\ F_2^*(N_1, N_2, N, M_1, M_2, M_b) + q_2 &= 0 \\ F_3^*(N_1, N_2, N, M_1, M_2, M_b) + q_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

şeklinde üç asal doğrultuda izdüşüm denge denklemlerine indirmek mümkündür. Ayrıca (2.26,a,b) deki kesit tesirleri ifadeleri kullanılarak (2.32) denge denklemleri:

$$\begin{aligned} F_1(u, v, w) + q_1 &= 0 \\ F_2(u, v, w) + q_2 &= 0 \\ F_3(u, v, w) + q_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

şeklinde deplasman bileşenleri cinsinden ifade edilebilir.

2.6 Kabuklarda İç Kuvvetlerin İş İfadeleri

Kabuk elemanında dış yüklerle dengede bir i iç kuvvet durumunun geometrik uygunluk şartlarını sağlayan bir j deplasman durumunda yaptığı iş için:

$$I_{ij} = \iiint \left\{ \sigma_{1i}^{(z)} \varepsilon_{1j}^{(z)} + \sigma_{2i}^{(z)} \varepsilon_{2j}^{(z)} + \sigma_{12i}^{(z)} \gamma_{12j}^{(z)} \right\} \left(1 - \frac{z}{R_1} \right) \left(1 - \frac{z}{R_2} \right) A.B.dz.ds_1.ds_2 \quad (2.34)$$

genel hacim integrali yazılabilir. Gerilme ve deformasyon bileşenleri (2.22) ve (2.23) bağıntılarından yararlanarak, ortalama yüzeyin deformasyonları cinsinden ifade edilir, ve 1. kabulü uyarınca

$$1 - \frac{z}{R_1} \cong 1 - \frac{z}{R_2} \cong 1$$

yaklaşımı yapılarak, kesit kalınlığınca integral alınır (2.34) ifadesi

$$I_{ij} = B \iint \left\{ (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2)_i \varepsilon_{1j} + (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1)_i \varepsilon_{2j} + \frac{(1-\nu)}{2} \gamma_{12i} \gamma_{12j} \right\} A.B.ds_1.ds_2 \\ + D \iint \left\{ (\chi_1 + \nu \chi_2)_i \chi_{1j} + (\chi_2 + \nu \chi_1)_i \chi_{2j} + 2(1-\nu) \tau_i \tau_j \right\} A.B.ds_1.ds_2 \quad (2.35)$$

şeklinde, düzlemsel sistemlerdeki iş ifadelerine benzer bir yüzey integraline dönüşür.

2.7 Dönel Kabuklar

Dönel kabuklarda (2.1) yüzey parametrik denklemi

$$\begin{aligned} x_1 &= r(s) \cos \theta \\ x_2 &= r(s) \sin \theta \\ x_3 &= z(s) \end{aligned} \quad (2.36)$$

şeklinde. Burada s_1 ve s_2 eğrisel koordinatlarına sırasıyla paralel dairede belirli bir doğrultudan itibaren merkez açısını gösteren θ ve meridyen eğrisi üzerinde yay uzunluğunu gösteren s karşı gelmektedir. $r(s)$ ise paralel dairesinin yarıçapıdır.

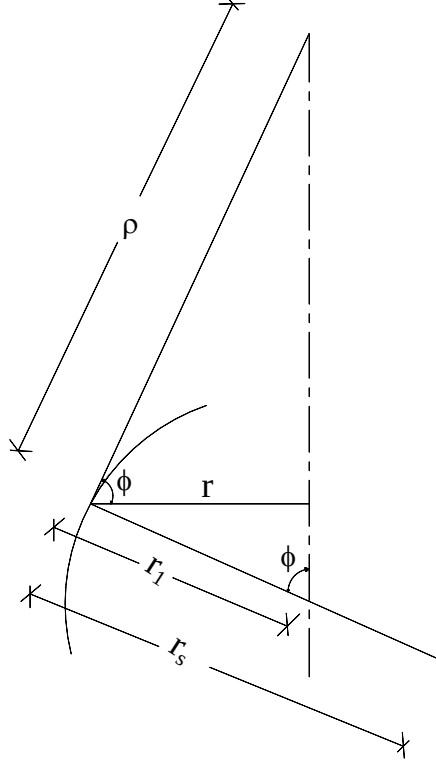
Kovariant baz vektörü bileşenlerinin boyları (2.3) ve (2.6) bağıntılarından:

$$A = r(s) \quad B = 1 \quad (2.37)$$

bulunur. ϕ açısı ile Şekil 2.7 de görüldüğü gibi meridyen eğrisinin eğim açısı gösterilirse:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial s_1} &= \frac{\partial A}{\partial \theta} = 0 ; & \frac{\partial A}{\partial s_2} &= \frac{\partial A}{\partial s} = \frac{\partial r}{\partial s} = \cos \phi \\ \frac{\partial B}{\partial s_1} &= \frac{\partial B}{\partial s_2} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial s} &= \sin \phi \end{aligned} \quad (2.38)$$

bağıntıları elde edilir.



Şekil 2.7 Dönel Kabuk Yüzeyi

Asal eğrilikler (2.8) den :

$$k_1 = \frac{1}{r_1} = \frac{\sin \phi}{r}$$

$$k_2 = \frac{1}{r_s} = \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 r}{\partial s^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial \phi}{\partial s} \quad (2.39)$$

ve jeodezik eğrilikler: (2.11) den:

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho} = \frac{\cos \phi}{r} \quad (2.40)$$

$$\frac{1}{\rho_2} = 0$$

olarak elde edilir.

Dönel kabuklarda şekildeğiştirme-yerdeğiştirme bağıntıları (2.14,...,2.21) bağıntılarının özel hali olarak

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 = \varepsilon_\theta &= \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{u}{r} \cos \phi - \frac{w}{r} \sin \phi \\
\varepsilon_2 = \varepsilon_s &= \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{w}{r_s} \\
\gamma_1 &= \frac{u}{r \partial \theta} - \frac{v}{r} \cos \phi; \gamma_2 = \frac{\partial v}{\partial s} \\
\gamma_{12} = \gamma_{s\theta} &= \frac{u}{r \partial \theta} - \frac{v}{r} \cos \phi + \frac{\partial v}{\partial s} \\
\beta_1 = \beta_\theta &= \frac{\partial w}{r \partial \theta} + \frac{v}{r} \sin \phi; \beta_2 = \beta_s = \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{u}{r_s} \\
\chi_1 = \chi_\theta &= - \left\{ \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial v}{r^2 \partial \theta} \sin \phi + \cos \phi \frac{\partial w}{r \partial s} + \frac{\cos \phi}{r} \cdot \frac{u}{r_s} \right\} \\
\chi_2 = \chi_s &= - \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{u}{r_s} \right) \right\} \\
\tau &= - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial w}{r \partial \theta} + \frac{v}{r} \sin \phi \right) - \frac{1}{r_s} \left(\frac{u}{r \partial \theta} - \frac{v}{r} \cos \phi \right)
\end{aligned} \tag{2.41}$$

bulunur. (2.27) ifadelerinde, (2.37,38,29) eşitlikleri kullanılarak benzer şekilde dönel kabuklarda denge denklemleri de elde edilebilir. Burada (2.41) bağıntıları özel bir durum olan silindirik kabuklar için verilecektir.

2.7.1 Silindirik Kabuklarda Şekildeğiştirme-Yerdeğiştirme Bağıntıları

Silindirik kabuklarda:

$$\sin \phi = 1 \quad ; \quad \cos \phi = 0 \quad ; \quad \frac{1}{r_s} = 0 \tag{2.42}$$

olduğu gözönüne alınırsa (2.41) denklemleri basitleşerek:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_s &= \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \varepsilon_\theta = \frac{\partial v}{r \partial \theta} - \frac{w}{r} \\
\gamma_1 &= \frac{u}{r \partial \theta} \quad ; \quad \gamma_2 = \frac{\partial v}{\partial x} \quad ; \quad \gamma_{12} = \frac{u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \\
\beta_s &= \frac{\partial w}{\partial x} \quad ; \quad \beta_\theta = \frac{\partial w}{r \partial \theta} + \frac{v}{r} \\
\chi_s &= - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad ; \quad \chi_\theta = - \left\{ \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial v}{r^2 \partial \theta} \right\} \quad ; \quad \tau = - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial w}{r \partial \theta} + \frac{v}{r} \right\}
\end{aligned} \tag{2.43}$$

şekline girer. Bu bağıntılarda s değişkeni x notasyonu ile gösterilmiştir.

BÖLÜM 3. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE SİLİNDİRİK KABUK TAŞIYICI SİSTEMLERİN HESABI

3.1 Yöntemin Esasları, Tanımlar

Silindirik kabuk taşıyıcı bir sürekli sistem, dış etkiler altında, şekil değiştirerek denge konumuna gelecektir. Bu konumu belirleyen deplasman bileşenleri serbest değişkenlere bağlı sürekli fonksiyonlar ile ifade edilirler. Deplasman yüzeyini ifade eden bu fonksiyonların bulunması, genel olarak, sürekli sistemde diferansiyel denge denkleminin integralinin alınması ve integral sabitlerinin sınır şartlarını sağlayacak şekilde bulunmasını gerektirir.

Silindirik kabuk taşıyıcı sistemlerde özel haller dışında bu kesin çözüm yolunun uygulanması, matematik güçlükler nedeniyle, ya çok zor ya da imkansız olduğundan, değişik sayısal hesap metodlarının geliştirilmesi gerekir.

Sonlu elemanlar metodunda, sürekli sistemden genel bir eğriler ağı geçirilir. Bu eğriler arasında kalan her sürekli ortam parçasına sonlu eleman denir. Elemanların çevresini belirten eğriler ise elemanın ayrıtları olmaktadır. Sonlu elemanların ayrıtlarının kesişme noktalarına ise düğüm noktaları olarak adlandırılacaktır. Bu metodda, sonlu eleman yüzeyinin şekil değiştirmesi yalnız, düğüm noktalarının deplasman bileşenleri ve bunların serbest değişkenlere göre türevlerinden oluşan uç deplasman parametrelerine bağlı olarak ifade edilir. Bu taktirde, düğüm noktaları deplasman parametrelerinin belirlenmesi, sonlu elemanlardan oluşan bütün sistemde deplasman yüzeyinin ve bunun sonucu olarak da, her noktadaki deformasyonların ve kesit tesirlerinin bulunması için yeterli olacaktır. Böylece sürekli bir sistem yerine ayrık bir sistem alınıp, diferansiyel denklem sisteminin integrasyonunu deplasman parametrelerinin karşılıklı etkilerini ifade edecek cebrik bir denklem takımının çözümüne indirgemek yöntemin amacıdır.

3.2 Sonlu Elemanlar Yöntemi Denklemlerinin Elde Edilmesi

Bu kısımda virtüel iş teoreminden hareket ederek bütün sistem için, sonlu elemanlar metodu denklemleri elde edilecektir. Sonlu elemanlara ayrıldığı düşünülen sistemin, dış etkiler yokken herhangi bir düğüm noktasındaki deplasman bileşenlerinden birini bir, diğerleri sıfır, ve diğer bütün noktalarda deplasman parametrelerini sıfır yapan bir şekilde değiştirme durumuna birim şekilde değiştirme durumu denecektir. Birim durumda yalnız o düğüm noktasında birleşen sonlu elemanlarda, yerdeğiştirmelerin ortaya çıkacağı açıktır.

Herhangi bir i . deplasman bileşenine karşı gelen i . birim durumda yerdeğiştirmeler,

$$[v]_i = \begin{bmatrix} v(s_1, s_2) \\ u(s_1, s_2) \\ w(s_1, s_2) \end{bmatrix}_i \quad (3.1)$$

şekildeğiştirmeler,

$$[\varepsilon]_i = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}_i \quad [\chi]_i = \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ 2\tau \end{bmatrix}_i \quad \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} [\varepsilon]_i \\ [\chi]_i \end{bmatrix}_i \quad (3.2)$$

ve kesit tesirleri,

$$[N]_i = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_{12} \end{bmatrix}_i \quad [M]_i = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_b \end{bmatrix}_i \quad \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} [N]_i \\ [M]_i \end{bmatrix}_i \quad (3.3)$$

kolon matrisleri ile tanımlanırsa, genel bir yüzeysel taşıyıcı sistem için, (2.14~21) bağıntıları toplu halde:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix}_i = [\partial][v]_i \quad (3.4)$$

şeklinde matris formunda gösterilebilir. Kesit tesirleri ise deplasman fonksiyonlarına bağlı olarak, (2.26 a,b) eşitliklerinden de yararlanarak yazılabilen

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}_i = [D] \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix}_i = [D][\partial][v]_i \quad (3.5)$$

bağıntısı yardımı ile türetilebilir. Ayrıca (3.5) ifadesinde gözönüne alınmayan yüzeye dik kesme kuvveti bileşenleri:

$$[Q]_i = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}_i \quad (3.6)$$

(2.27 , d, e) moment denge denklemlerinden bulunur. Bütün bu kesit tesirleri bileşenlerinin (2.27, a, b, c) kabuk izdüşüm denge denklemlerinde yerlerine konulmasıyla bu deplasman fonksiyonlarına karşı gelen,

$$[q]_i = \begin{bmatrix} q_v \\ q_u \\ q_w \end{bmatrix}_i \quad (3.7)$$

yayılı yük bileşenleri de bulunur. Ayrıca, her sonlu eleman için, kesit tesirleri bileşenleri ifadesinde s_1, s_2 serbest değişkenlerine eleman ayrıt eğrilerinin koordinatları verilirse, kesit tesirlerinin ayrıtlar boyunca değişimi elde edilir. Bir ayrıt üzerinde, iki komşu elemandan ayrı ayrı bulunan kesit tesirlerinin genel halde aynı olmayacağı görülebilir. Dengeyi sağlayacak şekilde, aradaki farkları sisteme dışardan etkileyen çizgisel yayılı $\bar{P}_i$ yükleri ve $\bar{M}_i$ momentleri olarak düşünmek gerekir. $\bar{P}_i$, $\bar{M}_i$ çizgisel ve $[q]_i$ yayılı yükleri sistemde (i) birim deplasman durumunu yaratan dış yüklemedir.

Diğer taraftan, dış yükler, sabit ve farklı sıcaklık değişimleri gibi statik tesirlerden oluşabilen dış etkiler altında, sistemde meydana gelen denge durumuna tabii durum denirse, bu halde yayılı dış yükler, deplasman bileşenleri ve deformasyonlar

$$[q] = \begin{bmatrix} q_v \\ q_u \\ q_w \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$[v] = \begin{bmatrix} v \\ u \\ w \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\varepsilon] \\ [\chi] \end{bmatrix} = [\partial][v] \quad (3.10)$$

kolon matrisleri tanımlanabilir.

Bir kabuk elemanında sabit ve farklı sıcaklık değişimi halinde deformasyonlar ve eğrilik değişimleri ise,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}_T \quad \begin{bmatrix} \chi \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ 2\tau \end{bmatrix}_T \quad \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} [\varepsilon]_T \\ [\chi]_T \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

şeklinde gösterilebilir. Burada farklı sıcaklığın, Kirchhoff-Love hipotezinin geçerli kalması için, kabuk kalınlığı boyunca lineer değiştiği kabulünün gerekli olduğu görülmektedir. Toplam deformasyonlardan, sıcaklık değişiminden ileri gelen deformasyonlar çıkarılarak, kesit tesirleri bileşenleri,

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}_0 = [D] \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix}_T \quad (3.13)$$

formülü ile bulunur.

Tabii durum yükleme, (i) birim durumu ise virtüel deplasman durumu olarak alınıp, virtüel iş teoremi uyarınca iç kuvvetler ile dış kuvvetlerin işlerinin eşitliği yazılırsa,

$$\iint \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix}_i^T \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}_0 dA = \iint [v]_i^T [q] dA \quad (3.14)$$

elde edilir. (3.11 , 13) bağıntılarından da yararlanarak bu eşitlik düzenlenirse

$$\iint \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix}_i^T [D] \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix} dA = \iint [v]_i^T [q] dA + \iint \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix}_i^T [D] \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix}_T dA \quad (3.15)$$

yazılabilir. Birim duruma ait deplasman fonksiyonlarının ayrıtlar boyunca süreklilik şartlarını sağlaması halinde, ayrıca bir kabul yapılmadığından bu bağıntının kesin olduğu açıktır.

Tabii durum birim durumların lineer kombinasyonu olarak belirlenebileceği yaklaşımı yapılırsa, X_j tabii durumda sistemin j inci deplasman parametresinin aldığı değer olmak üzere,

$$[v] = \sum_{j=1}^n [v]_j X_j \quad (3.16)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^n [\partial][v]_j X_j = \sum_{j=1}^n \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix}_j X_j \quad (3.17)$$

yazılabilir. Burada n sistemin serbestlik derecesini yani toplam deplasman parametresi sayısını göstermektedir. O halde (3.15) eşitliği

$$\sum_{j=1}^n X_j \iint \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix}_i^T [D] \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix}_j dA = \iint [v]_i^T [q] dA + \iint \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix}_i^T [D] \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix}_T dA \quad (3.18)$$

şekline girer.

Bu bağıntıda:

$$k_{ij} = \iint \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix}_i^T [D] \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix}_j dA \quad (3.19, a)$$

$$P_{i,0} = \iint [v]_i^T [q] dA \quad (3.19, b)$$

$$P_{i,T} = \iint \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix}_i^T [D] \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix}_T dA \quad (3.19, c)$$

kısaltmaları yapılırsa,

$$\sum_{j=1}^n k_{ij} \cdot X_j = P_{i,0} + P_{i,T} \quad (3.20)$$

bulunur.

Sistemde bütün birim durumlar ayrı ayrı deplasman durumu olarak alınıp (3.14) virtüel iş ifadesi yazılırsa, (3.20) ye benzer bilinmeyen uç deplasman parametresi sayısına eşit, n adet denklem elde edilir. Matris formunda bu denklem takımı,

$$[K][X] = [P]_0 + [P]_T \quad (3.21)$$

olarak yazılabilir.

Burada:

[X] : Bilinmeyen uç deplasman parametrelerinin alt alta yazılmasından oluşan kolon matrisi,

[K] : Herhangi bir k_{ij} terimi, (3.19, a) da görüldüğü gibi, sistemde j birim durumundaki iç kuvvetlerin i birim durumundaki şekildeğiştirmelerle yaptığı iş olan, sistem rijidlik kare matrisini,

[P] : Herhangi bir i terimi dış yüklerin i birim durumunda yaptığı iş olan, sistem yükleme kolon matrisini, göstermektedir.

Ayrıca (3.19, c) ifadesi, [D] matrisinin simetri özelliğinden

$$P_{i,T} = \iint \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix}_i^T [D]^T \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix}_T dA = \iint \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}_i^T \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix}_T dA \quad (3.22)$$

şeklinde yazılabilir.

O halde:

$[P]_{i,T}$: Herhangi bir i terimi, i birim durumunda iç kuvvetlerin sıcaklık değişmesinden doğan deformasyonlarda yaptığı iş olan, n boyutlu sistem sıcaklık değişimi kolon matrisini göstermektedir.

Burada tanımlanan iş ifadeleri sistemi oluşturan bütün sonlu elemanlarda önce ayrı ayrı hesaplanıp, sonradan toplanabilir. Yani yukarıdaki ifadelerde sistem yerine sonlu eleman demek şartı ile tanımlanabilen ve aynı notasyonla gösterilecek olan eleman rijidlik, yükleme ve sıcaklık değişimi matrisleri seçilen birim durum fonksiyonlarına bağlı olarak bulunup, bunlardan hareket ederek matris deplasman metodu ile (3.21) denklemleri elde edilir.

(3.21) denklemlerinden tabii durumda uç deplasman parametrelerinin değerleri bulunur ve (3.17) ve (3.13) de yerlerine konursa her noktadaki ve özellikle düğüm noktalarındaki deformasyonlar ve kesit tesirleri bileşenleri elde edilir.

Tabii durumun birim durumların lineer kombinasyonu olduğu kabulünden dolayı bulunan sonuçlar yaklaşıktır. Eleman boyutlarını küçültüp, sistemde birim durum ve bilinmeyen sayısını arttırarak gerçek değere daha yakın sonuçlar elde edilebilir. Yaklaşıklık mertebesinin belirlenmesi iki şekilde düşünülebilir.

- a) Eleman boyutlarını gittikçe küçülterek yapılan ardışık bir kaç çözümden sonra, son iki çözümdeki sonuçların karşılaştırılması halinde, bulunan farklar yeter derecede küçük ise son bulunan değerler uygulama için yeter doğrulukta kabul edilebilir. Yalnız burada, eleman boyutlarının küçültülmesi ile bulunan sonuçların gerçek çözüme yakınsayacağını kesinlikle bilinmesi gerekir. Bu ise birim durumlarda seçilen deplasman fonksiyonlarının bazı kriterleri sağlamasını gerektirir.
- b) Uç deplasman parametrelerinin belirli değerlerine karşı gelen yükleme, ayrıtlar boyunca $\vec{P}$ ve $\vec{M}$ çizgisel yük ve momentleri ile alan üzerinde yayılı $\vec{q}$ yükleri olarak bulunabilir. Bu şekilde bulunacak yükleri gerçek dış etkilerle karşılaştırarak hesaplanan sonuçların yeterliliği hakkında bir fikir edinmek mümkündür.

Diğer taraftan, sonlu elemanlar metodunun klasik düşünce şekliyle, elemanlardaki şekil değiştirmelerinin yalnız düğüm noktaları uç deplasman parametreleri doğrultusundaki tekil kuvvet ve momentlerden meydana gelebileceği, ve dış etkilerinde yalnız düğüm noktalarına etkidiği kabulü yapılırsa (3.21) denklemlerinin düğüm noktaları denge denklemleri olarak düşünülebileceğinin belirtilmesi gerekir. Gerçekten, bu taktirde birim durumların tanımı ve birim deplasman teoremi uyarınca k_{ij} değeri i deplasman bileşeni doğrultusundaki, j deplasman durumunda meydana gelen uç kuvvetlerini; $P_{i,0}$ ve $P_{i,T}$ ise gerçek etkilere eşdeğer aynı doğrultudaki dış yük bileşenlerini gösterecektir.

3.3 Sonlu Elemanlarda Seçilen Yerdeğiştirme Fonksiyonlarının Genel Özelliklerinin İrdelenmesi

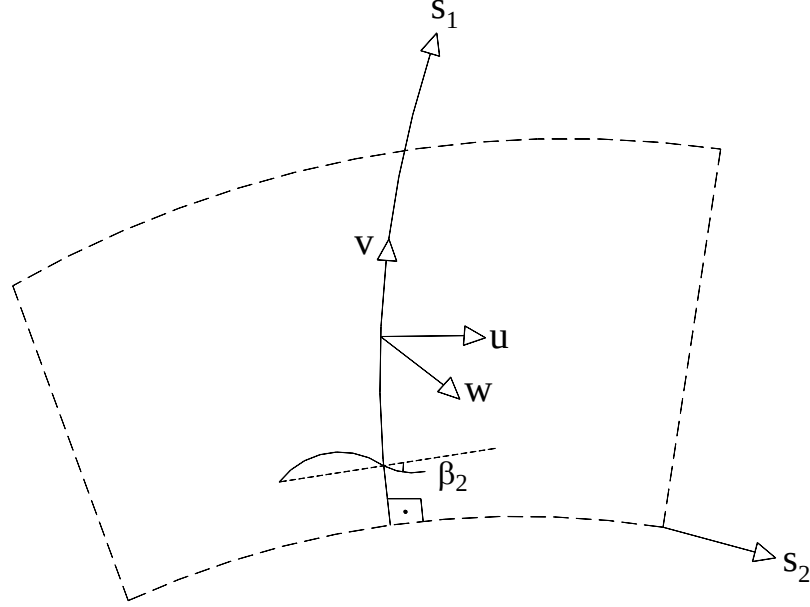
Bilindiği gibi sonlu elemanlar yönteminde, gerçek sonuçlara yakınsama hızının artması için en önemli etken, elemanlarda deplasman parametrelerinin birim değerlerine karşı gelen, seçilmiş deplasman fonksiyonlarının uygunluğudur. Birim deplasman durumlarının lineer kombinasyonunun, gerçek deplasman yayılışını iyi bir şekilde ifade etmesi için, bu deplasman fonksiyonlarının kendilerine ait birim uç deplasmanına karşı gelen uç kuvveti tesir yüzeyine yakın olması gerekmektedir. Bunun dışında bu fonksiyonların belirlenmesinde yakınsaklık kriterleri diye bilinen, bazı özelliklerin sağlanması, yöntemin yakınsaklığının temini için önemlidir.

a) Bölüm: 3.2 de, (3.21) denklem takımının elde edilmesi için, seçilen deplasman fonksiyonlarının ayrıtlar boyunca süreklilik şartlarını sağladığı kabulü yapılmıştı. Şekil: 3.1 deki gibi, kabuk yüzeyinden geçen bir ayrıt boyunca geometrik uygunluk şartlarının sağlanması için, yüzeysel yerdeğiştirmelerde yalnız u ve v deplasman bileşenlerinin sürekliliği yeterlidir. Yüzeye dik yerdeğiştirmede ise w

deplasmanı yanında $\frac{\partial w}{\partial s_1}$ ve $\frac{\partial w}{\partial s_2}$ türevlerine bağlı olarak, β_1 ve β_2 dönme

bileşenlerinin sürekliliğinin sağlanması da gerekmektedir. Bu deplasman bileşenlerinin ayrıt boyunca değişimlerinin her iki komşu elemanda da aynı olması için, bu değişimlerin yalnız ayrıtın iki ucundaki ortak düğüm noktalarının deplasman parametreleri cinsinden belirlenmiş olmaları zorunludur. Bunun sonucu, dörtgensel bir yüzey elemanında s_1 ve s_2 eğrisel koordinatlarına göre

değişimin u , v deplasmanları için enaz 2 parametre ile, örneğin birinci derece polinomları gibi, w deplasmanı için ise enaz 4 parametre ile, örneğin üçüncü derece polinomları gibi, belirlenmesi zorunlu olacaktır.



