

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**HARMONİK ZORLAMA ETKİSİNDEKİ BOŞLUKLU
YARIM UZAYIN TİTREŞİMLERİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İnş. Müh. Aydın ÖZMUTLU**

Anabilim Dalı : İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ

Programı : YAPI MÜHENDİSLİĞİ

MAYIS 2002

**HARMONİK ZORLAMA ETKİSİNDEKİ BOŞLUKLU
YARIM UZAYIN TİTREŞİMLERİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İnş. Müh. Aydın ÖZMUTLU
(Enstitü No: 501991299)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 13 Mayıs 2002
Tezin Savunulduğu Tarih : 27 Mayıs 2002**

**Tez Danışmanı : Prof.Dr. Hasan ENGİN
Diğer Jüri Üyeleri: Prof.Dr. A. Yalçın AKÖZ
Yrd.Doç.Dr. İrfan COŞKUN (Y.T.Ü.)**

MAYIS 2002

ÖNSÖZ

Bu çalışma sırasında gerekli mesaiyi ayıran, bilgi ve tecrübesine müracaat ettiğim danışman hocam sayın Prof. Dr. Hasan ENGİN' e şükranlarımı sunarım. Bununla birlikte, Çorlu Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölüm Başkanımız hocam sayın Prof. Dr. Abdurrahman GÜNER' e, bölüm öğretim üyelerine ve mesai arkadaşlarıma gösterdikleri maddi ve manevi desteklerden dolayı şükranlarımı sunarım.

Ayrıca hayatım boyuca desteklerini esirgemeyen, eğitimimdeki katkılarından dolayı, aileme de müteşekkirim.

Mayıs 2002

Aydın ÖZMUTLU

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ŞEKİL LİSTESİ	iv
SEMBOL LİSTESİ	vi
ÖZET	vii
SUMMARY	ix
1. GİRİŞ	1
2. DÜZLEM ELASTİSİTEDE TEMEL DENKLEMLER	6
3. ANALİTİK ÇÖZÜM	10
3.1 Formülasyon ve Çözüm	10
3.2 Sınır Koşullarını Sağlatılması	19
3.2.1 Kısmi Yayılı Yük Hali	19
3.2.1.1 Oyuk İç Yüzeyindeki Sınır Koşullarının Sağlatılması	22
3.2.1.2 Serbest Yüzey Üzerindeki Sınır Koşullarını Sağlatılması	25
3.2.2 Tekil Yük Hali	30
3.2.2.1 Oyuk İç Yüzeyindeki Sınır Koşullarının Sağlatılması	31
3.2.2.2 Serbest Yüzey Üzerindeki Sınır Koşullarını Sağlatılması	34
4. SAYISAL UYGULAMALAR	35
4.1 Sayısal Veriler	35
4.2 Sonuçlar	35
4.2.1 Kısmi Yayılı Yük Hali	36
4.2.2 Tekil Yük Hali	37
5.TARTIŞMA	38
KAYNAKLAR	39
EK A	41
EK B	59
EK C	64
ÖZGEÇMİŞ	67

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1 : Diferansiyel alan elemanındaki gerilmeler.....	6
Şekil 3.1 : Problemin geometrisi.....	10
Şekil 3.2 : Problemin geometrisi.....	30
Şekil A.1 : $\omega=60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, serbest yüzey üzerindeki u_x yerdeğiştirmesinin değişimi.....	41
Şekil A.2 : $\omega=60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, serbest yüzey üzerindeki u_y yerdeğiştirmesinin değişimi.....	42
Şekil A.3 : $\omega=60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, serbest yüzey üzerindeki σ_{xx} normal gerilmesinin değişimi.....	42
Şekil A.4 : $\omega=60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, serbest yüzey üzerindeki τ_{xy} kayma gerilmesinin değişimi.....	43
Şekil A.5 : $\omega=60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, oyuk yüzeyindeki u_r yerdeğiştirmesinin değişimi.....	43
Şekil A.6 : $\omega=60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, oyuk yüzeyindeki u_θ yerdeğiştirmesinin değişimi.....	44
Şekil A.7 : $\omega=60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, oyuk yüzeyindeki σ_{rr} radyal gerilmesinin değişimi.....	44
Şekil A.8 : $\omega=60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, oyuk yüzeyindeki $\tau_{r\theta}$ kayma gerilmesinin değişimi.....	45
Şekil A.9 : $\omega=60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}$ gerilmesinin değişimi.....	45
Şekil A.10 : $\omega=100$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, serbest yüzey üzerindeki u_x yerdeğiştirmesinin değişim.....	46
Şekil A.11 : $\omega=100$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, serbest yüzey üzerindeki u_y yerdeğiştirmesinin değişimi.....	46
Şekil A.12 : $\omega=100$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, serbest yüzey üzerindeki σ_{xx} normal gerilmesinin değişimi.....	47
Şekil A.13 : $\omega=100$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, serbest yüzey üzerindeki τ_{xy} kayma gerilmesinin değişimi.....	47
Şekil A.14 : $\omega=100$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, oyuk yüzeyindeki u_r yerdeğiştirmesinin değişimi.....	48
Şekil A.15 : $\omega=100$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, oyuk yüzeyindeki u_θ yerdeğiştirmesinin değişimi.....	48
Şekil A.16 : $\omega=100$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}$ gerilmesinin değişimi.....	49
Şekil A.17 : $\omega=140$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, serbest yüzey üzerindeki u_x yerdeğiştirmesinin değişim.....	49
Şekil A.18 : $\omega=140$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, serbest yüzey üzerindeki u_y yerdeğiştirmesinin değişimi.....	50
Şekil A.19 : $\omega=140$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, serbest yüzey üzerindeki σ_{xx} normal gerilmesinin değişimi.....	50

Şekil A.20	: $\omega=140$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, serbest yüzey üzerindeki τ_{xy} kayma gerilmesinin değişimi.....	51
Şekil A.21	: $\omega=140$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, oyuk yüzeyindeki u_r yerdeğiştirmesinin değişimi.....	51
Şekil A.22	: $\omega=140$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, oyuk yüzeyindeki u_θ yerdeğiştirmesinin değişimi.....	52
Şekil A.23	: $\omega=140$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}$ gerilmesinin değişimi.....	52
Şekil A.24	: $\omega=100$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 15$ m için, serbest yüzey üzerindeki u_x yerdeğiştirmesinin değişimi.....	53
Şekil A.25	: $\omega=100$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 15$ m için, serbest yüzey üzerindeki u_y yerdeğiştirmesinin değişimi.....	53
Şekil A.26	: $\omega=100$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 15$ m için, serbest yüzey üzerindeki σ_{xx} normal gerilmesinin değişimi.....	54
Şekil A.27	: $\omega=100$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 15$ m için, serbest yüzey üzerindeki τ_{xy} kayma gerilmesinin değişimi.....	54
Şekil A.28	: $\omega=100$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 15$ m için, oyuk yüzeyindeki u_r yerdeğiştirmesinin değişimi.....	55
Şekil A.29	: $\omega=100$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 15$ m için, oyuk yüzeyindeki u_θ yerdeğiştirmesinin değişimi.....	55
Şekil A.30	: $\omega=100$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 15$ m için, oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}$ gerilmesinin değişimi.....	56
Şekil A.31	: $\theta = 0$, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, serbest yüzey üzerindeki u_x yerdeğiştirmesinin frekansla değişimi.....	56
Şekil A.32	: $\theta = 0$, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, serbest yüzey üzerindeki u_y yerdeğiştirmesinin frekansla değişimi.....	57
Şekil A.33	: $\theta = 0$, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, oyuk yüzeyindeki u_r yerdeğiştirmesinin frekansla değişimi.....	57
Şekil A.34	: $\theta = 0$, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, oyuk yüzeyindeki u_θ yerdeğiştirmesinin frekansla değişimi.....	58
Şekil B.1	: $\omega=60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, serbest yüzey üzerindeki u_x yerdeğiştirmesinin değişimi.....	59
Şekil B.2	: $\omega=60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, serbest yüzey üzerindeki u_y yerdeğiştirmesinin değişimi.....	60
Şekil B.3	: $\omega=60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, serbest yüzey üzerindeki σ_{xx} normal gerilmesinin değişimi.....	60
Şekil B.4	: $\omega=60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, serbest yüzey üzerindeki τ_{xy} kayma gerilmesinin değişimi.....	61
Şekil B.5	: $\omega=60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, oyuk yüzeyindeki u_r yerdeğiştirmesinin değişimi.....	61
Şekil B.6	: $\omega=60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, oyuk yüzeyindeki u_θ yerdeğiştirmesinin değişimi.....	62
Şekil B.7	: $\omega=60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, oyuk yüzeyindeki σ_{rr} radyal gerilmesinin değişimi.....	62
Şekil B.8	: $\omega=60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, oyuk yüzeyindeki $\tau_{r\theta}$ kayma gerilmesinin değişimi.....	63
Şekil B.9	: $\omega=60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}$ gerilmesinin değişimi.....	63

SEMBOL LİSTESİ

ω	: Zorlama frekansı
t	: Zaman
p_i	: Harmonik iç basınç
p_0	: Harmonik iç basınç genliği
ρ	: Yarı sonsuz ortamın kütle yoğunluğu
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}$	: Şekildeğiştirme bileşenleri
ε_{xy}	: Kayma şekildeğiştirmesi
e	: Düzlemsel hacim değiştirme oranı
E	: Elastisite modülü
ν	: Poisson oranı
λ, μ	: Lamé sabitleri
n_x	: Sınır eğrisinin dış normal birim vektörünün x bileşeni
n_y	: Sınır eğrisinin dış normal birim vektörünün y bileşeni
$\hat{t}_x$	: Sınır eğrisine etki eden dış kuvvetin x bileşeni
$\hat{t}_y$	: Sınır eğrisine etki eden dış kuvvetin y bileşeni
$\hat{U}$	: Yerdeğiştirme vektörü
$\hat{U}_x$	: Sınırdaki yerdeğiştirmenin x bileşeni
$\hat{U}_y$	: Sınırdaki yerdeğiştirmenin y bileşeni
U_x	: Yerdeğiştirmenin x bileşeni
U_y	: Yerdeğiştirmenin y bileşeni
U_r	: Yerdeğiştirmenin radyal doğrultudaki bileşeni
U_θ	: Yerdeğiştirmenin açısal doğrultudaki bileşeni
ϕ, ψ	: Yerdeğiştirme potansiyelleri
H	: Silindirik oyuk merkezinin serbest yüzeye olan derinliği
a	: Oyuk yarıçapı
r, θ	: Kutupsal koordinatlar
$\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \tau_{r\theta}$	: Kutupsal koordinatlarda gerilme bileşenleri
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$	: Kartezyen koordinatlarda gerilme bileşenleri
k_1	: Boyuna dalga sayısı
k_2	: Enine dalga sayısı
c_1	: Boyuna dalga hızı
c_2	: Enine dalga hızı
J_n	: Birinci nevi Bessel fonksiyonu
Y_n	: İkinci nevi Bessel fonksiyonu

HARMONİK ZORLAMA ETKİSİNDEKİ BOŞLUKLU YARIM UZAYIN TİTREŞİMLERİ

ÖZET

Boşluk veya farklı tipten bir malzeme içeren elastik bir ortamın dinamik etkiler altındaki davranışı geçmişte pek çok araştırmanın konusu olmuştur. Tüneller, isale hatları, yeraltı santralleri, su altı boru hatları bu tip araştırmaların temel problemleri olmuştur. Bu tür problemler akustik ve optikte de geniş bir uygulama alanı bulmuştur.

Literatürde, boşluk içeren sonsuz ortamların dinamik etkiler altındaki davranışı, matematik modellemesinin kolay olması dolayısıyla geniş olarak incelenmiştir. Halbuki yarı sonsuz ortam modeli sonsuz ortam modeline göre uygulamaya daha elverişli olmasına karşın sınır koşullarının sağlatılmasında bazı güçlükler ortaya çıkmaktadır. Günümüz bilgisayar teknolojisinin gelişmesine paralel olarak geliştirilen yazılımlarla karmaşık matematik problemleri çözülebilir hale gelmiş bu da ilginin yarı sonsuz ortam modeli üzerinde artmasını sağlamıştır.

Bu çalışmada, harmonik kısmi iç basınçla zorlanan ve bu yüklemenin limit hali olan harmonik tekil kuvvet zorlaması için homogen, izotrop ve lineer elastik, silindirik boşluklu yarım uzayın davranışı incelendi.

Birinci bölümde, problem tanıtilerek literatürde bulunan bu konuyla ilgili önceki çalışmalardan ve bu çalışmada kullanılan yöntemden bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, çözüm için kullanılan temel denklemlerin çıkarılışı gösterilmiştir. Newton'un ikinci yasasından faydalanarak hareket denklemleri yazılmış, homogen, izotrop ve lineer elastik ortamlar için geçerli bünye bağıntıları kullanılarak Navier denklemleri elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde, çözüm yöntemi anlatılmıştır. Kupla hareket denklem takımı, Helmholtz yerdeğiştirme potansiyelleri kullanılarak kutupsal koordinatlarda iki adet dalga denklemine indirgenmiştir. İndirgenmiş dalga denklemleri Bessel – trigonometrik fonksiyon serileri yardımıyla analitik olarak çözülmüştür. Çözüm sonunda ortaya çıkan bilinmeyen sabitler delik yüzeyi ve serbest yüzey üzerinde yazılan sınır koşulları yardımıyla hesaplanmıştır. Oyuk yüzeyinde sınır koşullarının tam olarak sağlatılmasıyla bilinmeyen sabitlerin yarısı diğer yarısı cinsinden elde edilmiştir. Serbest yüzey üzerinde gerilme bileşenleri her noktada sıfır olmalıdır. Ancak serbest yüzeyde sonsuz sayıda nokta olması, çözüm serilerinin sonlu bir sayıda kesilmesi nedeniyle birden fazla çözüm elde edilecektir. Birçok çözüm yerine “En Küçük Kareler Yöntemi” kullanılarak ve serbest yüzey üzerinde oldukça fazla nokta göz önüne alınarak, yüzey boyunca gerilme bileşenleriyle ilgili koşullar yaklaşık olarak sağlatılmıştır.

Dördüncü bölümde, Mathematica 4.0 paket programı kullanılarak sayısal hesaplamalar yapılmış, oyuk yüzeyindeki ve serbest yüzey boyunca yerdeğiştirme ve gerilme bileşenlerinin çeşitli parametrelere göre grafiksel değişimleri değerlendirilmiştir.

Beşinci bölümde, çözüm tekniğinin ve sonuçların kısa bir yorumu yapılmıştır.

VIBRATIONS OF A HALF – SPACE WHICH INCLUDE CAVITY SUBJECTED TO A HARMONIC FORCING

SUMMARY

Behavior of an elastic medium, which consists of a cavity or a material, under the dynamic effects has been subject of recent studies. Investigations dealing with tunneling, underground pipelining, underwater pipelining and constructing underground power plants are namely the basics of this topic. Also, there are many applications of these problems in acoustics and optics.

In the literature, the response of an infinite medium under the dynamic effects is easy for researchers because mathematical modeling is easy and therefore one may find widely. On the other hand mathematical modeling of semi-infinite medium is not that easy even it is more applicable in practice. Satisfying the boundary conditions is complex in semi-infinite medium and that makes the subject more complicated. Recent improvements in processors technology and which in parallel in software makes it easy to solve the complex mathematical problems and that makes the semi-infinite medium modeling is more interesting for the researchers.

In this study, response of a homogeneous, isotropic and linear elastic semi-infinite medium, which includes a cylindrical cavity, is investigated when subjected to harmonic partial inner pressure and to the harmonic point load, which is simply the limit of the same inner pressure.

In the first part of the study, problem is presented simply and investigations on the same topic found in literature including the methods used before is given.

In the second part, derivation of basic equations is given. Equations of motion that is written based on Newton's second law and then Navier's equations are derived using constitutive equations for homogeneous, isotropic and linear elastic medium.

In the third part, method for solving the equation is explained. Coupled equation of motions is reduced into two wave equations by use of Helmholtz potentials in polar coordinates. These reduced wave equations are solved by using the multiplication series of the Bessel and the trigonometric functions. Unknown coefficients are calculated by applying boundary conditions on the cavity and free surface conditions. Boundary conditions on the cavity surface are satisfied exactly. Using these conditions, half of the unknown coefficients are calculated in terms of the others. On each point of the free surface, components of stresses must be equal to zero. There is infinite number of conditions on free surface. We have to cut these series in a finite number. In this case there are obviously many solutions. Instead of having many solutions, the Least Square Technique is used. Conditions related with the components of stresses through the boundaries of free surface is satisfied approximately by taking the chance of existence of many points on free surface.

In the fourth part, “Mathematica (ver 4.0)” is used to reach the numerical solutions. Graphical variation of displacement and stress components on cavity and free surface are evaluated with respect to various parameters.

In the fifth part, the technique of solution and results are discussed briefly.

1. GİRİŞ

Boşluk veya farklı tipten bir malzeme içeren elastik bir ortamın dinamik etkiler altındaki davranışı geçmişte pek çok araştırmanın konusu olmuştur. Tüneller, isale hatları, yeraltı santralleri, su altı boru hatları bu tip araştırmaların temel problemleri olmuştur. Bu tür problemler akustik ve optikte de geniş bir uygulama alanı bulmuştur.

Literatürde, boşluk içeren sonsuz ortamların dinamik etkiler altındaki davranışı, matematik modellemesinin kolay olması nedeniyle geniş olarak incelenmiştir (Eringen ve Şuhubi [9], Graff [10]). Sonsuz ortamlarla ilgili çalışma çokluğuna karşılık yarı sonsuz ortamdaki yapıların dinamik etkiler altındaki davranışıyla ilgili çalışmalar yakın zamana dayanmaktadır. Halbuki yarı sonsuz ortam modeli sonsuz ortam modeline göre uygulamaya daha elverişli olmasına karşın sınır koşullarının sağlatılmasında ortaya çıkan güçlük nedeniyle geçmişte daha az ele alınmıştır. Günümüz bilgisayar teknolojisinin gelişmesine paralel olarak geliştirilen yazılımlarla karmaşık matematik problemleri çözülebilir hale gelmiş bu da ilginin yarı sonsuz ortam modeli üzerinde artmasını sağlamıştır.

Elastik yarım uzayda bulunan silindirik kabuk gibi yapıların düzlem veya Rayleigh dalgaları altındaki davranışı Datta [7] ve arkadaşlarının pek çok çalışmasına konu olmuştur. Bu çalışmalarda yarım uzayda bulunan silindirik kabuğun harmonik dalga altındaki davranışı, asimptotik açılımların birbiri ile uyuşturulması ve ardışık yansımalar yöntemleri kullanılarak incelenmiştir.

Datta, Shah ve Wong [5] yarı sonsuz elastik bir ortamdaki gömülü boruların dinamik davranışını incelemişlerdir. Bu çalışmada homogen bir zemine gömülü boru hattının etrafının farklı bir malzemeye doldurulması hali göz önüne alınarak gerçek durum modellenmeye çalışılmıştır. Modelin davranışı Bessel fonksiyonları yardımıyla temsil edilmiş, serbest yüzey ve dolgu bölgesi yüzeyinden dalgaların ardışık yansımaları göz önüne alınmıştır. Bir başka çalışmada ise Wong, Shah ve Datta [20]

geometrisinin dairesel kabuktan farklı olması halini göz önüne almışlardır. Çalışmada iç bölgede sonlu eleman modellemesi yapılmış, dış bölgede ise analitik çözüm teknikleri kullanılmıştır.

Yeraltı tünellerindeki kararlı titreşimlerin, tünel-zemin-yapı etkileşim sistemleri üzerindeki etkilerini Balendra [2,3] ve arkadaşları incelemişlerdir. Ortam zeminini viskoelastik, tünel ve yerüstü yapısının temelini rijit cisim olarak kabul etmişlerdir. Serbest yüzey üzerinde sonlu sayıda sınır koşulu alınmış ve sınır koşulları sayısı bilinmeyen sayısından fazla olduğu için Trefftz yöntemi uygulanmıştır. Çalışmada çözüm fonksiyonları olarak Henkel – trigonometrik fonksiyon serileri kullanılmıştır.

Thiruvengkatachar ve Viswanathan [18] zamana bağlı yüzey kuvvetleri etkisindeki sonsuz uzunluktaki silindirik boşluğun bulunduğu homogen, izotrop ve elastik yarım uzay ortamının davranışını incelemişlerdir. Çözümde ardışık yaklaşımlar yöntemi kullanılmış olup çözüm fonksiyonları olarak alınan Henkel – trigonometrik fonksiyon serileri simetrik ve asimetrik kısımlara ayrılarak sınır koşulları boşluk ve serbest yüzey üzerinde sağlatılıp hata azaltılmaya çalışılmıştır.

Luco ve Barros [14,15] kabuk eksenine eğik açıyla gelen düzlem dalgalar etkisinde, yatay katmanlı viskoelastik yarım uzayda gömülü sonsuz uzun silindirik kabuğun üç eksenli davranışını incelemişlerdir. Bu çalışmada, boru hattını veya tüneli içeren iç bölgede basitleştirilmiş Donell kabuk teorisi, dış bölgede ise viskoelastik yarım uzay için dolaylı bir integral ifadesinin birleşmesinden elde edilen çözüm fonksiyonları kullanılmıştır. Dolaylı integral hareketli Green fonksiyonlarıyla ifade edilmiştir.

Taşıt veya sismik yükler altında viskoelastik ortamda gömülü çoklu silindirik boşluklu sistemlerin üç eksenli davranışı Guan ve Moore [11] tarafından incelenmiştir. Çalışmada, ana tünel sabit hızlı hareketli araç yüküne ve radyal basınca maruzken ana tünel ve servis tüneli arasındaki zemin etkileşimi araştırılmıştır. Çözüm fonksiyonları olarak Bessel – Fourier fonksiyon serileri kullanılmıştır.

Lineer elastik ve homogen, izotrop bir yarım uzayda gömülü farklı tip malzemeden yapılmış, harmonik iç zorlama etkisindeki silindirik kabuğun ve yarım uzayın davranışı Bayıroğlu [4] tarafından incelenmiştir. Çalışmada ortamın davranışı Bessel – trigonometrik fonksiyon serileri yardımıyla ifade edilmiştir. Serbest

yüzeydeki sınır koşulları yaklaşık olarak sağlatılmış, analitik yoldan elde edilen sonuçlar sonlu elamanlar yöntemiyle kontrol edilmiştir.

Yeraltındaki silindirik boşlukların SV kayma dalgalarına bağlı enine davranışı Davis, Lee ve Bardet [6] tarafından araştırılmıştır. Elastik yarım uzayda gömülü boşlukların, Fourier – Bessel serileri ve yarım uzayın serbest yüzeyinde convex yaklaşımlar kullanılarak analitik çözümü yapılmıştır. Analitik çözümler, boşluk çapından daha büyük dalga boyuna sahip düşük frekanslı dalgaların boşluk yüzeyine çarpmasıyla oluşan, radyala dik doğrultudaki gerilmelerin hesaplanması için yaklaşık çözüm formüllerine genişletilmiş, varolan nümerik çözümler yaklaşık çözümle karşılaştırılarak 1994 Northridge depreminde sarsılan bükülebilir gömülü boruların dinamik davranışının tahmin edilmesinde kullanılmıştır.

Engin ve Coşkun [8] dairesel silindirik bir boşluk içeren bir elastik yarım uzayda harmonik titreşimleri incelemişlerdir. Kutupsal koordinatlarda yazılan hareket denklemleri, Helmholtz potansiyellerinin kullanılmasıyla iki adet ayrık dalga denklemine indirgenmiştir. İndirgenmiş dalga denklemleri Bessel fonksiyonları ve trigonometrik fonksiyonlar çarpım serileri yardımıyla analitik olarak çözülmüştür.

Elastisite teorisinde karşılaşılan çeşitli sınır değer problemlerinin çözümünde kullanılan belli başlı altı yöntem vardır. Bunlar;

- Ters Yöntem : Diferansiyel denklem takımı çözülerek probleme cevap bulunacak yerde, ters olarak, denklem takımını sağlayan bir takım fonksiyonlar içinden sınır koşullarını sağlayan çözüm olarak seçilir.
- Yarı Ters Yöntem: Bilinmeyenlerin tümü yerine bir kısmına uygun fonksiyonlar seçilir ve diğer kısmının ise bazı diferansiyel denklemleri ve sınır koşullarını sağlayacak şekilde belirlenmesine çalışılır.
- Direkt Yöntem: Belirli sınır değer problemini oluşturan ilgili diferansiyel denklem takımının tümü, doğrudan doğruya integre edilerek çözümler bulunduktan sonra sınır koşullarının sağlatılmasına çalışılır.
- Enerji Yöntemi: Fiziksel anlamı enerji olan belirli bir integralin ekstrem yapılmasına çalışılmaktadır.
- Sayısal Yöntemler: İncelenen cisim sonlu bir takım parçalara ayrılarak belirli noktalarda yaklaşık çözüm elde edilmesine çalışılır.

- Deneysel Yöntemler: Gerek form gerekse sınır koşulları bakımından karışık problemlerde başvurulmuş bir yöntemdir.

Bu çalışmada ele alınan problemin geometrisine uygunluğu nedeniyle Direkt yöntem kullanılmıştır. Bir elastisite probleminin direkt yöntemle incelenmesi, problemin diferansiyel denklem takımının belirli sınır koşulları altında doğrudan doğruya çözülmesini amaçlar. Bu açıdan problem, ya altı gerilme bileşenini esas alan Beltrami – Michell uygunluk denklemlerinin denge denklemleri ile birlikte belirli sınır koşulları altındaki çözümüne veya yerdeğiştirme bileşenlerini esas alan Navier denklemlerinin yine belirli sınır koşullarını gerçekleyen çözümünün bulunmasına getirilebilmektedir. Belirli sınır koşulları altında birden fazla kısmi diferansiyel denklemin simültane olarak çözümünde ortaya çıkan güçlük nedeniyle çözümü gerçekleştirebilmek için bir takım yardımcı fonksiyonların kullanılması düşünülmüştür. Elastisite teorisinde gerilme ve yerdeğiştirme bileşenleri, kullanılan yardımcı fonksiyonların çeşitli mertebelerden kısmi türevleri yardımıyla tanımlanmaktadır. Çözülmesi istenen takım Beltrami denklemleriyse tanımlanan fonksiyonlar gerilme fonksiyonları adını alır. Buna karşılık Navier denklemleri çözülmek istenirse kullanılan fonksiyonlara yerdeğiştirme fonksiyonları denir. Bu tür yardımcı fonksiyonlar potansiyel fonksiyonlar olarak adlandırılıp, denge halinde bulunan gerilme sistemlerini doğuran potansiyeller ve yerdeğiştirmeleri üreten potansiyeller olmak üzere iki tip potansiyel tanımlanmaktadır.

Çalışmada, harmonik kısmi iç basınçla zorlanan ve bu yüklemenin limit hali olan harmonik tekil kuvvet zorlaması için homogen, izotrop ve lineer elastik, silindirik boşluklu yarım uzayın davranışı incelendi. Silindirik boşluğun eksen boyunda geometri, malzeme özellikleri ve zorlamanın değişmemesi nedeniyle düzlem şekil değiştirme hali göz önüne alındı.

Çözümde, kuple hareket denklem takımı, Helmholtz yerdeğiştirme potansiyelleri kullanılarak kutupsal koordinatlarda iki adet dalga denklemine indirgenmiştir. İndirgenmiş dalga denklemleri Bessel – trigonometrik fonksiyon serileri yardımıyla analitik olarak çözülmüştür. İkinci nevi Bessel fonksiyonlarının özellikle büyük mertebelerinde küçük argüman halinde ekstrem değerler alması dolayısıyla seri sonlu sayıda terim alarak kesilmiştir.

