

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇALIŞMA ŞARTLARINDA MODAL ANALİZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Y. Müh. Aleks KUYUMCUOĞLU

Anabilim Dalı: Mekatronik Mühendisliği

Programı: Mekatronik Mühendisliği

HAZİRAN 2008

ÇALIŞMA ŞARTLARINDA MODAL ANALİZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Y. Müh. Aleks KUYUMCUOĞLU

518051003

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 05 Mayıs 2008

Tezin Savunulduğu Tarih: 13 Haziran 2008

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Kenan Y. ŞANLITÜRK

Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Temel BELEK (İTÜ)

Yrd. Doc. Dr. Erdinç ALTUĞ (İTÜ)

HAZİRAN 2008

ÖNSÖZ

Bu yüksek lisans tez çalışmasını yöneten değerli hocam Prof. Dr. Kenan Y. ŞANLITÜRK'e verdiği tavsiyeler, yaptığı olumlu eleştiriler ve sabrı için teşekkür ederim.

Bu çalışmanın yapılması için olanak sağlayan ve desteğini esirgemeyen Arçelik A.Ş. ARGE Titreşim ve Akustik Teknolojileri Ailesi lideri Sn. Metin GÜL, tez çalışmasında yazılan programda büyük yardımları olan Sn. Ergin ARSLAN, çalışmanın her aşamasında desteğini esirgemeyen ve yanımda olan Sn. Ahmet Ali USLU ve Sn. İsak VAROL, deneysel ölçümlerde yardımları bulunan Sn. Kenan ATAÇ başta olmak üzere tüm bölüm çalışanlarına teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca İTÜ Titreşim Akustik laboratuvarı araştırma görevlilerinden Sn. Hasan KÖRÜK'e yazılımların kullanılması esnasında verdiği destekten ötürü teşekkür ederim.

Tüm öğrenim hayatım boyunca elde ettiğim başarılarımı borçlu olduğum, her zaman yanımda olan, maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen sevgili AİLEME teşekkürlerimi borç bilirim.

Haziran 2008

Aleks KUYUMCUOĞLU

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	ii
İÇİNDEKİLER	iii
KISALTMALAR	vi
TABLO LİSTESİ	vii
ŞEKİL LİSTESİ	viii
SEMBOL LİSTESİ	xii
ÖZET	xiv
SUMMARY	xv
1 . GİRİŞ	1
1.1 Çalışma Şartlarında Modal Analiz	1
1.2 Literatür Araştırması	3
1.2.1 Zaman Alanı Yöntemleri	5
1.2.1.1 Doğal Tahrik Yöntemi	5
1.2.1.2 Oto-Regresyon Hareketli Ortalama Yöntemi (ORHOY) (Auto-Regression Moving Average)	11
1.2.1.3 Olasılık Tabanlı Metot (OTM) (Stochastic Realization Based)	11
1.2.1.4 Olasılık Alt Uzay Belirleme Tekniği (OAUBT) (Stochastic System Identification)	12
1.2.2 Frekans Alanı Yöntemleri	15
1.2.2.1 Frekans Alanında Ayırıklaştırma (FAA) Yöntemi (Frequency Domain Decomposition)	15
1.2.2.2 En Küçük Kareler Yöntemi Karmaşık Frekans Metodu (Least Square Complex Frequency)	15
1.3 Çalışma Şartlarında Modal Analizin Avantaj ve Dezavantajları	16
1.4 Kapsam	17
2 . FREKANS ALANINDA AYRIKLAŞTIRMA YÖNTEMİ	19
2.1 Giriş	19
2.2 Sinyal İşleme ve Ayırıklaştırma	20

2.3	Güç ve Çapraz Spektrumların Elde Edilmesi	22
2.4	Frekans Alanında Ayırıklaştırma Yöntemi Teorisi	24
2.4.1	Tekil Değerlere Ayırıştırma	26
2.5	Doğal Frekans ve Mod Şeklinin Hesap Edilmesi	28
2.6	Geliştirilmiş Frekans Alanında Ayırıklaştırma Yöntemiyle Sönümün Hesap Edilmesi	31
2.7	ÇŞMA İle İlgili Sayısal İşlemler	32
2.8	Frekans Alanında Ayırıklaştırma Yönteminin Akış Şeması	34
3 .	SAYISAL UYGULAMALAR	37
3.1	Sayısal Model	37
3.2	Sayısal Hesaplamalarda Kullanılan Bilgisayar Yazılımları	42
3.3	Kütle-Yay Sistemi Üzerinde Sayısal Uygulamalar	43
3.3.1	Kütle-Yay Sistemi Sayısal Modeli	43
3.3.2	Farklı Sönümlü Yapılara Çalışma Şartlarında Modal Analiz Uygulamaları	44
3.3.2.1	Sönümsüz Model	44
3.3.2.2	Orantılı Yapısal Sönümlü Model	48
3.3.2.3	Orantılı Viskoz Sönümlü Model	51
3.3.2.4	Genel Viskoz Sönümlü Model	57
3.3.3	Farklı Tahrik Kuvvetleri Altında ÇŞMA Uygulamaları	64
3.4	Düz Plaka Üzerindeki Sayısal Uygulamalar	66
3.4.1	Geleneksel Modal Analiz (Sayısal)	66
3.4.2	Çalışma Şartlarında Modal Analiz (Sayısal)	67
3.4.3	Sayısal Verilere Gürültü Eklenmesi Durumunda Metodun Geçerliliği	71
4 .	DENEYSEL UYGULAMALAR	75
4.1	Deney Düzenegi ve Ölçümler	75
4.2	Düz Kiriş Üzerinde Yapılan Deneysel Çalışmalar	76
4.2.1	Modal Çekiç İle Yapılan Ölçüm ve Analizler	77
4.2.2	Sarsıcı ile Yapılan Çalışmalar	86
4.2.2.1	Rasgele Tahrik	86
4.2.2.2	Tekrar Edilen Rasgele Kuvvet	90
4.2.3	Frekans Alanında Ayırıklaştırma Yöntemi ile Düz Kirişin Modal Parametrelerinin Belirlenmesi	93

4.3	Düz Plaka Üzerinde Yapılan Deneysel Çalışmalar	96
4.4	Çamaşır Makinesi Paneli Üzerinde Yapılan Deneysel Çalışmalar	102
5 . GENEL DEĞERLENDİRME VE GELECEKTE YAPILABİLECEK		
ÇALIŞMALAR		114
5.1	Genel Değerlendirme	114
5.2	Gelecekte Yapılabilecek Çalışmalar	116
KAYNAKLAR		118
EKLER		122
ÖZGEÇMİŞ		126

KISALTMALAR

ÇŞMA	: Çalışma Şartlarında Modal Analiz
GMA	: Geleneksel Modal Analiz
DTF	: Darbe Tepki Fonksiyonu
SEM	: Sonlu Elemanlar Modeli
TDA	: Tekil Değerlerine Ayırıştırma
MGK	: Modal Güvence Kriteri
FAA	: Frekans Alanında Ayırıştırma (Frequency Domain Decomposition)
DTY	: Doğal Tahrik Yöntemi (Natural Excitation Technique)
ORHOY	: Oto- Regresyon Hareketli Ortalama Yöntemi (Auto-Regression Moving Average)
OTM	: Olasılık Tabanlı Metot (Stochastic Realization Based)
OAUBT	: Olasılık Alt – Uzay Belirleme Tekniği (Stochastic Subspace Identification)
EB	: Esas Bileşenler
KDA	: Kanonik Değişken Analiz
AEB	: Ağırlıklandırılmamış Esas Bileşenler
MO	: Maksimum Olasılık
ÇGÇÇ	: Çok Giriş Çok Çıkış
GSY	: Güç Spektral Yoğunluk
ÇSY	: Çapraz Spektral Yoğunluk

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 2.1: Pencere Fonksiyonlarının Frekans Alanındaki Karakteristikleri	23
Tablo 3.1: Sönümsüz Sistemin Geleneksel ve Çalışma Şartlarında Karşılaştırılması	48
Tablo 3.2: Orantılı Yapısal Sönümlü Sistemin Geleneksel ve Çalışma Şartlarında Karşılaştırılması	50
Tablo 3.3: Orantılı Viskoz Sönümlü Sistemin Geleneksel ve Çalışma Şartlarında Karşılaştırılması	55
Tablo 3.4: Orantılı Yüksek Viskoz Sönümlü Sistemin Geleneksel ve Çalışma Şartlarında Karşılaştırılması	57
Tablo 3.5: Genel Viskoz Sönümlü Sistemin Geleneksel ve Çalışma Şartlarında Karşılaştırılması	59
Tablo 3.6: Genel Yüksek Viskoz Sönümlü Sistemin Geleneksel ve Çalışma Şartlarında Karşılaştırılması	61
Tablo 3.7: Rasgele Beyaz Tahrik Sonucu Elde Edilen ÇŞMA ile GMA Karşılaştırılması	66
Tablo 3.8: Düz Plaka Sönüm Oranları Karşılaştırılması	71
Tablo 4.1: İvmeölçerlerin Yapı Üzerinde Gezdirilmesi Sonucu Elde Edilen Doğal Frekansların ve Sönüm Kayıp Faktörlerinin Karşılaştırılması	84
Tablo 4.2: Rasgele Tahrik Sonucu Elde Edilen Doğal Frekansların ve Sönüm Kayıp Faktörlerinin Karşılaştırılması	88
Tablo 4.3: Rasgele Tahrik ve İvmeölçerlerin Yapı Üzerinde Gezdirilmesi Sonucu Elde Edilen Doğal Frekansların ve Sönüm Kayıp Faktörlerinin Karşılaştırılması	89
Tablo 4.4: Tekrar Edilen Rasgele Tahrik Sonucu Elde Edilen Doğal Frekansların ve Sönüm Kayıp Faktörlerinin Karşılaştırılması	91
Tablo 4.5: Tekrar Edilen Rasgele Tahrik ve İvmeölçerlerin Yapı Üzerinde Gezdirilmesi Sonucu Elde Edilen Doğal Frekansların ve Sönüm Kayıp Faktörlerinin Karşılaştırılması	92
Tablo 4.6: Frekans Alanında Ayırıklaştırma Yöntemiyle Elde Edilen Doğal Frekansların ve Sönüm Oranlarının Karşılaştırılması	94
Tablo 4.7: Düz Plaka Doğal Frekansların Karşılaştırılması	99
Tablo 4.8: Çamaşır Makinası Yan Paneli Doğal Frekansların ve Sönüm Kayıp Faktörlerinin Karşılaştırılması	105
Tablo 4.9: Çalışır Durumdaki Çamaşır Makinası Yan Paneli Doğal Frekansların ve Sönüm Kayıp Faktörlerinin Karşılaştırılması	110

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1.1 : Sistem Belirleme Şematik Gösterimi	2
Şekil 2.1 : Birleşik Dış Etkilere Dayanan Model	19
Şekil 2.2 : Cevaplar Arasındaki Çapraz Spektral Yoğunluk Matrisi Elemanları	21
Şekil 2.3 : Pratik ve İdeal Filtre	23
Şekil 2.4 : Her bir frekansta güç spektrum yoğunluk matrislerinin.....	29
Şekil 2.5 : Tekil değerlere ayrıştırma sonucu elde edilen grafik	30
Şekil 2.6 : Mod Etrafındaki Yarım Bant Genişliği	32
Şekil 2.7 : Sayısal Çalışma Şartlarında Modal Analiz Yönteminin Şematik Gösterimi.....	35
Şekil 2.8 : Deneysel Çalışma Şartlarında Modal Analiz Yönteminin Şematik Gösterimi.....	36
Şekil 3.1 : Kütle-Yay Sistemi	44
Şekil 3.2 : Sönümsüz Kütle-Yay Sisteminin ADAMS Modeli	45
Şekil 3.3 : Süpürücü Sinüs.....	46
Şekil 3.4 : Sönümsüz Modelin Frekansa Bağlı Genlik Eğrisi	46
Şekil 3.5 : Sönümsüz Modelin Tekil Değerlerine Ayrıştırma Grafiği.....	47
Şekil 3.6 : Orantılı Yapısal Sönümlü Model	48
Şekil 3.7 : Orantılı Yapısal Sönümlü Sistemden 1.Kütleden Alınan Frekansa Bağlı Genlik Grafiği	50
Şekil 3.8 : Sönümlü Kütle-Yay Sistemi.....	51
Şekil 3.9 : Sönümlü Kütle-Yay Sisteminin ADAMS Modeli	52
Şekil 3.10: Orantılı Viskoz Sönümlü Modelin Frekansa Bağlı Genlik Eğrisi.....	52
Şekil 3.11: Orantılı Viskoz Sönümlü Modelin Frekansa Bağlı Faz Eğrisi.....	53
Şekil 3.12: Orantılı Viskoz Sönümlü Modelin Tekil Değerlere Ayrıştırma Grafiği	53
Şekil 3.13: Çalışma Şartlarında Orantılı Viskoz Sönümlü Modelin Mod Şekillerinin Karmaşık Düzlemde Gösterimi.....	54
Şekil 3.14: Orantılı Yüksek Viskoz Sönümlü Modelin Frekansa Bağlı Genlik Eğrisi	56
Şekil 3.15: Orantılı Yüksek Viskoz Sönümlü Modelin Frekansa Bağlı Faz Eğrisi... ..	56
Şekil 3.16: Çalışma Şartlarında Orantılı Yüksek Viskoz Sönümlü Modelin Mod Şekillerinin Karmaşık Düzlemde Gösterimi	57
Şekil 3.17: Genel Viskoz Sönümlü Modelin Frekansa Bağlı Genlik Eğrisi.....	58
Şekil 3.18: Genel Viskoz Sönümlü Modelin Frekansa Bağlı Faz Eğrisi.....	58
Şekil 3.19: Genel Viskoz Sönümlü Modelin Tekil Değerlere Ayrıştırma Grafiği	59
Şekil 3.20: Genel Viskoz Sönümlü Modelin Mod Şekillerinin Karmaşık Düzlemde Gösterimi.....	60
Şekil 3.21: Genel Yüksek Viskoz Sönümlü Modelin Frekansa Bağlı Genlik Eğrisi	60
Şekil 3.22: Genel Yüksek Viskoz Sönümlü Modelin Mod Şekillerinin Karmaşık Düzlemde Gösterimi	61
Şekil 3.23: Tahrikin 3.Kütleden Uygulanması Sonucu Genel Viskoz Sönümlü Modelin Frekansa Bağlı Genlik Eğrisi.....	62

Şekil 3.24: Tahrikin 3.Kütleden Uygulanması Sonucu Genel Viskoz Sönümlü Modelin Mod Şekillerinin Karmaşık Düzlemde Gösterimi	62
Şekil 3.25: 1. Kütleden Alınan Cevaplar	63
Şekil 3.26: 2. Kütleden Alınan Cevaplar	63
Şekil 3.27: 3. Kütleden Alınan Cevaplar	64
Şekil 3.28: Rasgele Beyaz Tahrik Uygulaması Sonucu Elde Edilen Frekansa Bağlı Genlik Eğrisi	65
Şekil 3.29: Rasgele Beyaz Tahrik Uygulaması Sonucu Elde Edilen Frekansa Bağlı Faz Eğrisi	65
Şekil 3.30: Rasgele Beyaz Tahrik Sonucu Elde Edilen Tekil Değerler Grafiği	65
Şekil 3.31: Düz Plaka Sayısal Modeli	67
Şekil 3.32: Düz Plaka Üzerinden Alınan Frekansa Bağlı Genlik Grafiği	67
Şekil 3.33: Düz Plaka Tekil Değerler Grafiği	68
Şekil 3.34: Düz Plaka İçin Geleneksel ve ÇŞMA Sonuçları, 1. Mod	69
Şekil 3.35: Düz Plaka İçin Geleneksel ve ÇŞMA Sonuçları, 2. Mod	69
Şekil 3.36: Düz Plaka İçin Geleneksel ve ÇŞMA Sonuçları, 3. Mod	70
Şekil 3.37: Düz Plaka İçin Geleneksel ve ÇŞMA Sonuçları, 4. Mod	70
Şekil 3.38: %10 Gürültü Eklenmesi Durumunda Plaka Üzerinden Alınan İvme.....	71
Şekil 3.39: %10 Gürültü Eklenmesi Durumunda Elde Edilen Tekil Değerler Grafiği	72
Şekil 3.40: %10 Gürültü Eklenmesi Durumunda Elde Edilen Mod Şekilleri	72
Şekil 3.41: %20 Gürültü Eklenmesi Durumunda Plaka Üzerinden Alınan İvme.....	73
Şekil 3.42: %20 Gürültü Eklenmesi Durumunda Elde Edilen Tekil Değerler Grafiği	73
Şekil 3.43: %20 Gürültü Eklenmesi Durumunda Elde Edilen Mod Şekilleri	74
Şekil 4.1 : Bruel-Kjaer 2035 Sinyal Analizörü.....	76
Şekil 4.2 : Bruel-Kjaer PULSE Analizörü ve yazılımı.....	76
Şekil 4.3 : Düz Kiriş	77
Şekil 4.4 : Misinalar ile Asılan Düz Kiriş.....	78
Şekil 4.5 : Düz Kirişe 5 Noktasından Uygulanılan Darbe Kuvveti Gösterimi	78
Şekil 4.6 : B&K PULSE Analizörü	79
Şekil 4.7 : Düz Kiriş Üzerinden 5 noktasından Alınan Frekans Tepki Fonksiyonu.	79
Şekil 4.8 : Düz Kiriş Üzerinden 5 noktasından Alınan Zamana Bağlı İvme Grafiği.....	80
Şekil 4.9 : Düz Kiriş 1. Modun Karşılaştırılması	80
Şekil 4.10: Düz Kiriş 2. Modun Karşılaştırılması	81
Şekil 4.11: Düz Kiriş 3. Modun Karşılaştırılması	81
Şekil 4.12: Düz Kiriş 4. Modun Karşılaştırılması	82
Şekil 4.13: Düz Kiriş İçin MGK.....	83
Şekil 4.14: İvmeölçerlerin Yapı Üzerinde Gezdirilmesi Sonucu Elde Edilen 3. Modun Karşılaştırılması.....	84
Şekil 4.15: İvmeölçerlerin Yapı Üzerinde Gezdirilmesi Sonucu Elde Edilen MGK	85
Şekil 4.16: Sarsıcı ile Tahrik Edilen Düz Kiriş	86
Şekil 4.17: Sarsıcı ile Tahrik Sonucu Düz Kiriş Üzerinden 5 noktasından Alınan FTF	87
Şekil 4.18: Sarsıcı ile Tahrik Sonucu Düz Kiriş Üzerinden 5 noktasından Alınan Zamana Bağlı İvme Grafiği	87
Şekil 4.19: Rasgele Tahrik Sonucu Elde Edilen 2. Modun Karşılaştırılması.....	88
Şekil 4.20: Rasgele Tahrik Sonucu Elde Edilen MGK	88
Şekil 4.21: Rasgele Tahrik ve İvmeölçerlerin Yapı Üzerinde Gezdirilmesi Sonucu Elde Edilen 5. Modun Karşılaştırılması	89

Şekil 4.22: Rasgele Tahrik ve İvmeölçerlerin Yapı Üzerinde Gezdirilmesi Sonucu Elde Edilen MGK.....	90
Şekil 4.23: Tekrar Edilen Rasgele Tahrik Sonucu Elde Edilen 4. Modun Karşılaştırılması	91
Şekil 4.24: Tekrar Edilen Rasgele Tahrik Sonucu Elde Edilen MGK	91
Şekil 4.25: Tekrar Edilen Rasgele Tahrik ve İvmeölçerlerin Yapı Üzerinde Gezdirilmesi Sonucu Elde Edilen 2. Modun Karşılaştırılması	92
Şekil 4.26: Tekrar Edilen Rasgele Tahrik ve İvmeölçerlerin Yapı Üzerinde Gezdirilmesi Sonucu Elde Edilen MGK	92
Şekil 4.27: Düz Kiriş Tekil Değerler Grafiği	93
Şekil 4.28: 1. ve 9. Noktalar Arasındaki Çapraz Spektrum – Genlik Bilgisi	94
Şekil 4.29: 1. ve 9. Noktalar Arasındaki Çapraz Spektrum – Faz Bilgisi	94
Şekil 4.30: Çalışma Şartlarında (FAA) ve Geleneksel Olarak Elde Edilen 4. Modun Karşılaştırılması	95
Şekil 4.31: Çalışma Şartlarında (FAA) ve Geleneksel Olarak Elde Edilen 6. Modun Karşılaştırılması	95
Şekil 4.32: Frekans Alanında Ayırıklaştırma Yöntemi Sonucu Elde Edilen MGK ...	95
Şekil 4.33: Modal Çekiç ile Tahrik Edilen Düz Plaka.....	96
Şekil 4.34: Sarsıcı ile Tahrik Edilen Düz Plaka	97
Şekil 4.35: Düz Plaka Üzerinden Alınan FTF	97
Şekil 4.36: Düz Plaka Üzerinden Alınan Çapraz Spektrum – Genlik Bilgisi	98
Şekil 4.37: Düz Plaka Üzerinden Alınan Çapraz Spektrum – Faz Bilgisi.....	98
Şekil 4.38: Düz Plaka Tekil Değerler Grafiği	99
Şekil 4.39: Düz Plaka 1. Mod Karşılaştırılması	100
Şekil 4.40: Düz Plaka 2. Mod Karşılaştırılması	100
Şekil 4.41: Düz Plaka 6. Mod Karşılaştırılması	101
Şekil 4.42: Düz Plaka MGK	101
Şekil 4.43: Çamaşır Makinası Gövdesi	102
Şekil 4.44: Çamaşır Makinası Yan Paneli Üzerinden Alınan FTF.....	103
Şekil 4.45: Çamaşır Makinası Yan Paneli Üzerinden Alınan Çapraz Spektrum – Genlik Bilgisi	103
Şekil 4.46: Çamaşır Makinası Yan Paneli Üzerinden Alınan Çapraz Spektrum – Faz Bilgisi	104
Şekil 4.47: Çamaşır Makinası Yan Paneli Çekiç ile Elde Edilen Tekil Değerler Grafiği	104
Şekil 4.48: Çamaşır Makinası Yan Paneli 1. Mod Karşılaştırılması	105
Şekil 4.49: Çamaşır Makinası Yan Paneli 4. Mod Karşılaştırılması	105
Şekil 4.50: Çamaşır Makinası Yan Paneli 6. Mod Karşılaştırılması	106
Şekil 4.51: Çamaşır Makinası Yan Paneli 8. Mod Karşılaştırılması	106
Şekil 4.52: Çamaşır Makinası Yan Paneli MGK.....	106
Şekil 4.53: Çalışır Durumdaki Çamaşır Makinası Yan Paneli Üzerinden Alınan Çapraz Spektrum – Genlik Bilgisi	108
Şekil 4.54: Çalışır Durumdaki Çamaşır Makinası Yan Paneli Üzerinden Alınan Çapraz Spektrum – Faz Bilgisi	108
Şekil 4.55: Çalışır Durumdaki Çamaşır Makinası Yan Paneli Üzerinden Elde Edilen Tekil Değerler Grafiği.....	109
Şekil 4.56: Çalışır Durumdaki Çamaşır Makinası Yan Paneli 1. Mod Karşılaştırılması	110
Şekil 4.57: Çalışır Durumdaki Çamaşır Makinası Yan Paneli 4. Mod Karşılaştırılması	110

Şekil 4.58: Çalışır Durumdaki Çamaşır Makinası Yan Paneli 7. Mod	
Karşılaştırılması	111
Şekil 4.59: Çalışır Durumdaki Çamaşır Makinası Yan Paneli 9. Mod	
Karşılaştırılması	111
Şekil 4.60: Çalışır Durumdaki Çamaşır Makinası Yan Paneli 10. Mod	
Karşılaştırılması	111
Şekil 4.61: Çalışır Durumdaki Çamaşır Makinası Yan Paneli MGK.....	112

SEMBOL LİSTESİ

$[H(\omega)]$	: Frekans Tepki Fonksiyonu Matrisi
$\{X(\omega)\}$	: Titreşim Ölçümü Vektörü
$f(t)$	: Zamana Bağlı Kuvvet
$x(t)$	: Zamana Bağlı İvme Ölçümü
$[K]$	: Direngenlik Matrisi
$[M]$	: Kütle Matrisi
$[C]$	: Sönüm Matrisi
$[D]$	: Yapısal Sönüm Matrisi
$[K]^*$	: Kompleks Direngenlik Matrisi
m_r	: Modal Kütle
k_r	: Modal Direngenlik
c_r	: Modal Sönüm
$[\psi]$	: Özvektör Matrisi
$\{\psi\}$	: Özvektör
$[\phi]$	: Normalize Özvektör Matrisi
$\{\phi\}$	: Normalize Özvektör
ϕ_{ri}	: i noktasındaki r. mod
$\{q\}$	: Modal Koordinat Vektörü
$q(t)$	: Sürekli Zamanda Yerdeğiştirme Vektörü
$z(t)$	: Ölçülen Yerdeğiştirmeleri ve Hızları İçeren t Zamanındaki Durum Vektörü
$w(t)$	: Proses Gürültüsü
$v(t)$	: Ölçüm Gürültüsü
$[A]$	: Sistem Matrisi
Δf	: Frekans Çözünürlüğü
T	: Periyot
$G_{xx}(\omega)$	: Giriş Güç Spektrum Matrisi
$G_{yy}(\omega)$	: Çıkış Güç Spektrum Matrisi
γ_k	: k. Modun Modal Katılım Vektörü
d_k	: Skaler Sabit
δ_k	: Logaritmik Azalma
A_H	: A Matrisinin Hermitian Bölümü
$[I]$	: Birim Matris
$g_r(t)$	: Tek Serbestlik Dereceli Sistemin Darbe Tepki Fonksiyonu
λ	: Özdeğer

η	: Sönüm Kayıp Faktörü
ζ	: Sönüm Oranı
ω	: Doğal Frekans
w_r^d	: Sönümlü Doğal Frekans
Θ_r	: Faz Açısı
$R_{ij}(T)$	: Çapraz Korelasyon Fonksiyonu
Δt	: Örnekleme Zamanı
$G_{yy}(j\omega)$	: Güç ve Çapraz Spektrum Matrisi
$[U]$	: Sol Ortogonal Matris
$[\Sigma]$	: Tekil Değerler Matrisi
$[V]$	: Sağ Ortogonal Matris
s	: Tekil Değer
m	: İvmeölçer Sayısı
i	: Ölçüm sayısı
$[]^T$	: Matrisin Transpozu
$[]^{-1}$	: Matrisin Tersi
$[]^H$	: Matrisin Kompleks Eşleniğinin Transpozu
$[]^+$	: Kare Olmayan Matrisin Genelleştirilmiş Tersi

ÇALIŞMA ŞARTLARINDA MODAL ANALİZ

ÖZET

Çalışma şartlarında modal analiz, yapılar üzerinde sadece titreşim ölçümü yaparak yapıların modal özelliklerini belirlemeyi amaçlamaktadır. Bu yöntem öncelikle inşaat mühendisliği yapılarında (binalar, köprüler, deniz üstündeki yapılar v.b) modal parametreleri (doğal frekans, sönüm, mod şekilleri) bulmada kullanılmaya başlanmıştır. Fakat son zamanlarda bu yöntem mekanik yapılarda da uygulama alanı bulmuştur. Bu metodun en önemli avantajı yapıya herhangi bir kuvvet uygulanmasına gerek duymamasıdır. Bu nedenle bu yöntemin uygulanması sırasında herhangi bir kuvvet sinyalinin ölçülmesine gerek yoktur. Modal parametreleri bulmak sadece cevap (ivme) verilerine dayanmaktadır, dolayısıyla test düzeneğinin kurulma zamanı oldukça kısalmaktadır.

Çalışma şartlarındaki modal analiz için kullanılan yöntemlerden birisi Frekans Alanında Ayırıklaştırma (FAA) yöntemidir. Bu tezde sistemin sadece çalışma şartları altındaki titreşimleri kullanılarak sisteme ait modal parametrelerin belirlenmesine yönelik bir çalışma yapılmıştır. Bu yöntem, sistemden elde edilen titreşim verileri (ivme) arasındaki öznel ve çapraz spektrumlarının bulunmasını gerektirmektedir. Frekans Alanında Ayırıklaştırma yönteminin uygulanabilirliği sayısal analizler ve ardından da deneysel çalışmalar ile sınanmıştır. Bu metodun uygulanabilirliğinin en önemli varsayımı sistemin Beyaz Tahrik (White Noise) ile yüklendiği varsayımdır. Sayısal analizlerden ve deneysel çalışmalardan elde edilen sonuçlar, çalışma ortamında modal analiz yönteminin kabul ettiği varsayımların geçerli olduğu ortamların yaratılması durumunda uygulanabilir olduğunu göstermektedir. Ancak, bazı yapılarda, özellikle dönel makinelerde (çamaşır makinesi gibi), bu varsayımlar tam olarak sağlanamamakta, bu da sisteme ait modal parametrelerin belirlenmesini zorlaştırmaktadır.

OPERATIONAL MODAL ANALYSIS

SUMMARY

Operational Modal Analysis also known as Output Only Modal Analysis has in the recent years been used for extracting modal parameters (eigenfrequency, mode shape and damping) of civil engineering structures (buildings, bridges, off-shore platforms, etc.) and is now becoming popular for mechanical structures. The advantage of the method is that no artificial excitation needs to be applied to the structure or force signals to be measured. All the parameter estimation is based upon the response signals, thereby minimizing the work of preparation for the test.

One of the techniques that is used for Operational Modal Analysis is Frequency Domain Decomposition which is a non-parametric technique. This thesis addresses identifying modal parameters of the system, which is based on utilizing the vibrations of the system under operating conditions. This procedure requires auto and cross spectrums between measured response data. The applicability of the Frequency Domain Decomposition technique is examined using both numerical simulations and experimental studies. An important assumption of this method applicability is that the input to the structure is stationary white noise.

The results of the numerical simulations and experimental studies show that method applicability. But some structures especially rotating machineries (washing machine) can add some unwanted harmonics to our system. So this will complicate to find modal parameters of our system.

1 . GİRİŞ

1.1 Çalışma Şartlarında Modal Analiz

Geleneksel Modal Analiz teknikleri tahrik kuvveti veya kuvvetlerinin kontrol edilebildiği ve ölçülebildiği durumlarda uygulanabilmektedir. Fakat tahrik kuvveti kontrol edilemiyorsa bu metotlar uygulanabilirliğini kaybetmektedir. Bazı durumlarda yapıların darbe çekiçleri veya sarsıcılarla titreşime sokulması ya mümkün olmamaktadır ya da bunu gerçekleştirmek oldukça zordur. Bu durumlar genellikle köprüler, binalar, barajlar gibi yapılarda görülmektedir. Bazı durumlarda ise oluşan kuvvetler sensörlerle ölçülemeyecek kadar büyük olmaktadır. Lineer sistemlerden ölçülen cevaplar aşağıdaki üç bölümün kombinasyonu şeklindedir.

1. İstenen tahrik kuvvetine ait cevaplar.
2. Çevresel gürültü gibi çevreden gelen istenmeyen tahrik kuvvetlerine ait cevaplar.
3. Ölçüm gürültüsü olarak da bilinen ölçümden kaynaklanan belirsizlikler.

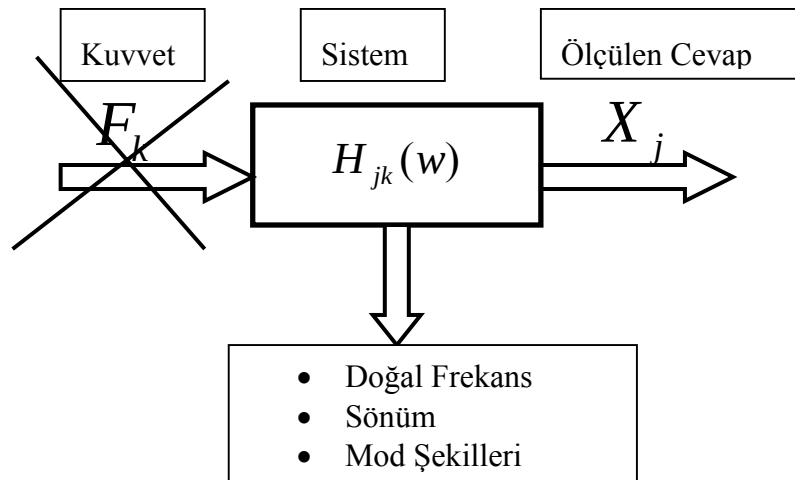
Geleneksel Modal Analizde ölçülen cevaplar tahrik kuvvetine bağlıdır. Dolayısıyla diğer etkileri minimize etmek için tahrik kuvveti oldukça güçlü olmalıdır. Bu yapılara güçlü tahrik uygulamak için yeterli tahrik araçları mevcuttur fakat bunları kullanmak kolay değildir ve zaman alıcıdır.

Sonuç olarak tahrik uygulamaya gerek kalmadan sistemlerin gerçek çalışma şartları altındaki dinamik özelliklerinin belirlenebilmesini hedefleyen çalışma şartlarındaki modal analiz yöntemleri bu süreci daha kolay ve daha ekonomik hale getirmeyi amaçlamaktadır ve uygulama için cazip gözükmemektedir. Yapılar gerçek çalışma şartlarında dışarıdan gelen çevresel etkilerle veya kendi çalışmasından dolayı oluşan kuvvetlerle tahrik edilirler. Örneğin kuleler esen rüzgâr ve aynı zamanda içinde yürüyen insanlarla [1]; köprüler, rüzgâr ve üzerinden geçen araçlar ve yayalar gibi farklı rasgele tahriklerle [2], barajlar arkalarındaki su ile kendi kendine tahrik

olmaktadır [3]. Mekanik sistemler örneğin otomobiller, trenler ve uçaklar motordan, yoldan ve rüzgârlardan kaynaklanan gürültülerle tahrik olmaktadır.

Çalışma şartlarında modal analizin bir diğer avantajı da sistemlerin gerçek çalışma şartları altındaki dinamik özelliklerinin belirlenebilmesidir. Sistemlerin herhangi bir tahrik elemanı ile tahrik edilip, durdurulup daha sonra tekrar tahrik edilmesine gerek kalmayacaktır. Bu tekniğin sınırlaması ise istenmeyen tahriklerin yapıdaki tüm modları düzgün bir şekilde tahrik edebilmesidir. Bunu dikkate alarak bu istenmeyen tahriklerin karakteristiklerini analiz etmek uygun olacaktır.

İstenmeyen tahrikler sistemimizde gürültülere neden olurlar ve ölçümlere kendi kuvvetleri nedeniyle az veya çok etki yaparlar. Doğadaki birçok değişik olaylar bu gürültülere sebep olmaktadır. Gürültü sinyalleri hiçbir kurala uymayan rasgele proses örneğidir. Bu açıklamalar çok bilinen rasgele sinyal olan beyaz tahrik tanımlamasına yaklaşmaktadır. Çalışma şartlarındaki modal analiz tekniklerinin bir varsayımı, sistemlerin bu beyaz tahrik ile yüklendiğidir. Beyaz tahrik sinyali yapıdaki tüm frekansları tahrik edebilmekte ve oldukça düz bir spektruma sahiptir. Dolayısıyla beyaz tahrik sinyalinin güç spektrumu uygun bir tahrik olarak herhangi bir sistemde kullanılabilir. Çalışma Şartlarında Modal Analiz (ÇŞMA) genel anlamda bakılacak olursa sisteme etkiyen kuvvetleri ölçmeden sistem parametrelerinin belirlenmesini hedefler. Bu sistem parametreleri, sisteme ait doğal frekanslar, sönüm ve mod şekilleridir. Girdi olarak da yapı üzerinden ölçülen titreşimler kullanılmaktadır. Özetle, Şekil 1.1’de gösterildiği gibi yapının çalışma anında üzerinden ölçülen bu titreşimler kullanılarak sistemin dinamik özellikleri belirlenmeye çalışılmaktadır.



Şekil 1.1: Sistem Belirleme Şematik Gösterimi

1.2 Literatür Araştırması

Geçen 10 yıl içerisinde sistem özelliklerini belirlemek için araştırmacılar tarafından farklı ÇŞMA yöntemleri geliştirilmiştir ve birçok farklı duruma uygulanmıştır. 1995 de G.H.James [4] sistemlerin çalışma şartlarında fiziksel parametrelerini bulmak için Doğal Tahrik tekniklerini kullanmıştır. Aynı zamanda L. Hermans ve H. Van Der Auweraer [5] yine çalışma şartlarında yapıdaki modal parametreleri belirlemek için bazı metotlar üzerine çalışmışlardır. R.Brinner [6] Frekans Alanında Ayırıklaştırma Tekniğini ve daha sonra Geliştirilmiş Frekans Alanında Ayırıklaştırma Tekniğini [7] ortaya koymuştur. Aynı zamanda literatürde ÇŞMA için farklı zaman alanı yöntemleri [8] geliştirilmiştir. Örneğin Olasılık Alt Uzay Yöntemi gibi [9]. ÇŞMA yöntemleri birçok araştırmacı tarafından birçok farklı yapılar için sistemi belirlemek amacıyla kullanılmıştır. Örneğin rüzgâr türbinleri [10], binalar [11], araba gövdesi [12], [13], [14] ve gemiler [15].

Önerilen bütün ÇŞMA teknikleri arasında Frekans Alanında Ayırıklaştırma (FAA) ve Olasılık Alt Uzay Yöntemi en çok bilinen ve kullanılan yöntemlerdir. FAA, ölçülen cevapların işlenmesinde Kompleks Mod Belirleme Fonksiyonları metodunu [16] kullanır ve sonra basit Tepe Seçme metoduyla yapının doğal frekanslarını ve mod şekillerini belirler. Dolayısıyla bu metot kullanım kolaylığı açısından avantajlı gözükmemektedir ve daha az karmaşık hesaplamalar içermektedir. Diğer taraftan Olasılık Alt Uzay yöntemi ölçümlerdeki zaman verisini kullanır ve yapılardaki modları zaman alanında belirler. Bu yöntem 3 ana kategoriye ayrılır. Bunlar, ‘Principal Component (PC)’, ‘Unweighted Principal Components (UPC)’ ve ‘Canonical Variate Analysis (CVA)’ olarak adlandırılmıştır. Bu yöntemler FAA yöntemine göre daha karmaşık ve zaman alan bir yöntemdir. Bu yöntemle ilgili daha detaylı bilgiler [8], [9], [10], [11], [17] referanslarında mevcuttur. Literatürde çalışma şartlarında modal analiz ile ilgili birçok çalışma bulunmaktadır. Aşağıda literatüre ön plana çıkan çalışmaların kısa bir özeti verilmiştir.

1995 yılında George H. James [4], çalışma anındaki bir rüzgâr türbinine Doğal Tahrik Yöntemini uygulayarak modal test yapmıştır. İlk olarak 1990 yılından itibaren olan gelişmeleri ve sonuçları derleyip Doğal Tahrik Yöntemine genel bir bakış yaparak teorisinden bahsetmiştir, daha sonra doğal tahrik yöntemiyle ilgili yeni bir türetme elde ederek bunu analitik olarak elde edilmiş bir veri ile doğrulamıştır. Buna

ek olarak geleneksel modal analizden elde edilen çalışmaz durumdaki rüzgâr türbini sonuçlarını çalışır durumdaki sonuçlar ile karşılaştırmıştır. Doğal Tahrik Yöntemini, dönüş devrinin bir fonksiyonu olarak modal parametreleri hesaplamada kullanmıştır.

R. Brincker ve P. Andersen, 2000 yılında yaptıkları çalışmada [6] sisteme etki eden tahrik kuvvetlerini bilmeden modal parametreleri belirlemeye dayanan ve frekans alanında bir teknik olan Frekans Alanında Ayırıklaştırma yöntemini açıklamıştır. Kullanışlı olan bu teknik, geleneksel modal analizde modal parametreleri belirlemeye dayanan basit tepe seçme tekniğiyle ilişkilidir. Bu teknikle birbirine yakın modların, cevaplar yüksek derecede gürültü içerse bile yüksek bir doğrulukla belirlenebileceğini göstermiştir.

R. Brincker ve P. Andersen yine 2000 yılında yaptıkları çalışmada [14] motordan gelen doğal tahrik sonucu araba gövdesinin modal analizini yapmışlardır. Burada parametrik olmayan Frekans Alanında Ayırıklaştırma yöntemiyle, parametrik bir teknik olan ve zaman alanındaki ham veriyi kullanan Olasılık Alt Uzay tabanlı metodu kullanmışlardır. Her iki tekniğin sonuçlarının geçerliliği karşılaştırılmıştır. Burada motorun devrinin değişmesiyle araba gövdesi doğal bir tahrike maruz bırakılmıştır ve bu tahrik ölçülmemiştir ve şasi üzerinden de titreşim verileri alınmıştır.

Maria Ana Baptista [2], 2005 yılında çevresel etkilerle titreşimlerin ölçülmesini kule ve baraj gibi farklı yapılara uygulamıştır. Bu yapıların doğal frekansları, mod şekilleri ve sönüm oranları hem Frekans Alanında Ayırıklaştırma hem de Olasılık Alt-Uzay yöntemiyle bulunması amaçlanmaktadır. Her bir yapının sonlu elemanlar modeli geliştirilmiştir ve deneysel sonuçlarla bu güncellenmiştir. Deneysel ve sayısal olarak elde edilen bu sonuçlar daha sonra karşılaştırılmıştır. Sonuç olarak yapıların çevresel etkilerle tahrik edilmesi sonucu elde edilen modal parametreler doğru bir şekilde tahmin edilmiştir ve sonlu elemanlar modeliyle aralarında iyi bir korelasyon sağlanmıştır. Her bir yapı için elde edilen bu modal parametreler ilerde yapısal hataların kontrol edilebilmesinde kullanılabilmektedir.