Şekil 3.1 Kabuk Yüzeyinden Geçen Ayrıt

Ayrıtlar boyunca komşu sonlu eleman yüzeylerinin teğet düzlemlerinin çakışmayıp belirli bir açı yaparak kesişmesi halinde de süreklilik şartı aranırsa, u ve v deplasmanlarına ait fonksiyonların mertebelerinin de w ninki ile aynı olması gerektiği görülebilir. Bu düşünceden hareket ederek elemanlarda serbestlik derecelerinin büyük ölçüde arttırılmasının, rijidlik matrisi mertebesinin büyümesi ve hesabın uzaması gibi sakıncalı tarafları vardır.

Ayrıtlar boyunca geometrik süreklilik şartlarının tam olarak sağlanmaması halinde ise, (3.14) eşitliğinin kesinliği kaybolacaktır. Bununla birlikte eleman boyutlarının küçülmesi ile, süreksizlik mertebesi de küçülürse sonuçların yine de gerçek değere yakınsadığı bilinmektedir.

- b) Elemanın bir rijid yerdeğiştirmesine karşı gelen uç deplasman parametrelerinin değerleri için, seçilen deplasman fonksiyonlarına bağlı olan eleman içindeki $[\epsilon]$ ve $[\chi]$ deformasyonları özdeş olarak sıfır olmalıdır. Aksi halde, rijid yerdeğiştirme sırasında, gerçek durumun aksine elemanda artık gerilmeler ve uç

kuvvetleri ortaya çıkacaktır. Bu kriterin sağlanmamasının sakıncaları, herhangi bir şekildeğiştirme durumunu, rijid bir yerdeğiştirme durumu ile Betti karşıtlık teoremiyle karşılaştırarak gösterilebilir. Bilindiği gibi, bulunan bir çözümün, doğru olması için, elemanların dengesi ve düğüm noktalarının dengesi diye ikiye ayrılabilen sistem dengesinin sağlanması gerekir. Rijid yerdeğiştirmede uç kuvvetlerinin meydana gelmesi halinde, bunların genel bir şekildeğiştirme durumunda yaptıkları iş sıfırdan farklı olacaktır. Buna göre şekildeğiştirme durumundaki dış kuvvetlerin rijid yerdeğiştirmedeki işi de sıfırdan farklı olur. Rijid deplasman bileşenlerine karşı gelen dış kuvvet bileşenlerinin eleman izdüşüm denge denklemleri olduğu açıktır. Buna göre bu kriterin gerçekleşmemesi, elemanların ve dolayısı ile sistem dengesinin sağlanmamasına sebep olacaktır.

- c) Deplasman fonksiyonlarının diğer önemli bir özelliği de, elemanda sabit gerilme yayılımı verebilmesidir. Gerçekten eleman boyutlarının küçültülmesiyle, klasik elastisite teorisinde eleman içinde gerilme yayılımı sabite yakın hale geleceğinden gerçek değerlere yakınsamanın ancak bu kriterin sağlanması ile mümkün olduğu görülebilir. Eleman boyutlarını gittikçe küçülterek bulunan sonuçların limit halde gerçek değerlere yakınsaması için, ancak sonsuz küçük limit durumunda bu üç kriterin kesinlikle sağlanması zorunludur. Elemanlar sonlu boyutlarda iken dahi bu koşulların sağlanmasının yakınsaklık hızını arttıracığı açıktır.

3.4 Sistemlerin Hesabında İzlenen Yol

Birinci mertbe teorisi ile statik dış etkiler için sistemlerin hesabında gerekli eleman rijidlik ve yükleme matrislerinin tanımları Bölüm: 3.2 de yapılmıştır. Kesit tesirleri, deplasman parametrelerine bağlı olarak (3.13) ve (3.17) matris bağıntıları ile bulunabilir. Her eleman türü için bu matrislerin hesaplanması dışında matris deplasman metodu ile yapılacak hesaplara, çubuk elemanlar yerine sonlu elemanların kullanılması ek hiçbir özellik getirmemektedir.

Bu yöntemin hesap sırası aşağıdaki gibi özetlenebilir:

1. Sistem sonlu elemanlara ayrılarak düğüm noktaları numaralandırılır. Bu numaralandırma işleminde, elde edilecek lineer denklem takımının katsayılar matrisi band genişliğinin, mümkün mertebe küçük çıkmasına dikkat edilmelidir.
2. Her elemanda ayrı ayrı rijidlik ve dış etkiler matrisleri hesaplanır.
3. Düğüm noktalarında, eleman matrislerinin hesabında kullanılan eleman özel eksenleri ile sistem eksenlerinin çakışmaması halinde, dönüştürme matrisleri tanımlanarak sistem eksenlerine dönüştürme yapılır.
4. Dönüştürülmüş eleman matrisleri düğüm noktalarının karşılıklı etkilerini gösteren alt matrislere ayrılır ve bu alt matrisler sistem rijidlik ve dış etkiler matrislerindeki yerlerine yerleştirilir.
5. Bu şekilde elde edilen (3.21) denklemlerine sınır koşulları eklenmelidir. Mesnet noktalarında veya simetri eksenini üzerindeki düğüm noktalarında sıfır olduğu bilinen deplasman bileşenlerine ait satır ve sütunların silinip denklem takımının küçültülmesi karışık indis değiştirme işlemleri gerektiğinden genelde uygulanmaz. Bunun yerine çoğunlukla bileşenlere ait satır ve sütundaki terimler ve yük sabitini sıfırlayıp, esas köşegene birim değer atanması yoluna gidilmektedir. Ancak en pratik yol, herhangi bir sıfırlama işlemi dahi yapmadan yalnızca esas köşegene mertebe bakımından rijidlik matrisi terimlerine göre çok büyük bir değer eklenmesidir. Bunun fizik anlamı sıfırlanmak istenen deplasman bileşeni doğrultusunda redörü çok büyük bir elastik mesnet konmasıdır. Çözüm sonucu söz konusu deplasman bileşeni için tam sıfır bulunmayıp redörle ters orantılı pratik olarak sıfır kabul edilebilecek bir değer elde edilecektir.
6. Düğüm noktalarına doğrudan etkiyen tekil yük ve momentlerde karşı geldikleri deplasman bileşenlerine ait satırın yük sabitleri kolon matrisine eklenip, denklem takımı çözülerek düğüm noktaları uç deplasman parametreleri bulunur.
7. Her elemanda, köşe noktalarındaki sistem eksenleri üzerindeki tayin edilmiş olan deplasman bileşenleri, yeniden eleman özel eksenlerine izdüşürülür.
8. (3.13) ve (3.17) bağıntıları ile özellikle köşe noktalarındaki deformasyonlar ve kesit tesirleri bileşenleri bulunur.

9. Bir düğüm noktasında birleşen elemanların her birinde ayrı ayrı bulunan o noktadaki tesirler, az çok farklı olacaktır. Bu değerlerin ortalaması sonuç kesit tesirleri olarak kabul edilebilir.

Sistemde dış etkiler yanında mesnet çökmelerinin de bulunması halinde bu hesap adımlarından 5.'sini biraz değiştirmek gerekir. Mesnet çökmesi mesnetlerdeki bazı deplasman bileşenlerine sıfır yerine belirli değerlerin atanabilmesidir. Eğer sıfırlama işlemi yukarıda açıklanan şekilde esas köşegene mertebe bakımından çok büyük bir redör değeri ilavesi yöntemiyle yapılmakta ise denklem takımının o satırına ait yük sabiti olarak mesnet çökmesinin sayısal değerinin esas köşegene ilave edilmiş redör değeri ile çarpımını koymak yeterli olmakta, mesnet çökmelerine göre hesabın en kolay şekilde yapılmasına olanak sağlamaktadır.

Düzgün ve farklı sıcaklık değişmesine göre hesapta ise 8. hesap adımında bir miktar değişiklik gerekmekte olup, (3.17) bağıntısı ile bulunmuş köşe noktalarındaki deformasyonlar ve kesit tesirleri bileşenlerinden (3.13) ifadesindeki gibi sıcaklık değişmesinden oluşan deformasyonların etkisi çıkarılmalıdır.

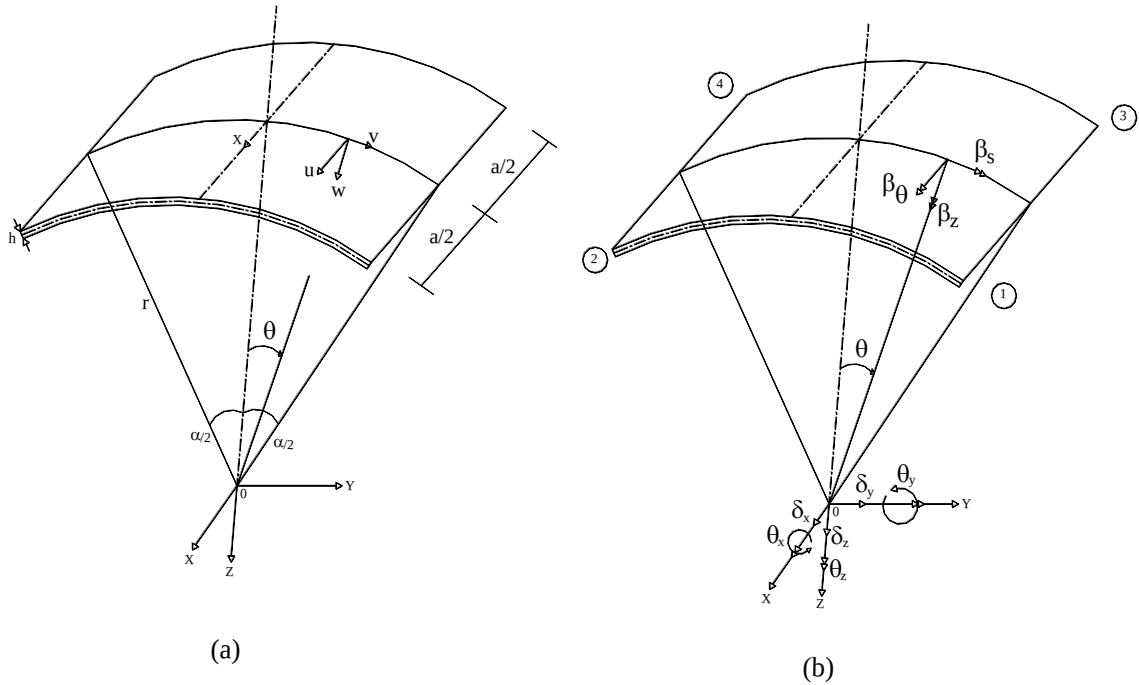
BÖLÜM 4. SİLİNDİRİK SONLU ELEMAN

Yaygın bir uygulama alanı olan silindirik kabukların daire enkesitli silindirik sonlu elemanlar yardımı ile hesabı için yayınlanmış çeşitli çalışmalar vardır. Sistemin dış etkiler altındaki gerçek deplasman yayılışına iyi bir yaklaşım sağlamak için bu çalışmalarda çeşitli deplasman fonksiyonları seçilmiştir. Bu bölümde anlatılacak silindirik sonlu elemanda diğerlerinden farklı deplasman fonksiyonlarından hareket edilerek yeni bir rijidlik matrisi elde edilecektir.

4.1 Deplasman Fonksiyonlarının Seçilişi

Silindirik sonlu elemanda seçilen koordinat sistemi ve deplasman bileşenleri

Şekil 4.1,a da gösterilmiştir.



Şekil 4.1 Koordinat Sistemi ve Deplasman Bileşenleri

Silindirik koordinatlarda, serbest değişkenlerin $x=0$, $\theta = 0$ başlangıç noktası ana doğru boyu a , yarıçapı r ve merkez açısı α olan silindirik kabuğun simetri eksenlerinin kesişme noktasıdır. Her noktada u , v sırasıyla x ve θ serbest değişkenleri w ise ortalama yüzey normali doğrultusundaki deplasman bileşenlerini göstermektedir. w nin pozitif yönü yarıçapı azaltacak şekilde seçilmiştir. Her noktada $\beta_s, \beta_\theta, \beta_z$ dönme bileşenlerinin yönleri ve silindirik sonlu eleman düğüm noktalarının numaralanma sırası Şekil 4.1,b de gösterilmiştir.

X , Y , Z dik eksen takımının (0) başlangıç noktasının $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ yer değiştirme ve $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ dönme bileşenlerine bağlı olarak silindirik sonlu elemanın uzaydaki herhangi bir rijid yerdeğiştirmesi tanımlanabilir. Şekil 4.1,a dan silindirin herhangi bir noktasının u,v,w deplasman bileşenlerini, rijid yer değiştirme vektörüne bağlayan matris denkleminin

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & r \cos \theta & r \sin \theta \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & -r & x \sin \theta & -x \cos \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 & x \cos \theta & x \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} = [U_R] \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

şeklinde olması gerektiği görülmektedir.

4.1.1 Literatürde Verilen Bazı Silindirik Sonlu Eleman Tiplerinin İrdelenmesi

Yapılmış çalışmaların bir kısmında, rijidlik matrisinin elde edilmesi için kullanılan deplasman fonksiyonları x ve θ ya göre polinomlar olarak seçilmiştir. Örneğin [9] silindirik kabuklara uygulanırsa deplasman bileşenleri için $y = r \theta$ olmak üzere

$$u = c_1 xy + c_2 x + c_3 y + c_4$$

$$v = c_5 xy + c_6 x + c_7 y + c_8$$

$$w = c_9 x^3 y^3 + c_{10} x^3 y^2 + c_{11} x^3 y + c_{12} x^3 + c_{13} x^2 y^3 + c_{14} x^2 y^2 + c_{15} x^2 y + c_{16} x^2 + c_{17} xy^3 + c_{18} xy^2 + c_{19} xy + c_{20} x + c_{21} x^3 + c_{22} y^2 + c_{23} y + c_{24} \quad (4.2)$$

şeklinde her iki doğrultuda u ve v için lineer, w için 3. derece polinomları elde edilir.

24 sabit her düğüm noktasının $u,v,w, \beta_\theta, \beta_s$ deplasman bileşeni ve τ burulma eğriliğinden oluşan, 24 uç deplasman parametresi ile belirlenir.

[10] de ayrıtlar boyunca geometrik uygunluk şartlarını tam olarak sağlamak amacıyla u ve v için de, w için kullanılan deplasman fonksiyonunun aynıısı kullanılmıştır. Bu halde eleman uç deplasman parametresi sayısı 48'e çıkmaktadır.

[13] ve [14] deki çalışmalarda da çeşitli dereceden benzer polinomlar seçilmiştir. (4.1) bağıntısından yalnız polinom ifadelerin rijid yer değiştirme şartını sağlamadığı görülebilir. Merkez açısının küçülmesiyle farkın kaybolacağı ve eleman boyutları küçüldükçe doğru sonuca yaklaşılabileceği düşünülse bile, bu durumda silindirik kabuğun yan yana gelen düz plak elemanlara dönüştürerek yapılan bir idealleştirme de benzer şekilde uygun sonuçlar verir.

[11] ve (4.2) ifadesinde c_6 , c_{20} , c_{23} ve c_{24} sabitlerine karşı gelen terimler kaldırılmış bunların yerine rijid yerdeğiştirme kriterini sağlayacak

$$\begin{aligned} u &= \dots\dots + c_6' r \sin \theta + c_{20}' r \cos \theta \\ v &= \dots\dots - c_6' x \cos \theta + c_{20}' x \sin \theta + c_{23}' \cos \theta + c_{24}' \sin \theta \\ w &= \dots\dots + c_6' x \sin \theta + c_{20}' x \cos \theta - c_{23}' \sin \theta + c_{24}' \cos \theta \end{aligned} \quad (4.3)$$

terimleri konmuştur.

Bu kabulün de bazı sakıncalı tarafları vardır. Bir silindirin dönel yük altında dönel simetrik deplasmanları düşünülürse, her nokta için $v = 0$ ve w nin θ dan bağımsız olması gerekir. Her iki özelliğin de [11] için w fonksiyonunda c_{20} ve c_{24} sabit terimlerinin kaldırılması, ve yerlerine c_{20}' ve c_{24}' sabitlerinin v fonksiyonunda da bulunmaları nedeniyle sağlanmadığı görülmektedir. Bu ise silindirik elemanda deplasmanların anadoğru boyunca değişiminin önem kazandığı özel hallerde hakiki sonuca yakınsamanın merkez açısının değerinin, yani elemanın boyutlarının çok küçültülmesiyle sağlanabileceğini gösterir.

[12] de ise buraya kadar belirtilen çalışmalarda düğüm noktalarında eleman yüzeyine dik doğrultuda β_z dönme bileşeninin uç deplasman parametresi olarak seçilmemiş olması ve bunun sonucu olarak eksen dönüştürülmesi halinde ortaya çıkacak zorluk işaret edilmiştir. Bunun için (4.2) bağıntısında c_9 , c_{10} , c_{13} , c_{14} terimleri kaldırılıp, u ve v deplasman fonksiyonuna, 4 yeni terim katılmıştır. Bu durumda düğüm noktalarının 6 ıncı serbestlik derecesi olarak β_z alınmış, buna karşılık ayrıtlar

boyunca süreklilik bozulmuştur. Rijid yer değiştirme kriterinin sağlanmasına karşılık, dönel simetrik deplasman yayılışının tam elde edilememesi sakıncası bu çalışma için de belirtilebilir.

Bu bölümde anlatılacak yeni sonlu elemanda, hem rijid yerdeğiştirme, hemde dönel simetrik deplasman durumunu tam verebilen deplasman fonksiyonları bulunacaktır. Ayrıca her düğüm noktasında serbestlik derecesi sayısı 7 ye çıkarılarak hem β_z dönme bileşenleri, hem süreklilik şartlarının sağlanmasına imkan veren τ eğrilik bileşeni uç deplasman parametresi olarak seçilecektir.

Silindirik sonlu eleman her iki doğrultuda ince şeritlere ayrılıp, kabuk taşıyıcı yüzeyinin, bu şeritlerden oluşan bir ızgara kiriş sistemi gibi çalışacağı düşünülürse,

$$\begin{aligned} u &= \sum u_i(x)u_i(\theta)d_i \\ v &= \sum v_i(x)v_i(\theta)d_i \\ w &= \sum w_i(x)w_i(\theta)d_i \end{aligned}$$

Çarpım fonksiyonları gibi düşünülecek deplasman fonksiyonları için uygun ifadeler bulunabilir.

4.1.2 Birim Durum Fonksiyonlarının x Değişkenine Bağlı İfadelerin Bulunması

Silindirik sonlu elemanda ana doğru boyunca ince bir şerit, doğru eksenli sabit kesitli bir çubuk gibi düşünülebilir. Buna göre :

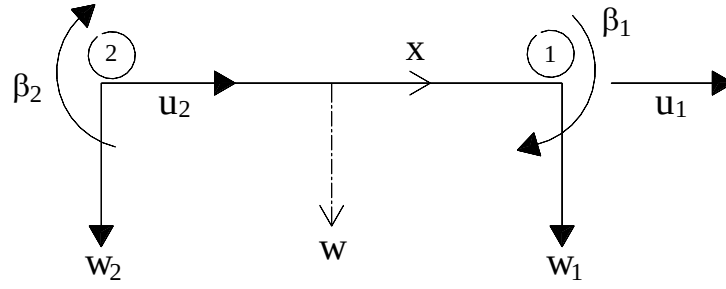
$$u(x) = c_1x + c_2$$

$$v(x) = \dot{c}_1x + \dot{c}_2$$

$$w(x) = c_1''x^3 + c_2''x^2 + c_3''x + c_4''$$

şeklinde u ve v için lineer, w için 3. derece polinomların kullanılması uygun olmaktadır. Toplam boyu a olan bir çubukta, başlangıç noktası olarak çubuğun orta noktası seçilmiş ise, 6 uç deplasman parametresinin birim değerlerine karşı gelen deplasman fonksiyonları Tablo 4.1 de $l_i(x)$, $f_i(x)$, $g_i(x)$ yardımcı fonksiyonları ile belirlenebilir.

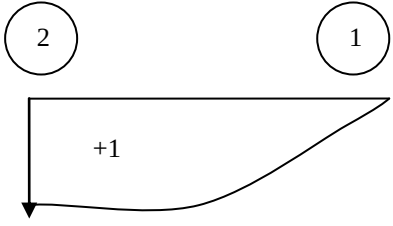
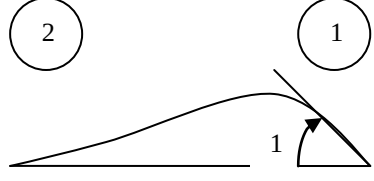
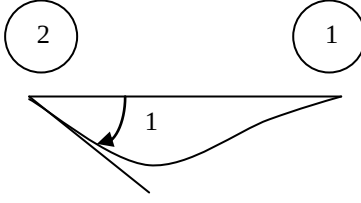
$l_i(x)$ lineer değişimi , $f_i(x)$ ve $g_i(x)$ kübik değişimleri göstermektedir.



Şekil 4.2 Ana Doğrultudaki Uç Deplasmanları

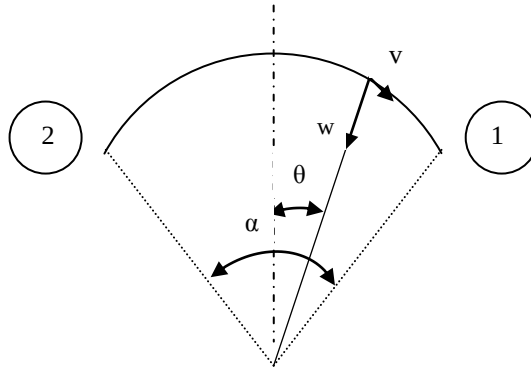
Tablo 4.1 x Değişkenine Bağlı Şekil Fonksiyonları

Sınır Şartı	Fonksiyon	Şekil
$x = a/2 \quad l_1=1$ $x = -a/2 \quad l_1=0$	$l_1(x)=\frac{1}{2} + \frac{x}{a}$	
$x = a/2 \quad l_2=0$ $x = -a/2 \quad l_2=1$	$l_2(x)=\frac{1}{2} - \frac{x}{a}$	
$x=a/2 \quad \left\{ \begin{array}{l} f_1=1 \\ df_1/dx=0 \end{array} \right.$ $x=-a/2 \quad \left\{ \begin{array}{l} f_1=0 \\ df_1/dx=0 \end{array} \right.$	$f_1(x)=\frac{1}{2} + \frac{3x}{2a} - \frac{2x^3}{a^3}$	

$ \begin{array}{l} x=a/2 \quad \left\{ \begin{array}{l} f_2=0 \\ df_2/dx=0 \end{array} \right. \\ \\ x=-a/2 \quad \left\{ \begin{array}{l} f_2=1 \\ df_2/dx=0 \end{array} \right. \end{array} $	$f_2(x) = \frac{1}{2} - \frac{3x}{2a} + \frac{2x^3}{a^3}$	
$ \begin{array}{l} x=a/2 \quad \left\{ \begin{array}{l} g_1=0 \\ dg_1/dx=1 \end{array} \right. \\ \\ x=-a/2 \quad \left\{ \begin{array}{l} g_1=0 \\ dg_1/dx=0 \end{array} \right. \end{array} $	$g_1(x) = -\frac{a}{8} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{2a} + \frac{x^3}{a^2}$	
$ \begin{array}{l} x=a/2 \quad \left\{ \begin{array}{l} g_2=0 \\ dg_2/dx=0 \end{array} \right. \\ \\ x=-a/2 \quad \left\{ \begin{array}{l} g_2=0 \\ dg_2/dx=1 \end{array} \right. \end{array} $	$g_2(x) = \frac{a}{8} - \frac{x}{4} - \frac{x^2}{2a} + \frac{x^3}{a^2}$	

4.1.3 Birim Durum Fonksiyonlarının θ Değişkenine Bağlı İfadelerin Bulunması

Silindirik sonlu elemanda teğetsel bir kabuk şerit, düzlemi içinde tesir eden, dış etkiler altındaki daire eksenli bir çubuk gibi düşünülebilir. Bu bakımdan [1] de deplasman fonksiyonlarının seçiminde sabit kesitli, normal kuvvetten dolayı boy kısalması terkedilen dairesel çubukların homojen çözümünden hareket etmenin uygun olacağı kabul edilmiştir.



Şekil 4.3 Daire Eksenli Çubuğun Deplasman Bileşenleri

$$v = \hat{c}_1 + \hat{c}_2\theta + \hat{c}_3\cos\theta + \hat{c}_4\sin\theta + \hat{c}_5\theta\sin\theta + \hat{c}_6\theta\cos\theta \quad (4.5)$$

teğetsel deplasman bileşeninin dairesel çubuklarda homojen çözümdür. w deplasman bileşeni ise bu fonksiyonun türevinden

$$w = c_1 + c_2\sin\theta + c_3\cos\theta + c_4\theta\cos\theta + c_5\theta\sin\theta \quad (4.6)$$

şeklindedir.

