

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ELASTİK ZEMİNE OTURAN TIMOSHENKO KİRİŞİ
VE TAŞIMA MATRİSİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İnş. Müh. Mesut AKSOYDAN**

Anabilim Dalı : İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ

Programı : YAPI MÜHENDİSLİĞİ

MART 2004

**ELASTİK ZEMİNE OTURAN TIMOSHENKO KİRİŞİ
VE TAŞIMA MATRİSİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İnş. Müh. Mesut AKSOYDAN
(501011083)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 19 Şubat 2004
Tezin Savunulduğu Tarih : 5 Mart 2004**

**Tez Danışmanı : Prof.Dr. A. Yalçın AKÖZ
Diğer Jüri Üyeleri Prof.Dr. Reha ARTAN (İ.T.Ü.)
Y.Doç.Dr. Zafer KÜTÜĞ (Y.T.Ü.)**

MART 2004

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ	iv
SEMBOL LİSTESİ	v
ÖZET	vii
SUMMARY	viii
1. GİRİŞ	1
1.1. Problemin Tanımı	1
1.2. Konu İle İlgili Çalışmalar	3
1.3. Çalışmanın Amacı	6
2. ELASTİK ZEMİNE OTURAN TIMOSHENKO KİRİŞİ	7
2.1. Formülasyon	7
2.2. Çözüm	9
2.2.1. $\alpha > 1$ Durumu İçin Taşıma Matrisinin Elde Edilmesi	10
2.2.1.1. $\alpha > 1$ Durumu İçin Elde Edilen İdempotentleri	11
2.2.1.2. $\alpha > 1$ Durumu İçin Elde Edilen Taşıma Matrisi	17
2.2.2. $\alpha < 1$ Durumu İçin Taşıma Matrisinin Elde Edilmesi	19
2.2.2.1. $\alpha < 1$ Durumu İçin Elde Edilen İdempotentleri	20
2.2.2.2. $\alpha < 1$ Durumu İçin Elde Edilen Taşıma Matrisi	25
2.2.3. $\alpha = 1$ Durumu İçin Taşıma Matrisinin Elde Edilmesi	27
2.2.3.1. $\alpha = 1$ Durumu İçin Elde Edilen İdempotentleri ve Nilpotentleri	28
2.2.3.2. $\alpha = 1$ Durumu İçin Elde Edilen Taşıma Matrisi	30
2.2.4. Rijitlik Matrisi İle Taşıma Matrisi Arasındaki İlişki	31
2.2.4.1. $\alpha > 1$ Durumu İçin Elde Edilen Rijitlik Matrisi	34
2.2.4.2. $\alpha < 1$ Durumu İçin Elde Edilen Rijitlik Matrisi	34
2.2.4.3. $\alpha = 1$ Durumu İçin Elde Edilen Rijitlik Matrisi	34
3. UYGULAMALAR	36
3.1. Elastik Zemine Oturan Ortasından Yüklü ve İki Ucu Serbest Olan Kiriş Problemi	36
3.2. Elastik Zemine Oturan İki Ucundan Yüklü ve İki Ucu Serbest Olan Kiriş Problemi	39
3.3. Elastik Zemine Oturan İki Açıklıklı ve İki Katlı Çerçeve Sistemin Statik Çözümü	42
4. SONUÇLAR VE YORUMLAR	45
KAYNAKLAR	46
ÖZGEÇMİŞ	48

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa No
Şekil 1.1 : Elastik zemine oturan kirişler için winkler zemin modeli ...	2
Şekil 2.1 : Elastik zemine oturan Timoshenko kirişi	7
Şekil 2.2 : Kiriş parçasına ait kesit tesirleri	7
Şekil 2.3 : Durum vektörüne ait büyüklükler için pozitif yönler	17
Şekil 2.4 : Eleman uç kuvvetleri (p) ile uç yer değiştirmeleri (u) için pozitif yönler	31
Şekil 2.5 : $u_1 = 1, u_2 = u_3 = u_4 = 0$ iken k_{1i} katsayılarının yönleri ile gösterimi	32
Şekil 2.6 : $u_2 = 1, u_1 = u_3 = u_4 = 0$ iken k_{2i} katsayılarının yönleri ile gösterimi	32
Şekil 2.7 : $u_3 = 1, u_1 = u_2 = u_4 = 0$ iken k_{3i} katsayılarının yönleri ile gösterimi	33
Şekil 2.8 : $u_4 = 1, u_1 = u_2 = u_3 = 0$ iken k_{4i} katsayılarının yönleri ile gösterimi	33
Şekil 3.1 : Birinci uygulamaya ait yükleme durumu ve kesit alanı	36
Şekil 3.2 : Birinci uygulama için düşey yer değiştirmeler	37
Şekil 3.3 : Birinci uygulama için moment diyagramı	38
Şekil 3.4 : Birinci uygulama için kesme kuvveti diyagramı	38
Şekil 3.5 : İkinci uygulamaya ait sistem ve yükleme durumu	39
Şekil 3.6 : İkinci uygulama için k ve h değişkenlerine bağlı çökme eğrileri	40
Şekil 3.7 : İkinci uygulama için k ve h değişkenlerine bağlı moment eğrileri	41
Şekil 3.8 : İkinci uygulama için k ve h değişkenlerine bağlı kesme kuvveti grafiği	41
Şekil 3.9 : Sistem, idealleştirme, yükleme durumu ve kesitler	42
Şekil 3.10 : Üçüncü uygulama için çökme grafiği	43
Şekil 3.11 : Üçüncü uygulama için moment grafiği	44
Şekil 3.12 : Üçüncü uygulama için kesme kuvveti grafiği	44

SEMBOL LİSTESİ

A	: Kiriş kesit alanı
I	: Atalet momenti
E	: Elastisite modülü
L	: Kiriş uzunluğu
b	: Kiriş genişliği
h	: Kiriş yüksekliği
k	: Zemin reaksiyon modülü
k₀	: Zemin yatak katsayısı
q	: Düzgün olmayan yayılı yük
v	: Çökme
Ω	: Kesitin dönmesi
M	: Moment
T	: Kesme kuvveti
γ	: Kayma açısı
G	: Kayma modülü
ν	: Poisson oranı
s	: Şekil faktörü (bkz. denklem 2.2)
τ	: Kayma gerilmesi
τ₀	: Ortalama kayma gerilmesi
D_{o/}	: Diferansiyel geçiş matrisi
S_{o/}	: Durum vektörü
F_{o/}	: Taşıma matrisi
P_{o/}	: İdempotent matrisi
Q_{o/}	: Nilpotent matrisi
I_{o/}	: Birim matris
Φ	: Matris fonksiyonu
λ_i	: Karakteristik denkleme ait kökler
α	: Bir parametre (bkz. denklem 2.14)
β	: Bir parametre (bkz. denklem 2.16)
θ	: Bir parametre (bkz. denklem 2.18)
B	: Bir parametre (bkz. denklem 2.21)
μ	: Bir parametre (bkz. denklem 2.22)
D[*]	: Bir parametre (bkz. denklem 2.23)
R[*]	: Bir parametre (bkz. denklem 2.24)
r	: Atalet yarıçapı
φ	: Bir parametre (bkz. denklem 2.32)
φ	: Bir parametre (bkz. denklem 2.32)
a	: Bir parametre (bkz. denklem 2.32)
T_i	: Bir katsayı (bkz. denklem 2.32)

$\mathbf{m}$	: Bir parametre (bkz. denklem 2.36)
ϕ^*	: Bir parametre (bkz. denklem 2.41)
ϕ^*	: Bir parametre (bkz. denklem 2.41)
$\mathbf{Y}_i$	: Bir katsayı (bkz. denklem 2.41)
$\mathbf{p}_i$	: Uç kuvvetler
$\mathbf{u}_i$	: Uç yerdeřiřtirmeler
$\mathbf{K}_{o/}$	: Eleman rijitlik matrisi
$\mathbf{k}_{ij}$	: Eleman rijitlik matrisi katsayıları
ζ	: Bir parametre (bkz. denklem 2.67)
η	: Bir parametre (bkz. denklem 2.69)
$\mathbf{P}$	: Tekil yük
$\mathbf{K}_{o\wedge}(\xi)$	: Ara giriş matrisi

1. GİRİŞ

1.1. PROBLEMİN TANIMI

Elastik zemine oturan kiriş problemlerine uygulamada sıkça rastlanır. Temel kirişlerinin yüksekliği nedeniyle kesme etkisinin önemi artmaktadır. Kesme etkisinin önem kazandığı kirişlere Timoshenko kirişi denmektedir. Bernoulli-Navier hipotezine göre eğilmeden önce düzlem olan kesitler, eğilmeden sonra da düzlem kalmakta ve tarafsız eksenle dik açı yapmaktadırlar. Timoshenko kirişinde ise eğilmeden önce düzlem olan kesitler, eğilmeden sonra düzlem kalmakta ancak kayma gerilmelerinden dolayı tarafsız eksenle belirli bir açı yapmaktadırlar.

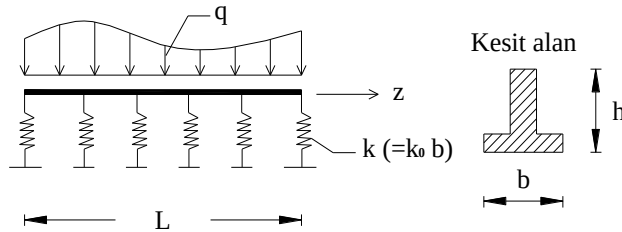
Bu çalışmada elastik zemine oturan doğru eksenli Timoshenko kirişi incelenmiştir. Dolayısıyla kirişlerde hesap yaparken kesme ile eğilme etkisi birlikte ele alınmıştır. Önce zeminle etkileşimde olan kirişin rijitlik matrisi, başlangıç değerler metodu kullanılarak elde edilmiştir. Daha sonra yapı ve zemin bir bütün halinde hesap edilmiştir.

Mühendisliğe ait çeşitli problemlerde, sınır şartları yardımıyla belirtilmesi gereken, sabitlerin sayısı çok olursa, hesap yorucu olduğu kadar hata yapma ihtimali de fazla olmaktadır. Bu yüzden problemlerin kuruluşunda sabit miktarını mümkün olabildiğince azaltmanın çareleri aranır. Başlangıç değerleri metodu adı verilen metod, bu amacı sağlayan bir yöntemdir. Tek boyutlu problemlere uygulanan bu metodda esas fikir, sınır değerleri problemlerinin hepsini başlangıç değerleri problemlerine dönüştürmek, bu suretle de ara şartlardan dolayı girebilecek yeni sabitlerin önüne geçmek ve problemlerin denklemlerini hep aynı başlangıçtaki sabitlerle ifade etmekten ibarettir.

Yalnız hesaplarda topluluk ve sistematığı sağlamak için, başlangıç değerleri metodu, matris hesabı esaslarına dayanarak incelenecektir. Teoride, değişkenin çeşitli değerleri arasında geçişi sağlayan bir matris esas rolü oynamaktadır. Bu matris Taşıma matrisi adı verilir. Bu matrisin özelliklerinden ve elde edilışinden bahsedilecektir.

Elastik zemine oturan kirişlere ait bir problemin matematiksel bağıntılarla belirlenmesi, zemin özelliklerinin oldukça karışık ve belirsiz olmasından dolayı zordur. Bu da matematiksel çözümlerin geçerliliğini sınırlar. Bu yüzden, bu tür problemlerde zeminin elastikliğini bazı kabullere göre irdelemek gerekmektedir. Elastik zemine oturan kirişlere ait çalışmalarda esas hipotez genellikle zemin hakkında yapılan hipotezler olmuştur. Bu nedenle problem için seçilecek zemin modeli önemlidir.

Elastik zemine oturan kiriş problemi, önce Winkler [1] tarafından incelenmiş ve teoremin esasları verilmiştir. Çeşitli yük etkisi altındaki elastik ve prizmatik bir kirişin, elastik yatak üzerinde bulunduğu ve herhangi bir noktadaki taban basıncının aynı noktadaki çökme ile orantılı olduğu varsayılmıştır. Bu hipotez yatak ortamının elastik olduğunu ve yük belirli bir değeri aşmadıkça, deformasyonların yüklerle doğru orantılı olduğunu gösterir. Hipotez küçük şekil değiştirmeler durumuna uygulanabilir. Bu çalışmada zemin yatak katsayısı k_0 ile ifade edilecektir. Bu zemin modelinde yatak katsayısının taban basıncından bağımsız olduğu ve bütün temel yüzeyi boyunca sabit kaldığı varsayılır. Bu hipotez problemin çözümünü oldukça kolaylaştırır. Bununla birlikte zeminin homojen olmaması nedeniyle yatak katsayısı noktadan noktaya değişebilir. Diğer bir hususta zemine etkiyen kuvvetlerin yalnız etki ettiği noktada şekil değişimi yapmasıdır. Bu durumda zemin birbirinden bağımsız, birbirine sonsuz yakın ve sıkışarak serbestçe hareket edebilen düşey yaylardan oluşan mekanik bir sistem olarak düşünülmüştür. Burada komşu yayın taban basıncı dikkate alınmaz. Bunun sonucu olarak zemin tamamen süreksiz bir ortam olarak göz önüne alınmış olur. Zemin reaksiyon modülü k ile ifade edilecektir. Zemin reaksiyon modülü, zemin yatak katsayısı ile zemine oturan kirişin kesit alan genişliğinin çarpımına eşittir. Winkler zemin modeli ana hatlarıyla Şekil 1.1’de gösterilmiştir.



Şekil 1.1 Elastik Zemine Oturan Kirişler İçin Winkler Zemin Modeli

1.2. KONU İLE İLGİLİ ÇALIŞMALAR

Yatak katsayısının değeri birçok etkene, özellikle zeminin elastik özelliklerine ve yüklü alanın boyutlarına bağlıdır. Winkler tarafından geliştirilen yatak katsayısı kavramı, 1942’de Zimmermann [2] tarafından, bütün uzunlukları boyunca balast üzerine oturan demiryolu traverslerinin hesabı amacıyla kullanılmıştır. Bu araştırmacılar uygulamada yaygın olarak kullanılan zemin türleri için yatak katsayısı k_0 değerlerini elde etmişlerdir.

Winkler zemin tipi üzerinde 1946’da Hetenyi [3] çalışmış ve kesin çözümlerle uğraşmıştır. Kesin çözümlerde karşılaşılan zorluklardan dolayı bir çok araştırmacı çeşitli yaklaşık metodlar geliştirerek konuyu ele almışlardır.

1960’da Iyengar ve Anantharamu [4], elastik zemine oturan kirişlerin davranışlarını seriler yardımıyla incelemiş ve buna ait eğrileri vermişlerdir. Aynı yıl, bu tür kirişlerin Malter [5] tarafından sonlu elemanlar yöntemiyle çözümü geliştirilmiştir.

Bu çalışmada üzerinde durduğumuz doğru eksenli çubuklar için taşıma matrisi yöntemi ile 1964’de İnan [6] tarafından genel bir çözüm yöntemi geliştirilmiş ve buna ait taşıma matrisi verilmiştir. Fakat bizim çalışmamızda ele alınan kirişlerdeki kesme etkisi, İnan tarafından hesaplara dahil edilmemiştir.