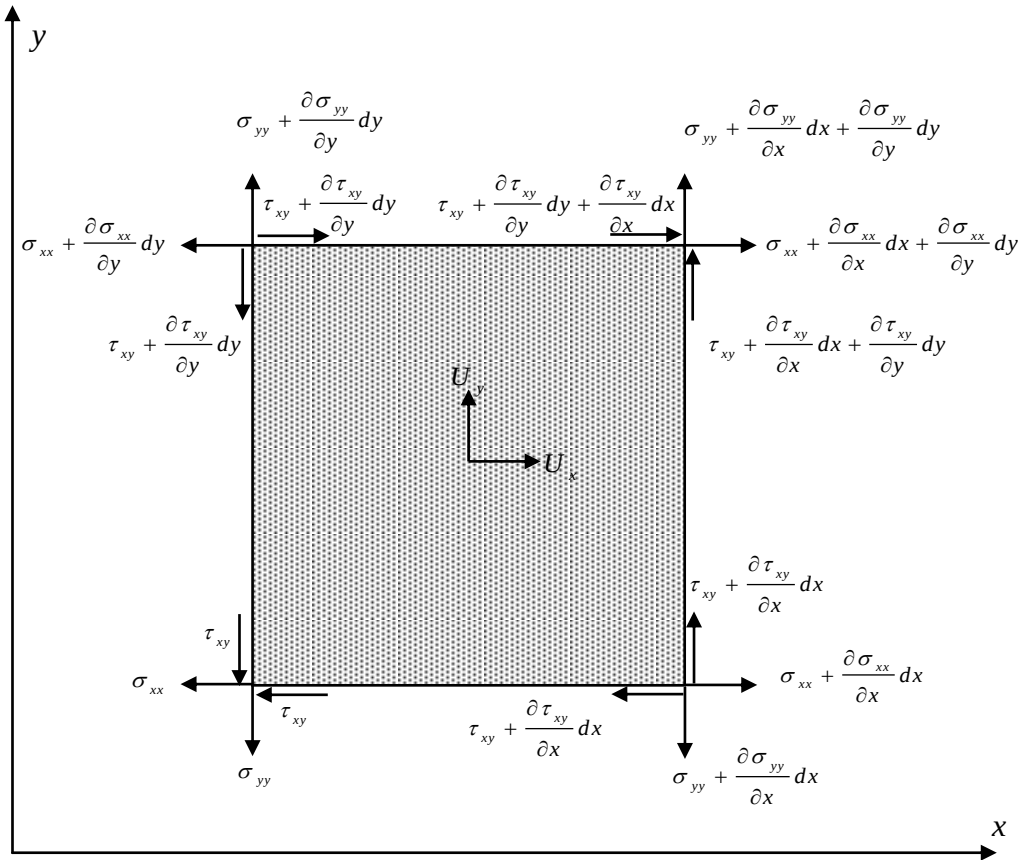
Analitik çözüm sonunda ortaya çıkan bilinmeyenler oyuk yüzeyi ve serbest yüzey üzerinde yazılan sınır koşulları yardımıyla hesaplanmıştır. Oyuk yüzeyinde sınır koşullarının tam olarak sağlatılmasıyla bilinmeyen katsayıların yarısı diğer yarısı cinsinden elde edilmiştir. Serbest yüzey üzerinde gerilme bileşenleri her noktada sıfır olmalıdır. Ancak serbest yüzeyde sonsuz sayıda nokta olması, çözüm serilerinin sonlu bir sayıda kesilmesi nedeniyle birden fazla çözüm elde edilecektir. Birçok çözüm yerine “En Küçük Kareler Yöntemi” kullanılarak ve serbest yüzey üzerinde oldukça fazla nokta göz önüne alınarak yüzey boyunca gerilme bileşenleri ile ilgili koşullar yaklaşık olarak sağlatılmıştır.

Sayısal işlemlerde Mathematica 4.0 paket programı kullanılarak oyuk yüzeyindeki ve serbest yüzey sınırı boyunca yerdeğiştirme ve gerilme bileşenlerinin çeşitli parametrelere göre değişimleri grafiklerle gösterilmiştir.

2. DÜZLEM ELASTİSİTEDE TEMEL DENKLEMLER

Bu bölümde iki boyutlu lineer elastik ve homogen, izotrop bir ortamdan alınan bir yüzey elemanına etki eden kuvvet sistemine Newton' un ikinci hareket kanunu uygulanarak düzlem elastisitenin temel denklemleri elde edildi. Homogen , izotrop ve lineer elastik ortamlar için geçerli olan bünye bağıntıları, elde edilen bu denklemlerde kullanılarak yerdeğiştirmeler cinsinden alan denklemleri olan Navier denklemleri elde edildi.

Şekil 2.1 de görüldüğü gibi iki boyutlu lineer elastik ve homogen, izotrop bir ortamdan alınan diferansiyel bir alan elemanında kütle kuvvetlerini ihmal ederek Newton' un ikinci hareket kanunu uygulayalım.



Şekil 2.1 Diferansiyel alan elemanındaki gerilmeler

Bahis konusu olan elamanın kenarlarına etkiyen kuvvetleri ve ivme bileşenlerini göz önüne alalım. Levha kalınlığını birim olarak alıp x eksenini doğrultusundaki hareket denklemini yazacak olursak;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} dy \right) + \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) \right] dy - \frac{1}{2} \left[\left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} dy \right) + \sigma_{xx} \right] dy \\ & + \frac{1}{2} \left[\left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) \right] dx - \frac{1}{2} \left[\left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) + \tau_{xy} \right] dx \\ & = \rho \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} dx dy \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Hareket denklemini bir kez de y eksenini doğrultusunda yazıp gerekli kısaltmalar ve düzenlemelerden yapıldıktan sonra aşağıdaki hareket denklemleri elde edilir.

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} \quad (2.1.a)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 U_y}{\partial t^2} \quad (2.1.b)$$

Burada σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} gerilme tansörünün, U_x ve U_y yerdeğiştirmenin kartezyen koordinatlardaki bileşenleridir. ρ kütle yoğunluğunu, t ise zamanı göstermektedir.

Gerilmeler cinsinden sınır koşulları:

$$\sigma_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y = \hat{t}_x \quad (2.2.a)$$

$$\tau_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y = \hat{t}_y \quad (2.2.b)$$

Burada n_x ve n_y sınır eğrisinin dış normal birim vektörünün bileşenleri $\hat{t}_x$ ve $\hat{t}_y$ ise sınırdaki etki eden dış gerilmenin bileşenleridir.

Yerdeğiştirmeler cinsinden sınır koşulları:

$$U_x = \hat{U}_x \quad (2.3.a)$$

$$U_y = \hat{U}_y \quad (2.3.b)$$

Burada $\hat{U}_x$ ve $\hat{U}_y$ sınırdaki yerdeğiştirmenin belirli olan bileşenleridir. Lineer elastik ve homogen, izotrop ortamlardaki bünye bağıntısı indis gösterimiyle aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\tau_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.4)$$

λ ve μ Lamé değişmezleri olup, bu değişmezler E Elastisite modülü ve ν Poisson oranı cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.5.a)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.5.b)$$

Hacim değiştirme oranı olan ε_{kk} ise düzlem şekildeğiştirme hali için aşağıdaki gibidir.

$$e = \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} \quad (2.6)$$

Kartezyen koordinatlardaki şekildeğiştirme – yerdeğiştirme bağıntıları:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U_x}{\partial x} \quad (2.7.a)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial U_y}{\partial y} \quad (2.7.b)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right) \quad (2.7.c)$$

(2.7) bağıntıları (2.4) bünye bağıntısı ile birlikte (2.1) hareket denklemlerinde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa kartezyen koordinatlarda yerdeğiştirmeler cinsinden Navier denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x} + \mu \nabla^2 U_x = \rho \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} \quad (2.8.a)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial y} + \mu \nabla^2 U_y = \rho \frac{\partial^2 U_y}{\partial t^2} \quad (2.8.b)$$

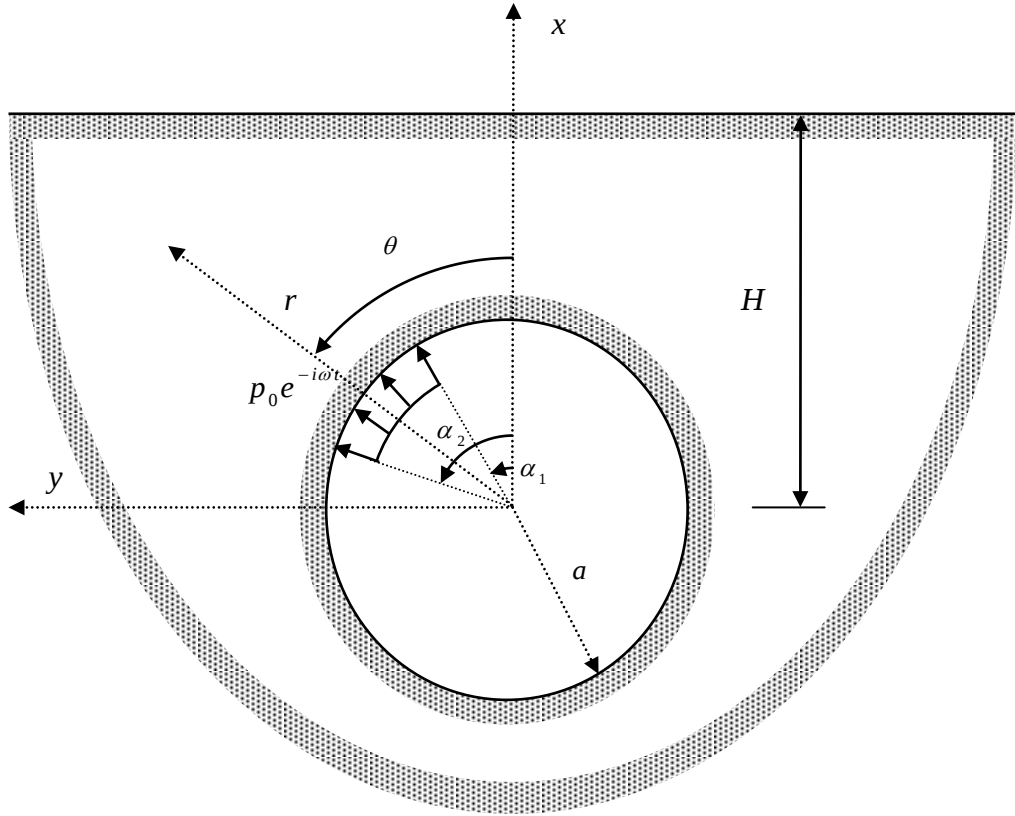
(2.8) Navier denklemlerindeki, ∇^2 kartezyen koordinatlarda Laplasyen olup ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

3. ANALİTİK ÇÖZÜM

3.1 FORMÜLASYON ve ÇÖZÜM

Yarı sonsuz ortamda serbest yüzeyden H kadar derinlikte, a yarıçaplı, Şekil 3.1’ de görüldüğü gibi silindirik bir oyuk göz önüne alalım. z , oyuk eksenine boyunca ortamın geometrisi, malzeme özellikleri ve zorlamanın değişmediği kabul edilirse problem düzlem şekildeğiştirme hali olarak göz önüne alınabilir. Problemin geometrisi nedeniyle kutupsal koordinatların kullanılması uygundur.



Şekil 3.1 Problemin geometrisi

Yönetici denklemimiz olan Navier denklemi aşağıdaki gibi vektörel formda yazılabilir.

$$(\lambda + \mu)\nabla\nabla\cdot\vec{U} + \mu\nabla^2\vec{U} = \rho\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

Burada $\vec{U}(r, \theta, t)$ yerdeğiştirme vektörünü, ρ kütle yoğunluğunu, λ ve μ Lamé değişmezlerini, ∇ Nabla operatörünü, t' de zamanı göstermektedir. r ve θ kutupsal koordinatlardır.

Yarı sonsuz ortamda bulunan silindirik kabuğu iç yüzeyinde p_0 genlik, ω açısal frekans, t' de zaman olmak üzere

$$p_i = p_0 e^{-i\omega t} \quad (3.2)$$

şeklinde değişen, bir kısmi alana etkiyen iç basıncın etkidiği düşünülürse, yerdeğiştirme ve gerilme fonksiyonları da 1. mertebe teorisinin kullanılması sonucu aynı şekilde harmonik fonksiyonlarla ifade edilebilir.

$$U_r(r, \theta, t) = u_r(r, \theta) e^{-i\omega t} \quad (3.3.a)$$

$$U_\theta(r, \theta, t) = u_\theta(r, \theta) e^{-i\omega t} \quad (3.3.b)$$

$$\sigma_{rr}(r, \theta, t) = \sigma_{rr}(r, \theta) e^{-i\omega t} \quad (3.4.a)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta, t) = \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) e^{-i\omega t} \quad (3.4.b)$$

$$\tau_{r\theta}(r, \theta, t) = \tau_{r\theta}(r, \theta) e^{-i\omega t} \quad (3.4.c)$$

Burada u_r ve u_θ yerdeğiştirme vektörünün, σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ ve $\tau_{r\theta}$ gerilme tansörünün kutupsal koordinatlardaki bileşenleridir.

Yerdeğiştirmelere ait (3.3) ifadeleri, (3.1) Navier denkleminde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa, Navier denklemleri aşağıdaki gibi vektörel formda yazılabilir.

$$(\lambda + \mu)\nabla\nabla.\vec{u} + \mu\nabla^2\vec{u} + \rho\omega^2\vec{u} = 0 \quad (3.5)$$

Burada

$$\vec{u} = u_r\vec{e}_r + u_\theta\vec{e}_\theta \quad (3.6)$$

şeklinde kutupsal koordinatlarda ifade edilebilir.

Helmholtz ayırma teoremi kullanılarak $\vec{u}$ yerdeğiştirme vektörü $\varphi(r, \theta)$ skaler ve $\vec{\psi}(r, \theta) = \psi(r, \theta)\vec{e}_z$ vektörel potansiyel fonksiyonları cinsinden aşağıdaki yapıda yazılabilir.

$$\vec{u} = \nabla\varphi + \nabla \times (\psi\vec{e}_z) \quad (3.7)$$

Burada, tek çözüm elde edilebilmesi $\vec{\psi}$ vektörel potansiyelinin diverjansı sıfır olmalıdır, yani:

$$\nabla.(\psi\vec{e}_z) = 0$$

Potansiyel fonksiyonlarla yazılan yerdeğiştirme vektörüne ait (3.7) ifadesi (3.5) Navier denkleminde yerine yazılırsa bu ayırma işleminin sonunda indirgenmiş dalga denklemi olarak

$$\nabla^2\varphi + k_1^2\varphi = 0 \quad (3.8.a)$$

$$\nabla^2\psi + k_2^2\psi = 0 \quad (3.8.b)$$

denklemleri elde edilmektedir. ∇^2 kutupsal koordinatlarda Laplasyen olup

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

ile ifade edilmektedir. İndirgenmiş dalga denklemindeki

$$k_1 = \omega / c_1$$

Boyuna dalga sayısı,

$$k_2 = \omega / c_2$$

Enine dalga sayısı,

$$c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho}$$

Boyuna dalga hızı,

$$c_2 = \sqrt{\mu / \rho}$$

Enine dalga hızı,

olarak tanımlanmaktadır.

Yerdeğiştirme vektörünün kutupsal koordinatlardaki bileşenleri potansiyel fonksiyonlar cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (3.9.a)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (3.9.a)$$

Gerilme – yerdeğiştirme bağıntılarının kutupsal koordinatlardaki ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (3.10.a)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} (\lambda + 2\mu) \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (3.10.b)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\mu}{r} \left(r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - u_\theta + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \quad (3.10.c)$$

Çarpanlara ayırma yönteminin kullanılmasıyla (3.8) dalga denklemlerinin çözümü Bessel – trigonometrik fonksiyonlar serisi olarak aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [(A_n J_n(k_1 r) + B_n Y_n(k_1 r)) \cos n\theta + (C_n J_n(k_1 r) + D_n Y_n(k_1 r)) \sin n\theta] \quad (3.11.a)$$

$$\psi(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [(E_n J_n(k_2 r) + F_n Y_n(k_2 r)) \cos n\theta + (G_n J_n(k_2 r) + H_n Y_n(k_2 r)) \sin n\theta] \quad (3.11.b)$$

Bessel fonksiyonlarının indislerinin tam sayı olması nedeniyle bu sonsuz serileri $-\infty$ yerine sıfırdan başlatmak kabildir. Böylece $\varphi(r, \theta)$ ve $\psi(r, \theta)$ fonksiyon serileri,

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [(A_n J_n(k_1 r) + B_n Y_n(k_1 r)) \cos n\theta + (C_n J_n(k_1 r) + D_n Y_n(k_1 r)) \sin n\theta] \quad (3.12.a)$$

$$\psi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [(E_n J_n(k_2 r) + F_n Y_n(k_2 r)) \cos n\theta + (G_n J_n(k_2 r) + H_n Y_n(k_2 r)) \sin n\theta] \quad (3.12.b)$$

şeklini alır. Burada $A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n, G_n, H_n$ bilinmeyen değişmezler olup, sınır koşullarının sağlatılmasıyla elde edilecektir. $J_n(x)$ ve $Y_n(x)$ birinci ve ikinci nevi Bessel fonksiyonlarıdır. Bu, (3.12) çözüm fonksiyonlarının (3.9) yerdeğiştirme ifadelerinde yerine yazılmasıyla yerdeğiştirme bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} u_r = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[A_n \left(\frac{n}{r} J_n(k_1 r) - k_1 J_{n+1}(k_1 r) \right) + B_n \left(\frac{n}{r} Y_n(k_1 r) - k_1 Y_{n+1}(k_1 r) \right) \right. \right. \\ \left. \left. + G_n \frac{n}{r} J_n(k_2 r) + H_n \frac{n}{r} Y_n(k_2 r) \right] \cos n\theta \right. \\ \left. + \left[C_n \left(\frac{n}{r} J_n(k_1 r) - k_1 J_{n+1}(k_1 r) \right) + D_n \left(\frac{n}{r} Y_n(k_1 r) - k_1 Y_{n+1}(k_1 r) \right) \right. \right. \\ \left. \left. - E_n \frac{n}{r} J_n(k_2 r) - F_n \frac{n}{r} Y_n(k_2 r) \right] \sin n\theta \right\} \end{aligned} \quad (3.13.a)$$

$$\begin{aligned}
u_{\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[-A_n \frac{n}{r} J_n(k_1 r) - B_n \frac{n}{r} Y_n(k_1 r) - G_n \left(\frac{n}{r} J_n(k_2 r) - k_2 J_{n+1}(k_2 r) \right) \right. \right. \\
\left. \left. - H_n \left(\frac{n}{r} Y_n(k_2 r) - k_2 Y_{n+1}(k_2 r) \right) \right] \sin n\theta \right. \\
\left. + \left[C_n \frac{n}{r} J_n(k_1 r) + D_n \frac{n}{r} Y_n(k_1 r) - E_n \left(\frac{n}{r} J_n(k_2 r) - k_2 J_{n+1}(k_2 r) \right) \right. \right. \\
\left. \left. - F_n \left(\frac{n}{r} Y_n(k_2 r) - k_2 Y_{n+1}(k_2 r) \right) \right] \cos n\theta \right\}
\end{aligned}
\tag{3.13.b}$$

Yerdeğiştirmelere ait (3.13) bağıntılarını, kutupsal koordinatlardaki (3.10) gerilme – yerdeğiştirme bağıntılarında yerine yazarsak, gerilme bileşenlerinin Bessel – trigonometrik fonksiyon serileri cinsinden ifadeleri aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} = \frac{2\mu}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left\{ A_n \left[(n^2 - n - 0.5k_2^2 r^2) J_n(k_1 r) + k_1 r J_{n+1}(k_1 r) \right] \right. \right. \\
+ B_n \left[(n^2 - n - 0.5k_2^2 r^2) Y_n(k_1 r) + k_1 r Y_{n+1}(k_1 r) \right] \\
+ G_n \left[(n^2 - n) J_n(k_2 r) - nk_2 r J_{n+1}(k_2 r) \right] \\
+ H_n \left[(n^2 - n) Y_n(k_2 r) - nk_2 r Y_{n+1}(k_2 r) \right] \left. \right\} \cos n\theta \\
+ \left\{ C_n \left[(n^2 - n - 0.5k_2^2 r^2) J_n(k_1 r) + k_1 r J_{n+1}(k_1 r) \right] \right. \\
+ D_n \left[(n^2 - n - 0.5k_2^2 r^2) Y_n(k_1 r) + k_1 r Y_{n+1}(k_1 r) \right] \\
+ E_n \left[(-n^2 + n) J_n(k_2 r) + nk_2 r J_{n+1}(k_2 r) \right] \\
+ F_n \left[(-n^2 + n) Y_n(k_2 r) + nk_2 r Y_{n+1}(k_2 r) \right] \left. \right\} \sin n\theta \left. \right]
\end{aligned}
\tag{3.14.a}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta\theta} = \frac{2\mu}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \bigg[& \left\{ A_n \left[\left(-n^2 + n + k_1^2 r^2 - 0.5 k_2^2 r^2 \right) J_n(k_1 r) - k_1 r J_{n+1}(k_1 r) \right] \right. \\
& + B_n \left[\left(-n^2 + n + k_1^2 r^2 - 0.5 k_2^2 r^2 \right) Y_n(k_1 r) - k_1 r Y_{n+1}(k_1 r) \right] \\
& + G_n \left[\left(-n^2 + n \right) J_n(k_2 r) + n k_2 r J_{n+1}(k_2 r) \right] \\
& + H_n \left[\left(-n^2 + n \right) Y_n(k_2 r) + n k_2 r Y_{n+1}(k_2 r) \right] \bigg\} \cos n\theta \\
& + \left\{ C_n \left[\left(-n^2 + n + k_1^2 r^2 - 0.5 k_2^2 r^2 \right) J_n(k_1 r) - k_1 r J_{n+1}(k_1 r) \right] \right. \\
& + D_n \left[\left(-n^2 + n + k_1^2 r^2 - 0.5 k_2^2 r^2 \right) Y_n(k_1 r) - k_1 r Y_{n+1}(k_1 r) \right] \\
& + E_n \left[\left(n^2 - n \right) J_n(k_2 r) - n k_2 r J_{n+1}(k_2 r) \right] \\
& + F_n \left[\left(n^2 - n \right) Y_n(k_2 r) - n k_2 r Y_{n+1}(k_2 r) \right] \bigg\} \sin n\theta \bigg]
\end{aligned} \tag{3.14.b}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{r\theta} = \frac{2\mu}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \bigg[& \left\{ A_n \left[\left(-n^2 + n \right) J_n(k_1 r) + n k_1 r J_{n+1}(k_1 r) \right] \right. \\
& + B_n \left[\left(-n^2 + n \right) Y_n(k_1 r) + n k_1 r Y_{n+1}(k_1 r) \right] \\
& + G_n \left[\left(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 r^2 \right) J_n(k_2 r) - k_2 r J_{n+1}(k_2 r) \right] \\
& + H_n \left[\left(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 r^2 \right) Y_n(k_2 r) - k_2 r Y_{n+1}(k_2 r) \right] \bigg\} \sin n\theta \\
& + \left\{ C_n \left[\left(n^2 - n \right) J_n(k_1 r) - n k_1 r J_{n+1}(k_1 r) \right] \right. \\
& + D_n \left[\left(n^2 - n \right) Y_n(k_1 r) - n k_1 r Y_{n+1}(k_1 r) \right] \\
& + E_n \left[\left(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 r^2 \right) J_n(k_2 r) - k_2 r J_{n+1}(k_2 r) \right] \\
& + F_n \left[\left(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 r^2 \right) Y_n(k_2 r) - k_2 r Y_{n+1}(k_2 r) \right] \bigg\} \cos n\theta \bigg]
\end{aligned} \tag{3.14.c}$$

Kutupsal koordinatlarda hesaplamış olduğumuz yerdeğiştirme ve gerilme bileşenlerini, kartezyen koordinatlardaki bileşenleri cinsinden hesaplayabilmek için aşağıdaki dönüşüm formülleri kullanılmaktadır.

$$u_x = u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta \tag{3.15.a}$$

$$u_y = u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta \tag{3.15.b}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}}{2} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{2} \cos 2\theta + \tau_{r\theta} \sin 2\theta \quad (3.16.a)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}}{2} - \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{2} \cos 2\theta - \tau_{r\theta} \sin 2\theta \quad (3.16.b)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{2} \sin 2\theta - \tau_{r\theta} \cos 2\theta \quad (3.16.c)$$