$\theta = 0$ eksenine göre simetrik ve antimetrik terimlere ayrılırsa :

$$w_{\text{sim.}} = c_1 + c_3\cos\theta + c_5\theta\sin\theta$$

$$w_{\text{ant.}} = c_2\sin\theta + c_4\theta\cos\theta \text{ elde edilir.}$$

Bu formüllerin de düzlemine dik deformasyon yapan dairesel çubukların homojen çözümüne ait :

$$w = c_1 + c_2\sin\theta + c_3\cos\theta + c_4\theta\cos\theta + c_5\theta\sin\theta + c_6\theta \quad (4.6,a)$$

bağıntısına benzediği görülüyor. Yalnız (4.6,a) formülündeki $c_6\theta$ terimi burada bulunmamaktadır.

Sonlu elemanda normal kuvvetten dolayı boy kısalması ihmal edilmemiş olduğundan w ve v deplasman fonksiyonlarının katsayıları arasında bir bağıntı göz önüne alınmayacaktır. Elemanın ince dairesel şeridinde iki ucun çökmesi ve dönmesinden

oluşan 4 sınır şartı bulunduğundan (4.6) da 5 terimden birinin terk edilmesi gerekir. Simetrik terimlerden,

c_1 : Parametresi θ dan bağımsız dönele simetrik deformasyona karşı geldiğinden, $c_3 \cos \theta$ terimi rijid yer değiştirmelerin ifadesi için gerekli olduğundan, alınmaları şarttır. $c_4 \sin \theta$ terimi terk edilebilir. Antimetrik her iki terim de alınarak $w(\theta)$ deplasman fonksiyonu [1] de $w = c_1 + c_2 \cos \theta + c_3 \sin \theta + c_4 \theta \cos \theta$ şeklinde seçilmiştir. Bu çalışmada ise normal kuvvetten dolayı boy değişmesi terk edilmediğine göre $w(\theta)$ için (4.6) ifadesinin kullanılmasının zorunluluk olmadığı dikkate alınarak, $w = c_1 + c_2 \cos \theta + c_3 \sin \theta + c_4 \theta$ alınacaktır. Aynı basitleştirme [2] de de yapılmıştır. Görüldüğü gibi dönele simetri ve rijid ötelemeyi veren terimler korunurken $c_4 \theta \cos \theta$ yerine $c_4 \theta$ alınmaktadır. O halde merkez açısı α olan dairesel çubukta düğüm noktalarının $w_1, w_2, \left(\frac{dw}{d\theta}\right)_1, \left(\frac{dw}{d\theta}\right)_2$ uç deplasmanlarının birim durumları için c_1 katsayılarının alması gereken değerler bulunur, sırasıyla $\phi_1(\theta), \phi_2(\theta), \psi_1(\theta), \psi_2(\theta)$ yardımcı fonksiyonları elde edilebilir. Bulunan ifadeler Tablo 4.2 de verilmiştir. v teğetsel deplasman bileşeni için her iki ucun birim deplasmanları olmak üzere iki sınır şartı vardır. Buna karşılık (4.5) denklemindeki v deplasman fonksiyonunda ilk 3 terimin bulunması gerekmektedir.

$\hat{c}_1$ sabiti (o) merkezi etrafında rijid dönmenin

$\hat{c}_3 \cos \theta, \hat{c}_4 \sin \theta$ terimleri rijid ötelemenin verilmesi için gerekli olmaktadır.

$\hat{c}_2 \theta, \theta = 0$ eksenine simetrik ve antisimetrik terim sayısının eşit olması için korunabilir. (4.5) de son iki terim ise terkedilebilir. Buna göre birim durumların bir kısmında uçlarda $v = 0$ veren $v = v(\theta)$ fonksiyonlarının tanımlanması gerektiği ortaya çıkmaktadır. [1] de iki uçtaki v_i uç deplasmanlarının birim değerleri için,

$$v = \hat{c}_3 \cos \theta + \hat{c}_4 \sin \theta$$

ifadesinden hareket edilmiş, uçlardaki birim dönmeler için w ye ait çökme fonksiyonları yanında, teğetsel yönde

$$v = \hat{c}_1 \left(1 - \frac{\cos \theta}{\cos \frac{\alpha}{2}}\right) + \hat{c}_2 \left(\frac{2\theta}{\alpha} - \frac{\sin \theta}{\sin \frac{\alpha}{2}}\right)$$

alınmıştır. Buna göre (4.5) ifadesinin ilk dört terimi de hesaba girmektedir.

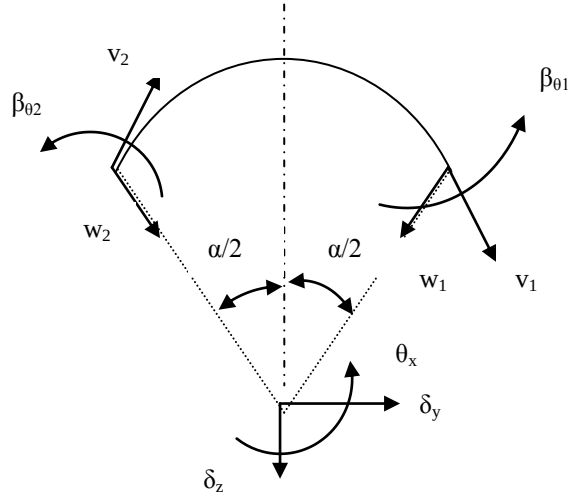
Bu çalışmada önce v_i uç deplasmanlarının birim değerleri için

$$v = \hat{c}_1 + \hat{c}_4 \sin \theta$$

dan hareket edilip, uçlardaki birim çökmeler verilirken teğetsel yönde

$$v = c_3 \left(1 - \frac{\cos \theta}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right)$$

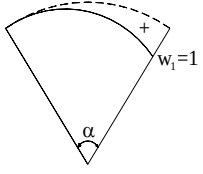
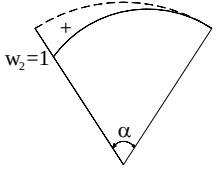
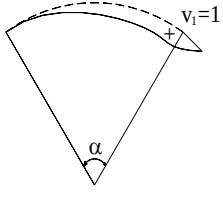
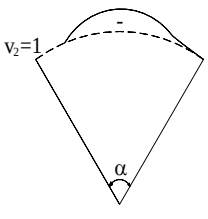
terimi ilave edilerek $c_2 \theta$ teriminin kaldırıldığı bir alternatif düşünülmüş ancak bu alternatife göre sayısal örnekler bölümündeki 3. örneğin çözümünde yakınsaklığın azaldığı gözlemlendiğinden bundan vazgeçilerek $v(\theta)$ fonksiyonları için [1] deki ifadeler aynen korunmuştur. Daire eksenli çubuğun her noktadaki dönmesinin $\beta_\theta = -\left(\frac{dw}{rd\theta} + \frac{v}{r}\right)$ şeklinde olduğu göz önüne alınırsa, deneme ile dairesel çubuğun Şekil 4.4 deki 6 uç deplasmanlarına karşı gelen Tablo 4.2 de gösterilen v ve w deplasman fonksiyonlarının seçilmesinin uygun olacağı görülmektedir.

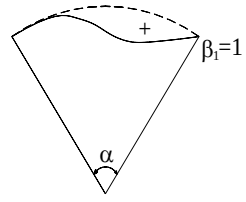
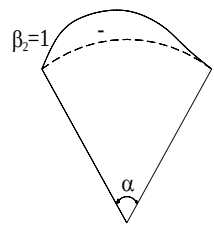


Şekil 4.4 Daire Eksenli Çubukta Uç Deplasmanları

Tablo 4.2 de açık ifadeleri ile birlikte karşı geldikleri sınır şartları da belirtilen bu yardımcı fonksiyonlardan $\lambda_i(\theta)$, $l_i(x)$ lineer değişimine; $\phi_i(\theta)$ ve $\psi_i(\theta)$ da $f_i(x)$, $g_i(x)$ kübik değişimlerine karşı gelmektedir.

Tablo 4.2 θ Değişkenine Bağlı Şekil Fonksiyonları

Sınır Şartı	Fonksiyon	Şekil
$\theta = +\frac{\alpha}{2} \begin{cases} w = 1 \\ v = 0 \\ \beta_\theta = 0 \end{cases}$ $\theta = -\frac{\alpha}{2} \begin{cases} w = 0 \\ v = 0 \\ \beta_\theta = 0 \end{cases}$	$v = 0$ $w = \varphi_1(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\sin \theta - \theta \cos \frac{\alpha}{2}}{2(\sin \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2})}$	
$\theta = +\frac{\alpha}{2} \begin{cases} w = 0 \\ v = 0 \\ \beta_\theta = 0 \end{cases}$ $\theta = -\frac{\alpha}{2} \begin{cases} w = 1 \\ v = 0 \\ \beta_\theta = 0 \end{cases}$	$v = 0$ $w = \varphi_2(\theta) = \frac{1}{2} - \frac{\sin \theta - \theta \cos \frac{\alpha}{2}}{2(\sin \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2})}$	
$\theta = +\frac{\alpha}{2} \begin{cases} w = 0 \\ v = 1 \\ \beta_\theta = 0 \end{cases}$ $\theta = -\frac{\alpha}{2} \begin{cases} w = 0 \\ v = 0 \\ \beta_\theta = 0 \end{cases}$	$v = \lambda_1(\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos \theta}{\cos \frac{\alpha}{2}} + \frac{\sin \theta}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right)$ $w = -\psi_1(\theta) = \frac{-\theta \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} \sin \theta}{2(\sin \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2})} + \frac{(-\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \theta)}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$	
$\theta = +\frac{\alpha}{2} \begin{cases} w = 0 \\ v = 0 \\ \beta_\theta = 0 \end{cases}$ $\theta = -\frac{\alpha}{2} \begin{cases} w = 0 \\ v = 1 \\ \beta_\theta = 0 \end{cases}$	$v = \lambda_2(\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos \theta}{\cos \frac{\alpha}{2}} - \frac{\sin \theta}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right)$ $w = -\psi_2(\theta) = \frac{-\theta \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} \sin \theta}{2(\sin \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2})} - \frac{(-\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \theta)}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$	

$\theta = +\frac{\alpha}{2} \begin{cases} w = 0 \\ v = 0 \\ \beta_\theta = 1 \end{cases}$ $\theta = -\frac{\alpha}{2} \begin{cases} w = 0 \\ v = 0 \\ \beta_\theta = 0 \end{cases}$	$v = -\mu_1(\theta)r = -\frac{r}{2}\left(1 - \frac{2\theta}{\alpha} - \frac{\cos \theta}{\cos \frac{\alpha}{2}} - \frac{\sin \theta}{\sin \frac{\alpha}{2}}\right)$ $w = -\psi_1(\theta)r$	
$\theta = +\frac{\alpha}{2} \begin{cases} w = 0 \\ v = 0 \\ \beta_\theta = 0 \end{cases}$ $\theta = -\frac{\alpha}{2} \begin{cases} w = 0 \\ v = 0 \\ \beta_\theta = 1 \end{cases}$	$v = -\mu_2(\theta)r = -\frac{r}{2}\left(1 - \frac{2\theta}{\alpha} - \frac{\cos \theta}{\cos \frac{\alpha}{2}} + \frac{\sin \theta}{\sin \frac{\alpha}{2}}\right)$ $w = -\psi_2(\theta)r$	

Dairesel çubuğun rijid yer değiştirmeleri daire merkezinin Şekil 4.4 deki $\delta_z, \delta_y, \theta_x$ deplasman bileşenleri cinsinden tanımlansa, uç deplasman parametrelerini rijid yer değiştirmelere bağlayan matris denklemi:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ v_1 \\ \beta_{\theta 1} \\ w_2 \\ v_2 \\ \beta_{\theta 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & -\sin \frac{\alpha}{2} & 0 \\ \sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} & -r \\ 0 & 0 & +1 \\ \cos \frac{\alpha}{2} & \sin \frac{\alpha}{2} & 0 \\ -\sin \frac{\alpha}{2} & \cos \frac{\alpha}{2} & -r \\ 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_z \\ \delta_y \\ \theta_x \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

olacaktır.

Bu bağıntıdan bulunan uç deplasman değerleri kendilerine karşı gelen birim deplasman durumları ile çarpılıp süperpoze edilirse

$$\begin{aligned} v &= (\lambda_1 - \lambda_2) \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \delta_z + (\lambda_1 + \lambda_2) \delta_y + \{-(\lambda_1 + \lambda_2)r - (\mu_1 r + \mu_2 r)\} \theta_x \\ w &= \left\{ (\varphi_1 + \varphi_2) \cos \frac{\alpha}{2} + (-\psi_1 + \psi_2) \sin \frac{\alpha}{2} \right\} \delta_z \\ &+ \left\{ (-\varphi_1 + \varphi_2) \sin \frac{\alpha}{2} - (\psi_1 + \psi_2) \cos \frac{\alpha}{2} \right\} \delta_y \\ &+ \{ -r(-\psi_1 - \psi_2) + (-\psi_1 r - \psi_2 r) \} \theta_x \end{aligned} \quad (4.8)$$

elde edilir. Yardımcı fonksiyonların Tablo 4.2 deki ifadeleri alınarak basitleştirmeler yapılır ise:

$$\begin{aligned} w &= \cos\theta.\delta_z - \sin\theta.\delta_y \\ v &= \sin\theta.\delta_z + \cos\theta.\delta_y - r\theta_x \end{aligned} \quad (4.9)$$

bulunur. (4.9) denklemleri, (4.1) matris bağıntısı ile karşılaştırılırsa dairesel çubukta seçilen yardımcı fonksiyonlar ile rijid yerdeğiştirme kriterinin tam olarak sağlandığı görülür.

4.1.4 Eleman Uç Deplasman Parametresi Sayısı ve Birim Durum Fonksiyonları

Dairesel silindirik sonlu elemanda düğüm noktalarının deplasman bileşenleri sayısı, bilindiği gibi, u,v,w deplasmanları ve β_θ , β_s , β_z dönme bileşenleri olmak üzere 6 dır.

Sabit deformasyon kriterinin sağlanması için, her düğüm noktasında $\tau = \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial s}$

burulma eğriliğinin de 7'inci bir serbestlik derecesi olarak alınması gereklidir. Bu halde elemanda toplam uç deplasman parametresi sayısı 28 e yükselmektedir. Uç deplasmanları için matris formunda :

$$[d] = \begin{bmatrix} [d]_1 \\ [d]_2 \\ [d]_3 \\ [d]_4 \end{bmatrix} \quad [d]_i (i=1,4) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \beta_\theta \\ \beta_s \\ \beta_z \\ \tau \end{bmatrix}_i \quad (4.10)$$

yazılırsa, burada:

$[d]_i (i=1,4)$: düğüm noktalarının uç deplasman parametrelerini,

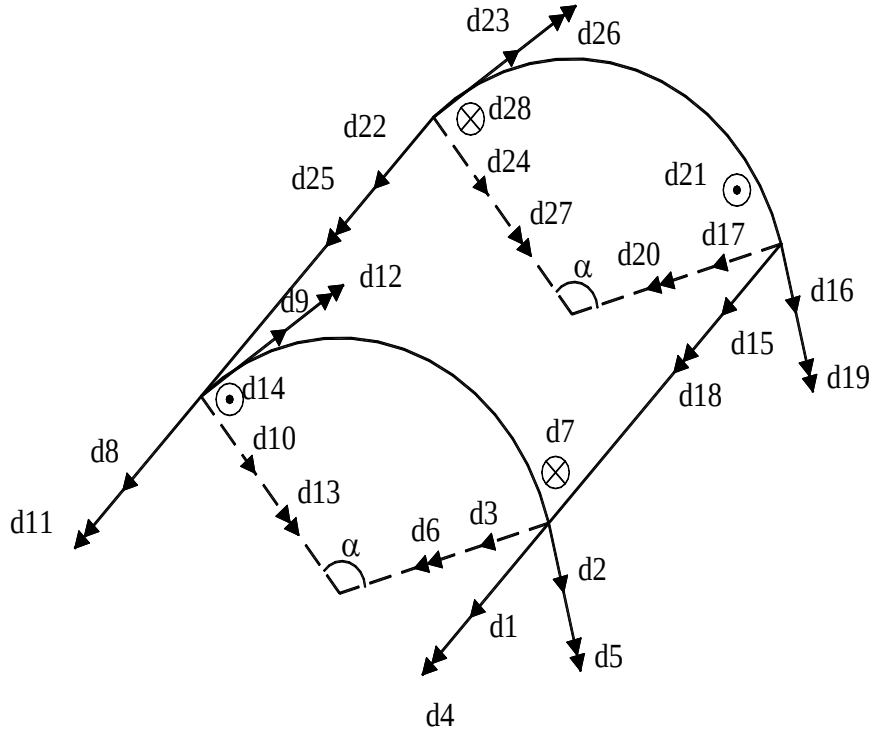
$[d]$: eleman uç deplasman parametrelerini gösteren kolon matrislerdir.

$[A_d]$: herhangi bir kolonu karşı gelen uç deplasman parametresine ait sırasıyla u,v,w fonksiyonlarını gösteren matris ise,

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = [A_d][d] \quad (4.11)$$

yazılabileceği bilinmektedir.

Uç deplasmanlarının sırası ve yönleri Şekil 4.5 de gösterilmiştir.

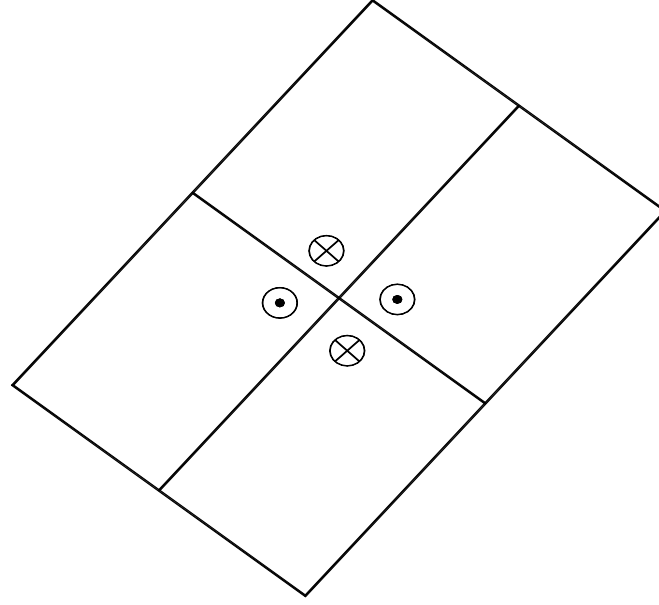


Şekil 4.5 Uç Deplasmanlarının Sırası ve Yönleri

Düğüm noktalarındaki burulma eğriliğine karşı gelen, $d_7, d_{14}, d_{21}, d_{28}$ deplasman parametrelerinin birim değerlerinde, düğüm noktaları ve ayrıtlar boyunca $u=v=w=0$ olmasına karşılık, eleman içinde $w \neq 0$ dır. Bu deplasman parametrelerinin pozitif yönlerinin gösterimi için kullanılan $\otimes$ ve $\bullet$ şekillerinden:

- $\otimes$: eleman içinde w deplasmanlarının artı değerler aldığı, yani çökmelerin o noktada r yarıçapını azaltacak şekilde olduğu,
 - $\bullet$: eleman içinde w deplasmanlarının eksi değerler aldığı, yani çökmelerin o noktada r yarıçapının arttıracak şekilde olduğu,
- anlaşılacaktır.

Bir düğüm noktasında birleşen elemanlarda $\frac{\partial w}{\partial n}$ ayrıta dik dönme bileşenlerinin uygunluğu bakımından, elemanların köşelerindeki seçilmiş pozitif yönlerde Şekil 4.6 deki gibi bir bağıntının bulunması gerektiği görülmektedir.



Şekil 4.6 Ayırta Dik Dönme Bileşenlerinin Pozitif Yönleri

Terimleri 4.1.2 ve 4.1.3 paragraflarında, θ ve x serbest değişkenleri cinsinden ifade edilmiş her iki doğrultudaki yardımcı birim deplasman fonksiyonlarının çarpımlarından oluşan $[A_d]$ matrisi Tablo 4.3 de verilmiştir.

Tablo 4.3 ile [1] de verilen $[A_d]$ matrisi karşılaştırılırsa, bu çalışmada kullanılan birim durumu fonksiyonlarının [1] den farklı olduğu ikinci bir husu olarak d_2 , d_9 , d_{16} , d_{23} uç deplasmanlarının birim değerleri için w çökme fonksiyonlarında kübik yerine lineer ifadelerin kullanıldığı ve buna bağlı olarak d_6 , d_{13} , d_{20} , d_{27} uç deplasmanlarının birim değerlerine karşı gelen ifadelerin yalnızca $u = \psi_i(\theta)rl_i(x)$ olacak şekilde basitleştiği gözlenebilir. Yapılmış bu değişiklik 4.1.6 da açıklanacağı gibi farklı yarıçaplı iki silindirik sonlu elemanın bir silindir ana doğrusu boyunca birleşmesi halinde ayırta dik dönme sürekliliğinin bozulmasını önlenmesine karşılık, iki elemanın bir silindir dairesi boyunca birleşmesi halindeki ayırta dik dönme sürekliliğinin kısmen bozulmasına neden olacaktır.

Birim Deplasman Fonksiyonlarının Çarpım Tablosu:

Tablo 4.3 Birim Deplasman Fonksiyonlarının Çarpımı

u	v	w	
$\varphi_1(\theta)l_1(x)$	0	0	d ₁
0	$\lambda_1(\theta)l_1(x)$	$-\psi_1(\theta)l_1(x)$	d ₂
0	0	$\varphi_1(\theta)f_1(x)$	d ₃
0	$-\mu_1(\theta)rl_1(x)$	$-\psi_1(\theta)rf_1(x)$	d ₄
0	0	$-\varphi_1(\theta)g_1(x)$	d ₅
$\psi_1(\theta)rl_1(x)$	0	0	d ₆
0	0	$-\psi_1(\theta)g_1(x)r$	d ₇
$\varphi_2(\theta)l_1(x)$	0	0	d ₈
0	$\lambda_2(\theta)l_1(x)$	$-\psi_2(\theta)l_1(x)$	d ₉
0	0	$\varphi_2(\theta)f_1(x)$	d ₁₀
0	$-\mu_2(\theta)rl_1(x)$	$-\psi_2(\theta)f_1(x)r$	d ₁₁
0	0	$-\varphi_2(\theta)g_1(x)$	d ₁₂
$\psi_2(\theta)rl_1(x)$	0	0	d ₁₃
0	0	$-\psi_2(\theta)g_1(x)r$	d ₁₄
$\varphi_1(\theta)l_2(x)$	0	0	d ₁₅
0	$\lambda_1(\theta)l_2(x)$	$-\psi_1(\theta)l_2(x)$	d ₁₆
0	0	$\varphi_1(\theta)f_2(x)$	d ₁₇
0	$-\mu_1(\theta)rl_2(x)$	$-\psi_1(\theta)f_2(x)r$	d ₁₈
0	0	$-\varphi_1(\theta)g_2(x)$	d ₁₉
$\psi_1(\theta)rl_2(x)$	0	0	d ₂₀
0	0	$-\psi_1(\theta)g_2(x)r$	d ₂₁
$\varphi_2(\theta)l_2(x)$	0	0	d ₂₂
0	$\lambda_2(\theta)l_2(x)$	$-\psi_2(\theta)l_2(x)$	d ₂₃
0	0	$\varphi_2(\theta)f_2(x)$	d ₂₄
0	$-\mu_2(\theta)rl_2(x)$	$-\psi_2(\theta)f_2(x)r$	d ₂₅
0	0	$-\varphi_2(\theta)g_2(x)$	d ₂₆
$\psi_2(\theta)rl_2(x)$	0	0	d ₂₇
0	0	$-\psi_2(\theta)g_2(x)r$	d ₂₈

$[A_d]^T=$

(4.12)

4.1.5 Rijid Yer Değiştirme Kriterinin İrdelenmesi

Silindirik sonlu elemanın belirli bir rijid yer değiştirmesinde, herhangi bir noktanın deplasman ve dönme bileşenleri Şekil 4.1,b de gösterilen yer değiştirme bileşenleri cinsinden

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \beta_\theta \\ \beta_s \\ \beta_z \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & r\cos\theta & r\sin\theta \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & -r & x\sin\theta & -x\cos\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 & x\cos\theta & x\sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} = [A_R] \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

matris bağıntısı ile verilebilir.

Eleman uç deplasman parametrelerinin rijid yer değiştirmelerindeki değerleri, $[A_R]$ matrisinde serbest değişkenlere düğüm noktalarının koordinatları yazılarak,

$$[d] = [A_R]_d \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

elde edilir.

Bu uç deplasmanları (4.11), bağıntısında kullanılırsa rijid yer değiştirme kriterinin elemanda sağlanması için (4.1) deki

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = [U_R] \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix}$$

matris eşitliği bulunmalıdır. (4.12) denklemi ile verilen $[A_d]$ matrisinin, gerekli

$$[U_R] = [A_d][A_R]_d \quad (4.15)$$

özdeşliğini tam olarak sağladığı, yardımcı fonksiyonların açık ifadeleri yazılıp basitleştirmeler yapılarak kontrol edilmiştir.