Yine 1964’de Dodge [7] tarafından yayınlanmış çalışmada elastik zemin üzerine oturan yarı sonsuz ve sonlu uzunluktaki kirişlerin davranışları ile ilgili tesir fonksiyonları ve buna ait eğriler verilmiştir. Aynı konu ile ilgili olarak 1965’te Donalt ve diğerleri [8], bu tür kirişlerin orta noktasından tekil yük ve eğilme momenti etkimesi durumunu ele almıştır. Bu iki çalışmada kirişlerin davranışı ile ilgili çizelgeler de verilmiştir.

1966’da ise Miranda ve Nair [9], sonlu uzunluktaki elastik zemine oturan kirişlerin diferansiyel denkleminin özel fonksiyonlarla çözümünü yapmış ve bununla ilgili sayısal örnekler vermişlerdir.

1969’da Durelli ve diğerleri [10] tarafından, elastik zemine oturan sonlu ve sonsuz uzunlukta olan kirişlerin fotoelastik çalışması yapılmıştır. Bu kirişlerin bir ve iki noktadan daha yüklenerek davranışları incelenip bulunan sonuçlar teorik çözümle karşılaştırılmıştır. Bu çalışmadan sonra 1970’de Munther [11], aynı durumdaki kirişlerin davranışlarını sonlu elemanlar yöntemi ile incelemiş ve bulunan sonuçları,

fotoelastik çalışmadan elde edilen sonuçlarla birlikte çizilen eğriler üzerinde göstermiştir.

Yine 1970’de Weistman [12] sadece basınca çalışan Winkler ve Reissner zemin modellerini kullanarak bir çalışma yapmıştır. Weistman bu çalışmasında, elastik zemin üzerine oturan ortasından tekil yükle yüklü sonlu bir kirişin, çökme ve kesit tesirlerine ait grafiklerini vermiştir.

1971’de Rao ve diğerleri [13] tarafından yapılan çalışmada da sadece ortadan tekil yükle yüklü kirişleri ele alarak başlangıç değerleri yöntemi ile çözüme ulaşmışlardır. Bu kirişlerle ilgili çizelge ve eğriler de verilmiştir.

1982’de Ting [14], Winkler zemini üzerindeki elastik mesnetli sonlu kirişin diferansiyel denkleminin çözümünü yapmıştır. Bu çözüm farklı sınır şartlarına sahip elastik temeller üzerindeki kirişlere benzetilerek kullanılabilir.

1983’te Kobayashi ve Sonoda [15], lineer viskoelastik zemine oturan Timoshenko kirişlerinin kuasi-statik eğilme problemi üzerinde çalışmışlardır. Bu problemin çözümünü seriler yardımıyla yapmışlardır. Kesme etkisi göz önüne alınmış ve problem Winkler hipotezine uygun bir şekilde çözülmüştür.

1983’te Ting ve diğerleri [16], elastik Winkler zemini üzerine oturan her iki ucundan basit mesnetle mesnetlenmiş yayılı yükle yüklü sonlu uzunluktaki kirişin çökme ve kesit tesirlerine ait tablolar vermişlerdir. Yine aynı yıl Ting ve diğerleri [17], düzlem çerçeve analizi için tekil yük, tekil moment ve lineer olarak yayılı kuvvetlere bağlı elastik zemin üzerindeki kiriş için yük eleman vektörleri ve sonlu eleman rijitlik matrisini geliştirmişlerdir. Bu rijitlik matrisinin deplasman metoduna kolaylıkla uygulanabileceğini belirtmişlerdir.

1985’de Eisenberg ve Yankalevski [18], elastik zemine oturan kirişlerin kesin rijitlik matrisini formüle etmişlerdir. Winkler zemini üzerindeki bir kirişin sürekli bir parçasını kesin olarak temsil etmesi için bir eleman gereklidir. Bundan dolayı tipik bir problemin çözümü için birkaç eleman yeterlidir.

1987’de Lin ve Adams [19] tarafından çekme gerilmesi almayan Winkler zemini üzerine oturan, kendi ağırlığına ek olarak üzerinde aynı hızla hareket eden bir çift yük etkisi dikkate alınarak elastik kirişin davranışı incelenmiştir. Çalışmalarında sonuçlar tekil yüklere, hızlarına ve zeminden ayrılma noktalarına bağlı olarak elde edilmiştir.

1988’de Celep ve diğeri [20], yayılı yük, tekil yük ve moment etkisi altındaki kirişin, çekme gerilmesi almayan elastik Winkler zemini üzerine oturması halinde statik ve dinamik davranışını incelemişlerdir. Çalışmalarında statik ve dinamik eksantrik yüklemeler altında kiriş deformasyonu ve zeminden ayrılma noktalarına ait grafikler vermişlerdir.

1988’de Elmas [21], elastik zemine oturan sonlu uzunluktaki ahşap ve betonarme kirişlerin davranışlarını incelemiştir. Bu çalışmada, kirişin orta noktasından etkiyen tekil yükün limit değeri araştırılmıştır. Ayrıca farklı malzeme ve boyutların, kirişlerin davranışlarını ve limit yükü nasıl etkilediği de incelenmiştir.

Bu çalışmada taşıma matrisinin elde edilmesi için kullanılan idempotent ve nil potenslere ait özellikler 1989’da Cinemre [22] tarafından anlatılmıştır. Bu anlatılanlar uygulamalar ile pekiştirilmiştir.

1993’te Doğan [23] tarafından yapılan çalışmada, zeminin basınç ve çekmede farklı davranış gösterdiği kabul edilerek elastik zemine oturan ağırlıksız kirişlerin statik ve dinamik yükler altındaki davranışları incelenmiştir.

1994’te Kadioğlu [24] Winkler zemin modelini ele alarak, elastik zemine oturan doğru ve daire eksenli kirişlerin çeşitli yüklemeler altındaki davranışlarını incelemiştir.

Yine 1994’te Zubaroğlu [25] Winkler zemini üzerine oturan daire eksenli çubukların çeşitli yüklemeler altındaki davranışlarını incelemiştir. Başlangıç değerleri metodunu kullanarak elastik zemine oturan daire eksenli çubuklara ait kapalı çözümü elde etmiştir.

1995’te Aydoğan [26] elastik zemine oturan kirişlerde kesme etkisini incelemiştir. Buna ait rijitlik matrisini düzlem çerçeveler için diferansiyel denklem yaklaşımı ile geliştirmiştir. Zemin modeli olarak Winkler zemini seçilmiştir. Elastik zemin üzerine oturan kirişlerin kesit alanı ters T biçiminde seçilmiştir. Buna neden olarak, bu kesit biçiminin ayırık kolon yüklerine maruz kalması ve kesme etkisinin düşünülmesi için daha uygun olduğu savunulmuştur. Fortran dilinde bir bilgisayar programı hazırlamıştır.

2000’de Yin [27] elastik zemine oturan betonarme Timoshenko kirişleri için kapalı çözümü elde etmiştir. Çözüm yöntemi olarak Fourier serilerini kullanmıştır. Probleme ait çökme, dönme, moment ve kesme kuvveti grafiklerini vermiştir.

2002’de Çengel [28] elastik zemine oturan çerçeve sistemler üzerinde çalışmıştır. Zemin modeli olarak Winkler zemin modelini seçmiştir. Zemine oturan kirişler için hesap yapılırken, kesme etkisini göz önüne almamıştır. Çözüm yöntemi olarak başlangıç değerler metodunu kullanmıştır. Problemin statığı yanında, çerçeve sistemin titreşim frekanslarının, zeminin özelliğinin değişmesine bağlı olarak ne şekilde değişiklik gösterdiğini de incelemiştir.

2003’de Ergüven ve Gedikli [29], Winkler zemini üzerine oturan Timoshenko kirişi için bir karışık sonlu eleman formülasyonu elde etmişlerdir. Bu çözüme ait uygulamalarda sonuçları Bernoulli-Euler kiriş teorisi, Timoshenko kiriş teorisi ve Reddy tarafından kirişler için geliştirilen teoriden elde edilen sonuçlarla kıyaslamışlardır.

Yine 2003’de Antes [30], Timoshenko kirişlerine ait temel çözüm ve integral denklemleri üzerine bir çalışma yapmıştır. Yaptığı uygulamalarda Timoshenko teorisi ve Euler teorisinden elde ettiği sonuçları grafikler üzerinde anlatmıştır.

1.3. ÇALIŞMANIN AMACI

Bu çalışmada elastik zemin üzerine oturan Timoshenko kirişleri ele alınmıştır. Elastik zemin modeli olarak Winkler zemin modeli seçilmiştir. Bu modelin avantajı birçok mühendislik probleminde kullanılabilir olması ve iyi sonuç vermesidir.

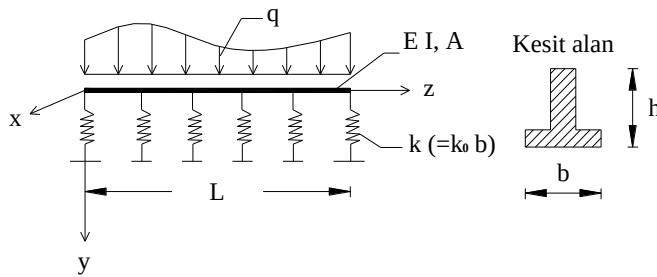
Çalışmadaki asıl amaç, taşıma matrisi yöntemi kullanılarak Winkler zemin modeli üzerine oturan Timoshenko kirişlerine ait kapalı çözüme ulaşmak ve kesme etkisini incelemektir. Bu şekildeki bir çalışmaya literatür araştırması sonucunda rastlanmamıştır. Kesme etkisinin araştırılması amacıyla yapılan birçok çalışma vardır. Ancak bu çalışmalar yaklaşık yöntemler kullanılarak yapılmıştır.

Taşıma matrisinin elde edilmesi sırasında elastik zemine oturan kirişe ait karakteristik denklemin köklerine bağlı olarak idempotent ve nilpotentler kullanılmıştır. Yapılan uygulamalarda sonuçlar kesme etkisinin dikkate alınmadığı kirişlerden elde edilen sonuçlarla kıyaslanmıştır. Çökme, moment ve kesme kuvveti diyagramları gösterilmiştir.

2. ELASTİK ZEMİNE OTURAN TIMOSHENKO KİRİŞİ

2.1. FORMÜLASYON

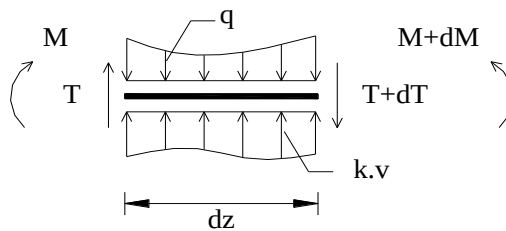
Elastik zemine oturan Timoshenko kirişine ait, seçilen eksen takımı ve kesit karakteristik özellikleri Şekil 2.1’de gösterilmiştir. [26]



Şekil 2.1 Elastik Zemine Oturan Timoshenko Kirişi

Bu şekilde EI kirişin eğilme rijitliğini, A kesit alanını, L uzunluğunu, b zemine oturan yüzünün genişliğini, h yüksekliğini, k zemin reaksiyon modülünü, k_0 zemin yatak katsayısını, q ise düzgün olmayan yayılı yükü simgelemektedir.

Bu kirişten alınan dz uzunluğundaki diferansiyel parça üzerindeki düşey yükler ve moment dengesi Şekil 2.2’de gösterilmiştir.



Şekil 2.2 Kiriş Parçasına Ait Kesit Tesirleri

Buradaki kesit tesirleri için, sağ kesitte eksen takımıyla çakışan, sol kesitte ise eksen takımıyla çakışmayan kesit tesirleri pozitif kabul edilmiştir. Şekil 2.2’de M momenti, T kesme kuvvetini, v ise birim çökmeyi belirtmektedir. Y eksenini yönündeki çökme değerleri pozitif kabul edilmiştir.

Kesme etkisinden dolayı meydana gelen dönme,

$$\gamma = \frac{sT}{GA} \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada T kesme kuvveti, G kayma modülü, A kesit alan, s nümerik çarpanı ise kesit üzerindeki kayma gerilmelerinin üniform olarak dağılmadıklarını karakterize etmektedir. Bu nümerik çarpan,

$$s = \frac{1}{A} \iint_A \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^2 dA \quad (2.2)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Burada τ_0 ortalama kayma gerilmesidir. [6]

Kesitin dönmesi, (2.3) denkleminde Ω ile gösterilmiştir. Dönüş yönü olarak, saat ibresinin dönüş yönünün tersi pozitif kabul edilmiştir.

$$\Omega = \gamma - v' \quad (2.3)$$

Elastik zemine oturan Timoshenko kirişleri için uygunluk ve denge denklemleri sırasıyla;

$$\frac{dv}{dz} = -\Omega + \frac{sT}{GA} \quad (2.4)$$

$$\frac{d\Omega}{dz} = \frac{M}{EI} \quad (2.5)$$

$$\frac{dM}{dz} = T \quad (2.6)$$

$$\frac{dT}{dz} = -q + kv \quad (2.7)$$

Bu dört denkleme ait Diferansiyel Geçiş Matrisi aşağıda tanımlanmaktadır. [6]

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \frac{s}{GA} \\ 0 & 0 & \frac{1}{EI} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Durum vektörü $S_o(z)$, türevleri S' ile diferansiyel geçiş matrisi arasında,

$$S_o'(z) = D_o S_o(z) \quad (2.9)$$

bağıntısı bulunmaktadır. [6]

2.2. ÇÖZÜM

Taşıma matrisi olarak adlandırılan, $F_o = e^{zD_o}$ matris fonksiyonunu idempotent ve nilpotentler yardımıyla hesap edilmeye çalışılacaktır. [25]

Matris fonksiyonunun idempotentler ve nilpotentler cinsinden spektral açılımı,

$$D_o = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_{o_i} + Q_{o_i} \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Bu denklemde n farklı kök sayısını, λ_i elde edilen karakteristik denklemin farklı köklerini, P_{o_i} idempotentlerini, Q_{o_i} ise nilpotentlerini simgelemektedir. Aynı şekilde elde edilmek istenen $\Phi(D_o)$ matris fonksiyonunun idempotent, nilpotent ve elde edilen köklerin, $\Phi(\lambda_i)$ şeklindeki ifadelerine bağlı genel formu,

$$\Phi(D_o) = \sum_{i=1}^n \left\{ \Phi(\lambda_i) P_{o_i} + \sum_{g=1}^{S_k-1} \frac{\Phi^g(\lambda_i)}{g!} Q_{o_i}^g \right\} \quad (2.11)$$

ifade edilmektedir. Φ^g λ_i 'ye göre türevi, $Q_{o_i}^g$ nilpotentin kuvvetini, S_k ise katlı kök derecesini göstermektedir. $g = S_k - 1$ anlamında kullanılmaktadır.