Kutupsal koordinatlarda elde etmiş olduğumuz (3.14) gerilme bağıntılarını yukarıdaki (3.16) dönüşüm formüllerinde vazedip gerekli düzenlemeler yapılırsa serbest yüzeydeki σ_{xx}, σ_{yy} ve τ_{xy} gerilme bileşenleri Bessel – trigonometrik fonksiyonlar cinsinden aşağıdaki şekliyle ifade edilmiş olur.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = & \frac{2\mu}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \left\{ \left[(0.5k_1^2 r^2 - 0.5k_2^2 r^2) J_n(k_1 r) + \left[(n^2 - n - 0.5k_1^2 r^2) J_n(k_1 r) \right. \right. \right. \right. \\ & + k_1 r J_{n+1}(k_1 r) \left. \right] \cos 2\theta \left. \right] \cos n\theta + \left[(-n^2 + n) J_n(k_1 r) + n k_1 r J_{n+1}(k_1 r) \right] \sin 2\theta \sin n\theta \left. \right\} \\ & + B_n \left\{ \left[(0.5k_1^2 r^2 - 0.5k_2^2 r^2) Y_n(k_1 r) + \left[(n^2 - n - 0.5k_1^2 r^2) Y_n(k_1 r) \right. \right. \right. \\ & + k_1 r Y_{n+1}(k_1 r) \left. \right] \cos 2\theta \left. \right] \cos n\theta + \left[(-n^2 + n) Y_n(k_1 r) + n k_1 r Y_{n+1}(k_1 r) \right] \sin 2\theta \sin n\theta \left. \right\} \\ & + G_n \left\{ \left[(n^2 - n) J_n(k_2 r) - n k_2 r J_{n+1}(k_2 r) \right] \cos 2\theta \cos n\theta \right. \\ & + \left. \left[(-n^2 + n + 0.5k_2^2 r^2) J_n(k_2 r) - k_2 r J_{n+1}(k_2 r) \right] \sin 2\theta \sin n\theta \right\} \\ & + H_n \left\{ \left[(n^2 - n) Y_n(k_2 r) - n k_2 r Y_{n+1}(k_2 r) \right] \cos 2\theta \cos n\theta \right. \\ & + \left. \left[(-n^2 + n + 0.5k_2^2 r^2) Y_n(k_2 r) - k_2 r Y_{n+1}(k_2 r) \right] \sin 2\theta \sin n\theta \right\} \\ & + C_n \left\{ \left[(0.5k_1^2 r^2 - 0.5k_2^2 r^2) J_n(k_1 r) + \left[(n^2 - n - 0.5k_1^2 r^2) J_n(k_1 r) \right. \right. \right. \\ & + k_1 r J_{n+1}(k_1 r) \left. \right] \cos 2\theta \left. \right] \sin n\theta + \left[(n^2 - n) J_n(k_1 r) - n k_1 r J_{n+1}(k_1 r) \right] \sin 2\theta \cos n\theta \left. \right\} \\ & + D_n \left\{ \left[(0.5k_1^2 r^2 - 0.5k_2^2 r^2) Y_n(k_1 r) + \left[(n^2 - n - 0.5k_1^2 r^2) Y_n(k_1 r) \right. \right. \right. \\ & + k_1 r Y_{n+1}(k_1 r) \left. \right] \cos 2\theta \left. \right] \sin n\theta + \left[(n^2 - n) Y_n(k_1 r) - n k_1 r Y_{n+1}(k_1 r) \right] \sin 2\theta \cos n\theta \left. \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + E_n \left\{ \left[\left(-n^2 + n \right) J_n(k_2 r) + n k_2 r J_{n+1}(k_2 r) \right] \cos 2\theta \sin n\theta \right. \\
& + \left. \left[\left(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 r^2 \right) J_n(k_2 r) - k_2 r J_{n+1}(k_2 r) \right] \sin 2\theta \cos n\theta \right\} \\
& + F_n \left\{ \left[\left(-n^2 + n \right) Y_n(k_2 r) + n k_2 r Y_{n+1}(k_2 r) \right] \cos 2\theta \sin n\theta \right. \\
& + \left. \left[\left(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 r^2 \right) Y_n(k_2 r) - k_2 r Y_{n+1}(k_2 r) \right] \sin 2\theta \cos n\theta \right\}
\end{aligned} \tag{3.17.a}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{yy} = \frac{2\mu}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} & \left[A_n \left\{ \left[\left(0.5 k_1^2 r^2 - 0.5 k_2^2 r^2 \right) J_n(k_1 r) - \left[\left(n^2 - n - 0.5 k_1^2 r^2 \right) J_n(k_1 r) \right. \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \left. k_1 r J_{n+1}(k_1 r) \right] \cos 2\theta \right] \cos n\theta - \left[\left(-n^2 + n \right) J_n(k_1 r) + n k_1 r J_{n+1}(k_1 r) \right] \sin 2\theta \sin n\theta \right\} \\
& + B_n \left\{ \left[\left(0.5 k_1^2 r^2 - 0.5 k_2^2 r^2 \right) Y_n(k_1 r) - \left[\left(n^2 - n - 0.5 k_1^2 r^2 \right) Y_n(k_1 r) \right. \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \left. k_1 r Y_{n+1}(k_1 r) \right] \cos 2\theta \right] \cos n\theta - \left[\left(-n^2 + n \right) Y_n(k_1 r) + n k_1 r Y_{n+1}(k_1 r) \right] \sin 2\theta \sin n\theta \right\} \\
& + G_n \left\{ - \left[\left(n^2 - n \right) J_n(k_2 r) - n k_2 r J_{n+1}(k_2 r) \right] \cos 2\theta \cos n\theta \right. \\
& - \left. \left[\left(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 r^2 \right) J_n(k_2 r) - k_2 r J_{n+1}(k_2 r) \right] \sin 2\theta \sin n\theta \right\} \\
& + H_n \left\{ - \left[\left(n^2 - n \right) Y_n(k_2 r) - n k_2 r Y_{n+1}(k_2 r) \right] \cos 2\theta \cos n\theta \right. \\
& - \left. \left[\left(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 r^2 \right) Y_n(k_2 r) - k_2 r Y_{n+1}(k_2 r) \right] \sin 2\theta \sin n\theta \right\} \\
& + C_n \left\{ \left[\left(0.5 k_1^2 r^2 - 0.5 k_2^2 r^2 \right) J_n(k_1 r) - \left[\left(n^2 - n - 0.5 k_1^2 r^2 \right) J_n(k_1 r) \right. \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \left. k_1 r J_{n+1}(k_1 r) \right] \cos 2\theta \right] \sin n\theta - \left[\left(n^2 - n \right) J_n(k_1 r) - n k_1 r J_{n+1}(k_1 r) \right] \sin 2\theta \cos n\theta \right\} \\
& + D_n \left\{ \left[\left(0.5 k_1^2 r^2 - 0.5 k_2^2 r^2 \right) Y_n(k_1 r) - \left[\left(n^2 - n - 0.5 k_1^2 r^2 \right) Y_n(k_1 r) \right. \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \left. k_1 r Y_{n+1}(k_1 r) \right] \cos 2\theta \right] \sin n\theta - \left[\left(n^2 - n \right) Y_n(k_1 r) - n k_1 r Y_{n+1}(k_1 r) \right] \sin 2\theta \cos n\theta \right\} \\
& + E_n \left\{ - \left[\left(-n^2 + n \right) J_n(k_2 r) + n k_2 r J_{n+1}(k_2 r) \right] \cos 2\theta \sin n\theta \right. \\
& - \left. \left[\left(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 r^2 \right) J_n(k_2 r) - k_2 r J_{n+1}(k_2 r) \right] \sin 2\theta \cos n\theta \right\} \\
& + F_n \left\{ - \left[\left(-n^2 + n \right) Y_n(k_2 r) + n k_2 r Y_{n+1}(k_2 r) \right] \cos 2\theta \sin n\theta \right. \\
& - \left. \left[\left(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 r^2 \right) Y_n(k_2 r) - k_2 r Y_{n+1}(k_2 r) \right] \sin 2\theta \cos n\theta \right\}
\end{aligned} \tag{3.17.b}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} = & \frac{2\mu}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \left\{ \left[\left(n^2 - n - 0.5k_1^2 r^2 \right) J_n(k_1 r) + k_1 r J_{n+1}(k_1 r) \right] \sin 2\theta \cos n\theta \right. \right. \\
& - \left[\left(-n^2 + n \right) J_n(k_1 r) + nk_1 r J_{n+1}(k_1 r) \right] \cos 2\theta \sin n\theta \left. \right\} \\
& + B_n \left\{ \left[\left(n^2 - n - 0.5k_1^2 r^2 \right) Y_n(k_1 r) + k_1 r Y_{n+1}(k_1 r) \right] \sin 2\theta \cos n\theta \right. \\
& - \left[\left(-n^2 + n \right) Y_n(k_1 r) + nk_1 r Y_{n+1}(k_1 r) \right] \cos 2\theta \sin n\theta \left. \right\} \\
& + G_n \left\{ \left[\left(n^2 - n \right) J_n(k_2 r) - nk_2 r J_{n+1}(k_2 r) \right] \sin 2\theta \cos n\theta \right. \\
& - \left[\left(-n^2 + n + 0.5k_2^2 r^2 \right) J_n(k_2 r) - k_2 r J_{n+1}(k_2 r) \right] \cos 2\theta \sin n\theta \left. \right\} \\
& + H_n \left\{ \left[\left(n^2 - n \right) Y_n(k_2 r) - nk_2 r Y_{n+1}(k_2 r) \right] \sin 2\theta \cos n\theta \right. \\
& - \left[\left(-n^2 + n + 0.5k_2^2 r^2 \right) Y_n(k_2 r) - k_2 r Y_{n+1}(k_2 r) \right] \cos 2\theta \sin n\theta \left. \right\} \\
& + C_n \left\{ \left[\left(n^2 - n - 0.5k_1^2 r^2 \right) J_n(k_1 r) + k_1 r J_{n+1}(k_1 r) \right] \sin 2\theta \sin n\theta \right. \\
& - \left[\left(n^2 - n \right) J_n(k_1 r) - nk_1 r J_{n+1}(k_1 r) \right] \cos 2\theta \cos n\theta \left. \right\} \\
& + D_n \left\{ \left[\left(n^2 - n - 0.5k_1^2 r^2 \right) Y_n(k_1 r) + k_1 r Y_{n+1}(k_1 r) \right] \sin 2\theta \sin n\theta \right. \\
& - \left[\left(n^2 - n \right) Y_n(k_1 r) - nk_1 r Y_{n+1}(k_1 r) \right] \cos 2\theta \cos n\theta \left. \right\} \\
& + E_n \left\{ \left[\left(-n^2 + n \right) J_n(k_2 r) + nk_2 r J_{n+1}(k_2 r) \right] \sin 2\theta \sin n\theta \right. \\
& - \left[\left(-n^2 + n + 0.5k_2^2 r^2 \right) J_n(k_2 r) - k_2 r J_{n+1}(k_2 r) \right] \cos 2\theta \cos n\theta \left. \right\} \\
& + F_n \left\{ \left[\left(-n^2 + n \right) Y_n(k_2 r) + nk_2 r Y_{n+1}(k_2 r) \right] \sin 2\theta \sin n\theta \right. \\
& - \left[\left(-n^2 + n + 0.5k_2^2 r^2 \right) Y_n(k_2 r) - k_2 r Y_{n+1}(k_2 r) \right] \cos 2\theta \cos n\theta \left. \right\}
\end{aligned}
\tag{3.17.c}$$

3.2 SINIR KOŞULLARININ SAĞLATILMASI

3.2.1 KISMİ YAYILI YÜK HALİ

Şekil 3.1 de görüldüğü gibi, oyuk yüzeyi üzerinde $(\alpha_2 - \alpha_1)$ merkez açılı bir sektöre p_0 genlikli bir iç basıncın yüklendiğini göz önüne alalım. Bu yükleme durumu için sınır koşullarının sağlatılması amacıyla yükleme sürekli bir fonksiyonla temsil edilmiş ve yük terimi Fourier serisine açılmıştır. Genel halde, $2L$ periyodlu bir $f(x)$ fonksiyonunun $(-L, L)$ aralığında tanımlı Fourier serisi aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (3.18)$$

Yukarıdaki (3.18) Fourier serisindeki a_0 sabitini ve a_n, b_n bilinmeyen değişmezlerini belirleyebilmek için aşağıdaki adımlar izlenmiştir. İlk olarak a_0 ' ı hesaplamak üzere (3.18) ifadesinin her iki tarafını $-L$ ' den L ' ye kadar terim terim integre edelim.

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right)$$

Bu takdirde, kosinüslü ve sinüslü bütün integraller sıfır olduğundan

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx \quad (3.19)$$

olarak elde edilir. a_n ve b_n katsayılarını hesaplayabilmek için ortogonal fonksiyonların özelliklerinden faydalanılır. Bu amaçla (3.18) eşitliğinin her iki tarafını terim terim $\cos \frac{m\pi x}{L}$ ile çarpıp $-L$ ' den L ' ye kadar integre edersek;

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx &= \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} \cos \frac{m\pi x}{L} dx \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx \right) \end{aligned}$$

ifadesini elde etmiş oluruz. İkinci taraftaki terimlerden a_m katsayılı olanı hariç diğerleri sıfır olur. Bu durumda

$$a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx \quad m = 1, 2, 3... \quad (3.20)$$

olarak belirlenmiş olur. Aynı şekilde (3.18) eşitliğinin her iki tarafını terim terim $\sin \frac{m\pi x}{L}$ ile çarpıp $-L$ ' den L ' ye kadar integre edersek;

$$\int_{-L}^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx = \int_{-L}^L \frac{a_0}{2} \sin \frac{m\pi x}{L} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx \right)$$

ifadesini elde etmiş oluruz. Bu takdirde de ikinci taraftaki terimlerden b_m katsayılı olanı hariç diğerleri sıfır olur. Böylece

$$b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (3.21)$$

olarak belirlenmiş olur. Sonuçta (3.19), (3.20), (3.21) formülleri ile tanımlı katsayılardan oluşturulmuş Fourier serisini elde etmiş olduk. Bu fonksiyon belirlediğimiz aralıkta tanımlı ve yakınsak olabilmesi için Dirichlet koşullarını sağlamalıdır.

Bizim ele aldığımız probleme dönecek olursak, $\alpha_2 - \alpha_1$ merkez açılı bir sektör üzerinde yayılan p_0 şiddetindeki kısmi yayılı yükün Fourier serisi yukarıdaki tanımlardan

$$p(\theta) = \frac{p_0}{2\pi} (\alpha_2 - \alpha_1) + \frac{p_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} (\sin n\alpha_2 - \sin n\alpha_1) \cos n\theta \right\} - \frac{p_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} (\cos n\alpha_2 - \cos n\alpha_1) \sin n\theta \right\} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (3.22)$$

olarak elde edilecektir.

3.2.1.1 OYUK İÇ YÜZEYİNDEKİ SINIR KOŞULLARININ SAĞLATILMASI

Oyuk iç yüzeyinde σ_{rr} radyal gerilmesi yük fonksiyonuna, $\tau_{r\theta}$ kayma gerilmesi de θ' nın her değeri için sıfıra eşit olmalıdır.

$$\left. \sigma_{rr} \right|_{r=a} = -p(\theta) \quad \left. \tau_{r\theta} \right|_{r=a} = 0 \quad (3.23)$$

Buna göre (3.14.a) denkleminde

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{2\mu}{a^2} \sum_{n=0}^N \left[\left\{ A_n \left[(n^2 - n - 0.5k_2^2 a^2) J_n(k_1 a) + k_1 a J_{n+1}(k_1 a) \right] \right. \right. \\ &\quad + B_n \left[(n^2 - n - 0.5k_2^2 a^2) Y_n(k_1 a) + k_1 a Y_{n+1}(k_1 a) \right] \\ &\quad + G_n \left[(n^2 - n) J_n(k_2 a) - n k_2 a J_{n+1}(k_2 a) \right] \\ &\quad + H_n \left[(n^2 - n) Y_n(k_2 a) - n k_2 a Y_{n+1}(k_2 a) \right] \left. \right\} \cos n\theta \\ &\quad + \left\{ C_n \left[(n^2 - n - 0.5k_2^2 a^2) J_n(k_1 a) + k_1 a J_{n+1}(k_1 a) \right] \right. \\ &\quad + D_n \left[(n^2 - n - 0.5k_2^2 a^2) Y_n(k_1 a) + k_1 a Y_{n+1}(k_1 a) \right] \\ &\quad + E_n \left[(-n^2 + n) J_n(k_2 a) + n k_2 a J_{n+1}(k_2 a) \right] \\ &\quad + F_n \left[(-n^2 + n) Y_n(k_2 a) + n k_2 a Y_{n+1}(k_2 a) \right] \left. \right\} \sin n\theta \Big] \\ &= -\frac{p_0}{2\pi} (\alpha_2 - \alpha_1) - \frac{p_0}{\pi} \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{1}{n} (\sin n\alpha_2 - \sin n\alpha_1) \cos n\theta \right\} \\ &\quad + \frac{p_0}{\pi} \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{1}{n} (\cos n\alpha_2 - \cos n\alpha_1) \sin n\theta \right\} \end{aligned} \quad (3.24)$$

elde edilir. Bu denklemden $n = 0$ için;

$$\begin{aligned} &\left\{ A_0 \left[(-0.5k_2^2 a^2) J_0(k_1 a) + k_1 a J_1(k_1 a) \right] \right. \\ &\quad + B_0 \left[(-0.5k_2^2 a^2) Y_0(k_1 a) + k_1 a Y_1(k_1 a) \right] \left. \right\} = -\frac{p_0}{2\pi} \frac{a^2}{2\mu} (\alpha_2 - \alpha_1) \end{aligned} \quad (3.25)$$

bir adet bağıntı elde edilir. n ' nin sıfırdan farklı her değeri için radyal gerilme ifadesindeki trigonometrik terimlerin katsayılarıyla yük ifadesindeki katsayılar ayrı ayrı eşleştirilmelidir. Buradan da;

$n > 0$ için;

$$\begin{aligned}
& \left\{ A_n \left[\left(n^2 - n - 0.5 k_2^2 a^2 \right) J_n(k_1 a) + k_1 a J_{n+1}(k_1 a) \right] \right. \\
& + B_n \left[\left(n^2 - n - 0.5 k_2^2 a^2 \right) Y_n(k_1 a) + k_1 a Y_{n+1}(k_1 a) \right] \\
& + G_n \left[\left(n^2 - n \right) J_n(k_2 a) - n k_2 a J_{n+1}(k_2 a) \right] \\
& \left. + H_n \left[\left(n^2 - n \right) Y_n(k_2 a) - n k_2 a Y_{n+1}(k_2 a) \right] \right\} \\
& = - \frac{p_0}{\pi} \frac{a^2}{2\mu n} (\sin n\alpha_2 - \sin n\alpha_1), \quad n = 1, 2, \dots, N
\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ C_n \left[\left(n^2 - n - 0.5 k_2^2 a^2 \right) J_n(k_1 a) + k_1 a J_{n+1}(k_1 a) \right] \right. \\
& + D_n \left[\left(n^2 - n - 0.5 k_2^2 a^2 \right) Y_n(k_1 a) + k_1 a Y_{n+1}(k_1 a) \right] \\
& + E_n \left[\left(-n^2 + n \right) J_n(k_2 a) + n k_2 a J_{n+1}(k_2 a) \right] \\
& \left. + F_n \left[\left(-n^2 + n \right) Y_n(k_2 a) + n k_2 a Y_{n+1}(k_2 a) \right] \right\} \\
& = \frac{p_0}{\pi} \frac{a^2}{2\mu n} (\cos n\alpha_2 - \cos n\alpha_1), \quad n = 1, 2, \dots, N
\end{aligned} \tag{3.27}$$

$2 \times N$ adet bağıntı elde edilir. Böylece radyal gerilmeye ait sınır koşulundan toplam $2 \times N + 1$ adet bağıntı elde edilmiş olur.

Aynı şekilde kayma gerilmesine ait (3.14.c) ifadesinden

$$\begin{aligned}
\tau_{r\theta} = \frac{2\mu}{a^2} \sum_{n=0}^N \bigg[& \left\{ A_n \left[(-n^2 + n) J_n(k_1 a) + n k_1 a J_{n+1}(k_1 a) \right] \right. \\
& + B_n \left[(-n^2 + n) Y_n(k_1 a) + n k_1 a Y_{n+1}(k_1 a) \right] \\
& + G_n \left[(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 a^2) J_n(k_2 a) - k_2 a J_{n+1}(k_2 a) \right] \\
& + H_n \left[(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 a^2) Y_n(k_2 a) - k_2 a Y_{n+1}(k_2 a) \right] \bigg\} \sin n\theta \\
& + \left\{ C_n \left[(n^2 - n) J_n(k_1 a) - n k_1 a J_{n+1}(k_1 a) \right] \right. \\
& + D_n \left[(n^2 - n) Y_n(k_1 a) - n k_1 a Y_{n+1}(k_1 a) \right] \\
& + E_n \left[(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 a^2) J_n(k_2 a) - k_2 a J_{n+1}(k_2 a) \right] \\
& + F_n \left[(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 a^2) Y_n(k_2 a) - k_2 a Y_{n+1}(k_2 a) \right] \bigg\} \cos n\theta \bigg] = 0
\end{aligned} \tag{3.28}$$

elde edilir. Bu ifadeden $n = 0$ için;

$$\begin{aligned}
& \left\{ E_0 \left[(0.5 k_2^2 a^2) J_0(k_2 a) - k_2 a J_1(k_2 a) \right] \right. \\
& + F_0 \left[(0.5 k_2^2 a^2) Y_0(k_2 a) - k_2 a Y_1(k_2 a) \right] \bigg\} = 0
\end{aligned} \tag{3.29}$$

bir adet bağıntı elde edilir. n 'nin sıfırdan farklı her değeri için kayma gerilmesi ifadesindeki trigonometrik terimlerin katsayıları ayı ayrı sıfıra eşitlenmelidir.

Buradan da;

$n > 0$ için;

$$\begin{aligned}
& \left\{ A_n \left[(-n^2 + n) J_n(k_1 a) + n k_1 a J_{n+1}(k_1 a) \right] \right. \\
& + B_n \left[(-n^2 + n) Y_n(k_1 a) + n k_1 a Y_{n+1}(k_1 a) \right] \\
& + G_n \left[(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 a^2) J_n(k_2 a) - k_2 a J_{n+1}(k_2 a) \right] \\
& + H_n \left[(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 a^2) Y_n(k_2 a) - k_2 a Y_{n+1}(k_2 a) \right] \bigg\} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N
\end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ C_n \left[(n^2 - n) J_n(k_1 a) - n k_1 a J_{n+1}(k_1 a) \right] \right. \\
& + D_n \left[(n^2 - n) Y_n(k_1 a) - n k_1 a Y_{n+1}(k_1 a) \right] \\
& + E_n \left[(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 a^2) J_n(k_2 a) - k_2 a J_{n+1}(k_2 a) \right] \\
& \left. + F_n \left[(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 a^2) Y_n(k_2 a) - k_2 a Y_{n+1}(k_2 a) \right] \right\} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N
\end{aligned} \tag{3.31}$$

$2 \times N$ adet bağıntı elde edilir. Böylece kayma gerilmesine ait sınır koşulundan toplam $2 \times N + 1$ adet bağıntı elde edilmiş olur.

Bazı bilinmeyenlerin özdeş olarak sıfır olmasıyla çözüm fonksiyonlarına ait ifadelerdeki toplam bilinmeyen sayısı $8 \times N + 4$ olmaktadır. Oyuk yüzeyindeki sınır koşullarının sağlatılmasıyla radyal gerilmeye ait (3.24) ifadesinden $2 \times N + 1$ ve kayma gerilmesine ait (3.28) ifadesinde de $2 \times N + 1$ tane bağıntı yazılmaktadır. Böylece oyuk üzerinde yazılan sınır koşullarından $4 \times N + 2$ bilinmeyen geri kalan $4 \times N + 2$ adet serbest bilinmeyen cinsinden elde edilmiş olur.

3.2.1.2 SERBEST YÜZEY ÜZERİNDEKİ SINIR KOŞULLARININ SAĞLATILMASI

Silindirik oyuğun iç yüzeyindeki sınır koşullarından toplam $4 \times N + 2$ adet bağıntı elde edilmiştir. Geri kalan $4 \times N + 2$ adet bağıntı serbest yüzey üzerinde yazılan sınır koşullarından elde edilecektir. Serbest yüzey üzerinde de σ_{xx} normal gerilmesi ve τ_{xy} kayma gerilmesi sıfır olmalıdır.

$$\left. \sigma_{xx} \right|_{x=H} = 0 \quad \left. \tau_{xy} \right|_{x=H} = 0 \tag{3.32}$$

Yani $r = \frac{H}{\cos \theta}$ için ;

$$\left. \sigma_{xx} \right|_{r=\frac{H}{\cos \theta}} = 0 \quad \left. \tau_{xy} \right|_{r=\frac{H}{\cos \theta}} = 0$$

Sınır koşullarının uygulanmasıyla

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} = & \frac{2\mu}{\left(\frac{H}{\cos\theta}\right)^2} \sum_{n=0}^N \left\{ A_n \left\{ \left[\left(0.5k_1^2 \left(\frac{H}{\cos\theta} \right)^2 - 0.5k_2^2 \left(\frac{H}{\cos\theta} \right)^2 \right) J_n \left(k_1 \frac{H}{\cos\theta} \right) \right. \right. \right. \\
& + \left[\left(n^2 - n - 0.5k_1^2 \left(\frac{H}{\cos\theta} \right)^2 \right) J_n \left(k_1 \frac{H}{\cos\theta} \right) + k_1 \frac{H}{\cos\theta} J_{n+1} \left(k_1 \frac{H}{\cos\theta} \right) \right] \cos 2\theta \left. \right] \cos n\theta \\
& + \left[\left(-n^2 + n \right) J_n \left(k_1 \frac{H}{\cos\theta} \right) + nk_1 \frac{H}{\cos\theta} J_{n+1} \left(k_1 \frac{H}{\cos\theta} \right) \right] \sin 2\theta \sin n\theta \left. \right\} \\
& + B_n \left\{ \left[\left(0.5k_1^2 \left(\frac{H}{\cos\theta} \right)^2 - 0.5k_2^2 \left(\frac{H}{\cos\theta} \right)^2 \right) Y_n \left(k_1 \frac{H}{\cos\theta} \right) \right. \right. \right. \\
& + \left[\left(n^2 - n - 0.5k_1^2 \left(\frac{H}{\cos\theta} \right)^2 \right) Y_n \left(k_1 \frac{H}{\cos\theta} \right) + k_1 \frac{H}{\cos\theta} Y_{n+1} \left(k_1 \frac{H}{\cos\theta} \right) \right] \cos 2\theta \left. \right] \cos n\theta \\
& + \left[\left(-n^2 + n \right) Y_n \left(k_1 \frac{H}{\cos\theta} \right) + nk_1 \frac{H}{\cos\theta} Y_{n+1} \left(k_1 \frac{H}{\cos\theta} \right) \right] \sin 2\theta \sin n\theta \left. \right\} \\
& + G_n \left\{ \left[\left(n^2 - n \right) J_n \left(k_2 \frac{H}{\cos\theta} \right) - nk_2 \frac{H}{\cos\theta} J_{n+1} \left(k_2 \frac{H}{\cos\theta} \right) \right] \cos 2\theta \cos n\theta \right. \\
& + \left[\left(-n^2 + n + 0.5k_2^2 \left(\frac{H}{\cos\theta} \right)^2 \right) J_n \left(k_2 \frac{H}{\cos\theta} \right) - k_2 \frac{H}{\cos\theta} J_{n+1} \left(k_2 \frac{H}{\cos\theta} \right) \right] \sin 2\theta \sin n\theta \left. \right\} \\
& + H_n \left\{ \left[\left(n^2 - n \right) Y_n \left(k_2 \frac{H}{\cos\theta} \right) - nk_2 \frac{H}{\cos\theta} Y_{n+1} \left(k_2 \frac{H}{\cos\theta} \right) \right] \cos 2\theta \cos n\theta \right. \\
& + \left[\left(-n^2 + n + 0.5k_2^2 \left(\frac{H}{\cos\theta} \right)^2 \right) Y_n \left(k_2 \frac{H}{\cos\theta} \right) - k_2 \frac{H}{\cos\theta} Y_{n+1} \left(k_2 \frac{H}{\cos\theta} \right) \right] \sin 2\theta \sin n\theta \left. \right\} \\
& + C_n \left\{ \left[\left(0.5k_1^2 \left(\frac{H}{\cos\theta} \right)^2 - 0.5k_2^2 \left(\frac{H}{\cos\theta} \right)^2 \right) J_n \left(k_1 \frac{H}{\cos\theta} \right) \right. \right. \right. \\
& + \left[\left(n^2 - n - 0.5k_1^2 \left(\frac{H}{\cos\theta} \right)^2 \right) J_n \left(k_1 \frac{H}{\cos\theta} \right) + k_1 \frac{H}{\cos\theta} J_{n+1} \left(k_1 \frac{H}{\cos\theta} \right) \right] \cos 2\theta \left. \right] \sin n\theta \\
& + \left[\left(n^2 - n \right) J_n \left(k_1 \frac{H}{\cos\theta} \right) - nk_1 \frac{H}{\cos\theta} J_{n+1} \left(k_1 \frac{H}{\cos\theta} \right) \right] \sin 2\theta \cos n\theta \left. \right\} \\
& + D_n \left\{ \left[\left(0.5k_1^2 \left(\frac{H}{\cos\theta} \right)^2 - 0.5k_2^2 \left(\frac{H}{\cos\theta} \right)^2 \right) Y_n \left(k_1 \frac{H}{\cos\theta} \right) \right. \right. \right. \\
& + \left[\left(n^2 - n - 0.5k_1^2 \left(\frac{H}{\cos\theta} \right)^2 \right) Y_n \left(k_1 \frac{H}{\cos\theta} \right) + k_1 \frac{H}{\cos\theta} Y_{n+1} \left(k_1 \frac{H}{\cos\theta} \right) \right] \cos 2\theta \left. \right] \sin n\theta \\
& + \left[\left(n^2 - n \right) Y_n \left(k_1 \frac{H}{\cos\theta} \right) - nk_1 \frac{H}{\cos\theta} Y_{n+1} \left(k_1 \frac{H}{\cos\theta} \right) \right] \sin 2\theta \cos n\theta \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + E_n \left\{ \left[\left(-n^2 + n \right) J_n \left(k_2 \frac{H}{\cos \theta} \right) + n k_2 \frac{H}{\cos \theta} J_{n+1} \left(k_2 \frac{H}{\cos \theta} \right) \right] \cos 2\theta \sin n\theta \right. \\
& + \left. \left[\left(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 \left(\frac{H}{\cos \theta} \right)^2 \right) J_n \left(k_2 \frac{H}{\cos \theta} \right) - k_2 \frac{H}{\cos \theta} J_{n+1} \left(k_2 \frac{H}{\cos \theta} \right) \right] \sin 2\theta \cos n\theta \right\} \\
& + F_n \left\{ \left[\left(-n^2 + n \right) Y_n \left(k_2 \frac{H}{\cos \theta} \right) + n k_2 \frac{H}{\cos \theta} Y_{n+1} \left(k_2 \frac{H}{\cos \theta} \right) \right] \cos 2\theta \sin n\theta \right. \\
& + \left. \left[\left(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 \left(\frac{H}{\cos \theta} \right)^2 \right) Y_n \left(k_2 \frac{H}{\cos \theta} \right) - k_2 \frac{H}{\cos \theta} Y_{n+1} \left(k_2 \frac{H}{\cos \theta} \right) \right] \sin 2\theta \cos n\theta \right\} = 0
\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} = & \frac{2\mu}{\left(\frac{H}{\cos \theta} \right)^2} \sum_{n=0}^N \left[A_n \left\{ \left[\left(n^2 - n - 0.5 k_1^2 \left(\frac{H}{\cos \theta} \right)^2 \right) J_n \left(k_1 \frac{H}{\cos \theta} \right) \right. \right. \right. \\
& + k_1 \frac{H}{\cos \theta} J_{n+1} \left(k_1 \frac{H}{\cos \theta} \right) \left. \right] \sin 2\theta \cos n\theta \\
& - \left. \left[\left(-n^2 + n \right) J_n \left(k_1 \frac{H}{\cos \theta} \right) + n k_1 \frac{H}{\cos \theta} J_{n+1} \left(k_1 \frac{H}{\cos \theta} \right) \right] \cos 2\theta \sin n\theta \right\} \\
& + B_n \left\{ \left[\left(n^2 - n - 0.5 k_1^2 \left(\frac{H}{\cos \theta} \right)^2 \right) Y_n \left(k_1 \frac{H}{\cos \theta} \right) \right. \right. \right. \\
& + k_1 \frac{H}{\cos \theta} Y_{n+1} \left(k_1 \frac{H}{\cos \theta} \right) \left. \right] \sin 2\theta \cos n\theta \\
& - \left. \left[\left(-n^2 + n \right) Y_n \left(k_1 \frac{H}{\cos \theta} \right) + n k_1 \frac{H}{\cos \theta} Y_{n+1} \left(k_1 \frac{H}{\cos \theta} \right) \right] \cos 2\theta \sin n\theta \right\} \\
& + G_n \left\{ \left[\left(n^2 - n \right) J_n \left(k_2 \frac{H}{\cos \theta} \right) - n k_2 \frac{H}{\cos \theta} J_{n+1} \left(k_2 \frac{H}{\cos \theta} \right) \right] \sin 2\theta \cos n\theta \right. \\
& - \left. \left[\left(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 \left(\frac{H}{\cos \theta} \right)^2 \right) J_n \left(k_2 \frac{H}{\cos \theta} \right) - k_2 \frac{H}{\cos \theta} J_{n+1} \left(k_2 \frac{H}{\cos \theta} \right) \right] \cos 2\theta \sin n\theta \right\} \\
& + H_n \left\{ \left[\left(n^2 - n \right) Y_n \left(k_2 \frac{H}{\cos \theta} \right) - n k_2 \frac{H}{\cos \theta} Y_{n+1} \left(k_2 \frac{H}{\cos \theta} \right) \right] \sin 2\theta \cos n\theta \right. \\
& - \left. \left[\left(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 \left(\frac{H}{\cos \theta} \right)^2 \right) Y_n \left(k_2 \frac{H}{\cos \theta} \right) - k_2 \frac{H}{\cos \theta} Y_{n+1} \left(k_2 \frac{H}{\cos \theta} \right) \right] \cos 2\theta \sin n\theta \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C_n \left\{ \left[\left(n^2 - n - 0.5k_1^2 \left(\frac{H}{\cos \theta} \right)^2 \right) J_n \left(k_1 \frac{H}{\cos \theta} \right) \right. \right. \\
& + k_1 \frac{H}{\cos \theta} J_{n+1} \left(k_1 \frac{H}{\cos \theta} \right) \left. \right] \sin 2\theta \sin n\theta \\
& - \left[\left(n^2 - n \right) J_n \left(k_1 \frac{H}{\cos \theta} \right) - nk_1 \frac{H}{\cos \theta} J_{n+1} \left(k_1 \frac{H}{\cos \theta} \right) \right] \cos 2\theta \cos n\theta \left. \right\} \\
& + D_n \left\{ \left[\left(n^2 - n - 0.5k_1^2 \left(\frac{H}{\cos \theta} \right)^2 \right) Y_n \left(k_1 \frac{H}{\cos \theta} \right) \right. \right. \\
& + k_1 \frac{H}{\cos \theta} Y_{n+1} \left(k_1 \frac{H}{\cos \theta} \right) \left. \right] \sin 2\theta \sin n\theta \\
& - \left[\left(n^2 - n \right) Y_n \left(k_1 \frac{H}{\cos \theta} \right) - nk_1 \frac{H}{\cos \theta} Y_{n+1} \left(k_1 \frac{H}{\cos \theta} \right) \right] \cos 2\theta \cos n\theta \left. \right\} \\
& + E_n \left\{ \left[\left(-n^2 + n \right) J_n \left(k_2 \frac{H}{\cos \theta} \right) + nk_2 \frac{H}{\cos \theta} J_{n+1} \left(k_2 \frac{H}{\cos \theta} \right) \right] \sin 2\theta \sin n\theta \right. \\
& - \left[\left(-n^2 + n + 0.5k_2^2 \left(\frac{H}{\cos \theta} \right)^2 \right) J_n \left(k_2 \frac{H}{\cos \theta} \right) - k_2 \frac{H}{\cos \theta} J_{n+1} \left(k_2 \frac{H}{\cos \theta} \right) \right] \cos 2\theta \cos n\theta \left. \right\} \\
& + F_n \left\{ \left[\left(-n^2 + n \right) Y_n \left(k_2 \frac{H}{\cos \theta} \right) + nk_2 \frac{H}{\cos \theta} Y_{n+1} \left(k_2 \frac{H}{\cos \theta} \right) \right] \sin 2\theta \sin n\theta \right. \\
& - \left[\left(-n^2 + n + 0.5k_2^2 \left(\frac{H}{\cos \theta} \right)^2 \right) Y_n \left(k_2 \frac{H}{\cos \theta} \right) - k_2 \frac{H}{\cos \theta} Y_{n+1} \left(k_2 \frac{H}{\cos \theta} \right) \right] \cos 2\theta \cos n\theta \left. \right\} = 0
\end{aligned} \tag{3.34}$$