Diğer taraftan dönel simetrik deformasyon durumunda silindirik eleman uç deplasman parametreleri arasında:

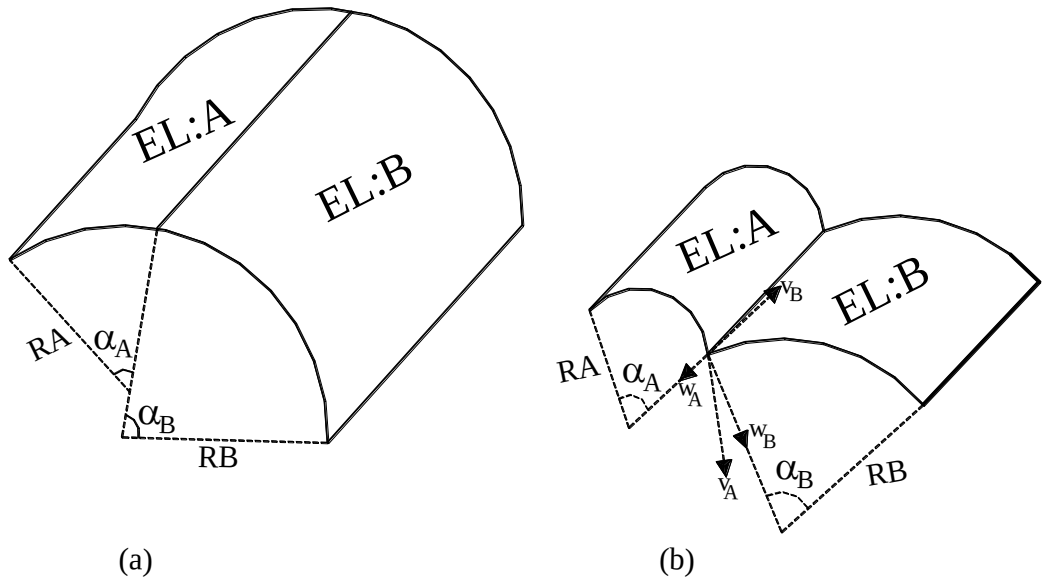
$$\begin{aligned} d_1=d_8=\bar{d}_1 & & d_3=d_{10}=\bar{d}_2 & & d_5=d_{12}=\bar{d}_3 \\ d_{15}=d_{22}=\bar{d}_4 & & d_{17}=d_{24}=\bar{d}_5 & & d_{19}=d_{26}=\bar{d}_6 \end{aligned} \quad (4.16)$$

eşitliklerinin ve diğer uç deplasmanlarının sıfır olması gerektiği görülebilir. $\bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3$ ve $\bar{d}_4, \bar{d}_5, \bar{d}_6$ parametreleri sırasıyla 1-2 ve 3-4 ayrıtının u, w, β_s simetrik birim deplasmanlarına karşı gelmektedir. Buna göre $[A_d]$ matrisi bu özel durumda:

$$[A_d]^T_{sim} = [\varphi_1(\theta) + \varphi_2(\theta)] \begin{matrix} (u) & (v) & (w) \\ \begin{bmatrix} l_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_1(x) \\ 0 & 0 & -g_1(x) \\ l_2(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_2(x) \\ 0 & 0 & -g_2(x) \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \dots \bar{d}_1 \\ \dots \bar{d}_2 \\ \dots \bar{d}_3 \\ \dots \bar{d}_4 \\ \dots \bar{d}_5 \\ \dots \bar{d}_6 \end{matrix} \quad (4.17)$$

şeklinde küçültülebilir. $\varphi_1(\theta) + \varphi_2(\theta) = 1$ özdeşliğinden $[A_d]$ matrisinin dönel simetrik deformasyon halini de verebildiği görülmektedir.

4.1.6 Geometrik Uygunluk Şartlarının İrdelenmesi



Şekil 4.7 Farklı İki Silindirik Elemanın Birleşimi

Bu kısımda doğrusal bir ayırıt boyunca farklı iki silindirin birleşmesi irdelenecektir.

Ayırıt boyunca u , v , w deplasman ve ayırıt dik $\frac{\partial w}{\partial n} = \beta_\theta = -(\frac{\partial w}{r \partial \theta} + \frac{v}{r})$ dönme

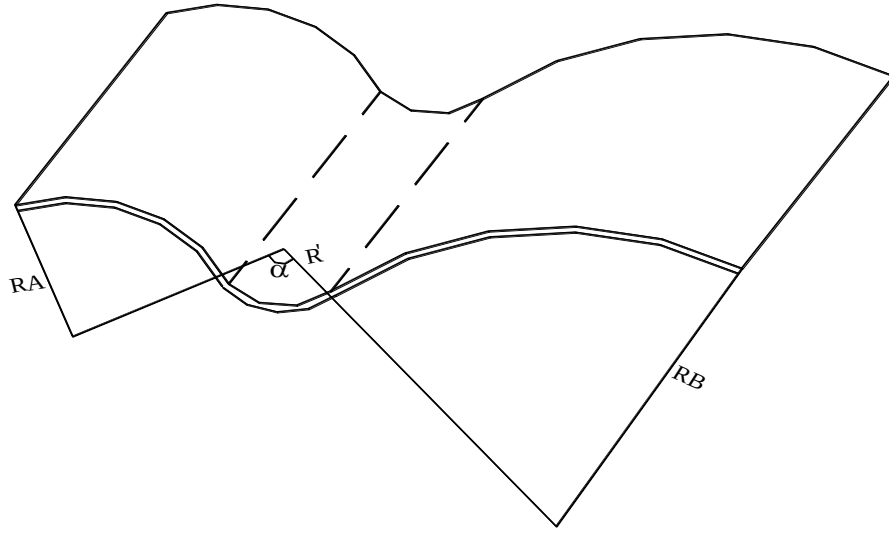
bileşeni seçilen deplasman fonksiyonlarının özelliğinden yalnız bu ayırıtın iki ucundaki düğüm noktalarının deplasman parametrelerinin birim durumlarında sıfırdan farklı olduğundan, örneğin, 1-3 ayırıtı için:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \beta_\theta \end{bmatrix}_{1,3ayırıt} = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_1 & 0 & -g_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_1 & 0 & 0 & g_1 \end{bmatrix} [d]_1 + \begin{bmatrix} l_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_2 & 0 & -g_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_2 & 0 & 0 & g_2 \end{bmatrix} [d]_3 \quad (4.18)$$

yazılabilir.

(4.18) bağıntısında, ayırıt boyunca, u ve v nin lineer, w ve β_θ nin 3. derece polinomları ile değiştiği ve hiçbir terimde eleman r yarıçapına bağımlı olmadığı görülmektedir. Buna göre, Şekil 4.7,a daki gibi, ortak ayırıtta enkesit teğetlerinin çakıştığı bir birleşimde, u , v , w deplasmanlarının yanında, ayırıt dik dönme bileşeninin de sürekli kaldığı anlaşılmaktadır.

Şekil 4.7,b deki gibi uçlarda teğetlerin de çakışmaması halinde, v deplasmanının lineer, w nin 3. derece polinomları ile değişmesi sonucu v , w deplasmanlarının sürekliliği sağlanamaz. Bunu önlemek için uygun bir yol, Şekil 4.8 de görüldüğü gibi, sistemin geometrisini önemli ölçüde değiştirmeden bir ara eleman koymak, olabilir. Diğer taraftan 1-2 ve 3-4 ayırıtları boyunca iki ayrı elemanın birleşmesi halinde d_2 , d_9 , d_{16} , d_{23} uç deplasmanlarının birim değerleri için w fonsiyonlarının anadoğru boyunca lineer seçilmiş olması ayırıt dik dönme β_s sürekliliğini bir miktar bozmaktadır.



Şekil 4.8 Farklı Üç Silindirik Elemanın Birleşimi

4.2 Kesit Tesirleri ve Uç Deplasmanları Arasında Bağlıntılar

Silindirik kabuklarda deformasyonlar ve deplasman bileşenleri arasında

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{s\theta} \\ \chi_s \\ \chi_\theta \\ 2\tau \end{bmatrix} = [\partial] \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{r\partial\theta} & -\frac{1}{r} \\ \frac{\partial}{r\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ 0 & -\frac{\partial}{r^2\partial\theta} & -\frac{\partial^2}{r^2\partial\theta^2} \\ 0 & -\frac{2\partial}{r\partial x} & -\frac{2\partial^2}{r\partial\theta\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

bağıntısı Bölüm: 2.7.1 den bilinmektedir. (4.11) denkleminde

$$[B] = [\partial][Ad] \quad (4.20)$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix} = [B][d] \quad (4.21)$$

yazılabilir.

Burada [B] matrisi elemanları birim deplasman durumlarında yüzey boyunca deformasyonların yayılışını göstermektedir. [B] matrisinin de açık ifadesi,

Tablo 4.4a,b,c,d de verilmiştir. Özel olarak [B] matrisinde serbest değişkenler için ayrı ayrı düğüm noktalarının koordinatları yazılarak:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix}_d = [B_d][d] \quad (4.22)$$

elde edilir.

[B_d], birim deplasman durumlarında düğüm noktalarında meydana gelen deformasyonları veren matristir. Silindirik sonlu elemanın her noktasında kesit tesirleri bileşenleri için:

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ N_{s\theta} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} M \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_s \\ M_\theta \\ M_b \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [N] \\ [M] \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

matris tanımlamaları yapılır ise homojen elastik izotrop malzeme için

$$B = \frac{Eh}{1-\nu^2} \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4.24)$$

olmak üzere, kesit tesirleri matrisi ile deformasyon matrisi arasında bilindiği gibi,

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = [D] \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

bağıntıları verilebilir. Burada [D] elastisite matrisi

$$[D] = \begin{bmatrix} B \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} & [0] \\ [0] & D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

şeklindedir. [D] matrisinin simetrik olduğu yani,

$$[D] = [D]^T$$

eşitliğinin bulunduğu görülmektedir. Özellikle [D] matrisi ile [B_d] matrisi çarpılırsa

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}_d = [D][B_d][d]$$

bağıntısı ile, eleman düğüm noktalarında meydana gelen kesit tesirleri, uç deplasman parametrelerine bağlı olarak kolaylıkla bulunabilir.

Tablo 4.4,a Deformasyon-Deplasman Bileşenleri

$\mathbf{d_1}$	$\mathbf{d_2}$	$\mathbf{d_3}$	$\mathbf{d_4}$	$\mathbf{d_5}$	$\mathbf{d_6}$	$\mathbf{d_7}$
$\varphi_1(\theta)l_1'(x)$	0	0	0	0	$\psi_1(\theta)rl_1'(x)$	0
0	$\frac{\lambda_1^\circ(\theta)l_1(x)}{r}$ $+\frac{\psi_1(\theta)l_1(x)}{r}$	$-\frac{\varphi_1(\theta)f_1(x)}{r}$	$-\mu_1^\circ(\theta)l_1(x)$ $+\psi_1(\theta)f_1(x)$	$\frac{\varphi_1(\theta)g_1(x)}{r}$	0	$\psi_1(\theta)g_1(x)$
$\frac{\varphi_1^\circ(\theta)l_1(x)}{r}$	$\lambda_1(\theta)l_1'(x)$	0	$-\mu_1(\theta)rl_1'(x)$	0	$\psi_1^\circ(\theta)l_1(x)$	0
0	0	$-\varphi_1(\theta)f_1''(x)$	$\psi_1(\theta)rf_1''(x)$	$\varphi_1(\theta)g_1''(x)$	0	$\psi_1(\theta)g_1''(x)r$
0	$-\frac{\lambda_1^\circ(\theta)l_1(x)}{r^2}$ $+\frac{\psi_1^{\circ\circ}(\theta)l_1(x)}{r^2}$	$-\frac{\varphi_1^{\circ\circ}(\theta)f_1(x)}{r^2}$	$\frac{\mu_1^\circ(\theta)l_1(x)}{r}$ $+\frac{\psi_1^{\circ\circ}(\theta)f_1(x)}{r}$	$\frac{\varphi_1^{\circ\circ}(\theta)g_1(x)}{r^2}$	0	$\frac{\psi_1^{\circ\circ}(\theta)g_1(x)}{r}$
0	$-\frac{2\lambda_1(\theta)l_1'(x)}{r}$ $+\frac{2\psi_1^\circ(\theta)l_1'(x)}{r}$	$-\frac{2\varphi_1^\circ(\theta)f_1'(x)}{r}$	$2\mu_1(\theta)l_1'(x)$ $+2\psi_1^\circ(\theta)f_1'(x)$	$\frac{2\varphi_1^\circ(\theta)g_1'(x)}{r}$	0	$2\psi_1^\circ(\theta)g_1'(x)$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{s\theta} \\ \chi_s \\ \chi_\theta \\ 2\tau \end{bmatrix} =$$

Tablo 4.4,b Deformasyon-Deplasman Bileşenleri

d₈	d₉	d₁₀	d₁₁	d₁₂	d₁₃	d₁₄
$\varphi_2(\theta)l_1'(x)$	0	0	0	0	$\psi_2(\theta)rl_1'(x)$	0
0	$\frac{\lambda_2^\circ(\theta)l_1(x)}{r}$ + $\frac{\psi_2(\theta)l_1(x)}{r}$	$-\frac{\varphi_2(\theta)f_1(x)}{r}$	$-\mu_2^\circ(\theta)l_1(x)$ + $\psi_2(\theta)f_1(x)$	$\frac{\varphi_2(\theta)g_1(x)}{r}$	0	$\psi_2(\theta)g_1(x)$
$\frac{\varphi_2^\circ(\theta)l_1(x)}{r}$	$\lambda_2(\theta)l_1'(x)$	0	$-\mu_2(\theta)rl_1'(x)$	0	$\psi_2^\circ(\theta)l_1(x)$	0
0	0	$-\varphi_2(\theta)f_1''(x)$	$\psi_2(\theta)rf_1''(x)$	$\varphi_2(\theta)g_1''(x)$	0	$\psi_2(\theta)g_1''(x)r$
0	$-\frac{\lambda_2^\circ(\theta)l_1(x)}{r^2}$ + $\frac{\psi_2^{\circ\circ}(\theta)l_1(x)}{r^2}$	$-\frac{\varphi_2^{\circ\circ}(\theta)f_1(x)}{r^2}$	$-\frac{\mu_2^\circ(\theta)l_1(x)}{r}$ + $\frac{\psi_2^{\circ\circ}(\theta)f_1(x)}{r}$	$\frac{\varphi_2^{\circ\circ}(\theta)g_1(x)}{r^2}$	0	$\frac{\psi_2^{\circ\circ}(\theta)g_1(x)}{r}$
0	$-\frac{2\lambda_2(\theta)l_1'(x)}{r}$ + $\frac{2\psi_2^\circ(\theta)l_1'(x)}{r}$	$-\frac{2\varphi_2^\circ(\theta)f_1'(x)}{r}$	$2\mu_2(\theta)l_1'(x)$ + $2\psi_2^\circ(\theta)f_1'(x)$	$\frac{2\varphi_2^\circ(\theta)g_1'(x)}{r}$	0	$2\psi_2^\circ(\theta)g_1'(x)$

Tablo 4.4,c Deformasyon-Deplasman Bileşenleri

$\mathbf{d}_{15}$	$\mathbf{d}_{16}$	$\mathbf{d}_{17}$	$\mathbf{d}_{18}$	$\mathbf{d}_{19}$	$\mathbf{d}_{20}$	$\mathbf{d}_{21}$
$\varphi_1(\theta)l_2'(x)$	0	0	0	0	$\psi_1(\theta)rl_2'(x)$	0
0	$\frac{\lambda_1^\circ(\theta)l_2(x)}{r}$ + $\frac{\psi_1(\theta)l_2(x)}{r}$	$-\frac{\varphi_1(\theta)f_2(x)}{r}$	$-\mu_1^\circ(\theta)l_1(x)$ + $\psi_1(\theta)f_2(x)$	$\frac{\varphi_1(\theta)g_2(x)}{r}$	0	$\psi_1(\theta)g_2(x)$
$\frac{\varphi_1^\circ(\theta)l_2(x)}{r}$	$\lambda_1(\theta)l_2'(x)$	0	$-\mu_1(\theta)rl_2'(x)$	0	$\psi_1^\circ(\theta)l_2(x)$	0
0	0	$-\varphi_1(\theta)f_2''(x)$	$\psi_1(\theta)rf_2''(x)$	$\varphi_1(\theta)g_2''(x)$	0	$\psi_1(\theta)g_2''(x)r$
0	$-\frac{\lambda_1^\circ(\theta)l_2(x)}{r^2}$ + $\frac{\psi_1^{\circ\circ}(\theta)l_2(x)}{r^2}$	$-\frac{\varphi_1^{\circ\circ}(\theta)f_2(x)}{r^2}$	$\frac{\mu_1^\circ(\theta)l_2(x)}{r}$ + $\frac{\psi_1^{\circ\circ}(\theta)f_2(x)}{r}$	$\frac{\varphi_1^{\circ\circ}(\theta)g_2(x)}{r^2}$	0	$\frac{\psi_1^{\circ\circ}(\theta)g_2(x)}{r}$
0	$-\frac{2\lambda_1(\theta)l_2'(x)}{r}$ + $\frac{2\psi_1^\circ(\theta)l_2'(x)}{r}$	$-\frac{2\varphi_1^\circ(\theta)f_2'(x)}{r}$	$2\mu_1^\circ(\theta)l_2'(x)$ + $2\psi_1^\circ(\theta)f_2'(x)$	$\frac{2\varphi_1^\circ(\theta)g_2'(x)}{r}$	0	$2\psi_1^\circ(\theta)g_2'(x)$

Tablo 4.4,d Deformasyon-Deplasman Bileşenleri

$\mathbf{d}_{22}$	$\mathbf{d}_{23}$	$\mathbf{d}_{24}$	$\mathbf{d}_{25}$	$\mathbf{d}_{26}$	$\mathbf{d}_{27}$	$\mathbf{d}_{28}$
$\varphi_2(\theta)l_2'(x)$	0	0	0	0	$\psi_2(\theta)rl_2'(x)$	0
0	$\frac{\lambda_2^\circ(\theta)l_2(x)}{r}$ + $\frac{\psi_2(\theta)l_2(x)}{r}$	$-\frac{\varphi_2(\theta)f_2(x)}{r}$	$-\mu_2^\circ(\theta)l_2(x)$ + $\psi_2(\theta)f_2(x)$	$\frac{\varphi_2(\theta)g_2(x)}{r}$	0	$\psi_2(\theta)g_2(x)$
$\frac{\varphi_2^\circ(\theta)l_2(x)}{r}$	$\lambda_2(\theta)l_2'(x)$	0	$-\mu_2(\theta)rl_2'(x)$	0	$\psi_2^\circ(\theta)l_2(x)$	0
0	0	$-\varphi_2(\theta)f_2''(x)$	$\psi_2(\theta)f_2''(x)r$	$\varphi_2(\theta)g_2''(x)$	0	$\psi_2(\theta)g_2''(x)r$
0	$-\frac{\lambda_2^\circ(\theta)l_2(x)}{r^2}$ + $\frac{\psi_2^{\circ\circ}(\theta)l_2(x)}{r^2}$	$-\frac{\varphi_2^{\circ\circ}(\theta)f_2(x)}{r^2}$	$\frac{\mu_2^\circ(\theta)l_2(x)}{r}$ + $\frac{\psi_2^{\circ\circ}(\theta)f_2(x)}{r}$	$\frac{\varphi_2^{\circ\circ}(\theta)g_2(x)}{r^2}$	0	$\frac{\psi_2^{\circ\circ}(\theta)g_2(x)}{r}$
0	$-\frac{2\lambda_2(\theta)l_2'(x)}{r}$ + $\frac{2\psi_2^\circ(\theta)l_2'(x)}{r}$	$-\frac{2\varphi_2^\circ(\theta)f_2'(x)}{r}$	$2\mu_2(\theta)l_2'(x)$ + $2\psi_2^\circ(\theta)f_2'(x)$	$\frac{2\varphi_2^\circ(\theta)g_2'(x)}{r}$	0	$2\psi_2^\circ(\theta)g_2'(x)$

4.3 Eleman Rijidlik Matrisi

Silindirik sonlu elemanda, eleman rijidlik matrisi, satır ve sütun sayısı uç deplasman parametresi sayısı olan 28' e eşit bir kare matristir. Eleman rijidlik matrisinin herhangi bir k_{ij} terimi, j birim durumuna ait iç kuvvetlerin i birim deplasman durumunda yaptığı iş olarak hesaplanabilir. Buna göre

$$k_{ij} = \iint \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix}_i \partial A = \iint \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix}_j^T [D]^T \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix}_i \partial A \quad (4.27)$$

ve (4.19) bağıntısından,

$$k_{ij} = \iint \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_j [\partial]^T [D] [\partial] \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_i \partial A \text{ dır.}$$

veya matris notasyonu ile, eleman rijidlik matrisinin tümü için:

$[K] = \iint [A_d]^T [\partial]^T [D] [\partial] [A_d] \partial A = \iint [B]^T [D] [B] \partial A$ yazılabilir. (4.27) ifadesi, j birim durumuna ait membran kesit tesirleri ile eğilme kesit tesirlerinin yaptığı işler ayrı ayrı düşünülüp,

$$k_{ij} = (k_{ij})_m + (k_{ij})_e \quad (4.29)$$

olarak ikiye ayrılabilir. Burada:

$$(k_{ij})_m = \iint [N]^T_j [\varepsilon]_i \partial A = \iint [\varepsilon]^T_j [D] [\varepsilon]_i \partial A \quad (4.30)$$

$$(k_{ij})_e = \iint [M]^T_j [\chi]_i \partial A = \iint [\chi]^T_j [D] [\chi]_i \partial A$$

şeklindedir. Tüm eleman rijidlik matrisinin de, benzer şekilde

$$[K] = [K_m] + [K_e] \quad (4.31)$$

gibi iki matrisin toplamı şeklinde yazılabileceği açıktır. (4.19) dan yararlanarak, ve

$$\frac{\partial}{\partial x} (-) = (-)' ; \quad \frac{\partial}{\partial \theta} (-) = (-)^\circ \quad (4.32)$$

notasyonu ile, (4.30) denklemleri açık olarak yazılırsa:

$$(k_{ij})_m = \iint B \left\{ u_i' u_j' + \frac{1}{r} (v^\circ - w)_i \frac{1}{r} (v^\circ - w)_j + v \left[u_i' \frac{1}{r} (v^\circ - w)_j + u_j' \frac{1}{r} (v^\circ - w)_i \right] \right. \\ \left. + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{u^\circ}{r} + v' \right)_i \left(\frac{u^\circ}{r} + v' \right)_j \right\} r \partial_\theta \partial_x \quad (4.33)$$

$$(k_{ij})_e = \iint D \left\{ w_i'' w_j'' + \frac{1}{r^2} (w^\circ + v^\circ)_i \frac{1}{r^2} (w^\circ + v^\circ)_j + v \left[w_i'' \frac{1}{r^2} (w^\circ + v^\circ)_j \right. \right. \\ \left. \left. + w_j'' \frac{1}{r^2} (w^\circ + v^\circ)_i \right] + 2(1-\nu) \frac{1}{r} (w^\circ + v')_j \right\} r \partial_\theta \partial_x$$

bağıntıları elde edilir.

4.3.1 Sabit Kesitli Elemanda Rijitlik Matrisi

Eleman kesitinin sabit olması halinde elastisite matrisine ait parametreler integral ifadesinin dışına çıkar. Birim durumlardaki deplasman bileşenlerinin $[A_d]$ matrisinden bilinen ifadeleri x ve θ değişkenleri cinsinden rijidlik matrisinin bütün terimleri (4.33) denklemleri yardımıyla bulunabilir. Her uç deplasman parametresi için eleman deplasman yüzeyini belirleyen birim deplasman fonksiyonları (4.12) denkleminde $[A_d]$ matrisinin bir kolonu olarak bilinmektedir. Rijidlik matrisinin herhangi bir k_{ij} elemanının bulunması için i ve j birim deplasman fonksiyonlarının $[A_d]$ matrisinden alınıp (4.33) denklemlerine konması ve denklemlerdeki integral terimlerinin hesaplanması gerekmektedir.

Elemanda $[d]$ uç deplasman parametreleri, ve $[P]$ uç kuvvetleri kolon matrislerinin

$$[d] = \begin{bmatrix} [d]_1 \\ [d]_2 \\ [d]_3 \\ [d]_4 \end{bmatrix} \quad [P] = \begin{bmatrix} [P]_1 \\ [P]_2 \\ [P]_3 \\ [P]_4 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

şeklinde düğüm noktaları deplasman parametreleri ve uç kuvvetleri matrislerinin alt alta yazılmasından oluştuğu düşünülürse,

$$[P] = [K][d]$$

bağıntısında rijidlik matrisinin,

$$[K] = \begin{bmatrix} [K]_{11} & [K]_{12} & [K]_{13} & [K]_{14} \\ [K]_{21} & [K]_{22} & [K]_{23} & [K]_{24} \\ [K]_{31} & [K]_{32} & [K]_{33} & [K]_{34} \\ [K]_{41} & [K]_{42} & [K]_{43} & [K]_{44} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

gibi, (7x7) lik kare alt matrislere ayrılması uygun olacaktır. Burada genel bir $[K]_{ij}$ alt matrisinin j düğüm noktasının uç deplasmanları

$$[d]_j = [I]$$

ve diğer düğüm noktalarında uç deplasmanları sıfır iken, i ucunda meydana gelen $[P]_i$ uç kuvvetlerini verdiği görülebilir. Betti karşılıklı teoremi uyarınca eleman rijidlik matrisi simetrik olduğundan,

$$[K]_{ij}^T = [K]_{ji} \quad [K]_{ii}^T = [K]_{ii} \quad (4.39)$$

eşitlikleri yazılabilir. Buna göre, rijidlik matrisinin yalnız esas köşegeni üstünde kalan alt matrislerin verilmesi yeterlidir.