Elastik zemine oturan Timoshenko kirişinin karakteristik denklem ifadesi ve bu denkleme ait kökler aşağıda verilmiştir. [26]

$$\lambda^4 - \frac{sk}{GA} \lambda^2 + \frac{k}{EI} = 0 \quad (2.12)$$

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{sk}{2GA} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4G^2 A^2}{s^2 k EI}} \right) \quad (2.13)$$

Karakteristik denklemin köklerinin elde edildiği (2.13) denkleminde boyutsuz bir parametre olan,

$$\alpha = \frac{4G^2 A^2}{s^2 kEI} \quad (2.14)$$

kabul edilmiştir. Böylece (2.13) denklemi,

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{sk}{2GA} (1 \pm \sqrt{1-\alpha}) \quad (2.15)$$

şeklini almaktadır. Bu denklem, α 'nın 1'den büyük, 1'den küçük ve 1'e eşit olmasına bağlı olarak farklı köklere sahip olmaktadır. Şimdi bu durumları sırasıyla inceleyelim.

2.2.1. $\alpha > 1$ Durumu İçin Taşıma Matrisinin Elde Edilmesi

Mühendislik uygulamalarında sıkça karşılaşılan duruma ait taşıma matrisi, α 'nın 1'den büyük olduğu durum için elde edilmektedir. Diğer durumların gerçekleşebilmesi için, yüksekliğinin genişliğine oranı yaklaşık olarak 200-250 misli bir beton kesit düşünmemiz gerekmektedir.

Bu durum için elde edilen köklere ait bazı parametre kabulleri yapılmıştır. Bunlar;

$$\beta = \sqrt{\alpha - 1} \quad (2.16)$$

$$\tan \theta = \beta \quad (2.17)$$

$$\theta = 2\omega \quad (2.18)$$

şeklindedir. Bu ifadelerden sonra (2.15) denklemi α 'nın 1'den büyük olması durumunda,

$$\lambda_{1,2}^2 = \left(\frac{sk}{2GA} \sqrt{1+\beta^2} \right) e^{\pm i\theta} \quad (2.19)$$

şeklinde ifade edilir. Bu denklemden dört tane farklı kompleks sayı içeren kök elde edilir. Dolayısıyla bu durum için dört adet 4x4 boyutunda idempotent elde edilmektedir. Tekrarlı kök olmadığı için Nilpotenti yoktur.

2.2.1.1. $\alpha > 1$ Durumu İçin Elde Edilen İdemPotentleri

İdempotentlere ait özellikler,

1. Farklı indislere sahip idempotentlerinin toplamı birim matrise eşit olmaktadır.
 2. Farklı indislere sahip idempotentlerinin birbirleri ile çarpımı sıfırdır.
 3. Aynı indisli idempotentlerinin çarpımı, kendilerine eşit olmaktadır.
- şeklinde tanımlanabilmektedir. [22]

Bu duruma ait denklem sistemi (2.20) denklemi ile gösterilmiştir.

$$\begin{aligned} P_{o_{\omega}} + P_{o_{\omega}} + P_{o_{\omega}} + P_{o_{\omega}} &= I_{o_{\omega}} \\ \lambda_1 P_{o_{\omega}} + \lambda_2 P_{o_{\omega}} + \lambda_3 P_{o_{\omega}} + \lambda_4 P_{o_{\omega}} &= D_{o_{\omega}} \\ \lambda_1^2 P_{o_{\omega}} + \lambda_2^2 P_{o_{\omega}} + \lambda_3^2 P_{o_{\omega}} + \lambda_4^2 P_{o_{\omega}} &= D_{o_{\omega}}^2 \\ \lambda_1^3 P_{o_{\omega}} + \lambda_2^3 P_{o_{\omega}} + \lambda_3^3 P_{o_{\omega}} + \lambda_4^3 P_{o_{\omega}} &= D_{o_{\omega}}^3 \end{aligned} \quad (2.20)$$

burada $P_{o_{\omega}}$ idempotentleri, $I_{o_{\omega}}$ birim matrisi, $D_{o_{\omega}}$ diferansiyel geçiş matrisi ve kuvvetlerini, λ_i ise karakteristik denklemin köklerini ve kuvvetlerini simgelemektedir. Hesaplarda kullanılan matrislerin tümü 4x4 boyutundadır.

İdempotentlerin hesabı sırasında matris elemanlarının uzun ve karışık olmaması için bazı parametre kabulleri yapılmıştır. Bunlar aşağıda tanımlanmıştır.

$$B = \frac{i}{4 \cdot \sin 2\omega} \quad (2.21)$$

$$\mu = 2s(1 + v) \quad (2.22)$$

$$D^* = EA \quad (2.23)$$

$$R^* = \frac{1}{r^2} = \frac{A}{I} \quad (2.24)$$

Bu denklemlerde, v boyutsuz poisson oranını, r ise boyutu metre olan atalet yarıçapını simgelemektedir.

İdempotent elemanları yazılırken P_{ij} gösterimi kullanılmıştır. Bu gösterimde i matristeki satır numarasını, j sütun sayısını, numarasını simgelemektedir. Örnek olarak, P_{12} ifadesi ile bahis edilen idempotentine ait matrisin 1 no'lu satır ve 2 no'lu sütununda bulunan eleman ifade edilmektedir.

P_{0k} idempotentine ait matrisin elemanları,

$$\begin{aligned}
P_{11} &= B \left(e^{-2i\omega} - \mu \sqrt{\frac{k}{D^* R^*}} \right) \\
P_{12} &= \frac{B e^{-i\omega} \left(\mu \sqrt{k} - e^{-2i\omega} \sqrt{D^* R^*} \right)}{(k D^*)^{1/4} (R^*)^{3/4}} \\
P_{13} &= B \sqrt{\frac{R^*}{k D^*}} \\
P_{14} &= \frac{B e^{-i\omega} \left\{ D^* R^* + \mu \sqrt{k} \left(e^{-2i\omega} \sqrt{D^* R^*} - \mu \sqrt{k} \right) \right\}}{(D^*)^{5/4} (k R^*)^{3/4}} \\
P_{21} &= -B e^{-i\omega} \left(\frac{k R^*}{D^*} \right)^{1/4} \\
P_{22} &= B e^{-2i\omega} \\
P_{23} &= \frac{B e^{-3i\omega}}{k^{1/4}} \left(\frac{R^*}{D^*} \right)^{3/4} \\
P_{24} &= -B \sqrt{\frac{R^*}{k D^*}} \\
P_{31} &= -B \sqrt{\frac{k D^*}{R^*}} \\
P_{32} &= B e^{-i\omega} (k^{1/4}) \left(\frac{D^*}{R^*} \right)^{3/4} \\
P_{33} &= B e^{-2i\omega} \\
P_{34} &= \frac{B e^{-i\omega} \left(e^{-2i\omega} \sqrt{D^* R^*} - \mu \sqrt{k} \right)}{(k D^*)^{1/4} (R^*)^{3/4}} \\
P_{41} &= \frac{B e^{-i\omega} (k^{3/4}) \left(e^{-2i\omega} \sqrt{D^* R^*} - \mu \sqrt{k} \right)}{(D^*)^{1/4} (R^*)^{3/4}} \\
P_{42} &= B \sqrt{\frac{k D^*}{R^*}}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

$$P_{43} = B e^{-i\omega} \left(\frac{k R^*}{D^*} \right)^{1/4} \quad (2.25)$$

$$P_{44} = B \left(e^{-2i\omega} - \mu \sqrt{\frac{k}{D^* R^*}} \right)$$

şeklinde elde edilmiştir.

$P_{0\mathbb{Z}}$ idempotentine ait matrisin elemanları,

$$P_{11} = B \left(e^{-2i\omega} - \mu \sqrt{\frac{k}{D^* R^*}} \right)$$

$$P_{12} = - \frac{B e^{-i\omega} \left(\mu \sqrt{k} - e^{-2i\omega} \sqrt{D^* R^*} \right)}{(k D^*)^{1/4} (R^*)^{3/4}}$$

$$P_{13} = B \sqrt{\frac{R^*}{k D^*}}$$

$$P_{14} = - \frac{B e^{-i\omega} \left\{ D^* R^* + \mu \sqrt{k} \left(e^{-2i\omega} \sqrt{D^* R^*} - \mu \sqrt{k} \right) \right\}}{(D^*)^{5/4} (k R^*)^{3/4}}$$

$$P_{21} = B e^{-i\omega} \left(\frac{k R^*}{D^*} \right)^{1/4} \quad (2.26)$$

$$P_{22} = B e^{-2i\omega}$$

$$P_{23} = - \frac{B e^{-3i\omega}}{k^{1/4}} \left(\frac{R^*}{D^*} \right)^{3/4}$$

$$P_{24} = -B \sqrt{\frac{R^*}{k D^*}}$$

$$P_{31} = -B \sqrt{\frac{k D^*}{R^*}}$$

$$P_{32} = -B e^{-i\omega} (k^{1/4}) \left(\frac{D^*}{R^*} \right)^{3/4}$$

$$P_{33} = B e^{-2i\omega}$$

$$P_{34} = - \frac{B e^{-i\omega} \left(e^{-2i\omega} \sqrt{D^* R^*} - \mu \sqrt{k} \right)}{(k D^*)^{1/4} (R^*)^{3/4}}$$

$$\begin{aligned}
P_{41} &= -\frac{Be^{-i\omega} \left(k^{3/4}\right) \left(e^{-2i\omega} \sqrt{D^* R^*} - \mu \sqrt{k}\right)}{\left(D^*\right)^{1/4} \left(R^*\right)^{3/4}} \\
P_{42} &= B \sqrt{\frac{k D^*}{R^*}} \\
P_{43} &= -Be^{-i\omega} \left(\frac{k R^*}{D^*}\right)^{1/4} \\
P_{44} &= B \left(e^{-2i\omega} - \mu \sqrt{\frac{k}{D^* R^*}}\right)
\end{aligned} \tag{2.26}$$

şeklinde elde edilmiştir.

P_{03} idempotentine ait matrisin elemanları,

$$\begin{aligned}
P_{11} &= -B \left(e^{2i\omega} - \mu \sqrt{\frac{k}{D^* R^*}}\right) \\
P_{12} &= -\frac{Be^{i\omega} \left(\mu \sqrt{k} - e^{2i\omega} \sqrt{D^* R^*}\right)}{\left(k D^*\right)^{1/4} \left(R^*\right)^{3/4}} \\
P_{13} &= -B \sqrt{\frac{R^*}{k D^*}} \\
P_{14} &= -\frac{Be^{i\omega} \left\{D^* R^* + \mu \sqrt{k} \left(e^{2i\omega} \sqrt{D^* R^*} - \mu \sqrt{k}\right)\right\}}{\left(D^*\right)^{5/4} \left(k R^*\right)^{3/4}} \\
P_{21} &= Be^{i\omega} \left(\frac{k R^*}{D^*}\right)^{1/4} \\
P_{22} &= -Be^{2i\omega} \\
P_{23} &= -\frac{Be^{3i\omega}}{k^{1/4}} \left(\frac{R^*}{D^*}\right)^{3/4} \\
P_{24} &= B \sqrt{\frac{R^*}{k D^*}} \\
P_{31} &= B \sqrt{\frac{k D^*}{R^*}}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned}
P_{32} &= -Be^{i\omega} \left(k^{1/4} \right) \left(\frac{D^*}{R^*} \right)^{3/4} \\
P_{33} &= -Be^{2i\omega} \\
P_{34} &= \frac{Be^{i\omega} \left(\mu\sqrt{k} - e^{2i\omega} \sqrt{D^* R^*} \right)}{\left(kD^* \right)^{1/4} \left(R^* \right)^{3/4}} \\
P_{41} &= \frac{Be^{i\omega} \left(k^{3/4} \right) \left(\mu\sqrt{k} - e^{2i\omega} \sqrt{D^* R^*} \right)}{\left(D^* \right)^{1/4} \left(R^* \right)^{3/4}} \\
P_{42} &= -B\sqrt{\frac{kD^*}{R^*}} \\
P_{43} &= -Be^{i\omega} \left(\frac{kR^*}{D^*} \right)^{1/4} \\
P_{44} &= -B \left(e^{2i\omega} - \mu\sqrt{\frac{k}{D^* R^*}} \right)
\end{aligned} \tag{2.27}$$

şeklinde elde edilmiştir.

P_{02} idempotentine ait matrisin elemanları,

$$\begin{aligned}
P_{11} &= -B \left(e^{2i\omega} - \mu\sqrt{\frac{k}{D^* R^*}} \right) \\
P_{12} &= \frac{Be^{i\omega} \left(\mu\sqrt{k} - e^{2i\omega} \sqrt{D^* R^*} \right)}{\left(kD^* \right)^{1/4} \left(R^* \right)^{3/4}} \\
P_{13} &= -B\sqrt{\frac{R^*}{kD^*}} \\
P_{14} &= \frac{Be^{i\omega} \left\{ D^* R^* + \mu\sqrt{k} \left(e^{2i\omega} \sqrt{D^* R^*} - \mu\sqrt{k} \right) \right\}}{\left(D^* \right)^{5/4} \left(kR^* \right)^{3/4}} \\
P_{21} &= -Be^{i\omega} \left(\frac{kR^*}{D^*} \right)^{1/4} \\
P_{22} &= -Be^{2i\omega}
\end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned}
P_{23} &= \frac{Be^{3i\omega}}{k^{1/4}} \left(\frac{R^*}{D^*} \right)^{3/4} \\
P_{24} &= B \sqrt{\frac{R^*}{kD^*}} \\
P_{31} &= B \sqrt{\frac{kD^*}{R^*}} \\
P_{32} &= Be^{i\omega} (k^{1/4}) \left(\frac{D^*}{R^*} \right)^{3/4} \\
P_{33} &= -Be^{2i\omega} \\
P_{34} &= -\frac{Be^{i\omega} (\mu\sqrt{k} - e^{2i\omega}\sqrt{D^*R^*})}{(kD^*)^{1/4} (R^*)^{3/4}} \\
P_{41} &= -\frac{Be^{i\omega} (k^{3/4}) (\mu\sqrt{k} - e^{2i\omega}\sqrt{D^*R^*})}{(D^*)^{1/4} (R^*)^{3/4}} \\
P_{42} &= -B \sqrt{\frac{kD^*}{R^*}} \\
P_{43} &= Be^{i\omega} \left(\frac{kR^*}{D^*} \right)^{1/4} \\
P_{44} &= -B \left(e^{2i\omega} - \mu \sqrt{\frac{k}{D^*R^*}} \right)
\end{aligned} \tag{2.28}$$

şeklinde elde edilmiştir.