2007 yılındaki bir çalışmada [18] ise M. Teimouri çamaşır makinesinin çalışması esnasındaki modal parametreleri bulma yönünde çalışmıştır. Sonuçları karşılaştırmak ve geçerliliğini kontrol etmek için birçok tahrik testleri uygulanmıştır. Bunların ilkinde çamaşır makinesini çalışmaz durumda iken metal çekiçe gövdesinden rasgele

darbelerle tahrik etmiştir ve bu tahrikleri ölçmemiştir. Bunun yapılmasındaki asıl amaç ÇŞMA metodlarının doğruluğunu karşılaştırmak ve bu testle geçerliliğini kontrol etmektir. İkinci ÇŞMA testinde çamaşır makinası gerçek çalışma koşullarında sıkma adımıyla çalıştırılmıştır. Geliştirilmiş Frekans Alanında Ayırıklaştırma (GFAA) ve Olasılık Alt Uzay tabanlı metodlarının her ikisinde çamaşır makinasının modlarını belirlemek için kullanılmıştır. Her iki metotla da 0-55 Hz arasındaki gövde modlarının doğal frekansları, sönüm oranları ve mod şekilleriyle birlikte belirlenmiştir. Çalışma şartlarındaki modal analiz cevapları geleneksel modal analizle (çekiç testi) karşılaştırılmıştır. Olasılık Alt Uzay tabanlı metod, stabilizasyon diyagramının kullanılmasının avantajını sağlamıştır, ki bu yapıdaki gerçek modların ayrılmasını sağlamada önemli bir araç olmuştur. Fakat kullanım kolaylığı ve düşük hesaplama maliyetiyle GFAA yönteminin de hayli önemli olduğu vurgulanmıştır. Sonuçlar harici bir tahrik olmadan yapının çalışma şartlarında modal analiz ile belirlenebileceğinin elverişliliğini kanıtlamıştır. Çalışmadan çıkan bir diğer sonuç ise yapısal modların frekanslarının sistemin dönen parçalarının dönüş frekansına (çalışma frekansı) yakın olmaması durumunda rahatlıkla belirlenebileceğidir.

Literatürde Çalışma Şartlarında Modal Analiz için geliştirilen yöntemler iki grupta toplanmıştır. Bunlar Zamana bağlı ve Frekansa bağlı yöntemlerdir.

1.2.1 Zaman Alanı Yöntemleri

1.2.1.1 Doğal Tahrik Yöntemi

1990'ların başında, doğal tahrikle ve sadece cevap ölçümleriyle modal parametreleri belirlemek için Doğal Tahrik Yöntemi (DTY) (Natural Excitation Technique) önerilmiştir [19]. DTY doğal bir tahriğe maruz kalan yapıdaki cevaba korelasyon fonksiyonunun uygulanmasını öne sürmektedir. DTY öznel ve çapraz korelasyon fonksiyonlarının azalan sinüsoidlerin toplamı şeklinde ifade edilebileceğini gösterir. Her bir sinüsoid, sönümlü doğal frekansa, sönüm oranına ve mod şekli katsayısına sahiptir ki bu herhangi bir ilgili yapısal modla ilişkilidir. Sonuç olarak korelasyon fonksiyonu modal parametreleri belirlemek için Darbe Tepki Fonksiyonu (DTF) olarak kullanılır. Bu yüzden, geleneksel deneysel modal analiz için geliştirilen çok-giriş/çok-çıkışlı zaman alanı modal belirleme yöntemleri çalışma şartlarında modal analiz için uyarlanabilir.

Geleneksel deneysel modal analizde kullanılan üç önemli zaman alanı çok-giriş/çok-çıkış algoritması ÇŞMA için de kullanılmaktadır:

- 1982 de geliştirilen Çoklu Referans Karmaşık Ekspansiyel, (Polyreference Complex Exponential) [20] tek-giriş/çok-çıkış En Küçük Kareler Yöntemi Karmaşık Ekspansiyel'in (Least Squares Complex Exponential) [21] çok-giriş/çok-çıkış (ÇGÇÇ) uzantısı olarak.
- Özsystem Gerçekleştirme Algoritması (Eigensystem Realization Algorithm) lineer sistem analizlerindeki sistem belirleme teorisinden uyarlanmıştır ve modal parametreleri bulmada 1984 de uygulanmıştır [22].
- 1985'de gerçekleştirilen İbrahim Zaman Alanı'nın (İbrahim Time Domain) [23] ÇGÇÇ versiyonu olan Geliştirilmiş İbrahim Zaman Alanı (Extended İbrahim Time Domain)[24].

Darbe Tepki Fonksiyonu (DTF) verisine bulaşan parazitin etkisini azaltmak için 1987 de Zaman Tepki Fonksiyonu verisinin korelasyonunu kullanan ve Çoklu Referans Karmaşık Ekspansiyelin gelişmiş olan Geliştirilmiş Çoklu Referans Tekniği (Improved Polyreference Technique) önerilmiştir [25]. Bunu 1988'de Özsystem Gerçekleştirme Algoritması'nın veri korelasyon tekniği olan Özsystem Gerçekleştirme Algoritması-Veri Korelasyon (Eigensystem Realization Algorithm – Data Correlation) [26] takip etmiştir.

Belirtildiği gibi doğal tahrik türü modal parametreleri belirleme yöntemleri Geleneksel Modal Analizden (GMA) uyarlanmıştır. Ancak, ÇŞMA'de modal parametreleri belirlemek için kullanılan verilerin olasılıksal proses olan rasgele cevaplar olduğu kabul edilir. Çoklu Referans Karmaşık Ekspansiyel, Geliştirilmiş İbrahim Zaman Alanı, Özsystem Gerçekleştirme Algoritması v.b. gibi temel geleneksel modal parametreleri belirleme algoritmaları Geleneksel Modal Analiz için geliştirilmesine rağmen ÇŞMA için de kullanılabilir. Ancak teoride ve bazı formülasyonlarda farklılıklar meydana gelmektedir. Çoklu Referans Karmaşık Ekspansiyel ve Geliştirilmiş İbrahim Zaman Alanı yöntemleri Darbe Tepki Fonksiyonundan modal parametreleri belirlemeye dayanır. ÇŞMA'de modal parametreleri belirlemek için kullanılan temel formülasyon, DTF matrisinin yerine korelasyon matrisinin modal ayrıştırılmasıdır.

Yukarıda belirtildiği gibi Doğal Tahrik Yöntemi'nin temeli, sisteme beyaz-gürültü şeklinde bir tahrik uygulandığında cevap sinyalleri arasındaki öznel ve çapraz korelasyon fonksiyonlarının darbe-tepki fonksiyonu olarak kullanılabilmelerine dayanır. Bu özellik, düşük sönümlü ve doğal frekansların yeterince ayırık olduğu lineer sistemler için geçerlidir.

Yöntemin daha iyi anlaşılabilmesi için lineer bir sistemin modal özelliklerinin nasıl elde edilebileceği ile ilgili bazı formülasyonların verilmesi yararlı olacaktır. Çok serbestlik dereceli sönümsüz lineer bir sistem ele alındığında hareket denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (1.1)$$

Burada $[M]$ ve $[K]$ matrisleri sırasıyla kütle ve direngenlik matrisleri, $\{f\}$ ve $\{x\}$ vektörleri ise kuvvet ve yer değiştirme vektörleridir.

$\{f(t)\} = 0$ kabul edilerek serbest titreşim çözümü yapılabilir. Bu durumda aşağıdaki gibi bir çözümün varlığı kabul edilebilir.

$$\{x(t)\} = \{X\}e^{i\omega t} \quad (1.2)$$

Değişkenler yerine konduğunda (1.1) denklemi

$$([K] - \omega^2 [M])\{X\}e^{i\omega t} = \{0\} \quad (1.3)$$

$$[M]^{-1}[K]\{X\} = \lambda\{X\} ; \quad \lambda = \omega^2$$

halini alır.

Denklem (1.3)'de verilen standart özdeğer problemi çözümünden doğal frekanslar ve mod şekilleri bulunabilir [27].

Burada verilmesi gereken önemli bir özellik de ortogonalite özellikleridir.

$$[\Phi^T][M][\Phi] = [m], \quad [\Phi^T][K][\Phi] = [k] \quad (1.4)$$

Denklem (1.4)'de verildiği gibi sistemin $[\Phi]$ özvektörleri kütle ve direngenlik matrislerine göre ortogonallığı sağlar [27].

Çok serbestlik dereceli viskoz sönümlü bir sistem ele alındığında ise hareket denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f\} \quad (1.5)$$

Burada $[C]$ matrisi sönüm matrisidir.

Dinamik eşitliğin sonucu, $[\Phi]$ 'nin kombinasyonu şeklinde denklem (1.6)'daki şekilde yazılabilir.

$$\{x(t)\} = \sum_{r=1}^N \{\phi_r\} q_r = [\Phi]\{q(t)\} \quad (1.6)$$

İfadede, $\{q\}$, modal koordinatların vektörü ve $[\Phi]$ de sistemin N tane özvektörünü kapsayan ve aşağıdaki özdeğer problemini sağlayan bir matristir.

$$([K] - \omega_r^2 [M])\{\phi_r\} = 0 \quad (1.7)$$

Denklem (1.5)'deki dinamik eşitlik artık denklem (1.8)'deki şekilde yazılabilir.

$$[M][\Phi]\{\ddot{q}(t)\} + [C][\Phi]\{\dot{q}(t)\} + [K][\Phi]\{q(t)\} = \{f\} \quad (1.8)$$

Denklem (1.8)'i $[\Phi]^T$ mod şekli matrisiyle çarparsak, denklem (1.9)'daki ifadeyi elde ederiz.

$$[\Phi^T][M][\Phi]\{\ddot{q}(t)\} + [\Phi^T][C][\Phi]\{\dot{q}(t)\} + [\Phi^T][K][\Phi]\{q(t)\} = [\Phi^T]\{f\} \quad (1.9)$$

Sistemin $[\Phi]$ öz modları kütle ve direngenlik matrislerine göre ortogonalliği sağlar.

$$[\Phi^T][M][\Phi] = [m] \text{ ve } [\Phi^T][K][\Phi] = [k] \quad (1.10)$$

Denklem (1.10)'daki ifadede $[m]$ ve $[k]$ sırasıyla modal kütle ve direngenlik matrisleridir ve köşegendirler.

Belirtmelidir ki Denklem (1.7)'e göre modal kütle ve direngenlik matrisleri arasında $k_r / m_r = \omega_r^2$ ilişkisi vardır.

Sistemin doğal frekanslarının birbirinden yeterince ayrı olduğu ve düşük sönüm oranlarına sahip olduğu varsayımıyla, sistemin gerçek modlarının, sönümlü sistemin

modlarıyla aynı olduğu sonucuna varılabilir, buradan hareketle $[\Phi]$ öz modları, $[C]$ sönüm matrisini köşegenleştirmek için kullanılabilir. Ayrıca $[C]$ matrisinin $[K]$ ve $[M]$ matrisleri ile orantılı olduğu durumlarda da sönümsüz modlar $[C]$ matrisine göre ortogonaldır.

$$[\Phi]^T [C] [\Phi] = [c] \quad (1.11)$$

Burada $[c]$ modal sönüm matrisidir.

Sonuç olarak sistemin ayrıklaştırılmış dinamik denklemleri aşağıdaki şekilde elde edilmiş olur [28].

$$[m]_{N \times N} \{\ddot{q}(t)\}_{N \times 1} + [c]_{N \times N} \{\dot{q}(t)\}_{N \times 1} + [k]_{N \times N} \{q(t)\}_{N \times 1} = [\Phi]_{N \times 1}^T \{f\} \quad (1.12)$$

Denklem (1.12), r'inci mod için denklem (1.13)'daki şekilde yazılabilir.

$$m_r \ddot{q}_r(t) + c_r \dot{q}_r(t) + k_r q_r(t) = \{\phi_r\}^Y \{f(t)\} \quad (1.13)$$

Bu ifadede $\{\phi_r\}$, r'inci mod şekli vektörüdür. Denklem (1.13)'u, r'inci modal kütle olan m_r 'ye bölünürse denklem (1.14) elde edilir.

$$\ddot{q}_r(t) + 2\zeta_r \omega_r \dot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) = \frac{1}{m_r} \{\phi_r\}^Y \{f(t)\} \quad (1.14)$$

İfadede ζ_r ve ω_r sırasıyla r'inci modun sönüm oranı ve doğal frekansdır.

Denklem (1.14)'ün çözümü aşağıdaki gibi verilebilir.

$$q_r(t) = \int_{-\infty}^t \{\phi_r\}^T \{f(\tau)\} g_r(t - \tau) d\tau \quad (1.15)$$

Burada $g_r(t)$ tek serbestlik dereceli sistemin darbe tepki fonksiyonudur.

$$g_r(t) = \frac{1}{m_r \omega_r^d} e^{-\zeta_r \omega_r t} \sin(\omega_r^d t) \quad (1.16)$$

$\omega_r^d = \omega_r (1 - \zeta_r^2)^{1/2}$, sönümlü doğal frekanstır.

Denklem (1.15) ve (1.6)'yi kullanarak $\{x(t)\}$ tepki vektörü, modal cevapların toplamı olarak ifade edilebilir.

$$\{x(t)\} = \sum_{r=1}^N \{\phi_r\} \{\phi_r\}^T \int_{-\infty}^t \{f(\tau)\} g_r(t-\tau) d\tau \quad (1.17)$$

Denklem (1.17), k koordinatındaki bir $f_k(t)$ kuvvetinden dolayı oluşan i koordinatındaki bir $x_{ik}(t)$ cevabı için aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$x_{ik}(t) = \sum_{r=1}^N \phi_{ri} \phi_{rk} \int_{-\infty}^t f_k(\tau) g_r(t-\tau) d\tau \quad (1.18)$$

k girişi ve i çıkışı arasındaki darbe tepki fonksiyonu olan $f(\tau)$ fonksiyonunun $\tau=0$ zamanında birim fonksiyon olduğu varsayımıyla elde edilmiştir. Bu durumda k noktasındaki bir darbeden kaynaklanan i noktasındaki cevap, modal darbe tepkilerinin toplamı olarak yazılabilir [28].

$$x_{ik}(t) = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_{ri} \phi_{rk}}{m_r \omega_r^d} e^{-\zeta_r \omega_r t} \sin(\omega_r^d t) \quad (1.19)$$

$R_{ijk}(T)$, k noktasındaki beyaz gürültü girişi sonucu oluşan i ve j noktalarındaki x_{ik} ve x_{jk} cevaplarının çapraz korelasyon fonksiyonları olsun. $R_{ijk}(T)$ 'nin x_{ik} ve x_{jk} 'nin bir faz farkıyla çarpımı olması gerekir.

$$R_{ijk}(T) = E[x_{ik}(t+T)x_{jk}(t)] \quad (1.20)$$

$$R_{ij}(T) = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_{ri} A_{rj}}{m_r \omega_r^d} e^{-\zeta_r \omega_r T} \sin(\omega_r^d T + \Theta_r) \quad (1.21)$$

Sonuç olarak denklem (1.21)'de görüldüğü gibi çapraz korelasyon fonksiyonlarının aslında, orijinal sistemin darbe tepki fonksiyonlarına benzer olarak azalan sinüsoidlerin lineer kombinasyonları olduğu görülür. Buna göre, çapraz korelasyon fonksiyonları darbe tepki fonksiyonları gibi işlem görebilir ve zaman tanım bölgesi modal parametreleri ortaya çıkarma teknikleri uygulanabilir [28].

Burada ϕ_{ri} i noktasının r 'inci modu, m_r modal kütle, ζ_r ve ω_r sönüm oranı ve sönümsüz doğal frekans, Θ_r ise faz açısıdır.

Bu son sonuç göstermektedir ki, bir T zaman aralığında i deki referans sinyaliyle j deki tepki sinyali arasındaki $R_{ij}(T)$ çapraz korelasyon fonksiyonu, N tane azalan sinüsoidin toplamı olarak yazılabilir. Her azalan sinüsoid, yapının ω_r doğal frekansı ve ζ_r sönüm oranıyla karakterize edilir [27].

1.2.1.2 Oto-Regresyon Hareketli Ortalama Yöntemi (ORHOY) (Auto-Regression Moving Average)

Önemli geleneksel sistem belirleme tekniklerinden biri Hata Tahmini metodudur (HTM) [29]. Bu metoda dayanan birçok algoritma geliştirilmiştir. Bu algoritmalar modeldeki parametreleri, hataları minimize ederek bulmayı amaçlamaktadır. HTM yönteminin bir uzantısı olan ORHOY yöntemi çalışma şartlarındaki modal parametreleri belirlemek için kullanılabilir. ÇŞMA metotlarından biri olan HTM-ORHOY 1990'ların ortalarında önerilmiş ve uygulanmıştır [30]. HTM-ORHOY tip ÇŞMA yöntemlerinin iki önemli dezavantajı vardır: (1) Fazla hesaplama ihtiyacı duyar, (2) büyük boyutlu yapılarda uygulaması zordur.

1.2.1.3 Olasılık Tabanlı Metot (OTM) (Stochastic Realization Based)

Sistem belirleme metodları 1960'lı yıllarda geliştirilmeye başlanmıştır. 1970'lerde geliştirilen Olasılıksal Sistem Gerçekleştirme (Stochastic System Realization) [31] , Ayrık Zaman Olasılık Durum-Uzay denkleminde dayanmaktadır ve 1980'lerin ortalarında modal parametreleri belirlemede uygulanmaya başlanmıştır [32]. Olasılıksal Sistem Gerçekleştirmenin en önemli özelliği, deterministik sistem gerçekleştirmedeki DTF matrisinin yerine kovaryans matrisinin sistem ayrıklaştırılmasıdır. Kovaryans iki değişkenin beraber değişimlerini inceleyen bir istatistiktir. İki değişkenin de merkezi eğilimlerinden birbirlerine bağlı olarak sapmalarını gösterir. x ve y vektörlerinin kovaryans matrisi aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$Cov(x, y) = E(xy) - E(x)E(y)$$

Burada E beklenen değeri temsil etmektedir.

Sistemin özdeğerleri geleneksel modal analiz için DTF matrisinin, ÇŞMA için kovaryans matrisinin Tekil Değerlerine Ayırıştırılması (TDA) yolu ile hesaplanır. Olasılık Tabanlı Metotlar aynı zamanda Kovaryans-Olasılık Alt Uzay Belirleme Metodları olarak da bilinir.

Olasılık Tabanlı Metot veya Kovaryans-Olasılık Alt Uzay Belirleme yöntemlerinin üç önemli uygulama metodu vardır: (1) Esas Bileşenler (EB) metodu, (2) Kanonik Değişken Analiz (KDA) metodu ve (3) Ağırlıklandırılmamış Esas Bileşenler (AEB) metodu. EB metodunda, Tekil Değerlerine Ayırştırmak için Henkel Kovaryans matrisinden direk olarak yararlanılır [33].

Olasılık Tabanlı Metotta ÇŞMA işlem adımları aşağıdaki dört maddeyle özetlenebilir:

- 1) Ölçülen cevaptan kovaryans matrisinin hesap edilmesi;
- 2) Ağırlıklandırılmış Henkel kovaryans matrisinin tekil değerlerine ayırıştırılması;
- 3) En küçük kareler yöntemiyle ayrık-zaman olasılık sistem matrislerinin hesabı;
- 4) Sistem matrislerinden modal parametrelerin hesaplanması.

Bu konuda daha fazla bilgi için [31], [32], [33] ve [34] referanslarına başvurulabilir.

1.2.1.4 Olasılık Alt Uzay Belirleme Tekniği (OAUBT) (Stochastic System Identification)

1990’larda sistem ve kontrol mühendisliğinde yeni bir Alt uzay Tabanlı Durum Uzay (Subspace-Based State-Space) sistem belirleme yöntemi geliştirilmiştir. Bu yöntem direk olarak ölçülen veriden, karmaşık dinamik sistem için, nümerik olarak güvenilir ve etkin durum uzay modelini verir [35]. Bunu Olasılık Alt uzay Sistem Belirleme tekniği takip etmiştir ki bu rasgele bir tahrike maruz kalan bir sistem için sadece cevap ölçümlerini kullanır [36].

Çok serbestlik dereceli ayrık mekanik sistemin dinamik davranışı aşağıdaki denklemlerle açıklanır.

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (1.22)$$

Burada $[M]$, $[C]$ ve $[K]$ matrisleri, kütle, sönüm ve direngenlik matrisleridir. $q(t)$ ise sürekli zamanda yerdeğiştirme vektörüdür. $f(t)$ ise tahrik kuvvetidir.

Denklem (1.22)'de zaman t sürekli, fakat ölçümler ayrık zaman örneklerinde elde edilebilir. $f(t)$ tahrik kuvvetlerinden ayrı olarak bazı bilinmeyen tahrik kaynakları olabilir ve ölçüm gürültüleri her zaman gerçek verilerde mevcuttur.

Model indirgeme, örnekleme ve gürültüyü modelleme uygulandığında (1.22) denklemi ayrık-zaman olasılık durum-uzay modeline dönüştürülebilir.

$$z(t) = \begin{Bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{Bmatrix} \quad (1.23a)$$

$$\{\dot{z}(t)\} = [A]\{z(t)\} + \{w_t\} \quad (1.23b)$$

$$\{x(t)\} = [C]\{z(t)\} + \{v(t)\} \quad (1.23c)$$

Burada $x(t)$, t zamanındaki cevap vektörü (ölçümler), $z(t)$, ölçülen yer değiştirmeleri ve hızları içeren t zamanındaki durum vektörü, $w(t)$ proses gürültüsü (genellikle değişiklikler ve modelleme hatalarından ve bir de yapıdaki bilinmeyen tahriklerden kaynaklanmaktadır), $v(t)$ ölçüm gürültüsü (genellikle sensörden kaynaklanan hatalar), $[A]$ sistem matrisi (sistemin dinamiğini özdeğerleriyle karakterize eder), $[C]$ ise çıkış matrisidir [17], [37].

Alt uzay belirleme metotlarını kullanarak olasılık durum uzay modeli belirlenmektedir. Daha sonra modal parametreler $[A]$ ve $[C]$ matrislerinden elde edilmektedir. $[A]$ matrisinin özdeğer ayrıklaştırılmasıyla denklem (1.24) elde edilmektedir.

$$[A] = [\psi][\Sigma][\psi]^{-1} \quad (1.24)$$

Burada $[\psi]$ özvektör matrisi, $[\Sigma]$ ise köşegen matris olan özdeğer matrisidir. Özdeğerler (ω_i) ve sönüm oranları (ζ_i) denklem (1.25)'den bulunmaktadır.

$$\lambda_i, \lambda_i^* = -\zeta_i \omega_i \pm j\sqrt{1-\zeta_i^2} \omega_i \quad (1.25)$$

Δt : Örnekleme zamanı

Mod şekilleri ise denklem (1.26)'dan bulunmaktadır.

$$[\phi] = [C][\psi] \quad (1.26)$$

Gürültü modlarının ve harmoniklerinin yapısal modlardan ayrılabilmesi için bir stabilizasyon diyagramı kullanılır. Bu stabilizasyon diyagramında yapısal modun belirlenebilmesi için her bir model derecesinde aynı frekans bulunmalıdır. Aksi takdirde yapısal bir moddan söz edilemez. Aynı zamanda her bir doğal frekansta birbirine yakın sönüm oranları bulunmalı ve yapı yüksek sönümlü olmadığı takdirde sönüm oranı %20'yi aşmamalıdır.

Geleneksel modal analizde modal parametrelerin, matrisin tek bir satır veya sütunundan elde edilmesine dayanmaktadır. Eğer tekrarlanan köklerle ilgili problemle karşı karşıya gelindiğinde iki veya daha fazla satır veya sütunun ölçülmesi gerekmektedir. Bu, örneğin çok-giriş çok-çıkış tekniklerinin kullanılmasıyla yapılabilir. Bu da çoklu sarsıcıların kullanılmasını gerektirir.

Çalışma şartlarındaki modal analizde çapraz spektrum matrisi kullanılmaktadır. Bu matrisin derecesi, ölçülen serbestlik derecesi sayısına eşittir. Çapraz spektrum matrisi yapı üzerine 1 adet referans ivmeölçer yerleştirip diğer ivmeölçerlerin yapı üzerinde gezdirilmesi sonucu oluşmaktadır. Yapı üzerinde N adet ölçüm noktası varsa N x N ölçekli bir matris oluşmaktadır.

OAUBT'nin avantajları; (1) İlk adım olarak kovaryansın bulunmasına gerek olmadan direk olarak olasılıksal cevap verisini kullanır; (2) Sadece beyaz tahriklerde (white noise) değil aynı zamanda diğer tahriklerde de kullanılır; (3) HTM-ORHOY yöntemine göre hesaplama yoğunluğu azalmıştır.

OAUBT, modal parametreleri belirlemek için direk olarak olasılıksal cevap verisini kullanır, dolayısıyla Veriye Bağlı OAUBT olarak da bilinir. Bu yöntemle ilgili daha detaylı bilgiler [17], [34], [35], [36], [37] ve [38] referanslarında mevcuttur.

1.2.2 Frekans Alanı Yöntemleri

1.2.2.1 Frekans Alanında Ayırıklaştırma (FAA) Yöntemi (Frequency Domain Decomposition)

Frekans alanındaki ÇŞMA metotları, giriş ve çıkış Güç Spektrum Yoğunluğu (GSY) ilişkisi formülasyonuna dayanır [39] ve çapraz spektrum matrisinin Tekil Değerlerine Ayırıştırılması yoluyla gerekli sonuçlara ulaşır. Tekil değerler kutup bilgilerini (frekans ve sönüm) ve tekil vektörler ise mod şekilleri bilgisini içerir. 2000 yılında önerilen Frekans Alanında Ayırıklaştırma yöntemi sadece modal frekansları ve mod şekillerini bulurken [6], daha sonra yayınlanan FAA (Geliştirilmiş FAA) sadece modal frekansları ve mod şekillerini değil aynı zamanda sönüm oranını da belirleyebilmektedir [40]. Son zamanlarda çıkan FAA ise Frekans-Uzay Alanında Ayırıklaştırmadır [41].

Bu tezde FAA yönteminin avantaj ve dezavantajlarının ortaya konulması ve pratikte uygulanabilirliğinin kapsamlı olarak incelenmesi hedeflenmiştir. Bu yöntemin seçilmesindeki ana neden diğer yöntemlere göre daha az hesaplama ihtiyacı duyması ve pratik olarak uygulanabilirliğinin daha kolay olmasıdır. FAA yöntemiyle ilgili daha detaylı bilgiler bölüm 2’de verilmiştir.

1.2.2.2 En Küçük Kareler Yöntemi Karmaşık Frekans Metodu (Least Square Complex Frequency)

Geleneksel sistem belirlemede, gürültülü ölçümleri engellemek için Maksimum Olasılık (MO) (Maximum Likelihood) metodu geliştirilmiştir [42]. Maksimum Olasılık Frekans Alanı (MOFA) (Maximum Likelihood Frequency Domain) metodunun modal parametreleri belirlemek için FTF ölçümlerinde kullanılması 1990’ların sonlarında ortaya çıkmıştır [43]. En Küçük Kareler Yöntemi Karmaşık Frekans metodu, tekrarlanan MOFA metodunun başlangıç değerlerini bulmak için önerilmiştir [43]. Bu başlangıç değerleri daha az hesaplama ile doğru modal parametreleri bulmayı sağlamaktadır. Fakat En Küçük Kareler Yöntemi Karmaşık Frekans alanı metodunun önemli dezavantajı birbirlerine yakın olan kutupların tek bir kutup gibi görünmesidir. Daha sonra Çoklu-Referans En Küçük Kareler Yöntemi Karmaşık Frekans metodu geliştirilmiştir (Polyreference Least Square Complex Frequency) [44]. Bu metotla yukarıda bahsedilen dezavantaj ortadan kaldırılmıştır.

1.3 Çalışma Şartlarında Modal Analizin Avantaj ve Dezavantajları

1990'ların başında çalışma şartlarında modal analiz inşaat mühendisliği uygulamalarında (deniz platformları, binalar, kuleler, köprüler v.b.) önemli bir gelişme göstermiştir. Çevresel, doğal-tahrik veya sadece cevap verilerine dayanan modal analiz olarak da adı geçen çalışma şartlarında modal analiz, modal parametreleri belirlemek için çalışma koşullarında çevresel veya doğal tahrik uygulanması sonucu sadece cevapları almaya dayanır. ÇŞMA ayrıca makina mühendisliği uygulamalarında da kullanılmaya başlanmıştır (arabalar, uçaklar, dönen makineler, vb.). Ucuz ve hızlı olması, herhangi bir tahrik elemanına dolayısıyla da kuvvet sensörüne ihtiyaç duymaması en önemli avantajlarından. Herhangi bir sınır şartı sınırlaması yoktur. Tahriki zor veya ölçülmesi uygun olmayan yapılara uygulanabilmektedir. Gerçek yükleme altındaki modal karakteristikler geniş band rasgele tahrik dolayısıyla lineerize edilir. Sonuç olarak buradaki algoritma çok-giriş/çok-çıkış tipinde olacaktır ve çok yakın olan veya tekrarlanan modlar çok kolay bir şekilde belirlenecektir ve bu yüzden karmaşık yapılara oldukça uygundur. ÇŞMA sadece dinamik tasarım uygulamalarında değil, yapısal kontrol, titreşim tabanlı hataları görüntüleme ve yapılardaki hasarları bulmada da kullanılır.

Bunun yanında yöntemin dezavantajları da mevcuttur. İlk öncelikle çoğu mühendisler için yeni bir tekniktir. Yapıya ait bazı ön bilgilere ihtiyaç vardır. Çalışma şartlarında modal analizin en önemli şartlarından biri ise bir referans ivmeölçere (sensör) ihtiyaç duyulmasıdır. Bu referans ivmeölçer yapı üzerinde herhangi bir yere konmamalıdır. Herhangi bir mod şeklinde yapı üzerinde hareketsiz kalan noktalar nodal nokta olarak adlandırılır. Dolayısıyla referans ivmeölçer de bu nodal noktaların üzerinde olmamalıdır. Tam aksine tüm mod şekillerinde yapı üzerinde en fazla deplasman gördüğümüz yerlere referans ivmeölçer koyulmalıdır. Çalışma Şartlarında Modal Analiz yöntemleri yüksek veri kapasitesine ve hesaplamasına ihtiyaç duyar. ÇŞMA tabanlı modal analizin en önemli dezavantajı ise yapıya ait ölçeklendirilmemiş mod şekillerinin elde edilmesidir. Bunun nedeni ise yapıya uygulanan kuvvetin ölçülmemesinden dolayı yapıda oluşan gerçek titreşim genliklerinin hesap edilememesidir. Bu problemin çözümüyle ilgili literatürde bazı öneriler verilmiştir [45].

1.4 Kapsam

Bu tez kapsamında, bir yapının çalışma şartlarında dinamik özelliklerinin belirlenmesine yönelik olarak bir literatür araştırması yapılmış, daha önce bu alanda yapılan araştırmalar incelenerek bu metotların pratikte uygulanabilirliği incelenmiştir. İncelenen metotlar arasından Frekans Alanında Ayırıklaştırma yöntemi seçilmiş ve bu metot üzerine çalışmalar yapılmıştır. Bu alanda öncelikle MATLAB programında bir yazılım geliştirilmiştir. Yazılımın ve metodun doğrulanması amacı ile sonucu bilinen uygulamalar üzerinde çalışılmış daha sonra deneysel uygulamalarla metodun ve geliştirilen programın sınanması ve doğrulanması pekiştirilmiştir. En sonunda ise çalışır durumdaki çamaşır makinasına uygulanarak pratikte uygulanabilirliği sınanmıştır. Bu metoda göre ilk önce yapının üzerinde bir tane referans sensör olmak kaydıyla yapı üzerinden titreşim ölçümleri alınmış, daha sonra bu ölçümlerin çapraz spektrumları alınmış ve Tekil Değerlerine ayrılarak yapıya ait modal parametreler belirlenmeye çalışılmıştır. Gerekli işlemlerin yapılması için MATLAB yazılımından yararlanılmış ve bu işlemler için bir program yazılmıştır. Sayısal uygulamalarda ise sonlu elemanlar programı olarak I-DEAS ve dinamik simülasyon programı olarak da ADAMS yazılımları kullanılmıştır.

Tezin ilk bölümünde literatür araştırması ve amaçlara yer verilmiş, ÇŞMA yöntemleri sınıflandırılmış ve gelişimlerinden bahsedilmiş ve literatür araştırmasının sonuçları değerlendirilmiştir.

İkinci bölümde, bu tez çalışmasında uygulanmak üzere seçilen Frekans Alanında Ayırıklaştırma yönteminin adımları ve teorisi üzerinde durulmuştur.

Üçüncü bölümde, çalışma şartlarında modal analiz yönteminin sayısal uygulamalarına yer verilmiştir. Sayısal modele ilk başta geleneksel modal analiz uygulanarak (kuvvetler ölçülerek) yapının modal parametreleri belirlenmiştir. Daha sonra bilinmediği kabul edilen bir kuvvet uygulanarak yapıdan titreşimler alınmıştır. Bu amaçla ilk başta üç serbestlik dereceli bir kütle yay sistemi ele alınmış ve sonuçları geleneksel modelle karşılaştırılmıştır. Yöntemin hangi koşullarda geçerli hangi koşullarda geçersiz olduğu açıklanmıştır. Daha sonra bu yöntem düz bir plakaya uygulanarak yöntemin geçerliliği sağlanmıştır.

Dördüncü bölümde ise deneysel uygulamalarla metodun ve geliştirilen programın sınanması ve doğrulanması yapılmıştır. Kiriş ve düz bir plakaya kuvvet uygulayarak

ve bu kuvveti ölçerek geleneksel modal analiz uygulanmış ve modal parametreler belirlenmiştir. Daha sonra bu kuvvet ölçülmeden çalışma şartlarında modal analiz uygulanarak geleneksel modelle karşılaştırılmıştır. En sonunda ise çamaşır makinesinden çalışma anında üzerinden titreşimler alınmış ve dinamik özellikleri belirlenerek geleneksel modelle karşılaştırılmıştır ve pratikte uygulanabilirliği sınanmıştır.

Beşinci ve son bölümde, tezin genel değerlendirmesi yapılmış ve gelecekte yapılabilecek çalışmalar belirtilmiştir.

2 . FREKANS ALANINDA AYRIKLAŞTIRMA YÖNTEMİ

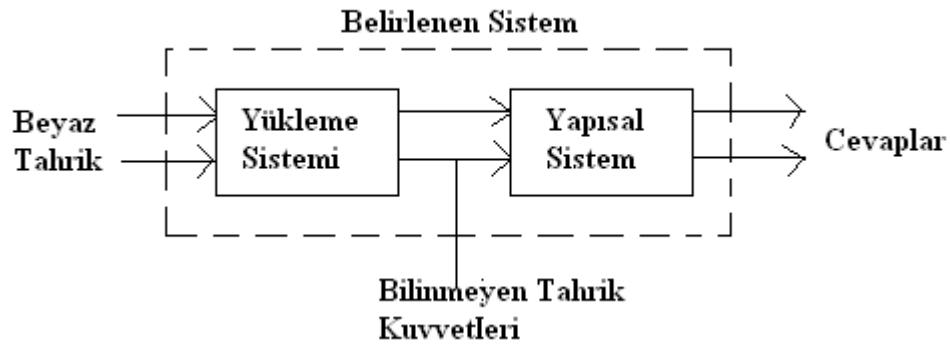
2.1 Giriş

Bu tezde detaylı olarak araştırılan ve kullanılan çalışma şartlarında modal analiz yöntemi “Frekans Alanında Ayırıklaştırma” yöntemidir. Frekans Alanında Ayırıklaştırma (FAA) tekniği, Temel Frekans Alanı (Basic Frequency Domain) veya Tepe Seçme (Peak Picking) tekniğinin bir uzantısıdır. Bu yöntemle modlar, girişin Beyaz Tahrik ve yapının az sönümlü olması farz edilerek spektral yoğunluk matrislerinin hesaplanmasıyla belirlenmektedir.

Sadece cevapları kullanarak analiz yapabilmek aşağıdaki nedenlerden dolayı daha karmaşıktır.

- Tahrik (giriş) bilinmemektedir.
- Ölçülen cevap sıklıkla gürültülüdür.

Bilinmeyen kuvvetlerin, Beyaz tahrik ile yüklenen sanal bir sistem tarafından üretildiği varsayılır. Şekil 2.1’de görüldüğü gibi beyaz tahrikin yapısal sistemi direk olarak tahrik ettiği varsayılmaz, fakat toplam sistem gerçek yapısal sistemi ve sanal kuvvet sistemini içerir.



Şekil 2.1: Birleşik Dış Etkilere Dayanan Model

Sonuç olarak bu yaklaşımla sadece yapısal sistem belirlenmez, aynı zamanda sanal kuvvet sistemine ait bazı modlar da belirlenir. Dolayısıyla bu yöntemin uygulanmasında takip edilen yol bütün modları belirlemek ve sonra yapısal modları,

gürültü ve tahrik modlarından ayırmaktır. Bu tür testlerde yapılardan alınan cevaplar genelde çok küçük ve gürültülüdür.

Tipik bir modal test lineer, zamandan bağımsız mekanik bir sistem için giriş ve çıkışı ölçmeye dayanır. Tahrik, geçici (Modal çekiç testi), rasgele veya sinüsoidal (sarsıcı testi) olabilir. Çalışma şartlarında modal analiz tekniği ise ODS (Operational Deflection Shape) ölçüm prosedürleri ile aynıdır ki bir ivmeölçer referans olarak kullanılır ve diğer ivmeölçerlerden ilgilenilen noktalardan ölçüm alınır. Tüm modları tanımlayabilmek için tahrik geniş bant olmalıdır. Çalışma şartlarındaki modal analizin becerisi, gerçek yapısal davranışı gürültüden ve diğer ölçülen kaynaklardan ayırt edebilmektir [38].

2.2 Sinyal İşleme ve Ayrıklaştırma

Analizin ilk adımı olarak, tüm modal bilgileri içeren spektral yoğunluk matrislerini elde etmek için ham zaman verisine ayrık Fourier transformu uygulanır. Tahrikin geniş bant ve sürekli bir spektrum olmasından dolayı spektral yoğunluk matrislerine bakmak gerekir. Bu teknik spektral gürültüleri ve diğer etkileri minimize eder.

Tüm ölçümler için spektral yoğunluk matrisleri hesaplanır. Bu matrisler, bir adet ivmeölçer sabit olmak şartıyla (referans) diğer ivmeölçerlerin yapı üzerinde gezdirilmesi sonucu oluşur. Burada hesaplanan referans ivmeölçeri ile gezici ivmeölçerler ve aynı zamanda gezici ivmeölçerlerin kendi aralarındaki spektral yoğunluk fonksiyonlarıdır. Matrislerin boyutları $m \times m$ olacaktır (m : ivmeölçer sayısı). Matrislerin köşegen üzerindeki elemanları cevapların güç spektral yoğunlukları, köşegen dışındaki elemanlar ise cevaplar arasındaki çapraz spektral yoğunluklarıdır (Şekil 2.2). Bütün bu matrisler Hermitian (köşegen etrafındaki elemanlar simetrik ve birbirlerinin kompleks eşleniği) matristir.

Her bir matris her bir ölçümde Denklem 2.1'deki gibi güç ve çapraz spektrum yoğunlukları şeklinde ifade edilir.

$$[G_{yy}(j\omega)]_i = \begin{bmatrix} PSD_{11}(j\omega) & CSD_{12}(j\omega) & . & . & . & CSD_{1m}(j\omega) \\ CSD_{21}(j\omega) & PSD_{22}(j\omega) & & & & CSD_{2m}(j\omega) \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ CSD_{m1}(j\omega) & CSD_{m2}(j\omega) & . & . & . & PSD_{mm}(j\omega) \end{bmatrix}_i \quad (2.1)$$

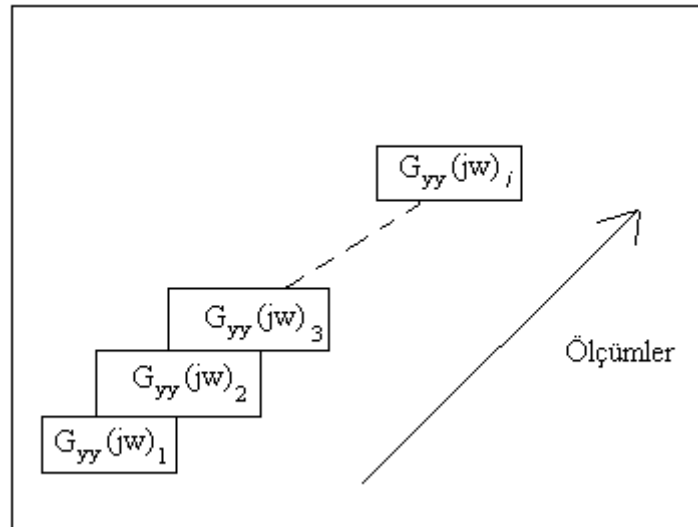
$PSD(j\omega)$: Güç Spektral Yoğunluk

$CSD(j\omega)$: Çapraz Spektral Yoğunluk

i : Ölçüm Sayısı

m : İvmeölçer Sayısı

Matrislerin Hermitian ($CSD_{pq}(j\omega) = CSD_{qp}^*(j\omega)$, $p \neq q$, $*$: Kompleks Eşlenik) olmasından dolayı $PSD_{pp}(j\omega)$ gerçel değerler, ölçüm ve referans noktası arasındaki faz bilgisini taşıyan $CSD_{qp}(j\omega)$ ise kompleks değerler alır.



Şekil 2.2: Cevaplar Arasındaki Çapraz Spektral Yoğunluk Matrisi Elemanları

Spektral matrisler Tekil Değerlerine Ayırıştırma yöntemiyle, Özel Spektral Yoğunluk Fonksiyonlarına (Auto Spectral Density Functions) ayrıştırılır. Her biri tek serbestlik dereceli bir sistemi ifade eder. Bu sonuçlar, tahrikin beyaz tahrik, yapının az sönümlü ve yakın modların mod şekillerinin geometrik olarak ortogonal olduğu durumlarda tam doğru sonuç verir. Eğer bu varsayımlar gerçek sistem ile uyuşmuyorsa yaklaşık sonuçlar bulunabilir [38].

2.3 Güç ve Çapraz Spektrumların Elde Edilmesi

Güç ve Çapraz spektrumların elde edilebilmesi için ilk etapta zaman sinyali ölçülür. Daha sonra bu zaman verisine Fourier Transformu uygulanarak zaman sinyallerinin frekans alanındaki spektrumları elde edilir. Bu frekans alanındaki spektrumlar kullanılarak güç ve çapraz spektrumlar hesaplanır.