Ayrıca silindirik sonlu eleman geometrisinin ($\theta = 0$) ve ($x = 0$) düzlemlerine göre simetrik olması, alt matrisler arasında ilave bağıntılar verir. Birbirine göre simetrik iki şekil değiştirme durumuna karşı gelen uç kuvvetlerinin de simetrik olması gerektiği şartına dayanarak, sırasıyla ($\theta = 0$) düzlemine göre simetri şartından:

$$\begin{aligned} [K]_{22} &= [T_{s\theta}] [K]_{11} [T_{s\theta}] \\ [K]_{24} &= [T_{s\theta}] [K]_{13} [T_{s\theta}] \\ [K]_{23} &= [T_{s\theta}] [K]_{14} [T_{s\theta}] \\ [K]_{44} &= [T_{s\theta}] [K]_{33} [T_{s\theta}] \end{aligned} \quad (4.40)$$

ve ($x = 0$) düzlemine göre simetri şartından:

$$\begin{aligned} [K]_{33} &= [T_{sx}] [K]_{14} [T_{sx}] \\ [K]_{32} &= [T_{sx}] [K]_{14} [T_{sx}] \\ [K]_{34} &= [T_{sx}] [K]_{12} [T_{sx}] \\ [K]_{44} &= [T_{sx}] [K]_{22} [T_{sx}] \end{aligned} \quad (4.41)$$

bağıntıları elde edilir. Bu bağıntılardaki $[T_{s\theta}]$ ve $[T_{sx}]$ dönüştürme matrisleri, Şekil 4.5 de gösterilen düğüm noktaları uç deplasman parametreleri pozitif yönlerinin karşılaştırılmasından:

$$[T_{s\theta}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

$$[T_{sx}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

olarak bulunur.

(4.40) ve (4.41) de gösterilen 8 bağıntıdan yalnız 6 sı lineer bağımsızdır. Buna göre, (4.39) daki eleman rijidlik matrisinin esas köşegeni üzerinde kalan 10 alt matristen, örneğin, $[K]_{11}$ $[K]_{12}$ $[K]_{13}$ $[K]_{14}$ gibi, yalnız 4 ünün bulunması yeterli olacaktır. Diğerleri (4.39, 40, 41) eşitlikleri yardımıyla kolaylıkla türetilebilir.

4.3.2 Değişken Kesitli Elemanda Rijitlik Matrisi

Şekil 4.1 de gösterilen elemanda kalınlığın düğüm noktaları arasında lineer değiştiği kabul edilerek, Tablo 4.1 de gösterilen $l_1(x)$ ve $l_2(x)$ fonksiyonlarından yararlanarak kalınlık ifadesi(4.44) aşağıdaki gibi elde edilir.

$$h = h_D = h_1.l_1(x).l_1(\theta) + h_2.l_1(x).l_2(\theta) + h_3.l_2(x).l_1(\theta) + h_4.l_2(x).l_2(\theta) \quad (4.44)$$

h_1 , h_2 , h_3 ve h_4 sırasıyla 1 , 2 , 3 ve 4 nolu düğüm noktalarındaki kalınlıkları göstermektedirler.

x : ana doğrultudaki değişken

θ : açısız doğrultudaki değişken

Eleman kesitinin değişken olması halinde, (4.44) kesit kalınlığı fonksiyonu da (4.33) integral ifadelerinde gözönüne alınmalıdır. Kalınlığın genel bir değişimi halinde(4.40) ve (4.41) simetri bağıntıları ortadan kalkacağından eleman rijitlik matrisinin esas köşegen üstünde veya altında kalan bütün terimlerinin ayrı ayrı

hesabı gereklidir. Bu durumda rijidlik matrisi terimleri sayısal integrasyon yöntemiyle elde edilecektir. Sabit kesit, değişken kesitin özel hali olarak bulunacaktır.

Sonlu elemanlar matrislerinin sayısal hesabında en çok uygulanan ve en uygun yöntem Gauss integral noktalarından yararlanarak integrasyonunun yapılmasıdır. [10] . Bu yöntemle herhangi bir değişken doğrultusunda integral alınırken koordinatları belirli sonlu sayıda noktada integral içinde kalan fonksiyonun değeri hesaplanmakta ve bunlar belirli ağırlık katsayıları ile çarpılıp toplanmaktadır. Bu yöntem, örneğin N adet nokta gözönüne alınmışsa integral içindeki değişimin 2N-1 inci dereceden bir polinom geçirerek ifade edilmesi ve bu polinomun integralinin alınmasına karşı gelmektedir. Eşdeğer bir hassasiyet mertebesinin diğer sayısal yöntemlere oranla integral noktası adedini yarı yarıya azaltarak elde edilebilmesi bu yöntemin üstünlüğünü sağlamaktadır.

Tek değişkene bağlı bir fonksiyonun -1 ile +1 sınırları arasında integralinin alınması için integral noktalarının yer ve katsayılarını gösteren Tablo 4.5, [10] dan alınmıştır.

k_{ij} terimlerinin eleman yüzeyi boyunca, bu yöntemle integre edilmesi için θ değişkeni boyunca N, x değişkeni boyunca M integral noktası alındığını kabul edelim.

Bu taktirde (4.33) ifadesi:

$$\begin{aligned} (k_{ij})_m = & \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M H_n \cdot H_m \cdot \frac{r \cdot a \cdot \alpha}{4} \cdot B(h_D) \left\{ u'_i(\theta_n, x_m) \cdot u'_j(\theta_n, x_m) + \frac{1}{r} (v^\circ(\theta_n, x_m) - w(\theta_n, x_m))_i \cdot \right. \\ & \frac{1}{r} (v^\circ(\theta_n, x_m) - w(\theta_n, x_m))_j + v \left[u'_i(\theta_n, x_m) \frac{1}{r} (v^\circ(\theta_n, x_m) - w(\theta_n, x_m))_j \right. \\ & \left. \left. + u'_j \frac{1}{r} (v^\circ(\theta_n, x_m) - w(\theta_n, x_m))_i \right] + \frac{1-v}{2} \left(\frac{u^\circ(\theta_n, x_m)}{r} + v'(\theta_n, x_m) \right)_i \cdot \right. \\ & \left. \left(\frac{u^\circ(\theta_n, x_m)}{r} + v'(\theta_n, x_m) \right)_j \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(k_{ij})_e = & \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M H_n \cdot H_m \cdot \frac{r \cdot a \cdot \alpha}{4} \cdot D(h_D) \left\{ w_i''(\theta_n, x_m) \cdot w_j''(\theta_n, x_m) + \frac{1}{r^2} (w^{\circ\circ}(\theta_n, x_m) + v^{\circ}(\theta_n, x_m))_i \cdot \right. \\
& \frac{1}{r^2} (w^{\circ\circ}(\theta_n, x_m) + v^{\circ}(\theta_n, x_m))_j + v \left[w_i''(\theta_n, x_m) \frac{1}{r^2} (w^{\circ\circ}(\theta_n, x_m) + v^{\circ}(\theta_n, x_m))_j \right. \\
& \left. \left. + w_j''(\theta_n, x_m) \frac{1}{r^2} (w^{\circ\circ}(\theta_n, x_m) + v^{\circ}(\theta_n, x_m))_i \right] + 2(1-v) \frac{1}{r} (w^{\circ}(\theta_n, x_m) + v'(\theta_n, x_m))_i \cdot \right. \\
& \left. \frac{1}{r} (w^{\circ}(\theta_n, x_m) + v'(\theta_n, x_m))_j \right\}
\end{aligned}$$

şekline girer, ve toplam N x M nokta için hesap gerekir. Bu ifadede boyutlu değişkenlere:

$$\theta_n = \frac{\alpha}{2} \cdot \xi_n, \quad x_m = \frac{a}{2} \cdot \xi_m$$

dönüşümü ile geçiş yapılarak deformasyon bileşenlerinin hesaplanmasının gerektiğine ve integral sınırlarının -1 den +1 e değilde eleman boyutlarına bağlı olduğu gözönüne alınarak $a \cdot \alpha / 4$ çarpanının bulunduğuna dikkat edilmelidir.

Tablo 4.5 Sayısal İntegrasyon Değerleri

$\int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^N H_i \cdot f(\xi_i)$		
N	$\xi_i (i = 1, N)$	$H_i (i = 1, N)$
2	0,57735027	1
3	0,77459667 0	0,55555556 0,88888889
4	0,86113631 0,33998104	0,34785485 0,65214515
5	0,90617985 0,53846931 0	0,23692689 0,47862867 0,56888889
6	0,93246951 0,66120939 0,23861919	0,17132449 0,36076157 0,46791393

[K] matrisi terimlerinin kesine yakın integralinin alınması için gerekli nokta sayısı yukarıda belirtilen açıklamalara dayanarak saptanabilir. Bilindiği gibi her üç u , v , w deplasman bileşeni de x , y doğrultularında 3°. polinomu olarak değiştiği kabul edilebilir. Kesit kalınlığı fonksiyonu da 1°. polinomu olarak değişmektedir. Bunların çarpımı 7°. polinomu olacaktır. Her iki doğrultuda hesaplarda $N = M = 4$ alınması yeterlidir.

4.4 Yükleme Matrisi

Dairesel silindirik sonlu elemanda, eleman yükleme matrisi,

$$[P]_0 = \begin{bmatrix} [P]_{1,0} \\ [P]_{2,0} \\ [P]_{3,0} \\ [P]_{4,0} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

düğüm noktaları yükleme matrislerinin alt alta yazılmasından oluşan 28 terimli bir kolon matristir. Herhangi bir $P_{i,0}$ terimi, i inci uç deplasman parametresinin birim durumunda dış yüklerin yaptığı işe eşittir. Birim durumlarda deplasman yüzeyini belirleyen fonksiyonlar, (4.12) ifadesinde $[A_d]$ matrisinin bir kolonu olarak bilinmektedir.

Eleman yüzeyinde yayılı dış yüklerin, Şekil 4.1,a da gösterilen silindirik koordinatlara izdüşürülmüş bileşenleri,

$$q_u, q_v, q_w$$

ile gösterilirse, yükleme matrisinin herhangi bir $P_{i,0}$ terimi için,

$$P_{i,0} = \iint [u_i v_i w_i] \begin{bmatrix} q_u \\ q_v \\ q_w \end{bmatrix} r dx d\theta \quad (4.46)$$

ifadesi yazılabilir. Bu bağıntı yükleme matrisinin bütünü için,

$$[P]_0 = \iint [A_d]^T \begin{bmatrix} q_u \\ q_v \\ q_w \end{bmatrix} r dx d\theta \quad (4.47)$$

matris denklemi şekline girer.

Genel bir dış yükleme durumuna ait yükleme matrisinin bütün terimleri (4.46) bağıntısı yardımıyla kolaylıkla bulunabilir. Özellikle çizgisel yükleme halinde bu denklemin tek katlı bir integrale dönüşeceği, tekil yük halinde ise kuvvetin etkidiği noktada kendi doğrultusundaki deplasman bileşeni ile çarpımından ibaret olacağı açıktır.

Burada uygulamada sık rastlanan bazı yayılı yüklere ait yükleme matrisleri tayin edilmiştir. Bu yükleme terimlerinin hesabında karşılaşılan her iki doğrultudaki integral ifadelerinin sonuçları ve bunlar için kullanılan notasyon (4.48) bağıntılarında toplu halde verilmiştir.

$$\begin{aligned}
Q_1^{\psi} &= \int \psi_1 \cdot 1 \cdot d\theta = - \int \psi_2 \cdot 1 \cdot d\theta = \frac{\alpha}{2} \frac{(1 + \cos \alpha)}{\sin \alpha} - 1 \\
Q_2^{\psi} &= \int \psi_1 \cdot \cos \theta \cdot d\theta = - \int \psi_2 \cdot \cos \theta \cdot d\theta = - \frac{1}{4 \sin \frac{\alpha}{2}} (\alpha - \sin \alpha) \\
Q_3^{\psi} &= \int \psi_1 \cdot \sin \theta \cdot d\theta = \frac{4(1 - \cos \alpha) - \alpha(\alpha + \sin \alpha)}{8(\sin \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2})} \\
Q_1^{\varphi} &= \int \varphi_1 \cdot 1 \cdot d\theta = \int \varphi_2 \cdot 1 \cdot d\theta = + \frac{\alpha}{2} \\
Q_2^{\varphi} &= \int \varphi_1 \cdot \cos \theta \cdot d\theta = \int \varphi_2 \cdot \cos \theta \cdot d\theta = \sin \frac{\alpha}{2} \\
Q_3^{\varphi} &= \int \varphi_1 \cdot \sin \theta \cdot d\theta = - \int \varphi_2 \cdot \sin \theta \cdot d\theta = \frac{\alpha(2 + \cos \alpha) - 3 \sin \alpha}{4(\sin \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2})} \\
Q_2^{\lambda} &= \int \lambda_1 \cos \theta \cdot d\theta = \int \lambda_2 \cos \theta \cdot d\theta = \frac{\alpha + \sin \alpha}{4 \cos \frac{\alpha}{2}} \\
Q_3^{\mu} &= \int \mu_1 \sin \theta \cdot d\theta = - \int \mu_2 \sin \theta \cdot d\theta = \frac{1}{4 \sin \frac{\alpha}{2}} \left[\frac{4(1 - \cos \alpha)}{\alpha} - (\alpha + \sin \alpha) \right]
\end{aligned} \tag{4.48}$$

1- Düzgün yayılı radyal yük, $q_w = q_w^0 = \text{sabit}$

$$[P]_{1,0} = q_w^0 \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{ar}{2} Q_1^\psi \\ \frac{ar}{2} Q_1^\phi \\ -\frac{ar^2}{2} Q_1^\psi \\ -\frac{a^2 r}{12} Q_1^\phi \\ 0 \\ -\frac{a^2 r^2}{12} Q_1^\psi \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} [P]_{2,0} &= [T_{s\theta}] [P]_{1,0} \\ [P]_{3,0} &= [T_{sx}] [P]_{1,0} \\ [P]_{4,0} &= [T_{s\theta}] [P]_{3,0} \end{aligned} \quad (4.49)$$

2- Silindirin ana doğrusu boyunca lineer değişen radyal yük: $q_w = q_w^1 x$

$$[P]_{1,0} = q_w^1 \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{a^2 r}{10} Q_1^\psi \\ \frac{a^2 r}{10} Q_1^\phi \\ -\frac{a^2 r^2}{10} Q_1^\psi \\ -\frac{a^3 r}{120} Q_1^\phi \\ 0 \\ -\frac{a^3 r^2}{120} Q_1^\psi \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} [P]_{2,0} &= +[T_{s\theta}] [P]_{1,0} \\ [P]_{3,0} &= -[T_{sx}] [P]_{1,0} \\ [P]_{4,0} &= +[T_{s\theta}] [P]_{3,0} \end{aligned} \quad (4.50)$$

3- $q_w = q_w^{0C} \cos\theta$ yüklemesi

$$[P]_{1,0} = q_w^{0C} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{ar}{2} Q_2^\psi \\ \frac{ar}{2} Q_2^\phi \\ -\frac{ar^2}{2} Q_2^\psi \\ -\frac{a^2 r}{12} Q_2^\phi \\ 0 \\ -\frac{a^2 r^2}{12} Q_2^\psi \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} [P]_{2,0} &= [T_{s\theta}] [P]_{1,0} \\ [P]_{3,0} &= [T_{sx}] [P]_{1,0} \\ [P]_{4,0} &= [T_{s\theta}] [P]_{3,0} \end{aligned} \quad (4.51)$$

4- $q_w = q_w^{0S} \sin\theta$ yüklemesi

$$[P]_{1,0} = q_w^{0S} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{ar}{2} Q_3^\psi \\ \frac{ar}{2} Q_3^\phi \\ -\frac{ar^2}{2} Q_3^\psi \\ -\frac{a^2 r}{12} Q_3^\phi \\ 0 \\ -\frac{a^2 r^2}{12} Q_3^\psi \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} [P]_{2,0} &= -[T_{s\theta}] [P]_{1,0} \\ [P]_{3,0} &= +[T_{sx}] [P]_{1,0} \\ [P]_{4,0} &= -[T_{s\theta}] [P]_{3,0} \end{aligned} \quad (4.52)$$

5- $q_v = q_v^{0C} \cos\theta$ yüklemesi

$$[P]_{1,0} = q_v^{0C} \begin{bmatrix} 0 \\ +\frac{ar}{2} Q_2^\lambda \\ -\frac{ar^2}{2} Q_2^\psi \tan \frac{\alpha}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} [P]_{2,0} &= -[T_{s\theta}] [P]_{1,0} \\ [P]_{3,0} &= +[T_{sx}] [P]_{1,0} \\ [P]_{4,0} &= -[T_{s\theta}] [P]_{3,0} \end{aligned} \quad (4.53)$$

6- $q_v = q_v^{0S} \sin\theta$ yüklemesi

$$[P]_{1,0} = q_v^{0S} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{ar}{2} Q_2^\psi \\ 0 \\ -\frac{ar^2}{2} Q_3^\mu \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} [P]_{2,0} &= [T_{s\theta}] [P]_{1,0} \\ [P]_{3,0} &= [T_{sx}] [P]_{1,0} \\ [P]_{4,0} &= [T_{s\theta}] [P]_{3,0} \end{aligned} \quad (4.54)$$

Yükleme matrislerindeki Q_i^ϕ , Q_i^ψ kısaltmalarının açık ifadeleri (4.48) bağıntılarında verilmiştir. Uç kuvvetlerinin yönleri ile ilgili $[T_{s\theta}]$ ve $[T_{sx}]$ dönüştürme matrisleri ise (4.42,43) den bilinmektedir.

Burada verilmiş 6 sabit yükleme halinin lineer kombinezonları yardımı ile, çeşitli yük yayılışlarına ait eleman yükleme matrisleri elde edilebilir. Örneğin: (1) ve (2) durumlarını uygun şekilde toplayarak, düşey eksenli silindirik bir su haznesine etkileyen sıvı basıncına karşı gelen yükleme matrisi bulunabilir. Veya, örneğin rüzgar etkisi altındaki bir silindirik kabuk üzerinde alınan bir sonlu elemana ait yükleme matrisi hesaplanabilir. Gerçekten açısal doğrultuda değişimi α merkez açısı boyunca ardışık üç noktadaki ordinatları ile belirli, genel bir radyal yüklemenin (1), (3), (4) durumlarının kombinezonları ile iyi bir yaklaşıklıkla ifade edilebileceği görülebilir. Diğer taraftan, Şekil 4.9 daki kendi ağırlığı etkisi altında bir silindirik tonoz üzerinde alınan ve simetri eksenini düşey ile λ açısı yapan bir silindirik sonlu elemanda yük fonksiyonu:

$$\begin{aligned} g_w &= g_0 \cdot \cos(\lambda + \theta) \\ g_v &= g_0 \cdot \sin(\lambda + \theta) \quad \text{dır.} \end{aligned}$$

Bu ifadeler açılarak,

$$\begin{aligned} g_w &= g_0 \cos \lambda \cos \theta - g_0 \sin \lambda \sin \theta \\ g_v &= g_0 \cos \lambda \sin \theta + g_0 \sin \lambda \cos \theta \end{aligned}$$

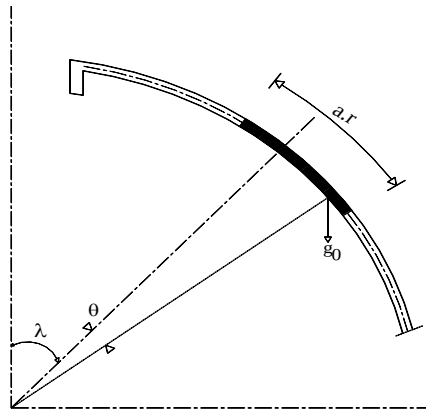
veya

$$g_1 = g_0 \cos \lambda, \quad g_2 = g_0 \sin \lambda \quad (4.55)$$

kısaltmaları yapılırsa,

$$\begin{aligned} g_w &= g_1 \cos \theta - g_2 \sin \theta \\ g_v &= g_1 \sin \theta + g_2 \cos \theta \end{aligned} \quad (4.56)$$

elde edilir. Buradan (3), (4), (5), (6) durumlarının kombinezonu ile eleman yükleme matrislerinin bulunabileceği görülmektedir.



Şekil 4.9 Silindirik Tonoz

Programlama açısından (4.49,.....,4.54) için verilen formülleri kullanmak yerine rijidlik matrisinin hesabı için düzenlenmiş döngü içinde Gauss integrasyon noktalarındaki yerdeğiştirme fonksiyonlarının ordinatları ve nokta ağırlık katsayıları esasen hesaplanmış olduğundan bu noktalardaki yük şiddetini öngörülen yük değişimi tipi fonksiyonlarından hesaplayıp

$$P_{i,0} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M H_n \cdot H_m \cdot \frac{ar\alpha}{4} \{q_u(\theta_n, x_m) \cdot u_i(\theta_n, x_m) + q_v(\theta_n, x_m) \cdot v_i(\theta_n, x_m) + q_w(\theta_n, x_m) \cdot w_i(\theta_n, x_m)\}$$

formülü uygulanarak yükleme matrisi terimlerinin sayısal integrasyon yoluyla bulunması da mümkün olup tercih edilebilir.

4.5 Sıcaklık Değişmesi Matrisi

Silindirik bir kabuk elemanında, bilindiği gibi, mesnet şartlarına bağlı olarak, hem (t) üniform sıcaklık değişmesi, hem (Δt) farklı sıcaklık değişmesi halinde kesit tesirleri oluşacaktır. Silindirik kabuğun iç yüzünde sıcaklık değişimi t_1 , dış yüzünde sıcaklık değişmesi t_2 olduğuna göre, malzeme genleşme katsayısı ε olmak üzere, $\left(t = \frac{t_1 + t_2}{2}\right)$, ($\Delta t = t_1 - t_2$) den meydana gelen deformasyon ve eğrilik değişimleri,

matris formunda:

$$[\varepsilon]_T = \begin{bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{s\theta} \end{bmatrix} = \varepsilon t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [\chi]_T = \begin{bmatrix} \chi_s \\ \chi_\theta \\ 2\tau \end{bmatrix} = \frac{\varepsilon \Delta t}{h} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} [\varepsilon]_T \\ [\chi]_T \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

şeklindedir.

Eleman düğüm noktalarının deplasman parametreleri sıfır iken, sıcaklık değişmesinden oluşan düğüm noktaları uç kuvvetleri $[P]_{i,T}$ ve eleman uç kuvvetleri matrisi $[P]_T$ ise,

$$[P]_T = \begin{bmatrix} P_{1,T} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_{28,T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [P]_{1,T} \\ [P]_{2,T} \\ [P]_{3,T} \\ [P]_{4,T} \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

bağıntısı yazılabilir. $[P]_T$ kolon matrisinin herhangi bir elemanı, kendisine karşı gelen birim deplasman durumuna ait iç kuvvetlerin sıcaklık değişmesinden meydana gelen deformasyonlarda yaptığı işe eşittir.

Buna göre

$$P_{i,T} = \iint \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix}_i^T [D] \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix}_T r \partial \theta \partial x \quad (4.59)$$

ve (4.19) denkleminde:

$$P_{i,T} = \iint [u_i \quad v_i \quad w_i] \partial^T [D] \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix}_T r \partial \theta \partial x \quad (4.60)$$

ve, i durumunda deplasman bileşenleri fonksiyonları (4.12) denklemiyle verilen $[A_d]^T$ matrisinin bir satırı olduğundan,

$$[P]_T = \iint [A_d]^T [\partial]^T [D] \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix}_T r \partial \theta \partial x \quad (4.61)$$

yazılabilir. Bu denklemlerde $[D]$ elastisite matrisi (4.26) ile belirlidir. (4.59) denklemi açık yazılır ve, (4.57) ifadeleri yerine konarak basitleştirmeler yapılır ise,

$$B = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

olmak üzere:

$$P_{i,T} = \varepsilon(1+\nu) \iint B.t \left[u_i' + \frac{1}{r} (v_i^\circ - w_i) \right] r \partial \theta \partial x \\ - \varepsilon \frac{(1+\nu)}{h} \iint D.\Delta t \left[w_i'' + \frac{1}{r^2} (w_i^{\circ\circ} + v_i^\circ) \right] r \partial_\theta \partial_x \quad (4.62)$$

bulunur.

Kalınlığın değişken olması durumunda, rijitlik matrisinin hesabı için düzenlenmiş döngü içinde Gauss integrasyon noktalarındaki şekildeğiştirme fonksiyonlarının ordinatları ve nokta ağırlık katsayıları esasen hesaplanmış olduğundan bu noktalardaki yük şiddetini öngörülen yük değişim tipi fonksiyonlarından hesaplayıp,

$$P_{i,T} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \frac{E\varepsilon.t.h_i(\theta_n, x_m)}{(1-\nu)} . H_n . H_m . \frac{ar\alpha}{4} \left[u_i'(\theta_n, x_m) + \frac{1}{r} (v_i'(\theta_n, x_m) - w_i(\theta_n, x_m)) \right] \\ - \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \frac{E\varepsilon.\Delta t.h_i^2(\theta_n, x_m)}{12(1-\nu)} . H_n . H_m . \frac{ar\alpha}{4} \left[w_i''(\theta_n, x_m) + \frac{1}{r^2} (w_i^{\circ\circ}(\theta_n, x_m) + v_i^{\circ}(\theta_n, x_m)) \right]$$

formülü uygulanarak yükleme matrisi terimleri sayısal integrasyon yoluyla hesaplanmış olur.

Burada (') ve (°) indisleri bilindiği gibi sırasıyla (x) ve (θ) değişkenlerine göre kısmi türevleri göstermektedir.