Karakteristik denklemin dört ayrı köke sahip olması durumunda idempotentleri Sylvester Teoremi adı verilen bir yöntemle de hesaplanabilmektedir. Böylece hesaplanan idempotentlerinin doğruluğu kanıtlanmaktadır. Sylvester Teoremi, n kök sayısını ifade etmek üzere (2.29) denkleminde ifade edilmiştir. Hesaplanan idempotentleri ile bu yöntemle elde edilen idempotentleri aynen uyuşmaktadır.

$$P_{\%} = \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^n (\lambda_{j\%} I_{\%} - D_{\%})}{\prod_{j=1, j \neq i}^n (\lambda_j - \lambda_i)} \tag{2.29}$$

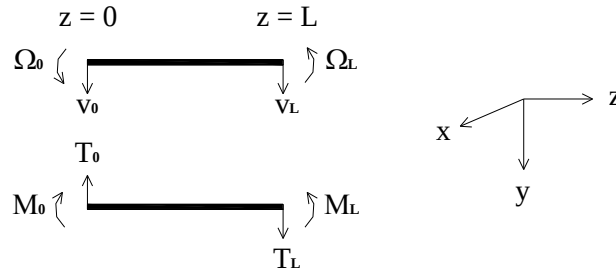
2.2.1.2. $\alpha > 1$ Durumu İçin Elde Edilen Taşıma Matrisi

Çökme, dönme, moment ve kesme kuvvetine ait değerler Durum vektörü adı verilen, boyutu n durum büyüklükleri sayısı olmak üzere $n \times 1$ boyutunda olan bir matris yardımıyla simgelenmektedir. Başlangıçtaki ($z = 0$) durum büyüklüklerine giriş büyüklükleri, sondakilere ($z = L$) çıkış büyüklükleri adı verilmek üzere bunlar arasındaki ilişkiyi kuran matrise Taşıma Matrisi adı verilmektedir. [6]

$$S_{\alpha}(z) = F_{\alpha}(z) \cdot S_{\alpha}(0) \quad (2.30)$$

şeklinde tarif edilmektedir. Bu denklemde S_{α} durum vektörünü, F_{α} ise taşıma matrisini simgelemektedir.

Taşıma matrisinin elde edilmesi sırasında kesit tesirleri için, sağ kesitte eksen takımıyla çakışan, sol kesitte ise eksen takımıyla çakışmayan kesit tesirleri pozitif kabul edilmiştir. Durum vektörüne ait çökme, dönme, kesme kuvveti ve moment büyüklükleri ile seçilen eksen takımı Şekil 2.3’de gösterilmiştir.



Şekil 2.3 Durum Vektörüne Ait Büyüklükler İçin Pozitif Yönler

Bu durum için taşıma matrisinin ifadesi (2.31) denkleminde ifade edilmektedir.

$$F_{\alpha}(z) = e^{zD_{\alpha}} = e^{z\lambda_1} P_{\alpha 1} + e^{z\lambda_2} P_{\alpha 2} + e^{z\lambda_3} P_{\alpha 3} + e^{z\lambda_4} P_{\alpha 4} \quad (2.31)$$

Taşıma matrisinin elemanları üzerinde boyut analizinin kolay yapılabilmesi, elemanların uzun ve karışık ifadelerle belirtilmemesi için bazı boyutsuz katsayı kabulleri yapılmıştır. Bu katsayılar denklem (2.32)’de gösterilmiştir.

$$\phi = z \left(\frac{kR^*}{D^*} \right)^{1/4} \sin \omega \quad (2.32)$$

$$\varphi = z \left(\frac{kR^*}{D^*} \right)^{1/4} \cos \omega$$

$$a = \left(\frac{k}{E} \right)^{1/4}$$

$$T_1 = \mu(a^2) \sqrt{\frac{I}{A^2}}$$

$$T_2 = \frac{1}{2a} \left(\frac{I}{L^4} \right)^{1/4}$$

$$T_3 = \sin \phi \cdot \csc \omega \cdot \cosh \varphi$$

$$T_4 = -T_1 - 1 + 2 \cos 2\omega$$

$$T_5 = \cos \phi \cdot \sec \omega \cdot \sinh \varphi \quad (2.32)$$

$$T_6 = T_1 - 1 - 2 \cos 2\omega$$

$$T_7 = \frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{L^4}{I}}$$

$$T_8 = \frac{\mu}{a} \left(\frac{IL^4}{A^4} \right)^{1/4}$$

$$T_9 = a \cdot \mu^2 \left(\frac{I^3 \cdot L^4}{A^8} \right)^{1/4} - \frac{1}{a^3} \left(\frac{L^4}{I} \right)^{1/4}$$

$$T_{10} = \frac{1}{2a} \left(\frac{L^{12}}{I^3} \right)^{1/4}$$

Bu boyutsuz katsayıların yer aldığı taşıma matrisinin elemanları,

$$F_{11} = \cos \phi \cdot \cosh \varphi + (T_1 - \cos 2\omega) \frac{\sin \phi \cdot \sinh \varphi}{\sin 2\omega}$$

$$F_{12} = L \cdot T_2 (T_3 \cdot T_4 + T_5 \cdot T_6)$$

$$F_{13} = -\frac{1}{E \cdot L^2} \left(\frac{T_7 \cdot \sin \phi \cdot \sinh \varphi}{\sin 2\omega} \right) \quad (2.33)$$

$$F_{14} = \frac{1}{2 \cdot E \cdot L} \left\{ T_8 \cdot [(1 - 2 \cos 2\omega) \cdot T_3 + (1 + 2 \cos 2\omega) \cdot T_5] + T_9 \cdot [T_3 - T_5] \right\}$$

$$F_{21} = \frac{1}{L} \left(\frac{T_3 - T_5}{4 \cdot T_2} \right)$$

$$\begin{aligned}
F_{22} &= \cos \phi \cdot \cosh \varphi - \frac{\sin \phi \cdot \cos 2\omega \cdot \sinh \varphi}{\sin 2\omega} \\
F_{23} &= -\frac{T_{10}}{E.L^3} \left\{ T_3 \cdot (-1 + 2 \cos 2\omega) + \cos \phi \cdot \sinh \varphi (\sec \omega - 4 \cos \omega) \right\} \\
F_{24} &= \frac{1}{E.L^2} \left(\frac{T_7 \cdot \sin \phi \cdot \sinh \varphi}{\sin 2\omega} \right) \\
F_{31} &= E.L^2 \left(\frac{\sin \phi \cdot \sinh \varphi}{T_7 \cdot \sin 2\omega} \right) \\
F_{32} &= E.L^3 \left(\frac{T_5 - T_3}{4.T_{10}} \right) \\
F_{33} &= F_{22} \\
F_{34} &= -F_{12} \\
F_{41} &= k.F_{34} \\
F_{42} &= -F_{31} \\
F_{43} &= -F_{21} \\
F_{44} &= F_{11}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

şeklinde elde edilmiştir. Elde edilen bu taşıma matrisi (2.34) denklemindeki,

$$F_{0\wedge}(0) = I_{0\wedge} \tag{2.34}$$

taşıma matrisinin $z = 0$ değeri için birim matrise eşit olma özelliğini sağlamaktadır.

2.2.2. $\alpha < 1$ Durumu İçin Taşıma Matrisinin Elde Edilmesi

Mühendislik uygulamalarında bu durumun sıkça karşılaşılmayan bir durum olduğu daha önce belirtilmişti. Bu duruma ait dört adet farklı reel kök elde edilmiştir.

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \sqrt{\frac{\mu k + \sqrt{\mu^2 k^2 - 4kD^*R^*}}{2D^*}} \quad , \quad \lambda_2 = -\lambda_1 \\
\lambda_3 &= \sqrt{\frac{\mu k - \sqrt{\mu^2 k^2 - 4kD^*R^*}}{2D^*}} \quad , \quad \lambda_4 = -\lambda_3
\end{aligned} \tag{2.35}$$

İdempotentlerin elde edilişi sırasında, $\alpha > 1$ durumu ile aynı yol izlenmiştir.

2.2.2.1. $\alpha < 1$ Durumu İçin Elde Edilen İdempotentleri

$P_{0\frac{1}{2}}$ idempotentine ait elemanları kısa ve anlaşılır bir şekilde belirtmek için (2.36) denkleminde yeni bir parametre kabul edilmiştir.

$$m = k\mu^2 - 4D^*R^* \quad (2.36)$$

$P_{0\frac{1}{2}}$ idempotentine ait matrisin elemanları,

$$\begin{aligned} P_{11} &= \frac{\mu\sqrt{k} + \sqrt{m}}{4\sqrt{m}} \\ P_{12} &= -\frac{\sqrt{\mu k D^* + D^* \sqrt{km}}}{2\sqrt{2km}} \\ P_{13} &= -\frac{R^*}{2\sqrt{km}} \\ P_{14} &= \frac{(\mu\sqrt{km} + k\mu^2 - 2D^*R^*)}{2\sqrt{2km}(\mu k D^* + D^* \sqrt{km})} \\ P_{21} &= \frac{R^* \sqrt{k D^*}}{\sqrt{2m}(k\mu + \sqrt{km})} \\ P_{22} &= \frac{-\mu\sqrt{k} + \sqrt{m}}{4\sqrt{m}} \\ P_{23} &= -\frac{R^*(\mu\sqrt{k} - \sqrt{m})}{2\sqrt{2m}(\mu k D^* + D^* \sqrt{km})} \\ P_{24} &= \frac{R^*}{2\sqrt{km}} \\ P_{31} &= \frac{D^* \sqrt{k}}{2\sqrt{m}} \\ P_{32} &= -\frac{(D^*)^{3/2} \sqrt{k}}{\sqrt{2m}(k\mu + \sqrt{km})} \\ P_{33} &= \frac{-\mu\sqrt{k} + \sqrt{m}}{4\sqrt{m}} \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned}
P_{34} &= \frac{\sqrt{\mu k D^* + D^* \sqrt{km}}}{2\sqrt{2km}} \\
P_{41} &= \frac{\sqrt{\mu k^2 D^* + k D^* \sqrt{km}}}{2\sqrt{2m}} \\
P_{42} &= -\frac{D^* \sqrt{k}}{2\sqrt{m}} \\
P_{43} &= -\frac{R^* \sqrt{k D^*}}{\sqrt{2m(k\mu + \sqrt{km})}} \\
P_{44} &= \frac{\mu \sqrt{k} + \sqrt{m}}{4\sqrt{m}}
\end{aligned} \tag{2.37}$$

şeklinde elde edilmiştir.

$P_{0\frac{1}{2}}$ idempotentine ait matrisin elemanları,

$$\begin{aligned}
P_{11} &= \frac{\mu \sqrt{k} + \sqrt{m}}{4\sqrt{m}} \\
P_{12} &= \frac{\sqrt{\mu k D^* + D^* \sqrt{km}}}{2\sqrt{2km}} \\
P_{13} &= -\frac{R^*}{2\sqrt{km}} \\
P_{14} &= -\frac{(\mu \sqrt{km} + k\mu^2 - 2D^* R^*)}{2\sqrt{2km(\mu k D^* + D^* \sqrt{km})}} \\
P_{21} &= -\frac{R^* \sqrt{k D^*}}{\sqrt{2m(k\mu + \sqrt{km})}} \\
P_{22} &= \frac{-\mu \sqrt{k} + \sqrt{m}}{4\sqrt{m}} \\
P_{23} &= \frac{R^* (\mu \sqrt{k} - \sqrt{m})}{2\sqrt{2m(\mu k D^* + D^* \sqrt{km})}} \\
P_{24} &= \frac{R^*}{2\sqrt{km}}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned}
P_{31} &= \frac{D^* \sqrt{k}}{2\sqrt{m}} \\
P_{32} &= \frac{(D^*)^{3/2} \sqrt{k}}{\sqrt{2m(k\mu + \sqrt{km})}} \\
P_{33} &= \frac{-\mu\sqrt{k} + \sqrt{m}}{4\sqrt{m}} \\
P_{34} &= -\frac{\sqrt{\mu k D^* + D^* \sqrt{km}}}{2\sqrt{2km}} \\
P_{41} &= -\frac{\sqrt{\mu k^2 D^* + k D^* \sqrt{km}}}{2\sqrt{2m}} \\
P_{42} &= -\frac{D^* \sqrt{k}}{2\sqrt{m}} \\
P_{43} &= \frac{R^* \sqrt{k D^*}}{\sqrt{2m(k\mu + \sqrt{km})}} \\
P_{44} &= \frac{\mu\sqrt{k} + \sqrt{m}}{4\sqrt{m}}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

şeklinde elde edilmiştir.

P_{02} idempotentine ait matrisin elemanları,

$$\begin{aligned}
P_{11} &= \frac{-\mu\sqrt{k} + \sqrt{m}}{4\sqrt{m}} \\
P_{12} &= \frac{\sqrt{\mu k D^* - D^* \sqrt{km}}}{2\sqrt{2km}} \\
P_{13} &= \frac{R^*}{2\sqrt{km}} \\
P_{14} &= \frac{(\mu\sqrt{km} + 2D^* R^* - k\mu^2)}{2\sqrt{2km(\mu k D^* - D^* \sqrt{km})}} \\
P_{21} &= -\frac{R^* \sqrt{k D^*}}{\sqrt{2m(k\mu - \sqrt{km})}}
\end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned}
P_{22} &= \frac{\mu\sqrt{k} + \sqrt{m}}{4\sqrt{m}} \\
P_{23} &= \frac{R^*(\mu\sqrt{k} + \sqrt{m})}{2\sqrt{2m(\mu k D^* - D^*\sqrt{km})}} \\
P_{24} &= -\frac{R^*}{2\sqrt{km}} \\
P_{31} &= -\frac{D^*\sqrt{k}}{2\sqrt{m}} \\
P_{32} &= \frac{(D^*)^{3/2}\sqrt{k}}{\sqrt{2m(k\mu - \sqrt{km})}} \\
P_{33} &= \frac{\mu\sqrt{k} + \sqrt{m}}{4\sqrt{m}} \\
P_{34} &= -\frac{\sqrt{\mu k D^* - D^*\sqrt{km}}}{2\sqrt{2km}} \\
P_{41} &= -\frac{\sqrt{\mu k^2 D^* - k D^*\sqrt{km}}}{2\sqrt{2m}} \\
P_{42} &= \frac{D^*\sqrt{k}}{2\sqrt{m}} \\
P_{43} &= \frac{R^*\sqrt{k D^*}}{\sqrt{2m(k\mu - \sqrt{km})}} \\
P_{44} &= \frac{-\mu\sqrt{k} + \sqrt{m}}{4\sqrt{m}}
\end{aligned} \tag{2.39}$$

şeklinde elde edilmiştir.

P_{02} idempotentine ait matrisin elemanları aşağıda gösterilmektedir.

$$\begin{aligned}
P_{11} &= \frac{-\mu\sqrt{k} + \sqrt{m}}{4\sqrt{m}} \\
P_{12} &= -\frac{\sqrt{\mu k D^* - D^*\sqrt{km}}}{2\sqrt{2km}}
\end{aligned} \tag{2.40}$$

$$\begin{aligned}
P_{13} &= \frac{R^*}{2\sqrt{km}} \\
P_{14} &= -\frac{(\mu\sqrt{km} + 2D^*R^* - k\mu^2)}{2\sqrt{2km}(\mu kD^* - D^*\sqrt{km})} \\
P_{21} &= \frac{R^*\sqrt{kD^*}}{\sqrt{2m}(k\mu - \sqrt{km})} \\
P_{22} &= \frac{\mu\sqrt{k} + \sqrt{m}}{4\sqrt{m}} \\
P_{23} &= -\frac{R^*(\mu\sqrt{k} + \sqrt{m})}{2\sqrt{2m}(\mu kD^* - D^*\sqrt{km})} \\
P_{24} &= -\frac{R^*}{2\sqrt{km}} \\
P_{31} &= -\frac{D^*\sqrt{k}}{2\sqrt{m}} \\
P_{32} &= -\frac{(D^*)^{3/2}\sqrt{k}}{\sqrt{2m}(k\mu - \sqrt{km})} \\
P_{33} &= \frac{\mu\sqrt{k} + \sqrt{m}}{4\sqrt{m}} \\
P_{34} &= \frac{\sqrt{\mu kD^* - D^*\sqrt{km}}}{2\sqrt{2km}} \\
P_{41} &= \frac{\sqrt{\mu k^2D^* - kD^*\sqrt{km}}}{2\sqrt{2m}} \\
P_{42} &= \frac{D^*\sqrt{k}}{2\sqrt{m}} \\
P_{43} &= -\frac{R^*\sqrt{kD^*}}{\sqrt{2m}(k\mu - \sqrt{km})} \\
P_{44} &= \frac{-\mu\sqrt{k} + \sqrt{m}}{4\sqrt{m}}
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Bulunan idempotentlerinin doğruluğu Sylvester Teoremi ile kanıtlanmıştır.