Matematiksel olarak Güç Spektrumu, sinyalin kendisi ile kompleks eşleniğinin çarpılması ile elde edilir. Güç spektral yoğunluğu ise (2.2) denkleminde gösterildiği gibi sinyalin kendisi ile kompleks eşleniğinin çarpımının frekans çözünürlüğüne bölünmesi sonucu hesap edilir.

$$GSY = (S_{xx})_k = \frac{X_k^* X_k}{\Delta f} = \frac{|X_k|^2}{\Delta f} \quad (2.2)$$

X_k^* : X_k 'nın kompleks eşleniği

$$\Delta f = \frac{1}{T} \text{ (Hz) (frekans çözünürlüğü)} \quad (2.3)$$

T : Periyot (sn)

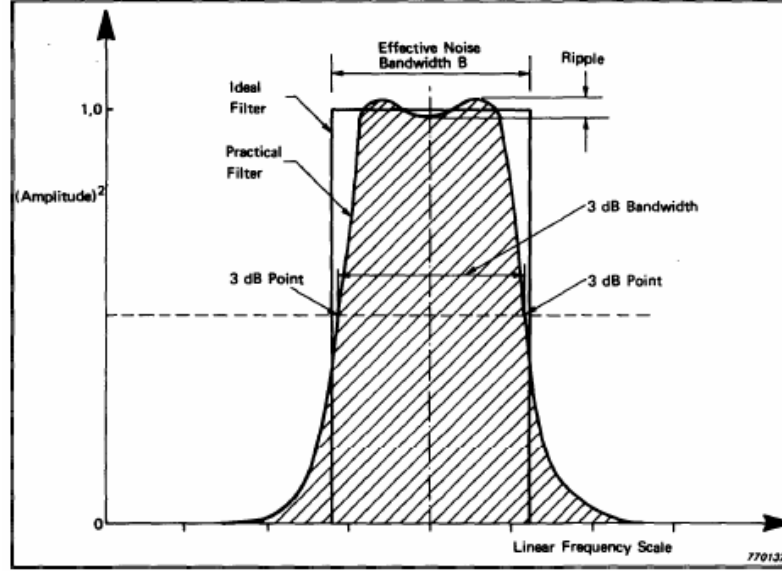
Çapraz Spektrum Yoğunluğu (ÇSY) ise iki farklı sinyal kullanılarak elde edilebilir (Cross Spectrum Density). Bu da aynı şekilde (2.4) denkleminde gösterildiği gibi ilk sinyalin kompleks eşleniğinin ikinci sinyalin kendisine çarpımının frekans çözünürlüğüne bölünmesi ile hesap edilir.

$$\text{ÇSY} = (S_{xy})_f = \frac{X_f^* Y_f}{\Delta f} \quad (2.4)$$

X_f^* : X_f 'in kompleks eşleniği

Sinyalde sadece istenilen frekans bölgesini incelemek diğer bölgeleri ortadan kaldırmak için filtreler kullanılmaktadır. Pratikteki filtrelerle ideal filtreler birçok yönden birbirlerinden ayrılırlar. Bunlardan biri de Şekil 2.3'den de anlaşılacağı gibi etkin filtre bant genişliği etkisidir [46]. Bu etkiyi ortadan kaldırmak ve ideal filtreye

yaklaşmak için seçtiğimiz pencere fonksiyonuna bağlı olarak frekans çözünürlüğü Tablo 2.1’de gösterilen bir ölçekleme faktörüyle çarpılır.



Şekil 2.3: Pratik ve İdeal Filtre [46]

Tablo 2.1: Pencere Fonksiyonlarının Frekans Alanındaki Karakteristikleri [46]

Window	Noise Band-width
Rectangular	Δf
Hanning	$1,5 \Delta f$
Kaiser-Bessel	$1,80 \Delta f$
Flat Top	$3,77 \Delta f$

Tablo (2.1)’den de anlaşılabileceği gibi örneğin Hanning pencere fonksiyonunda bu ölçekleme faktörü 1.5’dir. Dolayısıyla bu pencere fonksiyonu kullanıldığında Güç ve Çapraz Spektrumları denklem (2.5) ve (2.6)’daki son hallerini alır.

$$GSY = (S_{xx})_k = \frac{X_k^* X_k}{1.5\Delta f} = \frac{|X_k|^2}{1.5\Delta f} \quad (2.5)$$

$$\text{ÇSY} = (S_{xy})_f = \frac{X_f^* Y_f}{1.5\Delta f} \quad (2.6)$$

Çalışma Şartlarında Modal Analizde kuvvetin bilinmemesinden dolayı mod şekilleri normalize edilememektedir. Dolayısıyla da Güç ve Çapraz spektrumların frekans çözünürlüğüne bölünmesinin elde edilen mod şekilleri üzerinde önemi yoktur.

2.4 Frekans Alanında Ayırıklaştırma Yöntemi Teorisi

Frekans Alanında Ayırıklaştırma tekniği modal parametreleri direk olarak sinyal işleme hesaplamalarından belirler. Bu teknik, titreşim modlarını, her bir spektral yoğunluk matrislerine Tekil Değerlerine Ayırıştırma yöntemini uygulayarak hesaplar. Bu ayırıştırma her bir tekil değerde sistemin tek serbestlik dereceli olarak belirlenmesini uygun kılar.

Giriş $x(t)$ ve cevap $y(t)$ arasındaki ilişki denklem (2.7)'deki şekilde yazılabilir [39]

$$[G_{yy}(\omega)]_{m \times m} = [H(\omega)]_{m \times r}^* [G_{xx}(\omega)]_{r \times r} [H(\omega)]_{m \times r}^T \quad (2.7)$$

Burada $[G_{xx}(\omega)]$ giriş güç spektrum matrisi ki bu durağan sıfır ortalama beyaz tahrik girişi durumunda sabittir ve bu sabit C ile ifade edilecektir. r ise giriş sayısını belirtmektedir. $[G_{yy}(\omega)]$ cevap güç spektrumu matrisidir. m ise cevap sayısını belirtmektedir. $[H(\omega)]$ Frekans Tepki Fonksiyonu (FTF) matrisidir. '*' ve 'T' üstsimgeleri kompleks eşlenik ve transpozu ifade eder. Denklem (2.7)'de görüldüğü gibi $[G_{yy}(\omega)]$, giriş sabiti C' ye çok duyarlıdır. Bundan sonraki denklemler ve tek serbestlik dereceli sistem belirlemesi, sadece girişin sabit bir değer olarak varsayılmasıyla geçerli olacaktır.

Denklem (2.8)'de gösterildiği gibi FTF matrisi klasik modal analizde olduğu gibi kutup ve artıklar şeklinde ifade edilebilir.

$$[H(\omega)] = \sum_{k=1}^m \frac{[R_k]}{j\omega - \lambda_k} + \frac{[R_k]^*}{j\omega - \lambda_k^*} \quad (2.8)$$

$$\lambda_k = -\sigma_k + j\omega_{dk} \quad (2.9)$$

Burada; m toplam mod sayısı, λ_k k'inci modun kutbu, σ_k modal sönüm, ω_{dk} k'inci modun sönümlü doğal frekansıdır ve denklem (2.10)'daki şekilde ifade edilebilir.

$$\omega_{dk} = \omega_{0k} \sqrt{1 - \zeta_k^2} \quad (2.10)$$

$$\zeta_k = \frac{\sigma_k}{\omega_{0k}} \quad (2.11)$$

Denklem (2.11)'de ise ζ_k k'inci mod için sönüm oranı ve ω_{0k} k'inci mod için sönümsüz doğal frekanstır.

$$[R_k] = \psi_k \gamma_k^T \quad (2.12)$$

Denklem (2.12)'de ψ_k k'inci modun mod şekli, γ_k ise k'inci modun modal katılım vektörüdür. Giriş beyaz tahrik olarak düşünülürse, Güç Spektral Yoğunluk matrisi sabit bir matris olarak ele alınır ($G_{xx}(j\omega) = C$) ve denklem (2.7) şu hali alır:

$$G_{yy}(\omega) = \sum_{k=1}^m \sum_{s=1}^m \left[\frac{R_k}{j\omega - \lambda_k} + \frac{R_k^*}{j\omega - \lambda_k^*} \right] C \left[\frac{R_s}{j\omega - \lambda_s} + \frac{R_s^*}{j\omega - \lambda_s^*} \right]^H \quad (2.13)$$

Burada üstsimge H kompleks eşleniğin transpozunu ifade etmektedir. Denklem (2.7)'deki $[G_{yy}]$ ifadesini kullanarak ve bazı matematiksel işlemlerle cevap Güç Spektrum Matrisi Denklem (2.14)'teki gibi yazılabilir [6].

$$G_{yy}(\omega) = \sum_{k=1}^m \frac{[A_k]}{j\omega - \lambda_k} + \frac{[A_k]^*}{j\omega - \lambda_k^*} + \frac{[B_k]}{-j\omega - \lambda_k} + \frac{[B_k]^*}{-j\omega - \lambda_k^*} \quad (2.14)$$

Burada $[A_k]$, $[G_{yy}]$ matrisinin k'inci artık matrisidir. Bu matris Hermitian bir matristir ve denklem (2.15)'teki şekilde ifade edilir.

$$[A_k] = [R_k] C \sum_{s=1}^m \frac{[R_s]^H}{-\lambda_k - \lambda_s^*} + \frac{[R_s]^T}{-\lambda_k - \lambda_s} \quad (2.15)$$

k'inci mod için artığın katkısı denklem (2.16) ile ifade edilir:

$$[A_k] = \frac{[R_k] C [R_k]^H}{2\sigma_k} \quad (2.16)$$

Burada σ_k , $\lambda_k = -\sigma_k + j\omega_k$ kutbunun gerçel kısmının eksi işaretlisidir. Hafif sönümlü bir model düşünüldüğünde, modal katkı matrisi, mod şekli vektörüyle orantılı olur ve denklem (2.17)'deki ifade elde edilir.

$$\lim_{damping \rightarrow light} [A_k] = [R_k]C[R_k]^T = \psi_k \gamma_k^T C \gamma_k \psi_k^T = d_k \psi_k \psi_k^T \quad (2.17)$$

d_k skalar bir sabittir. Belirli bir frekansta (ω), genellikle 1 veya 2 mod belirli bir şekilde katkıda bulunur. Bu modlar $Sub(\omega)$ ile belirtilir. Sonuç olarak, hafif sönümlü yapılar için Cevap Spektral Yoğunluk matrisi denklem (2.18)'deki son hali ile ifade edilir [6].

$$[G_{yy}(\omega)] = \sum_{k \in Sub(\omega)} \frac{d_k \psi_k \psi_k^T}{j\omega - \lambda_k} + \frac{d_k^* \psi_k^* \psi_k^H}{j\omega - \lambda_k^*} \quad (2.18)$$

Bu son haldeki matris formu, Tekil Değerlerine Ayırıştırma tekniği kullanılarak tekil değerlere ve tekil vektörlere ayrıştırılır. Bu ayrıştırma, problemin tek serbestlik dereceli modelini belirlemek için yapılır.

2.4.1 Tekil Değerlere Ayırıştırma

Frekans Alanında Ayırıştırma tekniği Güç Spektrum Yoğunluk matrislerine uygulanmaktadır. Bu nedenle ilk adım Güç Spektrum Yoğunluk matrislerinin belirlenmesidir. Daha sonra her bir ayırık frekansta belirlenen ($\omega = \omega_i$) bu Güç Spektrum Yoğunlukları $[G_{yy}(\omega)]$ tekil değerlerine ayrıştırılır. Tekil Değerlerine Ayırıştırma (TDA), istikrarsız matrislerin ve problemlerin incelenmesinde de oldukça etkili bir sayısal araçtır. TDA Metodu kullanılarak bir matrisin tekil değerleri bulunabilmekte ve yine bu metot ile bir matrisin tersi alınabilmektedir.

$m \times n$ kompleks bir matris olan $[A]$ matrisinin tekil değerlerine ayrıştırılması denklem (2.19) ile ifade edilir.

$$[A]_{m \times n} = [U]_{m \times m} [\Sigma]_{m \times n} [V]_{n \times n}^H \quad (2.19)$$

Burada $[A]$ matrisi kompleks olduğundan $[U]$ ve $[V]$ matrisleri unitary matristir ($UU^* = U^*U = I_n$). A matrisinin reel olduğu durumda ise $[U]$ ve $[V]$ matrislerinde

ortogonallık söz konusudur. $[U]$ matrisinin kolonları sol tekil vektörler, $[V]$ matrisinin kolonları ise sağ tekil vektörlerdir, $[\Sigma]$ ise tekil değerleri içeren köşegen (diagonal) matristir. Bu matris N adet tekil değer içerir. Tekil değerlerin sayısı matrisin rankının belirlenmesi açısından büyük önem taşımaktadır. $[A]$ matrisinin rankı $[\Sigma]$ matrisindeki sıfır olmayan tekil değerlerin sayısı kadardır [38].

$$[U] = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_m] \quad (2.20)$$

$$[V] = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n] \quad (2.21)$$

$$[\Sigma] = \text{diag}(S_1, \dots, S_r) \quad (2.22)$$

$$r = \min(m, n)$$

Denklem (2.22)'deki $[\Sigma]$ matrisi içerisindeki S_r elemanlarına tekil değerler denir ve bunların tekil vektörleri ise denklem (2.20) ve (2.21)'deki $[U]$ ve $[V]$ matrislerindedir.

Adı geçen tekil değer ve vektörlerin bulunması için matrisin reel ve boyutunun $m > n$ olduğu varsayılırsa $[A^T A]$ matrisi ($n > m$ halinde $[AA^T]$ alınacaktır) $n \times n$ boyutunda kare, simetrik ve pozitif belirlidir. $[A^T A]$ Matrisinin özdeğerleri için $\lambda_1 = S_1^2, \lambda_2 = S_2^2, \dots, \lambda_n = S_n^2$ olarak yazılabilir. Aralarındaki ilişki pozitif belirlilikten dolayı $S_1 \geq S_2 \geq \dots \geq S_r > 0$ ve $S_{r+1} = S_{r+2} = \dots = S_n = 0$ şeklindedir. Burada $r = \text{Rank}(A^T A)$, bulunan tekil değerler ise $[A^T A]$ matrisinin özdeğerleridir ve bunlara karşılık gelen özvektörler $v_1, v_2, \dots, v_n$ olarak bulunabilir. Bu tekil vektörler, $[V]$ matrisinin kolonlarını sağ tekil vektörler olarak oluştururlar. $V_1 = (v_1, \dots, v_r)$, $V_2 = (v_{r+1}, \dots, v_n)$ olarak yazılabilir. Buradaki v_1 'den v_r 'e kadar olan vektörler sıfırdan farklı $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ özdeğerlerine karşılık gelmektedir. Diğer grupta kalan $v_{r+1}, \dots, v_n$ sıfır özdeğerlere karşılık gelen vektörlerdir. Sıfırdan farklı u_i sol tekil vektörler ise denklem (2.23)'deki ifade ile elde edilir [47]. Herhangi bir matrisin tekil değerlerine ayrıştırılması işlemi **Ek A**'da verilmiştir.

$$u_i = \frac{1}{s_i} A v_i, \quad i = 1, \dots, r \quad (2.23)$$

Tekil Değerlerine Ayırıştırmanın bir başka avantajı ise kare olmayan matrislerin de terslerinin alınabilmesini sağlamasıdır. TDA Metoduna öre göre herhangi bir $[A]$ matrisinin tersi denklem (2.24)'de verilmiştir [48].

$$[A]_{M \times N}^+ = [V]_{M \times M} [\Sigma]_{M \times N}^+ [U]_{N \times N}^T \quad (2.24)$$

Bu denklemde verilen $[\Sigma]_{M \times N}^+$ ifadesinin açıklaması ise aşağıda verilmektedir.

$$[\Sigma]_{M \times N}^+ = \text{diag}(s_1^{-1}, s_2^{-1}, s_3^{-1}, \dots, s_r^{-1}, 0, 0, \dots, 0) \quad (2.25)$$

Bu arada, ilgilenilen matris kompleks olduğundan denklemdeki transpoze işlemi yerine kompleks eşlenik transpoze işlemi yapmak gerekecektir.

2.5 Doğal Frekans ve Mod Şeklinin Hesap Edilmesi

Şekil (2.4)'de gösterildiği gibi Tekil Değerlerine Ayırıştırma, Bölüm 2.2'de açıklandığı gibi oluşturulan her bir matrise her bir frekansta uygulanır. Matrisler Hermitian ve öz değerleri sifıra eşit veya büyük olduğundan (positive semi-definite matrix) tekil değerlere ayırıştırma sonucu Güç Spektrum Matrisi denklem (2.26)'deki şekilde ifade edilebilir [38].

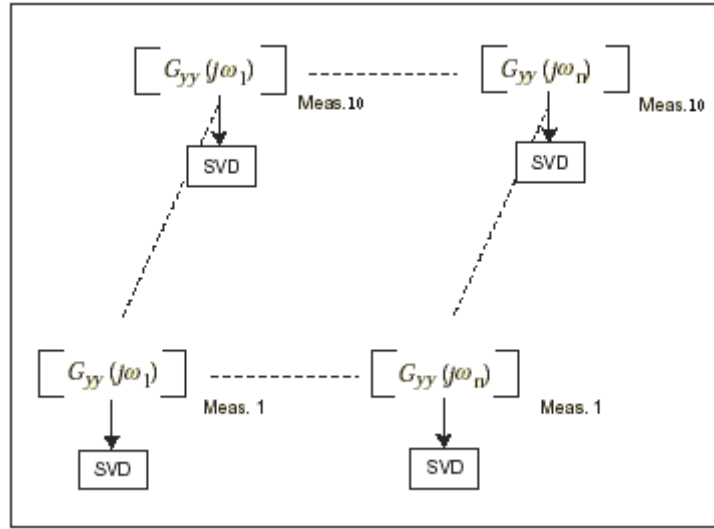
$$[G_{yy}(j\omega)] = [U][\Sigma][U]^H \quad (2.26)$$

$$[U]^H [U] = [I]$$

Denklem (2.27)'da gösterilen $[\Sigma]$ tekil değerler matrisinden doğal frekanslar, (2.28)'da gösterilen ve unitary matris olan $[U]$ tekil vektörler matrisinden ise mod şekilleri elde edilir ve her bir sütunu $\{u\}$ vektörü şeklinde yazılabilir.

$$[\Sigma]_{m \times n} = \text{diag}(S_1, \dots, S_r) = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 0 & S_2 & 0 & . & . & . & . & . \\ 0 & . & S_3 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & S_r & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

$$[U] = [\{u_1\} \quad \{u_2\} \quad \{u_3\} \quad . \quad . \quad \{u_r\}] \quad (2.28)$$



Şekil 2.4: Her bir frekansta güç spektrum yoğunluk matrislerinin tekil değerlerine ayrıştırılması prosedürü [38]

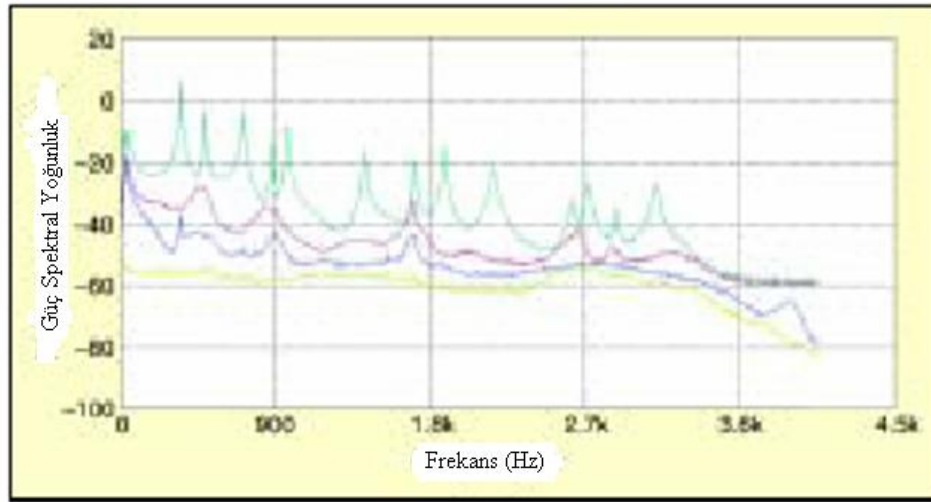
Denklem (2.27)'deki S değişkeni tekil değerleri göstermektedir. Bu sayılar ilk tekil değerden itibaren küçülerek devam ederler ve belli bir noktadan sonra en baştaki tekil değere göre ihmal edilebilecek kadar küçük bir değere ulaşırlar. Belirli bir toleranstan sonraki tekil değerler ihmal edilir ve geri kalan tekil değerlerin sayısı da matrisin etkin rankını belirlemektedir.

Tekil değerlere ayrıştırma işlemiyle mod şekillerini elde etme esnasında ilgili k 'inci mod yakınındaki tepede bir mod veya olası yakın bir başka mod baskın olabilir. Eğer sadece k 'inci mod baskınsa denklem (2.18)'de sadece bir terim olacaktır. Sonuç olarak bu durumda Denkkem (2.29)'daki gibi ilk tekil vektör u_{i1} mod şeklini verecektir [6].

$$[\phi] = u_{i1} \quad (2.29)$$

Tekil matristeki sıfır olmayan köşegen elemanlar her bir spektral yoğunluk matrisinin rankını verir. Tekil vektörler mod şekillerinin belirlenmesini sağlar, tekil değerler ise tek serbestlik dereceli sistemin spektral yoğunluklarıdır.

Şekil 2.5'deki grafik herhangi bir ölçüme ait spektral yoğunluk matrisinin tekil değerlerine ayrıştırılması sonucunu göstermektedir. Grafikte x eksenini frekansı, y eksenini ise güç spektral yoğunluğu göstermektedir. Her bir spektral yoğunluk matrisinden ivmeölçer sayısı kadar tekil değer ve tekil vektör elde edilir. Bulunan tekil değerler matrisindeki ilk tekil değer en büyük ve sonra gelenler azalarak devam edecektir.



Şekil 2.5: Tekil değerlere ayrıştırma sonucu elde edilen grafik [38]

Genliği en yüksek olan eğri ilk tekil değer ve geri kalan 3 eğri ise diğer tekil değerleri göstermektedir. Alınan ölçüm noktalarının çokluğuna göre daha fazla tekil değerler olabilir. Bu teknikle fark edilemeyen yakın modlar belirlenebilir. Eğer belirli bir frekansta sadece bir mod baskınsa, bu durumda sadece bir tekil değer o frekansta baskın olacaktır. Birbirine yakın veya tekrarlanan modlarda, ne kadar birbirine yakın veya tekrarlanan mod varsa o kadar baskın tekil değer olacaktır.

Tekil değerlere ayrıştırma yöntemiyle elde edilen her bir tek serbestlik dereceli sistem, doğal frekansların ve mod şekillerinin (ölçeklendirilmemiş) her bir tepede belirlenmesini sağlar. Matematiksel türetmeden elde edilen artıklar giriş kuvvetine

göre ölçeklendirilmemiştir ve dolayısıyla ölçeklendirilmiş mod şekilleri vektörleri elde edilemez [38].

2.6 Geliştirilmiş Frekans Alanında Ayırıklaştırma Yöntemiyle Sönümün Hesap Edilmesi

Her bir modun sönüm bilgisi ve doğal frekansları korelasyon fonksiyonlarının belirlenmesine dayanan Geliştirilmiş Frekans Alanında Ayırıklaştırma yöntemi kullanılarak bulunabilir. Geliştirilmiş FAA tekniği, öznel ve çapraz korelasyon fonksiyonlarını hesaplayarak belirli bir moddaki doğal frekansı ve sönümünü bulmaya dayanır. Önceden hesaplanan öznel ve çapraz spektrumlara Ters Ayırık Fourier Transformu uygulanarak, zaman bölgesine dönülerek rezonans tepesi etrafında tek serbestlik dereceli güç spektrum yoğunluk fonksiyonu belirlenir. Sönüm, ilgili tek serbestlik dereceli normalize edilmiş öznel korelasyon fonksiyonunun logaritmik azalma miktarından elde edilir [40].

k'inci modda sönümün elde edilebilmesi için serbest azalan zaman alanı fonksiyonu (tek serbestlik dereceli sistemin korelasyon fonksiyonu) kullanılır. Logaritmik azalma δ_k denklem (2.30) ile ifade edilir [40].

$$\delta_k = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{r_0}{|r_k|}\right) \quad (2.30)$$

Burada r_0 korelasyon fonksiyonunun başlangıç değeri, r_k ise k. tepedir. k'inci mod için sönüm oranı ise denklem (2.31) ile ifade edilir.

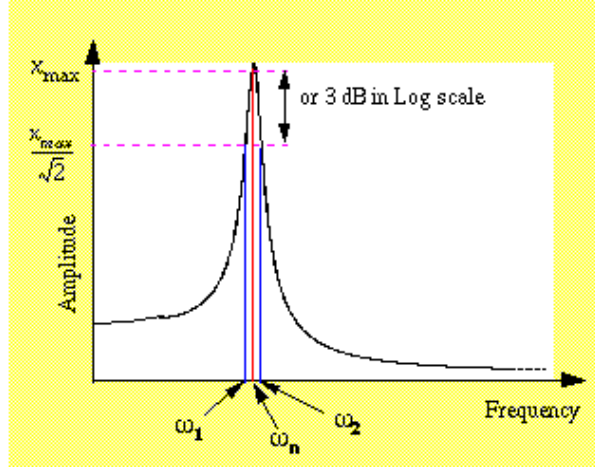
$$\zeta_k = \frac{\delta_k}{\sqrt{\delta_k^2 + 4\pi^2}} \quad (2.31)$$

k'inci mod için sönümsüz doğal frekans ise denklem (2.32)'de verilmiştir.

$$\omega_k = \frac{\omega_{dk}}{\sqrt{1 - \zeta_k^2}} \quad (\omega_{dk} : \text{sönümlü doğal frekans}) \quad (2.32)$$

Bu yöntemden ayrı olarak sönümü bulmanın daha basit ve hızlı olan bir diğer yolu ise yarım bant genişliği yöntemini uygulamaktır. Bu yöntemde göre yapı üzerinden

alınan titreşim verilerine (frekansa bağlı genlik eğrileri) her bir mod etrafında bu yarım güç bant genişliği yöntemi uygulanır.



Şekil 2.6: Mod Etrafındaki Yarım Bant Genişliği

Bu yöntemle sönüm oranı, denklem (2.33)'de verildiği gibi doğal frekans tepesinden 3db aşağıda eğriyi kesen noktaların farkları alınarak doğal frekansın 2 katına bölünerek bulunur.

$$\zeta_c = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2 * \omega_n} \quad (2.33)$$

2.7 ÇŞMA İle İlgili Sayısal İşlemler

Bölüm 2.5'de bahsedildiği gibi elde edilen matrislerin Hermitian ve pozitif yarı belirli olmasından dolayı tekil değerlere ayrıştırma sonucu Güç Spektrum Matrisinin denklem (2.26)'deki şekilde ifade edilebileceği söylenmişti. Bu yüzden burada biraz daha detaylandırılması gereken bir konu da Pozitif Belirli Matrisler (Positive Definite Matrix) ve bu matrislerin özellikleridir. Tamamı sıfır olmayan herhangi bir $\{x\}$ vektörü için ($\{x\} \neq 0$), $n \times n$ kompleks bir matris olan A matrisinin pozitif belirli olabilmesi için; $\{x\}^* [A] \{x\} > 0$ şartını sağlıyor olması gerekmektedir. Burada x^* , x vektörünün kompleks eşleniğinin transpozunu ifade etmektedir. A matrisi reel ise; $\{x\}^T [A] \{x\} > 0$ halini alır. Burada x^T , x vektörünün transpozudur. Eğer $\{x\}^* [A] \{x\} \geq 0$ şartı sağlanıyorsa A matrisi pozitif yarı belirlidir (positive semi definite matrix). Pozitif belirli bir matrisin determinanı da her zaman pozitiftir [49].

Bu ifadeler kinetik enerjinin tanımından ileri gelmektedir $\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$. Çok serbestlik dereceli bir kütle-yay sistemi ele alınırsa denklem (2.34)'de gösterildiği gibi kinetik enerjisi her zaman sıfırdan büyüktür.

$$\frac{1}{2}\{v\}^T[M]\{v\} > 0 \quad (2.34)$$

Aynı şekilde potansiyel enerji ele alınacak olursa denklem (2.35)'de gösterildiği gibi yine sıfırdan büyük olacaktır.

$$\frac{1}{2}\{x\}^T[K]\{x\} \geq 0 \quad (2.35)$$

Denklem (2.36)'deki gibi eğer kütlelerdeki yer değiştirmeler birbirine eşit olursa $\{x\}^T[K]\{x\}$ sıfıra eşit olur. Dolayısıyla direngenlik matrisi pozitif yarı belirli matris olabilir.

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad x_1 = x_2 = x_3 \Rightarrow \{x\}^T[K]\{x\} = 0 \quad (2.36)$$

Herhangi bir kompleks A matrisin pozitif belirli olması için gerekli ve yeter koşul Denklem (2.37)'de verildiği gibi matrisin Hermitian bölümünün

$$A_H = \frac{1}{2}(A + A^H) \quad (2.37)$$

pozitif belirli olmasıdır. Burada A^H , A matrisinin kompleks eşleniğinin transpozunu ifade eder. Reel bir matrisin ise denklem (2.38)'de verildiği gibi simetrik bölümünün pozitif belirli olması gerekir [49].

$$A_S = \frac{1}{2}(A + A^T) \quad (2.38)$$

Hermitian veya simetrik bir matrisin pozitif belirli olması için özdeğerlerinin pozitif olması gerekir. Kompleks Hermitian bir matrisin özdeğerleri her zaman reeldir. Genel bir kompleks matrisin pozitif belirli olması için ise Hermitian bölümünün

özdeğerlerinin pozitif olması gerekir. **Ek B**'de bununla ilgili sayısal bir örnek verilmiştir.

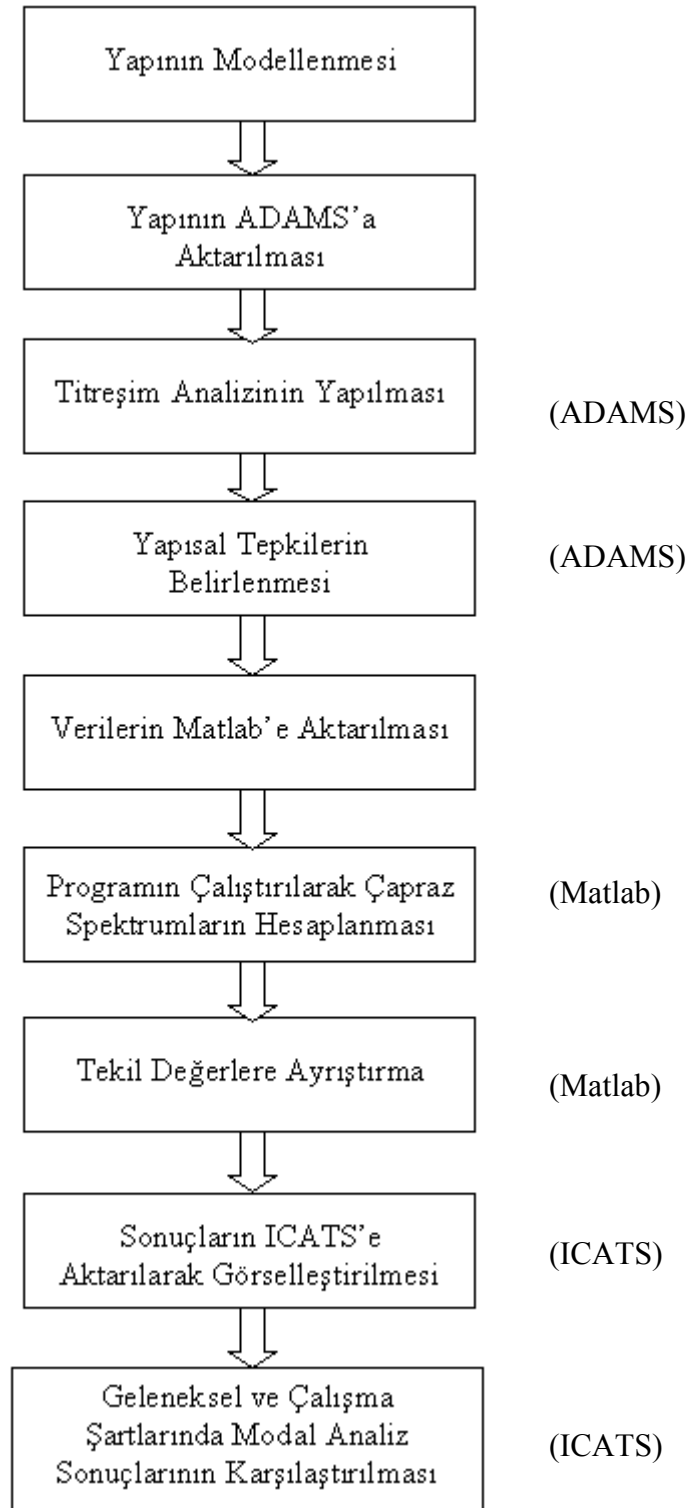
$[A]$ ve $[B]$ matrisleri pozitif belirli ise $[A]+[B]$ matrisi de pozitif belirlidir. Pozitif belirli bir matrisin tersi de her zaman pozitif belirlidir.

Hermitian bir $[A]$ matrisinin pozitif belirli olması için gerekli (fakat yeterli değil) koşullar [49]:

- 1) Bütün i ler için $a_{ii} > 0$ olmalı. (a_{ii} : Matrisin köşegen üzerindeki elemanları)
- 2) $a_{ii} + a_{jj} > 2R[a_{ij}]$ $i \neq j$ ($R[a_{ij}]$: Matrisin köşegen dışındaki elemanlarının reel kısmı)
- 3) En büyük eleman köşegen üzerinde olmalıdır.
- 4) $\det(A) > 0$

2.8 Frekans Alanında Ayırıklaştırma Yönteminin Akış Şeması

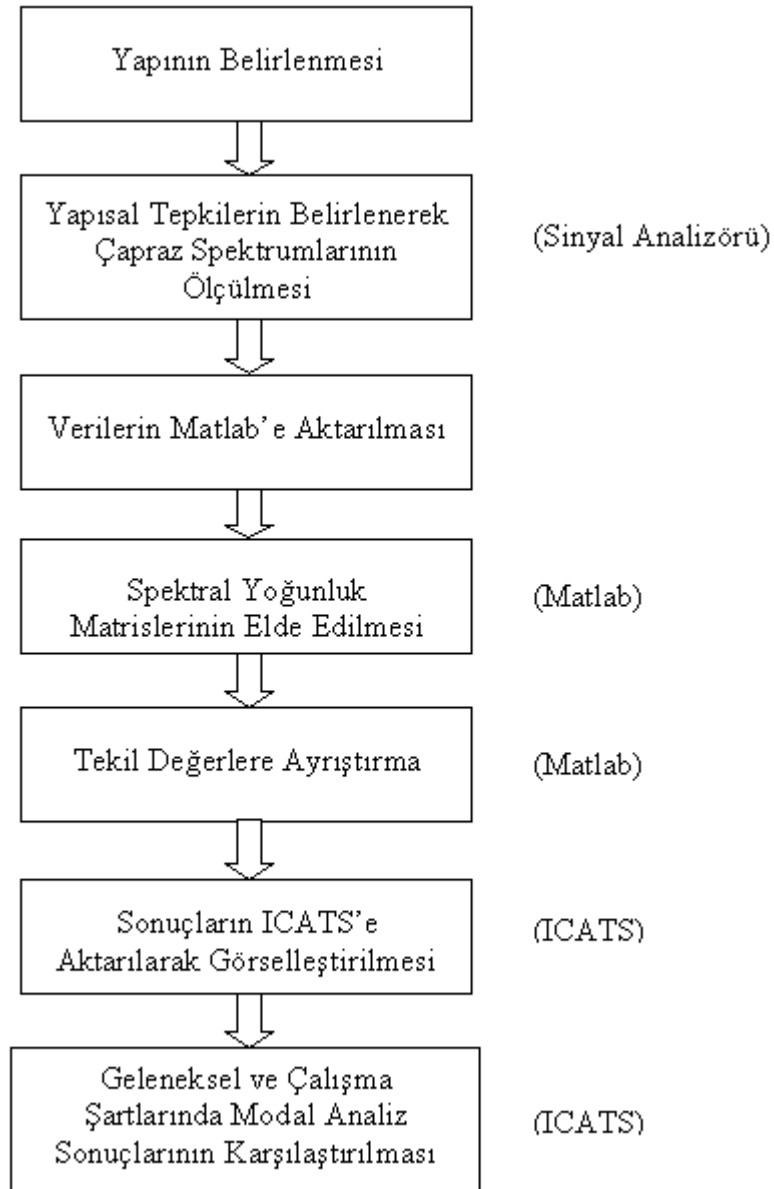
Tezde uygulanan Frekans Alanında Ayırıklaştırma yöntemi sayısal ve deneysel çalışmalar olmak üzere iki ana başlıkta incelenmiştir. Sayısal çalışmalarda I-DEAS ve ADAMS programları kullanılmıştır. Yapı I-DEAS programı kullanılarak modellenmiş daha sonra ADAMS programına aktarılmıştır. Burada istediğimiz düğüm noktası üzerinden tahrik uygulanabilecek ve her bir düğüm noktası üzerinden tepki ölçülebilecek şekilde titreşim analizi yapılmıştır. Burada uygulanan tahriki ölçmeden sadece frekansa bağlı titreşim genlikleri elde edilmiştir. Daha sonra elde edilen bu veriler MATLAB ortamına aktarılmıştır. MATLAB'de yazılan bir program aracılığı ile her bir düğüm noktası üzerinden her bir frekansta alınan titreşim genliklerinin birbirleriyle çapraz spektrumları hesaplanarak spektral yoğunluk matrisleri elde edilmiş ve tekil değerlerine ayrıştırılarak tekil değerler grafiği çizilmiştir. Hesaplanan bu tekil değerler ve tekil vektörlerden doğal frekans, sönüm ve mod şekilleri matrisleri elde edilmiştir. Elde edilen bu matrisler ICATS programına atılarak mod şekillerini görselleştirilmesi sağlanmıştır. Daha sonra I-DEAS ortamında serbest sınır koşullarında geleneksel modal analiz uygulanarak elde edilen modeldeki doğal frekanslar, sönüm ve mod şekilleri ile karşılaştırılmıştır. Sayısal duruma ait Frekans Alanında Ayırıklaştırma yönteminin şematik gösterimi Şekil 2.7'de gösterilmiştir.



Şekil 2.7: Sayısal Çalışma Şartlarında Modal Analiz Yönteminin Şematik Gösterimi

Deneysel çalışmalarda ise yapı üzerine kuvvet uygulanmış (bilinmediği kabul edilerek) veya yapı çalışır durumda iken 1 adet referans ivmeölçer (sabit) olmak şartıyla diğer ivmeölçerler gezdirilerek yapı üzerindeki noktaların aralarındaki çapraz spektrumları sinyal analizöründe ölçülmüştür. Elde edilen bu veriler Matlab

programında okutularak spektral yoğunluk matrisleri elde edilmiş ve tekil değerlerine ayrıştırılmıştır. Hesaplanan tekil değerler ve tekil vektörlerden de doğal frekans, sönüm ve mod şekilleri matrisleri elde edilmiştir. Yine bu matrisler ICATS programına atılarak mod şekillerinin görselleştirilmesi sağlanmıştır. Yapıya uygulanan Geleneksel Modal Analiz (kuvvet ölçülerek) sonucu elde edilen doğal frekans, sönüm ve mod şekilleriyle karşılaştırılmıştır. Deneysel duruma ait Frekans Alanında Ayrıklaştırma yönteminin şematik gösterimi Şekil 2.8’de gösterilmiştir.



Şekil 2.8: Deneysel Çalışma Şartlarında Modal Analiz Yönteminin Şematik Gösterimi

3 . SAYISAL UYGULAMALAR

Bu bölümde Frekans Alanında Ayırıklaştırma yönteminin yanıtı önceden bilinen durumlara uygulanması ve bu yaklaşımın uygulanabilirliğinin sınırlarının belirlenmesi hedeflenmiştir. Bu bağlamda sayısal modeller üzerinde deneme uygulamalar yapılmış ve sonuçlar açıklanmıştır. Yapı üzerinden ölçülen titreşimler ve yapılan dinamik analizler sayısal ortamda gerçekleştirilmiştir. Sayısal modeller ilk olarak I-DEAS'da oluşturulmuş ve daha sonra ADAMS'a aktarılarak titreşimler hesaplanmıştır. Alınan bu titreşim verileri (yapıya uygulanan kuvvetler hariç) MATLAB'de yazılan bir programda analiz edilerek yapının çalışma şartlarındaki modal parametreleri belirlenmiştir. Aynı zamanda sayısal modellere geleneksel modal analiz uygulanarak (kuvvet ölçülerek) yapının modal parametreleri de belirlenmiş ve çalışma şartlarında elde edilen modal parametrelerle karşılaştırılmıştır.

3.1 Sayısal Model

Sayısal model kısaca bir yapının bilgisayar ortamında hazırlanmış modeli olarak tanımlanabilir. Bir sayısal model kabul edilen varsayımlar çerçevesinde gerçek yapının davranışını temsil ederek onun hakkında fikir vericidir. Sayısal modellerin oluşturulması için sıkça kullanılan yöntem Sonlu Elemanlar Metodudur. Sonlu elemanlar teorisine göre karmaşık bir yapı basit ve sonlu sayıda elemanın birleşiminden oluşmuş kabul edilir. Bu kabul, sayısal modelin gerçek yapı gibi sürekli değil de ayırık bir sistem olması demektir. Yapının ayırık elemanlardan oluşuyor olması nedeniyle ilgilenilen sistem kütle ($[M]$), direngenlik ($[K]$) ve sönüm ($[C]$) matrislerinden oluşmaktadır. Sonlu elemanların yapının geometrik şekline uygun olarak bir araya getirilmiş, aynı zamanda malzeme özelliklerini ve sınır koşullarını da kapsayan durumuna Sonlu Elemanlar Modeli (SEM) denir [50].