denklemleri elde edilir.

Bu ifadeler (3.33, 3.34) serbest yüzey sınırı boyunca her noktada sağlatılmalıdır. Oyuk üzerindeki sınır koşulların sağlatılması sonucu geriye kalan $4 \times N + 2$ adet bilinmeyen serbest yüzey üzerindeki (3.32) koşullarından sağlatılarak bulunacaktır ancak çözüm serileri belli bir N sayısında kesildiği için sonlu sayıda koşula ihtiyacımız vardır. Halbuki serbest yüzey üzerinde sonsuz sayıda nokta olması ve çözüm serilerinin sonlu bir sayıda kesilmesi nedeniyle birden fazla çözüm elde edilecektir. Birçok çözüm yerine “En Küçük Kareler Yöntemi” kullanılarak ve oldukça fazla nokta göz önüne alınarak yarım uzayın serbest yüzeyi boyunca gerilme bileşenleriyle ilgili koşullar yaklaşık olarak sağlatılmıştır. En küçük kareler yöntemine göre, serbest yüzey üzerinde gerilmelerin farkının karelerinin toplamının minimum olması gerekmektedir.

Yani;

$$d = \sum_{k=1}^M \left[\left(\sigma_{xx}^{(k)} - \hat{\sigma}_{xx}^{(k)} \right)^2 + \left(\tau_{xy}^{(k)} - \hat{\tau}_{xy}^{(k)} \right)^2 \right] \quad (3.35)$$

ifadesi minimum olmalıdır. Burada M serbest yüzey üzerinde alınan nokta sayısını, $\sigma_{xx}^{(k)}$ ve $\tau_{xy}^{(k)}$ serbest yüzeyde herhangi bir k noktasında hesaplanan gerilme bileşenlerini, $\hat{\sigma}_{xx}^{(k)}$ ve $\hat{\tau}_{xy}^{(k)}$ ise serbest yüzeye herhangi bir k noktasında dışardan etkileyen gerilme bileşenlerini göstermektedir. Serbest yüzeyde gerilme etkilediği için $\hat{\sigma}_{xx}^{(k)}$ ve $\hat{\tau}_{xy}^{(k)}$ her ikisi de sıfırdır. Serbest yüzey üzerindeki bu toplamı minimize etmek için geri kalan serbest bilinmeyenlere göre türev alırsak (3.35) koşulundan aşağıdaki bağıntıları yazmak kabildir.

$$\frac{\partial d}{\partial A_n} = 2 \sum_{k=1}^M \left[\sigma_{xx}^{(k)} \frac{\partial \sigma_{xx}^{(k)}}{\partial A_n} + \tau_{xy}^{(k)} \frac{\partial \tau_{xy}^{(k)}}{\partial A_n} \right] = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.36.a)$$

$$\frac{\partial d}{\partial B_n} = 2 \sum_{k=1}^M \left[\sigma_{xx}^{(k)} \frac{\partial \sigma_{xx}^{(k)}}{\partial B_n} + \tau_{xy}^{(k)} \frac{\partial \tau_{xy}^{(k)}}{\partial B_n} \right] = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (3.36.b)$$

$$\frac{\partial d}{\partial E_n} = 2 \sum_{k=1}^M \left[\sigma_{xx}^{(k)} \frac{\partial \sigma_{xx}^{(k)}}{\partial E_n} + \tau_{xy}^{(k)} \frac{\partial \tau_{xy}^{(k)}}{\partial E_n} \right] = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.36.c)$$

$$\frac{\partial d}{\partial F_n} = 2 \sum_{k=1}^M \left[\sigma_{xx}^{(k)} \frac{\partial \sigma_{xx}^{(k)}}{\partial F_n} + \tau_{xy}^{(k)} \frac{\partial \tau_{xy}^{(k)}}{\partial F_n} \right] = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (3.36.d)$$

Yukarıdaki (3.36) bağıntılarından $4 \times N + 2$ adet koşul elde edilir. Bu lineer denklem takımının çözümüyle bütün integral değişmezleri hesaplanmış olur.

3.2.2 TEKİL YÜK HALİ

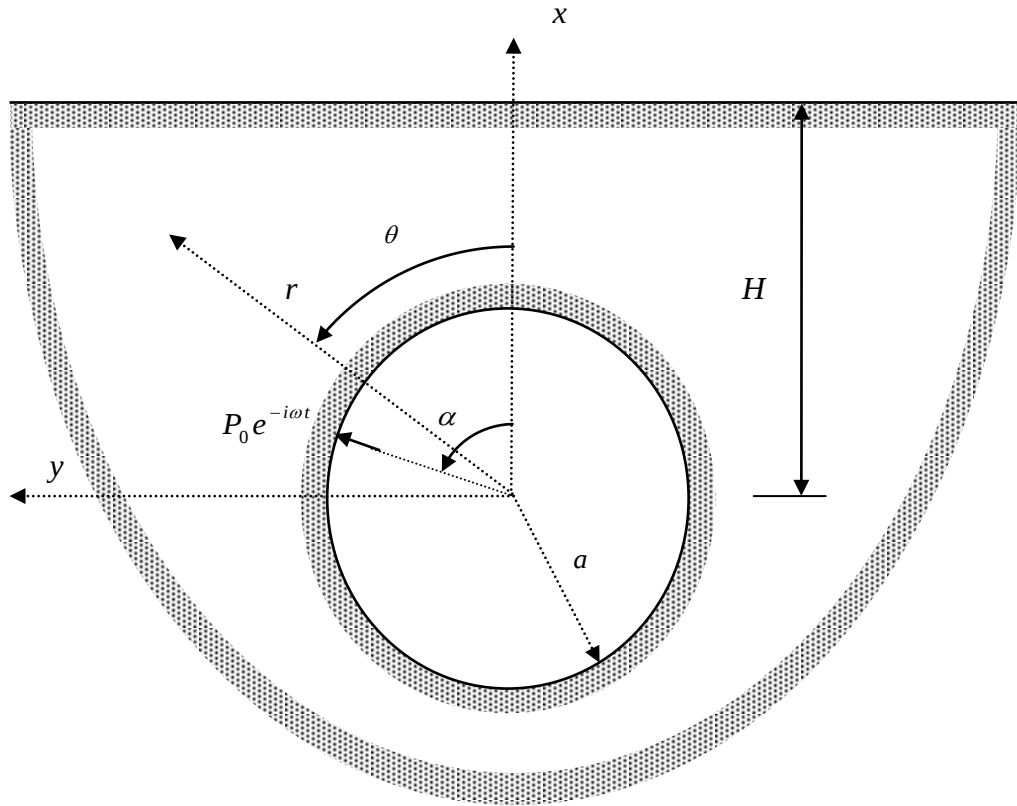
Bu yükleme durumunu temsil edebilmek için yük terimi Dirac delta fonksiyonuyla tariflenerek Fourier serisine açılmış olup, çözüm fonksiyonlarındaki trigonometrik terimlerin katsayılarıyla Fourier katsayıları eşleştirilmiştir. Problemin geometrisi Şekil 3.2’ de gösterilmiştir.

$$p(\theta) = P_0 \delta(\theta - \alpha) \quad (3.37)$$

Burada δ Dirac delta fonksiyonu olup tanımı aşağıdaki gibidir.

$$\delta(\theta - \alpha) = \begin{cases} \infty, & \alpha = \theta \\ 0, & \alpha \neq \theta \end{cases}$$

$$p(\theta) = \frac{P_0}{2\pi} + \frac{P_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \{ \cos n\alpha \cos n\theta \} + \frac{P_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \{ \sin n\alpha \sin n\theta \}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (3.38)$$



Şekil 3.2 Problemin geometrisi

3.2.2.1 OYUK İÇ YÜZEYİNDEKİ SINIR KOŞULLARININ SAĞLATILMASI

Kısmi yayılı yük zorlamasında olduğu gibi oyuk iç yüzeyinde σ_{rr} radyal gerilmesi (3.37) yük fonksiyonuna, $\tau_{r\theta}$ kayma gerilmesi de θ' nın her değeri için sıfıra eşit olmalıdır.

$$\left. \sigma_{rr} \right|_{r=a} = -p(\theta) \quad \left. \tau_{r\theta} \right|_{r=a} = 0 \quad (3.39)$$

Buna göre (3.14.a) denkleminde

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = & \frac{2\mu}{a^2} \sum_{n=0}^N \left[\left\{ A_n \left[(n^2 - n - 0.5k_2^2 a^2) J_n(k_1 a) + k_1 a J_{n+1}(k_1 a) \right] \right. \right. \\ & + B_n \left[(n^2 - n - 0.5k_2^2 a^2) Y_n(k_1 a) + k_1 a Y_{n+1}(k_1 a) \right] \\ & + G_n \left[(n^2 - n) J_n(k_2 a) - n k_2 a J_{n+1}(k_2 a) \right] \\ & + H_n \left[(n^2 - n) Y_n(k_2 a) - n k_2 a Y_{n+1}(k_2 a) \right] \left. \right\} \cos n\theta \\ & + \left\{ C_n \left[(n^2 - n - 0.5k_2^2 a^2) J_n(k_1 a) + k_1 a J_{n+1}(k_1 a) \right] \right. \\ & + D_n \left[(n^2 - n - 0.5k_2^2 a^2) Y_n(k_1 a) + k_1 a Y_{n+1}(k_1 a) \right] \\ & + E_n \left[(-n^2 + n) J_n(k_2 a) + n k_2 a J_{n+1}(k_2 a) \right] \\ & + F_n \left[(-n^2 + n) Y_n(k_2 a) + n k_2 a Y_{n+1}(k_2 a) \right] \left. \right\} \sin n\theta \Big] \\ = & -\frac{P_0}{2\pi} - \frac{P_0}{\pi} \sum_{n=1}^N \{ \cos n\alpha \cos n\theta \} - \frac{P_0}{\pi} \sum_{n=1}^N \{ \sin n\alpha \sin n\theta \} \end{aligned} \quad (3.40)$$

elde edilir. Bu denklemden $n = 0$ için;

$$\begin{aligned} & \left\{ A_0 \left[(-0.5k_2^2 a^2) J_0(k_1 a) + k_1 a J_1(k_1 a) \right] \right. \\ & + B_0 \left[(-0.5k_2^2 a^2) Y_0(k_1 a) + k_1 a Y_1(k_1 a) \right] \left. \right\} = -\frac{P_0}{2\pi} \frac{a^2}{2\mu} \end{aligned} \quad (3.41)$$

bir adet bağıntı elde edilir. n ' nin sıfırdan farklı her değeri için radyal gerilme ifadesindeki trigonometrik terimlerin katsayılarıyla yük ifadesindeki katsayılar ayrı ayrı eşleştirilmelidir. Buradan da;

$n > 0$ için;

$$\begin{aligned}
& \left\{ A_n \left[\left(n^2 - n - 0.5 k_2^2 a^2 \right) J_n(k_1 a) + k_1 a J_{n+1}(k_1 a) \right] \right. \\
& + B_n \left[\left(n^2 - n - 0.5 k_2^2 a^2 \right) Y_n(k_1 a) + k_1 a Y_{n+1}(k_1 a) \right] \\
& + G_n \left[\left(n^2 - n \right) J_n(k_2 a) - n k_2 a J_{n+1}(k_2 a) \right] \\
& \left. + H_n \left[\left(n^2 - n \right) Y_n(k_2 a) - n k_2 a Y_{n+1}(k_2 a) \right] \right\} \\
& = - \frac{P_0}{\pi} \frac{a^2}{2\mu} \cos n\alpha, \quad n = 1, 2, \dots, N
\end{aligned} \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ C_n \left[\left(n^2 - n - 0.5 k_2^2 a^2 \right) J_n(k_1 a) + k_1 a J_{n+1}(k_1 a) \right] \right. \\
& + D_n \left[\left(n^2 - n - 0.5 k_2^2 a^2 \right) Y_n(k_1 a) + k_1 a Y_{n+1}(k_1 a) \right] \\
& + E_n \left[\left(-n^2 + n \right) J_n(k_2 a) + n k_2 a J_{n+1}(k_2 a) \right] \\
& \left. + F_n \left[\left(-n^2 + n \right) Y_n(k_2 a) + n k_2 a Y_{n+1}(k_2 a) \right] \right\} \\
& = - \frac{P_0}{\pi} \frac{a^2}{2\mu} \sin n\alpha, \quad n = 1, 2, \dots, N
\end{aligned} \tag{3.43}$$

$2 \times N$ adet bağıntı elde edilir. Böylece radyal gerilmeye ait sınır koşulundan toplam $2 \times N + 1$ adet bağıntı elde edilmiş olur.

Aynı şekilde kayma gerilmesine ait (3.14.c) ifadesinden

$$\begin{aligned}
\tau_{r\theta} = \frac{2\mu}{a^2} \sum_{n=0}^N \bigg[& \left\{ A_n \left[(-n^2 + n) J_n(k_1 a) + n k_1 a J_{n+1}(k_1 a) \right] \right. \\
& + B_n \left[(-n^2 + n) Y_n(k_1 a) + n k_1 a Y_{n+1}(k_1 a) \right] \\
& + G_n \left[(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 a^2) J_n(k_2 a) - k_2 a J_{n+1}(k_2 a) \right] \\
& + H_n \left[(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 a^2) Y_n(k_2 a) - k_2 a Y_{n+1}(k_2 a) \right] \bigg\} \sin n\theta \\
& + \left\{ C_n \left[(n^2 - n) J_n(k_1 a) - n k_1 a J_{n+1}(k_1 a) \right] \right. \\
& + D_n \left[(n^2 - n) Y_n(k_1 a) - n k_1 a Y_{n+1}(k_1 a) \right] \\
& + E_n \left[(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 a^2) J_n(k_2 a) - k_2 a J_{n+1}(k_2 a) \right] \\
& + F_n \left[(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 a^2) Y_n(k_2 a) - k_2 a Y_{n+1}(k_2 a) \right] \bigg\} \cos n\theta \bigg] = 0
\end{aligned} \tag{3.44}$$

elde edilir. Bu ifadeden $n = 0$ için;

$$\begin{aligned}
& \left\{ E_0 \left[(0.5 k_2^2 a^2) J_0(k_2 a) - k_2 a J_1(k_2 a) \right] \right. \\
& + F_0 \left[(0.5 k_2^2 a^2) Y_0(k_2 a) - k_2 a Y_1(k_2 a) \right] \bigg\} = 0
\end{aligned} \tag{3.45}$$

bir adet bağıntı elde edilir. n 'nin sıfırdan farklı her değeri için kayma gerilmesi ifadesindeki trigonometrik terimlerin katsayıları ayı ayrı sıfıra eşitlenmelidir.

Buradan da;

$n > 0$ için;

$$\begin{aligned}
& \left\{ A_n \left[(-n^2 + n) J_n(k_1 a) + n k_1 a J_{n+1}(k_1 a) \right] \right. \\
& + B_n \left[(-n^2 + n) Y_n(k_1 a) + n k_1 a Y_{n+1}(k_1 a) \right] \\
& + G_n \left[(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 a^2) J_n(k_2 a) - k_2 a J_{n+1}(k_2 a) \right] \\
& + H_n \left[(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 a^2) Y_n(k_2 a) - k_2 a Y_{n+1}(k_2 a) \right] \bigg\} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N
\end{aligned} \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ C_n \left[(n^2 - n) J_n(k_1 a) - n k_1 a J_{n+1}(k_1 a) \right] \right. \\
& + D_n \left[(n^2 - n) Y_n(k_1 a) - n k_1 a Y_{n+1}(k_1 a) \right] \\
& + E_n \left[(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 a^2) J_n(k_2 a) - k_2 a J_{n+1}(k_2 a) \right] \\
& \left. + F_n \left[(-n^2 + n + 0.5 k_2^2 a^2) Y_n(k_2 a) - k_2 a Y_{n+1}(k_2 a) \right] \right\} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N
\end{aligned} \tag{3.47}$$

$2 \times N$ adet bağıntı elde edilir. Böylece kayma gerilmesine ait sınır koşulundan toplam $2 \times N + 1$ adet bağıntı elde edilmiş olur.

Bazı bilinmeyenlerin özdeş olarak sıfır olmasıyla çözüm fonksiyonlarına ait ifadelerdeki toplam bilinmeyen sayısı $8 \times N + 4$ olmaktadır. Oyuk yüzeyindeki sınır koşullarının sağlatılmasıyla radyal gerilmeye ait (3.40) ifadesinden $2 \times N + 1$ ve kayma gerilmesine ait (3.44) ifadesinde de $2 \times N + 1$ tane bağıntı yazılmaktadır. Böylece oyuk üzerinde yazılan sınır koşullarından $4 \times N + 2$ bilinmeyen geri kalan $4 \times N + 2$ adet serbest bilinmeyen cinsinden elde edilmiş olur.

3.2.2.2 SERBEST YÜZEY ÜZERİNDEKİ SINIR KOŞULLARININ SAĞLATILMASI

Silindirik oyuğun iç yüzeyindeki sınır koşullarından toplam $4 \times N + 2$ adet bağıntı elde edilmiştir. Geri kalan $4 \times N + 2$ adet bağıntı serbest yüzey üzerinde yazılan sınır koşullarından elde edilecektir. Serbest yüzey üzerinde de σ_{xx} normal gerilmesi ve τ_{xy} kayma gerilmesi sıfır olmalıdır.

$$\left. \sigma_{xx} \right|_{x=H} = 0 \quad \left. \tau_{xy} \right|_{x=H} = 0 \tag{3.48}$$

Bundan sonraki hesap aşamaları ele aldığımız kısmi yayılı yük zorlamasında olduğu gibidir.

4. SAYISAL UYGULAMALAR

4.1 SAYISAL VERİLER

Seçilen p_0 iç basınç genliği, ω zorlama frekansı, a oyuk yarıçapı, H oyuk merkezinin serbest yüzeye olan derinliği, malzeme sabitleri ve N sayısı için istenilen herhangi bir noktada yerdeğiştirme ve gerilme bileşenleri hesaplanabilir. Sayısal uygulama için kütle yoğunluğu $\rho = 2665 \text{ kg/m}^3$, Elastisite modülü $E = 7.567 \cdot 10^9 \text{ Pa}$, Poisson oranı $\nu = 0.25$, iç basınç genliği $p_0 = 100000 \text{ Pa}$ alınmış, dairesel silindirik oyuğun yarıçapı $a = 5 \text{ m}$, oyuk merkezinin serbest yüzeye olan derinliği $H = 10 - 15 \text{ m}$ seçilmiş ve sayısal hesaplamalarda N sayısının 6 alınmasının yeterli yaklaşıklığı sağladığı görülmüştür. Çözüm serileri $n = 0$ dan başlatıldığı için bulunması gereken toplam $8 \times N + 8 = 56$ adet bilinmeyen katsayı oldu. C_0, D_0, G_0, H_0 bilinmeyen katsayıları özdeş olarak sıfır olduğundan toplam bilinmeyen sayısı $8 \times N + 4 = 52$ adete indi. Oyuk yüzeyindeki sınır koşullarından $4 \times N + 2 = 26$ adet bağıntı elde edildi. Oyuk yüzeyinde yazılan bu bağıntılardan bilinmeyen sabitlerin yarısı diğer yarısı cinsinden elde edildi. “En Küçük Kareler Yöntemi” nin kullanılması sonucu serbest yüzey üzerinde yazılan $4 \times N + 2 = 26$ adet bağıntıdan geri kalan serbest bilinmeyenler çözüldü.

4.2 SONUÇLAR

Mathematica 4.0 paket programı yardımı ile yukarıdaki veriler kullanılarak bilinmeyen sabitler, ω zorlama frekansı ve H derinliğinin değişimine bağlı olarak hesaplanmıştır. Hesap sonunda, serbest yüzey üzerinde ve oyuk yüzeyi boyunca yerdeğiştirme ve gerilme bileşenlerinin zorlama frekansı ve derinliğe göre değişimleri incelenmiştir.

4.2.1 KISMİ YAYILI YÜK HALİ

Sayısal uygulama için, p_0 kısmi yayılı yükünün oyuğun ikinci bölgesine $\alpha_1 = \pi / 2$, $\alpha_2 = \pi$ merkez açılı bir sektör üzerine yüklenmesi göz önüne alınarak, bu bölgedeki yükleme durumundaki sonuçlar elde edilmiştir.

Şekil A.1 – A.4 te zorlama frekansının $\omega = 60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m değerleri için serbest yüzeydeki u_x, u_y yerdeğiştirmeleri ile σ_{xx}, τ_{xy} gerilmelerinin yüzey boyunca değişimi verilmiştir. Yerdeğiştirmelerin beklendiği gibi uzaklıkla hızlı bir şekilde azaldığı görölmüştür. Serbest yüzey üzerinde σ_{xx}, τ_{xy} gerilmelerinin sıfır olması gerekmektedir. Ancak yapılan yaklaşık çözüm nedeniyle bu yüzeyde gerilmeler sıfır olmayıp yüklemeye göre oldukça düşüktür. Hata %5 mertebesindedir.

Şekil A.5 ve A.6 da zorlama frekansının $\omega = 60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m değerleri için oyuk yüzeyindeki u_r, u_θ yerdeğiştirmelerinin çevre üzerindeki değişimi verilmiştir.

Şekil A.7 ve A.8 de zorlama frekansının $\omega = 60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m değerleri için oyuk yüzeyi üzerinde hesaplanan $\sigma_{rr}, \tau_{r\theta}$ gerilme bileşenlerinin değişimi verilmiştir. Bu yüzeyde kayma gerilmesi sıfır olup (Şekil A.8) 10^{-9} hata ile sonuç uygundur. Radyal gerilme (Şekil A.7) ise $\pi / 2 \leq \theta \leq \pi$ arasında $-p_0 (-100000 Pa)$ olması gerekirken yapılan yaklaşık hesapla bu değere oldukça yakın sonuç elde edilmiştir.

Şekil A.9 da zorlama frekansının $\omega = 60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m değerleri için oyuk yüzeyi üzerinde hesaplanan $\sigma_{\theta\theta}$ gerilmesinin değişimi verilmektedir. $\sigma_{\theta\theta}$ nın en büyük değerleri yükleme bölgesinin dışında elde edilmiştir.

Şekil A.10 – A.23 te zorlama frekansının $\omega = 100$ rad/s ile $\omega = 140$ rad/s ve $a = 5$ m ve $H = 10$ m değerleri için u_x, u_y yerdeğiştirmeleri ve σ_{xx}, τ_{xy} gerilmelerinin serbest yüzey boyunca değişimi ile u_r, u_θ yerdeğiştirmelerinin ve $\sigma_{\theta\theta}$ gerilmesinin oyuk çevresi boyunca değişimi verilmiştir. Zorlama frekansı büyüdükçe $\sigma_{\theta\theta}$ gerilmesinin arttığı görölmüştür.

Şekil A.24 – A.30 da zorlama frekansının $\omega = 100$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 15$ m değerleri için u_x, u_y yerdeğiştirmeleri ve σ_{xx}, τ_{xy} gerilmelerinin serbest yüzey

boyunca değişimi ile u_r, u_θ yerdeğiştirmelerinin ve $\sigma_{\theta\theta}$ gerilmesinin oyuk çevresi boyunca değişimi verilmiştir. Derinlik artıkça, yerdeğiştirmelerin ve gerilmelerin beklendiği gibi azaldığı görölmüştür.

şekil A.31 – A.34 te $a = 5$ m, $H = 10$ m ve $\theta = 0$ için, serbest yüzeydeki u_x, u_y yerdeğiştirmelerinin ve oyuk yüzeyindeki u_r, u_θ yerdeğiştirmelerinin zorlama frekansına göre değişimleri verilmiştir.

4.2.2TEKİL YÜK HALİ

Sayısal uygulama için, P_0 tekil yük zorlamasının oyuğun ikinci bölgesine $\alpha = 3\pi / 4$ merkez açılı bir nokta üzerine yüklenmesi göz önüne alınarak, bu bölgedeki yükleme durumundaki sonuçlar elde edilmiştir.

şekil B.1 – B.4 te zorlama frekansının $\omega = 60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m değerleri için serbest yüzeydeki u_x, u_y yerdeğiştirmeleri ile σ_{xx}, τ_{xy} gerilmelerinin yüzey boyunca değişimi verilmiştir. Serbest yüzey üzerinde sıfır olması gereken σ_{xx}, τ_{xy} gerilmelerinin çözümün yaklaşıklığı nedeniyle sıfır olmayıp yüklemeye göre oldukça düşük olduğu görölmüştür. Hata %5 mertebesindedir.