BÖLÜM 5. SAYISAL ÖRNEKLER

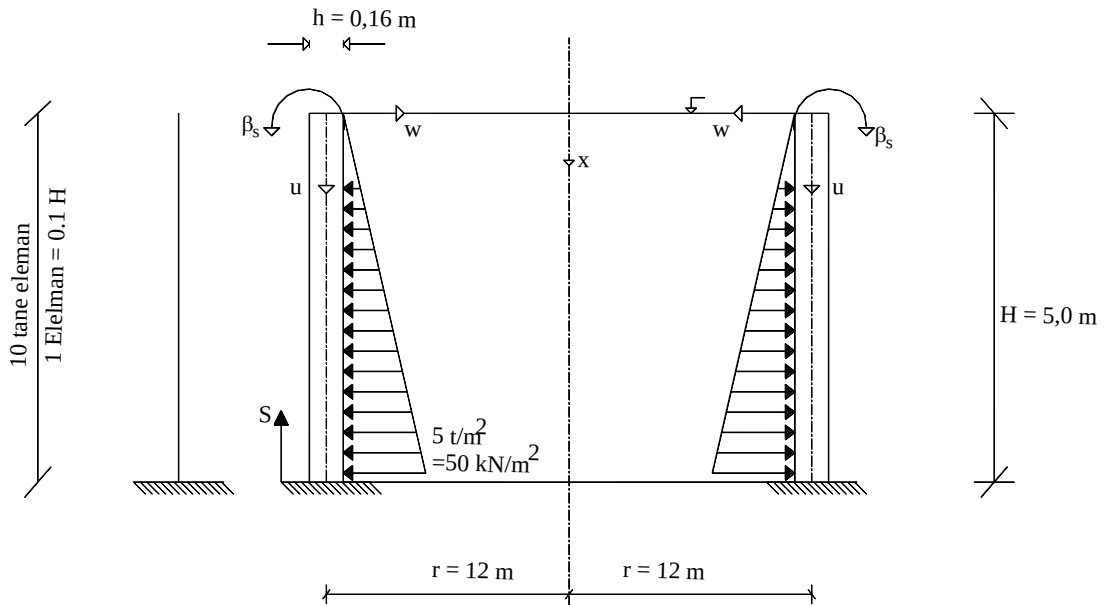
5.1-ÖRNEK: 1

Şekil 5.1 de görülen ankastre tabanlı, sabit kesitli silindirik su deposu 3 ayrı yükleme durumu için hesaplanacaktır. Elde edilen sonuçların [17] de verilen, başlangıç değerleri metoduna dayanan çözümlerle karşılaştırılmasından, sonuçların yakınsaklığı hakkında fikir edinilebilir. [17] den alınan değerler diyagramlarda parantez içinde gösterilecektir. Bu çalışmada geliştirilen elemanın, dönele simetrik ve sabit kesitli halinde [1] deki elemana özdeş hale geleceği açıktır.

Yükleme durumu: 1-Su basıncı $\gamma = 1 \text{ t/m}^3 = 10 \text{ kN/m}^3$, $q_w = -1 \times q_u = q_v = 0$

Yükleme durumu: 2-Sabit sıcaklık değişimi: $t_0 = +20^\circ$

Yükleme durumu: 3-Farklı sıcaklık değişimi $\Delta t = t_{i\text{ç}} - t_{dış} = +30^\circ$



Şekil 5.1 Sabit Kesitli Silindirik Su Deposu

Malzeme özellikleri : $E = 2,1 \times 10^6 \text{ t/m}^2 = 2,1 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ $\nu = 1/6 = 0,16667$

$\epsilon = 1,2 \times 10^{-5}$ (ısı. gen. kats.) olarak alınmıştır.

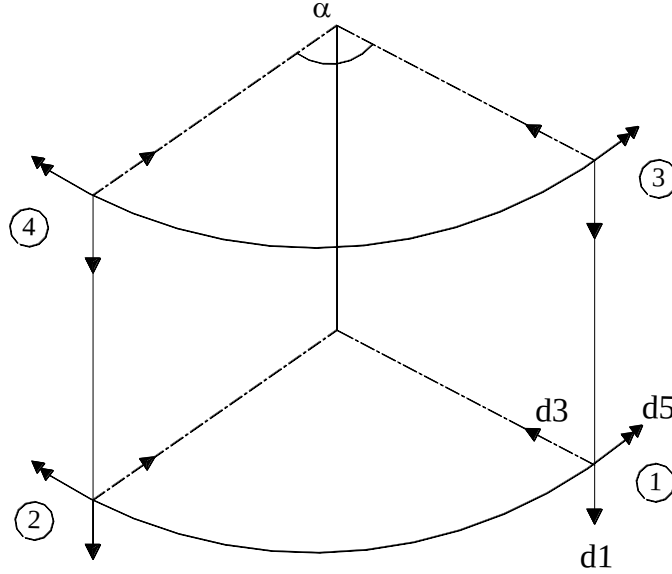
Bu yüklemeler altında sistem dönel simetrik deformasyon yaptığından kabuk yüzeyinden alınan bir silindirik sonlu eleman bandı için hesap yapılması yeterli olabilir. Dönel simetri nedeniyle Şekil 5.2 de görüldüğü gibi her düğüm noktasında

$$u_i = d_{1,i}$$

$$w_i = d_{3,i} \text{ bilinmeyenleri sıfırdan farklı olacak, diğer 4 bilinmeyenin sıfırlanması}$$

$$\beta_{si} = d_{5,i}$$

gerekecektir.



Şekil 5.2 Dönel Simetrik Deplasman Bileşenleri

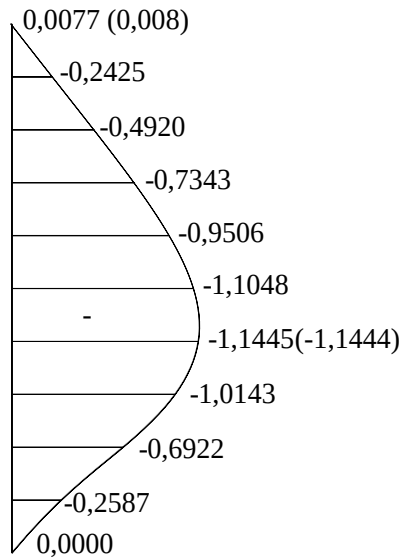
Eleman merkez açısı $\alpha = 36^\circ$ seçilmiş ve sistem anadoğru boyunca, Şekil 5.1 de görüldüğü gibi 10 sonlu elemana ayrılmıştır. Her yükleme durumu için, ayrı ayrı bulunan uç deplasman bileşenleri ve kesit tesirleri tablo halinde verilecek, w deplasmanı ve N_θ , M_s kesit tesirlerinin değişimi ayrıca diyagramlarla gösterilecektir.

Elde edilen değerler, [1] ve [17] de verilenlerle karşılaştırılmış ve bu çalışmalarda bulunanlarla çok yakın sonuçlar verdiği görülmüştür. Şekil 5.3,4,5 de parantez içindeki değerler [17] de bulunmuş sonuçlardır.

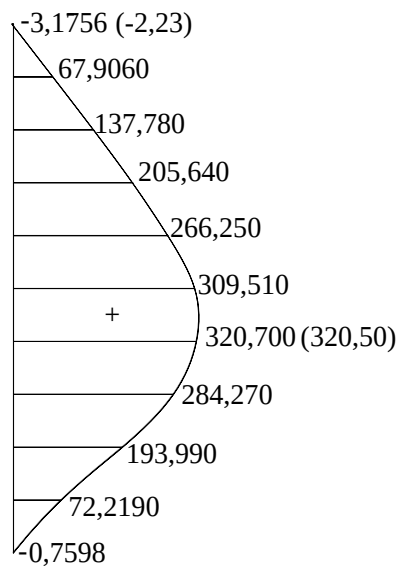
Yükleme Durumu:1-Su Basıncı

Tablo 5.1 Deplasmanlar ve Kesit Tesirleri

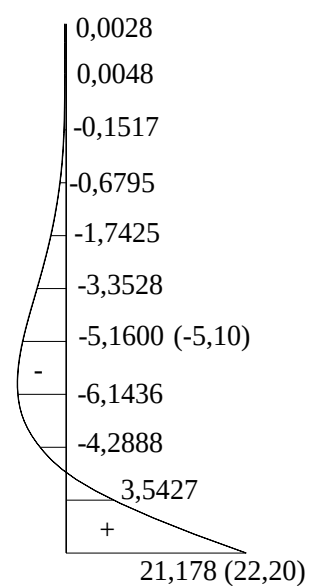
S (m)	Deplasman Bileşenleri			Kesit Tesirleri			
	W (mm)	U (mm)	$\beta_s \times 10^{-3}$	N_s (kN/m)	N_θ (kN/m)	M_s (kNm/m)	M_θ (kNm/m)
5,0	0,0077	0,0463	0,5005	-6,0191	-3,1756	0,0028	0,0005
4,5	-0,2425	0,0454	0,5005	0,0043	67,9060	0,0048	0,0008
4,0	-0,4920	0,0429	0,4956	0,0537	137,780	-0,1517	-0,02534
3,5	-0,7343	0,0386	0,4675	0,2025	205,640	-0,6795	-0,1135
3,0	-0,9506	0,0327	0,3856	0,4914	266,250	-1,7425	-0,2910
2,5	-1,1048	0,0255	0,2135	0,9165	309,510	-3,3528	-0,5599
2,0	-1,1445	0,0176	-0,0743	1,3724	320,700	-5,1600	-0,8617
1,5	-1,0143	0,0100	-0,4562	1,5711	284,270	-6,1436	-1,0260
1,0	-0,6922	0,0039	-0,8088	0,9615	193,990	-4,2888	-0,7162
0,5	-0,2587	0,0006	-0,8341	-1,2920	72,2190	3,5427	0,5916
0,0	0,0000	0,0000	0,0000	-4,550	-0,7598	21,178	3,5368



(w)



(N_θ)



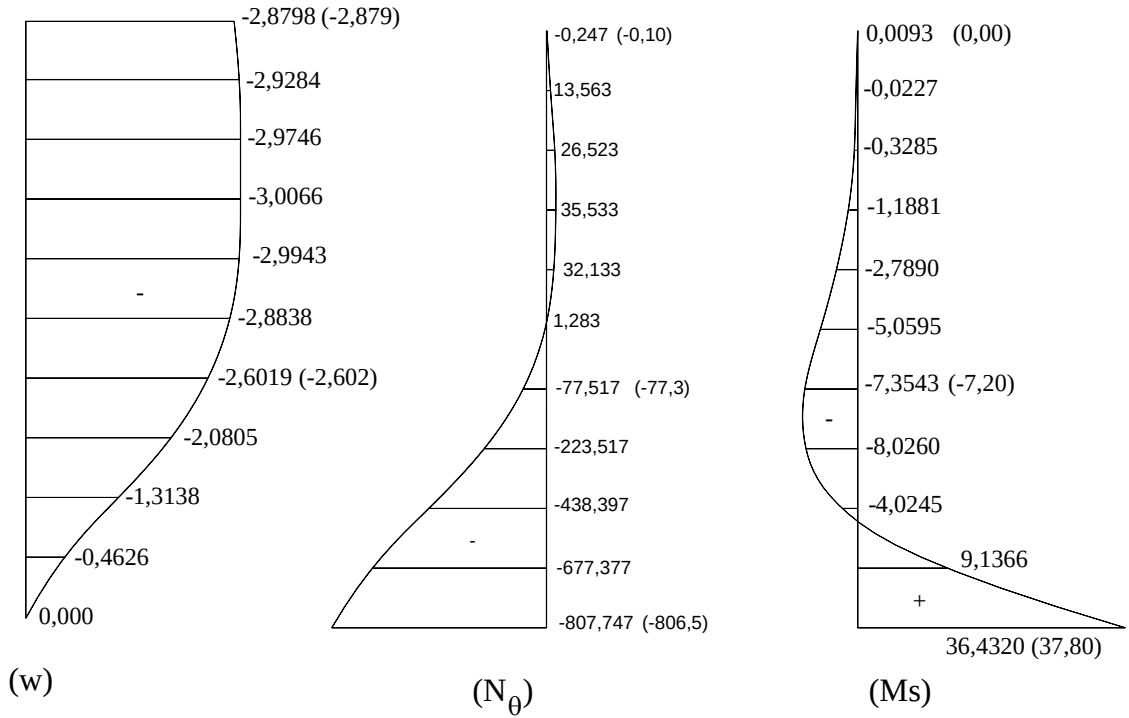
(M_s)

Şekil 5.3 w Deplasmanı N_θ ve M_s Kesit Tesiri Değerleri

Yükleme Durumu:2-Sabit Sıcaklık Değişmesi

Tablo 5.2 Deplasmanlar ve Kesit Tesirleri

S (m)	Deplasman Bileşenleri			Kesit Tesirleri			
	W (mm)	U (mm)	$\beta_s \times 10^{-3}$	N_s (kN/m)	N_θ (kN/m)	M_s (kNm/m)	M_θ (kNm/m)
5,0	-2,8798	-1,2425	0,09732	-1,167	-0,247	0,0093	0,0015
4,5	-2,9284	-1,1227	0,0965	0,013	13,563	-0,0227	-0,0038
4,0	-2,9746	-1,0032	0,0847	0,113	26,523	-0,3285	-0,0548
3,5	-3,0066	-0,8839	0,0334	0,343	35,533	-1,1881	-0,1984
3,0	-2,9943	-0,7648	-0,1009	0,783	32,133	-2,7890	-0,4657
2,5	-2,8838	-0,6453	-0,3662	1,373	1,283	-5,0595	-0,8449
2,0	-2,6019	-0,5245	-0,7857	1,943	-77,517	-7,3543	-1,2282
1,5	-2,0805	-0,4009	-1,3055	2,023	-223,517	-8,0260	-1,3403
1,0	-1,3138	-0,2728	-1,7128	0,783	-438,397	-4,0245	-0,6721
0,5	-0,4626	-0,1388	-1,5401	-2,957	-677,377	9,1366	1,5258
0,0	0,000	0,000	0,000	-8,037	-807,747	36,4320	6,0841

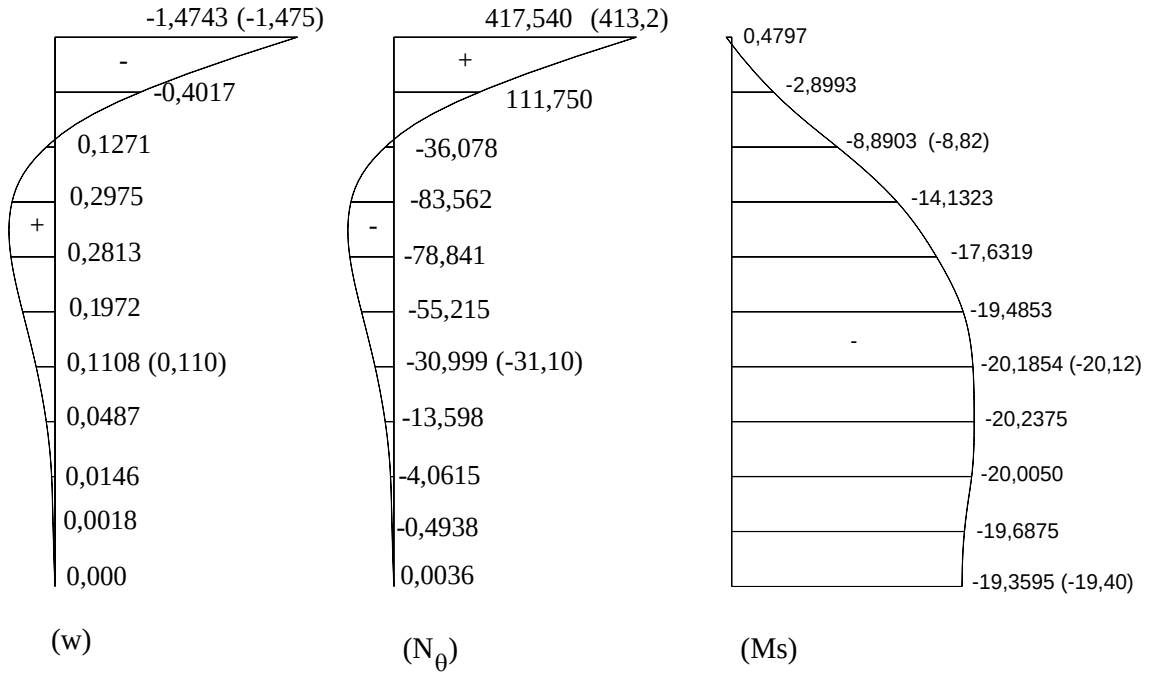


Şekil 5.4 w Deplasmanı N_θ ve M_s Kesit Tesiri Değerleri

Yükleme Durumu:3-Farklı Sıcaklık Değişmesi

Tablo 5.3 Deplasmanlar ve Kesit Tesirleri

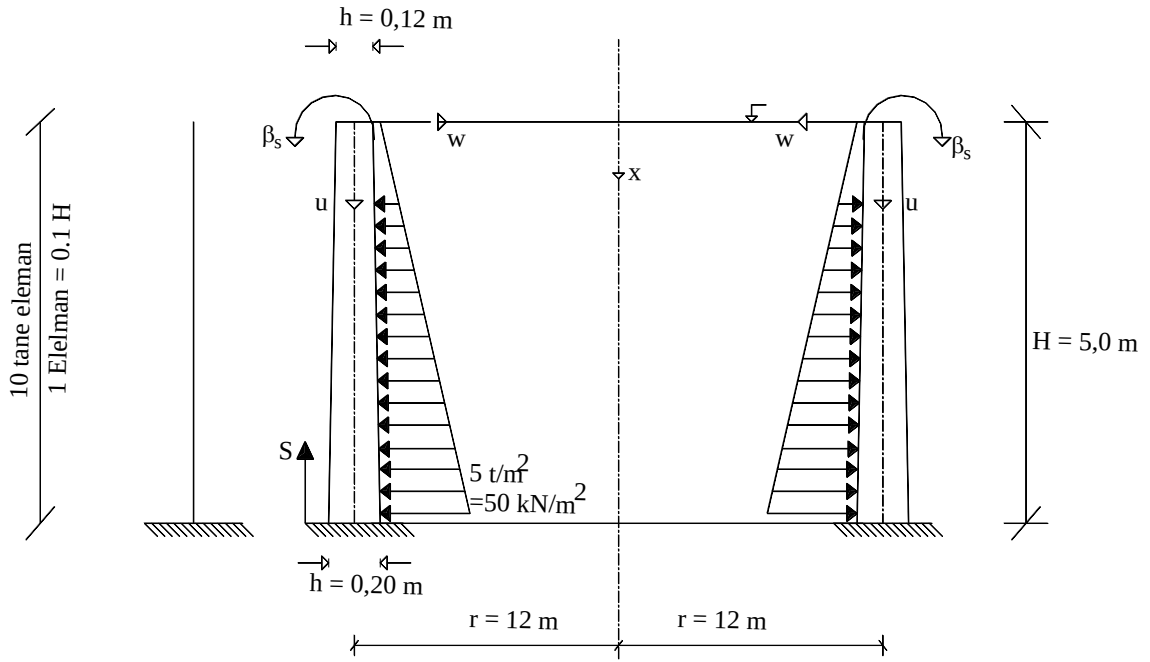
S (m)	Deplasman Bileşenleri			Kesit Tesirleri			
	W (mm)	U (mm)	$\beta_s \times 10^{-3}$	N_s (kN/m)	N_θ (kN/m)	M_s (kNm/m)	M_θ (kNm/m)
5,0	-1,4743	-0,0004	-2,7814	28,274	417,540	0,4797	-16,0479
4,5	-0,4017	-0,0065	-1,5455	-4,3879	111,750	-2,8993	-16,6122
4,0	0,1271	-0,0073	-0,6353	-2,8669	-36,078	-8,8903	-17,6126
3,5	0,2975	-0,0056	-0,1047	-1,4779	-83,562	-14,1323	-18,4881
3,0	0,2813	-0,0035	0,1304	-0,5250	-78,841	-17,6319	-19,0725
2,5	0,1972	-0,0018	0,1846	-0,0054	-55,215	-19,4853	-19,3820
2,0	0,1108	-0,0008	0,1525	0,2017	-30,999	-20,1854	-19,4989
1,5	0,0487	-0,0003	0,0951	0,2281	-13,598	-20,2375	-19,5076
1,0	0,0146	0,000	0,0437	0,1718	-4,0615	-20,0050	-19,4688
0,5	0,0018	0,000	0,0109	0,0882	-0,4938	-19,6875	-19,4158
0,0	0,000	0,000	0,000	0,0217	0,0036	-19,3595	-19,3610



Şekil 5.5 w Deplasmanı N_θ ve M_s Kesit Tesiri Değerleri

5.2-ÖRNEK: 2

Şekil 5.6 da görülen ankastre tabanlı, lineer değişken kesitli silindirik su deposu, kabuk kalınlığı $0,20^m$ den $0,12^m$ ye değişmektedir. Diğer bütün geometrik büyüklükler, malzeme değerleri ve yükleme durumları aynen Örnek:1 de olduğu gibidir. Elde edilen sonuçların [17] de verilen, başlangıç değerleri metoduna dayanan çözümlerle karşılaştırılmasından, sonuçların yakınsaklığı hakkında fikir edinilebilir. [17] den alınan değerler diyagramlarda parantez içinde gösterilecektir.



Şekil 5.6 Değişken Kesitli Silindirik Su Deposu

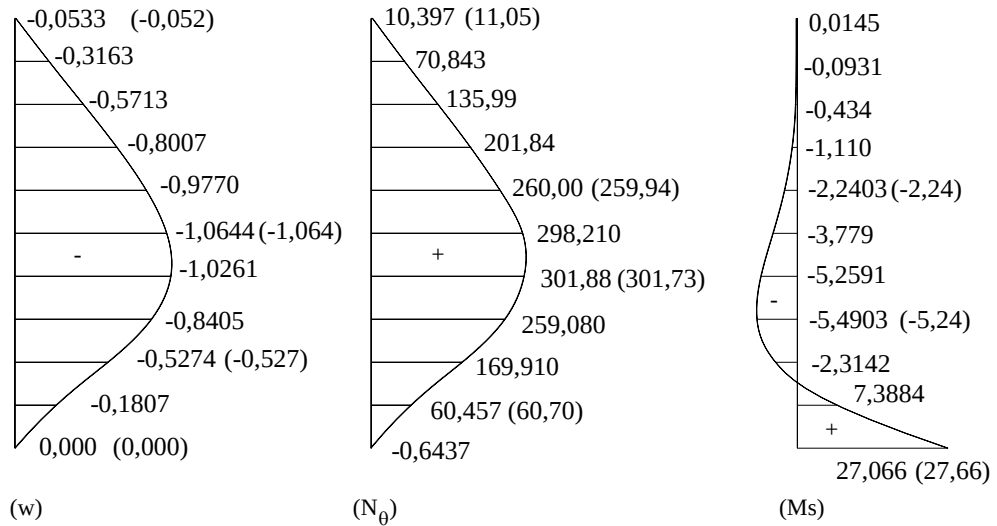
Sistem verilen yüklemeler altında dönel simetrik deformasyon yaptığından Örnek:1 deki gibi kabuk yüzeyinden alınan bir silindirik sonlu eleman bandı ile hesap yapılabilir.

Eleman merkez açısı $\alpha = 36^\circ$ seçilmiş ve sistem anadoğru boyunca, Şekil 5.6 da görüldüğü gibi 10 sonlu elemana ayrılmıştır. Dönel simetri koşulu nedeniyle düğüm noktalarının sıfırdan farklı bileşenleri, Örnek: 1 deki açıklamalar aynen geçerlidir.