Gerçekte bir yapının sonsuz sayıda serbestlik derecesi bulunmaktadır. Fakat sayısal modelde bu sayı sonlu elemanların sayısı ile orantılı olarak sınırlandırılmıştır. Yapının her bir düğüm noktasında, üç adet öteleme yönüne ait ve üç adet dönmeye

ait toplam altı serbestlik derecesi vardır. Ancak, kullanılan eleman türüne göre her bir düğüm noktasındaki serbestlik dereceleri değişebilir. Dolayısıyla bu ve düğüm sayısı yapının gerçek yapı ile benzeşimini etkileyen bir faktördür. Sonuç olarak düğüm noktalarının tanımlanması kadar, bu noktaların tanımlanma biçimi de modelin vereceği sonuçlar üzerinde etkilidir [50].

Bir yapının sayısal modeli Uzaysal Model, Modal Model ve Tepki Modeli gibi değişik şekillerde ifade edilebilir. Sonlu elemanlar modeli kullanılarak yapının direngenlik, kütle ve sönüm matrisleri elde edilebilmektedir. Bu matrisler yapının Uzaysal Modelini oluştururlar.

Sönümsüz Model:

Çok serbestlik dereceli sönümsüz lineer bir sistem ele alındığında hareket denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (3.1)$$

Burada $[M]$ ve $[K]$ matrisleri sırasıyla kütle ve direngenlik matrisleri, $\{f\}$ ve $\{x\}$ vektörleri ise kuvvet ve yer değiştirme vektörleridir.

$\{f(t)\} = 0$ kabul edilerek serbest titreşim çözümü yapılabilir. Bu durumda aşağıdaki gibi bir çözümün varlığı kabul edilebilir.

$$\{x(t)\} = \{X\}e^{i\omega t} \quad (3.2)$$

Değişkenler yerine konduğunda (3.1) denklemi

$$([K] - \omega^2 [M])\{X\}e^{i\omega t} = \{0\}; \{X\} \Rightarrow \{\psi\} \quad (3.3a)$$

$$[M]^{-1}[K]\{X\} = \lambda\{X\}; \quad \lambda = \omega^2 \quad (3.3b)$$

halini alır.

Denklem (3.3)'de verilen standart özdeğer problemi çözümünden doğal frekanslar ve mod şekilleri bulunabilir [27].

Burada verilmesi gereken önemli bir özellik de denklem (3.4)'de verilen ortogonalite özellikleridir.

$$[\psi^T][M][\psi] = [m_r], [\psi^T][K][\psi] = [k_r] \quad (3.4)$$

Burada m_r ve k_r sırasıyla modal kütle ve modal direngenlik matrisleridir.

Denklem (3.4)'de verildiği gibi sistemin $[\psi]$ özvektörleri kütle ve direngenlik matrislerine göre ortogonalliği sağlar [27].

r'inci moda ait kütle normalizasyonu yapılmış mod şekli $\{\phi\}_r$ ise aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir.

$$\{\phi_r\} = \frac{1}{\sqrt{m_r}} \{\psi_r\} \quad (3.5)$$

Çalışma Şartlarında Modal Analizde mod şekillerine yukarıda gösterildiği şekilde bir normalizasyon yapabilmek mümkün değildir. Bu nedenle ÇŞMA uygulamalarında çoğu zaman birim normalizasyon kullanılmaktadır. Bu da özvektör matrisi içerisindeki elemanların matrisin en büyük elemanına bölünerek elde edilmektedir. Bu normalizasyonun kullanılmasındaki amaç mod şekillerinin, kuvvetin bilinmemesinden dolayı ölçeklendirilememesidir.

Kütle normalizasyonu yapılmış özvektörlere ait özellikler (3.6) ve (3.7) denklemleri ile verilebilir. Burada I birim matrisi, ω_r ise r'inci doğal frekansı göstermektedir.

$$[\phi]^T [M][\phi] = [I] \quad (3.6)$$

$$[\phi]^T [K][\phi] = [\omega_r^2] \quad (3.7)$$

Orantılı Viskoz Sönümlü Model:

Çok serbestlik dereceli viskoz sönümlü bir sistem ele alındığında ise hareket denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = 0 \quad (3.8)$$

Burada $[C]$ matrisi sönüm matrisidir.

Orantılı viskoz sönümlü model denklem (3.9)'de görüldüğü gibi sönüm matrisinin kütle veya direngenlik matrisiyle orantılı olduğu modeldir [27].

$$[C] = \beta[K] + \gamma[M] \quad (3.9)$$

Denklem (3.10)'de verilen özdeğer problemi çözümünden doğal frekanslar elde edilir.

$$\det[K - \omega^2 M + i\omega C] = 0 \quad (3.10)$$

Orantılı viskoz sönümlü sistemlerin mod şekilleri sönümsüz sistemin mod şekillerine denk olmaktadır [27].

$$[\psi_o]_{\text{sönümlü}} \equiv [\psi]_{\text{sönümsüz}} \quad (3.11)$$

Aşağıda gösterilen ortogonalite özelliklerini kullanarak denklem (3.13)'den sönüm oranları bulunulabilir.

$$[\psi_o]^T [M] [\psi_o] = [m_r] \quad (3.12a)$$

$$[\psi_o]^T [K] [\psi_o] = [k_r] \quad (3.12b)$$

$$[\psi_o]^T [C] [\psi_o] = [c_r] = \beta[k_r] + \gamma[m_r] \quad (3.12c)$$

r 'inci doğal frekansa ait viskoz sönüm oranı denklem (3.13)'de ifade edilmektedir.

$$\zeta_r = \frac{c_r}{2\sqrt{k_r m_r}} \quad (3.13)$$

ÇŞMA uygulamalarında sönüm miktarı viskoz (ζ) veya sönüm kayıp faktörü (η) olarak verilebilmektedir. Birinin bilinmesi durumunda bir diğeri denklem (3.14)'den kolayca hesap edilebilir.

$$\zeta = \eta / 2 \quad (3.14)$$

Genel Viskoz Sönümlü Model:

Genel olarak viskoz sönümlü çok serbestlik dereceli sistemin hareket denklemi denklem (3.8)'de verilmişti. Bu diferansiyel denkleminin çözümünün aşağıdaki formda olacağı kabul edilir.

$$\{x\} = \{X\} e^{i\omega t} \quad (3.15)$$

$$[H(\omega)] = ([K] - \omega^2 [M] + i\omega [C])^{-1} \quad (3.16)$$

Fakat bu form pratik yapıların nümerik uygulamaları için pek uygun değildir. Dolayısıyla denklem (3.17)'de gösterilen, mertebesi $2N$ olan (N = Serbestlik Derecesi) ve yer değiştirmeleri $\{x\}$ ve hızları $\{\dot{x}\}$ içeren yeni bir koordinat vektörü $\{u\}$ tanımlanırsa hareket denklemi denklem (3.18)'de gösterildiği gibi yazılabilir [27].

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix}_{(2N \times 1)} \quad (3.17)$$

$$[C : M]_{N \times 2N} \{\dot{u}\}_{2N \times 1} + [K : 0] \{u\} = \{0\}_{N \times 1} \quad (3.18)$$

Bu formda N adet denklem ve $2N$ adet bilinmeyen vardır. Dolayısıyla denklem (3.19)'da görüldüğü gibi her iki tarafı birbirine eşit olan bir denklem daha eklenir.

$$[M : 0] \{\dot{u}\} + [0 : -M] \{u\} = \{0\} \quad (3.19)$$

Bu denklemler birleştirilirse denklem sayısı denklem (3.20)'de gösterildiği gibi $2N$ 'e yükselmiş olacaktır.

$$\begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix}_{2N \times 2N} \{\dot{u}\} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix}_{2N \times 2N} \{u\} = \{0\} \quad (3.20)$$

Denklem (3.20) aşağıdaki şekilde basitleştirilebilir.

$$[A] \{\dot{u}\} + [B] \{u\} = \{0\}$$

Bu denklemler denklem (3.21)'de görülen standart öz değer formundadır. Harmonik hareketi $\{u\} = \{U\}e^{st}$ şeklinde varsayılırsa sisteme ait 2N adet öz değer ve öz vektör elde edilir. s_r (öz değerler) ve $\{\theta\}_r$ (öz vektörler) genel denklemi sağlarlar [27].

$$(s_r[A] + [B])\{\theta\}_r e^{st} = \{0\} ; r=1,2N \quad s = i\omega \quad (3.21a)$$

$$(s_r[A] + [B])\{\theta\}_r = \{0\} \quad (3.21b)$$

Bu standart öz değer probleminin çözülmesi sonucunda sisteme ait doğal frekanslar, mod şekilleri ve sönüm oranları bulunabilir.

Sonuç olarak denklem (3.3) ve (3.10) kullanılarak yapının dinamik davranışı, yapının titreşim biçimleri, doğal frekans ve sönüm oranları ile tanımlanmış olmaktadır. Bu model tipi modal model olarak adlandırılmaktadır. Özdeğerler doğal frekansların karelerini, özvektörler ise mod şekli matrisinin her bir sütununu göstermektedir [27].

3.2 Sayısal Hesaplamalarda Kullanılan Bilgisayar Yazılımları

Sayısal model ile ilgili çalışmalarda, sonlu elemanlar programı olarak I-DEAS [51] ve dinamik analiz programı olarak da ADAMS [52] kullanılmıştır. ADAMS'dan alınan verileri kullanarak Frekans Alanında Ayırıklaştırma yöntemini uygulamak için ise MATLAB [53] programından yararlanılmıştır.

I-DEAS, bir bilgisayar destekli çizim ve mühendislik (CAD / CAE) programıdır. Bu program kullanılarak tanımlanan geometriye gerekli yapısal özellikler atanarak sonlu elemanlar modeli oluşturulabilmektedir. I-DEAS kullanılarak, yapılar üzerinde statik analizler, titreşim analizleri ve daha değişik analiz tipleri uygulanabilmektedir.

ADAMS, mekanik sistemlerin simülasyonlarını yapmaya yarayan bir yazılımdır. Bu yazılım yardımıyla kurulan modeller üzerinde statik ve dinamik analizler yapılabilmektedir. ADAMS-Standart modülü sadece rijit yani esnemez parçalarla çalışabilme olanağı sunmaktadır. Gerçekte ise yapının elastik özelliklerinden kaynaklanan titreşim modları bulunmaktadır. I-DEAS'ta oluşturulan yapıyı elastik olarak ADAMS ortamına aktarabilmek için ADAMS-Flex adlı yardımcı bir modül kullanılır. Bu modül çok cisimli esnek sistemleri modelleyebilmekte ve zaman alanında integrasyon yapabilmektedir. ADAMS ortamında yapının herhangi bir

noktasına bir kuvvet uygulanarak istenen noktalardan tepkiler ölçülebilmekte ve frekansa bağlı olarak bu tepkilerin genlikleri görülebilmektedir.

MATLAB, teknik bir programlama dilidir. Bu programla algoritma geliştirme, sayısal hesaplamalar ve veri analizleri yapılabilir. MATLAB kullanılarak teknik problemler çözülebilir, ayrıca değişik amaçlara yönelik algoritmalar oluşturulabilir. Bu tez boyunca MATLAB yazılımı, yapı üzerinden tepkiler ölçüldükten sonra ilgili sayısal işlemlerin yapılması için kullanılmıştır. MATLAB’de yazılan bir ÇŞMA programı sayesinde, elde edilen yapısal titreşim sonuçlarını kullanarak yapıya ait bilinmeyen modal parametreler (doğal frekans, mod şekilleri, sönüm) belirlenmiştir.

3.3 Kütle-Yay Sistemi Üzerinde Sayısal Uygulamalar

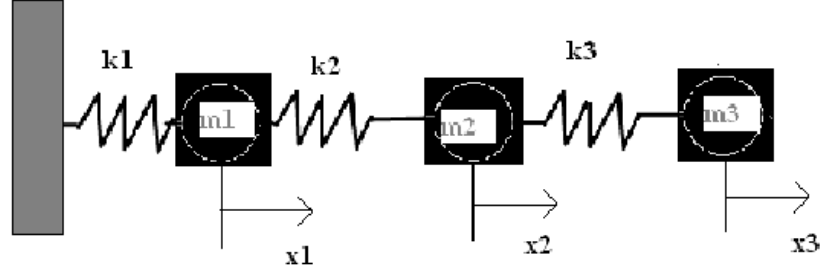
3.3.1 Kütle-Yay Sistemi Sayısal Modeli

Çalışma Şartlarında Modal Analiz yöntemi ile yapılan ilk sayısal çalışma, yanıtları önceden hesaplanan ve bilinen 3 serbestlik dereceli bir kütle-yay sistemi üzerinde gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmada ilk olarak geleneksel modal analiz yöntemini kullanarak özdeğer problemi çözümünden yapıya ait doğal frekanslar, mod şekilleri ve sönüm oranları belirlenmiştir. Daha sonra ADAMS programında bu 3 serbestlik dereceli kütle-yay sistemi modellenmiş ve herhangi bir kütlesinden kuvvet uygulanmıştır. Uygulanan bu kuvvet ‘ölçülmeden’ yapı üzerindeki 3 kütleden de titreşimler kayıt edilmiştir. Alınan bu veriler MATLAB programına aktararak Frekans Alanında Ayrıklaştırma yöntemiyle doğal frekanslar, mod şekilleri ve sönüm oranları belirlenmiş ve önceden bilinen değerlerle karşılaştırılmıştır.

Sisteme uygulanan kuvvetin yeri ve genliğinin belli olması ve aynı zamanda kütle, direngenlik ve sönüm matrislerinin de bilinmesinden dolayı her bir frekansta her bir kütlede oluşacak titreşimler kolaylıkla bulunabilir.

3 serbestlik dereceli kütle-yay sistemi sayısal modeli Şekil 3.1’de görülmektedir. Bu modelde seçilen kütle ve yayların direngenlik değerleri aşağıdaki gibidir. Hareket denklemlerini yazarken yer değiştirmeler (x_1, x_2, x_3) arasındaki ilişki $x_1 > x_2 > x_3$ olarak varsayılmıştır.

$$\begin{aligned}
k_1 &= 800 \text{ N/m} & m_1 &= 1 \text{ kg} \\
k_2 &= 900 \text{ N/m} & m_2 &= 1.5 \text{ kg} \\
k_3 &= 1100 \text{ N/m} & m_3 &= 2.5 \text{ kg}
\end{aligned}$$



Şekil 3.1 Kütle-Yay Sistemi

Sistemin basit 3 serbestlik dereceli bir sistem olmasından dolayı oluşan titreşimler ADAMS programı yerine (3.22)'de verilen denklemle de kolayca bulunabilir.

$$\{X\} = [H]\{F\} \quad (3.22a)$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = ([K] - \omega^2 [M] + i\omega [C])^{-1} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (3.22b)$$

3.3.2 Farklı Sönümlü Yapılara Çalışma Şartlarında Modal Analiz Uygulamaları

Bu bölümde 3 serbestlik dereceli kütle-yay sisteminin farklı sönüm çeşitleri ve miktarları altındaki titreşimleri ölçülerek çalışma şartlarındaki modal parametreleri belirlenmiş ve geleneksel modelle karşılaştırılmıştır.

3.3.2.1 Sönümsüz Model

3 serbestlik dereceli sönümsüz sistemin hareket denklemi denklem (3.23)'de gösterildiği gibi matris formunda yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

Geleneksel modal analiz sonucunda elde edilen sönümsüz sistemin doğal frekansları ve birim normalizasyonlu mod şekilleri aşağıdaki gibidir. Mod şekli matrisindeki ($[\phi]$) sütunlar mod'u, satırlar ise mod şeklinin hangi serbestlik derecesine karşılık geldiğini ifade etmektedir. Örneğin matrisin 2. satırı, 3. sütunundaki değer 3. modda 2. kütlenin diğer kütlelere göre yaptığı yer değiştirme miktarını göstermektedir [27].

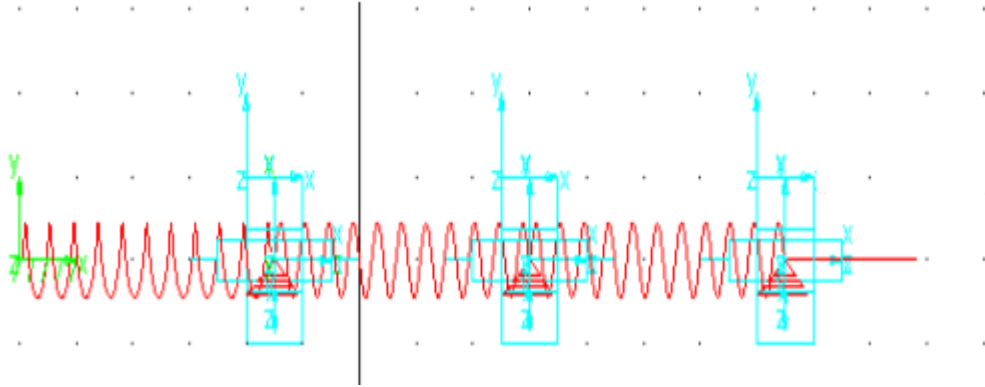
$$\omega_1 = 1.47 \text{ Hz}$$

$$\omega_2 = 5.14 \text{ Hz}$$

$$\omega_3 = 7.70 \text{ Hz}$$

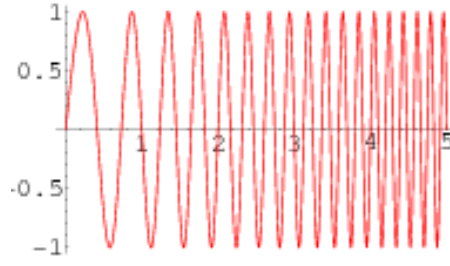
$$[\phi] = \begin{bmatrix} 0.448276 & -1 & 1 \\ 0.803831 & -0.728768 & -0.714286 \\ 1 & 0.53761 & 0.1652 \end{bmatrix}$$

Çalışma şartlarında sönümsüz kütle-yay sisteminin ADAMS modeli Şekil 3.2'de gösterilmektedir. Bu programın "ADAMS Titreşim" modülü kullanılarak yapıdaki 3. kütleye x eksen yönünde (yatay yön) kuvvet uygulanmış ve her bir kütleden x eksen yönündeki ivmeleri (sadece cevap bilgisi) alınmıştır.



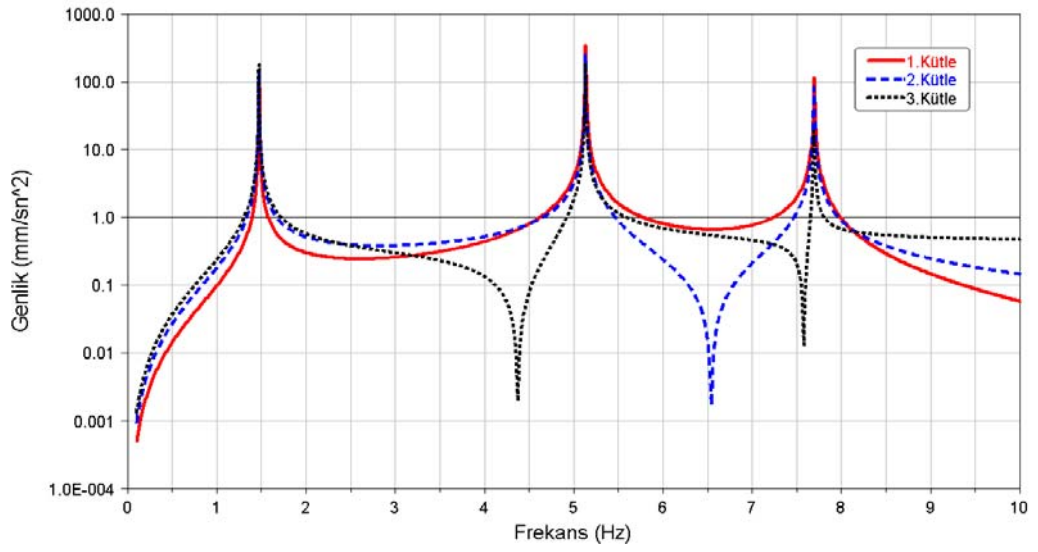
Şekil 3.2 Sönümsüz Kütle-Yay Sisteminin ADAMS Modeli

Kuvvet Şekil 3.3'de bir örneği gösterilen "Süpürücü Sinüs" (sine sweep) olarak girilmiştir. Bu kuvvet incelenilen tüm frekanslarda yapıya sürekli ve artan frekansta sinüs sinyali uygulamaktadır. Kuvvetin genliği 1, fazı ise 0 alınmıştır. Yapıdaki kütlelerin ve yayların direngenliklerinin değerleri Bölüm 3.3.1'de verildiği gibi girilmiştir. Birinci yayın ucu ise yere sabit olarak bağlanmıştır. Analizler 0-10 Hz arasında yapılmıştır.



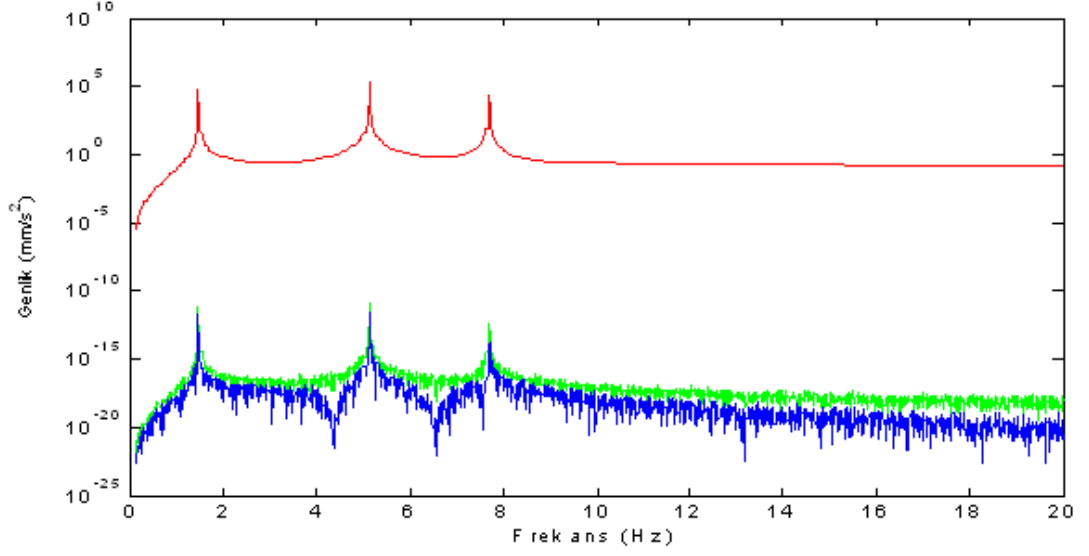
Şekil 3.3 Süpürücü Sinüs

Her bir kütleden alınan frekansa bağlı genlik eğrileri Şekil (3.4)'de gösterildiği gibidir.



Şekil 3.4 Sönümsüz Modelin Frekansa Bağlı Genlik Eğrisi

Elde edilen bu veriler MATLAB programına aktarılarak her bir kütlenin genliklerinin birbirleriyle olan çapraz spektrumları hesaplanmış ve Frekans Alanında Ayırıklaştırma yöntemi adımları izlenerek Şekil 3.5'de görülen Tekil Değerler Grafiği elde edilmiştir. Bu adımın ardından sistemin mod şekilleri hesaplanmıştır.



Şekil 3.5 Sönümsüz Modelin Tekil Değerlerine Ayırıştırma Grafiği

Tekil Değerlere Ayırıştırma yoluyla elde edilen doğal frekanslar ve birim normalizasyon uygulanmış mod şekilleri aşağıdaki gibidir.

$$\omega_1 = 1.47 \text{ Hz}$$

$$\omega_2 = 5.14 \text{ Hz}$$

$$\omega_3 = 7.69 \text{ Hz}$$

$$[\psi] = \begin{bmatrix} 0.45144 & 1 & 1 \\ 0.80486 & 0.721544 & -0.71719 \\ 1 & -0.5304 & 0.162154 \end{bmatrix}$$

Tablo 3.1’de geleneksel ve çalışma şartlarında elde edilen doğal frekansların ve sırasıyla her bir kütlenin mod şekillerinin karşılaştırılması verilmektedir. Tabloda verilen sayısal değerlerden de anlaşıldığı gibi her iki yaklaşımla elde edilen sonuçlar birbirini ile aynı kabul edilebilecek seviyede uyumludur. Ancak, GMA ve ÇŞMA den elde edilen sonuçlar arasında çok küçük de olsa bazı sayısal farkların olduğu da görülmektedir.

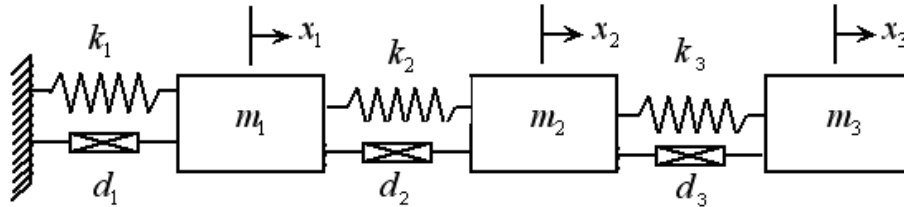
Tablo 3.1 Sönümsüz Sistemin Geleneksel ve Çalışma Şartlarında Karşılaştırılması

	Doğal Frekanslar (Hz)		Mod Şekilleri	
	GMA	ÇŞMA	GMA	ÇŞMA
1. Mod	1,47	1,47	0,448	0,451
			0,804	0,805
			1,000	1,000
2. Mod	5,14	5,14	-1,000	1,000
			-0,728	0,722
			0,530	-0,530
3. Mod	7,70	7,69	1,000	1,000
			-0,714	-0,717
			0,165	0,162

3.3.2.2 Orantılı Yapısal Sönümlü Model

Bu bölümde Şekil 3.6’da görüldüğü gibi tüm yaylara orantılı yapısal bir sönüm eklenmiştir. Dolayısıyla yaylar ve direngenlik matrisi karmaşık (kompleks) sayılarla ifade edilmiştir. Yapısal sönüm faktörü (η) her bir yay için 0.01 seçilmiştir ki bu durumda her bir yay aşağıdaki denklemle ifade edilmektedir. Diğer parametreler ise önceki modellerle aynıdır.

$$k^* = k + id = k(1 + i\eta) \quad (3.24)$$

**Şekil 3.6** Orantılı Yapısal Sönümlü Model

Yapısal sönüm matrisi $[D]$ ise aşağıdaki şekli alır.

$$[D] = \begin{bmatrix} 17 & -9 & 0 \\ -9 & 20 & -11 \\ 0 & -11 & 11 \end{bmatrix} [N/m]$$

Dolayısıyla kompleks direngenlik matrisi:

$$[K]^* = [K] + i\eta[K] = \begin{bmatrix} 1700 + 17i & -900 - 9i & 0 \\ -900 - 9i & 2000 + 20i & -1100 - 11i \\ 0 & -1100 - 11i & 1100 + 11i \end{bmatrix}$$

Matlab programında denklem (3.25)'de gösterilen özdeğer problemi çözümünden doğal frekanslar, mod şekilleri ve sönüm oranları hesaplanmıştır.

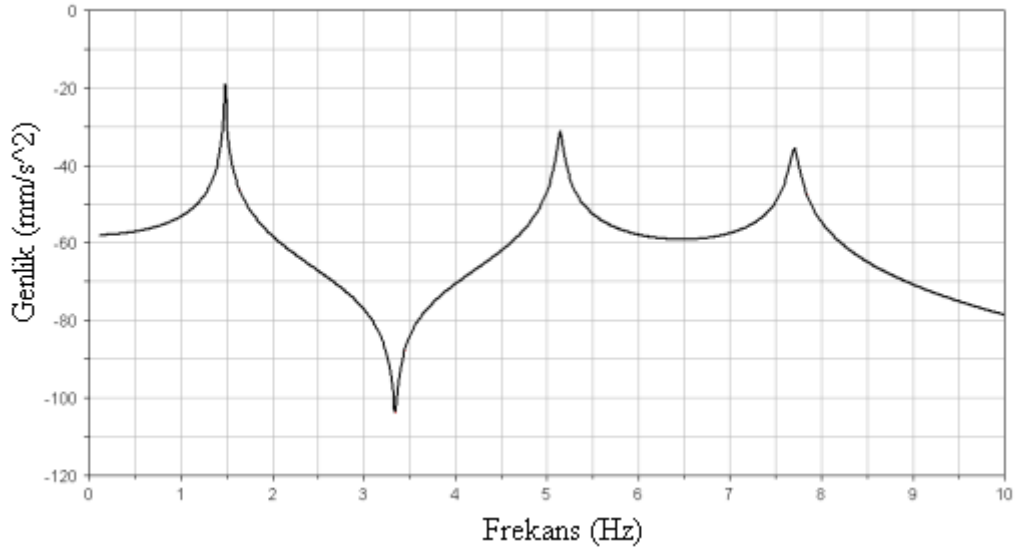
$$([K]^* - \omega^2 [M])\{X\}e^{i\omega t} = \{0\} \quad (3.25)$$

ADAMS programında yayların direngenlikleri kompleks girilemediğinden dolayı sistemin çalışma şartları altındaki ivmeleri daha önceden de bahsedildiği gibi her bir frekansta aşağıdaki denklem yardımıyla Matlab programında hesaplanmıştır.

$$\{X\} = [H]\{F\} \quad (3.26a)$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = ([K] - \omega^2 [M])^{-1} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (3.26b)$$

2. kütleden genliği 1 olan bir kuvvet uygulanırsa $F_2 = 1$, diğer kuvvetler ise sıfır olacaktır. Elde edilen ivmeleri kullanarak çalışma şartlarında doğal frekanslar, mod şekilleri ve sönüm oranları bulunabilir. Sönüm oranları Şekil 3.7'de gösterilen 1. kütleden alınan frekansa bağlı genlik eğrisine yarım güç bant genişliği yöntemini uygulayarak bulunmuştur. Tablo 3.2'da ise geleneksel ve çalışma şartlarında elde edilen modal parametreler karşılaştırılmıştır.



Şekil 3.7 Orantılı Yapısal Sönümlü Sistemden 1.Kütleden Alınan Frekansa Bağlı Genlik Grafiği

Tablo 3.2 Orantılı Yapısal Sönümlü Sistemin Geleneksel ve Çalışma Şartlarında Karşılaştırılması

	Doğal Frekanslar (Hz)		Mod Şekilleri		Sönüm Oranları	
	GMA	ÇŞMA	GMA	ÇŞMA	GMA	ÇŞMA
1. Mod	1,48	1,48	0,4483	-0,4481	0,005	0,0052
			0,804	$-0,803-4,3e^{-4}i$		
			1	$-1-1,9e^{-3}i$		
2. Mod	5,14	5,14	1	-1	0,005	0,0049
			0,729	$-0,728-1,16e^{-2}i$		
			-0,5307	$0,529+1,76e^{-2}i$		
3. Mod	7,7	7,70	1	-1	0,005	0,0049
			-0,714	$0,714-2,6e^{-2}i$		
			0,165	$-0,165+3,9e^{-3}i$		

Sonuç olarak Tablo 3.2’da görüldüğü gibi geleneksel ve çalışma şartlarında elde edilen modal parametreler birbiriyle aynı kabul edilebilecek durumdadır. Çalışma şartlarında elde edilen mod şekillerinin sanal kısmı ihmal edilebilecek kadar küçüktür.

3.3.2.3 Orantılı Viskoz Sönümlü Model

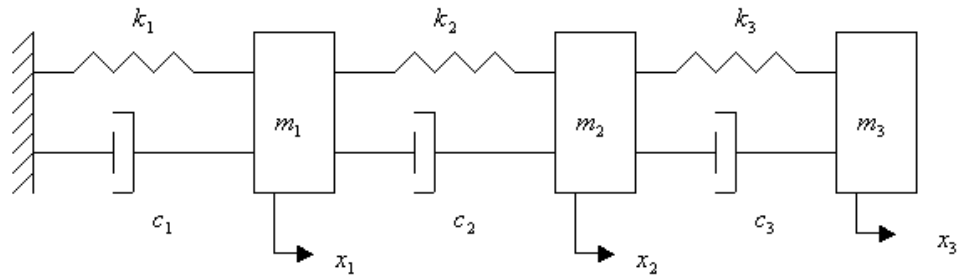
Bu bölümde sisteme orantılı viskoz sönüm eklenerek geleneksel ve çalışma şartlarında modal analiz uygulanarak modal parametreler elde edilmiş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Şekil 3.8’de sönümlü kütle-yay sistemi görülmektedir. Bu sistemde $\beta = 0.0002$ ve $\gamma = 0$ seçilerek sönüm matrisinin direngenlik matrisiyle orantılı olması sağlanmıştır. Bu bağlamda elde edilen sönüm miktarları aşağıda verilmektedir. Kütle ve yayların direngenlik değerleri ise sönümsüz sistemle aynıdır.

$$c_1 = 0.16Ns/m$$

$$c_2 = 0.18Ns/m$$

$$c_3 = 0.22Ns/m$$



Şekil 3.8 Sönümlü Kütle-Yay Sistemi

3 serbestlik dereceli orantılı viskoz sönümlü sistemin hareket denklemi denklem (3.27)’de gösterildiği gibi matris formunda yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

Denklem (3.10)’de verilen özdeğer problemi çözümünden doğal frekanslar aşağıda gösterildiği gibi elde edilir.

$$\omega_1 = 1.4788 - 0.0013iHz$$

$$\omega_2 = 5.1427 - 0.0166iHz$$

$$\omega_3 = 7.7035 - 0.0372iHz$$

Sistem orantılı viskoz sönümlü olduğundan sönümsüz sistemin mod şekilleri orantılı viskoz sönümlü sistemin mod şekillerine denk olacaktır.

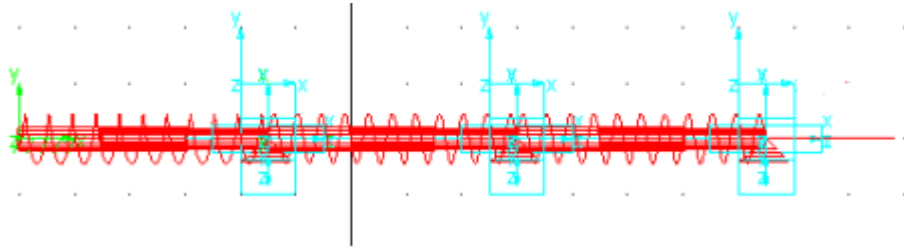
Geleneksel modal analiz sonucunda orantılı viskoz sönümlü sistemin sönüm oranları her bir mod için aşağıdaki gibidir.

$$\zeta_1 = 0.000926$$

$$\zeta_2 = 0.00322$$

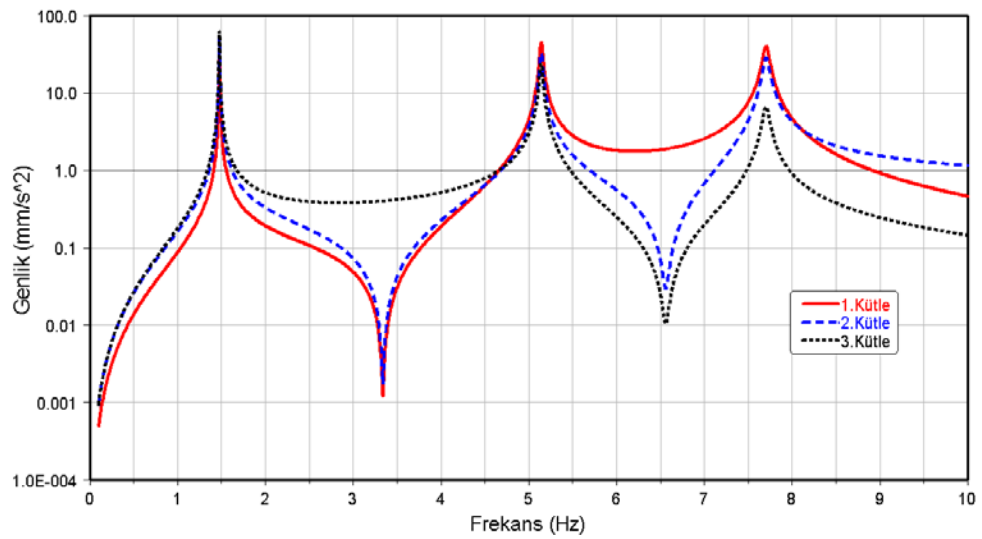
$$\zeta_3 = 0.004835$$

Çalışma şartlarında sönümlü kütle-yay sisteminin ADAMS modeli Şekil 3.9'de gösterilmektedir. 2. kütleye x ekseninde süpürücü sinüs kuvveti uygulanmış ve her bir kütleden x eksenindeki ivmeleri (sadece cevap bilgisi) alınmıştır.

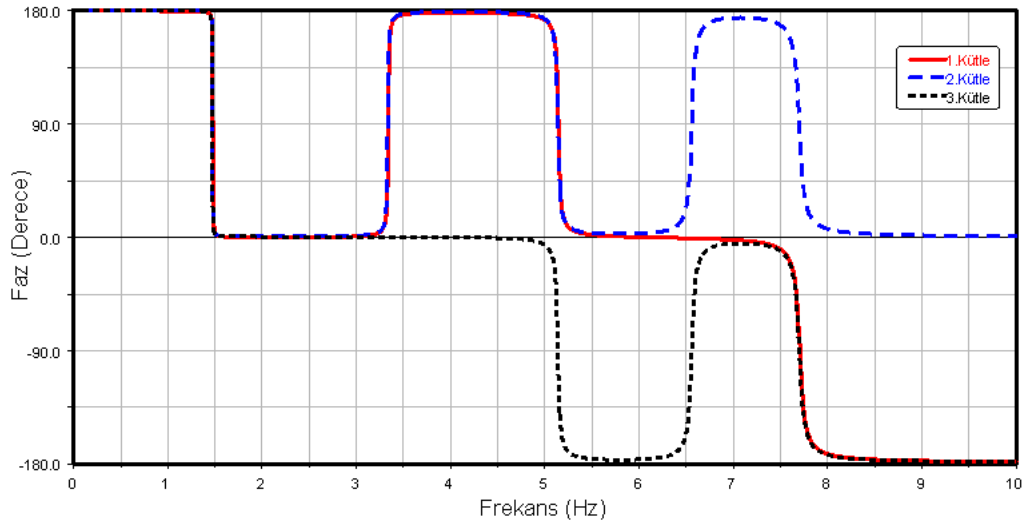


Şekil 3.9 Sönümlü Kütle-Yay Sisteminin ADAMS Modeli

Her bir kütleden alınan frekansa bağlı genlik ve faz eğrileri Şekil (3.10) ve (3.11)'de gösterildiği gibidir.

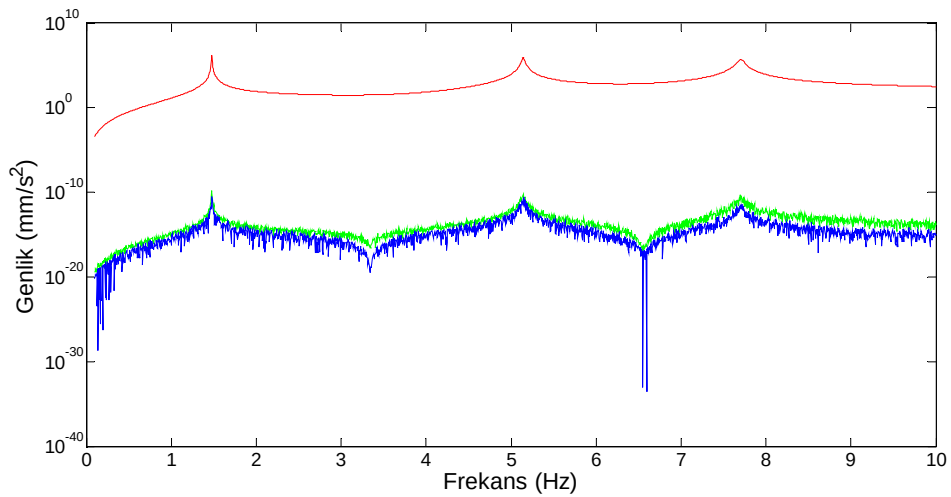


Şekil 3.10 Orantılı Viskoz Sönümlü Modelin Frekansa Bağlı Genlik Eğrisi



Şekil 3.11 Orantılı Viskoz Sönümlü Modelin Frekansa Bağlı Faz Eğrisi

Alınan bu genlik ve faz bilgileri reel ve sanal kısımlara ayrılmıştır. Bu sistemde yapıda sönümün de olmasından dolayı alınan cevapların sanal kısmı da mevcuttur. Daha sonra her bir kütlenin birbirleriyle olan çapraz spektrumları hesaplatılarak. Frekans Alanında Ayırıklaştırma yöntemiyle Matlab programında Şekil 3.12’de görülen Tekil Değerler grafiği ve ilk tekil değerdeki her bir tepeden doğal frekanslar elde edilmiştir. 2. ve 3. tekil değerlerin genlikleri ilk tekil değere göre çok düşük olduğundan o frekansta yalnızca bir mod vardır.



Şekil 3.12 Orantılı Viskoz Sönümlü Modelin Tekil Değerlere Ayırıştırma Grafiği

Elde edilen doğal frekanslar ve birim normalizasyon uygulanmış mod şekilleri aşağıdaki gibidir.