2.2.2.2. $\alpha < 1$ Durumu İçin Elde Edilen Taşıma Matrisi

Bu duruma ait taşıma matrisini elde etmek için izlenen hesap adımları, $\alpha > 1$ durumuna ait taşıma matrisini elde etmek için izlenen yol ile aynıdır. Taşıma matrisinin karmaşık ifadelerle tarif edilmemesi için denklem (2.41)'de gösterilen bazı boyutsuz katsayı kabulleri yapılmıştır.

$$\begin{aligned}
\phi^* &= z \left(\sqrt{\frac{\mu k - \sqrt{km}}{2D^*}} \right) \\
\phi^* &= z \left(\sqrt{\frac{\mu k + \sqrt{km}}{2D^*}} \right) \\
Y_1 &= \sqrt{\frac{A}{L^2}} \\
Y_2 &= \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - \alpha}}}{\sqrt{2a^4\mu(1 - \alpha)}} \\
Y_3 &= \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 - \alpha}}}{\sqrt{2a^4\mu(1 - \alpha)}} \\
Y_4 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L^2\mu}{2A(1 - \alpha)a^4}} \\
Y_5 &= \frac{\{2(-1 + \sqrt{1 - \alpha}) + \alpha\}}{\sqrt{1 - \sqrt{1 - \alpha}}} \\
Y_6 &= \frac{\{2(1 + \sqrt{1 - \alpha}) - \alpha\}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - \alpha}}} \\
Y_7 &= \sqrt{\frac{2A^3L^2}{I^2a^4\mu^3(1 - \alpha)}} \\
Y_8 &= \sqrt{\frac{A.L^6}{2I^2a^4\mu(1 - \alpha)}} \\
Y_9 &= \frac{(1 + \sqrt{1 - \alpha})^{3/2}}{\sqrt{\alpha}}
\end{aligned} \tag{2.41}$$

$$Y_{10} = \frac{(1 - \sqrt{1 - \alpha})^{3/2}}{\sqrt{\alpha}} \quad (2.41)$$

$$Y_{11} = \sqrt{\frac{2A^3}{L^6 a^4 \mu^3 (1 - \alpha)}}$$

Bu durum için $F_{0\wedge}(z)$ taşıma matrisinin elemanları,

$$F_{11} = \frac{1}{2} \left\{ \cosh \phi^* + \cosh \varphi^* + \frac{(-\cosh \phi^* + \cosh \varphi^*)}{\sqrt{1 - \alpha}} \right\}$$

$$F_{12} = L.Y_1(Y_2.\sinh \phi^* - Y_3.\sinh \varphi^*)$$

$$F_{13} = \frac{A}{L.k} \left(\frac{\cosh \phi^* - \cosh \varphi^*}{\mu \sqrt{1 - \alpha}} \right)$$

$$F_{14} = \frac{Y_4}{E.L} (Y_5.\sinh \phi^* + Y_6.\sinh \varphi^*)$$

$$F_{21} = \frac{Y_7}{L} \left(-\frac{\sinh \phi^*}{\sqrt{1 - \sqrt{1 - \alpha}}} + \frac{\sinh \varphi^*}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - \alpha}}} \right)$$

$$F_{22} = \frac{1}{2} \left\{ \cosh \phi^* + \cosh \varphi^* + \frac{(\cosh \phi^* - \cosh \varphi^*)}{\sqrt{1 - \alpha}} \right\}$$

$$F_{23} = \frac{Y_8}{E.L^3} (Y_9.\sinh \phi^* - Y_{10}.\sinh \varphi^*) \quad (2.42)$$

$$F_{24} = -\frac{A}{L.k} \left(\frac{\cosh \phi^* - \cosh \varphi^*}{\mu \sqrt{1 - \alpha}} \right)$$

$$F_{31} = EA \left(\frac{-\cosh \phi^* + \cosh \varphi^*}{\mu \sqrt{1 - \alpha}} \right)$$

$$F_{32} = E.L^3.Y_{11} \left(\frac{\sinh \phi^*}{\sqrt{1 - \sqrt{1 - \alpha}}} - \frac{\sinh \varphi^*}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - \alpha}}} \right)$$

$$F_{33} = F_{22}$$

$$F_{34} = -F_{12}$$

$$F_{41} = k.F_{34}$$

$$F_{42} = -F_{31}$$

$$F_{43} = -F_{21} \quad (2.42)$$

$$F_{44} = F_{11}$$

şeklinde elde edilmiştir. Bu taşıma matrisi, taşıma matrisinin $z = 0$ değeri için birim matrise eşit olma özelliğini sağlamaktadır.

2.2.3. $\alpha = 1$ Durumu İçin Taşıma Matrisinin Elde Edilmesi

Mühendislik uygulamalarında bu durumla sıkça karşılaşılmadığı daha önce de açıklanmıştı.

Bu duruma ait çözüm yöntemi, karakteristik denklemin katlı köklere sahip olmasından dolayı daha önce bahsedilen iki duruma göre farklılıklar göstermektedir.

Elastik zemine oturan Timoshenko kirişine ait karakteristik denklemin μ , k , D^* ve R^* parametrelerine bağlı ifadesi denklem (2.43)'de ifade edilmektedir.

$$\lambda^4 - \frac{\mu k}{D^*} \lambda^2 + \frac{k R^*}{D^*} = 0 \quad (2.43)$$

Bu denkleme ait elde edilen kökler (2.44) denkleminde,

$$\lambda_1 = \lambda = \sqrt{\frac{\mu k}{2D^*}} \quad , \quad \lambda_2 = -\lambda = -\sqrt{\frac{\mu k}{2D^*}} \quad (2.44)$$

şeklinde tarif edilmiştir. Görüldüğü üzere kökler μ , k , D^* parametrelerine bağlı olarak elde edilmiştir. R^* parametresini μ , k ve D^* parametrelerine bağlı olarak ifade etmek için önce α 'nın bu dört parametreye bağlı ifadesi denklem (2.45)'de şu şekilde ifade edilmiştir.

$$\alpha = \frac{4D^* R^*}{\mu^2 k} \quad (2.45)$$

Bu denklemden yararlanarak $\alpha = 1$ için R^* parametresi,

$$R^* = \frac{\mu^2 k}{4D^*} \quad (2.46)$$

biçiminde ifade edilmiştir.

Cayley-Hamilton Teoremi'ne göre her matris kendi karakteristik denklemini sağlamaktadır. Bulunan R^* parametresini (2.43) denkleminde yerine yazarsak,

$$D_{\%}^4 - \frac{\mu k}{D^*} D_{\%}^2 + \frac{\mu^2 k^2}{4(D^*)^2} I_{\%} = 0 \quad (2.47)$$

karakteristik denklem diferansiyel geçiş matrisi $D_{\%}$ ve μ , k , D^* ifadelerine bağlı olarak elde edilmiş olur. Elde edilen bu denklemin λ ile gösterilmek istenirse,

$$D_{\%}^4 - 2\lambda^2 D_{\%}^2 + \lambda^4 I_{\%} = 0 \quad (2.48)$$

biçiminde gösterilmektedir. Bu denklemde her iki tarafı $D_{\%}$ ile bölersek;

$$D_{\%}^{-1} = \frac{1}{\lambda^4} (2\lambda^2 D_{\%} - D_{\%}^3) \quad (2.49)$$

diferansiyel geçiş matrisinin tersi elde edilmiş olur.

2.2.3.1. $\alpha = 1$ Durumu İçin Elde Edilen İdempotentleri ve Nilpotentleri

Bu durum için elde edilen 4x4 boyutundaki idempotentleri ve nilpotentlerine ait özellikler,

1. $Q_{\%1} \cdot Q_{\%1} = 0$
2. $Q_{\%1} \cdot Q_{\%2} = 0$ (Katlı kök derecesi iki olduğu için)
3. $Q_{\%1} \cdot P_{\%1} = Q_{\%1}$
4. $Q_{\%1} \cdot P_{\%2} = 0$
5. $P_{\%1} + P_{\%2} = I_{\%}$
6. $D_{\%} = \lambda_1 P_{\%1} + Q_{\%1} + \lambda_2 P_{\%2} + Q_{\%2}$
7. $(D_{\%} - \lambda_1 I_{\%}) \cdot P_{\%1} = Q_{\%1}$
8. $(D_{\%} - \lambda_2 I_{\%}) \cdot P_{\%2} = Q_{\%2}$

şeklinde ifade edilmektedir. [22]

Bu duruma ait ifadeler (2.50) denklemini ile tarif edilmektedir.

$$(D_{\%} - \lambda_1 I_{\%}) \cdot P_{\%1} = Q_{\%1} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned}
(D_{\%} + \lambda I_{\%}) \cdot P_{\%} &= Q_{\%} \\
D_{\%} &= \lambda P_{\%} + Q_{\%} - \lambda P_{\%} + Q_{\%}
\end{aligned} \tag{2.50}$$

$$D_{\%}^2 = \lambda^2 P_{\%} + 2\lambda Q_{\%} + \lambda^2 P_{\%} - 2\lambda Q_{\%}$$

$D_{\%}^2$ denkleminde yer alan $Q_{\%}$ ve $Q_{\%}$ ifadelerini açık olarak yazarsak,

$$D_{\%}^2 = (4\lambda D_{\%}) \cdot P_{\%} - \lambda^2 I_{\%} - 2\lambda D_{\%} \tag{2.51}$$

ifadesi elde edilir. Bu denklemden yararlanarak,

$$P_{\%} = \frac{1}{4\lambda} (\lambda^2 D_{\%}^{-1} + 2\lambda I_{\%} + D_{\%}) \tag{2.52}$$

biçiminde elde edilmiştir. Bu durum için diferansiyel geçiş matrisi,

$$D_{\%} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 2\lambda^2 / k \\ 0 & 0 & \lambda^4 / k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.53}$$

halini almaktadır.

Elde edilen $P_{\%}$ idempotenti (2.54)'de gösterilmiştir.

$$P_{\%} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4\lambda & 0 & 3\lambda/4k \\ -\lambda/4 & 1/2 & 3\lambda^3/4k & 0 \\ 0 & k/4\lambda^3 & 1/2 & 1/4\lambda \\ k/4\lambda & 0 & \lambda/4 & 1/2 \end{bmatrix} \tag{2.54}$$

Elde edilen $P_{\%}$ idempotenti (2.55)'de gösterilmiştir.

$$P_{\%} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4\lambda & 0 & -3\lambda/4k \\ \lambda/4 & 1/2 & -3\lambda^3/4k & 0 \\ 0 & -k/4\lambda^3 & 1/2 & -1/4\lambda \\ -k/4\lambda & 0 & -\lambda/4 & 1/2 \end{bmatrix} \tag{2.55}$$

$P_{\%} + P_{\%} = I_{\%}$ özelliği sağlanmaktadır.

Elde edilen Q_1 nilpotenti (2.56)'da gösterilmiştir.

$$Q_1 = \begin{bmatrix} \lambda/4 & -1/4 & -\lambda^3/4k & \lambda^2/4k \\ \lambda^2/4 & -\lambda/4 & -\lambda^4/4k & \lambda^3/4k \\ k/4\lambda & -k/4\lambda^2 & -\lambda/4 & 1/4 \\ k/4 & -k/4\lambda & -\lambda^2/4 & \lambda/4 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

Elde edilen Q_2 nilpotenti (2.57)'de gösterilmiştir.

$$Q_2 = \begin{bmatrix} -\lambda/4 & -1/4 & \lambda^3/4k & \lambda^2/4k \\ \lambda^2/4 & \lambda/4 & -\lambda^4/4k & -\lambda^3/4k \\ -k/4\lambda & -k/4\lambda^2 & \lambda/4 & 1/4 \\ k/4 & k/4\lambda & -\lambda^2/4 & -\lambda/4 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

2.2.3.2. $\alpha = 1$ Durumu İçin Elde Edilen Taşıma Matrisi

Bu duruma ait $\Phi(D_{0\alpha})$ matris fonksiyonu (2.58) denkleminde,

$$\Phi(D_{0\alpha}) = \Phi(\lambda_1)P_{0\alpha} + \Phi(\lambda_2)P_{0\alpha} + \Phi'(\lambda_1)Q_{0\alpha} + \Phi'(\lambda_2)Q_{0\alpha} \quad (2.58)$$

şeklinde tarif edilmiştir. Taşıma matrisinin açık ifadesi ise (2.59) denkleminde,

$$F_{0\alpha}(z) = e^{zD_{0\alpha}} = e^{z\lambda}P_{0\alpha} + e^{-z\lambda}P_{0\alpha} + ze^{z\lambda}Q_{0\alpha} + ze^{-z\lambda}Q_{0\alpha} \quad (2.59)$$

gösterilmektedir. Burada dikkat edilmesi gereken husus; karakteristik denklemin köklerine göre türev alırken, köklerin işaretleri göz önüne alınmamaktadır. [22]

Taşıma matrisinin elemanları (2.60) denkleminde,

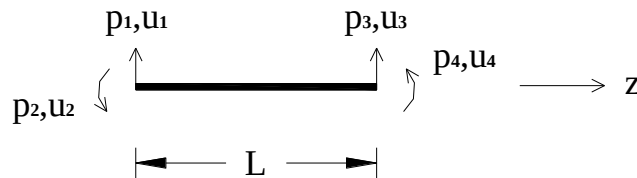
$$\begin{aligned} F_{11} &= \cosh z\lambda + \frac{z\lambda}{2} \sinh z\lambda \\ F_{12} &= -\frac{z\lambda \cosh z\lambda + \sinh z\lambda}{2\lambda} \\ F_{13} &= -\frac{z\lambda^3}{2k} \sinh z\lambda \\ F_{14} &= \frac{\lambda}{2k} (z\lambda \cosh z\lambda + 3 \sinh z\lambda) \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned}
F_{21} &= \frac{\lambda}{2} (z\lambda \cosh z\lambda - \sinh z\lambda) \\
F_{22} &= \cosh z\lambda - \frac{z\lambda}{2} \sinh z\lambda \\
F_{23} &= -\frac{\lambda^3}{2k} (z\lambda \cosh z\lambda - 3\sinh z\lambda) \\
F_{24} &= \frac{z\lambda^3}{2k} \sinh z\lambda \\
F_{31} &= \frac{kz}{2\lambda} \sinh z\lambda \\
F_{32} &= \frac{k}{2\lambda^3} (-z\lambda \cosh z\lambda + \sinh z\lambda) \\
F_{33} &= F_{22} \\
F_{34} &= -F_{12} \\
F_{41} &= kF_{34} \\
F_{42} &= -F_{31} \\
F_{43} &= -F_{21} \\
F_{44} &= F_{11}
\end{aligned} \tag{2.60}$$

şeklinde elde edilmiştir. Elde edilen taşıma matrisi, taşıma matrisinin $z = 0$ değeri için birim matrise eşit olma özelliğini sağlamaktadır.