Yükleme Durumu:1-Su Basıncı

Tablo 5.4 Deplasmanlar ve Kesit Tesirleri

S (m)	Deplasman Bileşenleri			Kesit Tesirleri			
	W (mm)	U (mm)	$\beta_s \times 10^{-3}$	N_s (kN/m)	N_0 (kN/m)	M_s (kNm/m)	M_0 (kNm/m)
5,0	-0,0533	0,0442	0,5271	-4,801	10,397	0,0145	0,0024
4,5	-0,3163	0,0429	0,5222	-0,004	70,843	-0,0931	-0,0155
4,0	-0,5713	0,03981	0,4919	0,1229	135,99	-0,434	-0,0725
3,5	-0,8007	0,0350	0,4165	0,3395	201,84	-1,110	-0,1854
3,0	-0,9770	0,0287	0,2765	0,6497	260,00	-2,2403	-0,3741
2,5	-1,0644	0,0216	0,0602	1,007	298,210	-3,779	-0,6311
2,0	-1,0261	0,0142	-0,2215	1,2759	301,88	-5,2591	-0,8783
1,5	-0,8405	0,0077	-0,5152	1,2014	259,080	-5,4903	-0,9168
1,0	-0,5274	0,0028	-0,7068	0,4184	169,910	-2,3142	-0,3865
0,5	-0,1807	0,0004	-0,6142	-1,4927	60,457	7,3884	1,2331
0,0	0,000	0,000	0,000	-3,855	-0,6437	27,066	4,5201

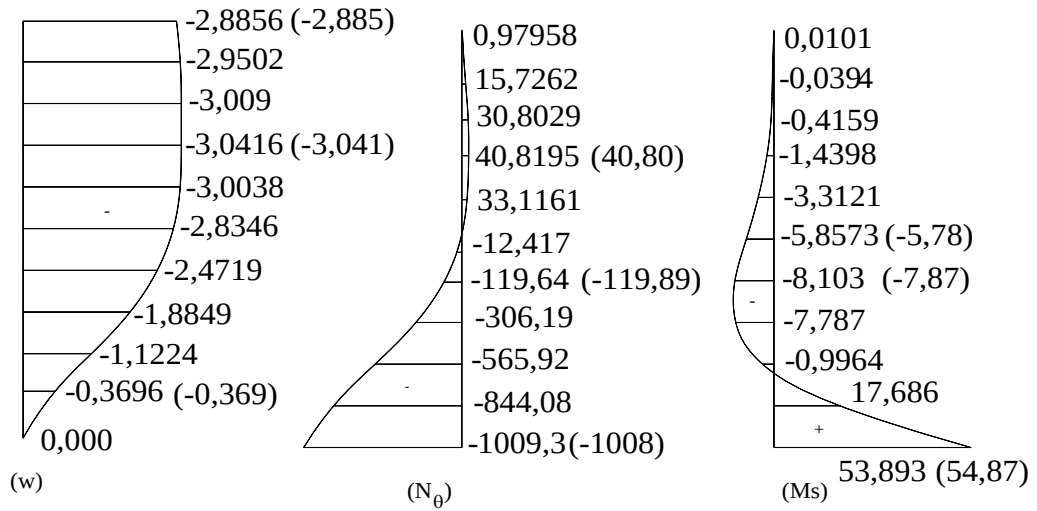


Şekil 5.7 w Deplasmanı N_0 ve M_s Kesit Tesiri Diyagramları

Yükleme Durumu:2-Sabit Sıcaklık Değişmesi

Tablo 5.5 Deplasmanlar ve Kesit Tesirleri

S (m)	Deplasman Bileşenleri			Kesit Tesirleri			
	W (mm)	U (mm)	$\beta_s \times 10^{-3}$	N_s (kN/m)	N_θ (kN/m)	M_s (kNm/m)	M_θ (kNm/m)
5,0	-2,8856	-1,2464	0,1296	-1,1804	0,97958	0,0101	0,0016
4,5	-2,9502	-1,1267	0,1274	0,01622	15,7262	-0,0394	-0,0066
4,0	-3,009	-1,007	0,1022	0,16286	30,8029	-0,4159	-0,0694
3,5	-3,0416	-0,888	0,0126	0,4995	40,8195	-1,4398	-0,2404
3,0	-3,0038	-0,7695	-0,1848	1,01613	33,1161	-3,3121	-0,5531
2,5	-2,8346	-0,6498	-0,5137	1,61277	-12,417	-5,8573	-0,9782
2,0	-2,4719	-0,5284	-0,9491	2,02941	-119,64	-8,103	-1,3532
1,5	-1,8849	-0,4036	-1,3845	1,72605	-306,19	-7,787	-1,3004
1,0	-1,1224	-0,2741	-1,6054	0,12269	-565,92	-0,9964	-0,1664
0,5	-0,3696	-0,1391	-1,2820	-3,4807	-844,08	17,686	2,9535
0,0	0,000	0,000	0,000	-7,784	-1009,3	53,893	9,0001

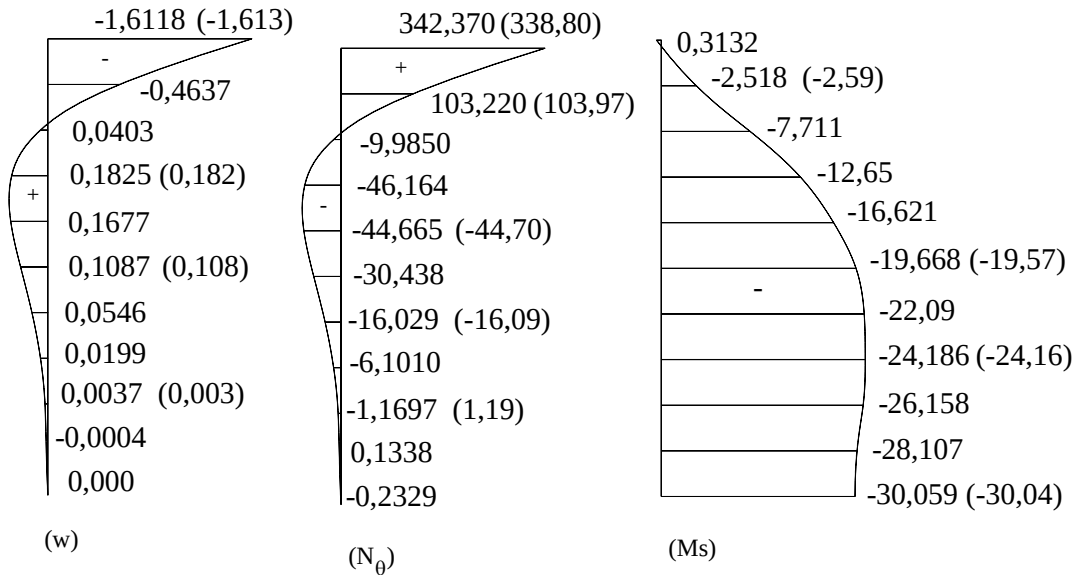


Şekil 5.8 w Deplasmanı N_θ ve M_s Kesit Tesiri Diyagramları

Yükleme Durumu:3-Farklı Sıcaklık Değişmesi

Tablo 5.6 Deplasmanlar ve Kesit Tesirleri

S (m)	Deplasman Bileşenleri			Kesit Tesirleri			
	W (mm)	U (mm)	$\beta_s \times 10^{-3}$	N_s (kN/m)	N_0 (kN/m)	M_s (kNm/m)	M_0 (kNm/m)
5,0	-1,6118	0,0038	-3,117	23,280	342,370	0,31324	-9,0198
4,5	-0,4637	-0,0028	-1,554	-3,9791	103,220	-2,5184	-10,742
4,0	0,0403	-0,004	-0,561	-2,3748	-9,9850	-7,711	-12,94
3,5	0,1825	-0,0031	-0,0758	-1,0910	-46,164	-12,65	-15,176
3,0	0,1677	-0,0018	0,0985	-0,3243	-44,665	-16,621	-17,331
2,5	0,1087	-0,0008	0,1221	0,0386	-30,438	-19,668	-19,413
2,0	0,0546	-0,0003	0,0902	0,1594	-16,029	-22,09	-21,47
1,5	0,0199	0,000	0,0493	0,1598	-6,1010	-24,186	-23,554
1,0	0,0037	0,000	0,0178	0,11027	-1,1697	-26,158	-25,698
0,5	-0,0004	0,000	0,00108	0,0424	0,1338	-28,107	-27,918
0,0	0,000	0,000	0,000	-0,0139	-0,2329	-30,059	-30,22



Şekil 5.9 w Deplasmanı N_0 ve M_s Kesit Tesiri Diyagramları

Her yükleme durumu için, ayrı ayrı bulunan uç deplasman bileşenleri ve kesit tesirleri tablo halinde verilecek, w deplasmanı ve N_0 , M_s kesit tesirlerinin değişimi ayrıca diyagramlarla gösterilecektir.

Örnek:1 ve Örnek:2 de bulunan sonuçların [17] de elde edilen değerlerle karşılaştırılmasından ortaya çıkan sonuçlar şu şekilde sıralanabilir:

- a) Oldukça az sayıda elemana bölünmüş olmasına rağmen denklem takımı çözümü ile bulunan deplasman bileşenlerinin yakınsaklık mertebesi oldukça iyidir. Gerçekten $\%_0 1$ den küçük kalmaktadır.
- b) N_0 , M_0 için bulunan sonuçlarda rölatif fark benzer şekilde genel olarak $\% 1$ den küçüktür.
- c) Özellikle sınırlarda büyük değerler alan M_s eğilme momenti için bulunan sonuçların doğruluğu, sınır bölgelerinde alınan eleman sayısına bağlıdır. Yapılan çözümde ankastre ucun 1 m lik bölgesi, 2 elemana bölünmüş olup [1] ve [17] de elde edilen değerlerle karşılaştırıldığında, rölatif fark $\%2$ den küçük kalmıştır.
- d) Her üç yükleme durumu için de, her noktada sıfır bulunması gereken N_s normal kuvvetleri için ise, Tablo 5.1,2,3,4,5,6 da gösterilen sonuçlar sıfır civarında salınım yapmaktadır. Bu özellik

$$N_s = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{w}{r} \right) \quad (5.2)$$

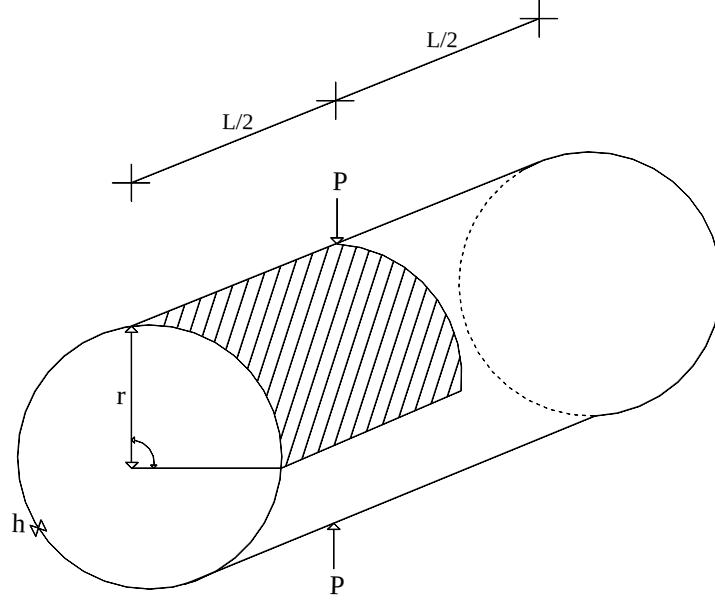
olan N_s ifadesinden kolaylıkla açıklanabilir.

Eleman boyunca w nin üçüncü derece polinomu şeklinde değişmesine karşılık, u nun değişimi doğrusal ve $\frac{\partial u}{\partial x}$ sabit olmaktadır. Bunun sonucu w nin hızlı değiştiği

bölgelerde, düğüm noktaları deformasyon bileşenlerinden hareket ederek bulunan N_s normal kuvvetleri gerçek değerleri civarında küçük salınımlar yapmaktadır. Bu sakıncayı azaltmak için, sistemi daha çok sayıda elemana bölmek yerine eleman ayırıtlarının orta noktalarındaki N_s değerlerinin esas alınması yeterli olmaktadır. Yukardaki örnekler için ayırt ortalarında hesaplanan N_s kuvvetleri sıfıra çok yakındır.

5.3-ÖRNEK: 3

Bu çalışmada bölüm:4 te anlatılan silindirik sonlu elemanla [1] ve [11] deki benzer elemanların karşılaştırılması amacıyla, Şekil 5.10 da görülen uçları boştaki ve orta noktalarından karşılıklı iki tekil yükün etkisi altındaki silindirik kabuk çözülmüştür.



Şekil 5.10 Silindirik Kabuk Eleman

Sistemin boyutları ve özellikleri:

$$r = 4,953 \text{ in.} = 125,8062 \text{ mm}$$

$$L = 10,35 \text{ in.} = 262,89 \text{ mm}$$

$$h = 0,094 \text{ in.} = 2,3876 \text{ mm}$$

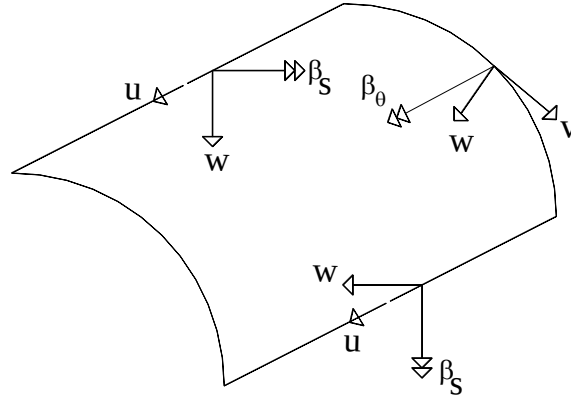
$$P = 100 \text{ lb.} = 0,4536 \text{ kN}$$

$$E = 10,5 \times 10^6 \text{ psi} = 7,38 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$$

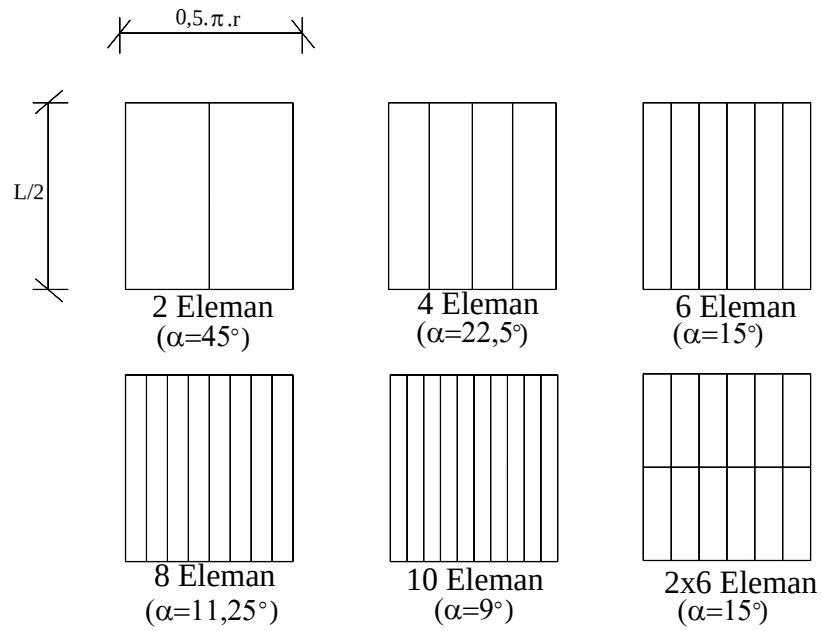
$$\nu = 0,3125$$

şeklindedir.

Simetri şartlarından yararlanarak silindirin taralı 1/8 i ile hesap yapılabilir. Bu parçanın kesilen kenarlarında sıfırdan farklı deplasman bileşenleri Şekil 5.11 de gösterilmiştir.



Şekil 5.11 Deplasman Bileşenleri



Şekil 5.12 Sonlu Eleman Ağları

Tam silindirin 1/8 i Şekil 5.12 de gösterilen 6 değişik şekilde elemanlara bölünerek deplasman yüzeyinin karakteristik bir değeri olan tekil yüklerin altındaki w çökmeleri için bulunan sonuçlar Tablo 5.7 nin dördüncü kolonunda gösterilmiştir.

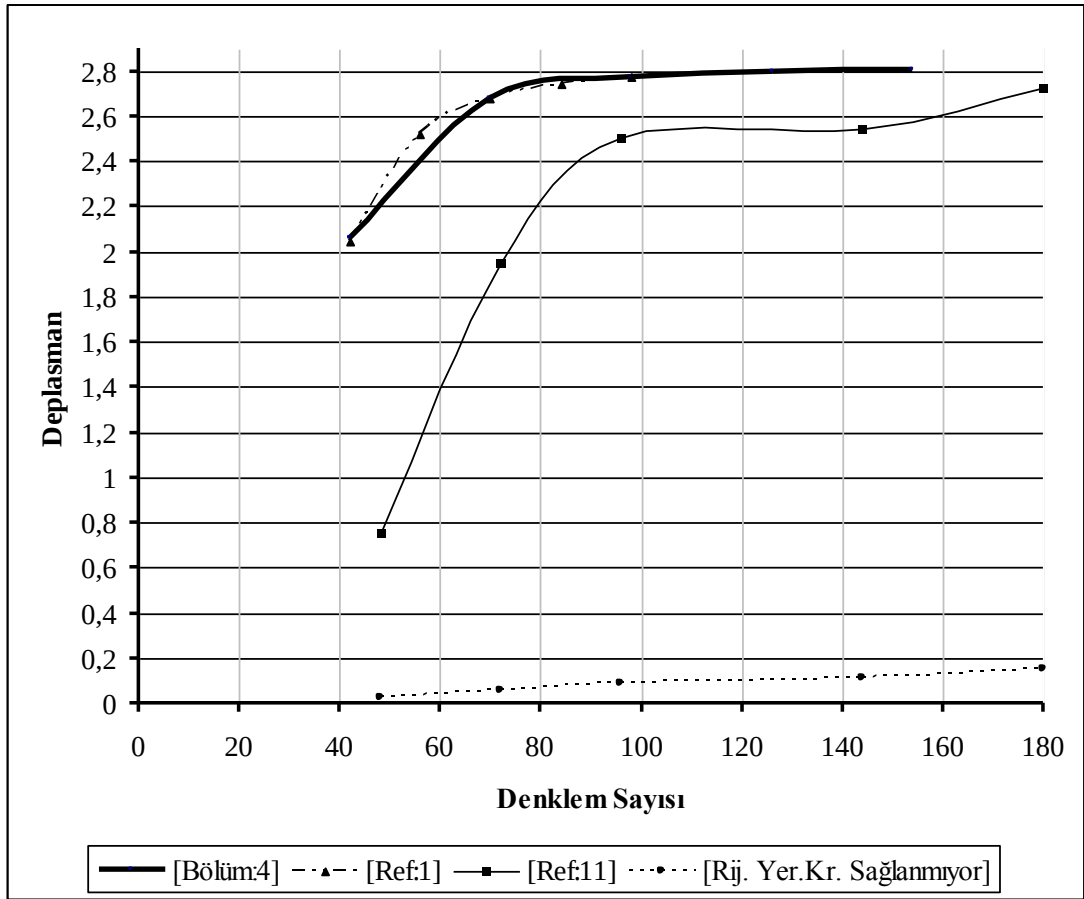
Aynı sistemin gene değişik sayıda elemanlara bölünerek, rijid yer değiştirme kriterini sağlamayan 24 uç deplasman parametrelili silindirik sonlu elemanda, [11] de verilen 24 ve [1] de verilen 28 uç deplasman parametrelili sonlu elemanlarla çözülmesiyle, w deplasmanı için bulunan sonuçlar da Tablo 5.7 de görülmektedir.

Tablo 5.7 Denklem Sayısı ve Deplasmanlar

Rijid yer değiştirme kriteri sağlanmıyor. (24 uç dep. par.)			[Ref: 11] (24 uç dep. par.)			[Ref: 1] (28 uç dep. par.)			Bölüm: 4 (28 uç dep. par.)		
Eleman ağı	Denk. sayısı	w (mm)	Eleman ağı	Denk. sayısı	w (mm)	Eleman ağı	Denk. sayısı	W (mm)	Eleman ağı	Denk. sayısı	W (mm)
-	-	-	-	-	-	1x2	42	2,047	1x2	42	2,062
1x3	48	0,025	1x3	48	0,754	1x3	56	2,517	-	-	-
-	-	-	-	-	-	1x4	70	2,679	1x4	70	2,682
-	-	-	-	-	-	2x4	180	2,789	-	-	-
1x5	72	0,053	1x5	72	1,953	1x5	84	2,743	1x6	98	2,774
1x7	96	0,089	1x7	96	2,507	1x6	98	2,776	1x8	126	2,798
2x7	144	0,107	2x7	144	2,545	2x6	147	2,791	2x6	147	2,791
1x9	120	0,130	1x9	120	2,685	-	-	-	1x10	154	2,806
2x9	180	0,150	2x9	180	2,725	-	-	-	-	-	-
3x49	1200	1,417	2x49	1200	2,865	-	-	-	-	-	-

Bu dört değişik silindirik sonlu elemanla, bu karakteristik deplasman değeri için elde edilen sonuçların doğruluğunun ve yakınsaklığının karşılaştırılması için ayrıca Şekil 5.13 de görülen diyagram çizilmiştir. Bu diyagramda w değeri ile, bu değer bulunması için çözülmesi gereken denklem takımı mertebesi arasındaki bağıntı verilmektedir.

Diğer taraftan [16] dan, normal kuvvetten dolayı boy değişiminin ihmal edilmesi halinde, tekil yük altındaki w çökmesinin kesin değeri olarak: $w = 2,7534^{mm}$ bulunabilir.



Şekil 5.13 Denklem Sayısı ve Deplasmanlar

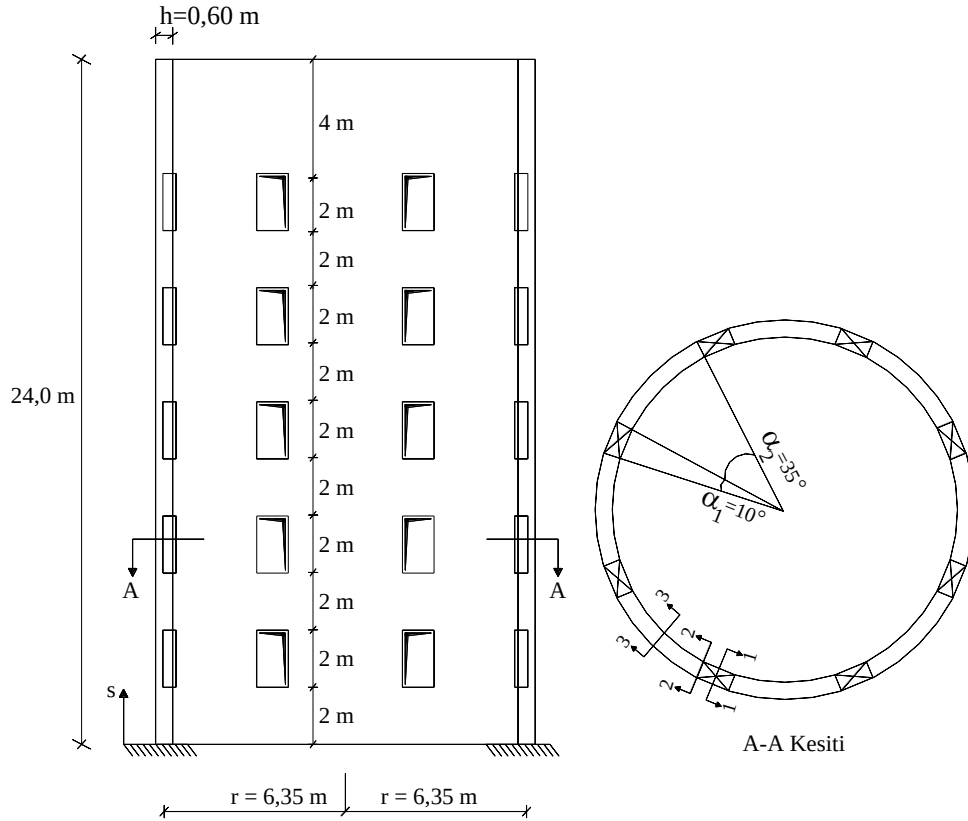
Tablo 5.7 nin ve Şekil 5.13 teki diyagramın incelenmesiyle aşağıdaki sonuçlar ortaya çıkmaktadır:

- Rijid yer değiştirme kriterini sağlamayan 24 deplasman parametrelili elemanın gerçek değere yakınsamadığı belirtilebilir.
- Eşit sayıda elemana bölünme halinde, bu tezin 4. bölümünde anlatılan sonlu elemanla bulunan sonuçlar, [1] de verilen elemanla bulunan değerlere çok yakındır. Yapılmış değişikliklerin elemanın yakınsaklığına bir farklılık getirmediği görülmektedir. Her iki elemanla da gerçek değere en hızlı ve en az bilinmeyenle ulaşılmaktadır.

5.4- ÖRNEK: 4

Şekil 5.14 de görülen ankastre tabanlı, üst ucu boşa, sabit kalınlıklı silindirik yanmış klinker deposu en büyük kesit zorlarının oluştuğu farklı sıcaklık yüklemesi için hesaplanacaktır. Bu örnekte özellikle siloda bulunan boşlukların etkisi incelenecek ve ayrıca elde edilen sonuçlar, 24 uç deplasman parametresine sahip çok sayıda dikdörtgen düz plak elemanın yan yana getirilerek [18] e göre yapılan çözümünün sonuçları ile karşılaştırılacaktır.

Yükleme durumu: Farklı sıcaklık değişimi $\Delta t = t_{iç} - t_{dış} = +67^\circ$



Şekil 5.14 Sabit Kesitli Silindirik Yanmış Klinker Deposu

Kesit Boyutları : $h = 0,60^m$ (kalınlık) ; $r = 6,35^m$ (yarıçap)

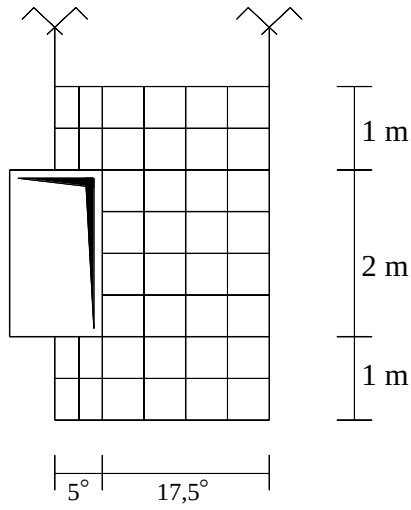
Malzeme özellikleri : $E = 3,0 \times 10^6 \text{ t/m}^2 = 3,0 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ $\nu = 0,20$

$\epsilon = 1,0 \times 10^{-5}$ (ısı. gen. kats.) olarak alınmıştır.

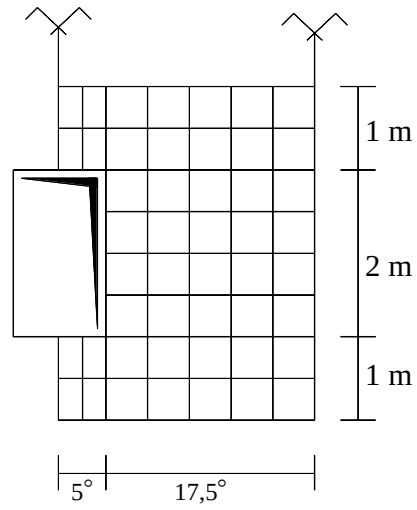
Bu yüklem altında sisteme 8 adet boşluğun eşit aralıklarla yerleştirilmiş olması nedeniyle sistemin 1/16 lık bir düşey dilimiyle hesap yapılabilir. Boşluğun tam ortasından (1-1 kesitinden) ve dolu bölgenin tam ortasından (3-3 kesitinden) geçen kesitler arasındaki toplam $22,5^\circ$ lik bir dilimin incelenmesi yeterli olacaktır. Bu

örneğin çözümünde Şekil 5.15a de görüldüğü gibi merkez açıları farklı iki silindirik sonlu eleman kullanılacaktır. Birincisi deliklerin bulunduğu bölgeye ait $\alpha_1/4 = 2,5^\circ$, ikincisi olarak dolu bölgeye ait $\alpha_2/4 = 8,75^\circ$ merkez açılı elemandır. Düşeyde ise silo 48 eşit parçaya bölünmüş olup bütün sonlu elemanlarda yükseklik $0,50^m$ dir.