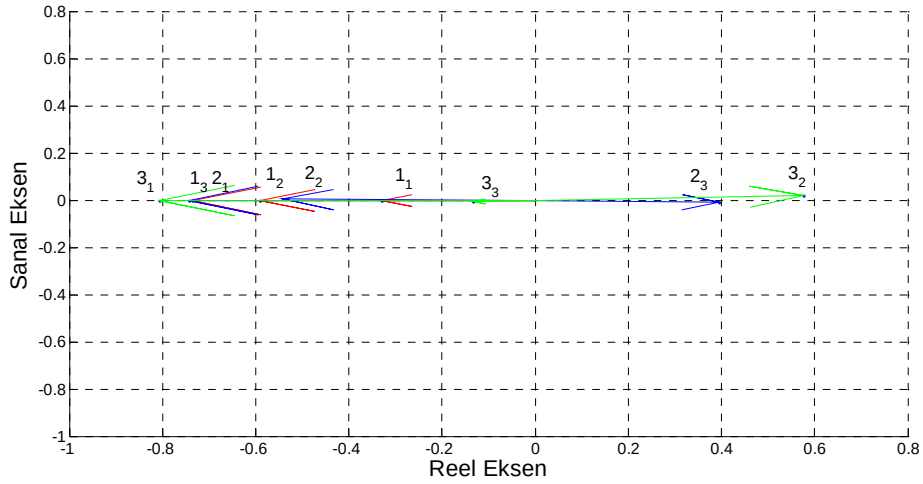
$$\omega_1 = 1.481Hz$$

$$\omega_2 = 5.144Hz$$

$$\omega_3 = 7.703Hz$$

$$[\psi] = \begin{bmatrix} -0.4480 & -1 & -1 \\ -0.8032 + 1e^{-4}i & -0.7282 + 7.5e^{-3}i & 0.7138 + 2.5e^{-2}i \\ -1 + 4e^{-4}i & 0.5398 - 1.14e^{-2}i & -0.1651 - 3.9e^{-3}i \end{bmatrix}$$

Birim normalizasyon uygulanmış mod şekli matrisinde sanal kısım da mevcuttur fakat çok küçük değerdedir. Mod şekli matrisini daha iyi anlayabilmek için reel ve sanal eksende göstermek daha uygun olacaktır. Şekil 3.13’de elde edilen mod şekilleri reel ve sanal eksende gösterilmektedir. Şekildeki numaralar mod sayısını, numaraların alt indisleri ise o moddaki kütleyi temsil etmektedir. Örneğin 3_2 vektörü 3. moddaki 2. kütlenin yaptığı yerdeğiştirmeyi ifade etmektedir. Şekilden de anlaşılacağı gibi tüm mod şekilleri ile ilgili faz açıları olması gerektiği şekilde, sönümsüz sistemde olduğu gibi 0 veya 180 derecedir. Dolayısıyla sonuçlar geleneksel modal analiz sonuçlarıyla aynıdır.



Şekil 3.13 Çalışma Şartlarında Orantılı Viskoz Sönümlü Modelin Mod Şekillerinin Karmaşık Düzlemde Gösterimi

Sönüm ise sistemden aldığımız cevaplardan birine yarım güç bant genişliği yöntemi uygulanarak elde edilmiştir. Sonuçlar aşağıdaki gibi bulunmuştur ve geleneksel olarak elde edilen sönüm oranları ile uyumlu olduğu görülmüştür.

$$\zeta_1 = 0.00135$$

$$\zeta_2 = 0.00323$$

$$\zeta_3 = 0.00487$$

Özetle Tablo 3.3’de geleneksel ve çalışma şartlarında elde edilen modal parametrelerin karşılaştırılması verilmektedir. Tablodan da görüldüğü gibi her iki modal analizden elde edilen sonuçlar birbirleriyle uyumludur.

Tablo 3.3 Orantılı Viskoz Sönümlü Sistemin Geleneksel ve Çalışma Şartlarında Karşılaştırılması

	Doğal Frekanslar (Hz)		Mod Şekilleri		Sönüm Oranları	
	GMA	ÇŞMA	GMA	ÇŞMA	GMA	ÇŞMA
1. Mod	1,47	1,48	0,448	-0,448	0,0009	0,001
			0,804	$-0,803+1e^{-4}i$		
			1,000	$-1+4e^{-4}i$		
2. Mod	5,14	5,14	-1,000	-1	0,003	0,003
			-0,728	$-0.728+7,5e^{-3}i$		
			0,530	$0,540-1,14e^{-2}i$		
3. Mod	7,70	7,70	1,000	-1	0,005	0,005
			-0,714	$0,714+2,5e^{-2}i$		
			0,165	$-0,165-3,9e^{-3}i$		

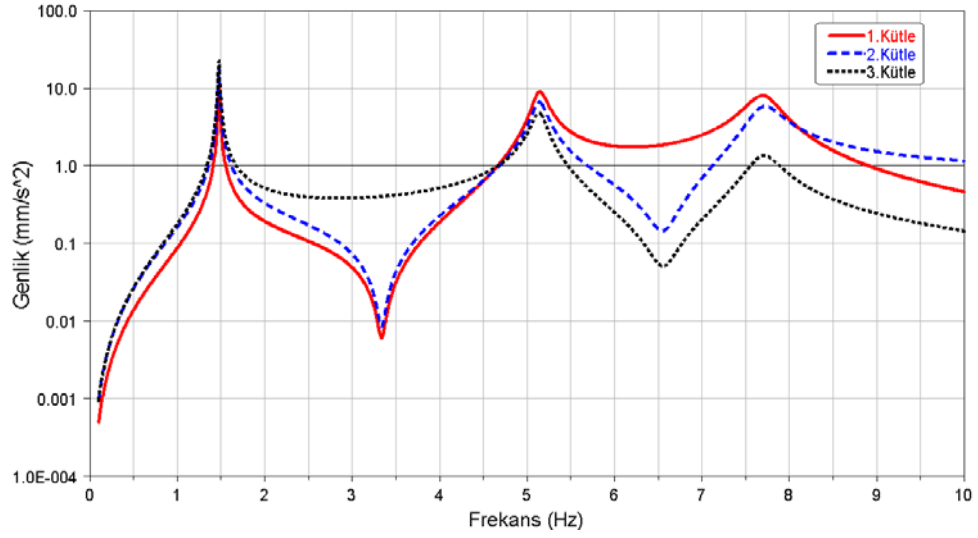
Çalışmanın bundan sonraki bölümünde karşılaştırma yapabilmek amacıyla yine orantılı sönüm kullanılmakla birlikte sönüm oranları arttırılarak aynı denemeler tekrarlanmıştır. $\beta = 0.001$ seçilmesi durumunda sönüm katsayıları aşağıdaki gibidir.

$$c_1 = 0.8Ns/m$$

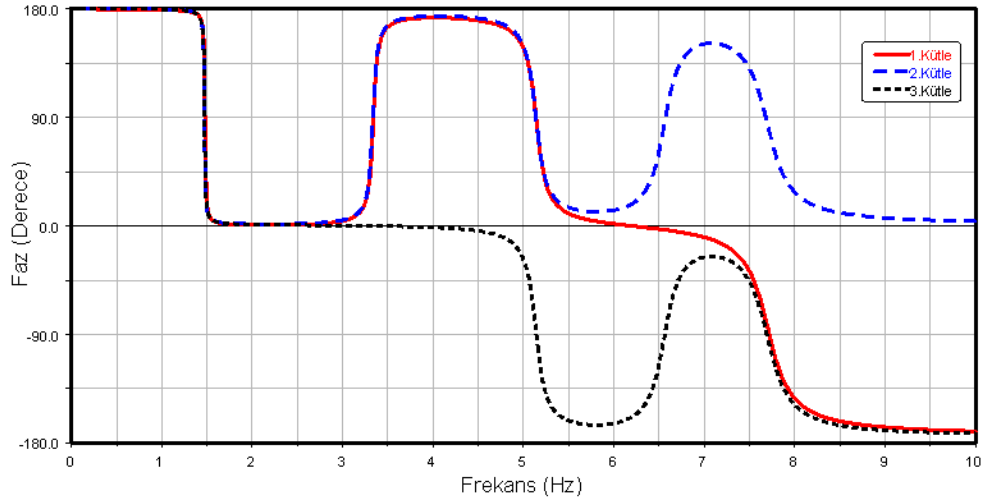
$$c_2 = 0.9Ns/m$$

$$c_3 = 1.1Ns/m$$

Bu durumda çalışma şartlarında her bir kütleden alınan frekansa bağlı genlik ve faz eğrileri Şekil (3.14) ve (3.15)’de gösterildiği gibidir.



Şekil 3.14 Orantılı Yüksek Viskoz Sönümlü Modelin Frekansa Bağlı Genlik Eğrisi

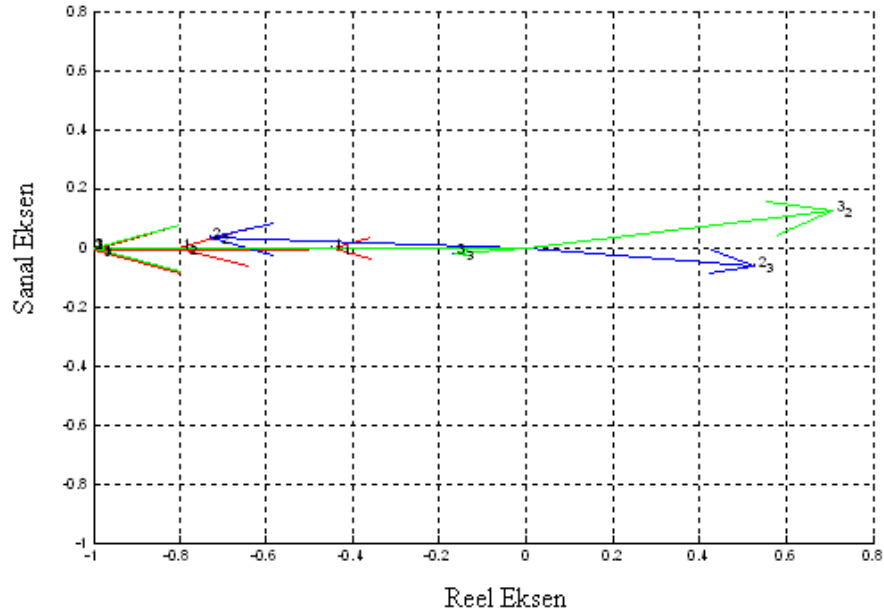


Şekil 3.15 Orantılı Yüksek Viskoz Sönümlü Modelin Frekansa Bağlı Faz Eğrisi

Tablo 3.4'de orantılı yüksek viskoz sönümlü modelin geleneksel ve çalışma şartlarında elde edilen modal parametrelerinin karşılaştırılması verilmektedir. Şekil 3.16'da ise çalışma şartlarında elde edilen mod şekilleri reel ve sanal ekseninde gösterilmektedir. Şekil 3.16'da yeşil renkle gösterilen 3. modda kütleler arasında yaklaşık 10 derecelik bir faz farkı meydana gelmiştir. Bunun bir nedeni herhangi bir doğal frekans etrafındaki titreşim verilerinin diğer doğal frekanslardaki mod şekillerinin de etkisinin olması ve bir diğer nedeni ise şekil 3.14'de görüldüğü gibi, sönümün yüksek olmasından dolayı 3. moddaki 3. kütlenin genliğinin diğer kütlelere oranla daha düşük kalmasıdır. Çalışma şartlarında modal analizin geçerliliğinin yapının düşük sönümlü olması varsayımına dayanması da hatırdta tutulmalıdır.

Tablo 3.4 Orantılı Yüksek Viskoz Sönümlü Sistemin Geleneksel ve Çalışma Şartlarında Karşılaştırılması

	Doğal Frekanslar (Hz)		Mod Şekilleri		Sönüm Oranları	
	GMA	ÇŞMA	GMA	ÇŞMA	GMA	ÇŞMA
1. Mod	1,48	1,48	0,448	-0,448	0,0046	0,0048
			0,804	$-0,803+4e^{-4}i$		
			1,000	$-1+1.8e^{-3}i$		
2. Mod	5,14	5,14	-1,000	-1	0,016	0,016
			-0,728	$-0,729+3,75e^{-2}i$		
			0,530	$0,528-5,69e^{-2}i$		
3. Mod	7,70	7,70	1,000	-1	0,024	0,024
			-0,714	$0,708+1,25e^{-1}i$		
			0,165	$-0,165-1,9e^{-2}i$		



Şekil 3.16 Çalışma Şartlarında Orantılı Yüksek Viskoz Sönümlü Modelin Mod Şekillerinin Karmaşık Düzlemde Gösterimi

3.3.2.4 Genel Viskoz Sönümlü Model

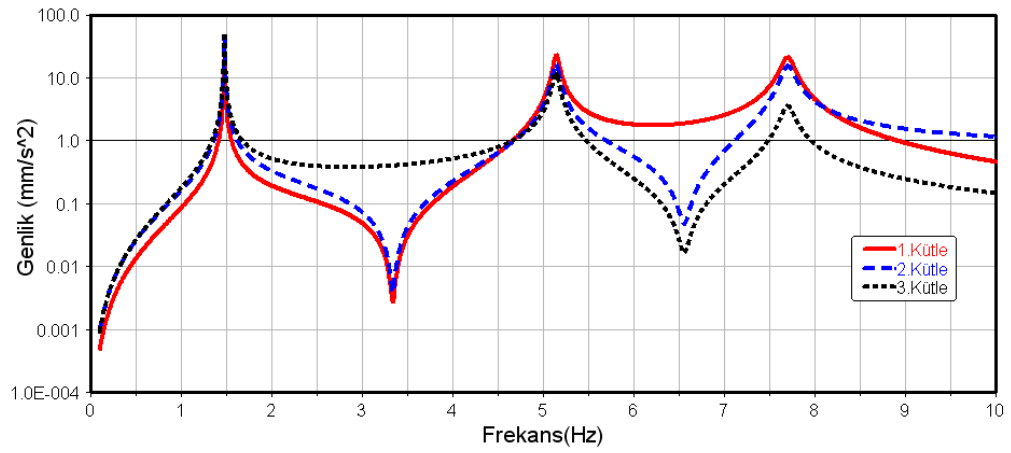
Bu bölümde sisteme genel viskoz sönüm eklenerek geleneksel ve çalışma şartlarında modal analiz uygulanarak modal parametreleri karşılaştırılmıştır. Genel viskoz sönümlü model sönüm matrisinin kütle veya direngenlik matrisiyle orantılı olmadığı modeldir. Bu bağlamda seçilen sönüm miktarları aşağıda verilmektedir. Kütle ve yayların değerleri ise sönümsüz sistemle aynıdır.

$$c_1 = 0.2Ns/m$$

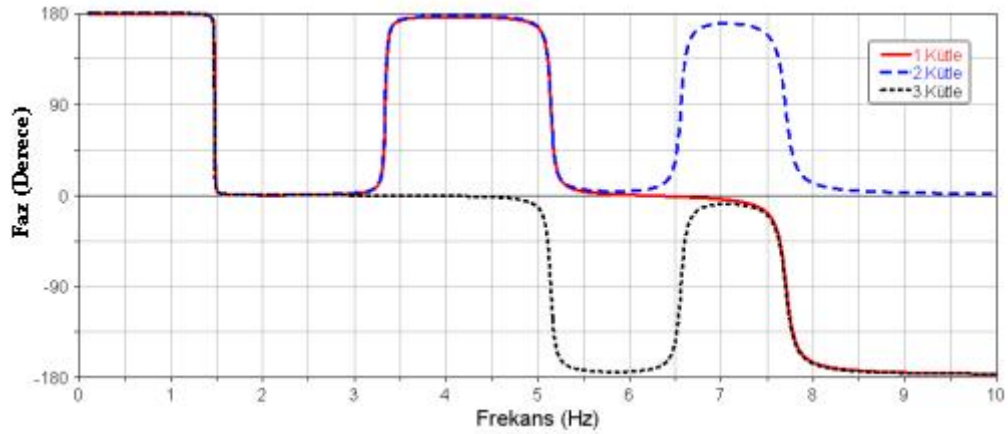
$$c_2 = 0.35Ns/m$$

$$c_3 = 0.5Ns/m$$

Genel viskoz sönümlü modelin çalışma şartlarında modal analiz sayısal uygulaması için Şekil 3.9’da görülen 2. kütleye yine x eksenı yönünde kuvvet uygulanmış ve her bir kütleden x eksenı yönündeki ivmeleri hesaplanmıştır. Bu durumda her bir kütleden alınan frekansa bağılı genlik ve faz grafikleri Şekil (3.17) ve (3.18)’de gösterildiğı gibidir.

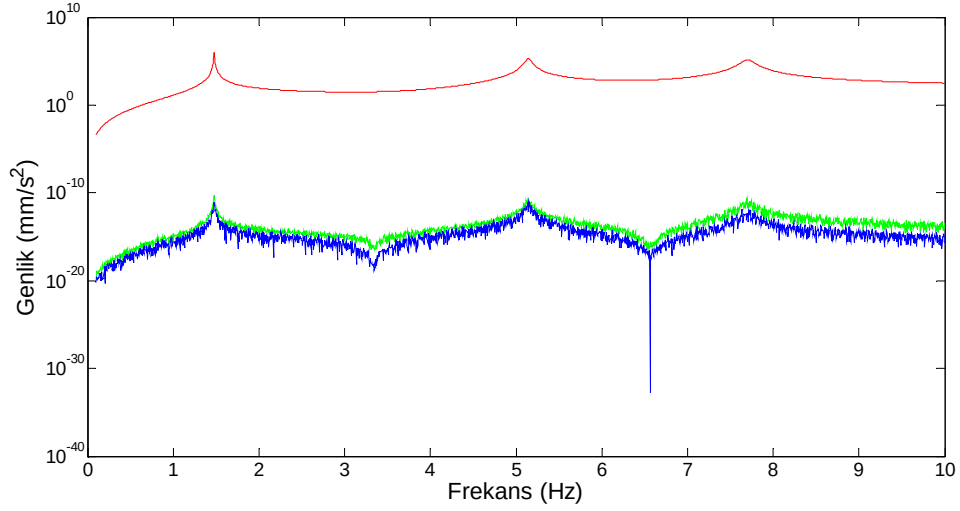


Şekil 3.17 Genel Viskoz Sönümlü Modelin Frekansa Bağlı Genlik Eğrisi



Şekil 3.18 Genel Viskoz Sönümlü Modelin Frekansa Bağlı Faz Eğrisi

Yine her bir kütlenin birbirleriyle olan çapraz spektrumları hesaplatılarak Frekans Alanında Ayırıklaştırma yöntemiyle Matlab programında Şekil 3.19’de görülen Tekil Değerler grafiğı elde edilmiştir.

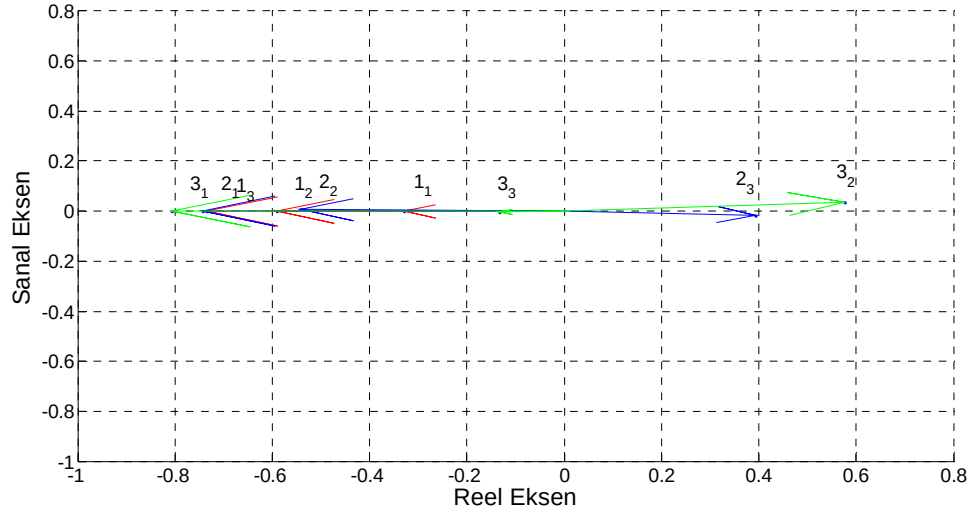


Şekil 3.19 Genel Viskoz Sönümlü Modelin Tekil Değerlere Ayırıştırma Grafiği

Tablo 3.5’de genel viskoz sönümlü modelin geleneksel ve çalışma şartlarında elde edilen modal parametrelerinin karşılaştırılması verilmiştir. Tablodan da görüldüğü gibi her iki modal analizden elde edilen sonuçlar birbiriyle uyumludur. Şekil 3.20’de ise çalışma şartlarında elde edilen mod şekilleri reel ve sanal ekseninde gösterilmektedir. Şekilden de görüldüğü gibi tüm modların faz açıları aynıdır.

Tablo 3.5 Genel Viskoz Sönümlü Sistemin Geleneksel ve Çalışma Şartlarında Karşılaştırılması

	Doğal Frekanslar (Hz)		Mod Şekilleri		Sönüm Oranları	
	GMA	ÇŞMA	GMA	ÇŞMA	GMA	ÇŞMA
1. Mod	1,48	1,48	$0,448-4,02e^{-4}i$	-0,448	0,0016	0,0017
			$0,804-2,3e^{-4}i$	$-0,803-4e^{-4}i$		
			1	$-1-1,5e^{-3}i$		
2. Mod	5,14	5,14	1	-1	0,0065	0,0063
			$0,729+4,03e^{-3}i$	$-0,728+1,06e^{-2}i$		
			$-0,5307-1,03e^{-3}i$	$0,53-2,12e^{-2}i$		
3. Mod	7,7	7,70	1	-1	0,0093	0,0092
			$-0,714+4,35e^{-3}i$	$0,713+4,3e^{-2}i$		
			$0,165-1,7e^{-3}i$	$-0,165-5,5e^{-3}i$		



Şekil 3.20 Genel Viskoz Sönümlü Modelin Mod Şekillerinin Karmaşık Düzlemde Gösterimi

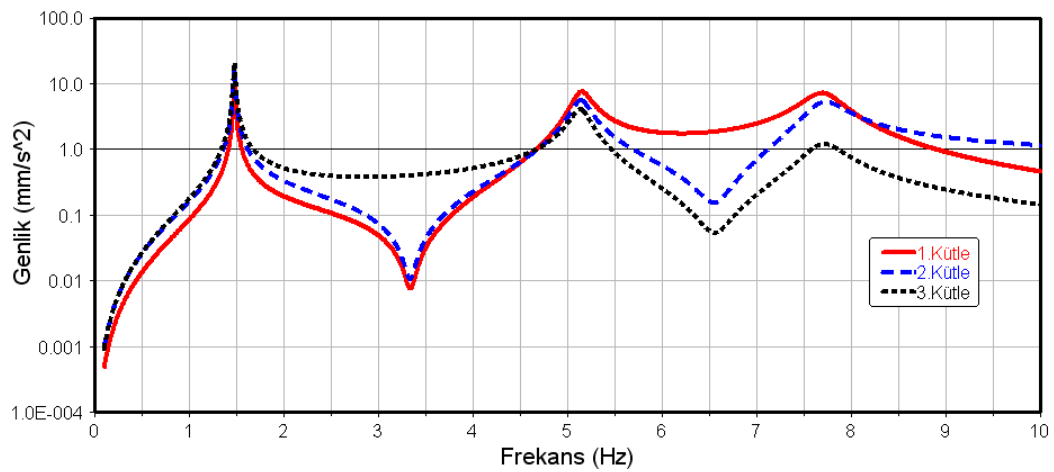
Yine bu bölümde karşılaştırma yapabilmek amacıyla sönüm oranları artırılarak aynı deneyler tekrarlanmıştır. Bu durumdaki sönüm katsayıları aşağıdaki gibidir.

$$c_1 = 0.8Ns/m$$

$$c_2 = 1Ns/m$$

$$c_3 = 1.4Ns/m$$

Yüksek sönümlü durumda ve çalışma şartlarında her bir kütleden alınan frekansa bağlı genlik grafikleri Şekil (3.21)'de gösterilmektedir.



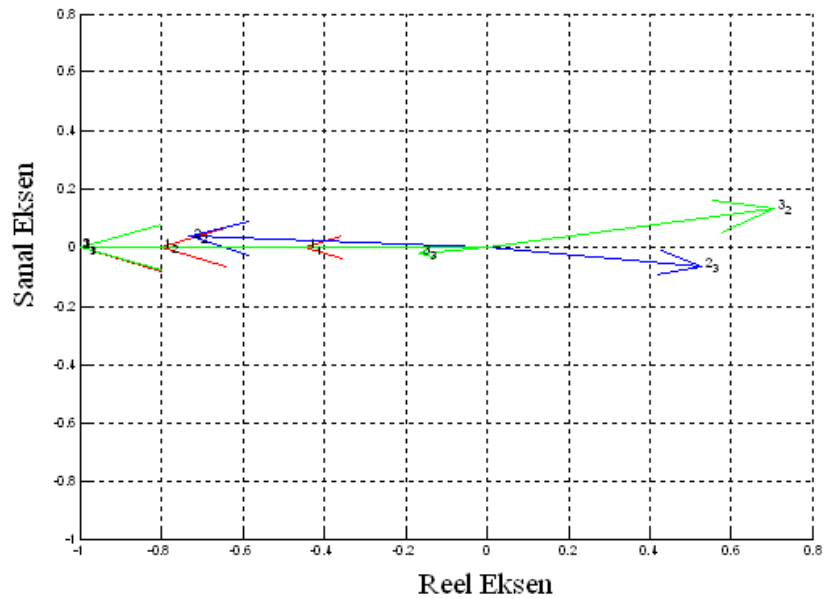
Şekil 3.21 Genel Yüksek Viskoz Sönümlü Modelin Frekansa Bağlı Genlik Eğrisi

Tablo 3.6'da genel yüksek viskoz sönümlü modelin geleneksel ve çalışma şartlarında elde edilen modal parametrelerinin karşılaştırılması görülmektedir. Şekil 3.22'de ise

çalışma şartlarında elde edilen mod şekilleri reel ve sanal eksende gösterilmektedir. Sönüm oranının artmasıyla 3. modda kütleler arasında yaklaşık 10 derecelik bir faz farkı meydana gelmiştir.

Tablo 3.6 Genel Yüksek Viskoz Sönümlü Sistemin Geleneksel ve Çalışma Şartlarında Karşılaştırılması

	Doğal Frekanslar (Hz)		Mod Şekilleri		Sönüm Oranları	
	GMA	ÇŞMA	GMA	ÇŞMA	GMA	ÇŞMA
1. Mod	1,48	1,48	$0,448-4e^{-4}i$	-0,448	0,0051	0,0068
			$0,804-4e^{-4}i$	$-0,803-4e^{-4}i$		
			1	$-1-2,9e^{-3}i$		
2. Mod	5,14	5,14	1	-1	0,0197	0,0192
			$0,729+5,9e^{-3}i$	$-0,729+3,84e^{-2}i$		
			$-0,5307-1,8e^{-3}i$	$0,528-6,56e^{-2}i$		
3. Mod	7,7	7,70	1	-1	0,0278	0,0268
			$-0,714+6,2e^{-3}i$	$0,707+1,34e^{-1}i$		
			$0,165-2,9e^{-3}i$	$-0,165-1,87e^{-2}i$		

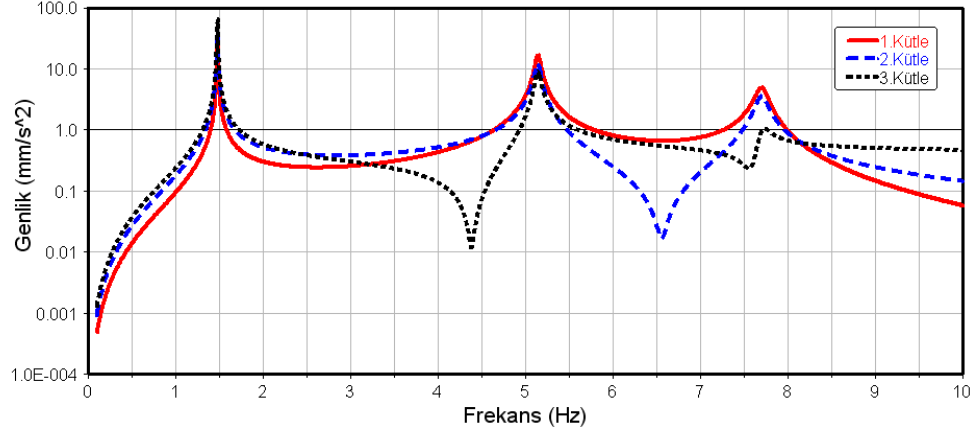


Şekil 3.22 Genel Yüksek Viskoz Sönümlü Modelin Mod Şekillerinin Karmaşık Düzlemde Gösterimi

Bu aşamaya kadar kuvvet 2. kütleden uygulanarak ÇŞMA simülasyonları yapılmış ve farklı sönüm oranları altındaki modal parametreler belirlenmiştir. Çalışmanın bundan sonraki aşamasında ise kütle-yay sisteminin diğer kütlelerine kuvvet uygulanarak yapının tepkileri ölçülmüştür. Elde edilen modal parametreler ise geleneksel modelle karşılaştırılmıştır. Buradaki amaç yapıya uygulanan kuvvetlerin

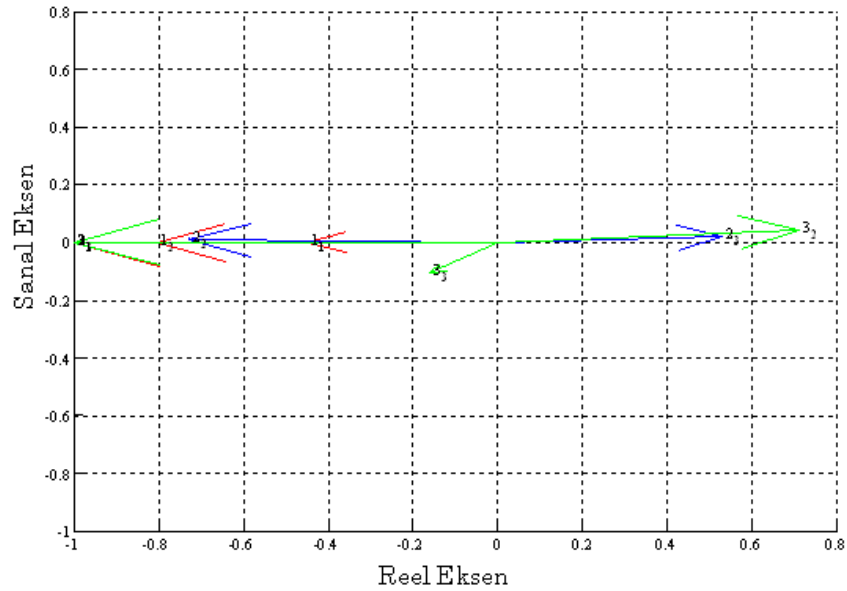
yapının neresinden uygulandığının ÇŞMA sonuçlarını ne şekilde etkilediğini ortaya koymaktır.

Genel viskoz sönümlü modele çalışma şartlarında 3. kütleye x eksenı yönünde kuvvet uygulanmış ve her bir kütleden x eksenı yönündeki ivmeleri alınmıştır. Bu durumda her bir kütleden alınan frekansa bağılı genlik eğrileri Şekil 3.23’de gösterilmiştir.



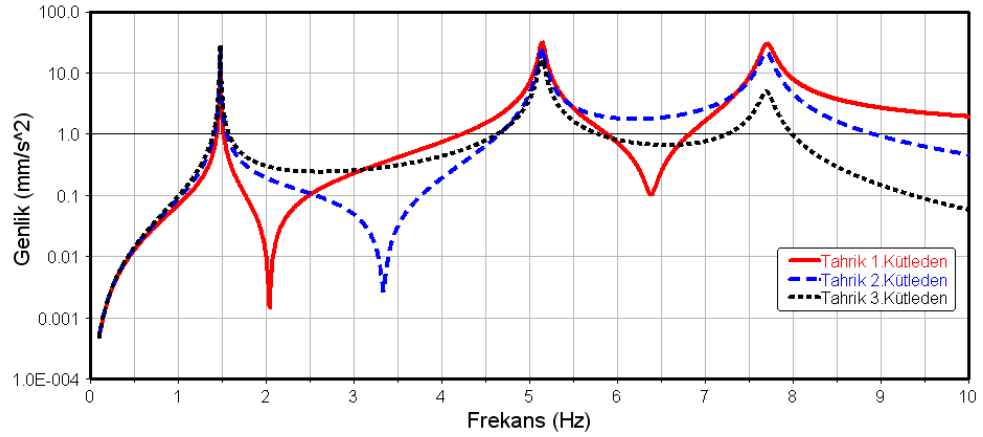
Şekil 3.23 Tahrikin 3.Kütleden Uygulanması Sonucu Genel Viskoz Sönümlü Modelin Frekansa Bağlı Genlik Eğrisi

Bu durumda çalışma şartlarında elde edilen mod şekilleri reel ve sanal eksende şekil 3.24’de gösterilmektedir.

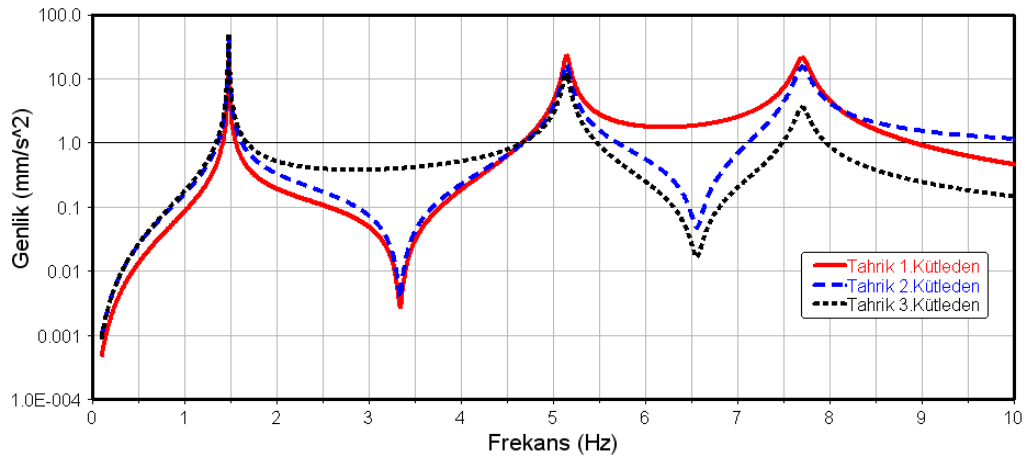


Şekil 3.24 Tahrikin 3.Kütleden Uygulanması Sonucu Genel Viskoz Sönümlü Modelin Mod Şekillerinin Karmaşık Düzlemde Gösterimi

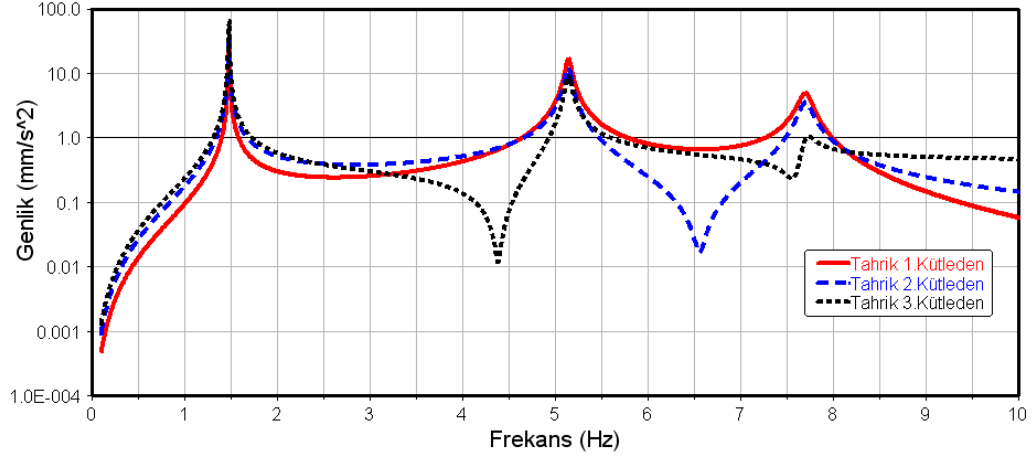
Tahrikin 3. kütleden uygulanması sonucu 3. modda 3. kütle ile diğer kütleler arasında yaklaşık 30 derecelik bir faz farkı meydana gelmiştir. Oysa önceki çalışmalarda tahrikin 2. kütleden uygulanması ile böyle bir durum söz konusu değildi. Bunun nedeni şekil 3.23’de görüldüğü gibi 3. kütleden uygulanan tahrikin 3.modda yapıyı yeterince uyaramaması ve dolayısıyla 3. modda 3. kütlenin genliklerinin diğer kütlelere göre düşük kalmasıdır. Şekil 3.25-27 ‘deki grafikler tahrikin her 3 kütleden uygulanması sonucu sırasıyla 1., 2. ve 3. kütlelerden alınan cevapları göstermektedir.



Şekil 3.25 1. Kütleden Alınan Cevaplar



Şekil 3.26 2. Kütleden Alınan Cevaplar



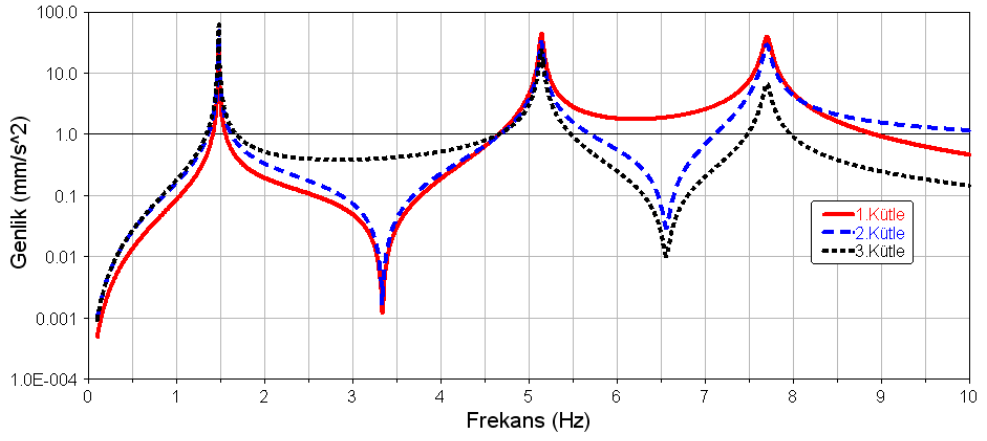
Şekil 3.27 3. Kütleden Alınan Cevaplar

Eğrilerden de görüldüğü gibi tahrikin 3. kütleden uygulanması sonucu alınan cevapların 3. moddaki genlikleri, tahrikin diğer kütlelere uygulanmasına göre düşük kalmaktadır. Bunun sonucunda anlaşılmaktadır ki en uygun tahrikler 1. ve 2. kütlelerden uygulanan tahriklerdir.

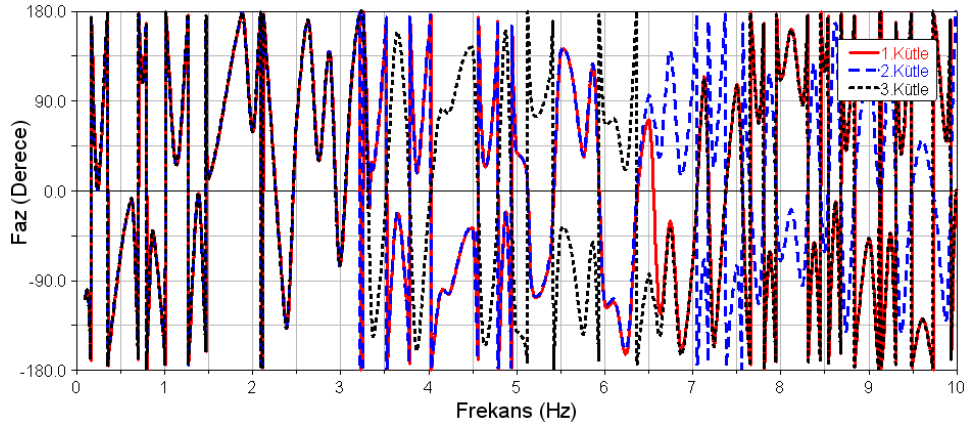
3.3.3 Farklı Tahrik Kuvvetleri Altında ÇŞMA Uygulamaları

Önceki bölümlerde sisteme tüm frekanslarda genliği 1, fazı ise 0 olan süpürücü sinüs kuvveti uygulanarak çalışma şartlarında modal analiz simülasyonları gerçekleştirilmişti. Bu bölümde ise sisteme çalışma şartlarında modal analiz uygulamasının bir varsayımı olan rasgele beyaz tahrik uygulanmıştır. Bu kuvvetin özelliği tüm frekanslarda eşit genlikte bir tahrik uygulamasıdır. Önceki uygulamada da tüm frekanslarda eşit genlikli sinüs kuvveti uygulanmıştı. Rasgele beyaz tahrikin farkı fazının rasgele olmasıdır.

Orantılı viskoz sönümlü modelde 2. kütleye rasgele beyaz tahrik uygulanarak her bir kütleden şekil 3.28 ve 3.29 da görüldüğü gibi ivmelerin genlikleri ve fazları alınmıştır.

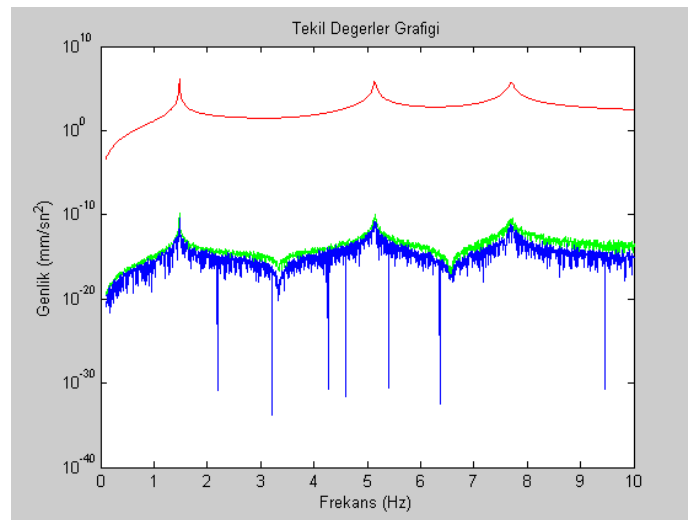


Şekil 3.28 Rasgele Beyaz Tahrik Uygulaması Sonucu Elde Edilen Frekansa Bağlı Genlik Eğrisi



Şekil 3.29 Rasgele Beyaz Tahrik Uygulaması Sonucu Elde Edilen Frekansa Bağlı Faz Eğrisi

Bu durumda çalışma şartlarında elde edilen Tekil Değerler Grafiği şekil 3.30'da gösterilmiştir.



Şekil 3.30 Rasgele Beyaz Tahrik Sonucu Elde Edilen Tekil Değerler Grafiği

Bu durumda geleneksel ve çalışma şartlarında elde edilen modal parametrelerin karşılaştırılması tablo 3.7’de gösterilmiştir. Tablodan da görüldüğü gibi her iki modal analiz sonucu elde edilen doğal frekans, mod şekilleri ve sönüm bir birleriyle uyumludur. Sonuç olarak çalışma şartlarında modal analizin rasgele beyaz tahrik varsayımının geçerliliği burada da görülmektedir.