2.2.4. Rijitlik Matrisi İle Taşıma Matrisi Arasındaki İlişki

Bir elemanın uç kuvvetleri ile uç yer değiştirmelerini ilişkilendiren matrise Eleman Rijitlik Matrisi adı verilmektedir. Eleman uç kuvvetleri ile uç yer değiştirmelerine ait pozitif kabul edilen yönler Şekil 2.4’de gösterilmiştir.



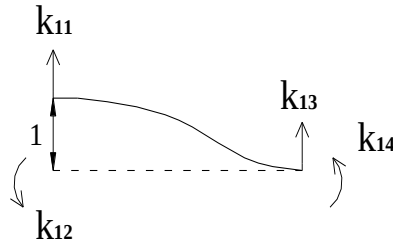
Şekil 2.4 Eleman uç kuvvetleri (p) ile uç yer değiştirmeleri (u) için pozitif yönler

Eleman uç kuvvetleri ile uç yer değiştirmeleri arasındaki bağıntı denklem (2.61)'de,

$$\underset{0/}{p} = \underset{0/}{K} \underset{0/}{u} \quad (2.61)$$

biçiminde ifade edilmektedir. Bu denklemde $\underset{0/}{p}$ 4x1 boyutundaki uç kuvvetleri matrisini, $\underset{0/}{K}$ 4x4 boyutundaki simetrik eleman rijitlik matrisini, $\underset{0/}{u}$ ise 4x1 boyutundaki uç yer değiştirmeleri matrisini simgelemektedir. [28]

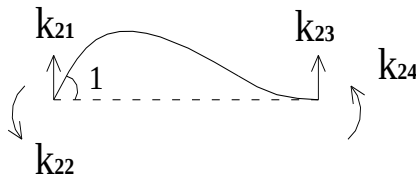
Elastik zemine oturan Timoshenko kirişi için rijitlik matrisinin elemanları taşıma matrisi yardımıyla elde edilecektir. Ankastrelik tanımında; kesitin dönmesi sıfır kabul edilmiştir. Pozitif yönler ve bu durumlara karşı gelen matris eşitlikleri aşağıdaki şekillerde gösterilmiştir.



Şekil 2.5 $u_1 = 1, u_2 = u_3 = u_4 = 0$ iken k_{1i} katsayılarının yönleri ile gösterimi

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -k_{12} \\ k_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_{14} \\ -k_{13} \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

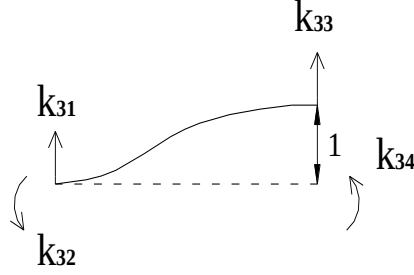
(2.62) ifadesinden $k_{11}, k_{12}, k_{13}, k_{14}$ elde edilir.



Şekil 2.6 $u_2 = 1, u_1 = u_3 = u_4 = 0$ iken k_{2i} katsayılarının yönleri ile gösterimi

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -k_{22} \\ k_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_{24} \\ -k_{23} \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

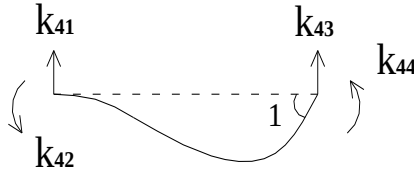
(2.63) ifadesinden $k_{21}, k_{22}, k_{23}, k_{24}$ elde edilir.



Şekil 2.7 $u_3 = 1, u_1 = u_2 = u_4 = 0$ iken k_{3i} katsayılarının yönleri ile gösterimi

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -k_{32} \\ k_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ k_{34} \\ -k_{33} \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

(2.64) ifadesinden $k_{31}, k_{32}, k_{33}, k_{34}$ elde edilir.



Şekil 2.8 $u_4 = 1, u_1 = u_2 = u_3 = 0$ iken k_{4i} katsayılarının yönleri ile gösterimi

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -k_{42} \\ k_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ k_{44} \\ -k_{43} \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

(2.65) ifadesinden $k_{41}, k_{42}, k_{43}, k_{44}$ elde edilir.

Denklem (2.62), (2.63), (2.64), (2.65)'in çözümlerinden elde edilen ve α 'nın üç ayrı durumu için geçerli olan rijitlik matrisi (2.66) denkleminde gösterilmektedir.

$$K_{\%} = \begin{bmatrix} \frac{F_{11}F_{23} - F_{13}F_{21}}{\zeta} & \frac{F_{11}F_{24} - F_{14}F_{21}}{\zeta} & -\frac{F_{23}}{\zeta} & -\frac{F_{13}}{\zeta} \\ \frac{F_{11}F_{24} - F_{14}F_{21}}{\zeta} & \frac{F_{14}F_{22} - F_{12}F_{24}}{\zeta} & -\frac{F_{24}}{\zeta} & -\frac{F_{14}}{\zeta} \\ -\frac{F_{23}}{\zeta} & -\frac{F_{24}}{\zeta} & \frac{F_{11}F_{23} - F_{13}F_{21}}{\zeta} & \frac{F_{14}F_{21} - F_{11}F_{24}}{\zeta} \\ -\frac{F_{13}}{\zeta} & -\frac{F_{14}}{\zeta} & \frac{F_{14}F_{21} - F_{11}F_{24}}{\zeta} & \frac{F_{14}F_{22} - F_{12}F_{24}}{\zeta} \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Payda da yer alan ζ simgesinin açık ifadesi (2.67) denkleminde tanımlanmaktadır.

$$\zeta = F_{14}F_{23} - F_{13}F_{24} \quad (2.67)$$

2.2.4.1. $\alpha > 1$ Durumu İçin Elde Edilen Rijitlik Matrisi

Bu durum için (2.33) denkleminde elde edilen taşıma matrisi yardımıyla bulunan rijitlik matrisi (2.66) denkleminde gösterilmektedir. Elde edilen bu rijitlik matrisinde köşegen üzerindeki ifadeler dışındaki ifadelerin simetriyi sağladığı kapalı olarak görülememiştir. Bu nedenle, yapılan sayısal örnekler sonucunda simetrinin sağlandığı anlaşılmıştır. İfadelerin uzun olmaması ve kolay anlaşılır olması için taşıma matrisi elemanları simgesel olarak gösterilmiştir.

2.2.4.2. $\alpha < 1$ Durumu İçin Elde Edilen Rijitlik Matrisi

Bu duruma ait (2.42) denkleminde elde edilen taşıma matrisi yardımıyla bulunan rijitlik matrisi (2.66) denkleminde gösterilmektedir. Elde edilen bu rijitlik matrisinde köşegen üzerindeki ifadeler dışındaki ifadelerin simetriyi sağladığı kapalı olarak görülememiştir. Bu nedenle, yapılan sayısal örnekler sonucunda simetrinin sağlandığı anlaşılmıştır. İfadelerin uzun olmaması ve kolay anlaşılır olması için taşıma matrisi elemanları simgesel olarak gösterilmiştir.

2.2.4.3. $\alpha = 1$ Durumu İçin Elde Edilen Rijitlik Matrisi

Bu duruma ait (2.60) denkleminde elde edilen taşıma matrisi yardımıyla (2.66) ifadesinde gösterilen rijitlik matrisinin elemanları kısa ve anlaşılır olması nedeniyle,

(2.69) denkleminde açık olarak ifade edilmiştir. Denklem (2.68)'de boyutsuz bir parametre olan

$$\eta = 9 + 2z^2\lambda^2 - 9\cosh 2z\lambda \quad (2.68)$$

şeklinde tarif edilmektedir.

$$k_{11} = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{4z\lambda - 6\sinh 2z\lambda}{\eta} \right)$$

$$k_{12} = \frac{k}{\lambda^2} \left(\frac{\eta + 4z^2\lambda^2}{3\eta} \right)$$

$$k_{13} = -\frac{4k}{\lambda} \left(\frac{z\lambda \cosh z\lambda - 3\sinh z\lambda}{\eta} \right)$$

$$k_{14} = -\frac{4kz}{\lambda} \left(\frac{\sinh z\lambda}{\eta} \right)$$

$$k_{21} = k_{12}$$

$$k_{22} = -\frac{2k}{\lambda^3} \left(\frac{2z\lambda + 3\sinh 2z\lambda}{\eta} \right)$$

$$k_{23} = -k_{14}$$

(2.69)

$$k_{24} = \frac{4k}{\lambda^3} \left(\frac{z\lambda \cosh z\lambda + 3\sinh z\lambda}{\eta} \right)$$

$$k_{31} = k_{13}$$

$$k_{32} = k_{23}$$

$$k_{33} = k_{11}$$

$$k_{34} = -k_{12}$$

$$k_{41} = k_{14}$$

$$k_{42} = k_{24}$$

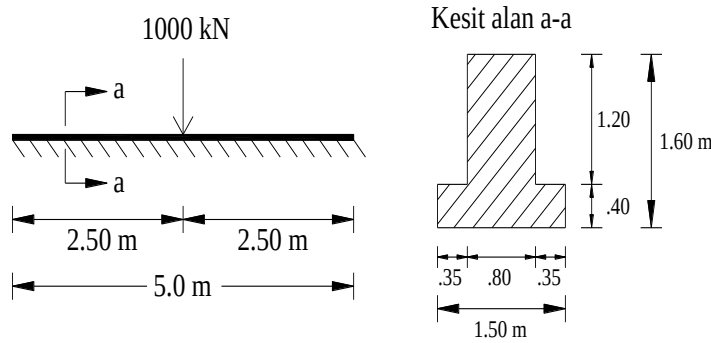
$$k_{43} = k_{34}$$

$$k_{44} = k_{22}$$

3. UYGULAMALAR

3.1. ELASTİK ZEMİNE OTURAN ORTASINDAN YÜKLÜ VE İKİ UCU SERBEST OLAN KİRİŞ PROBLEMİ

Bu uygulamada kirişte kayma etkisinin göz önüne alındığı ve alınmadığı durumlar için kıyaslama yapılmıştır. Kıyas için Çengel'in [28] yapmış olduğu çalışmada kayma etkisini göz önüne almadan elde ettiği taşıma matrisi kullanılmıştır. Probleme ait çökme, moment ve kesme kuvveti grafikleri elde edilmiştir. Probleme ait şekil aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 3.1 Birinci uygulamaya ait yükleme durumu ve kesit alanı

Probleme ait veriler;

$E = 25 \text{ GPa}$	(Elastisite modülü)
$k = 300 \text{ MPa}$	(Zemin reaksiyon modülü)
$L = 5 \text{ m}$	(Kirişin açıklığı)
$P = 1000 \text{ kN}$	(Tekil Yük)
$s = 2$	(Ters T kesit için şekil faktörüdür. Aydoğan [26])
$\nu = 0.2$	(Beton için Poisson oranı)
$A = 1.56 \text{ m}^2$	(Kesit alanı)
$I = 0.36 \text{ m}^4$	(Atalet moment)

şeklinde tanımlanmıştır.

Verilere göre $\alpha > 1$ durumu için (2.33) ifadesinde elde edilen taşıma matrisi yardımıyla problem çözülmüştür. Kirişin ortasından yüklü olması nedeniyle bir ara giriş söz konusu olmuştur. Bu ara giriş süreksizliğe sebep olmaktadır. Bu süreksizliğin hesaplara nasıl katıldığı (3.1) denklemiyle açıklanmaktadır. [6]

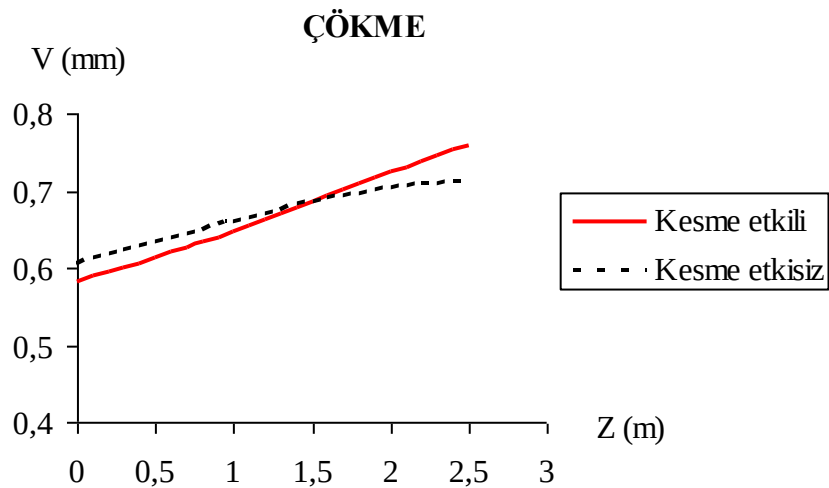
$$S_{o\wedge}(z) = F_{o\wedge}(z).S_{o\wedge}(0) + F_{o\wedge}(z - \xi).K_{o\wedge}(\xi) \quad (3.1)$$

Bu ifade de $S_{o\wedge}$ 4x1 boyutundaki durum vektörünü, $F_{o\wedge}$ 4x4 boyutundaki taşıma matrisini, $K_{o\wedge}$ ise 4x1 boyutundaki ara giriş matrisini simgelemektedir. Kirişin başlangıcı ($z = 0$)'dan itibaren tanımlanan ara giriş mesafesi ξ simgesi ile gösterilmiştir. $K_{o\wedge}(\xi)$ matrisi bu problem için

$$K_{o\wedge}(\xi) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

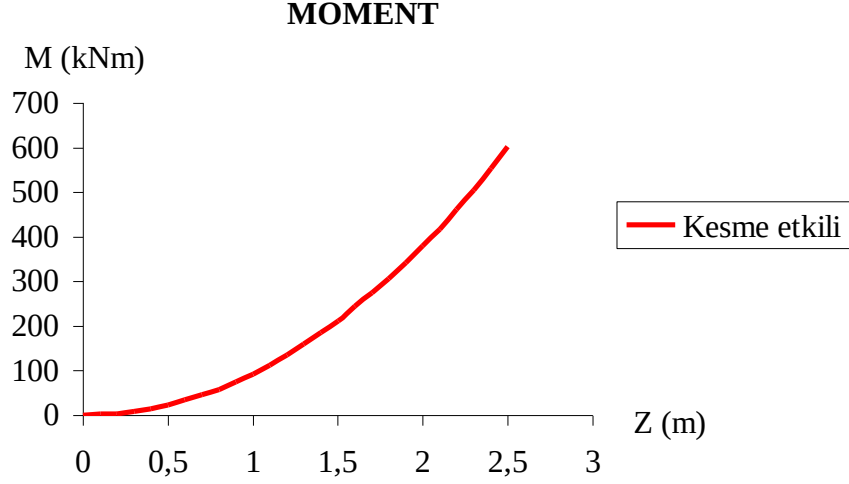
şeklinde tanımlanmaktadır.