şekil B.5 ve B.6 da zorlama frekansının $\omega = 60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m değerleri için oyuk yüzeyindeki u_r, u_θ yerdeğiştirmelerinin çevre üzerindeki değişimi verilmiştir. u_r, u_θ yerdeğiştirmelerinin beklendiği gibi yüklemenin olduğu noktada ani olarak arttığı görölmüştür.

şekil B.7 ve B.8 de zorlama frekansının $\omega = 60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m değerleri için oyuk yüzeyi üzerinde hesaplanan $\sigma_{rr}, \tau_{r\theta}$ gerilme bileşenlerinin değişimi verilmiştir. Bu yüzeyde kayma gerilmesi sıfır olup (şekil 4.41) 10^{-9} hata ile sonuç uygundur. Radyal gerilme (şekil 4.40) ise $\alpha = \theta = 3\pi / 4$ noktasında sonsuz olması gerekirken zorlama genliğinin iki katı büyüklükte -200000 Pa bir değer elde edilmiştir.

şekil B.9 da zorlama frekansının $\omega = 60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m değerleri için oyuk yüzeyi üzerinde hesaplanan $\sigma_{\theta\theta}$ gerilmesinin değişimi verilmiştir.

5. TARTIŞMA

Bu çalışmada serbest yüzeyden H kadar derinlikte, a yarıçaplı bir dairesel oyuk içeren yarım düzlemin, oyuk yüzeyinden harmonik zorlaması altındaki davranışı incelenmiştir. Zorlama olarak oyuğun kısmi bir parçasına yayılı iç basınç ile oyuğun belli bir noktasına etkiyen tekil yük durumu göz önüne alınmıştır.

Elde edilen kuple denklem takımı, Helmholtz yerdeğiştirme potansiyellerinin kullanılması ile ayrıklaştırılmış ve Bessel – trigonometrik fonksiyon serileri ile kapalı çözümü yapılmıştır.

Denklemlerin kapalı olarak çözülmesine karşılık sınır koşullarının sağlatılmasında güçlük ortaya çıkmıştır. Kutupsal koordinatların kullanılması ile oyuk yüzeyindeki sınır koşulları tam olarak sağlatılmış, ancak serbest yüzey üzerindeki sınır koşulları yaklaşık olarak sağlatılabilmektedir.

ω zorlama frekansı ve H derinliğinin çeşitli değerlerine göre yerdeğiştirme ve gerilme bileşenlerinin değişimleri grafikler yardımı ile verilmiştir.

Serbest yüzey üzerinde, her iki tarafta derinliğin ortalama olarak 5 katı gibi bir bölgede oyuktan gelen dinamik etkilerin önemli olduğu, bu bölgenin dışında etkilerin azaldığı gözlenmiştir. Yaklaşık çözüm nedeniyle en büyük hata %5 mertebesindedir. Çözüm serisindeki terim sayısının arttırılması ile bu hatanın azalacağı tahmin edilmektedir. Ancak bilgisayar hesap zamanının çok uzun olması nedeniyle şimdilik 6 terim alınabilmektedir. Yerdeğiştirmelerin ve gerilmelerin, derinlik ve zorlama frekansının büyümesi ile azaldığı görülmüştür.

Bu problemin devamı olabilecek çalışmalar;

1. Zorlamanın çevre ve zaman üzerinde rastgele olması,
2. Zorlamanın oyuk eksenine boyunca değişken olması,
3. Ortamın homojen olmaması,
4. Ortamın viskoelastik olması
5. Serbest yüzeyin herhangi bir şekilde olması,
6. oyuk çevresinin daireden farklı olması, olarak özetlenebilir.

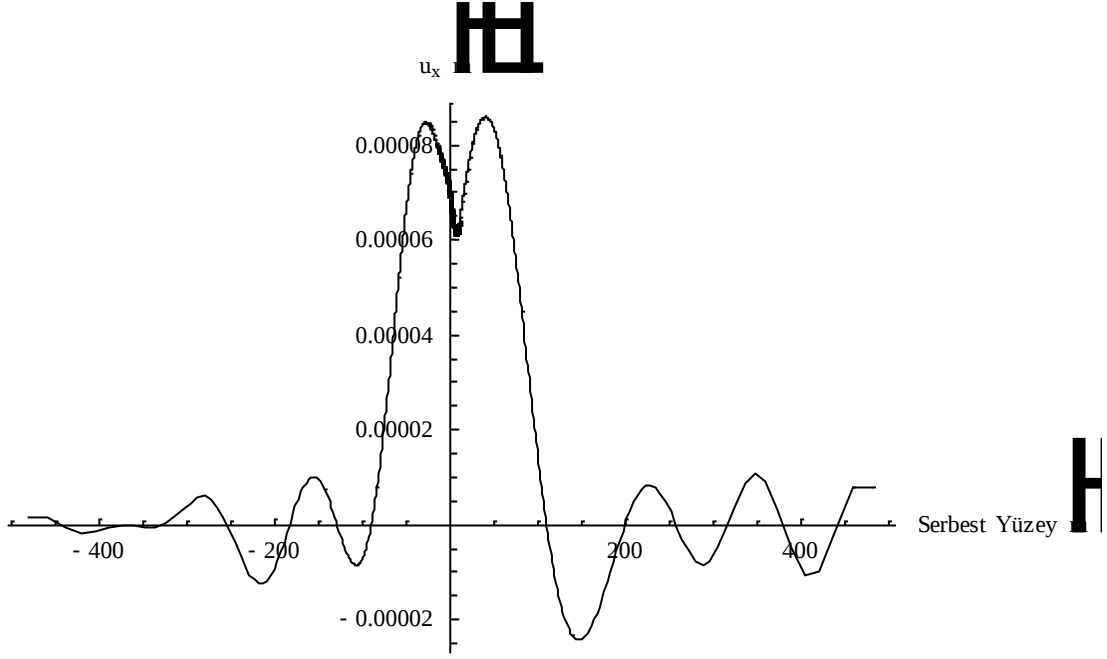
KAYNAKLAR

- [1] **Akpınar, M.**, 2000. Harmonik basınç etkisindeki dairesel boşluklu yarım düzlem problemi, *Yüksek Lisans Tezi*, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [2] **Balendra T., Chua K.H., Lo K.W. and Lee S.L.**, 1989. Steady – state vibration of subway – soil – building system, *Journal of Engineering Mechanics*, **115**, 145-162.
- [3] **Balendra T., Koh C.G., Ho Y.C.**, 1991. Dynamic response of buildings due to trains in underground tunnels, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **20**, 275-291.
- [4] **Bayıroğlu, H.**, 1995. Yarı düzlemde gömülü yapıların zorlanmış titreşimleri, *Doktora Tezi*, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [5] **Datta, S.K., Shah A.H., Wong K.C.**, 1984. Dynamic stresses and displacements in buried pipe, *Journal of Engineering Mechanics*, **110**, 1451-1466.
- [6] **Davis, A.C., Lee, V.W., Bardet, J.P.**, 2001. Transverse response of underground cavities and pipes to incident SV waves, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **30**, 383-410.
- [7] **El – Akily, N. and Datta, S.K.**, 1981. Response of a circular cylindrical shell to disturbances in a half-space – Numerical results, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **9**, 477-487.
- [8] **Engin, H. Coşkun, İ.**, 2001. Boşluk içeren yarım uzayda zorlanmış titreşimler, *XII. Ulusal Mekanik Kongresi*, Konya, 10-14 Eylül, s. 365-374.
- [9] **Eringen, A.C. and Şuhubi, E.S.**, Elastodynamics, Vol II, Academic Press, New York, 1975.
- [10] **Graff, K.F.**, Wave motion in elastic solids, Clarendon press, Oxford, 1975.

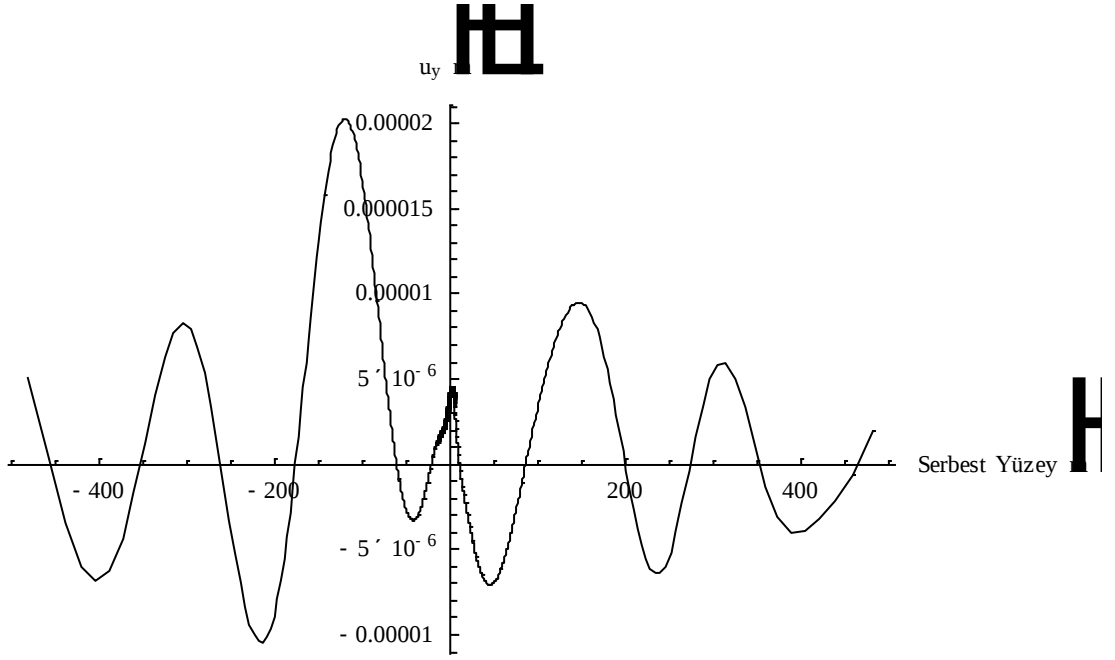
- [11] **Guan, F. and Moore, I.D.**, 1994. Three – dimensional dynamic response of twin cavities due to traveling loads, *Journal of Engineering Mechanics*, **120**, 637-651.
- [12] **Hildebrand, F.B.**, Advanced Calculus for Applications, Prentice – Hall, New Jersey, 1962.
- [13] **İnan, M.**, Düzlemde Elastisite Teorisi, İ.T.Ü. Kütüphanesi Sayı:750, İstanbul, 1969.
- [14] **Luco, J.E. and De Barros F.C.P.**, 1994. Seismic response of a cylindrical shell embedded in a layered viscoelastic half-space – I: Formulation, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **23**, 553-567.
- [15] **Luco, J.E. and De Barros F.C.P.**, 1994. Seismic response of a cylindrical shell embedded in a layered viscoelastic half-space – II: Validation and numerical results, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **23**, 569-580.
- [16] **Spiegel M.R.**, Fourier Analysis with applications to Boundary Value Problems, McGraw – Hill, New York, 1974.
- [17] **Tameroğlu, S.**, Elastisite Teorisi, İ.T.Ü. Kütüphanesi Sayı:1434, İstanbul, 1991.
- [18] **Thiruvenkatachar V.R. and Viswanathan K.**, 1965. Dynamic response of an elastic half space with cylindrical cavity to time – dependent surface tractions over the boundary of the cavity, *Journal of Mathematics and Mechanics*, **14**, 541-571.
- [19] **Tranter, C.J.**, Bessel Functions with Some Physical Applications, The English Universities Press, London, 1968.
- [20] **Wong K.C., Shah A.H. and Datta, S.K.**, 1985. Dynamic stresses and displacements in a buried tunnel, *Journal of Engineering Mechanics*, **111**, 218-234.

EK A

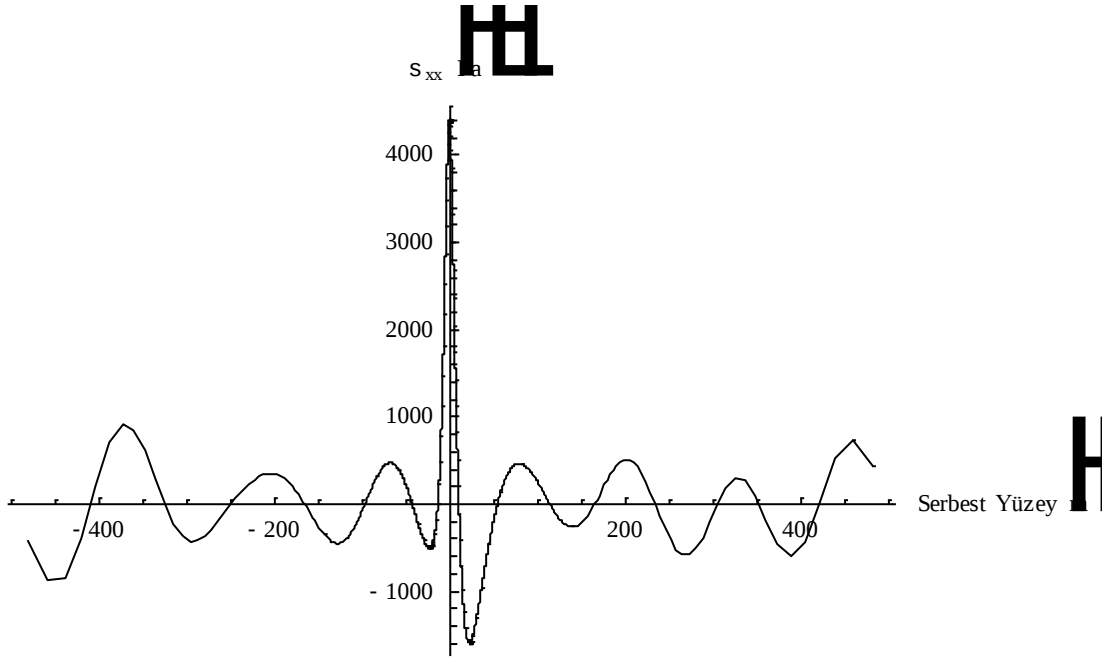
KİSMİ YAYILI YÜK HALİNE AİT GRAFİKLER



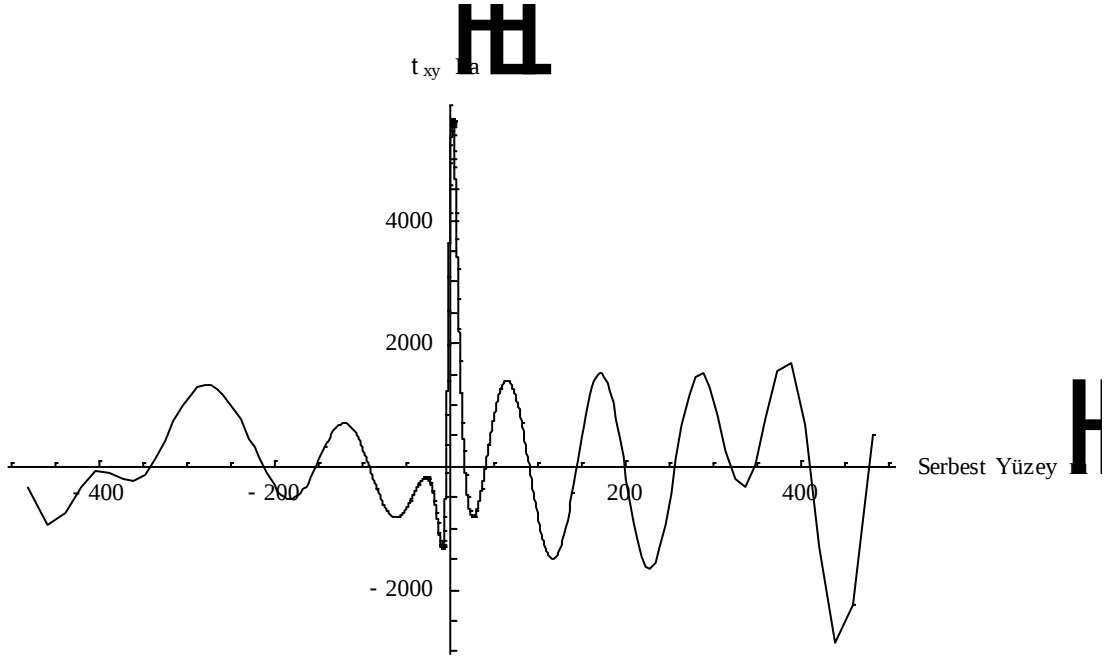
Şekil A.1 $\omega=60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, serbest yüzey üzerindeki u_x yerdeğiştirmesinin değişimi



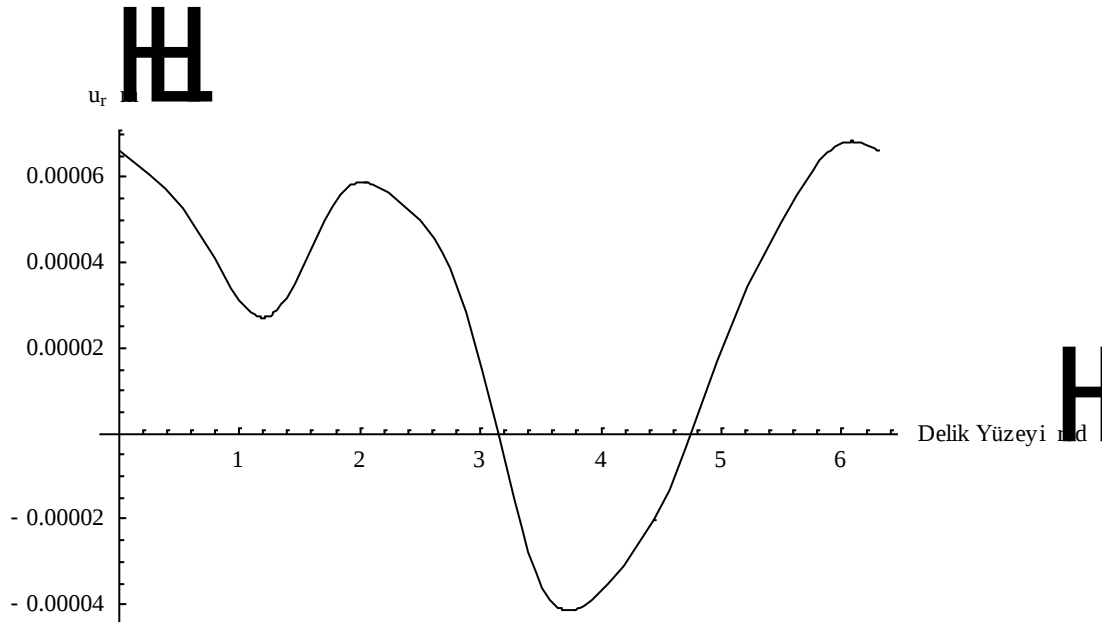
Şekil A.2 $\omega=60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, serbest yüzey üzerindeki u_y yerdeğiştirmesinin değişimi



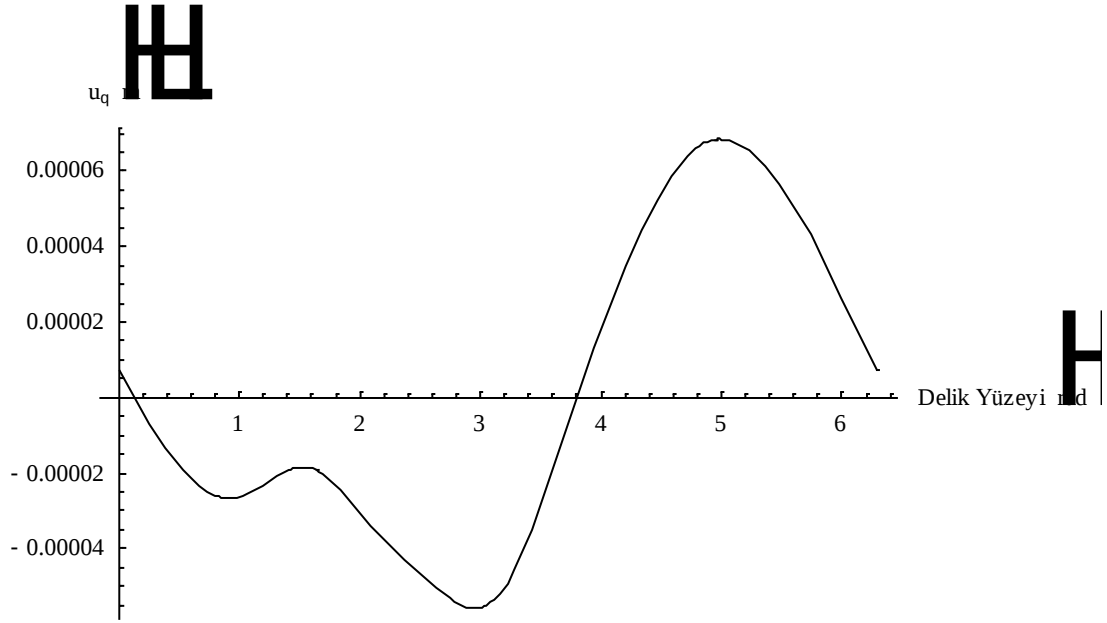
Şekil A.3 $\omega=60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, serbest yüzey üzerindeki σ_{xx} normal gerilmesinin değişimi



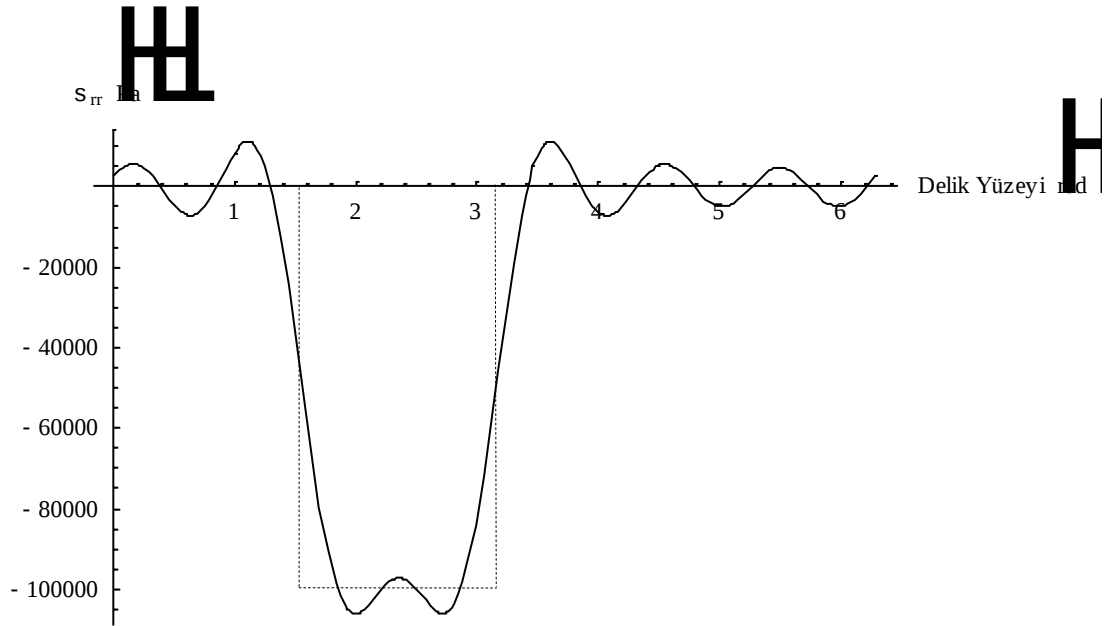
Şekil A.4 $\omega=60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, serbest yüzey üzerindeki τ_{xy} kayma gerilmesinin değişimi



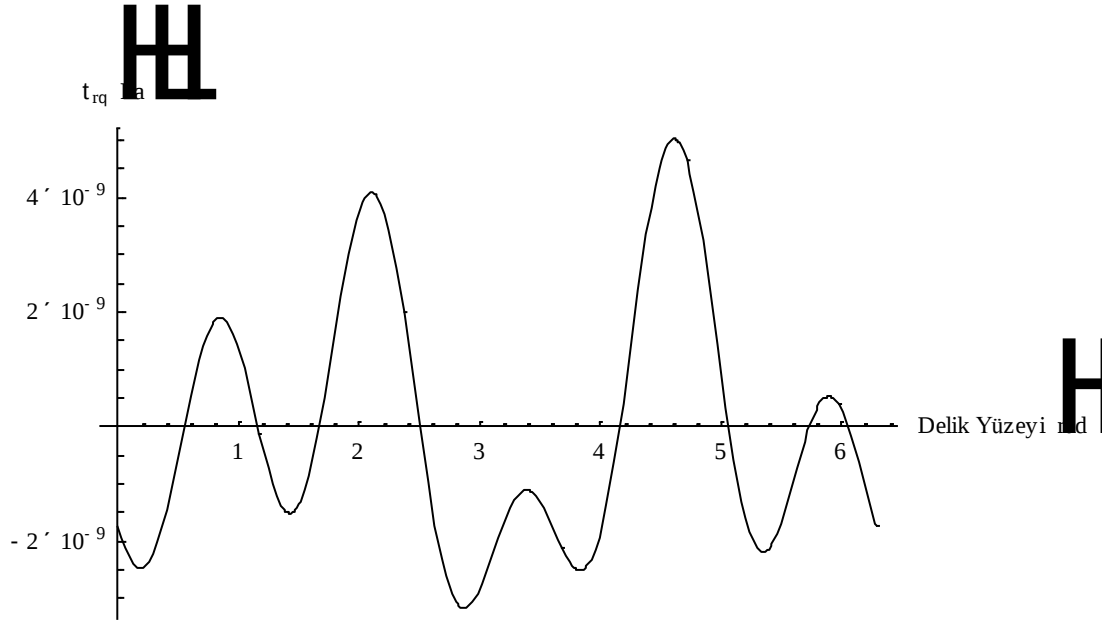
Şekil A.5 $\omega=60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, oyuk yüzeyindeki u_r yerdeğiştirmesinin değişimi



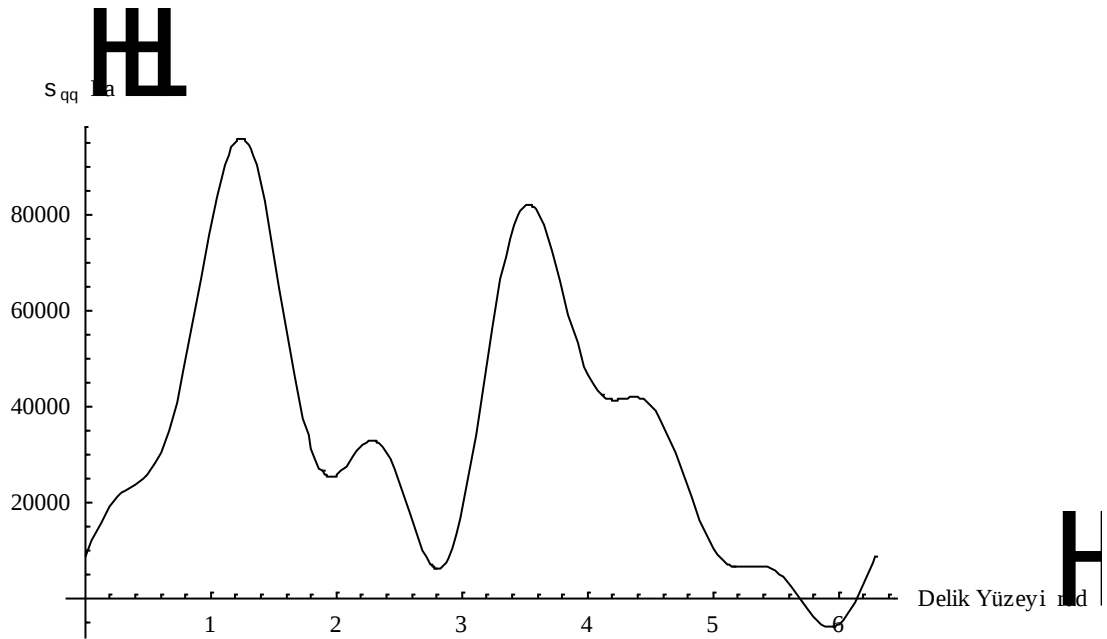
Şekil A.6 $\omega=60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, oyuk yüzeyindeki u_θ yerdeğiştirmesinin değişimi