Aynı silonun SAP2000 paket programı ile yapılan çözümünde kullanılan bölgesel sonlu eleman modellemesi ise Şekil 5.15b de gösterilmiştir.



Şekil 5.15a Sonlu Eleman Ağı



Şekil 5.15b Sonlu Eleman Ağı

1-1 Kesiti:

Tablo 5.8 Deplasmanlar ve Kesit Tesirleri

S (m)	Deplasman Bileşenleri			Kesit Tesirleri			
	W (mm)	U (mm)	$\beta_s \times 10^{-3}$	N _s (kN/m)	N ₀ (kN/m)	M _s (kNm/m)	M ₀ (kNm/m)
24,0	-1,497	-0,0005	-2,036	269,45	4343,3	10,54	-604,25
23,0	-0,097	-0,023	-0,825	-48,506	231,45	-197,84	-654,72
22,0	0,316	-0,019	-0,078	-63,144	-1054,9	-464,21	-734,65
21,0	0,159	-0,010	0,379	-36,331	-931,45	-535,84	-843,99
20,0	-0,539	-0,006	1,188	89,511	396,81	-38,03	-1159
18,0	-0,665	0,007	-0,964	102,29	769,79	-87,72	-1276,1
17,0	-0,245	0,006	-0,007	-22,62	-267,61	-428,42	-959,35
16,0	-0,652	0,005	0,953	82,63	700,54	-32,66	-1178,4
14,0	-0,647	0,007	-0,960	95,01	680,0	-86,57	-1278,6
13,0	-0,232	0,006	0,0005	-28,79	-310,58	-427,78	-961,88
12,0	-0,648	0,005	0,961	81,45	678,83	-32,82	-1180,7
10,0	-0,648	0,006	-0,962	94,51	682,74	-86,78	-1279,5
9,0	-0,230	0,006	-0,003	-32,09	-317,31	-428,92	-962,27
8,0	-0,642	0,005	0,956	77,29	640,88	-32,9	-1181,3
6,0	-0,639	0,010	-0,949	95,60	619,88	-86,12	-1274,2
5,0	-0,236	0,010	0,016	-1,351	-277,24	-421,24	-955,04
4,0	-0,672	0,009	0,982	111,63	924,11	-31,89	-1165,5
2,0	-0,695	0,009	-1,048	140,62	1300,7	-92,03	-1222,95
1,0	-0,126	0,004	-0,271	-36,35	35,63	-575,21	-812,05
0,0	0,000	0,000	0,000	-105,49	-21,09	-613,35	-725,67

2-2 Kesiti:

Tablo 5.9 Deplasmanlar ve Kesit Tesirleri

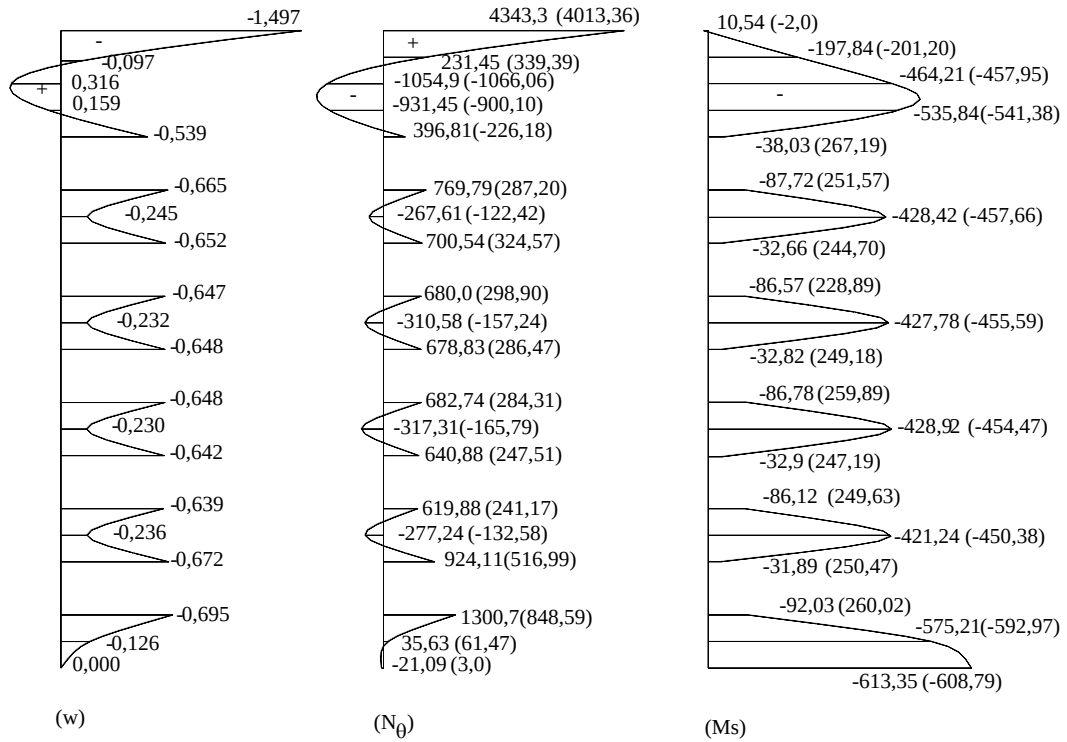
S (m)	Deplasman Bileşenleri			Kesit Tesirleri			
	W (mm)	U (mm)	$\beta_s \times 10^{-3}$	N _s (kN/m)	N ₀ (kN/m)	M _s (kNm/m)	M ₀ (kNm/m)
24,0	-1,496	0,0005	-2,037	270,22	4327,40	10,5	-603,06
23,0	-0,094	-0,022	-0,829	-40,47	230,47	-200,07	-651,58
22,0	0,328	-0,017	-0,091	-45,98	-1049,4	-471,95	-724,12
21,0	0,197	-0,007	0,329	-24,23	-916,04	-570,27	-802,46
20,0	-0,360	0,0007	0,831	149,01	228,39	-622,15	-1011,5
19,0	-0,750	0,006	0,049	4,985	41,90	-872,40	-154,60
18,0	-0,481	0,005	-0,649	93,14	476,06	-695,05	-777,87
17,0	-0,168	0,006	-0,008	-19,34	-219,63	-496,11	-872,12
16,0	-0,468	0,008	0,642	100,92	433,76	-557,07	-1033,8
15,0	-0,753	0,006	-0,003	-53,79	36,70	-834,22	-152,66
14,0	-0,462	0,004	-0,649	87,02	411,30	-683,77	-777,14
13,0	-0,155	0,006	0,0005	-23,44	-263,45	-495,6	-873,51
12,0	-0,463	0,008	0,649	98,08	414,60	-558,84	-1034,6
11,0	-0,753	0,006	0,000	-52,94	37,16	-836,44	-152,66
10,0	-0,463	0,004	-0,650	84,63	411,29	-685,49	-777,75
9,0	-0,153	0,006	-0,003	-25,17	-270,47	-496,76	-873,84
8,0	-0,457	0,007	-0,644	94,76	387,31	-559,16	-1033,5
7,0	-0,742	0,006	-0,002	-37,20	37,49	-832,55	-152,62
6,0	-0,455	0,006	-0,639	101,34	385,89	-678,18	-774,3
5,0	-0,161	0,009	0,018	-5,30	-230,33	-488,22	-868,41
4,0	-0,492	0,012	0,676	147,14	597,25	-551,56	-1024,8
3,0	-0,813	0,010	0,028	-84,33	33,48	-847,52	-154,95
2,0	-0,526	0,004	-0,699	126,92	864,94	-738,09	-758,05
1,0	-0,099	0,004	-0,217	-23,89	60,73	-612,43	-783,49
0,0	0,000	0,000	0,000	-81,03	-16,21	-648,54	-732,71

3-3 Kesiti:

Tablo 5.10 Deplasmanlar ve Kesit Tesirleri

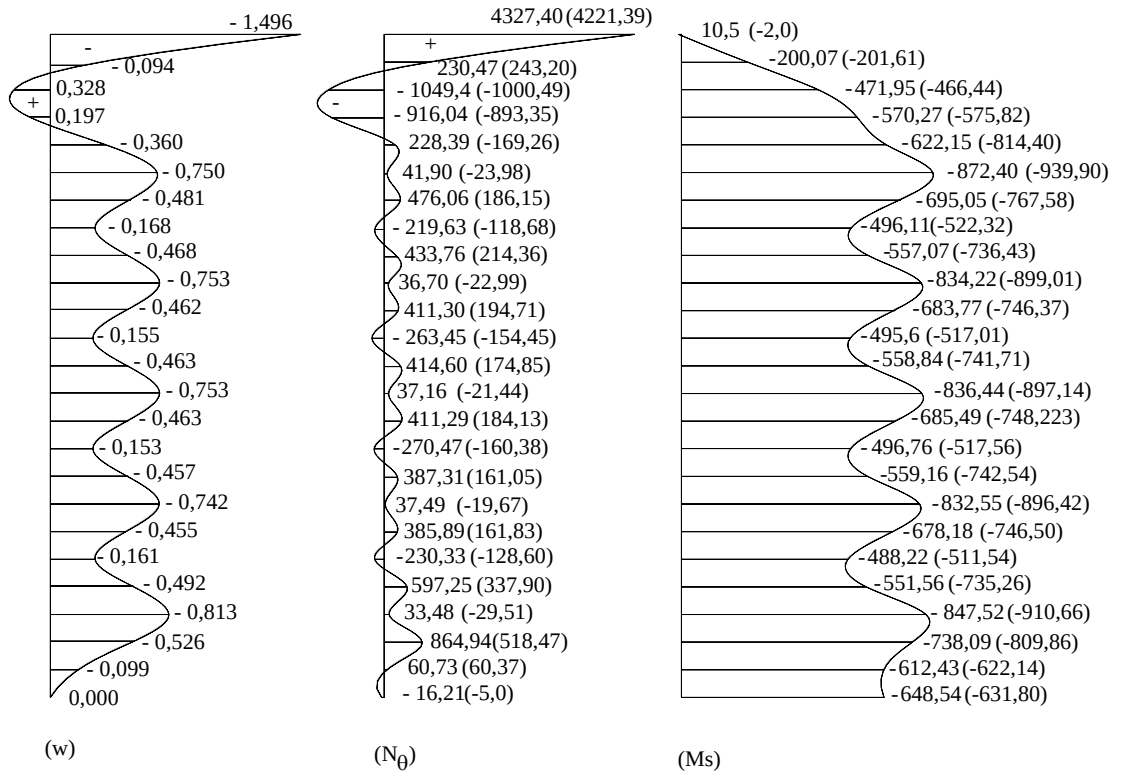
S (m)	Deplasman Bileşenleri			Kesit Tesirleri			
	W (mm)	U (mm)	$\beta_s \times 10^{-3}$	N _s (kN/m)	N ₀ (kN/m)	M _s (kNm/m)	M ₀ (kNm/m)
24,0	-1,489	0,008	-2,051	267,40	4233,30	10,34	-597,94
23,0	-0,068	-0,012	-0,859	-2,016	227,92	-211,94	-633,92
22,0	0,407	-0,004	-0,181	32,06	-1001,4	-508,82	-670,10
21,0	0,442	0,009	0,058	14,53	-806,51	-680,91	-644,09
20,0	0,367	0,013	0,070	-40,61	-180,57	-740,53	-557,41
19,0	0,318	0,010	0,026	-42,46	127,04	-729,27	-501,38
18,0	0,309	0,006	-0,004	-12,14	92,22	-719,58	-523,91
17,0	0,318	0,007	-0,011	18,29	-32,75	-706,40	-556,00
16,0	0,327	0,008	-0,007	0,460	50,29	-707,34	-519,22
15,0	0,333	0,006	-0,004	-11,41	104,87	-700,93	-487,16
14,0	0,335	0,005	-0,001	-0,274	31,85	-708,37	-518,68
13,0	0,336	0,006	0,0002	23,43	-74,82	-705,81	-554,13
12,0	0,335	0,007	0,0006	2,744	33,84	-709,72	-518,69
11,0	0,335	0,006	-0,0001	-10,22	103,23	-703,22	-487,03
10,0	0,335	0,004	-0,0015	1,431	32,02	-710,17	-518,69
9,0	0,338	0,006	-0,003	25,12	-78,87	-706,93	-554,22
8,0	0,341	0,007	-0,003	0,520	27,46	-709,09	-518,82
7,0	0,343	0,006	0,0005	-19,66	98,99	-699,24	-487,30
6,0	0,338	0,003	0,010	-15,03	33,66	-702,25	-519,29
5,0	0,320	0,004	0,027	0,604	-53,31	-695,42	-556,51
4,0	0,280	0,003	0,050	-12,50	77,03	-699,73	-525,95
3,0	0,221	0,0008	0,067	-13,28	188,15	-700,84	-506,02
2,0	0,147	-0,003	0,079	-19,95	221,49	-715,20	-572,41
1,0	0,062	-0,004	0,088	40,21	91,26	-738,98	-691,62
0,0	0,000	0,000	0,000	104,06	20,81	-878,75	-778,74

1-1 Kesiti:



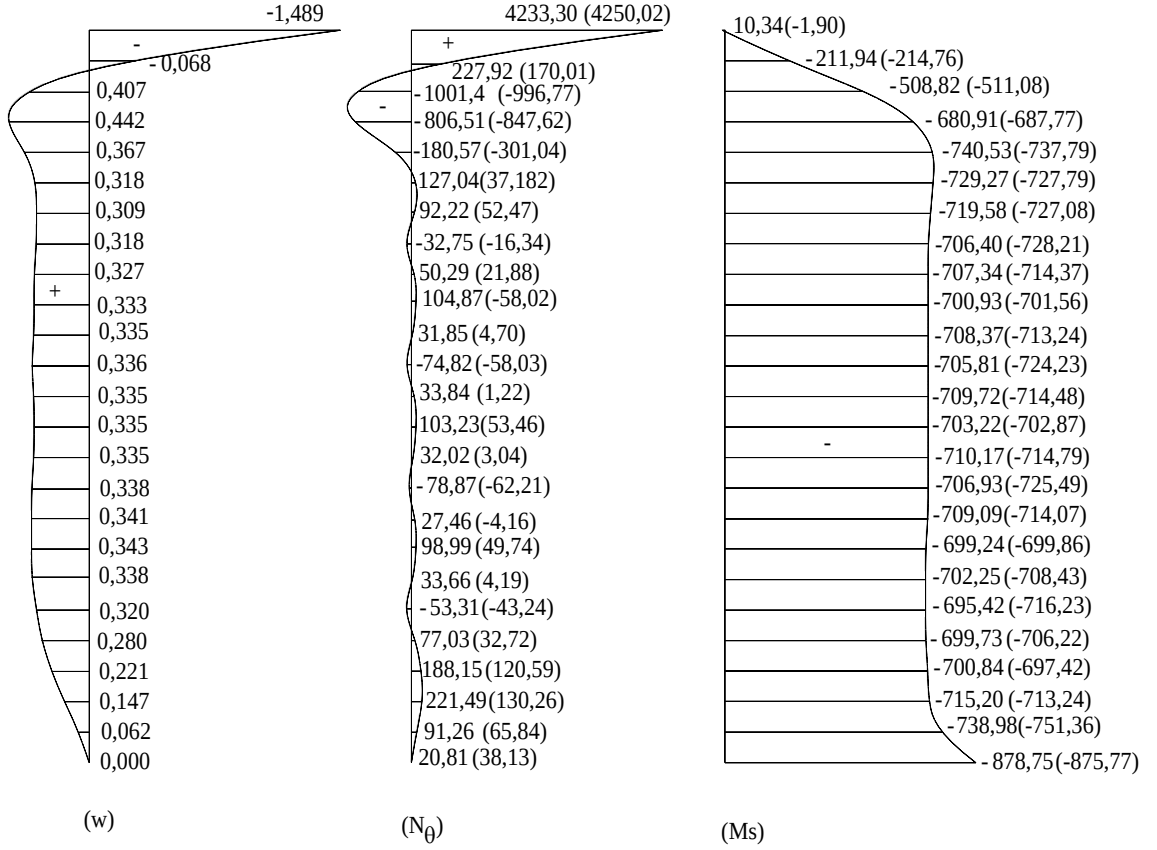
Şekil 5.16 w Deplasmanı N_θ ve M_s Kesit Tesiri Diyagramları

2-2 Kesiti:



Şekil 5.17 w Deplasmanı N_θ ve M_s Kesit Tesiri Diyagramları

3-3 Kesiti:



Şekil 5.18 w Deplasmanı N_θ ve M_s Kesit Tesiri Diyagramları

Bu yükleme durumu için, Şekil 5.14 te görülen 1-1, 2-2 ve 3-3 kesitleri için, kesit tesirleri Tablo 5.8,9,10 da gösterilmiştir, w deplasmanı, N_θ ve M_s kesit tesirlerinin değişimi ayrıca Şekil 5.16,17,18 de diyagramlarla gösterilmiştir. Dikdörge düz plak elemanla elde edilen çözümün sonuçları diyagramlarda parantez içerisinde gösterilmiştir.

Üst ve alt sınır şartlarının etkisinin alınmadığı sonsuz uzun deliksiz bir silindirik kabuk için farklı sıcaklık değişmesi halinde

$$w = n_s = n_\theta = 0$$

$$m_s = m_\theta = -\frac{Eh^2}{12(1-\nu)} \cdot \varepsilon \cdot \Delta t = -753,75 \text{ kNm/m}$$

çökme ve kesit tesirlerinin bulunacağı dikkate alınarak sayısal değerler daha iyi irdelenebilir.

Tablo 5.8,9,10 ve Şekil 5.16,17,18 nin incelenmesiyle aşğıdaki sonuçlar ortaya çıkmaktadır.

- a) 3-3 kesiti boyunca üst boşta uç hariç olmak üzere bulunan kesit tesirleri deliksiz hale göre bir miktar azalmaktadır.
- b) Gerek üst boş uçta, gerekse boşluk kenarlarında bu eğilme momentlerinin birinden birinin sıfırlanması zorunluluğı önemli çökme ve n_0 değerlerinin ortaya çıkmasına neden olmaktadır.
- c) Boşluk etkisinden uzaklaştıkça(dolu bölgelerde), 24 deplasman parametrelili düz plak elemanın sonuçları, bu tezin 4. bölümünde anlatılan silindirik sonlu elemanla bulunan sonuçlara yakınsadığı belirtilebilir.
- d) 24 uç deplasman parametrelili dikdörtgen düz plak elemanın, boşluk bölgelerinde gerçek değerlere yakınsamadığı belirtilebilir.
- e) Kesit tesirlerinin hızlı değıştiğı boşluk bölgelerinde gerçek değere yakınsamak için bu bölgelerde sık eleman ağı kullanmak gerekir.
- f) Denge denklemlerinin sağlanması zorunluluğı nedeniyle, boşluklardan dolayı kaybolan kesit tesirleri, boşluk kenarlarında ortaya çıkmaktadırlar. Bunun sonucunda, boşluk kenarlarındaki kesit tesirlerinde büyük artışlar görölmektedir.

BÖLÜM 6. SONUÇLAR

Değişken kesitli silindirik kabuk taşıyıcı sistemlere sonlu elemanlar metodunun uygulanması amacıyla geliştirilen sonlu eleman tipi ve buna ait uygulamaları kapsayan bu çalışmada elde edilen sonuçlar aşağıda sıralanmıştır.

- a. Bölüm: 3 de virtüel iş teoreminden yararlanarak, sabit ve farklı sıcaklık değişimi etkilerini de kapsayacak şekilde bütün sistem için sonlu elemanlar metodu denklemleri çıkarılmıştır.
- b. Bölüm: 4 de ise, silindirik sonlu elemanlar için [1] de verilenden bir miktar değişik deplasman fonksiyonlarından hareketle yeni bir silindirik sonlu eleman rijidlik matrisi elde edilmiştir.
- c. Silindirik sonlu elemanda seçilen deplasman fonksiyonları rijit yer değiştirme ve sabit deformasyon kriterlerini, ve bazı özel haller dışında geometrik uygunluk şartlarını tam olarak sağlamaktadır.
- d. Gerek bu özelliklerin sağlanması ve gerekse özellikle açısız doğrultuda seçilen deplasman fonksiyonlarının, sistemin dış etkiler altındaki şekil değiştirmesini iyi bir şekilde ifade etmesi nedeniyle, bu çalışmadaki ve [1] deki eşdeğer yakınsaklık hızına sahip olup, bu elemanlar yayınlanmış benzer elemanlara oranla gerçek değerlere daha hızlı yakınsamaktadır. Rijit yer değiştirme kriterini sağlamayan sonlu elemanın gerçek değere yakınsamadığı görülmektedir.

(Bkz: Örnek: 3)

- e. Eleman rijidlik matrisi terimleri, Gauss sayısal integrasyon yöntemi uygulanarak, elde edilmektedir. Rijitlik matrisi terimlerinin formülasyon yerine sayısal integrasyonun uygulanması, yakınsaklığı bozucu bir etki olmadığı görülmektedir.
- f. Silindirik eleman için, uygulamada sık rastlanan bazı yayılı yük tiplerine ait yükleme matrisleri, sabit ve farklı sıcaklık değişimi matrisleri elde edilmiştir. Bu matrislerden yararlanarak, silindirik kabuk sistemin dış etkilere göre hesabı yapılabilmektedir.

- g. Boşluklu silindirik kabuk sistemlerin farklı sıcaklık değişmesine göre hesabında bu çalışmada geliştirilen elemanın, kabuğun düzlemsel plaklardan oluşturulmasına göre daha uygun sonuç verdiği çözülen örnekten görülmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] **SAYGUN, A.**, Yüzeysel Taşıyıcı Sistemlerin Hesabı İçin Eğrisel Sonlu Elemanlar, *İ.T.Ü. İnş. Fak. Yayını*, 1974
- [2] **SAYGUN, A.**, Eğri Eksenli Kutu Kesitli Kirişlerin Hesabı İçin Bir Sonlu Elemanlar Yöntemi, *Doçentlik Tezi*, 1979
- [3] **HOLAND. I., BELL. K.**, Course On Finite Element Methods In Stress Analysis, *Trondheim Tech. Un. , 1969*
- [4] **HRENNIKOFF, A.**, Solution of Problems of Elasticity by the Framework Method, *J. Of Ap. Mec. Vol: 8, 1941*
- [5] **ARGYRIS, J. H.**, Energy Theorems and Structural Analysis, *Aircraft Eng., Vol: 26, Oct. Dec., 1954*
- [6] **TURNER, M. T., CLOUGH R. W., MARTIN, H.C., TOPP, L. T.**, Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. *J. Of the Aero. Scien Vol: 23, No. 9, 1956*
- [7] **ADINI A. CLOUGH R. W.**, Analysis of Plate Bending the Finite Elements Method, *NASA 6.7337, 1961*
- [8] **BOGNER F. K., FOX R. L., SCHMIT L. A.**, The Generation Of Inter-Element-Compatible Stiffness and Matrices by the Use Of Interpolation Formulas. *Proc. Conf. On Mat. Meth. In Struc. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965*
- [9] **GALLAGHER R. H.**, The Development And Evaluation of Matrix Methods For Thin Shell Structural Analysis., *Ph. D. Un. Buffalo, Newyork, 1966*
- [10] **BOGNER F. K., FOX R. L., SCHMIT L. A.**, A Cylindrical Shell Discrete Element., *AIAA Jour, No. 4, 1967*
- [11] **CANTIN G. , CLOUGH R. W.**, A Curved, Cylindrical Shell, Finite Element, *AIAA Jour, No. 6, 1968*
- [12] **TEZCAN S.**, Silindirik Kabukların Sonlu Elemanlar Metodu Çözümü, *TÜBİTAK, Mag. 192, 1970*
- [13] **FETTE H.**, Gekrümmte Finite Elemente Zur Berechnung Von Schalentragwerken., *Ph. D. Un. Braunschweig, 1969*

- [14] **MAY B.**, Zur Berechnung Von Schalentragwerken mit Hilfe Gekrümmtter Dreieckelemente. *Ph. D. Un. Bochum, 1970*
- [15] **NOVOZHILOV, V. V.**, The Theory of Thin Shells, P. Noordhoff Ltd, *Groningen, 1959*
- [16] **TIMOSHENKO S.**, Plaklar ve Kabuklar Teorisi. *İ.T.Ü. İnş. Fak.Yayını, 1964*
- [17] **SAYAR K.**, Dönel Kabuk Sistemlerinin Diferansiyel Geçiş Matrisleriyle Çözümü, *Doçentlik Tezi, 1969*
- [18] **SAP2000, Structural Analysis Program**, Plus Version 7.10
Computers and Structures, Inc. 1995 University Ave.
Berkeley, CA 94707

ÖZGEÇMİŞ

Mehmet Şahin, 1975 yılında Adıyaman’da doğdu İlk, orta ve lise öğrenimini Adıyaman’da tamamladı. 1999 yılında İ.T.Ü İnşaat Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümünden mezun oldu.

Yazar, 1999 yılında başladığı proje mühendisliği görevini halen özel bir firmada sürdürmektedir.