Bu problem için elde edilen çökme grafiği Şekil 3.2'de gösterilmektedir. Yükleme tam ortadan ve kiriş simetriye sahip olduğu için grafiklerde $z = 0$ 'dan $z = 2.5$ m.'ye kadar olan değerler gösterilmiştir.



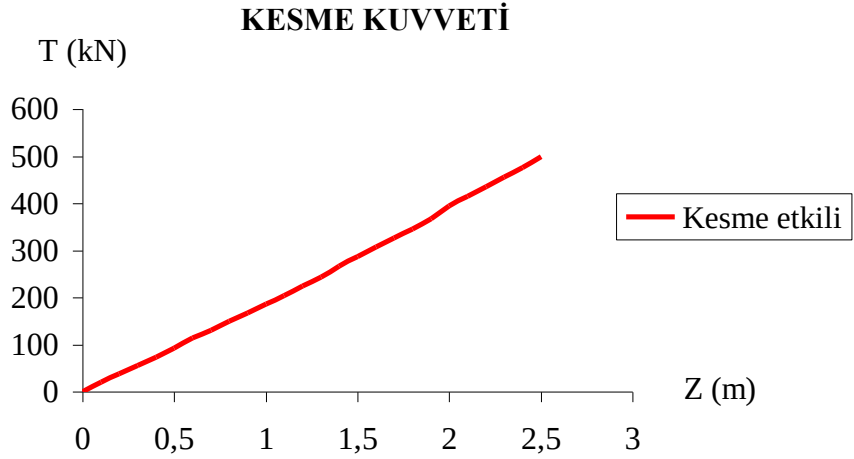
Şekil 3.2 Birinci uygulama için düşey yer değiştirmeler

Moment eğrilerinde, kesme etkisinin göz önüne alındığı ve alınmadığı değerler için elde edilen eğriler yaklaşık olarak üst üste düşmüştür. Bu nedenle moment grafiği yalnız kesme etkisinin göz önüne alındığı değerler için Şekil 3.3’de gösterilmektedir.



Şekil 3.3 Birinci uygulama için moment diyagramı

Kesme kuvveti grafiği için de elde edilen değerler yaklaşık olarak üst üste düşmektedir. Bu nedenle yalnız kesme etkisinin göz önüne alındığı değerler için elde edilen grafik Şekil 3.4’de gösterilmektedir.



Şekil 3.4 Birinci uygulama için kesme kuvveti diyagramı

3.2. ELASTİK ZEMİNE OTURAN İKİ UCUNDAN YÜKLÜ VE İKİ UCU SERBEST OLAN KİRİŞ PROBLEMİ

Bu uygulamada elastik zemine oturan kiriş için kiriş yüksekliği h ve zemin reaksiyon modülü k 'ya bağlı olmak üzere üç değişik durum söz konusu olmaktadır.

Probleme ait ortak veriler aşağıda belirtilmiştir.

$$E = 25 \text{ GPa}$$

$$s = 2$$

$$\nu = 0.2$$

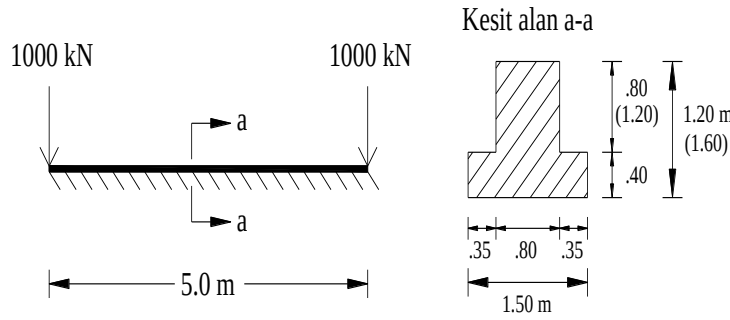
Değişkenler;

1. durum: $h = 1.2 \text{ m}$, $k = 300 \text{ MPa}$ için $A = 1.24 \text{ m}^2$, $I = 0.154 \text{ m}^4$

2. durum: $h = 1.6 \text{ m}$, $k = 300 \text{ MPa}$ için $A = 1.56 \text{ m}^2$, $I = 0.360 \text{ m}^4$

3. durum: $h = 1.6 \text{ m}$, $k = 600 \text{ MPa}$ için $A = 1.56 \text{ m}^2$, $I = 0.360 \text{ m}^4$

şeklinde tanımlanmaktadır. Probleme ait şekil aşağıda gösterilmektedir.

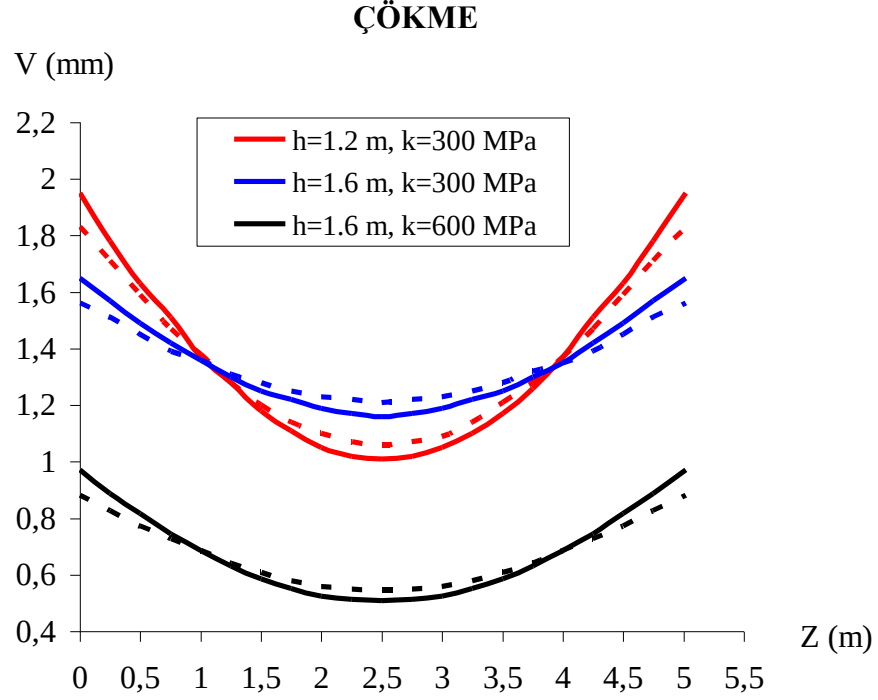


Şekil 3.5 İkinci uygulamaya ait sistem ve yükleme durumu

Verilere göre $\alpha > 1$ durumu için (2.33) ifadesinde elde edilen taşıma matrisi yardımı ile problem çözülmüştür. Kesme etkisinin göz önüne alınmadığı durum için Çengel'in [28] elde etmiş olduğu taşıma matrisi kullanılmıştır. Aynı problem Aydoğan [26] tarafından sonlu eleman yöntemiyle ele alınmış, çökme ve moment grafikleri elde edilmiştir. Bu çalışmada ise çökme, moment ve kesme kuvvetine ait kapalı fonksiyonlar taşıma matrisi yöntemiyle elde edilmiştir. Çökme ve moment değerlerinin Aydoğan'ın [26] sonuçlarına yaklaşık olarak eşit olduğu görülmüştür.

Çizilen eğrilerde; düz çizgi kesme etkisinin göz önüne alındığı, kesikli çizgi ise kesme etkisinin göz önüne alınmadığı durumu ifade etmektedir.

Çökme grafiğinde kirişin yüksekliği h ve zemin reaksiyon modülü k değişkenlerine bağlı olarak üç değişik durum için kesme etkisinin göz önüne alındığı ve alınmadığı eğriler Şekil 3.6'da gösterilmektedir. Artı y eksenini yönündeki çökme değerleri pozitif kabul edilmiştir.



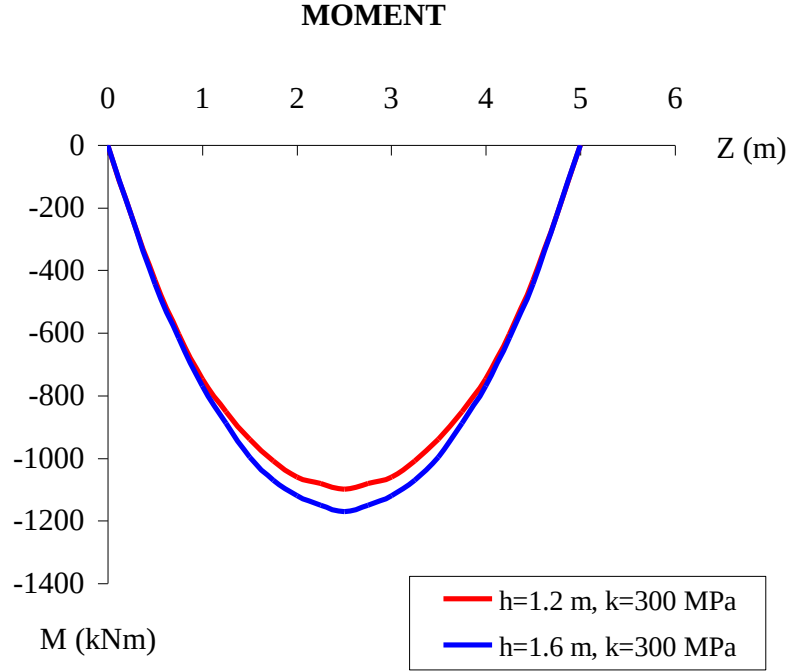
Şekil 3.6 İkinci uygulama için k ve h değişkenlerine bağlı çökme eğrileri

Bu uygulamaya ait eğrilerden çıkarılabilecek sonuçlar aşağıda sıralanmıştır.

1. Tekil yüklerin etkidiği noktalarda; kesme etkisinin göz önüne alındığı durum için elde edilen çökme değerleri, kesme etkisinin göz önüne alınmadığı duruma kıyasla daha büyük olmaktadır.
2. Tekil yüklerin etkidiği noktalarda; kirişin yüksekliği arttıkça çökme değerleri azalmaktadır.
3. Tekil yüklerin etkidiği noktalarda; zemin reaksiyon modülü arttıkça çökme değerleri azalmaktadır.
4. Çökme değerlerinin azalmasında; zemin reaksiyon modülünün artışı kiriş yüksekliğinin artışıyla orantılı olarak daha fazla etkili olmaktadır.

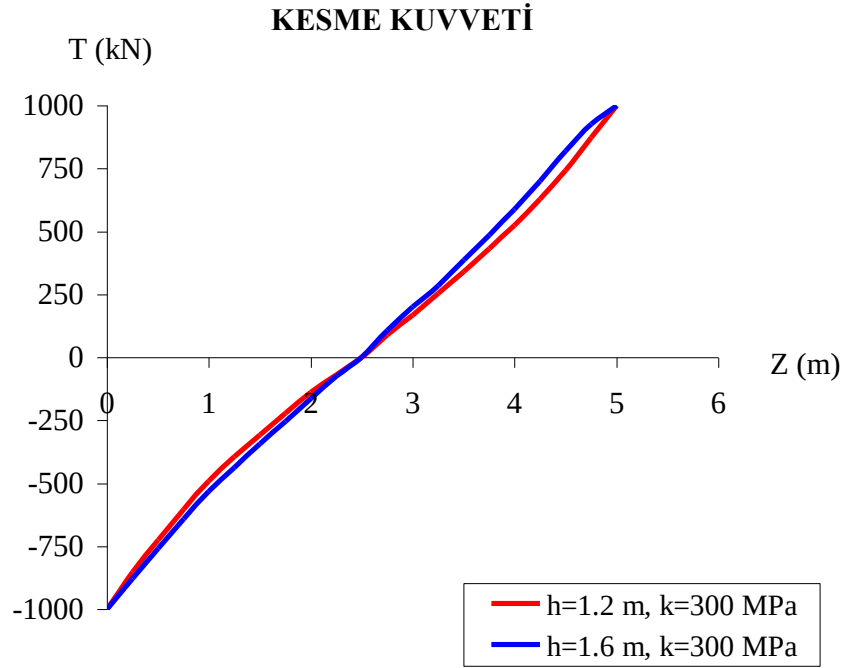
Moment grafiği için problemin tanımında bahsedilen durumlardan 1. durum ve 3. durum için elde edilen değerler yaklaşık olarak eşit olduğundan grafik üzerinde üst

üste düşmektedir. Bu nedenle kesme etkisinin göz önüne alındığı 1. durum ve 2. durum için elde edilen grafik Şekil 3.7’de gösterilmiştir.



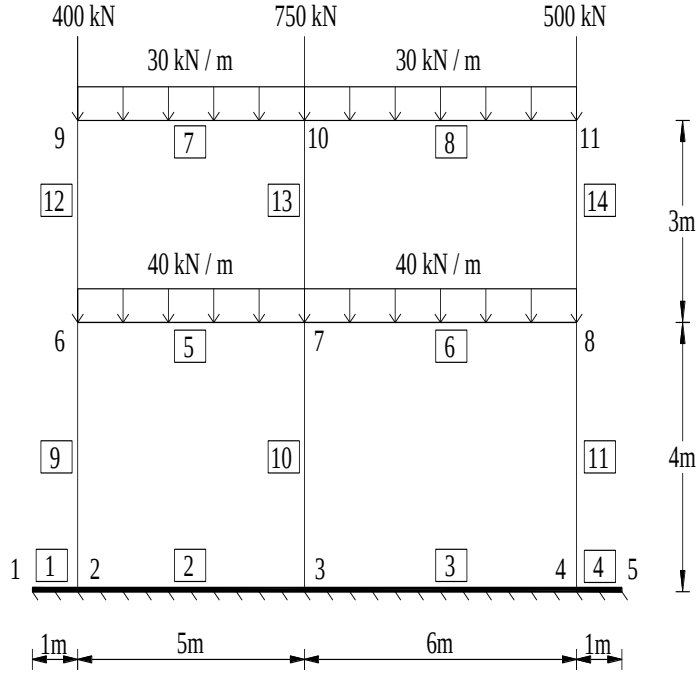
Şekil 3.7 İkinci uygulama için k ve h değişkenlerine bağlı moment eğrileri

Aynı nedenle, kesme kuvveti için elde edilen grafik Şekil 3.8’de gösterilmiştir.



Şekil 3.8 İkinci uygulama için k ve h değişkenlerine bağlı kesme kuvveti grafiği

3.3. ELASTİK ZEMİNE OTURAN İKİ AÇIKLIKLI VE İKİ KATLI ÇERÇEVE SİSTEMİN STATİK ÇÖZÜMÜ



ELEMAN	KESİTLER
2. KAT KOL.	
1. KAT KOL.	
KAT KİRİŞLERİ	
TEMEL KİRİŞLERİ	

Şekil 3.9 Sistem, idealleştirme, yükleme durumu ve kesitler

Kesitler için ölçü birimi metre olarak verilmiştir.

İki açıklıklı ve iki katlı çerçeve sistem Şekil 3.9’da görüldüğü gibi zemine oturan sürekli bir kiriş ile mesnetlenmiştir. Çerçeve sisteme ait yükleme durumu ve kesit özellikleri yine Şekil 3.9’da gösterilmiştir. Çerçeve sistem için dikdörtgen içerisinde belirtilmiş olan sayılar eleman numaralarını, diğer sayılar ise düğüm noktası numaralarını ifade etmektedir.