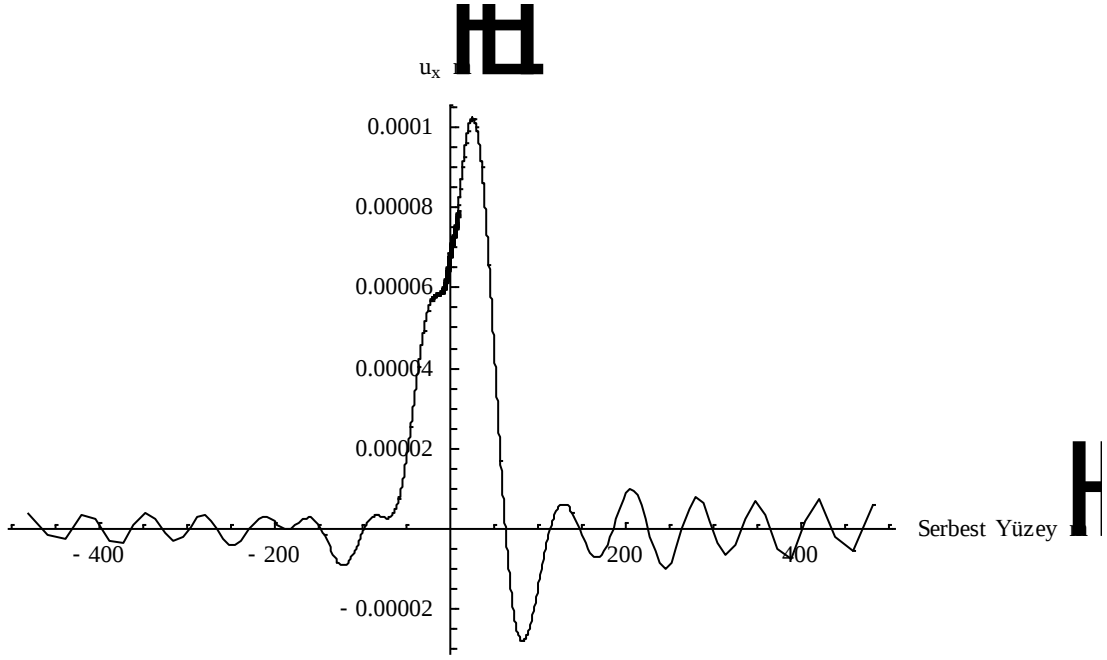
Şekil A.7 $\omega=60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, oyuk yüzeyindeki σ_{rr} radyal gerilmesinin değişimi



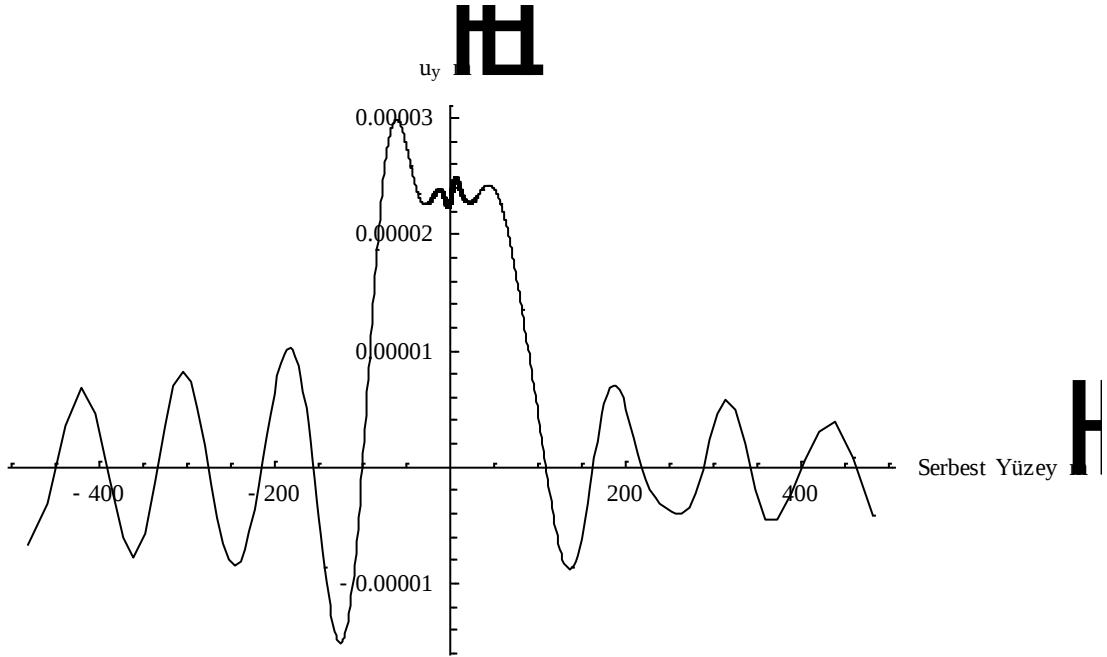
Şekil A.8 $\omega=60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, oyuk yüzeyindeki $\tau_{r\theta}$ kayma gerilmesinin değişimi



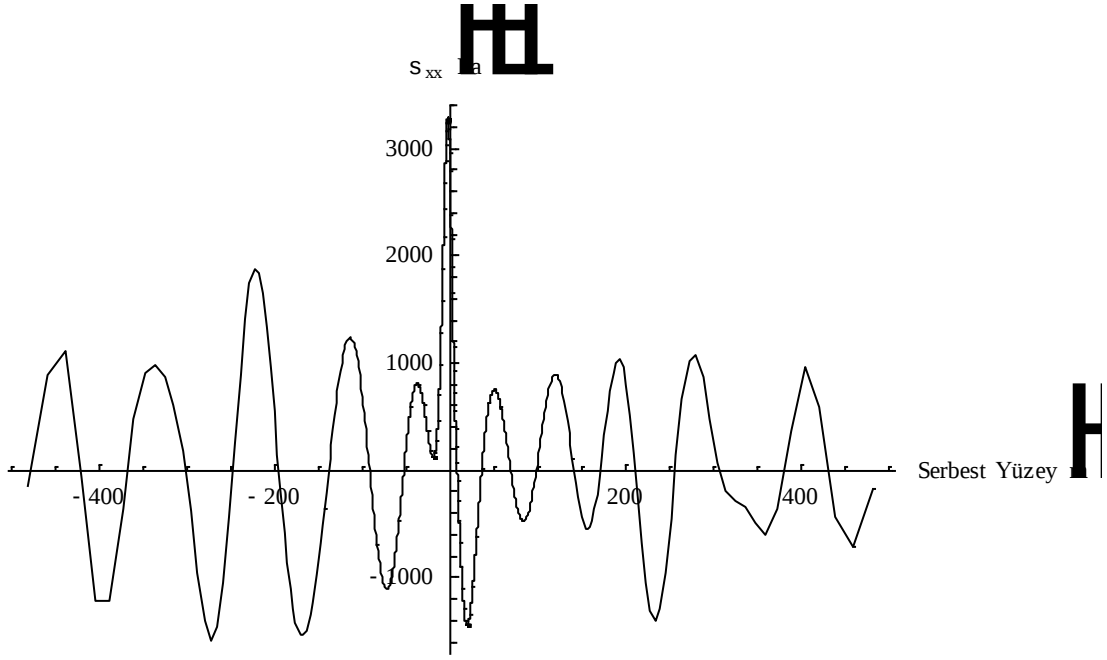
Şekil A.9 $\omega=60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}$ gerilmesinin değişimi



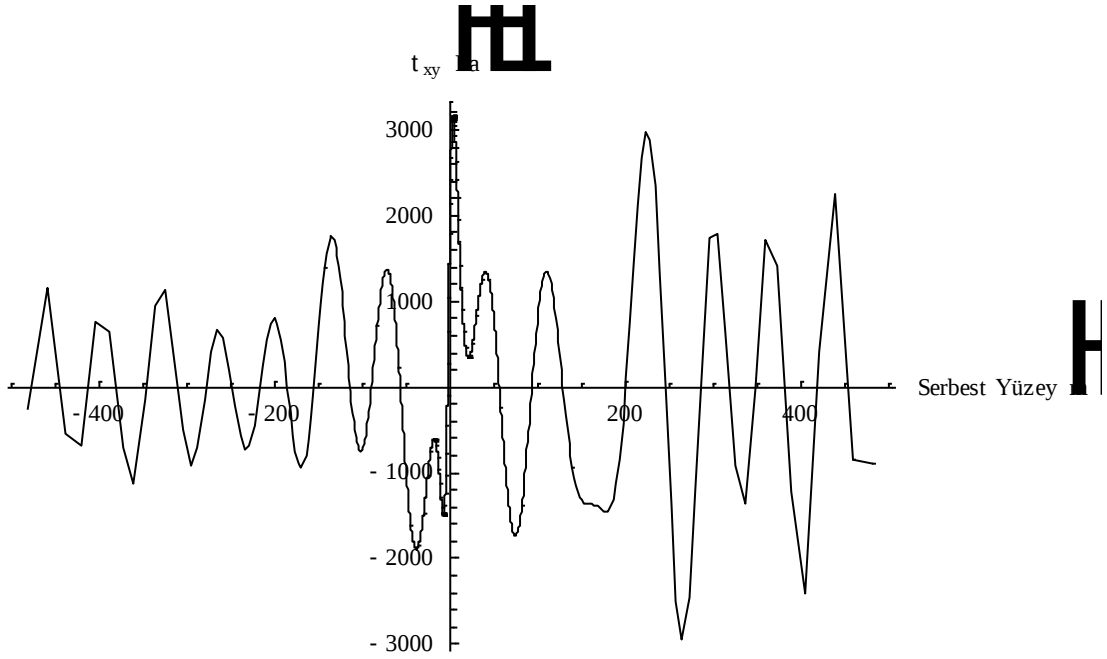
Şekil A.10 $\omega=100$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, serbest yüzey üzerindeki u_x yerdeğiştirmesinin değişimi



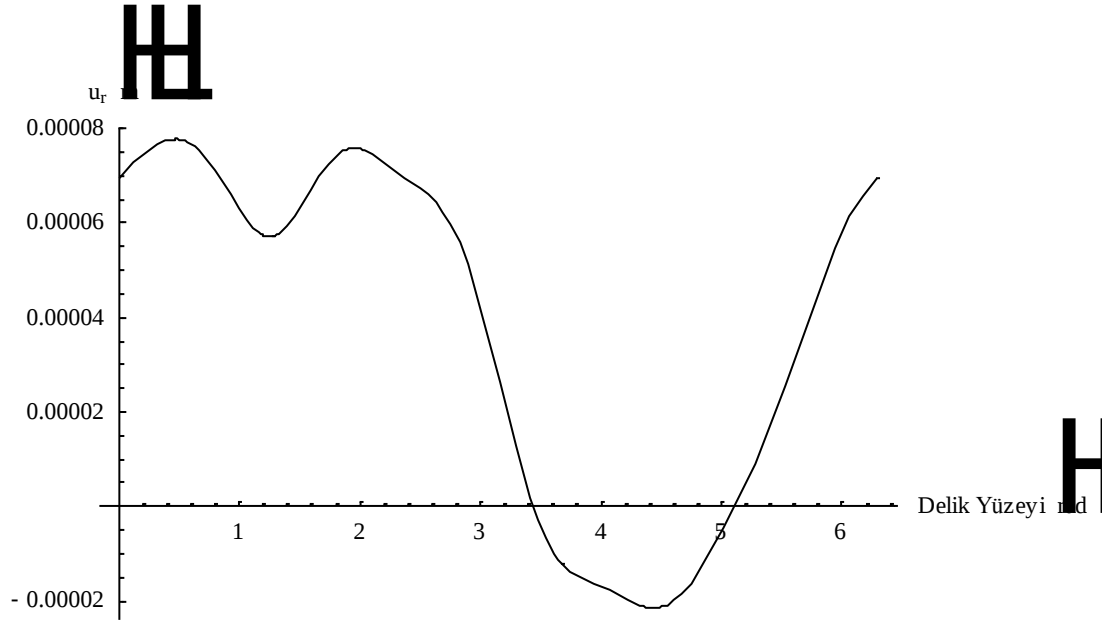
Şekil A.11 $\omega=100$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, serbest yüzey üzerindeki u_y yerdeğiştirmesinin değişimi



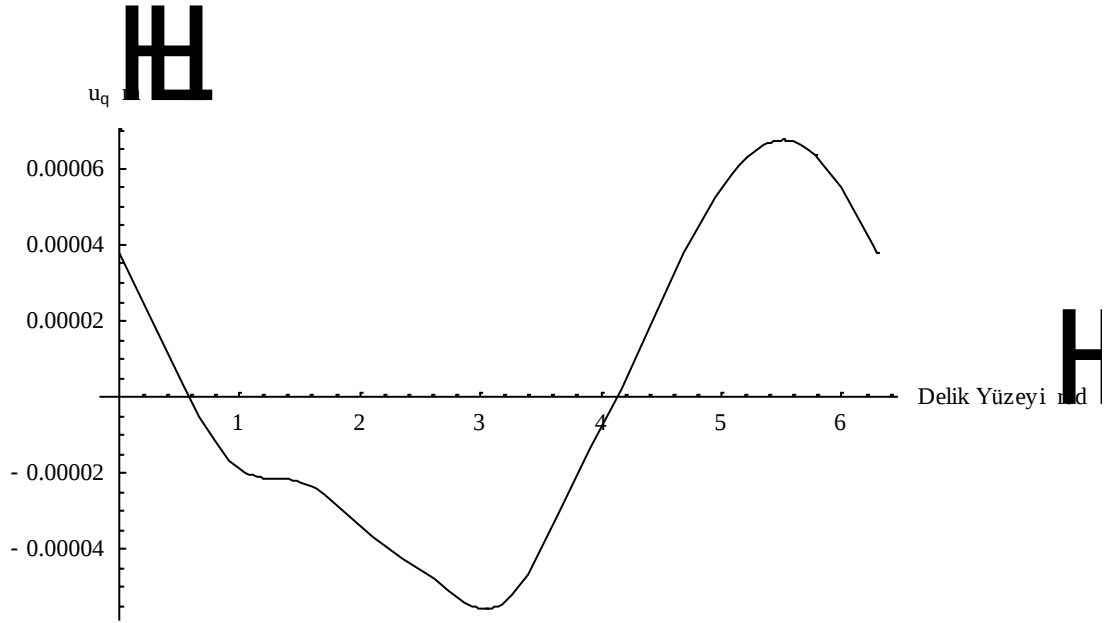
Şekil A.12 $\omega=100$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, serbest yüzey üzerindeki σ_{xx} normal gerilmesinin değişimi



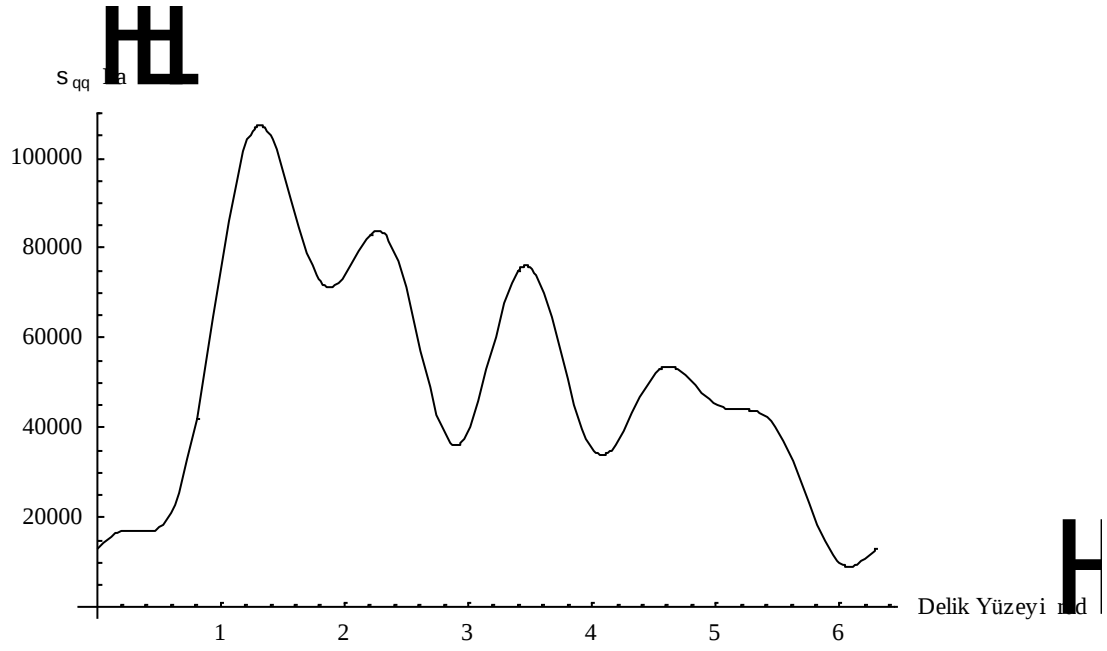
Şekil A.13 $\omega=100$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, serbest yüzey üzerindeki τ_{xy} kayma gerilmesinin değişimi



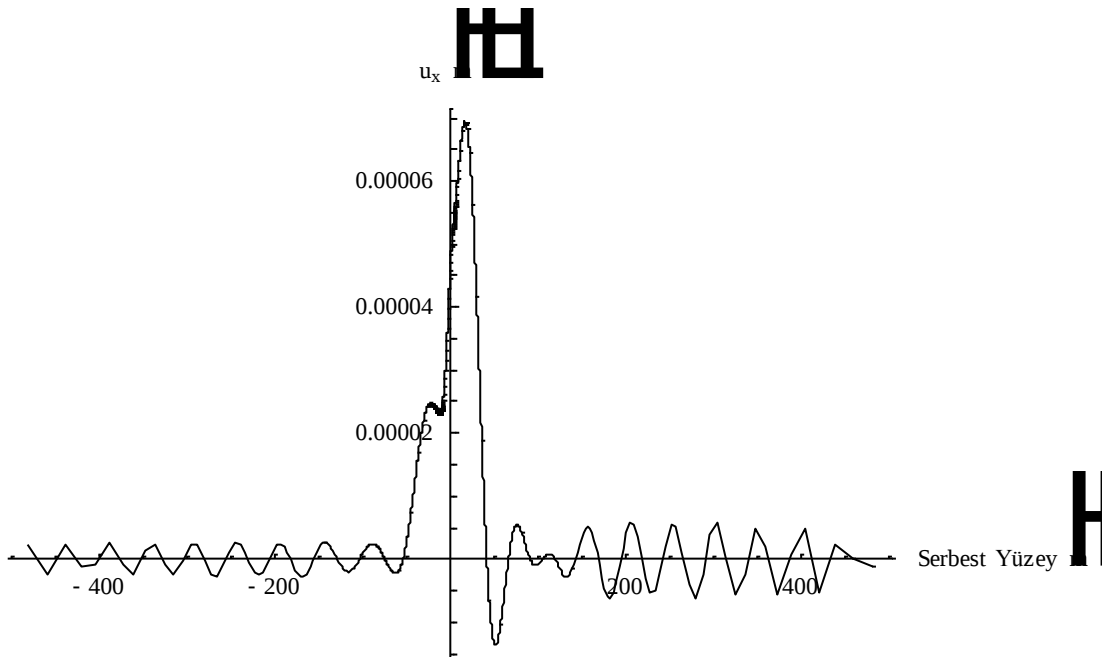
Şekil A.14 $\omega=100$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, oyuk yüzeyindeki u_r yerdeğiştirmesinin değişimi



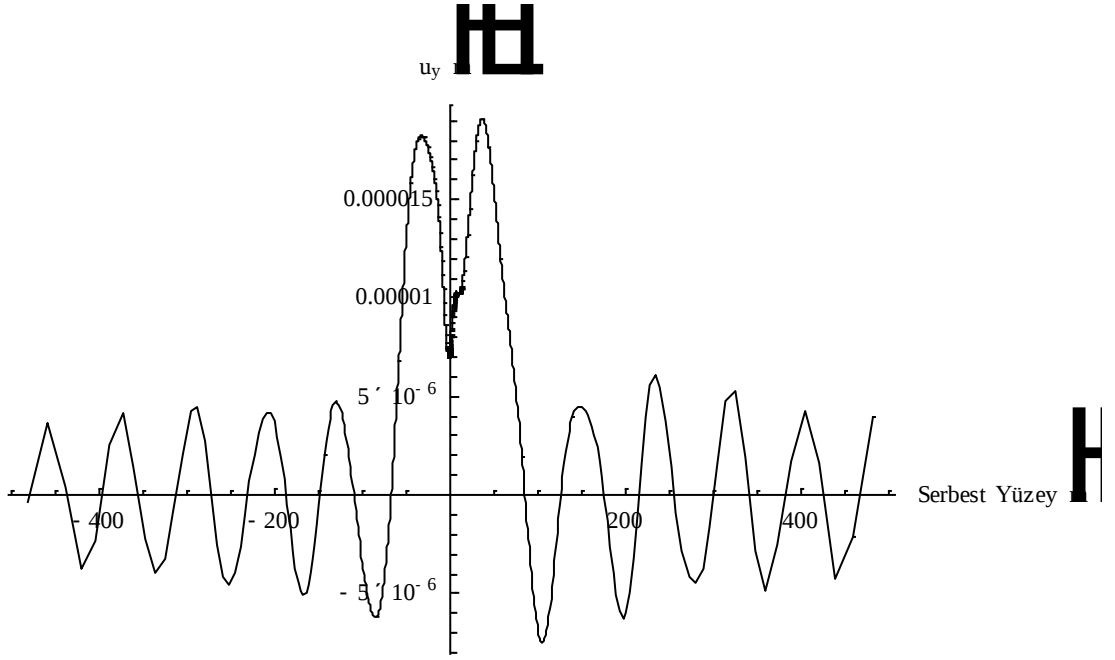
Şekil A.15 $\omega=100$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, oyuk yüzeyindeki u_θ yerdeğiştirmesinin değişimi



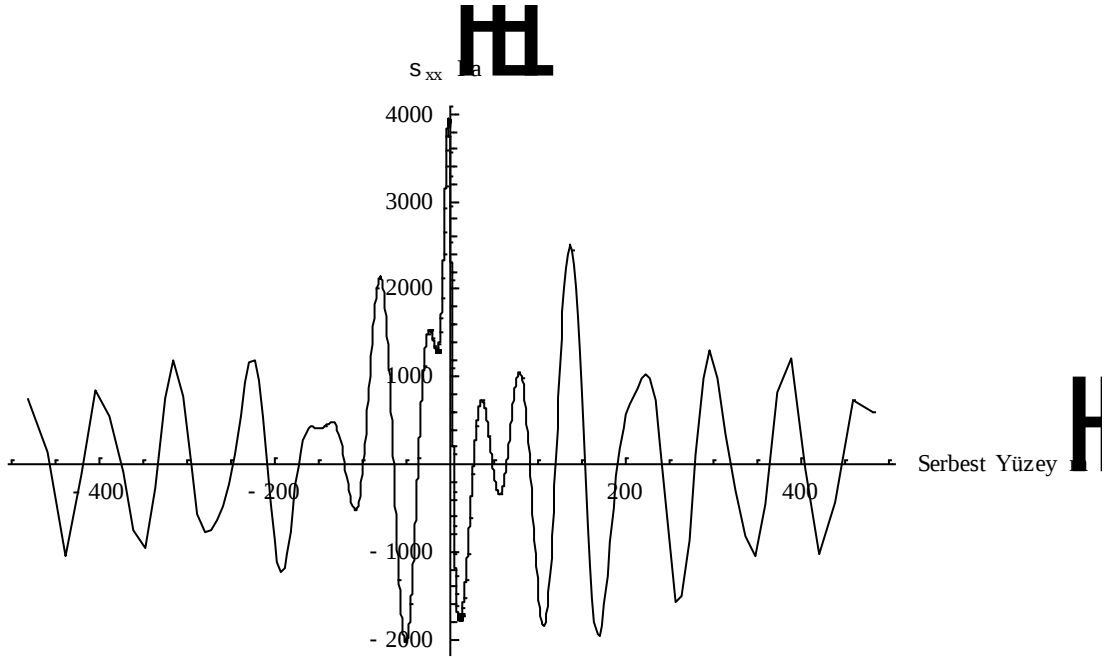
Şekil A.16 $\omega=100$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}$ gerilmesinin değişimi



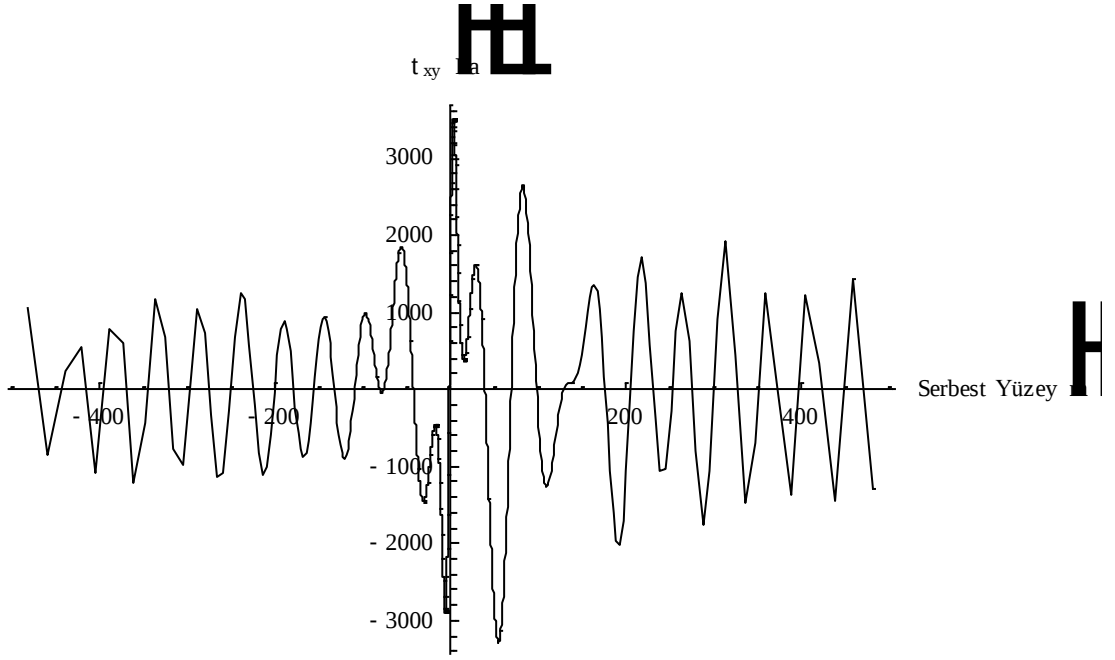
Şekil A.17 $\omega=140$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, serbest yüzey üzerindeki u_x yerdeğiştirmesinin değişimi



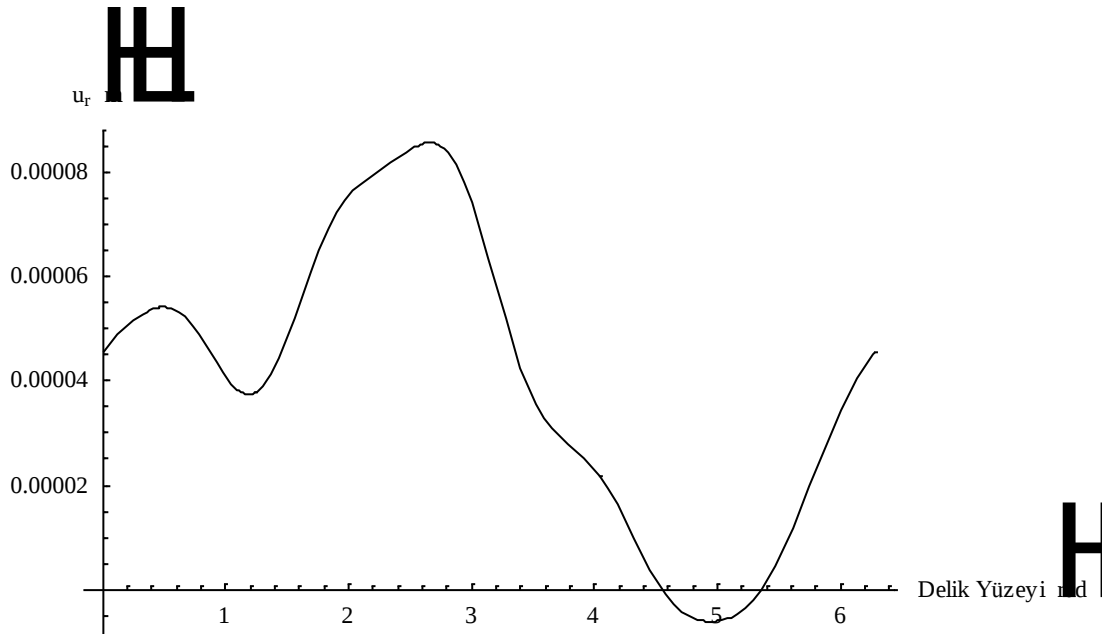
Şekil A.18 $\omega=140$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, serbest yüzey üzerindeki u_y yerdeğiştirmesinin değişimi