Tablo 3.7 Rasgele Beyaz Tahrik Sonucu Elde Edilen ÇŞMA ile GMA Karşılaştırılması

	Doğal Frekanslar (Hz)		Mod Şekilleri		Sönüm Oranları	
	GMA	ÇŞMA	GMA	ÇŞMA	GMA	ÇŞMA
1. Mod	1,47	1,481	0,448	-0,448	0,0009	0,001
			0,804	$-0,8032+8e^{-3}i$		
			1	$-1+3,56e^{-4}i$		
2. Mod	5,14	5,144	-1	-1	0,003	0,003
			-0,728	$-0,728+7,5e^{-3}i$		
			0,530	$0,529-0,11e^{-2}i$		
3. Mod	7,7	7,703	1	-1	0,005	0,005
			-0,714	$0,714+2,5e^{-2}i$		
			0,165	$-0,165-3,85e^{-3}i$		

3.4 Düz Plaka Üzerindeki Sayısal Uygulamalar

Çalışma şartlarında modal analiz yöntemi ile yapılan ikinci sayısal çalışma düz levha üzerinde gerçekleştirilmiştir. Üzerinde çalışılan düz levha 450 mm x 200 mm boyutlarındadır ve 3 mm kalınlığa sahiptir. Malzemesi ise çeliktir. Bu plakanın önce sonlu elemanlar modeli kurularak doğal frekansları ve mod şekilleri elde edilmiştir. Daha sonra plaka üzerine kuvvet uygulanmış fakat bu kuvvet ‘ölçülmeden’ plaka üzerinden ivme verileri alınmıştır. Çalışma şartlarında modal analiz yöntemi uygulanarak modal parametreleri belirlenmiş ve geleneksel modal analiz (sayısal) sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

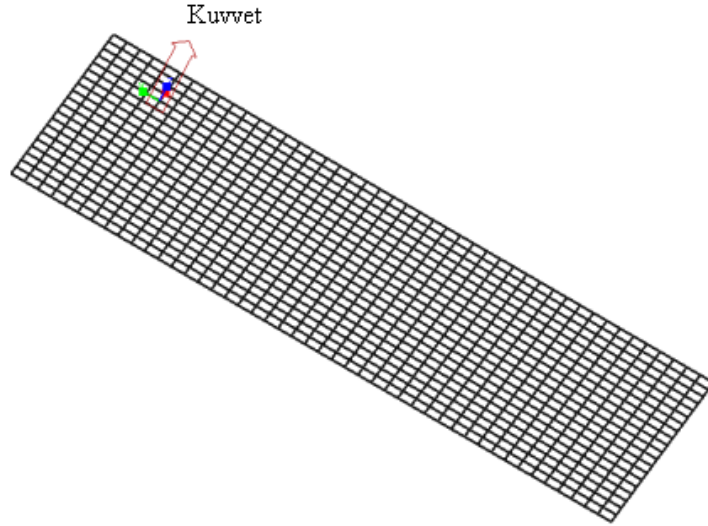
3.4.1 Geleneksel Modal Analiz (Sayısal)

Düz plakanın geometrisi ilk olarak I-DEAS’ta tanımlanmış ve kabuk tipi elemanlar kullanılarak sonlu elemanlara bölünmüştür. Sonlu elemanlar modelimin oluşturulması ile yapının kütle ($[M]$), sönüm ($[C]$) ve direngenlik ($[K]$) matrisleri elde edilmektedir. Sonlu elemanlar modeli oluşturulduktan sonra titreşim analizi yapılarak özdeğer problemi çözülmüş ve I-DEAS’ta yapının doğal frekansları ve

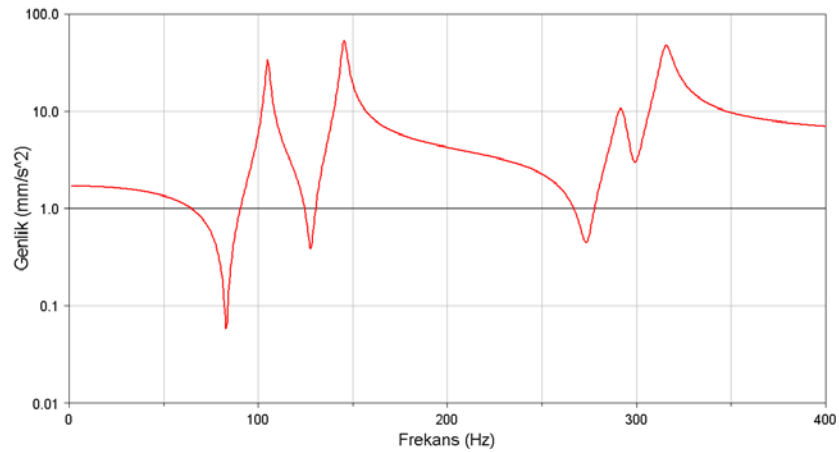
mod şekilleri elde edilmiştir. Bu geleneksel modelle elde edilen modal parametreler bölümün sonunda çalışma şartlarında elde edilen modal parametrelerle karşılaştırılmıştır.

3.4.2 Çalışma Şartlarında Modal Analiz (Sayısal)

Düz plaka, ADAMS-Flex modülü aracılığı ile ADAMS programına aktarılmıştır. Bu plakaya Şekil 3.31’de gösterilen noktadan genliği 1, fazı ise 0 olan süpürücü sinüs kuvveti uygulanmış ve bu kuvvet ölçülmeden yapı üzerinden 50 noktadan ivme verileri alınmıştır. Burada amaçlanan yapının herhangi bir çalışma şartında o noktadan sürekli olarak bir kuvvet uygulandığını temsil etmektir. Şekil 3.32’de ise yapı üzerindeki herhangi bir noktadan alınan frekansa bağlı ivme grafiği görülmektedir.

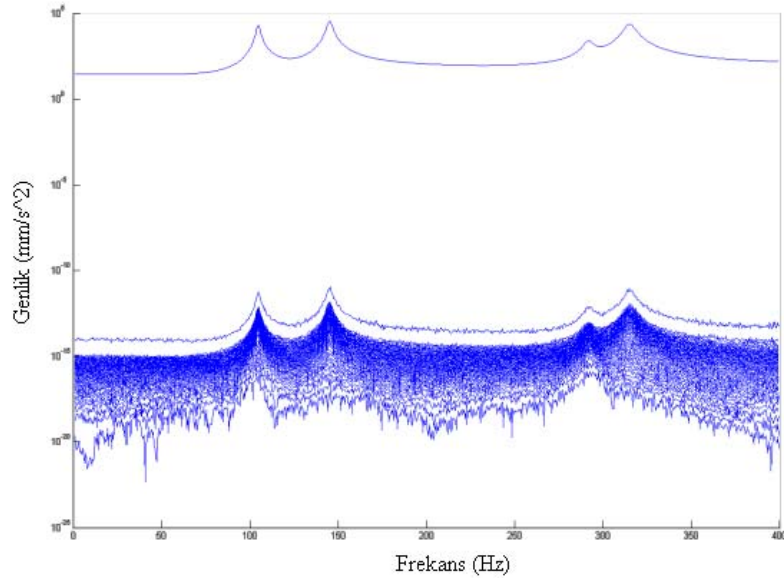


Şekil 3.31 Düz Plaka Sayısal Modeli



Şekil 3.32 Düz Plaka Üzerinden Alınan Frekansa Bağlı Genlik Grafiği

Bu düz plaka 400 Hz'e kadar incelenmiştir. Tüm ivmeler aynı anda alındığından yapı üzerine herhangi bir referans noktası konulmasının bir anlamı yoktur. Yapı üzerinden alınan ivmeler sonucu 50 x 50 boyutunda tek bir güç ve çapraz spektrum matrisi elde edilecektir. Bu matrisin tekil değerlerine ayrıştırılması sonucu yapının doğal frekansları elde edilmiştir. Şekil 3.33'de tekil değerler grafiği görülmektedir. Yapı üzerinden 50 noktadan aynı anda ivme ölçülmesinden dolayı grafikte 50 adet eğri görülmektedir. Genliği en yüksek olan eğriden doğal frekanslar elde edilmiştir. Diğer eğrilerin genlikleri çok düşük kaldığından ilk tekil değerden elde edilen doğal frekanslar dışında yapının başka bir doğal frekansı olmadığı anlaşılmaktadır. Şekil 3.33'de görüldüğü gibi düz plakanın 400 Hz'e kadar 4 adet doğal frekansı olduğu anlaşılmaktadır. Çalışma şartlarında elde edilen mod şekilleri ICATS programında görselleştirilmiştir [54].

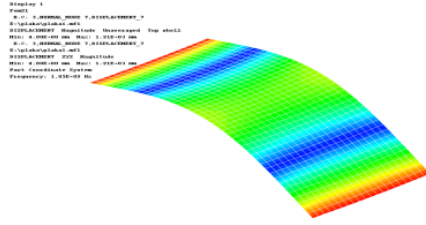


Şekil 3.33 Düz Plaka Tekil Değerler Grafiği

Şekil 3.34-37'de düz plaka üzerinden geleneksel ve çalışma şartlarında elde edilen doğal frekanslar ve o frekanslardaki mod şekillerinin karşılaştırılması verilmektedir.

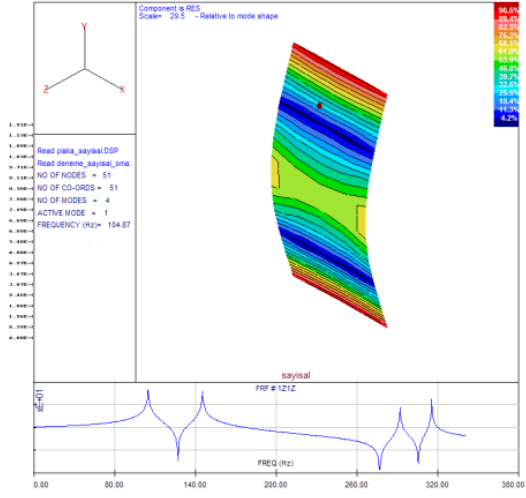
Geleneksel

Mod_1=105 HZ



Çalışma Şartlarında

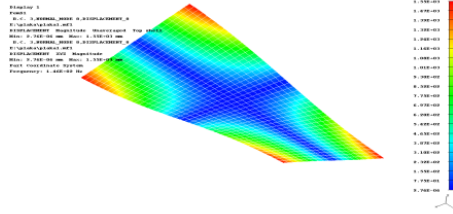
Mod_1=104.87 HZ



Şekil 3.34 Düz Plaka İçin Geleneksel ve ÇŞMA Sonuçları, 1. Mod

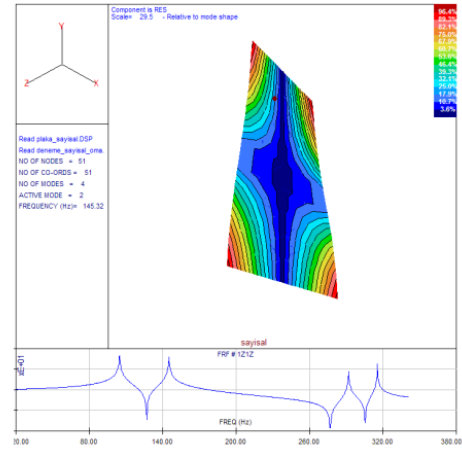
Geleneksel

Mod_2=146 HZ

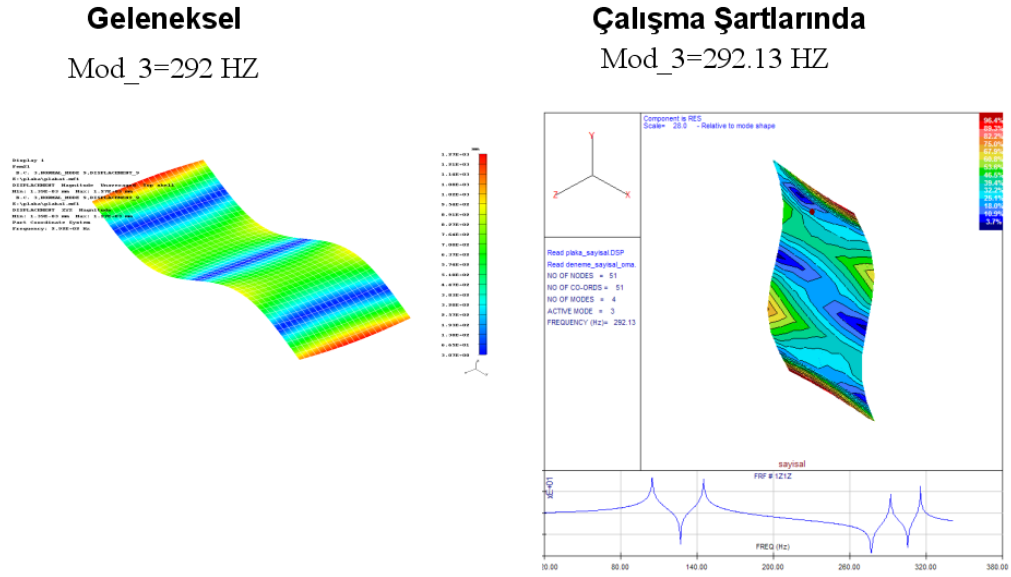


Çalışma Şartlarında

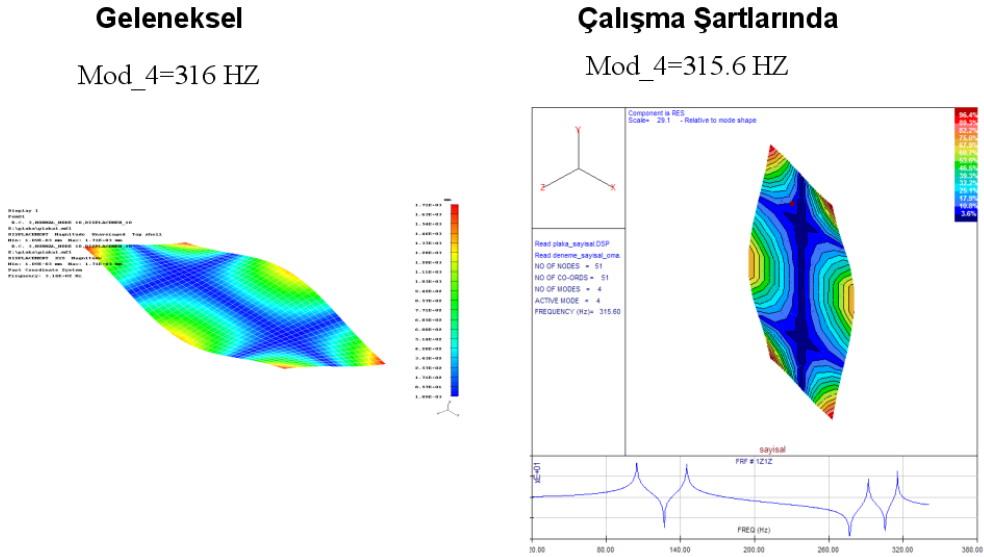
Mod_2=145.32 HZ



Şekil 3.35 Düz Plaka İçin Geleneksel ve ÇŞMA Sonuçları, 2. Mod



Şekil 3.36 Düz Plaka İçin Geleneksel ve ÇŞMA Sonuçları, 3. Mod



Şekil 3.37 Düz Plaka İçin Geleneksel ve ÇŞMA Sonuçları, 4. Mod

Düz plakaya ADAMS programında %1 oranında sönüm eklenmiştir. Yapı üzerinden herhangi bir noktadan alınan ivme bilgisinden yarım güç bant genişliği yöntemiyle bu önceden eklenmiş %1 sönüm bilgisi elde edilmeye çalışılmıştır. Tablo 3.8’de ise her bir doğal frekansta elde edilen sönüm oranları karşılaştırılmıştır.

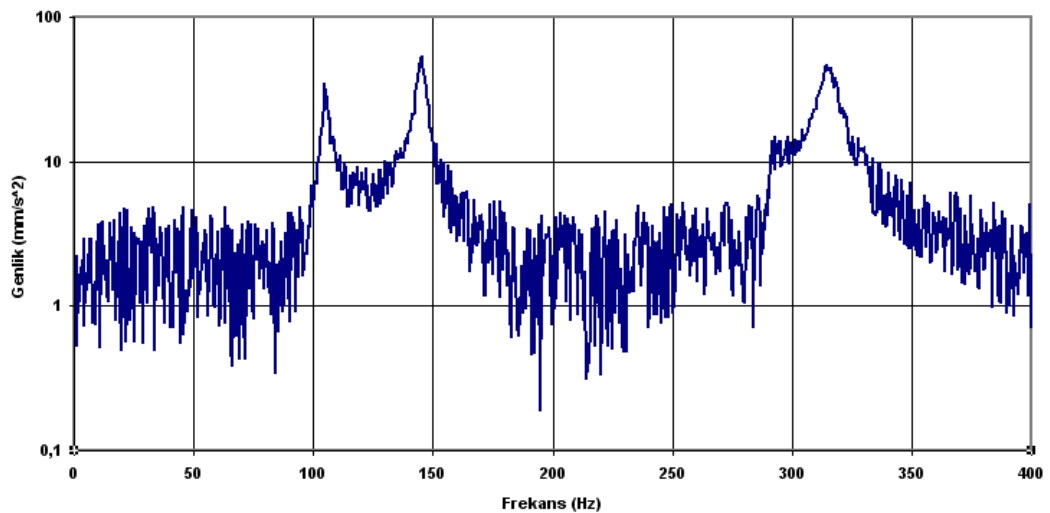
Tablo 3.8 Düz Plaka Sönüm Oranları Karşılaştırılması

	Sönüm Oranları	
	GMA	ÇŞMA
1. Mod	0,01	0,01
2. Mod	0,01	0,0102
3. Mod	0,01	0,0094
4. Mod	0,01	0,0105

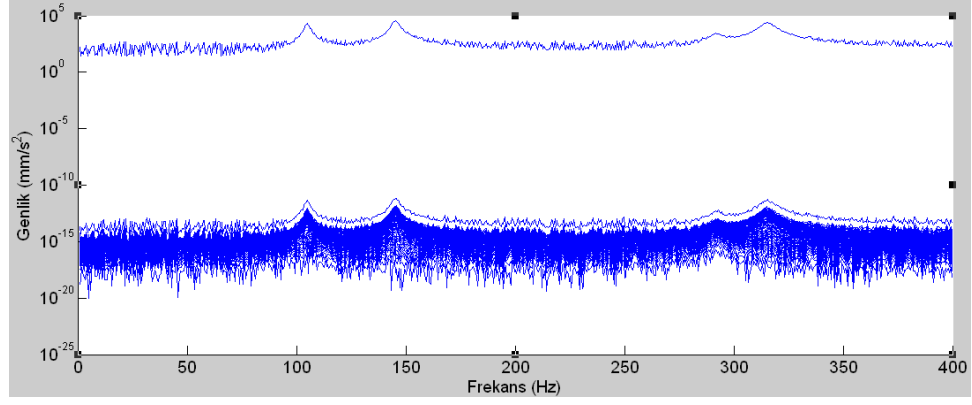
Sonuç olarak düz plaka sayısal modeline hem geleneksel hem de çalışma şartlarında modal analiz uygulanarak doğal frekansları, mod şekilleri ve sönüm oranları elde edilmiştir. Görüldüğü gibi kuvveti ölçmeden elde edilen modal parametreler geleneksel modal analiz sonuçları ile uyumludur.

3.4.3 Sayısal Verilere Gürültü Eklenmesi Durumunda Metodun Geçerliliği

Bu bölümde çalışma şartlarında düz plakadan elde edilen ivmelere çeşitli oranlarda gürültü eklenerek metodun veri kalitesine duyarlılığı ve bu durumlarda geçerliliği araştırılmıştır. İlk olarak elde edilen ivme verilerine %10 oranında gürültü eklenmiştir. Bunun sonucunda plaka üzerinden elde edilen frekansa bağlı genlik grafiği Şekil 3.38’de gösterilmiştir. Tekil Değerler Grafiği ise Şekil 3.39’da görüldüğü gibidir.

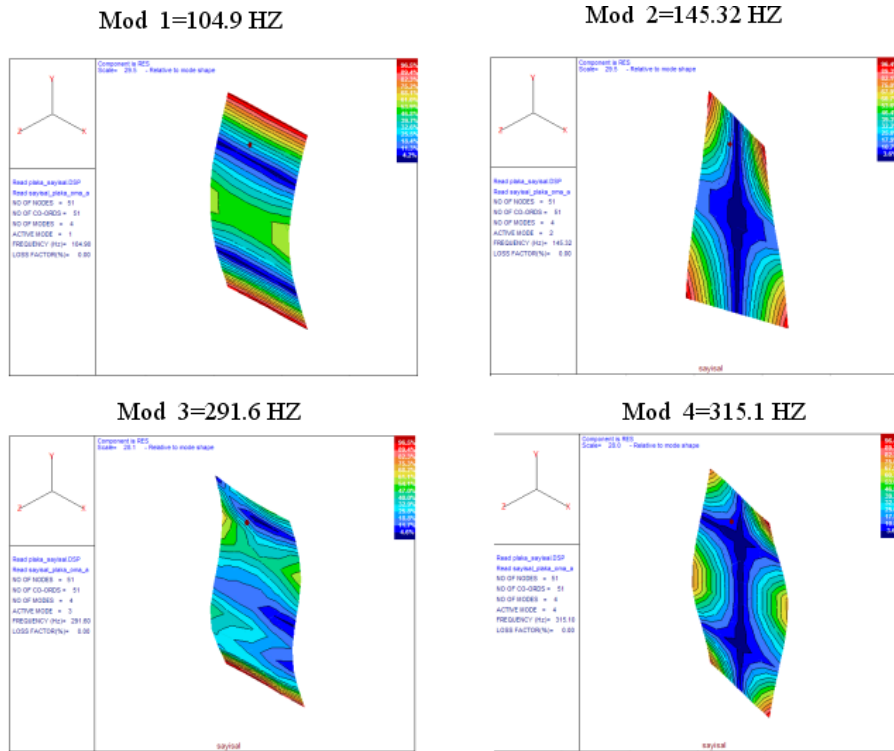


Şekil 3.38 %10 Gürültü Eklenmesi Durumunda Plaka Üzerinden Alınan İvme



Şekil 3.39 %10 Gürültü Eklenmesi Durumunda Elde Edilen Tekil Değerler Grafiği

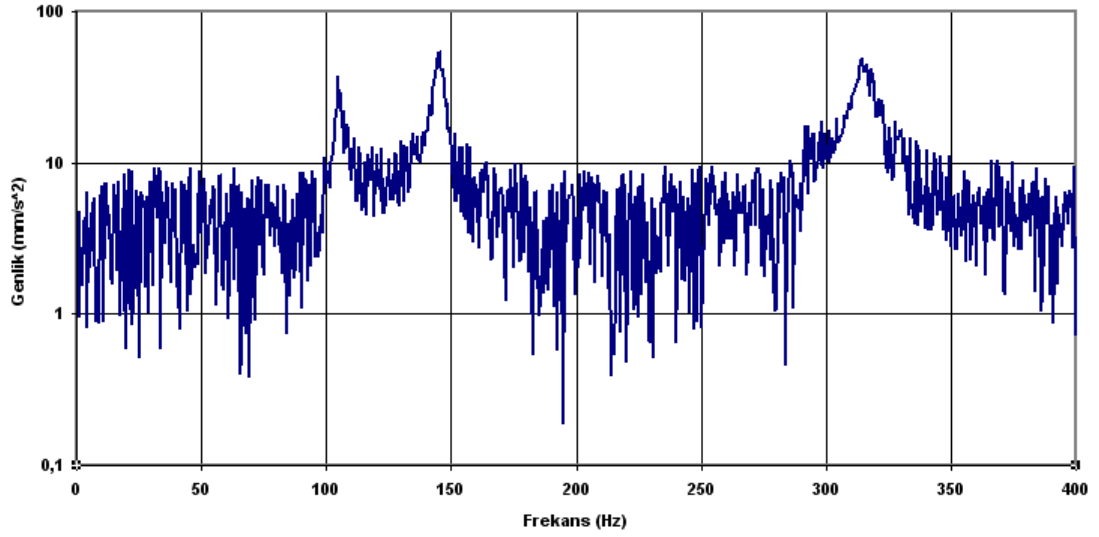
Grafiklerden de görüldüğü gibi 3. modun genliği diğerlerine göre düşük kalmaktadır. Elde edilen mod şekilleri ise Şekil 3.40’da verilmiştir.



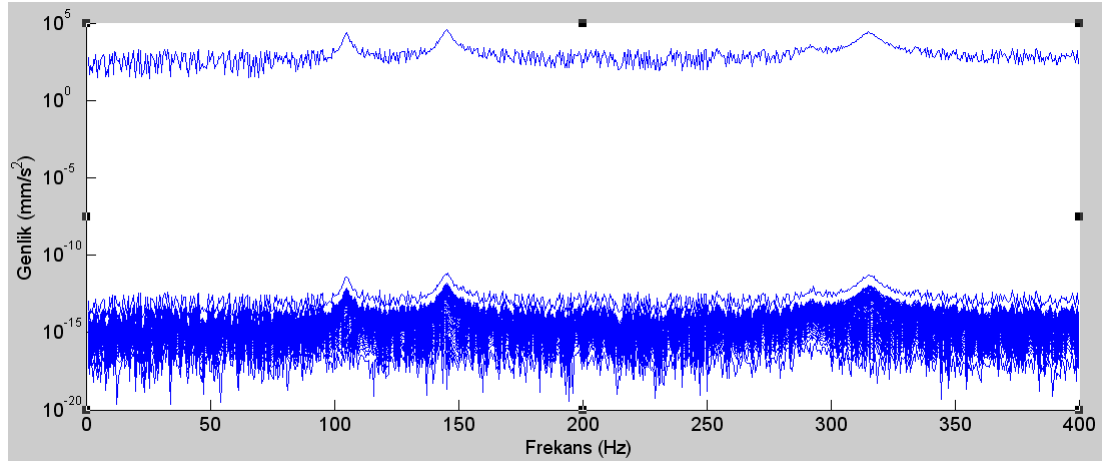
Şekil 3.40 %10 Gürültü Eklenmesi Durumunda Elde Edilen Mod Şekilleri

Sonuç olarak %10 gürültü eklenmesi durumunda 3. modun genliğinin düşmesine rağmen elde edilen doğal frekanslar ve mod şekilleri gürültü eklenmeden elde edilen sonuçlarla oldukça uyumludur.

Gürültü biraz daha arttırılıp %20 oranında eklenirse plaka üzerinden alınan ivme ve elde edilen tekil değerler Şekil 3.41 ve 3.42’de gösterilmiştir.



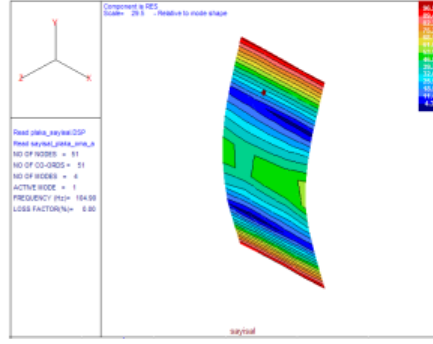
Şekil 3.41 %20 Gürültü Eklenmesi Durumunda Plaka Üzerinden Alınan İvme



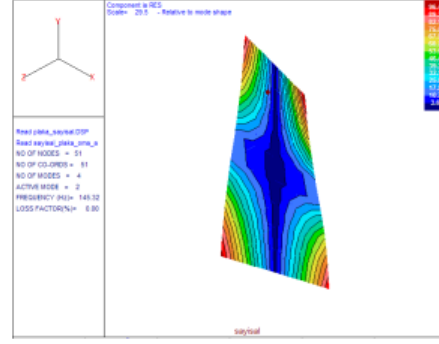
Şekil 3.42 %20 Gürültü Eklenmesi Durumunda Elde Edilen Tekil Değerler Grafiği

Tekil değerler grafiğinden görüldüğü gibi %20 gürültü eklenmesi durumunda 3. modda bir tepe belirlemek oldukça zordur. Yanıtın bilinmemesi durumunda bu modu belirlemek mümkün gözükmemektedir. Dolayısıyla 3. mod belirlenememiştir. Elde edilen diğer modların mod şekilleri Şekil 3.43'de gösterildiği gibi gürültü eklenmeden elde edilen mod şekilleri ile uyumludur.

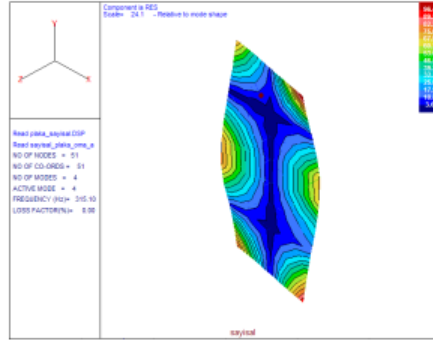
Mod 1=104.9 HZ



Mod 2=145.32 HZ



Mod 4=315.1 HZ



Şekil 3.43 %20 Gürültü Eklenmesi Durumunda Elde Edilen Mod Şekilleri

4 . DENEYSEL UYGULAMALAR

4.1 Deney Düzenegi ve Ölçümler

Çalışma Şartlarında Modal Analiz yönteminin sayısal modeller üzerinde geçerliliğinin sınanmasından sonra bu bölümde de deneysel çalışmalarla yöntemin pratikte uygulanabilirliği üzerinde durulmuştur. Gerçek yapılar üzerinde çalışılmıştır. Yapıda oluşan titreşimler, seçilen yapılar üzerinden deneysel olarak ölçülmüş ve bunlar kullanılarak yapının modal parametreleri belirlenmeye çalışılmıştır.

Çalışma Şartlarında Modal Analiz yönteminin deneysel uygulamaları düz bir kiriş, düz bir plaka ve çalışır durumdaki çamaşır makinesi gövdesinin yan paneli üzerinde gerçekleştirilmiştir. Yapılar üzerinde ilk başta FTF ölçümleri yapılarak Geleneksel Modal Analiz uygulanmış ve yapıların modal parametreleri belirlenmiştir. Daha sonra bu yapılar üzerinden titreşim ivmeleri ölçülerek Çalışma Şartlarında Modal Analiz yöntemi uygulanmış ve modal parametreler belirlenmiştir. Daha sonra çalışma şartlarında modal analiz sonuçlarının doğruluğu ve güvenilirliğini belirlemek için Geleneksel Modal Analiz ve ÇŞMA yaklaşımları ile elde edilen modal parametreler karşılaştırılmıştır. Yapıların FTF'leri sarsıcı veya modal çekiç kullanılarak ölçülmüştür. Çalışma Şartlarında ise yapıya yine sarsıcı veya modal çekiç kullanılarak tahrik uygulanmış fakat bu tahrik kuvveti ölçülmeden yapı üzerinden sadece titreşim ivmeleri alınmıştır. Ayrıca çamaşır makinesi çalışır durumda iken de titreşimler ölçülmüş ve ÇŞMA gerçekleştirilmiştir.

Deneysel çalışmalarda ölçüm yapılırken, Geleneksel Modal Analiz uygulamalarında genelde Şekil 4.1'de gösterilen Bruel-Kjaer 2035 Sinyal Analizörü ve Çalışma Şartlarında titreşimlerin ölçülmesi için ise Şekil 4.2'de gösterilen Bruel-Kjaer PULSE Analizörü ve yazılımı kullanılmıştır. Analizörlerin sınırlı sayıda kanalları olduğundan tüm noktalardan ölçüm alabilmek için ivmeölçerlerin yapı üzerinde gezdirilerek ölçümlerin tekrarlanması gerekmektedir.



Şekil 4.1 Bruel-Kjaer 2035 Sinyal Analizörü



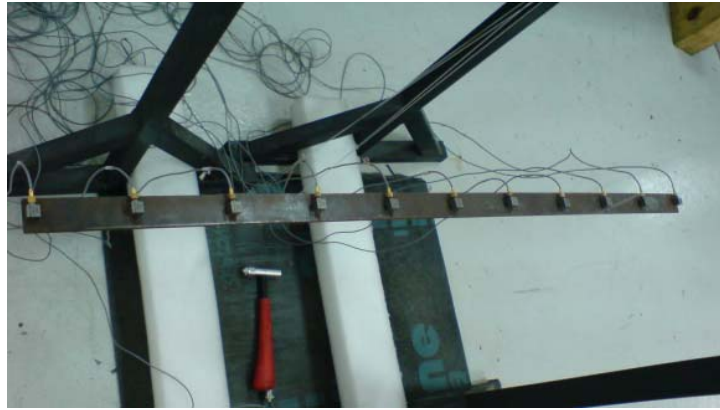
Şekil 4.2 Bruel-Kjaer PULSE Analizörü ve yazılımı

İvmeölçerlerle yapılan titreşim ölçümlerinin Fourier Dönüşümleri ve Çapraz Spektrumların hesaplanması analizör tarafından gerçekleştirilmiştir. Alınan titreşim ölçümlerinin zamana bağlı veri olarak kaydedilmesi ve daha sonra Matlab programında Fourier Dönüşümünün gerçekleştirilmesi de mümkündür. Bir önceki bölümde sunulan çalışmalar esnasında ikinci seçenek kullanılmıştır. Ancak, analizör kullanılması durumunda veri kalitesi açısından çapraz spektrumların bilgisayara aktarılması tercih edilmiştir.

4.2 Düz Kiriş Üzerinde Yapılan Deneysel Çalışmalar

Deneysel bölümdeki çalışmaların ilki Şekil 4.3’de gösterilen düz kiriş üzerinde gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmalarda ilk olarak düz kiriş modal çekiç ile tahrik edilmiş ve FTF’ler analiz edilerek yapının modal parametreleri belirlenmiştir. Daha sonra bu yapı yine modal çekiç ile tahrik edilerek bu kez zamana bağlı titreşimleri (ivmeleri) ölçülerek ICATS programında “Zaman Alanında Çalışma Şartlarında Modal Analiz” modülünde modal parametreler belirlenmiş ve geleneksel olarak elde

edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. ICATS programı 1.bölümde bahsedilen zaman alanı yöntemlerinden Doğal Tahrik Yönteminin bir uzantısı olan En Küçük Kareler Yöntemi Kompleks Eksponansiyel metodunu kullanmaktadır [28]. Bu programın kullanılan versiyonunda metot hakkında yeterli bilgi verilmemiştir ve referans ivmeölçer bilgisine gerek duymadığı anlaşılmaktadır. Bu durum, çalışma şartlarında modal analiz uygulanırken yapıdaki tüm koordinatlarda titreşimlerin aynı anda ölçülmesini gerektirmektedir. Aşağıda açıklanan bu çalışmadaki amaç farklı yöntem ve programlarla Çalışma Şartlarında Modal Analizin pratikte uygulanabilirliğinin gösterilmesidir.



Şekil 4.3 Düz Kiriş

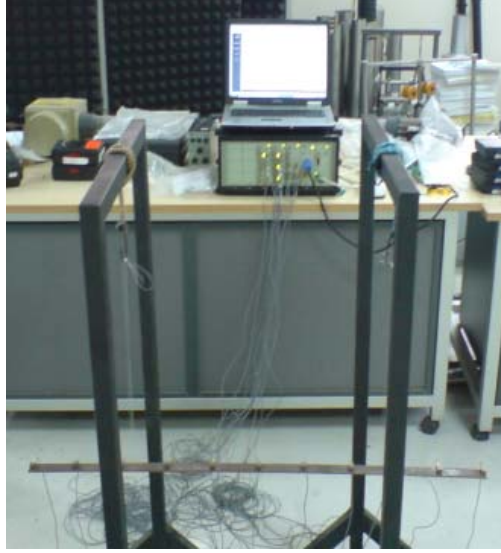
Bir diğer çalışmada ise yapı bu kez sarsıcı ile tahrik edilerek ve yine zamana bağlı titreşimleri (ivmeleri) ölçülerek ICATS programında “Zaman Alanında Çalışma Şartlarında Modal Analiz” modülünde modal parametreler belirlenmiş ve geleneksel olarak elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. En sonunda yapının modal parametreleri FAA yöntemi ile edilmiş ve geleneksel modelle karşılaştırılmıştır.

4.2.1 Modal Çekiç İle Yapılan Ölçüm ve Analizler

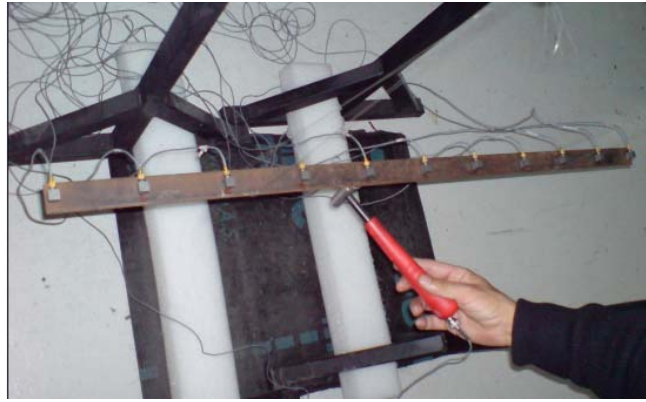
Çalışmanın bu bölümünde yapı üzerine modal çekiç ile darbe kuvveti uygulanmış ve bu tahrik kuvveti ölçülmeden zamana bağlı olarak elde edilen ivmeler kullanılarak yapının modal parametreleri belirlenmiştir. Sonuçta FTF yardımıyla önceden bilinen modal parametreler, Çalışma Şartlarında Modal Analiz uygulanarak elde edilen modal parametrelerle karşılaştırılmış ve sonuçlar yorumlanmıştır.

İlk olarak yapı üzerinde 11 adet ölçüm noktası belirlenmiştir. Yapı Şekil 4.4’de gösterildiği gibi misinalar yardımıyla asılmış ve modal çekiç ile Şekil 4.5’de görüldüğü gibi 5 noktasından darbe kuvveti uygulanmıştır. Yapı üzerine konulan 11

adet ivmeölçerle aynı anda tüm noktalardan Şekil 4.6'da gösterilen B&K PULSE Analizörü yardımıyla hem FTF'ler hem de zamana bağlı ivmeler ölçülmüştür. Tüm noktalardan aynı anda ölçüm alınmasından dolayı referans ivmeölçere gerek yoktur. Düz kiriş bu çalışmada 200Hz'e kadar incelenmiştir.



Şekil 4.4 Misinalar ile Asılan Düz Kiriş

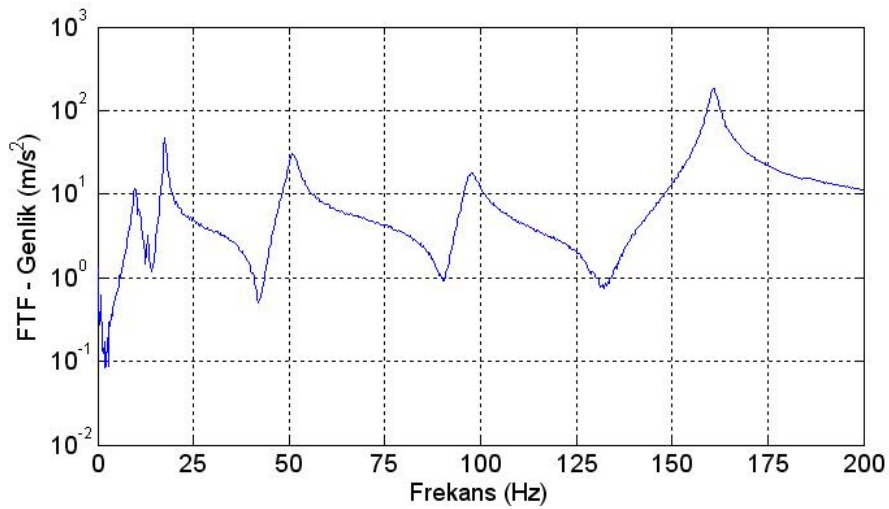


Şekil 4.5 Düz Kirişe 5 Noktasından Uygulanılan Darbe Kuvveti Gösterimi



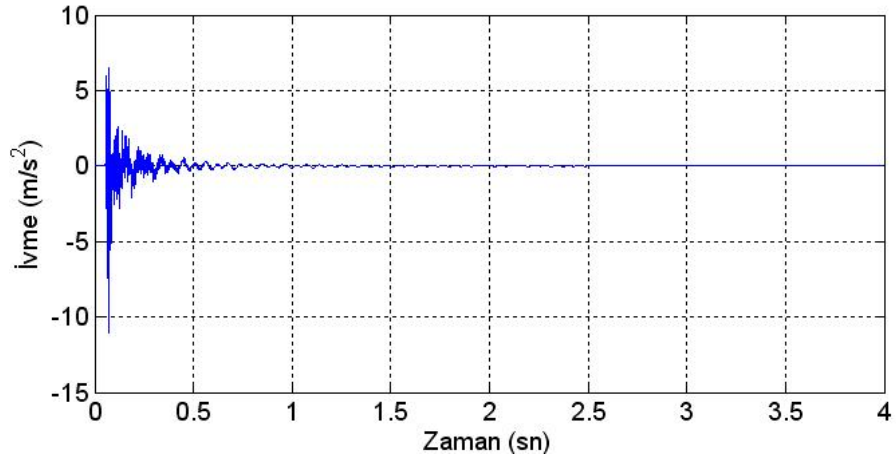
Şekil 4.6 B&K PULSE Analizörü

İlk olarak Şekil 4.7’de düz kiriş üzerine 5 noktasından uygulanan darbe kuvveti sonucu 5 noktasından ölçülen FTF görülmektedir. 200 Hz’e kadar toplam 800 adet veri noktası kullanılmıştır. Dolayısıyla frekans çözünürlüğü 0.25 Hz’dir. Kuvvete ve ivmeye herhangi bir pencereleme fonksiyonu uygulanmasına gerek kalmamıştır. Bunun nedeni, zamana bağlı olarak ölçülen ivme genliklerinin ölçüm periyodu sonunda sıfıra yaklaşmasıdır. Yapı üzerinden ölçülen spektrumların 3 defa ortalaması alınarak FTF belirlenmiştir. Düz kirişin incelenilen 200 Hz’e kadar 4 adet modu mevcuttur. FTF’de görülen ilk tepe fiziksel bir mod olmayıp yapının misinalar yardımı ile asılması sonucu görülen askı frekansıdır.