Probleme ait veriler aşağıda belirtilmiştir.

$$E = 25 \text{ GPa}$$

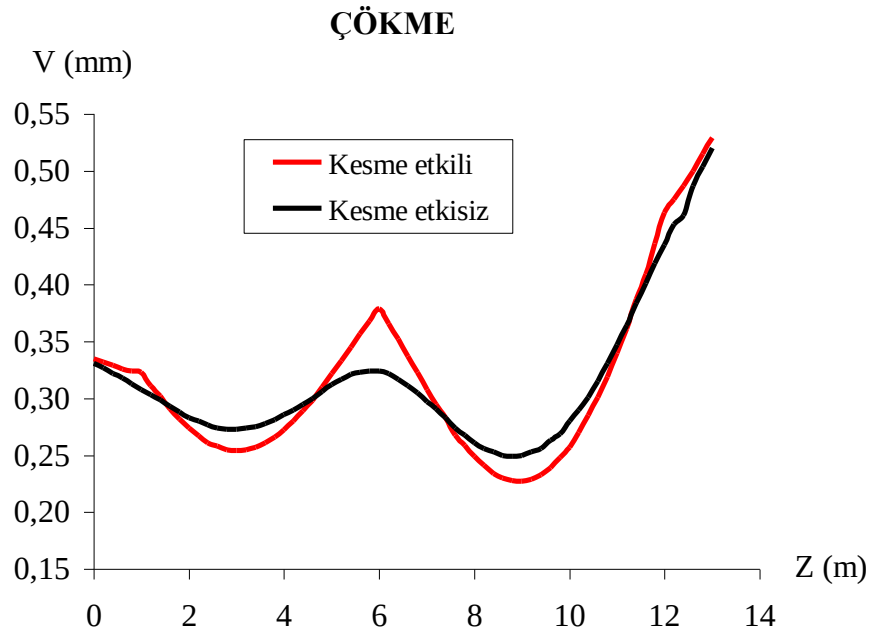
$$k = 450 \text{ MPa}$$

$$s = 2$$

$$\nu = 0.2$$

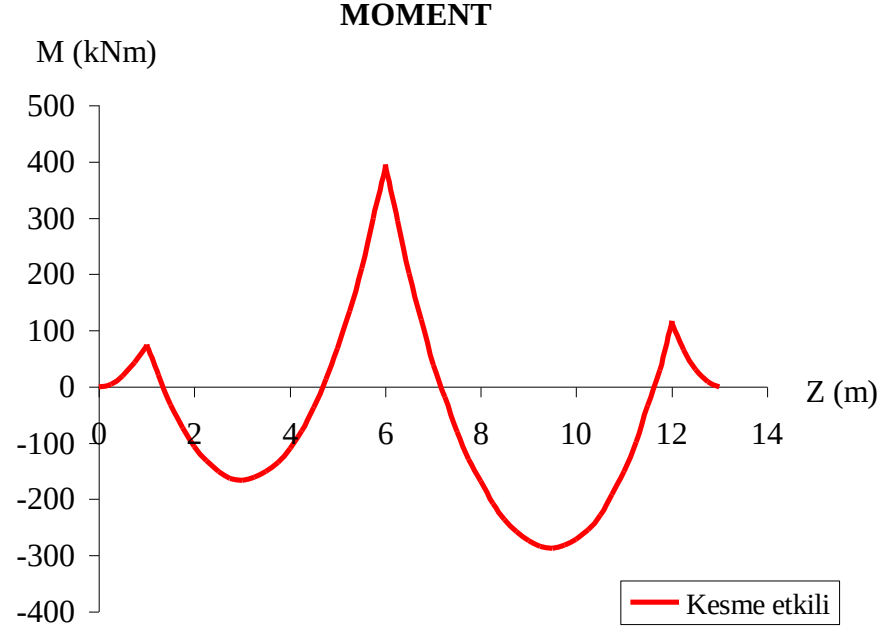
Bu uygulamada elastik zemine oturan sürekli kiriş için kesme etkisinin göz önüne alındığı ve alınmadığı durumlara ait taşıma matrisleri kullanılarak çökme, moment ve kesme kuvveti diyagramları elde edilmiştir. Verilere göre $\alpha > 1$ durumu için (2.33) ifadesinde elde edilen taşıma matrisi yardımı ile problem çözülmüştür. Kesme etkisinin göz önüne alınmadığı durum için Çengel’in [28] elde etmiş olduğu taşıma matrisi kullanılmıştır. Uygulama yapılırken yapı ile zemin bir bütün olarak ele alınmıştır.

Elde edilen düşey yer değiştirmeler Şekil 3.10’da gösterilmiştir. Artı y eksenini yönündeki çökmeler pozitif kabul edilmiştir.



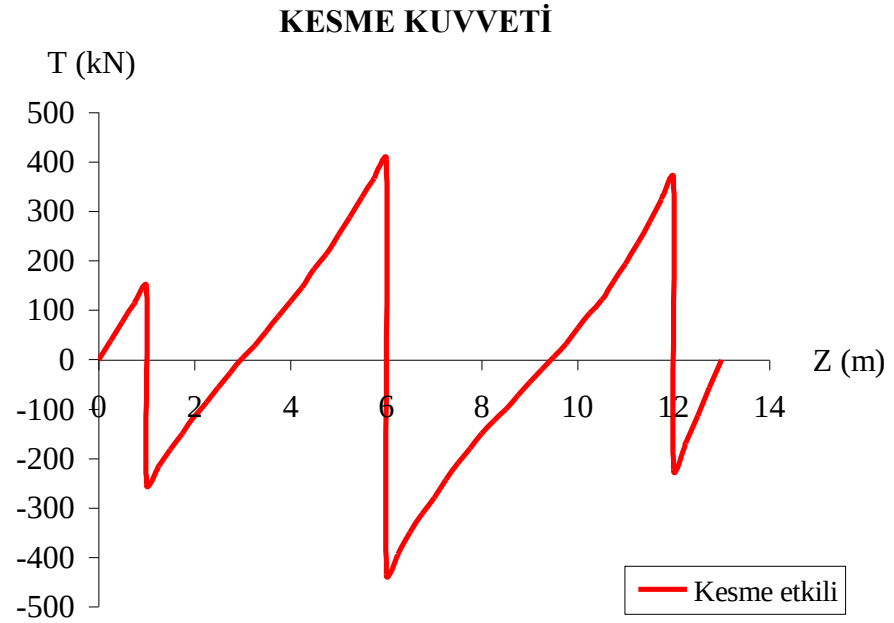
Şekil 3.10 Üçüncü uygulama için çökme grafiği

Moment diyagramı için kesme etkisinin göz önüne alındığı duruma ait elde edilen değerler ile kesme etkisinin göz önüne alınmadığı duruma ait elde edilen değerler grafik üzerinde yaklaşık olarak üst üste düşmektedir. Bu nedenle yalnız kesme etkisinin göz önüne alındığı değerler için elde edilen moment grafiği Şekil 3.11’de gösterilmiştir.



Şekil 3.11 Üçüncü uygulama için moment grafiği

Aynı nedenle, kesme kuvveti için elde edilen grafik Şekil 3.12’de gösterilmiştir.



Şekil 3.12 Üçüncü uygulama için kesme kuvveti grafiği

4. SONUÇLAR VE YORUMLAR

1. Bu çalışmada kesme etkisinin kirişler üzerindeki etkisi incelenmiştir. Elastik zemine oturan Timoshenko kirişi için α parametresinin üç değişik haline ait Taşıma matrisleri elde edilmiştir.
2. Taşıma matrisleri kullanılarak doğru eksenli çubuklara ait rijitlik matrisleri elde edilmiştir.
3. Temel kirişlerinde yükseklik arttıkça kesme etkisi önemli hale gelmektedir.
4. Yapılan uygulamalarda, elastik zemine oturan kirişler için kesme etkisinin göz önüne alındığı ve alınmadığı durumlar için elde edilen sonuçlar kıyaslanmıştır. Kıyas için Çengel'in [28] çalışmasında kesme etkisini göz önüne almadan elde etmiş olduğu taşıma matrisi kullanılmıştır.
5. Yapılan kıyaslamaya göre; iki ayrı durum için elde edilen kesme kuvveti ve moment değerlerinin birbirine çok yakın olduğu görülmüştür. Dolayısıyla, kirişlerde kesme etkisinin moment ve kesme kuvveti değerleri üzerinde önemli bir değişikliğe yol açmadığı sonucuna ulaşılmıştır.
6. Düşey yer değiştirmelerin ise kesme etkisinden önemli derecede etkilendiği görülmüştür.
7. Özellikle zemin reaksiyon modülünün değişimi, kesme etkisinin düşey yer değiştirmeler üzerindeki etkisini önemli ölçüde artırmaktadır.
8. Yapılan ikinci uygulamada elde edilen çökme ve moment değerleri, Aydoğan'ın [26] sonlu eleman metodu ile yapmış olduğu çalışmadaki sonuçlarla kıyaslandığında yaklaşık olarak aynı değerlerin elde edildiği görülmüştür. Ayrıca, bu çalışmada kesme kuvveti için elde edilen değerler grafik üzerinde gösterilmiştir.
9. Yapılan üçüncü uygulamada elde edilen çökme ve maksimum moment değerleri, Aydoğan'ın [26] sonlu eleman metodu ile yapmış olduğu çalışmadaki sonuçlarla kıyaslandığında, yaklaşık olarak yüzde otuz mertebesinde daha küçük değerler elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] **Winkler, E.**, 1867. Die Lehre von der Elastizitat und Festigkeit, Prague, Czechoslovakia.
- [2] **Zimmermann, H.**, 1888. Die Berechnung des Eisenbahnoberbaues, Second Edition, Berlin, Germany.
- [3] **Hetenyi, M.**, 1946. Beams on Elastic Foundation, The University of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan.
- [4] **Iyengar, S.R. and Anantharamu, S.**, 1960. Influence Lines for Beams on Elastic Foundations, J. Struct. Div., ASCE, June.
- [5] **Malter, H.**, 1960. Numerical Solutions for Beams on Elastic Foundations, Transactions, ASCE, 125, 757-791.
- [6] **İnan, M.**, 1964. Elastomekanikte Başlangıç Değerleri Metodu ve Taşıma Matrisi, İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi Matbaası, İstanbul.
- [7] **Dodge, A.**, 1964. Influence Function for Beams on Elastic Foundations, J. Struct. Div., ASCE, August, 63-101.
- [8] **Donalt, D., ELY, F.J., Sergev, S. and Barbarito, B.**, 1965. Influence Functions for Beams on Elastic Foundations, Discussion, ASCE, April, 187-194.
- [9] **Miranda, C. and Nair, K.**, 1966. Finite Beams on Elastic Foundations, J. Struct. Div., ASCE, 92(ST2), 131-142.
- [10] **Durelli, A.J., Parks, V.J. and Mok, C.K.C.**, 1966. Photoelastic Beams on Elastic Foundations, J. Struct. Div., ASCE, August, 1713-1725.
- [11] **Munther, J.H.**, 1970. Photoelastic Study of Beams on Elastic Foundations, Discussion, ASCE, 96, 864-870.
- [12] **Weistman, Y.**, 1970. On Foundation That React in Compression Only, J. Applied Mechanics, Transactions, ASME, 37, 1019-1030.
- [13] **Rao, N.S.V.K., Das, Y.C. and Anandakrishnana, M.**, 1971. Variational Approach to Beams on Elastic Foundation, J. Eng. Mech. Div., ASCE, April, 271-294.
- [14] **Ting, B.Y.**, 1982. Finite Beams on Elastic Foundation with Restraints, J. Struct. Div., ASCE, 108(ST3), 611-620.

- [15] **Kobayashi, H. and Sonoda, K.,** 1983. Timoshenko Beams on Linear Viscoelastic Foundations, J. Geotechnical Eng., 109(6), 832-844.
- [16] **Ting, B.Y., M ESCE and Mockry, E.F.,** 1983. Beam on Elastic Foundation Finite Element, J. Applied Mechanics, 109(6), 1390-1402.
- [17] **Ting, B.Y. and Mockry, E.F.,** 1984. Beam on Elastic Foundation Finite Element, J. Struct. Div., ASCE, 110(ST10), 2324-2339.
- [18] **Eisenberger, M. and Yankelevsky, D.Z.,** 1985. Exact Stiffness Matrix for Beams on Elastic Foundation, Computers and Structures, 121(6), 1355-1359.
- [19] **Lin, L. and Adams, G.G.,** 1987. Beam on Tensionless Elastic Foundation, J. Eng. Mech., 113(4), 542-553.
- [20] **Celep, Z., Malaika, A. and Abu-Hussein, M.,** 1988. Forced Vibrations of a Beam on a Tensionless Foundation, J. Sound and Vibration, 128(2), 235-246.
- [21] **Elmas, M.,** 1988. Elastik Zemin Oturan Sonlu Kirişlerin Deneysel İncelenmesi, Doktora Tezi, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [22] **Cinemre, V.,** 1989. Linear Algebra, İ.T.Ü Yayınları, İstanbul.
- [23] **Doğan, O.,** 1993. Elastik Zemin Oturan Kirişler, Yüksek Lisans Tezi, İ.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [24] **Kadioğlu, F.,** 1994. Elastik Zemin Oturan Doğru ve Daire Eksenli Çubuklar, Yüksek Lisans Tezi, İ.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [25] **Zubaroğlu, S.,** 1994. Elastik Zemin Oturan Daire Eksenli Çubuklar ve Taşıma Matrisi, Yüksek Lisans Tezi, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [26] **Aydoğan, M.,** 1995. Stiffness-Matrix Formulation of Beams with Shear Effect on Elastic Foundation, J. Struct. Eng., 121(9), 1265-1270.
- [27] **Yin, J.H.,** 2000. Closed-Form Solution for Reinforced Timoshenko Beam on Elastic Foundation, J. Eng. Mech., 126(8), 868-874.
- [28] **Çengel, B.,** 2002. Elastik Zemin Oturan Çerçeve Sistemler, Yüksek Lisans Tezi, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [29] **Ergüven, M.E. and Gedikli, A.,** 2003. A Mixed Finite Element Formulation for Timoshenko Beam on Winkler Foundation, Computational Mechanics, 31, 229-237.
- [30] **Antes, H.,** 2003. Fundamental Solution and Integral Equations for Timoshenko Beams, Computers and Structures, 81, 383-396.

ÖZGEÇMİŞ

Mesut Aksoydan, 1980 yılında İzmir’de doğdu. İlkokulu İzmir Orhangazi İlkokulu’nda, orta okulu İzmir Güzelyalı Ortaokulu’nda, liseyi İzmir İnönü Lisesi’nde tamamladı. 1997 yılında girdiği Manisa Celal Bayar Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği bölümünden 2001 yılında mezun oldu. Aynı yıl İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği anabilim dalı Yapı Mekaniği programında yüksek lisans yapmaya hak kazandı. İngilizce muafiyet şartı nedeniyle bir yıl sonra, 2002 güz yarıyılında yüksek lisansa başladı.