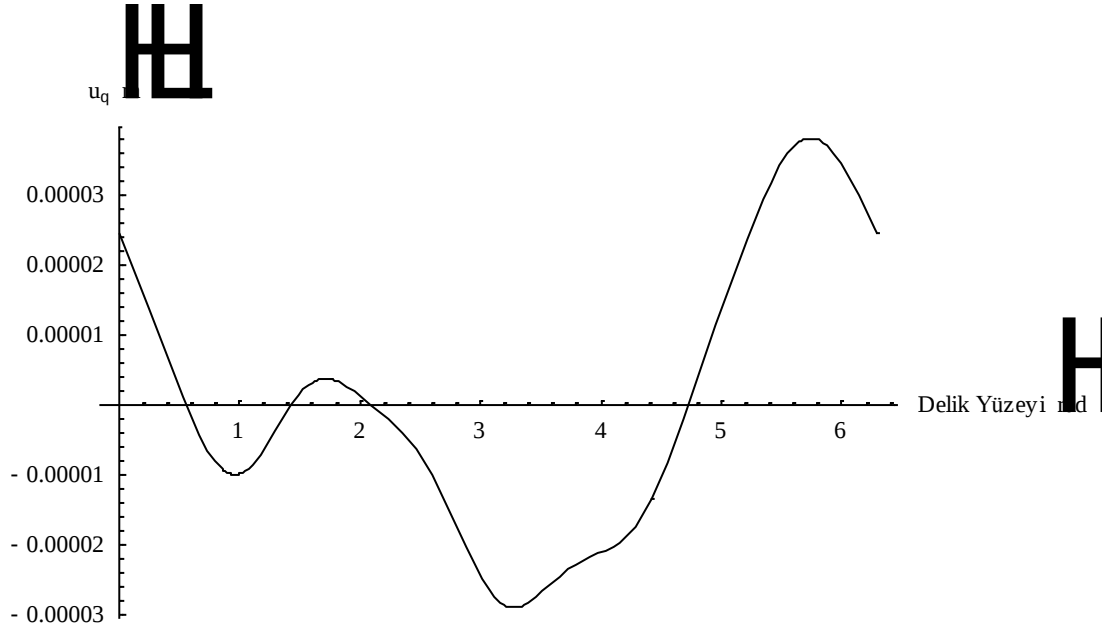
Şekil A.19 $\omega=140$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, serbest yüzey üzerindeki σ_{xx} normal gerilmesinin değişimi



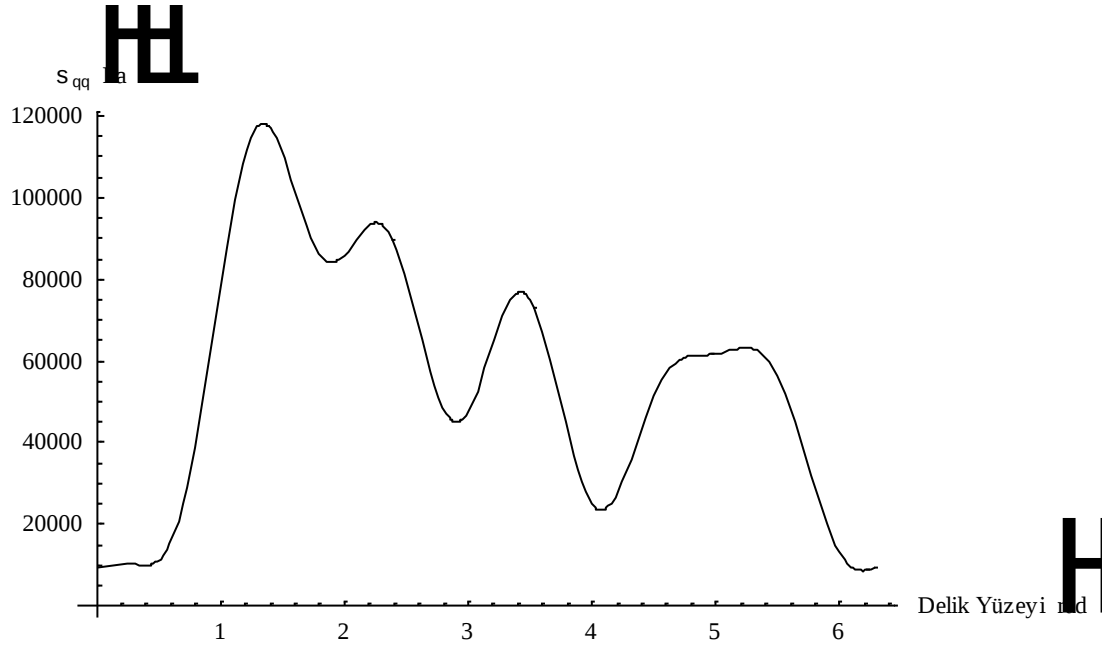
Şekil A.20 $\omega=140$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, serbest yüzey üzerindeki τ_{xy} kayma gerilmesinin değişimi



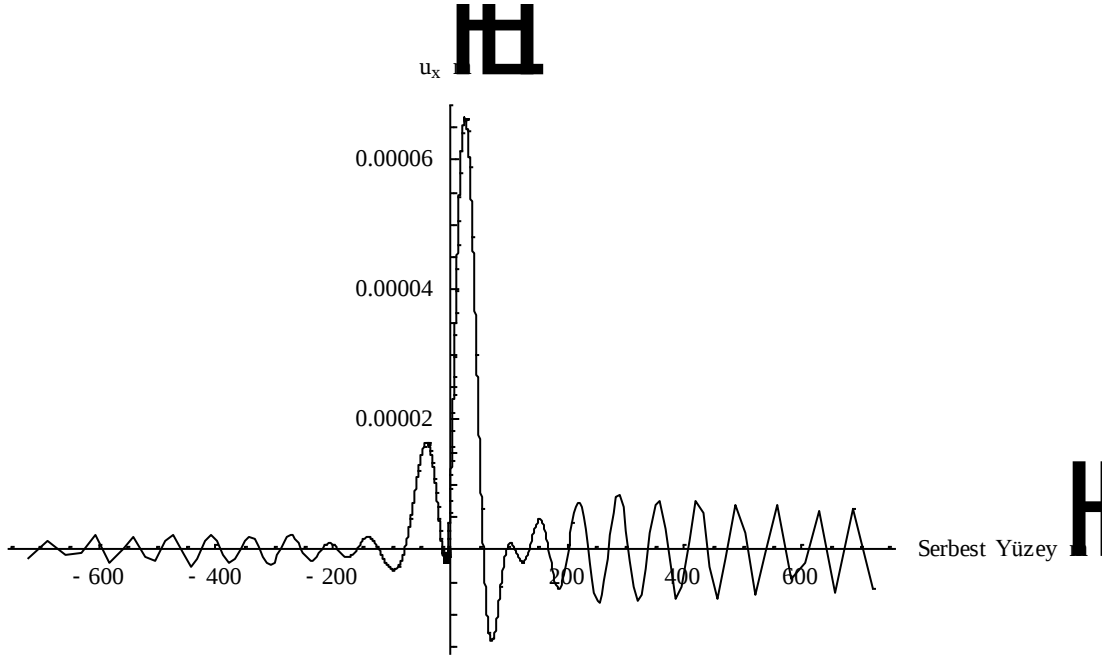
Şekil A.21 $\omega=140$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, oyuk yüzeyindeki u_r yerdeğiştirmesinin değişimi



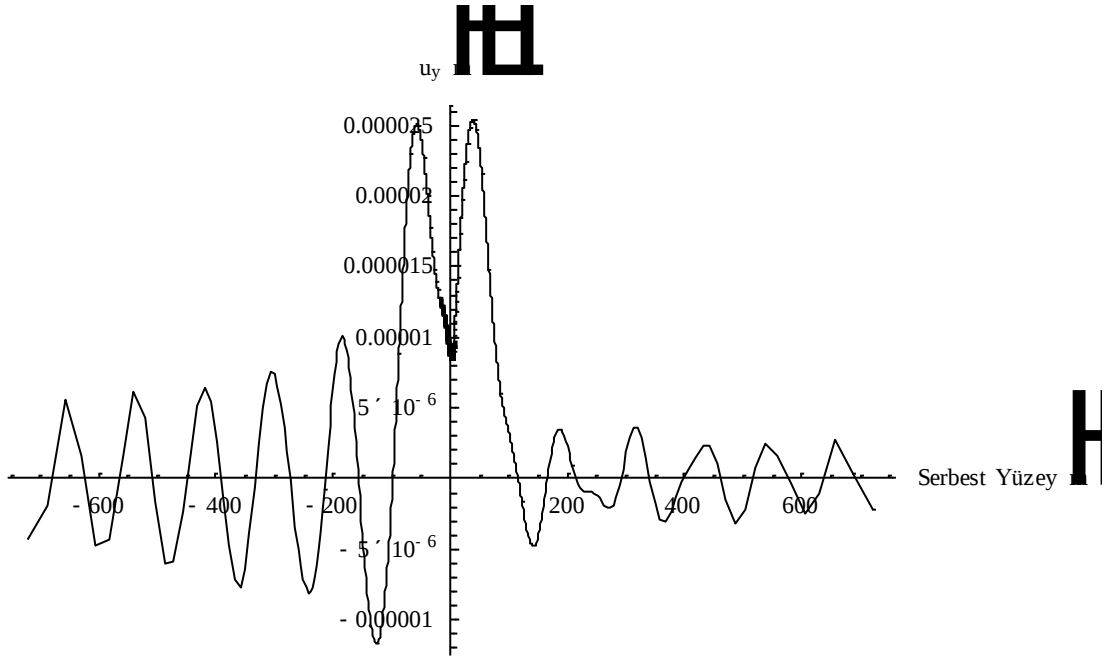
Şekil A.22 $\omega=140$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, oyuk yüzeyindeki u_θ yerdeğiştirmesinin değişimi



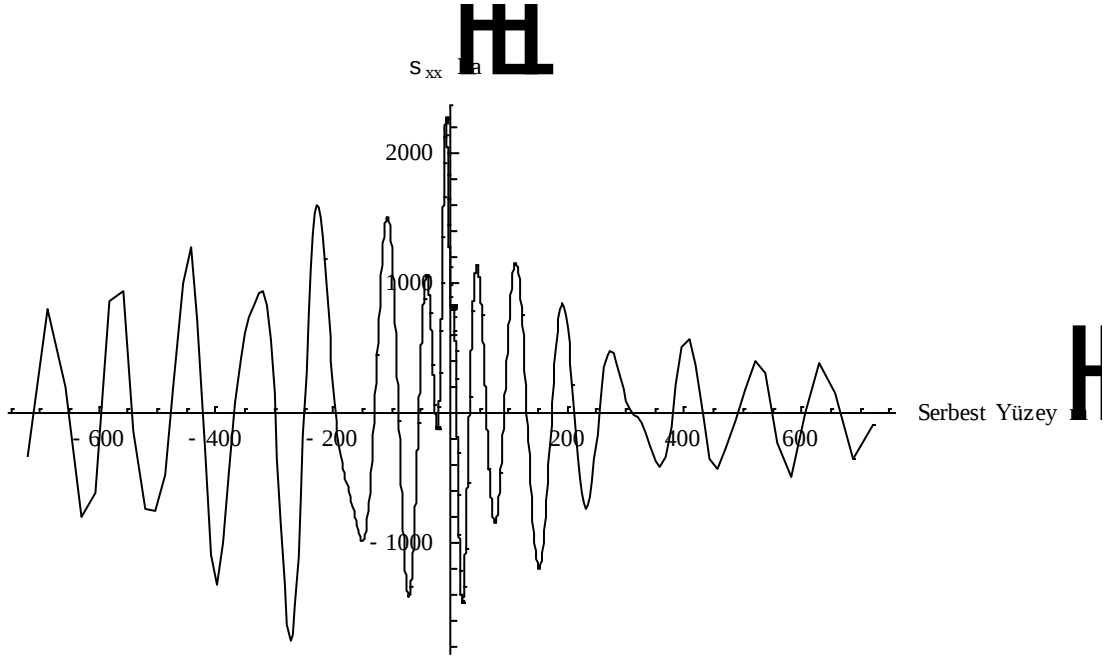
Şekil A.23 $\omega=140$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}$ gerilmesinin değişimi



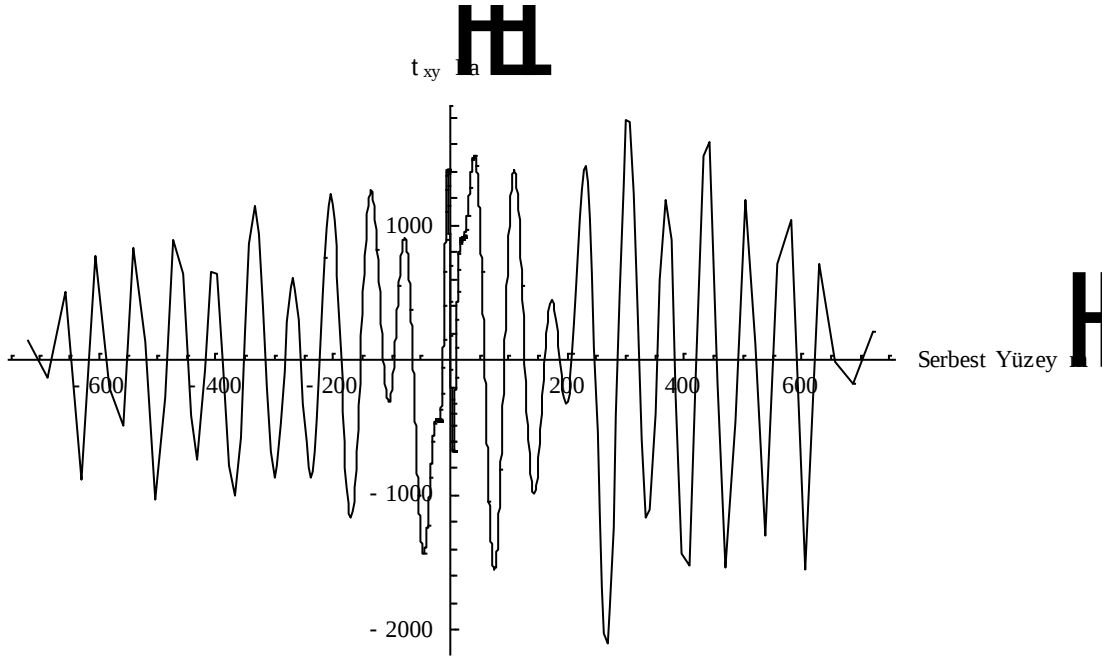
Şekil A.24 $\omega=100$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 15$ m için, serbest yüzey üzerindeki u_x yerdeğiştirmesinin değişimi



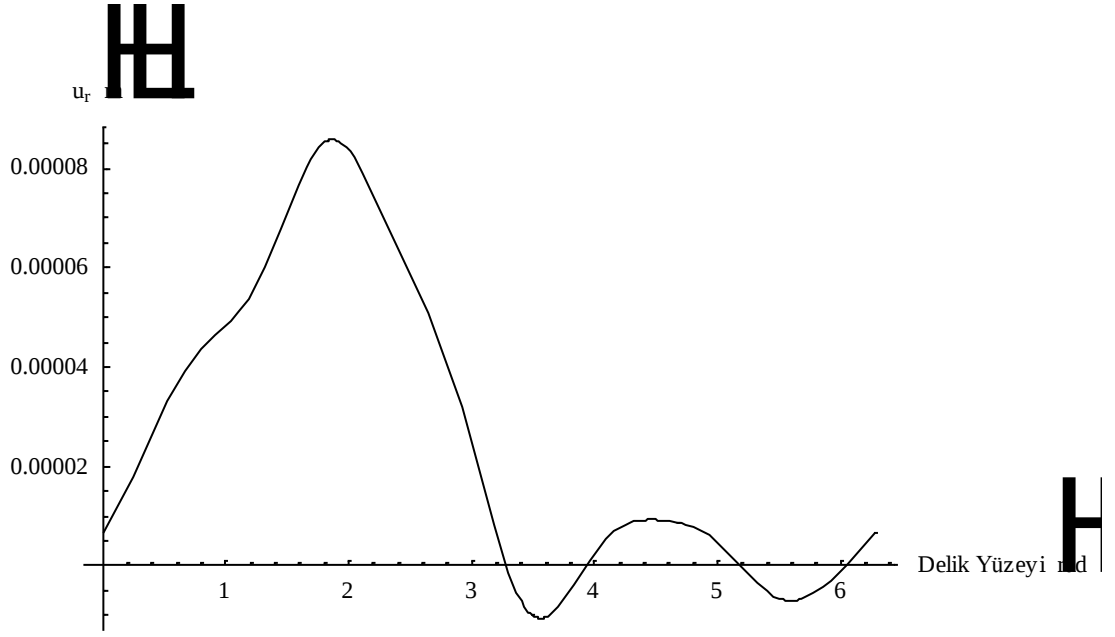
Şekil A.25 $\omega=100$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 15$ m için, serbest yüzey üzerindeki u_y yerdeğiştirmesinin değişimi



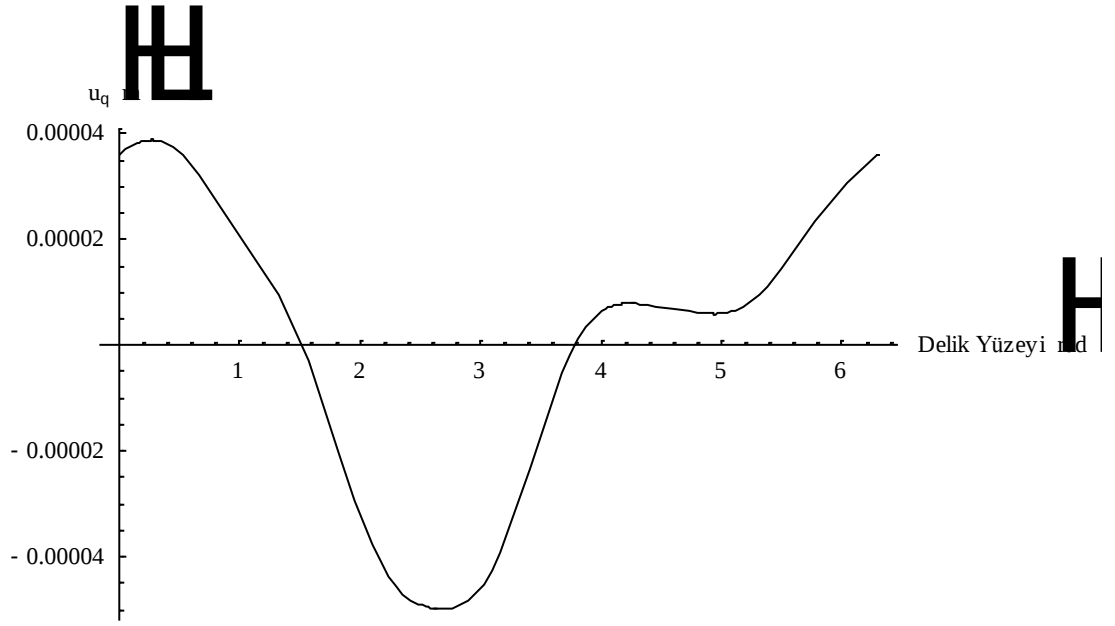
Şekil A.26 $\omega=100$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 15$ m için, serbest yüzey üzerindeki σ_{xx} normal gerilmesinin değişimi



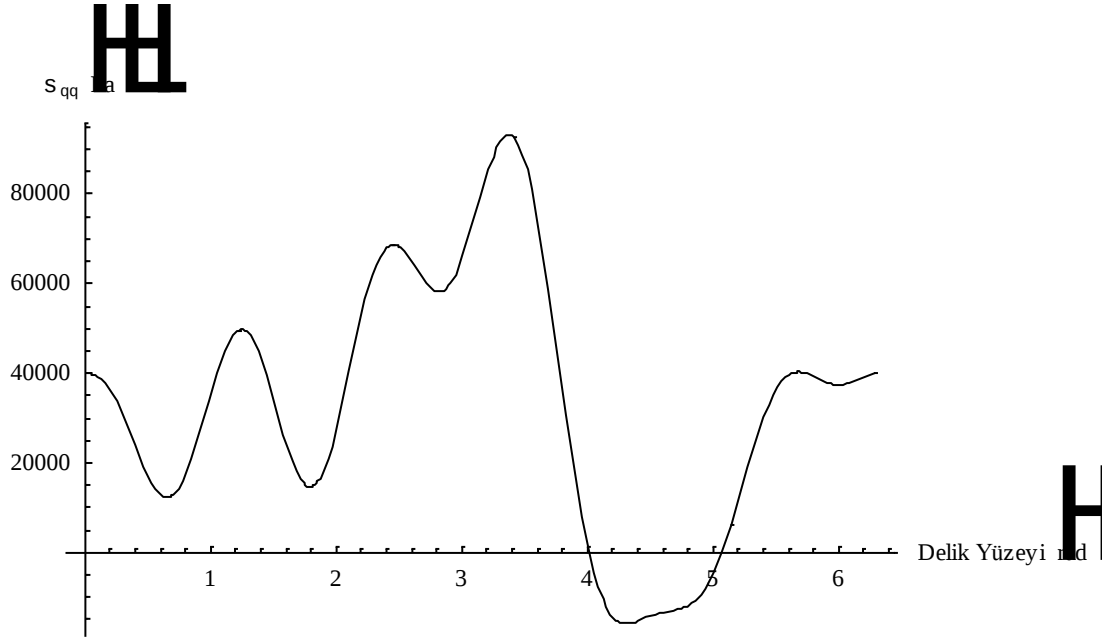
Şekil A.27 $\omega=100$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 15$ m için, serbest yüzey üzerindeki τ_{xy} kayma gerilmesinin değişimi



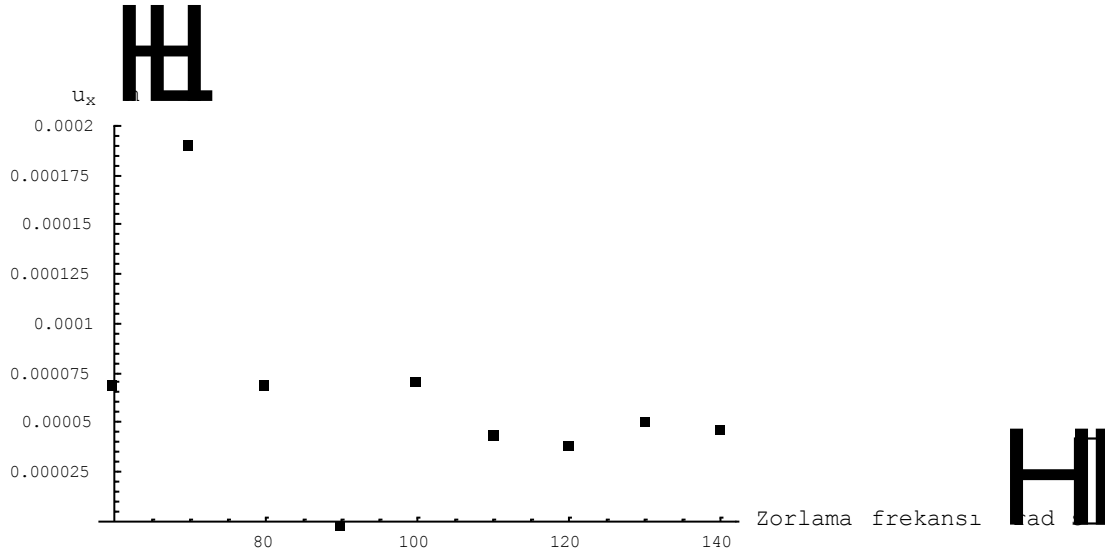
Şekil A.28 $\omega=100$ rad/s, $a=5$ m ve $H=15$ m için, oyuk yüzeyindeki u_r yerdeğiştirmesinin değişimi



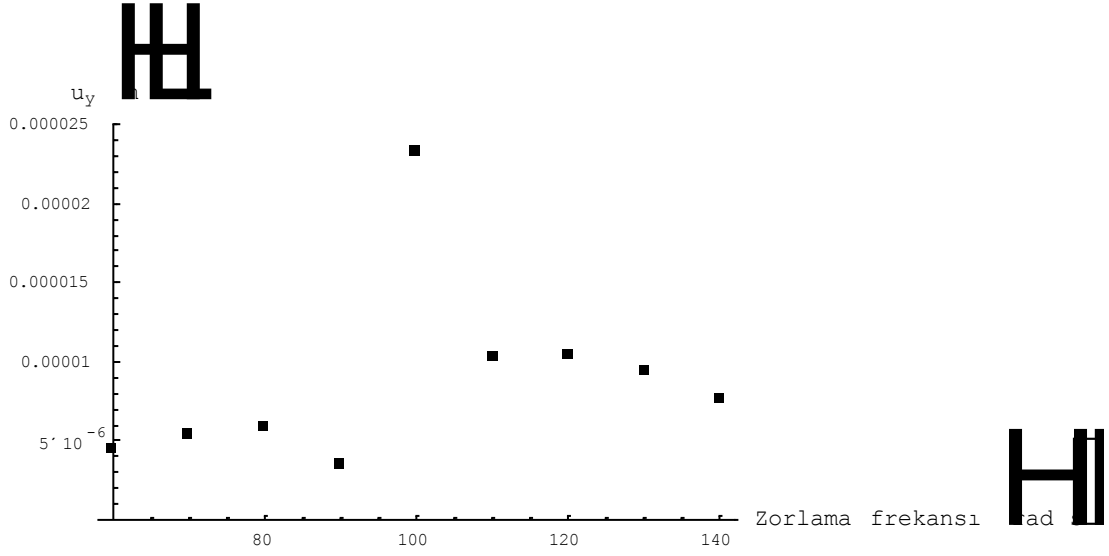
Şekil A.29 $\omega=100$ rad/s, $a=5$ m ve $H=15$ m için, oyuk yüzeyindeki u_θ yerdeğiştirmesinin değişimi



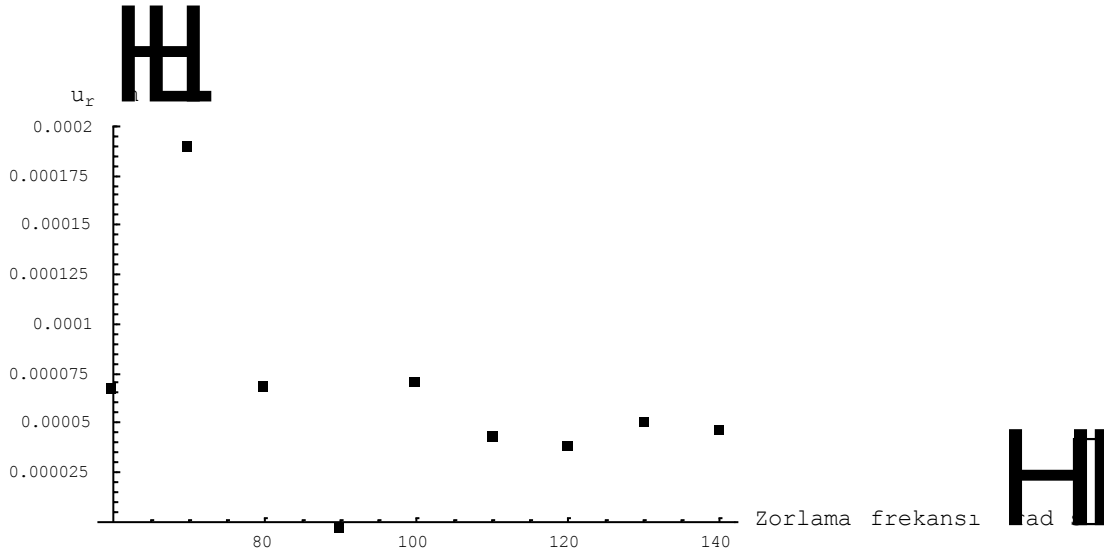
Şekil A.30 $\omega=100$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 15$ m için, oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}$ gerilmesinin değişimi