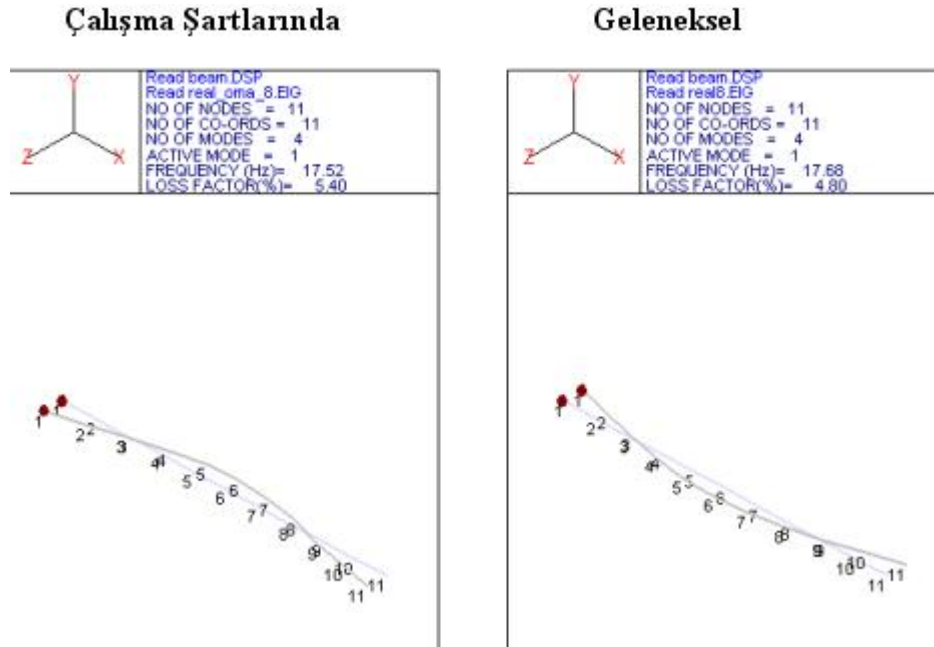
Şekil 4.7 Düz Kiriş Üzerinden 5 noktasından Alınan Frekans Tepki Fonksiyonu

5 noktasından uygulanan darbe kuvveti sonucu yine 5 noktasından ölçülen zamana bağlı ivme grafiği Şekil 4.8’de gösterilmektedir. Periyot 4 sn’dir ve 2048 adet veri noktası alınmıştır.



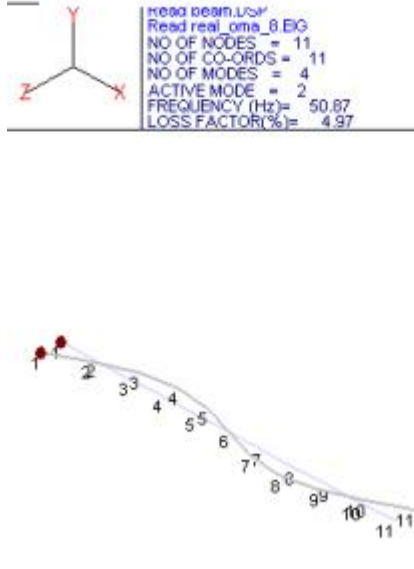
Şekil 4.8 Düz Kiriş Üzerinden 5 noktasından Alınan Zamana Bağlı İvme Grafiği

Sonuç olarak ölçülen FTF ICATS programına aktarılarak geleneksel modal analiz sonucu doğal frekanslar, mod şekilleri ve sönüm kayıp faktörü elde edilmiştir. Zaman verileri ise yine ICATS programında 'Zaman Alanında ÇŞMA' modülü yardımıyla modal parametreler belirlenmiş ve geleneksel yöntemle elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Şekil 4.9 - 4.12 arasında ise çalışma şartlarında ve geleneksel modal analiz sonucu elde edilen modal parametrelerin görsel olarak karşılaştırılması verilmektedir.

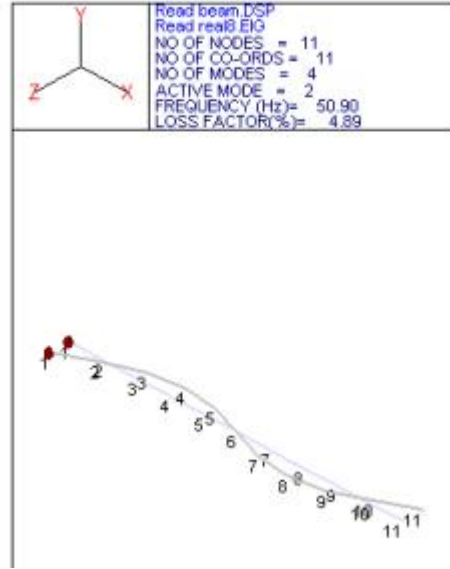


Şekil 4.9 Düz Kiriş 1. Modun Karşılaştırılması

Çalışma Şartlarında

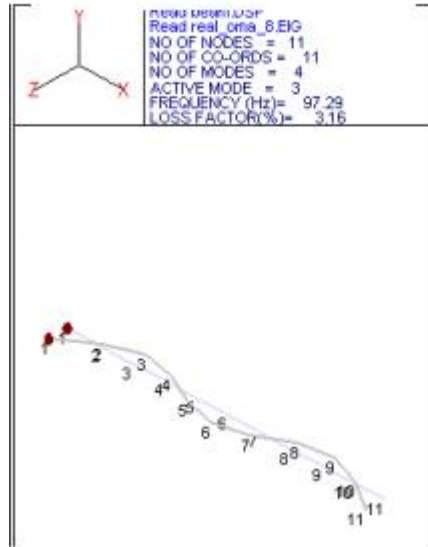


Geleneksel

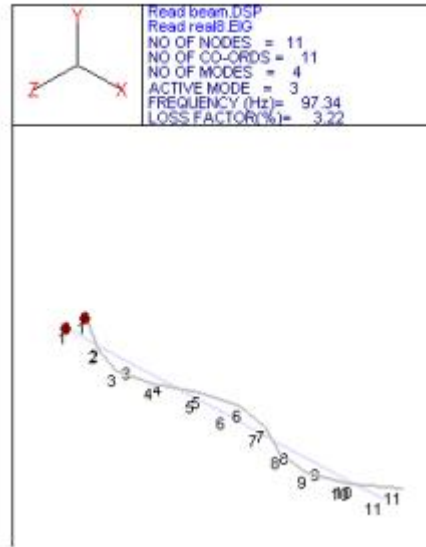


Şekil 4.10 Düz Kiriş 2. Modun Karşılaştırılması

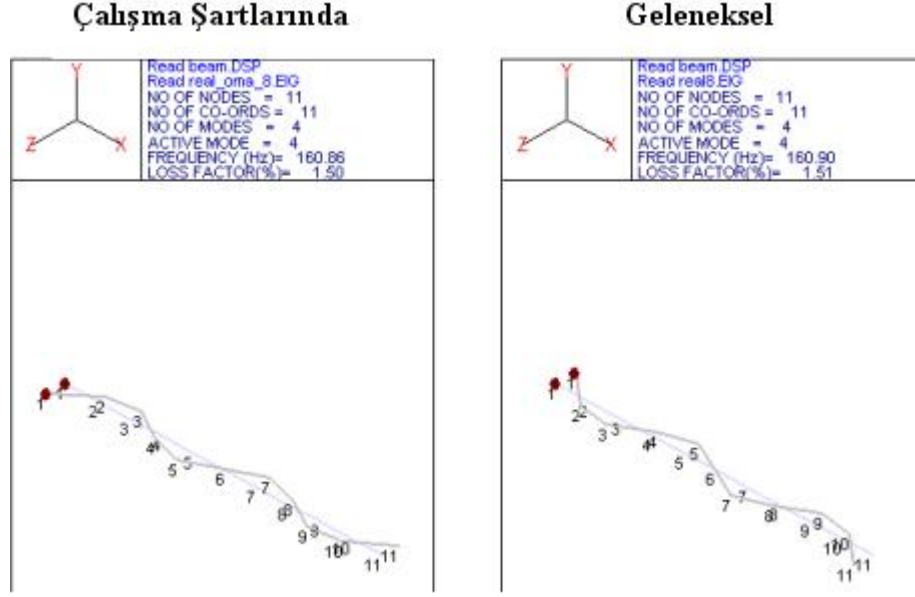
Çalışma Şartlarında



Geleneksel



Şekil 4.11 Düz Kiriş 3. Modun Karşılaştırılması



Şekil 4.12 Düz Kiriş 4. Modun Karşılaştırılması

Şekillerden de görüldüğü gibi modal çekiç kullanarak tahrik uygulanıp bir taraftan FTF'ler kullanılarak (geleneksel modal analiz) elde edilen modal parametreler ile çalışma şartlarında (sadece titreşimler ölçülerek) elde edilen modal parametreler birbirleriyle uyumludur. Mod şekillerinin grafiksel olarak karşılaştırılmasına alternatif olarak, modların bazı basit istatistiksel özellikleri de matematiksel olarak hesaplanabilir. Bunun için kullanılan en yaygın matematiksel araç Modal Güvence Kriteri'dir (MGK) (Modal Assurance Criteria).

Aşağıda verilen formül, iki ayrı veya aynı gruba ait olan iki mod şeklinin karşılaştırılması olarak açıklanabilir. Çalışma şartlarında ölçülen mod şekli $\{\Phi_x\}$ vektörü ile geleneksel olarak belirlenen mod şekli ise $\{\Phi_p\}$ vektörü ile temsil edilsin. Modal Güvence Kriteri, diğer bir adıyla Mod Şekli Korelasyon Katsayısı (Mod Shape Correlation Coefficient), düz çizgi korelasyonundan noktaların ne kadar saptığının bir ölçüsüdür.

$$MGK(p, x) = \frac{\left| \sum_{j=1}^n (\phi_x)_j (\phi_p)_j^* \right|^2}{\left(\sum_{j=1}^n (\phi_x)_j (\phi_x)_j^* \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n (\phi_p)_j (\phi_p)_j^* \right)} \quad (4.1)$$

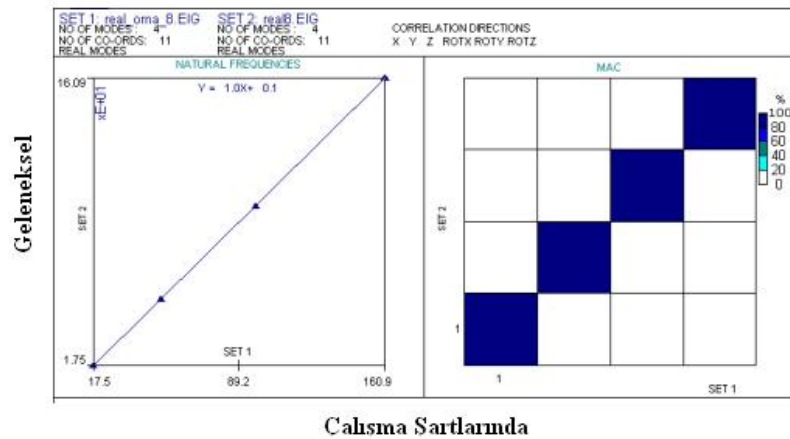
Burada, n parametresi mod sayısını, ϕ_x verilen mod için çalışma şartlarında j noktasındaki değeri, ϕ_p ise geleneksel olarak elde edilen j noktasındaki değeri göstermektedir [27].

Formülünden de anlaşıldığı üzere, mod şekli verisi kompleks olmasına rağmen MGK skalerdir. MGK değeri, geleneksel ve çalışma şartlarında deneysel olarak elde edilen modelin uyumuna bağlı olarak en fazla 1 olabilir. 1'e yakın değerler uyumun çok iyi olduğunu, 1'den uzak değerler ise uyumun az olduğunu gösterir. Bu değerler uyumlu bir mod şekli için 0.9'u aşarken, uyumsuz mod şekilleri için 0.05'in altına düşebilir. MGK değerinin 1'den farklı olmasının nedenleri özetle aşağıdakilerden biri veya daha fazlası olabilir:

- Yapının doğrusal olmayan davranışları
- Ölçümlerdeki gürültü
- Ölçülmüş verilerin yetersiz modal analizi.

Mod şekillerinin matematiksel olarak karşılaştırılması, ilk 4 mod şekli için Modal Güvence Kriteri kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Bu karşılaştırma sonucu elde edilen MGK değerleri tabloda verilmiştir ve MGK'nın iki boyutlu grafikte gösterimi Şekil 4.13'de verilmiştir. Grafikte yatay eksen çalışma şartlarında elde edilen modların numarasını, dikey eksen ise geleneksel olarak elde edilen modların numarasını göstermektedir. Soldaki grafik doğal frekansların karşılaştırılması, sağdaki grafik ise mod şekillerinin MGK ile karşılaştırılmasıdır.

Şekilden de görüldüğü gibi çekiç ile düz kiriş üzerinde aynı anda tüm noktalardan ivme alınması durumunda elde edilen mod şekilleri ile FTF'ler ölçülerek geleneksel olarak elde edilen mod şekilleri tam bir uyum içindedir. Ancak, unutulmaması gereken şey ÇŞMA'den elde edilen mod şekillerinin kütleyle göre normalizasyonu mümkün değildir.



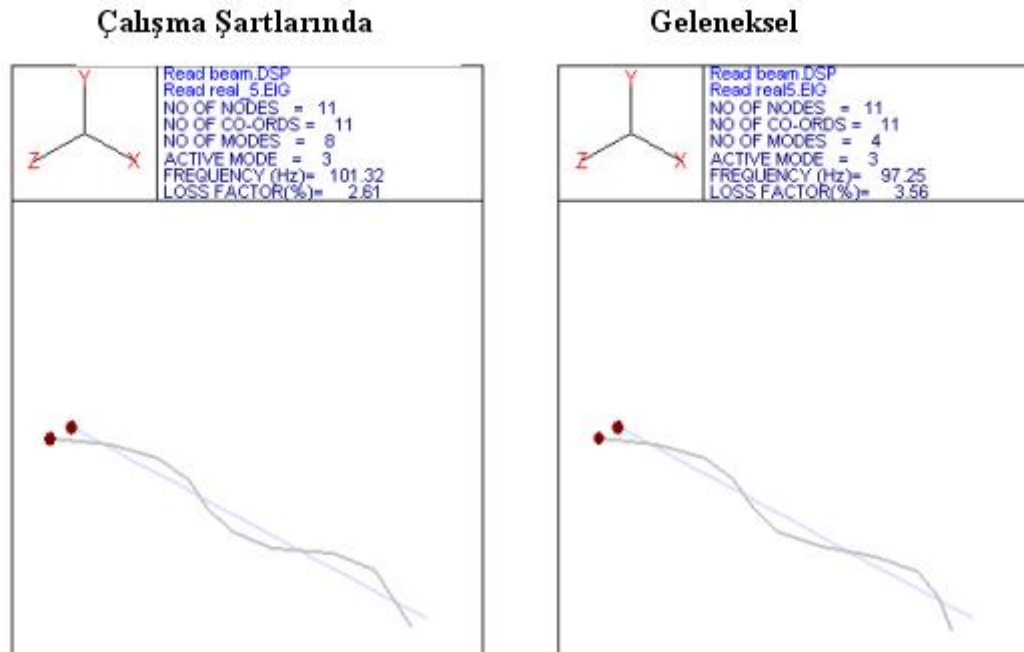
Şekil 4.13 Düz Kiriş İçin MGK

Bir diğer uygulama ise öncekinden farklı olarak düz kiriş üzerinden 11 adet ivmeölçerden aynı anda ivme alınması yerine 3 ivmeölçerin yapı üzerinde gezdirilmesi sonucu zamana bağlı ivmelerin hesaplanarak çalışma şartlarında yapının modal parametrelerinin belirlenmesidir. Bu uygulamanın amacı çok daha büyük yapılarda daha çok noktadan ölçüm alınması gerektiğinde tüm noktalardan aynı anda ölçüm alınamayacağından (ivmeölçer ve analizör kanalı yetersizliğinden) ivmeölçerlerin yapı üzerinde gezdirilmesi ihtiyacının doğmasıdır.

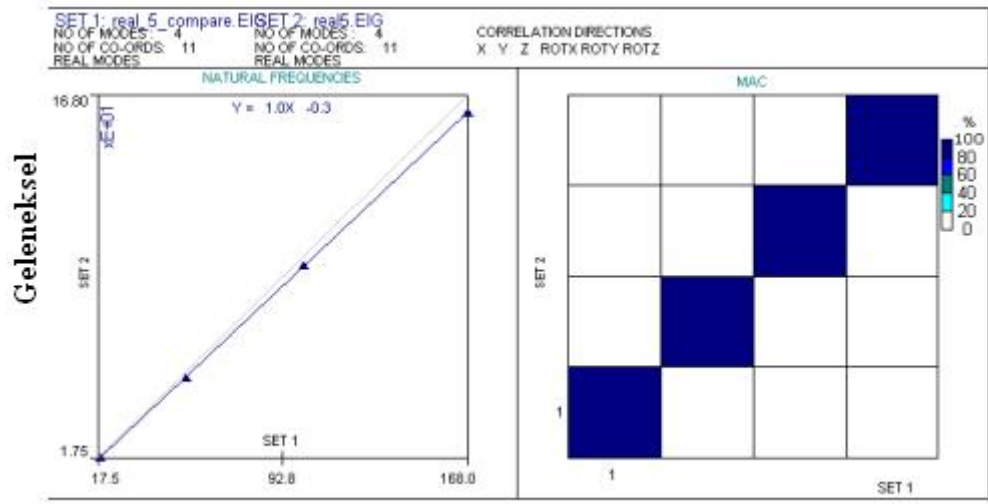
Bu çalışmanın sonucunda çalışma şartlarında ve geleneksel olarak elde edilen doğal frekanslar ve sönüm kayıp faktörlerinin karşılaştırılması Tablo 4.1’de, 3. modun mod şeklinin karşılaştırılması ise Şekil 4.14’de verilmiştir. Modal Güvence Kriteri ile tüm mod şekillerinin karşılaştırılması ise Şekil 4.15’de gösterilmiştir.

Tablo 4.1 İvmeölçerlerin Yapı Üzerinde Gezdirilmesi Sonucu Elde Edilen Doğal Frekansların ve Sönüm Kayıp Faktörlerinin Karşılaştırılması

	Doğal Frekanslar (Hz)		Sönüm Kayıp Faktörü (%)	
	GMA	ÇŞMA	GMA	ÇŞMA
1. Mod	17,53	18,67	3,38	2,64
2. Mod	50,98	53,61	4,36	2,20
3. Mod	97,25	101,32	3,56	2,61
4. Mod	160,62	168,00	1,51	0,75



Şekil 4.14 İvmeölçerlerin Yapı Üzerinde Gezdirilmesi Sonucu Elde Edilen 3. Modun Karşılaştırılması



Çalışma Şartlarında

Şekil 4.15 İvmeölçerlerin Yapı Üzerinde Gezdirilmesi Sonucu Elde Edilen MGK

Önceden de bahsedildiği gibi ICATS programının kullanılan bu versiyonunda referans ivmeölçer bilgisi istenmemektedir. Dolayısıyla yapı üzerindeki tüm noktalardan aynı anda ölçüm alınması ihtiyacı doğmaktadır. Fakat yapılan bu çalışmada referans ivmeölçer konmadan yapı üzerinden ivmeölçerlerin gezdirilmesi sonucu cevaplar alınmıştır. Fakat elde edilen mod şekilleri hala % 90'ın üzerinde bir uyumlulukla elde edilmiştir. Bunun nedeni yapının modal çekiç ile tahrik edilmesi sonucu her ölçümde yapının aynı anda tetiklenmesidir. Dolayısıyla modal çekiç aslında bir referans sağlamaktadır. Tablo 4.1'den de görüldüğü gibi doğal frekanslar ve sönüm kayıp faktörleri ise önceki çalışmaya oranla bir miktar sapma göstermiştir. Doğal frekansların bir miktar farklı bulunmasının nedeni ivmeölçerlerin yapı üzerinde gezdirilmesi sonucu yarattığı kütle etkisidir. Oysa bir önceki çalışmada tüm ivmeölçerler aynı anda yapı üzerinde bulunduğundan her iki modelden elde edilen doğal frekanslar aynı bulunmuştur. Tablo 4.1'de görüldüğü gibi sönüm kayıp faktörlerinin geleneksel ve çalışma şartlarında bir miktar farklı bulunmasının nedeni geleneksel olarak elde edilen modelde tüm ivmeölçerlerin aynı anda yapı üzerinde bulunmasından dolayı kabloların yarattığı yüksek sönümdür. Oysa çalışma şartlarında elde edilen modelde ivmeölçerler yapı üzerinde gezdirilmiştir. Dolayısıyla kabloların yarattığı sönüm etkisi çalışma şartlarında görülmemektedir.

4.2.2 Sarsıcı ile Yapılan Çalışmalar

4.2.2.1 Rasgele Tahrik

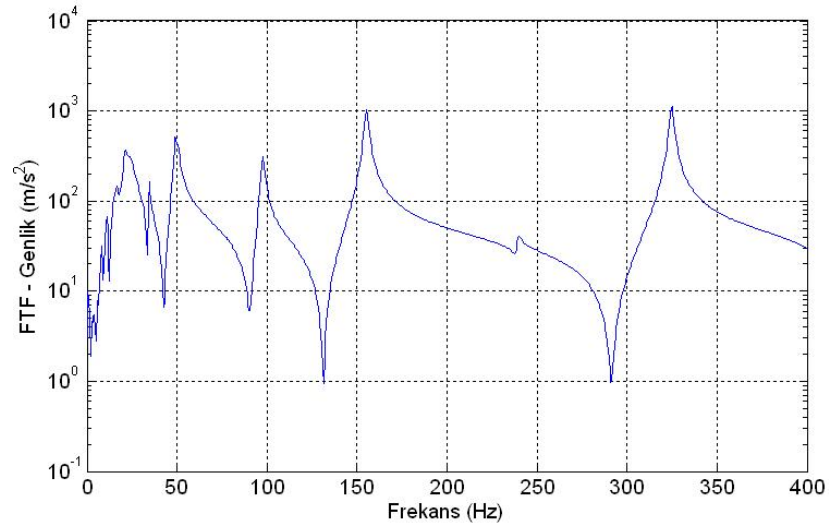
Çalışmanın bu bölümünde modal çekiç ile yapılan çalışmalardan farklı olarak yapı üzerine sarsıcı ile rasgele tahrik kuvveti uygulanmış ve zamana bağlı olarak elde edilen ivmeler ölçülerek yapının modal parametreleri belirlenmiş ve yapı üzerinden FTF'ler ölçülerek elde edilen geleneksel modal parametrelerle karşılaştırılmıştır.

İlk olarak yapı üzerine sarsıcı ile Şekil 4.16'da görüldüğü gibi 5 noktasından rasgele tahrik kuvveti uygulanmış ve yapı üzerine konulan 11 adet ivmeölçerle aynı anda tüm noktalardan hem FTF'ler hem de zamana bağlı ivmeler ölçülmüştür. Tüm noktalardan aynı anda ölçüm alınmasından dolayı referans ivmeölçere gerek yoktur. Düz kiriş bu çalışmada 400Hz'e kadar incelenmiştir.



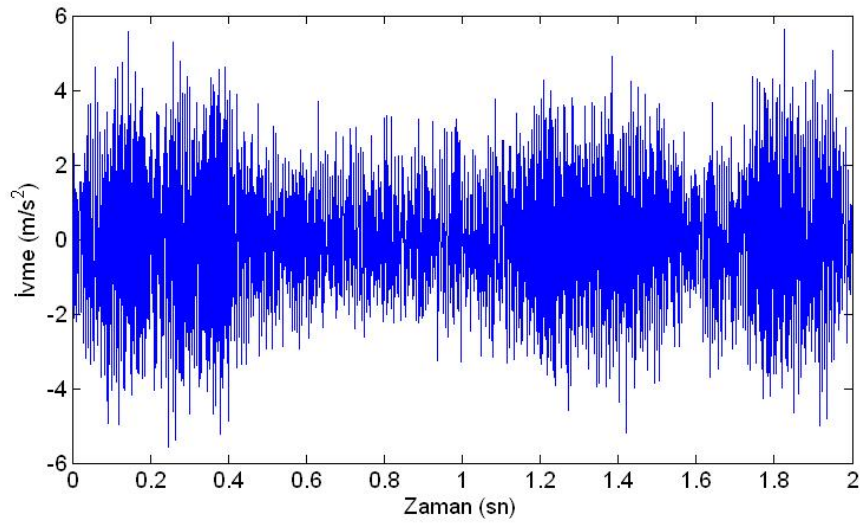
Şekil 4.16 Sarsıcı ile Tahrik Edilen Düz Kiriş

Şekil 4.17'de düz kiriş üzerine 5 noktasından uygulanan rasgele tahrik kuvveti sonucu 5 noktasından ölçülen FTF görülmektedir. 400 Hz'e kadar toplam 800 adet veri noktası kullanılmıştır. Dolayısıyla frekans çözünürlüğü 0.5 Hz'dir. Kuvvete ve ivmeye Hanning pencereleme fonksiyonu uygulanmıştır. Yapı üzerinden FTF ölçülmesi sırasında 100 adet ortalama alınmıştır. Düz kirişin incelenilen 400 Hz'e kadar 6 adet modu mevcuttur.



Şekil 4.17 Sarsıcı ile Tahrik Sonucu Düz Kiriş Üzerinden 5 noktasından Alınan FTF

5 noktasından uygulanan rasgele tahrik kuvveti sonucu yine 5 noktasından ölçülen zamana bağlı ivme grafiği ise Şekil 4.18’de gösterilmektedir. Periyot 2 sn’dir ve 2048 adet veri noktası alınmıştır.



Şekil 4.18 Sarsıcı ile Tahrik Sonucu Düz Kiriş Üzerinden 5 noktasından Alınan Zamana Bağlı İvme Grafiği

Bu çalışmanın sonucunda çalışma şartlarında ve geleneksel olarak elde edilen doğal frekanslar ve sönüm kayıp faktörlerinin karşılaştırılması Tablo 4.2’de, 2. modun mod şeklinin görsel olarak karşılaştırılması ise Şekil 4.19’da verilmiştir. Modal Güvence Kriteri ile tüm mod şekillerinin karşılaştırılması ise Şekil 4.20’de gösterilmiştir.

Tablo 4.2 Rasgele Tahrik Sonucu Elde Edilen Doğal Frekansların ve Sönüm Kayıp Faktörlerinin Karşılaştırılması

	Doğal Frekanslar (Hz)		Sönüm Kayıp Faktörü (%)	
	GMA	ÇŞMA	GMA	ÇŞMA
1. Mod	22,88	-	21,71	-
2. Mod	49,39	50,80	2,15	4,65
3. Mod	97,60	97,16	1,88	1,12
4. Mod	155,16	154,11	1,25	1,64
5. Mod	239,10	240,35	1,01	2,15
6. Mod	324,74	321,58	0,61	0,37

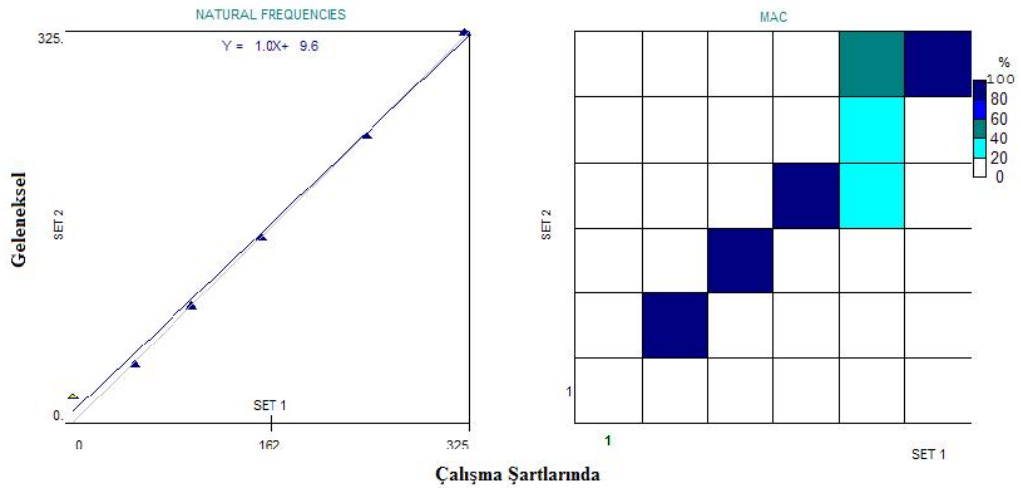
Çalışma Şartlarında



Geleneksel



Şekil 4.19 Rasgele Tahrik Sonucu Elde Edilen 2. Modun Karşılaştırılması



Şekil 4.20 Rasgele Tahrik Sonucu Elde Edilen MGK

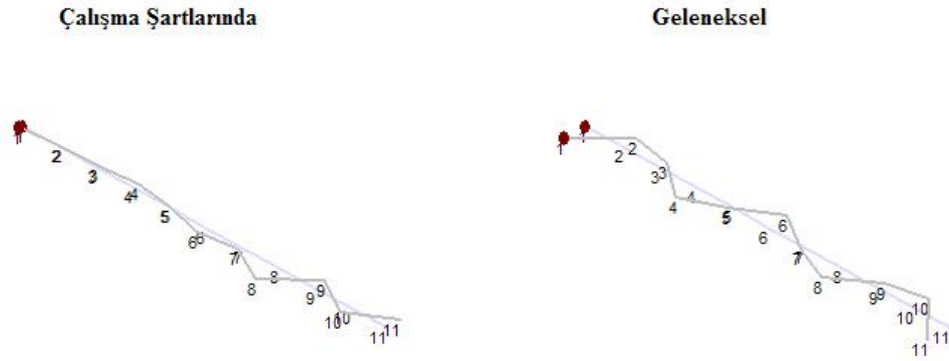
Sonuç olarak görülmektedir ki sarsıcı ile rasgele tahrik sonucu tüm noktalardan aynı anda cevapların alınmasıyla geleneksel ve çalışma şartlarında elde edilen doğal frekanslar ve mod şekilleri birbirleriyle uyumludur, ancak 1. ve 5. mod şekilleri çalışma şartlarında elde edilememektedir. Bunun nedeni ölçümlerden kaynaklanan gürültü ve hatalar olabilir. Örneğin elde edilen FTF'ü 100 adet ortalama alınarak elde

edilmesine karşın zaman verisinde ortalama alınamadığından sadece 1 ölçüm alınarak elde edilmiştir. Ortalama alınmış spektrum kullanılsaydı bu problem olmayacaktı. Elde edilen diğer mod şekilleri ise %90'ın üzerinde bir uyumlulukla elde edilmiştir.

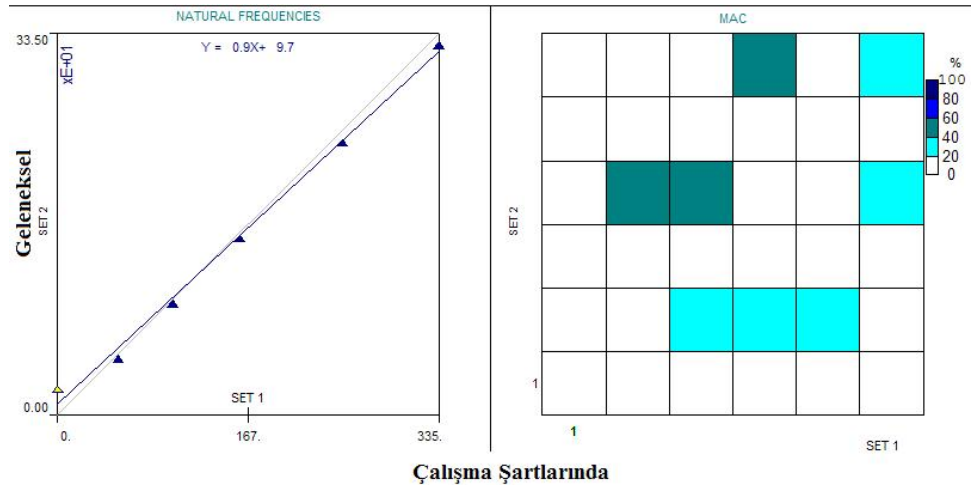
Çalışmanın bundan sonraki kısmı ise bir önceki bölümde olduğu gibi 11 adet ivmeölçerden aynı anda ivme alınması yerine 3 ivmeölçerin yapı üzerinde gezdirilmesi sonucu zamana bağlı ivmelerin analizlerde kullanılması ile çalışma şartlarında yapının modal parametrelerinin belirlenmesidir. Bu çalışmanın sonucunda çalışma şartlarında ve geleneksel olarak elde edilen modal parametrelerin karşılaştırılması aşağıda verilmektedir.

Tablo 4.3 Rasgele Tahrik ve İvmeölçerlerin Yapı Üzerinde Gezdirilmesi Sonucu Elde Edilen Doğal Frekansların ve Sönüm Kayıp Faktörlerinin Karşılaştırılması

	Doğal Frekanslar (Hz)		Sönüm Kayıp Faktörü (%)	
	GMA	ÇŞMA	GMA	ÇŞMA
1. Mod	22.88	-	21.71	-
2. Mod	49.39	52.87	2.15	3.51
3. Mod	97.60	101.00	1.88	0.91
4. Mod	155.16	159.84	1.25	1.33
5. Mod	239.10	250.42	1.01	0.44
6. Mod	324.74	334.98	0.61	1.00



Şekil 4.21 Rasgele Tahrik ve İvmeölçerlerin Yapı Üzerinde Gezdirilmesi Sonucu Elde Edilen 5. Modun Karşılaştırılması



Şekil 4.22 Rasgele Tahrik ve İvmeölçerlerin Yapı Üzerinde Gezdirilmesi Sonucu Elde Edilen MGK

Referans ivmeölçer bilgisi ICATS programında kullanılmadığından yapı üzerindeki tüm noktalardan aynı anda ölçüm alınması gerektiği daha önceden belirtilmişti. Fakat yine yapılan bu çalışmada referans ivmeölçer konmadan yapı üzerinden ivmeölçerlerin gezdirilmesi sonucu cevaplar alınmıştır. Yapının modal çekiç ile tahrik edildiği durumda her ölçümde yapının aynı anda tetiklenmesinden dolayı sonuçlar başarılı çıkmaktaydı. Fakat yapının sarsıcı ile sürekli tahrik edilmesi, dolayısıyla yapı üzerine her defasında rasgele bir sinyal gelmesinden dolayı ölçülen noktalar arasında görülen mod şekillerinde olması gerekenden farklı şekilde faz farkları meydana gelmektedir. Sonuç olarak yukarıda da görüldüğü gibi elde edilen sonuçlar uyumlu çıkmamaktadır. Bütün noktalardan aynı anda ölçüm yapılmadığı durumlarda referans bilgisi kullanılmadan ÇŞMA yapabilmek mümkün değildir.

4.2.2.2 Tekrar Edilen Rasgele Kuvvet

Önceki bölümden farklı olarak bu bölümde 5 noktasından sarsıcı ile yapı üzerine tekrar eden ‘rasgele’ tahrik kuvveti uygulanmış ve bunun sonucunda yapı üzerindeki 11 adet ivmeölçerden aynı anda cevaplar ve FTF’ler ölçülmüştür. Bu tahrik türü rasgele tahrikten farklı olarak her bir ölçüm sırasında periyodik olarak tekrarlanmasıdır. Diğer tüm özellikler bir önceki bölüm ile aynıdır.

Sonuç olarak elde edilen modal parametrelerin karşılaştırılması aşağıda verilmektedir.

Tablo 4.4 Tekrar Edilen Rasgele Tahrik Sonucu Elde Edilen Doğal Frekansların ve Sönüm Kayıp Faktörlerinin Karşılaştırılması

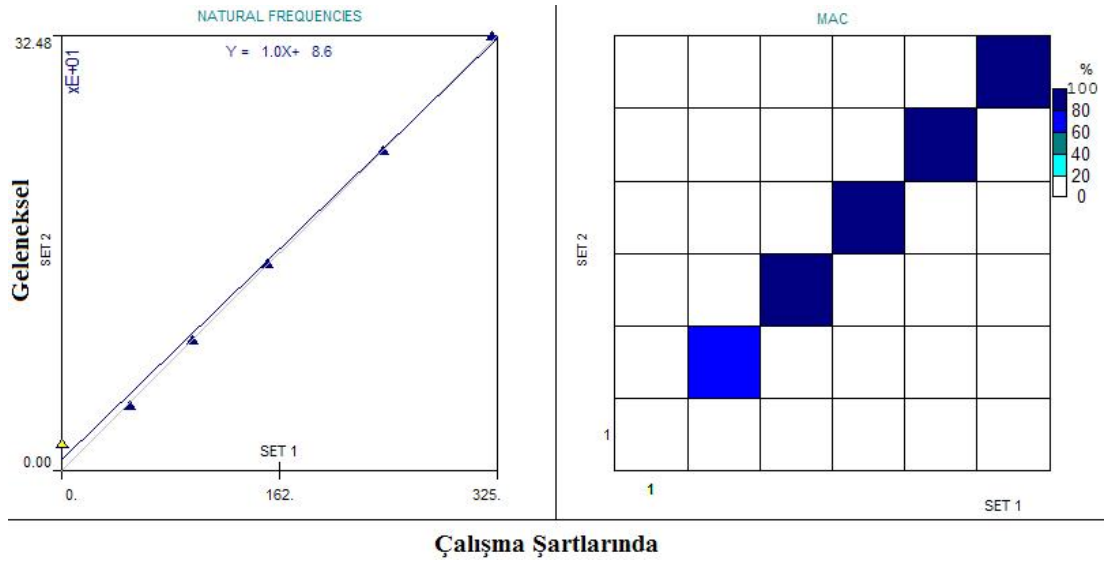
	Doğal Frekanslar (Hz)		Sönüm Kayıp Faktörü (%)	
	GMA	ÇŞMA	GMA	ÇŞMA
1. Mod	20,56	-	7,93	-
2. Mod	49,33	50,28	2,77	4,42
3. Mod	97,57	97,45	1,86	2,10
4. Mod	155,20	153,50	1,29	1,54
5. Mod	239,28	239,49	0,96	1,89
6. Mod	324,81	321,43	0,57	0,85

Çalışma Şartlarında

Geleneksel



Şekil 4.23 Tekrar Edilen Rasgele Tahrik Sonucu Elde Edilen 4. Modun Karşılaştırılması



Şekil 4.24 Tekrar Edilen Rasgele Tahrik Sonucu Elde Edilen MGK

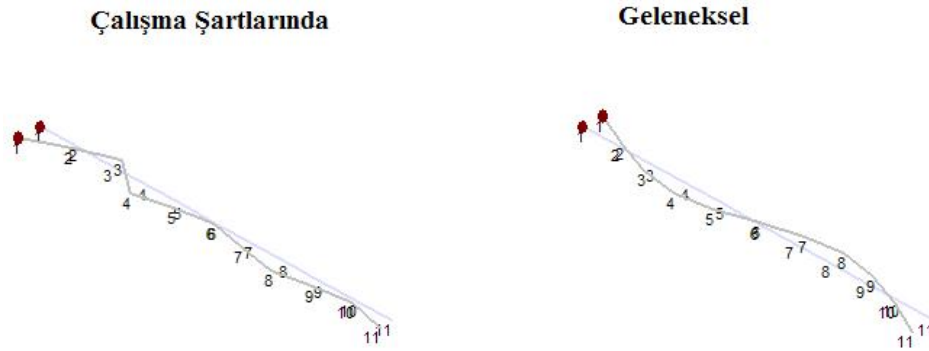
Yukarıdaki sonuçlardan da görüldüğü gibi sarsıcı ile tekrar edilen rasgele tahrik sonucu tüm noktalardan aynı anda cevapların alınmasıyla elde edilen doğal frekanslar ve mod şekilleri birbirleriyle uyumludur, ancak ölçümlerden kaynaklanan

gürültü ve hatalardan dolayı 1. mod şekli çalışma şartlarında elde edilememektedir. Ortalama alınmış spektrumların kullanılması durumunda 1. mod bulunabilir.

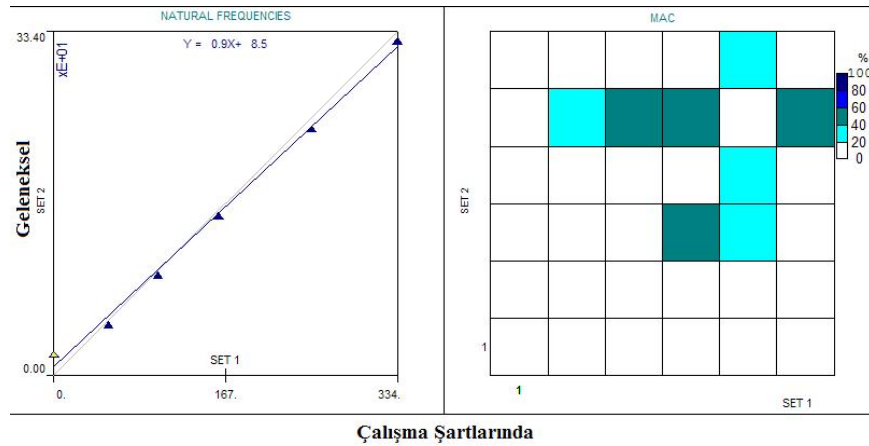
Yapı üzerine tekrar edilen rasgele tahrik kuvveti uygulanması ve ivmeölçerlerin yapı üzerinde gezdirilmesi sonucu elde edilen sonuçlar ise aşağıda görüldüğü gibi önceden bahsedilen nedenlerden dolayı yine uyumlu çıkmamaktadır.