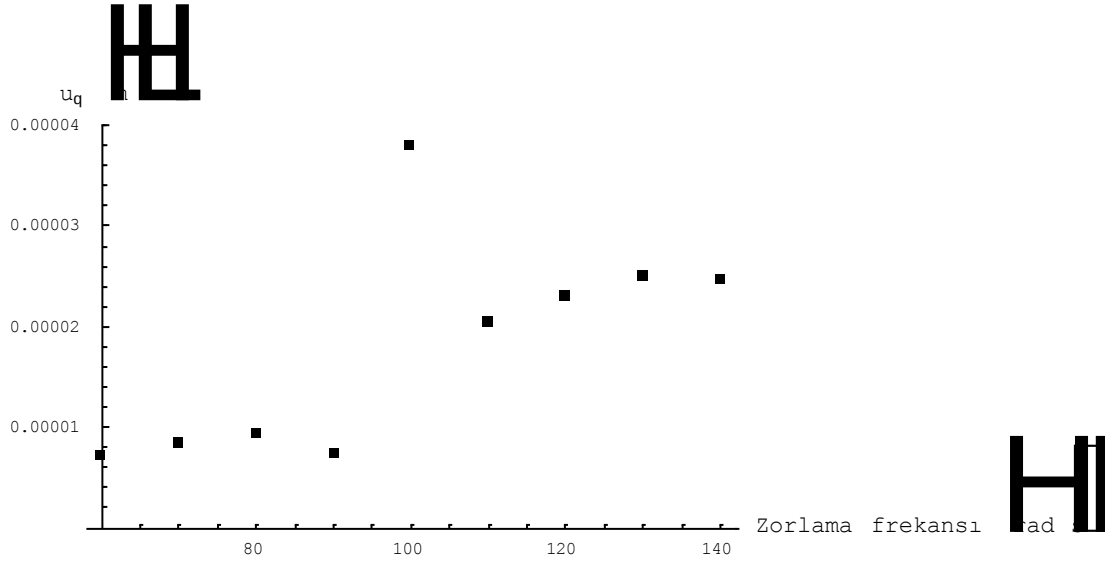
Şekil A.31 $\theta = 0$, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, serbest yüzey üzerindeki u_x yerdeğiştirmesinin frekansla değişimi



Şekil A.32 $\theta = 0$, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, serbest yüzey üzerindeki u_y yerdeğiştirmesinin frekansla değişimi



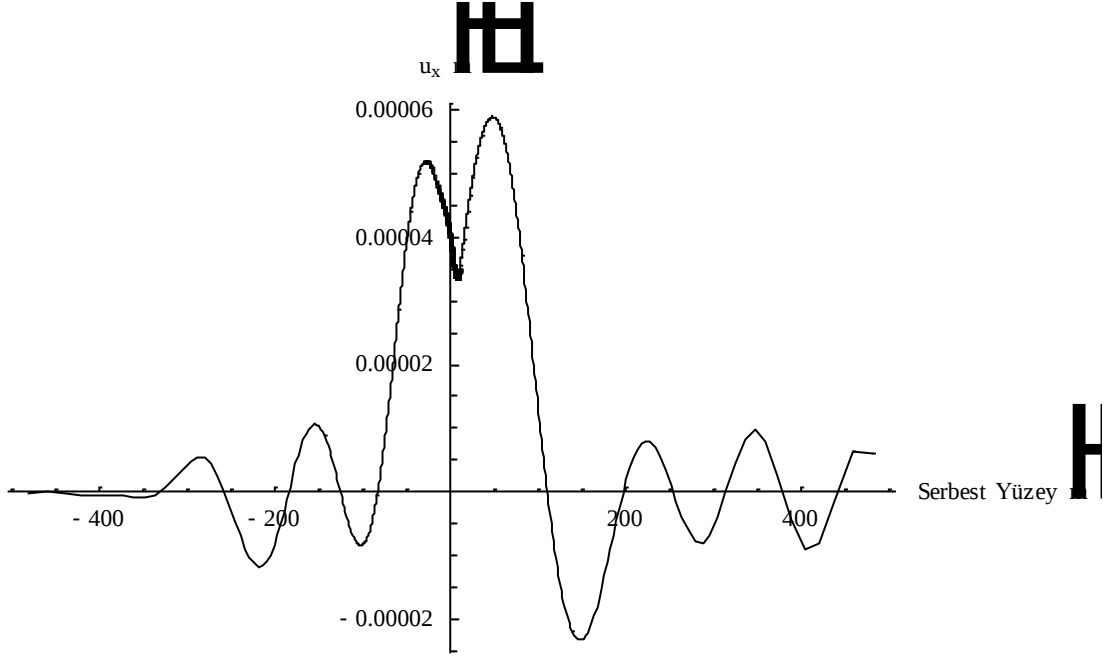
Şekil A.33 $\theta = 0$, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, oyuk yüzeyindeki u_r yerdeğiştirmesinin frekansla değişimi



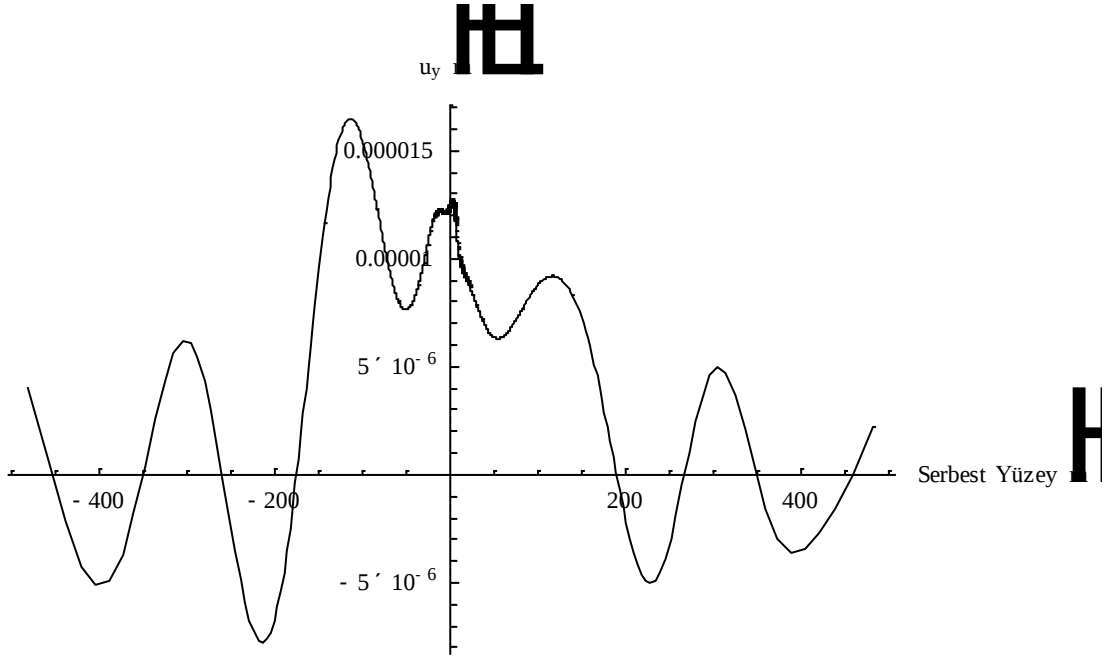
Şekil A.34 $\theta = 0$, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, oyuk yüzeyindeki u_θ yerdeğiştirmesinin frekansla değişimi

EK B

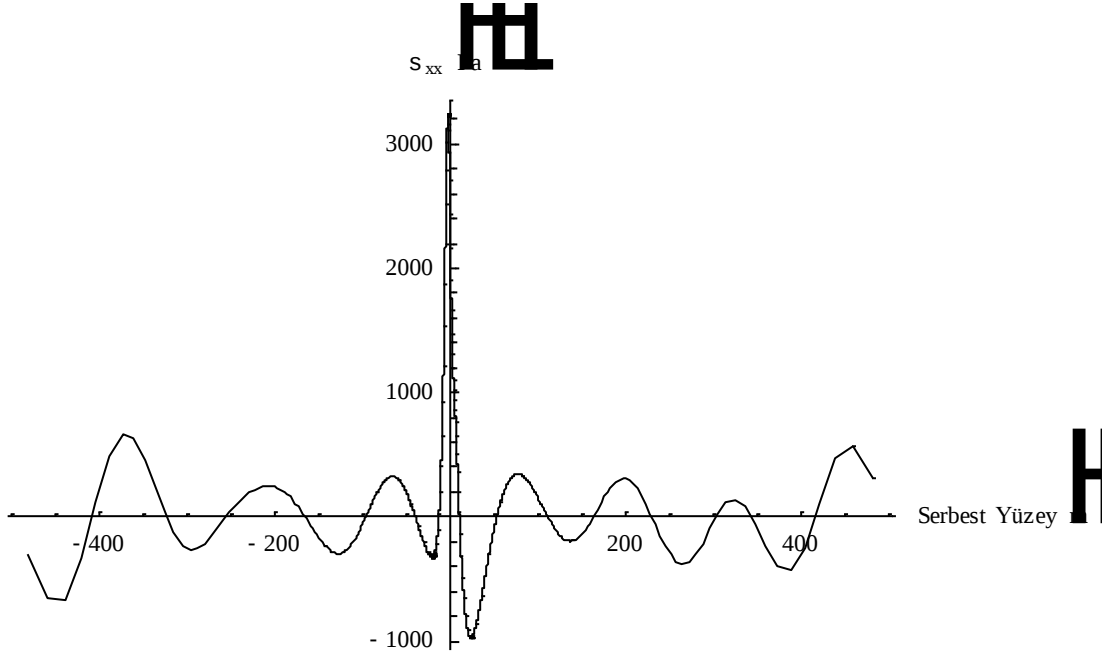
TEKİL YÜK HALİNE AİT GRAFİKLER



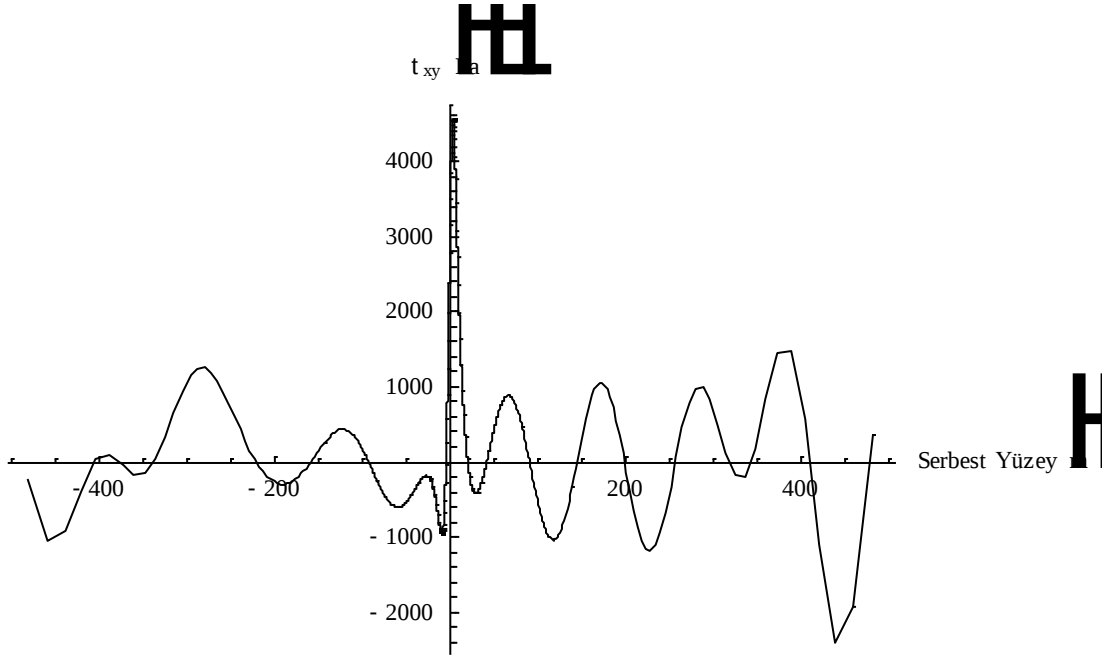
Şekil B.1 $\omega=60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, serbest yüzey üzerindeki u_x yerdeğiştirmesinin değişimi



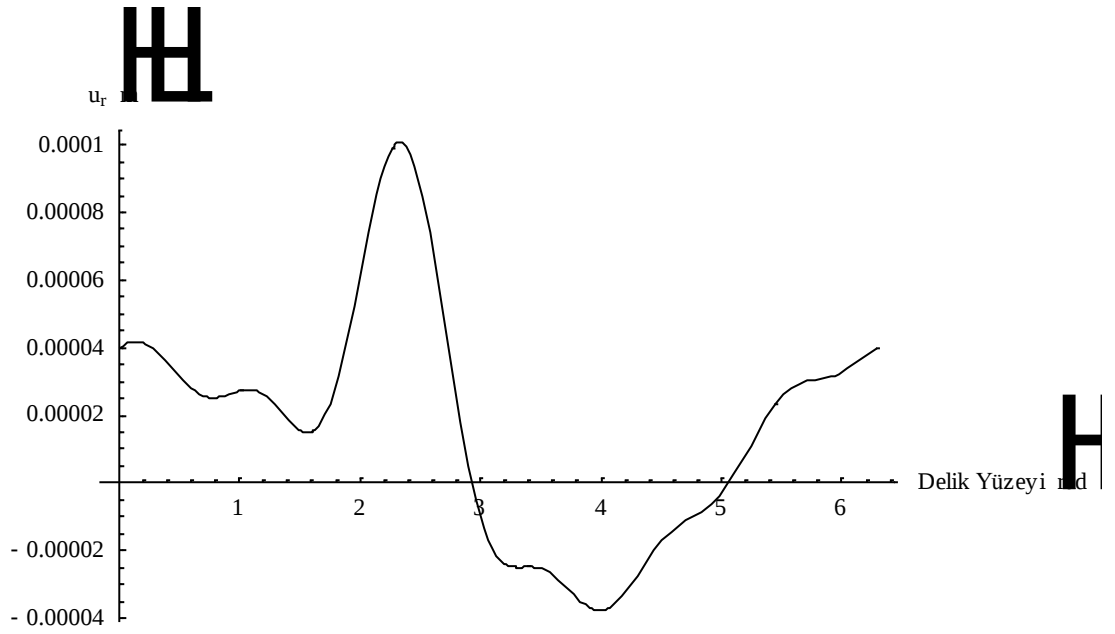
Şekil B.2 $\omega=60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, serbest yüzey üzerindeki u_y yerdeğiştirmesinin değişimi



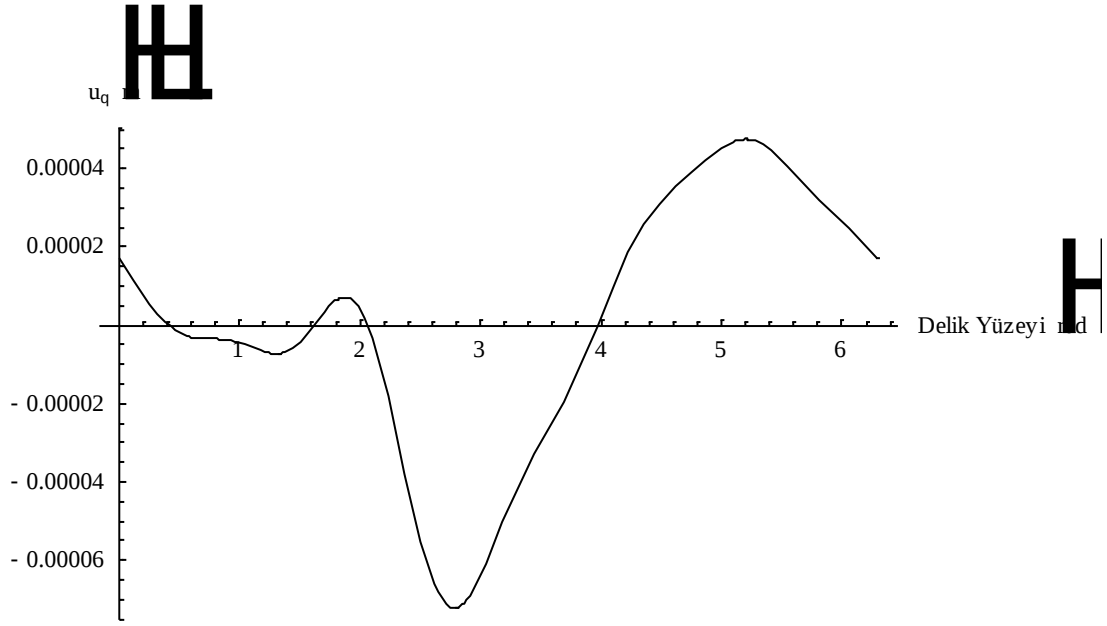
Şekil B.3 $\omega=60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, serbest yüzey üzerindeki σ_{xx} normal gerilmesinin değişimi



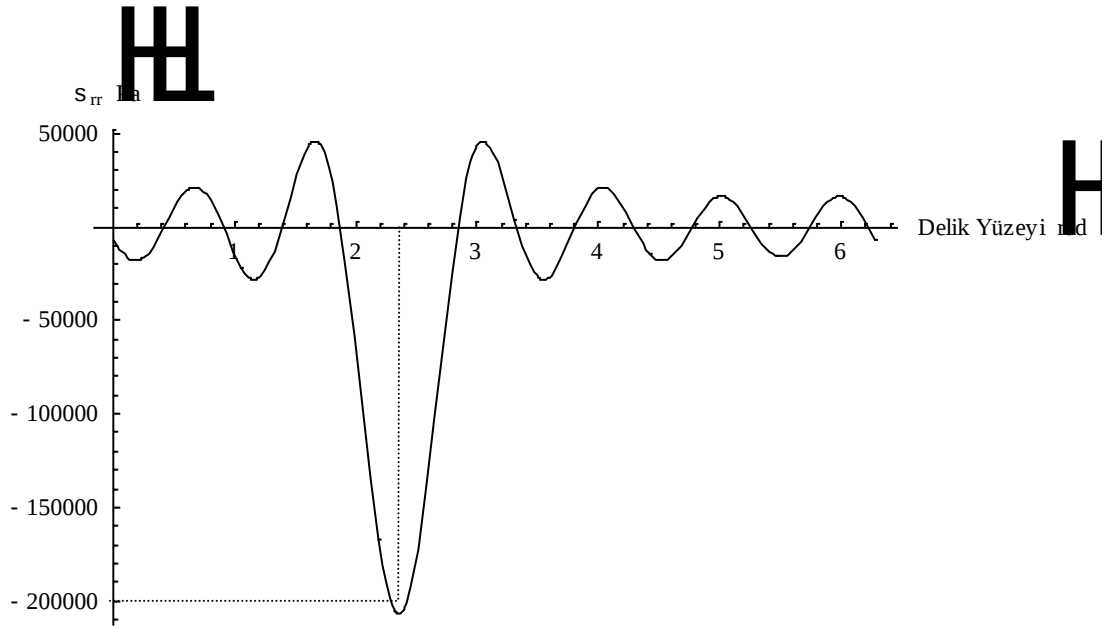
Şekil B.4 $\omega=60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, serbest yüzey üzerindeki τ_{xy} kayma gerilmesinin değişimi



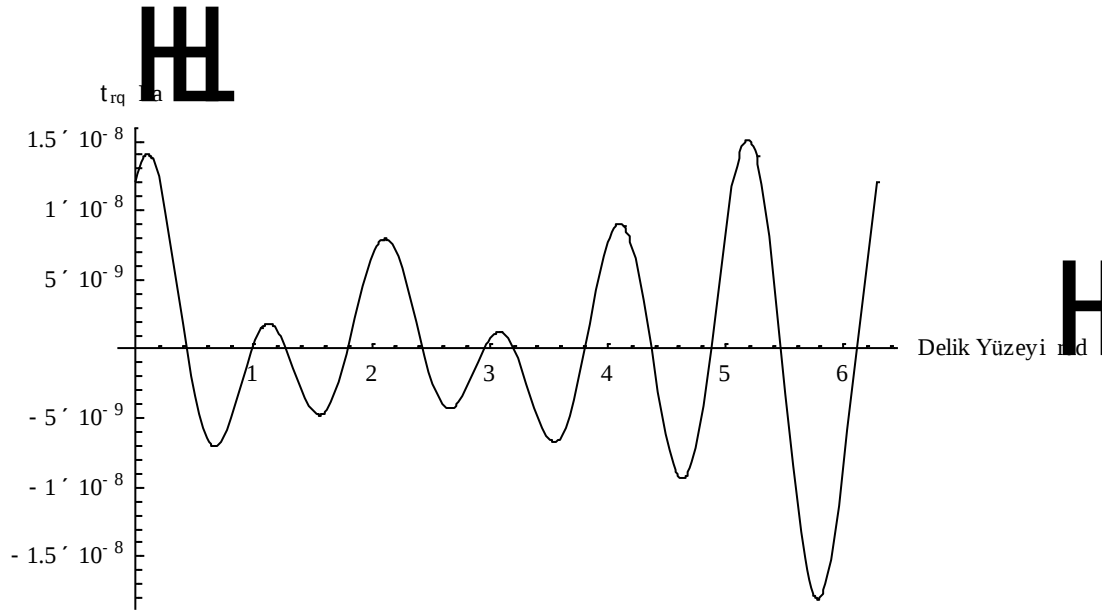
Şekil B.5 $\omega=60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, oyuk yüzeyindeki u_r yerdeğiştirmesinin değişimi



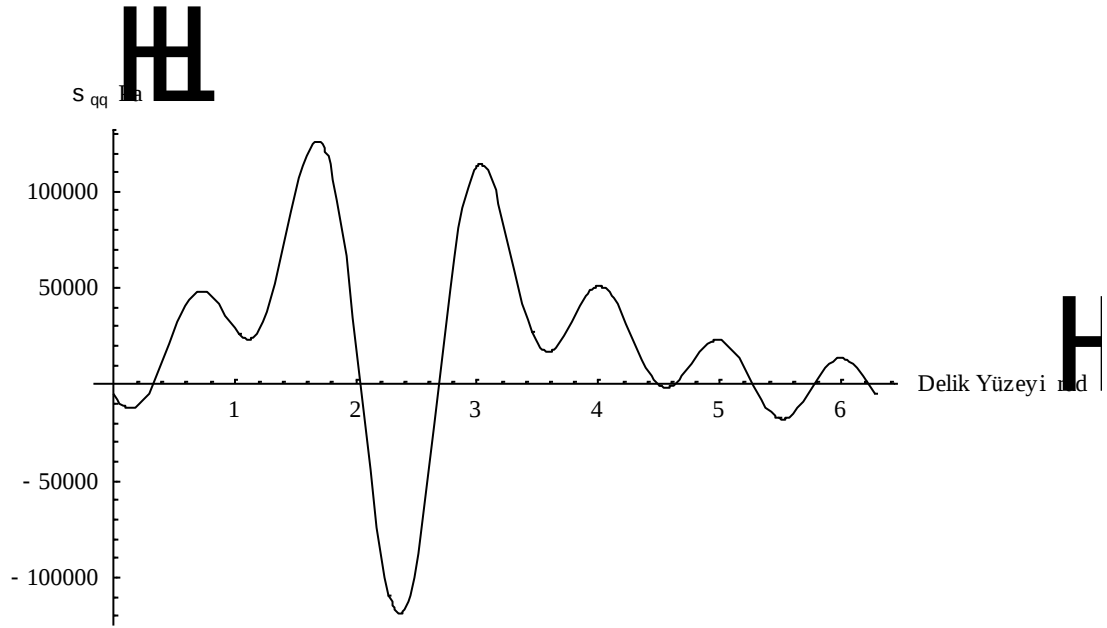
Şekil B.6 $\omega=60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, oyuk yüzeyindeki u_θ yerdeğiştirmesinin değişimi



Şekil B.7 $\omega=60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, oyuk yüzeyindeki σ_{rr} radyal gerilmesinin değişimi



Şekil B.8 $\omega=60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, oyuk yüzeyindeki $\tau_{r\theta}$ kayma gerilmesinin değişimi



Şekil B.9 $\omega=60$ rad/s, $a = 5$ m ve $H = 10$ m için, oyuk yüzeyindeki $\sigma_{\theta\theta}$ gerilmesinin değişimi

EK C

İNDİRGENMİŞ DALGA DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Çarpanlara ayırma yöntemini kullanarak aşağıdaki dalga denkleminin çözümü yapalım.

$$\nabla^2 \varphi + k_1^2 \varphi = 0 \quad (C.1)$$

Yukarıdaki denklemde φ fonksiyonunu

$$\varphi = R(r) \cdot \Theta(\theta) \quad (C.2)$$

şeklinde çarpanlarına ayıralım. Bu (C.2) ifadesini kutupsal koordinatlardaki Laplasyen ifadesi ile birlikte, (C.1) dalga denkleminde yerine yazarsak ve gerekli düzenlemeleri yaparsak aşağıdaki şekilde değişkenlerine ayrılmış olur.

$$\frac{1}{R} \left[r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} \right] + (k_1 r)^2 = - \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} \quad (C.3)$$

Yukarıdaki (C.3) eşitliğinin sağ tarafının sadece θ ' ya bağlı sol tarafının ise sadece r ' ye bağlı olduğu görülür. r ve θ bağımsız değişkenler olduğundan, bunlar birbirlerine bağlı değildirler ve (C.3) eşitliği ancak her iki taraf da aynı değışmeze eşit olduğunda geçerli olabilir. Bu değışmezi γ^2 olarak seçelim, böylece (C.3) ifadesinden

$$\frac{1}{R} \left[r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} \right] + (k_1 r)^2 = - \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = \gamma^2 \quad (C.4)$$

yazılabilir. Sağ taraftaki denklemde gerekli düzenleme yapılırsa

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \gamma^2 \Theta = 0 \quad (C.5)$$

homogen, sabit katsayılı, adi türevli lineer diferansiyel denklemi elde edilmiş olup, bu denkleminin çözümü

$$\Theta = A_1 e^{i\gamma\theta} + B_1 e^{-i\gamma\theta} \quad (C.6)$$

şeklindedir. $r = r_1$ gibi bir sabit değer için φ fonksiyonu

$$\varphi = R(r_1) \cdot \Theta(\theta) \quad (C.7)$$

olur. r_1 ' i sabit tutarak θ açısını 2π kadar arttırsak aynı nokta için aynı φ değerini bulmamız gerekir, yani

$$R(r_1) \cdot \Theta(\theta) = R(r_1) \cdot \Theta(\theta + 2\pi) \quad (C.8)$$

olmalıdır ve buradan

$$\Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta + 2n\pi), \quad n = \text{tamsayı} \quad (C.9)$$

olduğu görülür. Θ fonksiyonu 2π periyodlu bir fonksiyon olduğuna göre

$$\Theta = A_1 e^{i\gamma\theta} + B_1 e^{-i\gamma\theta} = A_1 e^{i\gamma(\theta+2\pi)} + B_1 e^{-i\gamma(\theta+2\pi)} \quad (C.10)$$

eşitliğini yazabiliriz. Buradan da

$$e^{i\gamma 2\pi} = 1$$

olması gerektiği görülür. Bu ifadenin gerçekleştirilmesi için

$$\gamma = n = \text{tamsayı}$$

olmalıdır.

(C.4) ifadesindeki, sol taraftaki denklemde gerekli düzenleme yapılırsa

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k_1^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (\text{C.11})$$

olarak n . mertebeden Bessel diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin de çözümü (n tam sayı olduğuna göre)

$$R = C_1 J_n(k_1 r) + D_1 Y_n(k_1 r) \quad (\text{C.12})$$

olur. Her n sayısı için bu çözüm geçerli olduğundan (C.1) dalga denkleminin genel çözümü

$$\varphi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n(r) \cdot \Theta_n(\theta) \quad (\text{C.13})$$

olarak elde edilir. Bilinenleri yerine yazarsak

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[A_n J_n(k_1 r) + B_n Y_n(k_1 r) \right] e^{in\theta} + \left[C_n J_n(k_1 r) + D_n Y_n(k_1 r) \right] e^{-in\theta} \quad (\text{C.14})$$

sonucu elde edilir.

ÖZGEÇMİŞ

Aydın ÖZMUTLU 1976 yılında Kırklareli’ de doğdu. Lise öğrenimini, 1990 – 1993 yılları arasında Bahçelievler Endüstri Meslek Lisesinde tamamlayıp, 1995 yılında T.Ü. Çorlu Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği bölümüne girdi ve 1999 yılında mezun oldu. Aynı yıl İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsüne kayıt olan yazar, 2000 Haziranında T.Ü. Çorlu Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Yapı Anabilim Dalına araştırma görevlisi olarak girmiş olup halen bu görevini ifa etmektedir.