Tablo 4.5 Tekrar Edilen Rasgele Tahrik ve İvmeölçerlerin Yapı Üzerinde Gezdirilmesi Sonucu Elde Edilen Doğal Frekansların ve Sönüm Kayıp Faktörlerinin Karşılaştırılması

	Doğal Frekanslar (Hz)		Sönüm Kayıp Faktörü (%)	
	GMA	ÇŞMA	GMA	ÇŞMA
1. Mod	20.56	-	7.93	-
2. Mod	49.33	52.68	2.77	3.89
3. Mod	97.57	101.01	1.86	0.94
4. Mod	155.20	160.10	1.29	1.89
5. Mod	239.28	250.87	0.96	0.40
6. Mod	324.81	333.96	0.57	1.23



Şekil 4.25 Tekrar Edilen Rasgele Tahrik ve İvmeölçerlerin Yapı Üzerinde Gezdirilmesi Sonucu Elde Edilen 2. Modun Karşılaştırılması



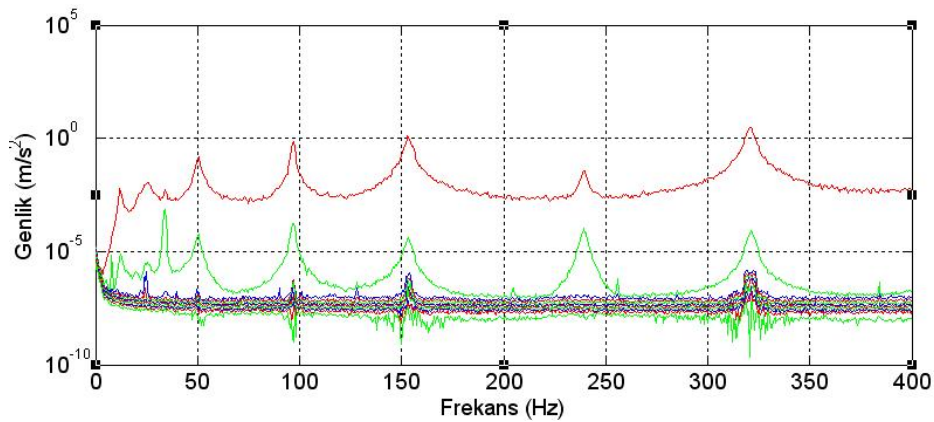
Şekil 4.26 Tekrar Edilen Rasgele Tahrik ve İvmeölçerlerin Yapı Üzerinde Gezdirilmesi Sonucu Elde Edilen MGK

4.2.3 Frekans Alanında Ayırıklaştırma Yöntemi ile Düz Kirişin Modal Parametrelerinin Belirlenmesi

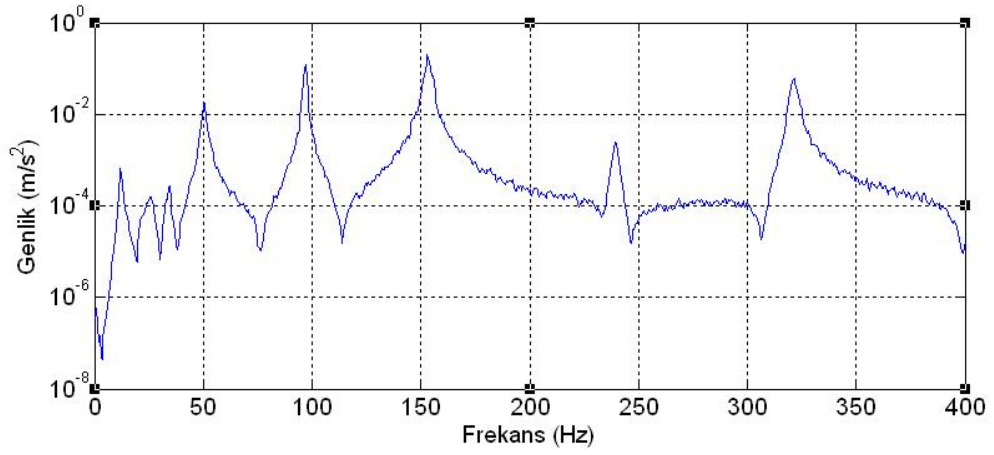
Bu bölümde önceki bölümlerden farklı olarak ICATS programında Zaman Alanında Çalışma Şartlarında Modal Analiz uygulanması yerine tezde kullanılan Frekans Alanında Ayırıklaştırma yöntemiyle Matlab programında geliştirilen yazılım kullanılarak modal parametreler belirlenmeye çalışılmıştır.

Düz kiriş üzerine sarsıcı ile rasgele beyaz tahrik kuvveti uygulanmış ve bu tahrik kuvveti ölçülmeden tüm noktalardan aynı anda ivmeler ölçülmüştür. Alınan bu ivme verilerinin analizör yardımıyla frekansa bağlı spektrumları hesaplanmıştır. Daha sonra tüm noktaların öznel ve çapraz spektrumları bulunarak 11 x 11 boyutunda tek bir matris elde edilmiştir. Bu matrisin tekil değerlerine ayrıştırılmasıyla doğal frekanslar ve mod şekilleri elde edilmiştir. Şekil 4.27’de düz kirişe ait tekil değerler grafiği görülmektedir. Düz kiriş üzerindeki 11 noktadan aynı anda ivme ölçülmesinden dolayı grafikte 11 adet eğri görülmektedir. Genliği en yüksek olan eğriden doğal frekanslar elde edilmiştir. Diğer eğrilerin genlikleri çok düşük kaldığından ilk tekil değerden elde edilen doğal frekanslar dışında yapının başka bir doğal frekansı (aynı frekansta birden fazla doğal frekansı) olmadığı anlaşılmaktadır. Şekil 4.28 ve 4.29’da ise yapı üzerindeki 1. ve 9. noktalar arasındaki çapraz spektrumun genlik ve faz eğrileri görülmektedir.

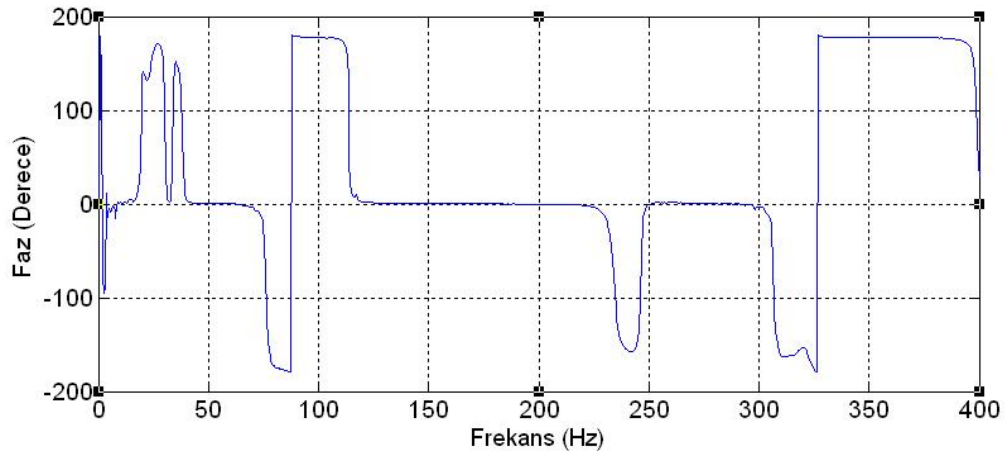
Düz kiriş bu çalışmada yine 400 Hz’e kadar incelenmiş ve elde edilen öznel ve çapraz spektrumların 100 adet ortalaması alınmıştır. Tüm noktalardan aynı anda ölçüm alınmasından dolayı referans ivmeölçer kullanılmamıştır.



Şekil 4.27 Düz Kiriş Tekil Değerler Grafiği



Şekil 4.28 1. ve 9. Noktalar Arasındaki Çapraz Spektrum – Genlik Bilgisi



Şekil 4.29 1. ve 9. Noktalar Arasındaki Çapraz Spektrum – Faz Bilgisi

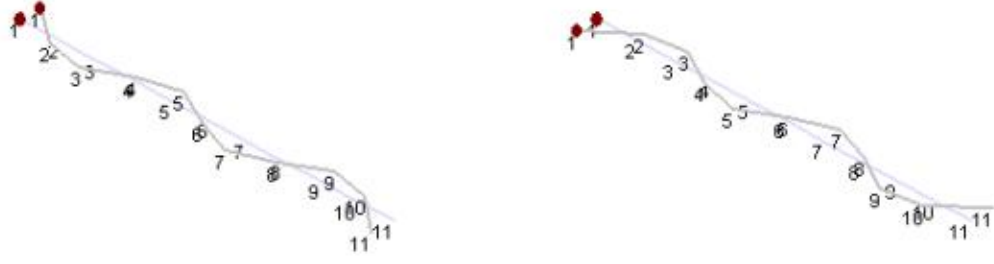
Sonuç olarak Frekans Alanında Ayırıklaştırma yöntemiyle elde edilen bu modal parametreler önceden FTF'ler hesaplanarak geleneksel modelle elde edilen modal parametrelerle aşağıda karşılaştırılmıştır.

Tablo 4.6 Frekans Alanında Ayırıklaştırma Yöntemiyle Elde Edilen Doğal Frekansların ve Sönüm Oranlarının Karşılaştırılması

	Doğal Frekanslar (Hz)		Sönüm Oranı (%)	
	GMA	ÇŞMA	GMA	ÇŞMA
1. Mod	22,88	25,5	8,76	6,45
2. Mod	49,39	50,50	2,41	1,36
3. Mod	97,60	97,00	1,00	0,50
4. Mod	155,16	153,00	0,70	0,40
5. Mod	239,10	239,00	0,57	0,36
6. Mod	324,74	320,50	0,30	0,35

Çalışma Şartlarında

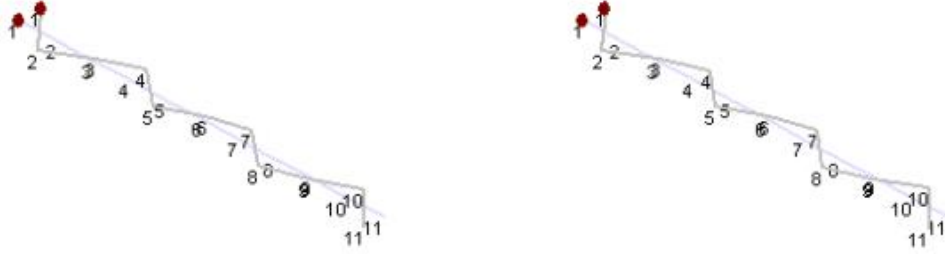
Geleneksel



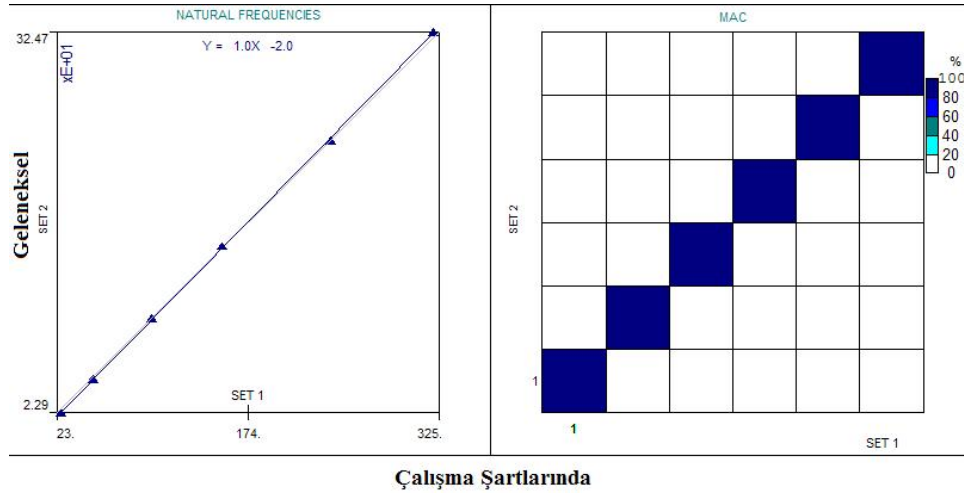
Şekil 4.30 Çalışma Şartlarında (FAA) ve Geleneksel Olarak Elde Edilen 4. Modun Karşılaştırılması

Çalışma Şartlarında

Geleneksel



Şekil 4.31 Çalışma Şartlarında (FAA) ve Geleneksel Olarak Elde Edilen 6. Modun Karşılaştırılması



Şekil 4.32 Frekans Alanında Ayırıklaştırma Yöntemi Sonucu Elde Edilen MGK

Elde edilen sonuçlardan da görüldüğü gibi çalışma şartlarında Frekans Alanında Ayırıklaştırma yöntemini kullanarak Matlab programında elde edilen modal parametreler, geleneksel olarak elde edilen modal parametrelerle uyumlu

çıkılmaktadır. Sönüm oranlarında meydana gelen küçük farklılıklar ölçümlerdeki hatalardan (verilerin kalitesi) meydana gelmiştir. Bu da yöntemin pratikte uygulanabilirliğini göstermektedir.

4.3 Düz Plaka Üzerinde Yapılan Deneysel Çalışmalar

Deneysel çalışmaların ikinci adımı düz plaka üzerinde gerçekleştirilmiştir. Yapının boyutları 450 mm x 200 mm x 3 mm 'dir. Malzemesi ise çeliktir.

Düz plaka ilk olarak Şekil 4.33'de gösterildiği gibi modal çekiç ile tahrik edilmiş ve FTF'leri hesaplanarak geleneksel olarak yapının modal parametreleri belirlenmiştir. Daha sonra plaka üzerine bu kez Şekil 4.34'de gösterildiği gibi sarsıcı ile rasgele beyaz tahrik kuvveti uygulanmış fakat bu kuvvet değeri ölçülmeden yapı üzerinden frekansa bağlı olarak ivmeler ölçülerek çalışma şartlarında modal parametreleri belirlenmiş ve geleneksel olarak elde edilen modellerle karşılaştırılmıştır.

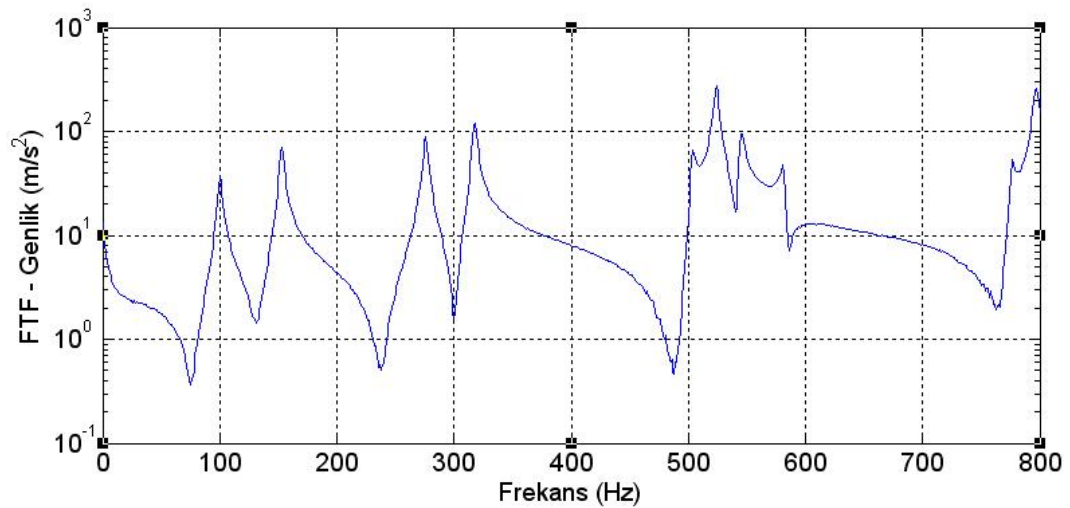


Şekil 4.33 Modal Çekiç ile Tahrik Edilen Düz Plaka



Şekil 4.34 Sarsıcı ile Tahrik Edilen Düz Plaka

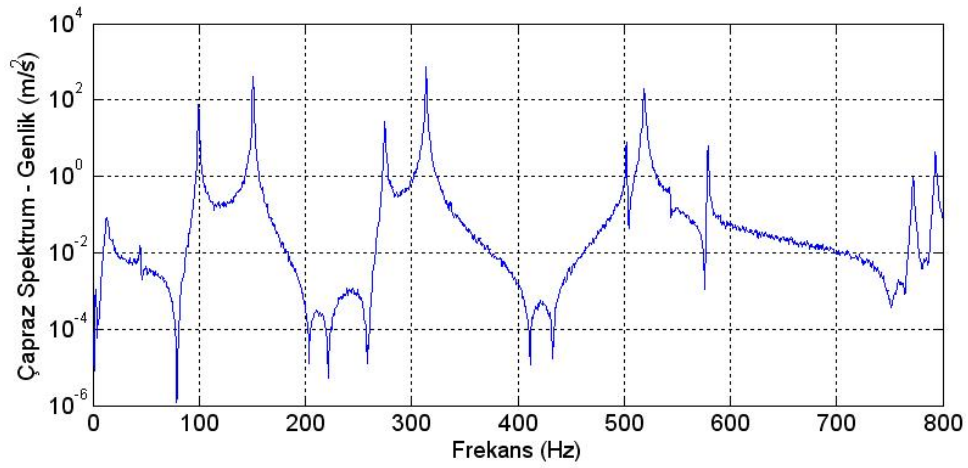
Düz plaka üzerinde 50 adet ölçüm noktası belirlenmiş ve misinalar yardımıyla asılmıştır. Modal çekiç ile Şekil 4.33’de görüldüğü gibi darbe kuvveti uygulanmış ve 3 ivmeölçer yapı üzerinde gezdirilerek her bir noktadan Şekil 4.1’de gösterilen B&K 2035 sinyal analizörü yardımıyla FTF hesaplanmıştır. Şekil 4.35 ‘de yapı üzerindeki bir noktadan alınan FTF görülmektedir. Sonuç olarak yapı üzerinden ölçülen FTF’ler yardımıyla geleneksel olarak modal parametreler elde edilmiştir.



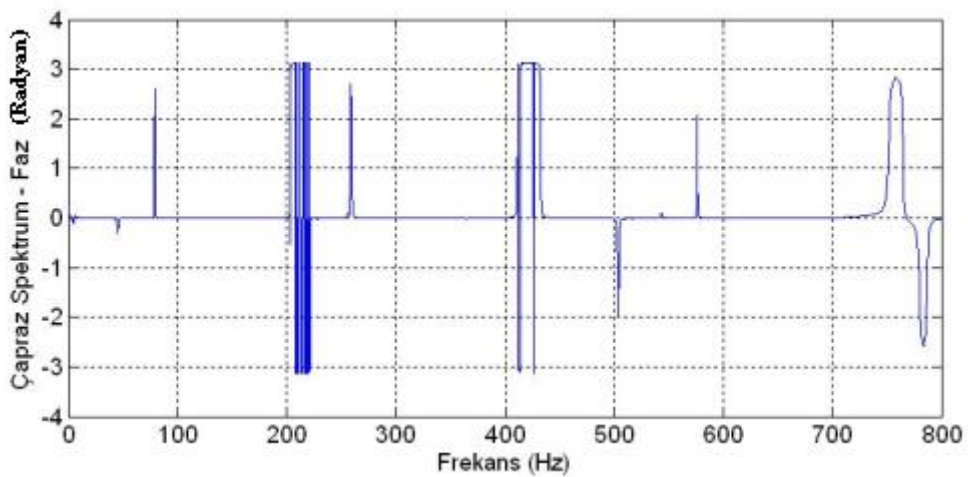
Şekil 4.35 Düz Plaka Üzerinden Alınan FTF

Daha sonra yapı üzerine Şekil 4.34’de görüldüğü gibi sarsıcı ile rasgele beyaz tahrik kuvveti uygulanmış ve bu kuvvet değeri ölçülmeden yapı üzerinden 3 adet gezici ivmeölçer vasıtasıyla 50 ölçüm noktasından Şekil 4.2’de gösterilen B&K Pulse analizörü yardımıyla frekansa bağlı ivme spektrumları alınmıştır. 1 adet ivmeölçer

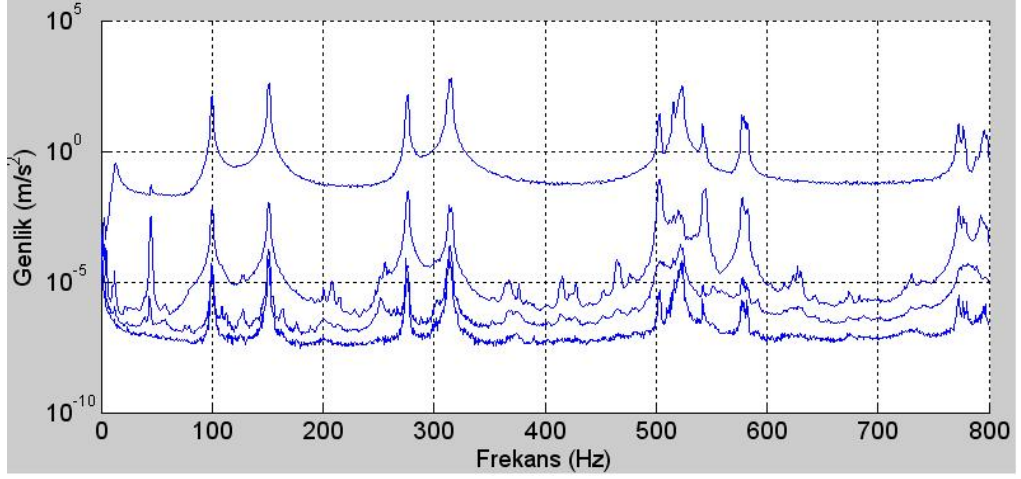
ise yapı üzerine referans olarak konulmuş ve her ölçüm sırasında bu konumdan da ölçümler alınmıştır. Her bir ölçümde bu 4 adet ivmeölçerin (3 gezici, 1 referans) bir birleriyle olan öznel ve çapraz spektrumları hesaplanarak 4x4 boyutunda güç (öznel spektrum) ve çapraz spektrum matrisleri elde edilmiştir. Şekil 4.36 ve 4.37’de yapı üzerindeki iki noktadan alınan çapraz spektrumların genlik ve faz bilgisi görülmektedir. Bu matrislerin her bir ölçümde tekil değerlerine ayrıştırılması ve ortalamalarının alınmasıyla Şekil 4.38’de görülen tekil değerler grafiği elde edilmiştir. Elde edilen bu grafikteki her bir tepe yapının çalışma şartlarındaki doğal frekanslarını vermektedir. Bulunan bu doğal frekanslarda güç ve çapraz spektrum matrislerinin tekil değerlerine ayrıştırılmasıyla da mod şekilleri elde edilmiştir.



Şekil 4.36 Düz Plaka Üzerinden Alınan Çapraz Spektrum – Genlik Bilgisi



Şekil 4.37 Düz Plaka Üzerinden Alınan Çapraz Spektrum – Faz Bilgisi



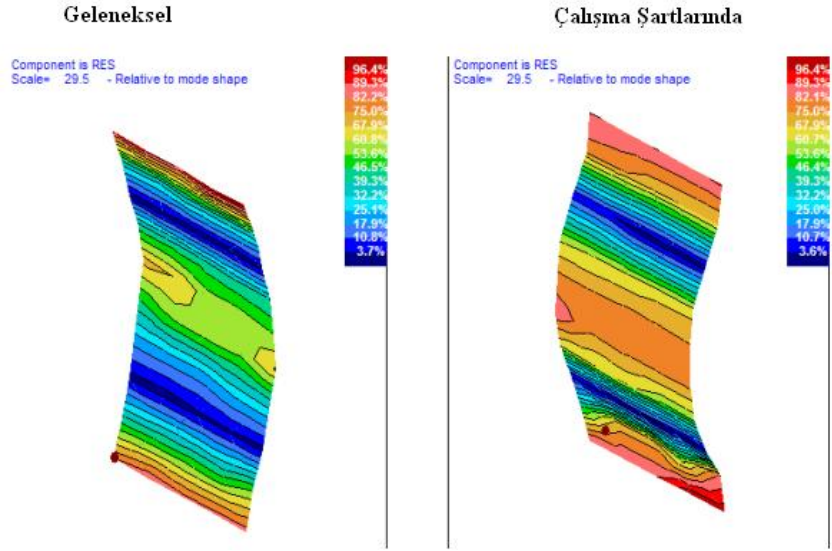
Şekil 4.38 Düz Plaka Tekil Değerler Grafiği

Düz plaka bu çalışmada 800Hz'e kadar incelenmiş ve 1600 adet veri noktası kullanılmıştır. Ölçülen FTF'lerde modal çekiç kullanıldığından 3 adet ortalama, öznel ve çapraz spektrumların elde edilmesinde sarsıcı kullanıldığından 100 adet ortalama alınmıştır. İncelenilen 800 Hz'e kadar yapının 9 adet modu bulunmuştur.

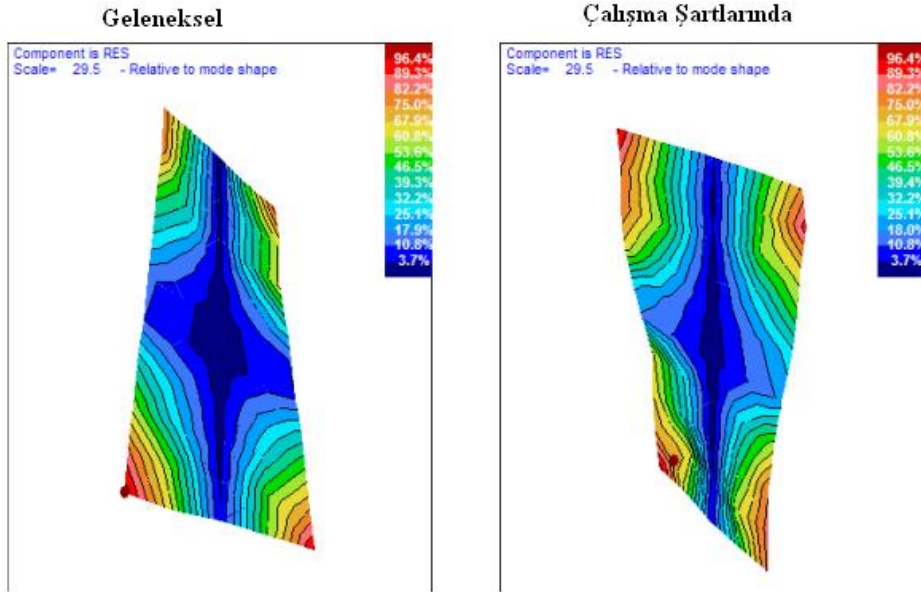
Geleneksel ve çalışma şartlarında elde edilen düz plakanın doğal frekansları ve mod şekilleri aşağıda karşılaştırılmıştır. 1., 2. ve 6. modlar görsel olarak Şekil 4.39-41'de, diğer tüm modlar ise Modal Güvence Kriteri ile matematiksel olarak Şekil 4.42'de karşılaştırılmıştır. Düz plakanın malzemesi çelik olduğundan sönüm yok denecek kadar azdır. Bu yüzden sönüm oranlarının karşılaştırılması pek uygun değildir.

Tablo 4.7 Düz Plaka Doğal Frekansların Karşılaştırılması

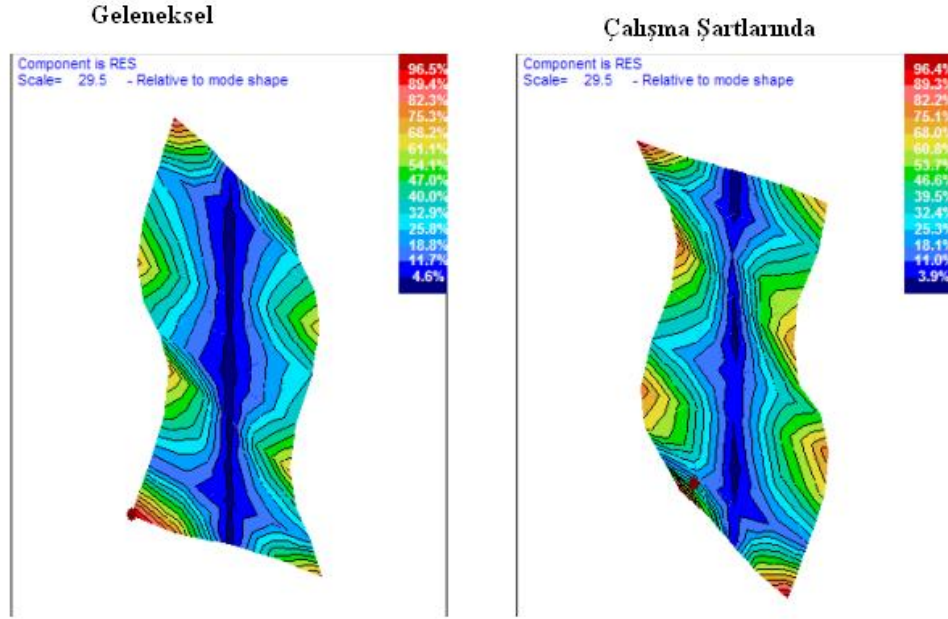
	Doğal Frekanslar (Hz)	
	GMA	ÇŞMA
1. Mod	100,48	100
2. Mod	152,62	151,50
3. Mod	276,52	276,50
4. Mod	317,41	315,50
5. Mod	503,88	503,50
6. Mod	526,07	523,50
7. Mod	545,78	542,00
8. Mod	583,07	577,50
9. Mod	777,37	772,50



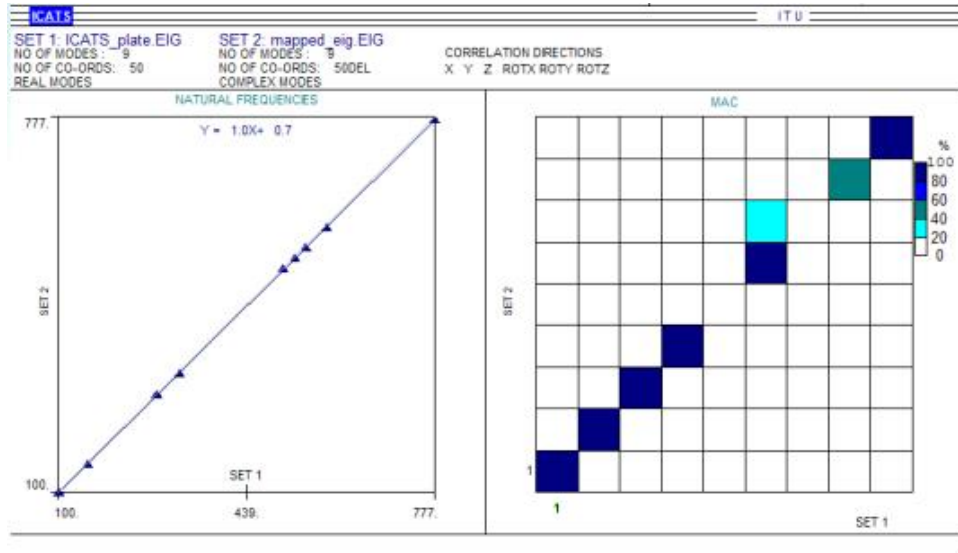
Şekil 4.39 Düz Plaka 1. Mod Karşılaştırılması



Şekil 4.40 Düz Plaka 2. Mod Karşılaştırılması



Şekil 4.41 Düz Plaka 6. Mod Karşılaştırılması



Şekil 4.42 Düz Plaka MGK

Sonuç olarak görülmektedir ki düz plakada kuvvet bilinerek elde edilen mod şekilleri ile kuvvet bilinmeden elde edilen mod şekilleri 3 mod hariç bir birleriyle uyumludur. Bu üç modun uyumlu çıkmamasının en büyük nedeni ivmeölçerlerin yapı üzerinde yarattığı kütle etkisinden dolayı doğal frekansların bir miktar kaymasıdır.

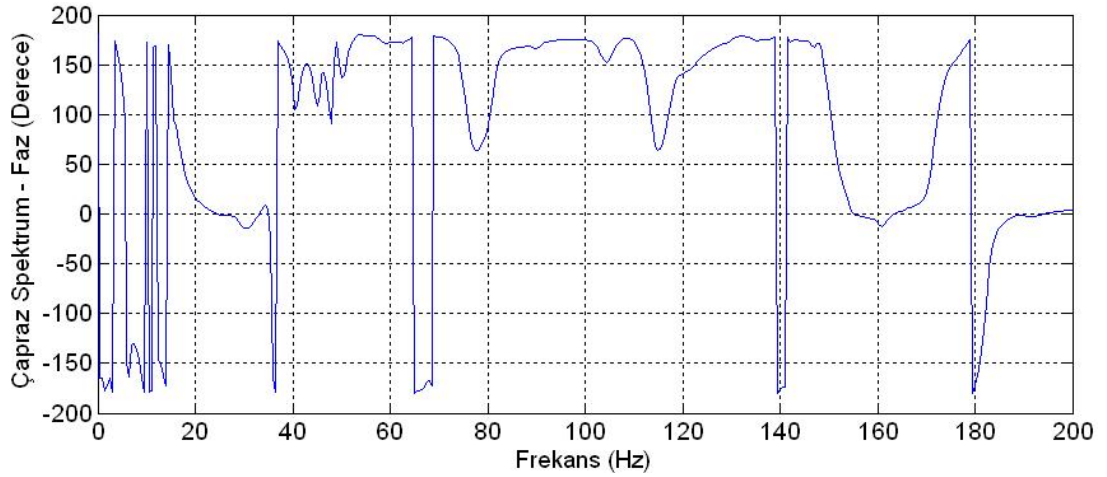
4.4 Çamaşır Makinesi Paneli Üzerinde Yapılan DeneySEL alışmalar

DeneySEL çalışmaların üçüncü adımı çamaşır makinası gövdesinin yan paneli üzerinde gerçekleştirilmiştir. Çamaşır makinası gövdesi ilk olarak şekil 4.43’de gösterildiği gibi modal eki ile tahrik edilmiş ve FTF’leri hesaplanarak geleneksel olarak yan panelin modal parametreleri belirlenmiştir. Daha sonra yapı üzerine yine modal eki ile darbe kuvveti uygulanmış fakat bu kuvvet değeri ölçölmeden yapı üzerinden frekansa bağlı olarak ivmeler ölçölerek çalışma şartlarında modal parametreleri belirlenmiş ve geleneksel olarak elde edilen modelle karşılaştırılmıştır. Daha sonra çamaşır makinası bu kez sıkma adımında yaklaşık 690 rpm’de çalıştırılarak panel üzerindeki titreşimleri ivmeölçerler yardımıyla ölçölümüş ve Frekans Alanında Ayırıklaştırma (FAA) yöntemiyle yan panelin gerçek çalışma koşullarında modal parametreleri belirlenerek geleneksel olarak elde edilen modelle karşılaştırılmıştır.

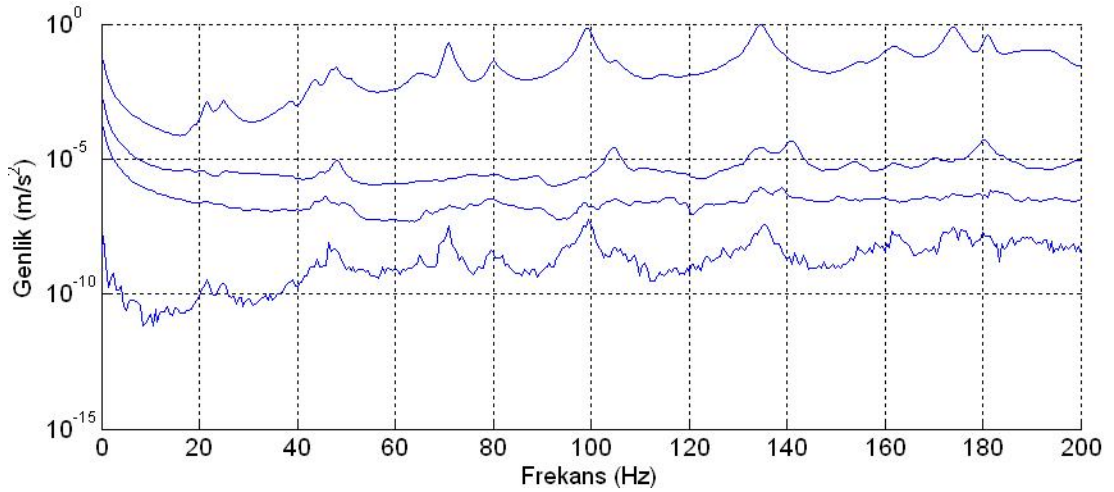


şekil 4.43 amaşır Makinası Gövdesi

Panel üzerinde 66 adet ölçüm noktası belirlenmiş ve yapı yerde dururken modal eki ile 56 noktasından darbe kuvveti uygulanmış ve 3 ivmeölçer yapı üzerinde gezdirilerek her bir noktadan B&K Pulse analizörü ve yazılımı yardımıyla FTF’ler hesaplanmıştır. şekil 4.44’da yapı üzerindeki bir noktadan alınan FTF görölmemtedir.



Şekil 4.46 Çamaşır Makinası Yan Paneli Üzerinden Alınan Çapraz Spektrum – Faz Bilgisi



Şekil 4.47 Çamaşır Makinası Yan Paneli Çekiç ile Elde Edilen Tekil Değerler Grafiği

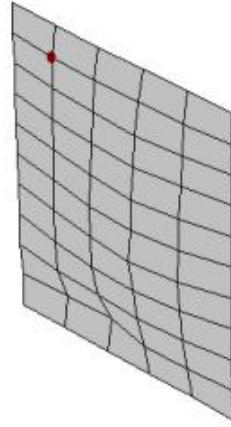
Çamaşır makinası yan paneli 200Hz'e kadar incelenmiş ve 400 adet veri noktası kullanılmıştır. Ölçülen FTF, öznel ve çapraz spektrumlarında modal çekiç kullanıldığından 3 adet ortalama alınmıştır. İncelenilen 200 Hz'e kadar yapının yaklaşık 15 adet modu bulunmuştur.

Sonuç olarak yapı üzerinden ölçülen FTF'ler yardımıyla geleneksel olarak modal parametreler elde edilmiş ve uygulanan kuvvet ölçülmeden sadece ölçülen cevaplar yardımıyla FAA yöntemini kullanarak elde edilen modal parametrelerle aşağıda karşılaştırılmıştır. Bazı modlar görsel olarak, diğer tüm modlar ise Modal Güvence Kriteri ile matematiksel olarak karşılaştırılmıştır.

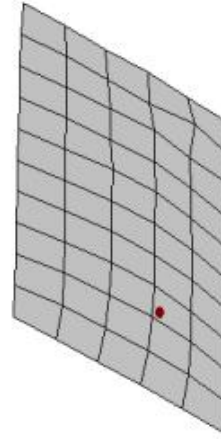
Tablo 4.8 Çamaşır Makinası Yan Paneli Doğal Frekansların ve Sönüm Kayıp Faktörlerinin Karşılaştırılması

	Doğal Frekanslar (Hz)		Sönüm Kayıp Faktörü (%)	
	GMA	ÇŞMA	GMA	ÇŞMA
1. Mod	21,40	21,5	7,20	4,51
2. Mod	24,86	25,00	6,80	4,00
3. Mod	39,01	38,50	8,10	4,85
4. Mod	44,08	43,50	4,35	2,83
5. Mod	47,04	48,00	2,86	1,85
6. Mod	66,59	65,00	3,71	2,26

Geleneksel

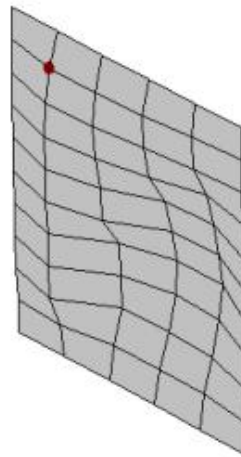


Çalışma Şartlarında

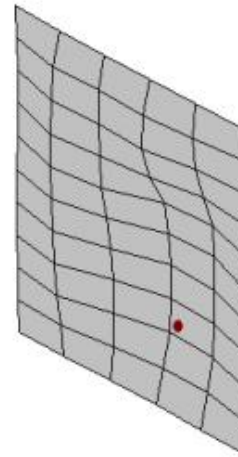


Şekil 4.48: Çamaşır Makinası Yan Paneli 1. Mod Karşılaştırılması

Geleneksel

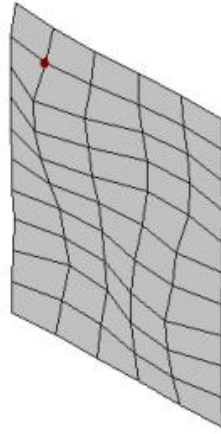


Çalışma Şartlarında

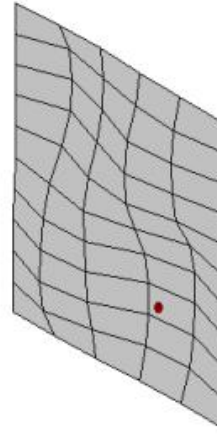


Şekil 4.49 Çamaşır Makinası Yan Paneli 4. Mod Karşılaştırılması

Geleneksel

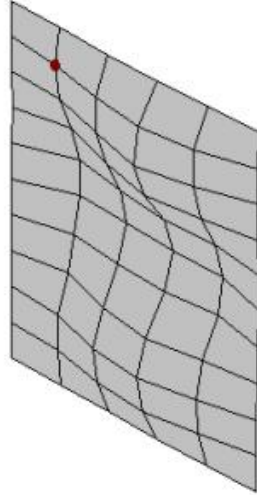


Çalışma Şartlarında

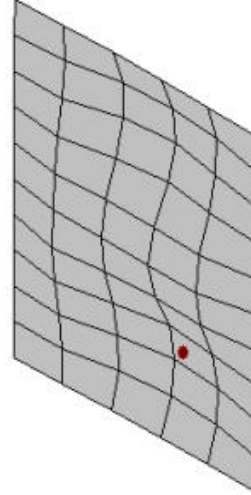


Şekil 4.50 Çamaşır Makinası Yan Paneli 6. Mod Karşılaştırılması

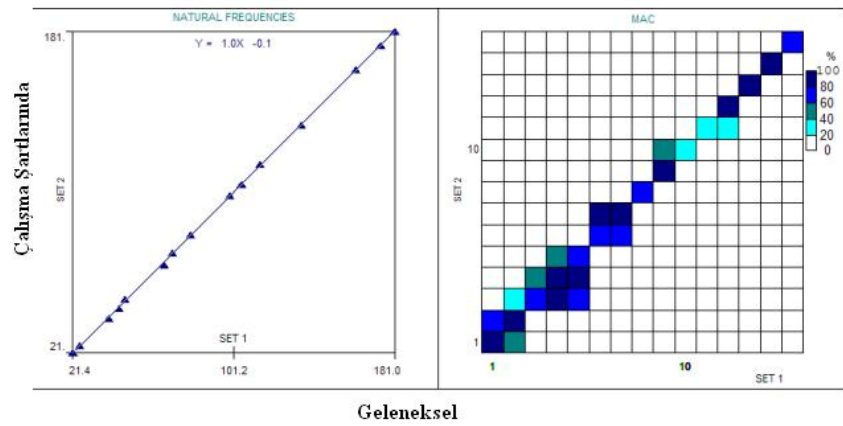
Geleneksel



Çalışma Şartlarında



Şekil 4.51 Çamaşır Makinası Yan Paneli 8. Mod Karşılaştırılması

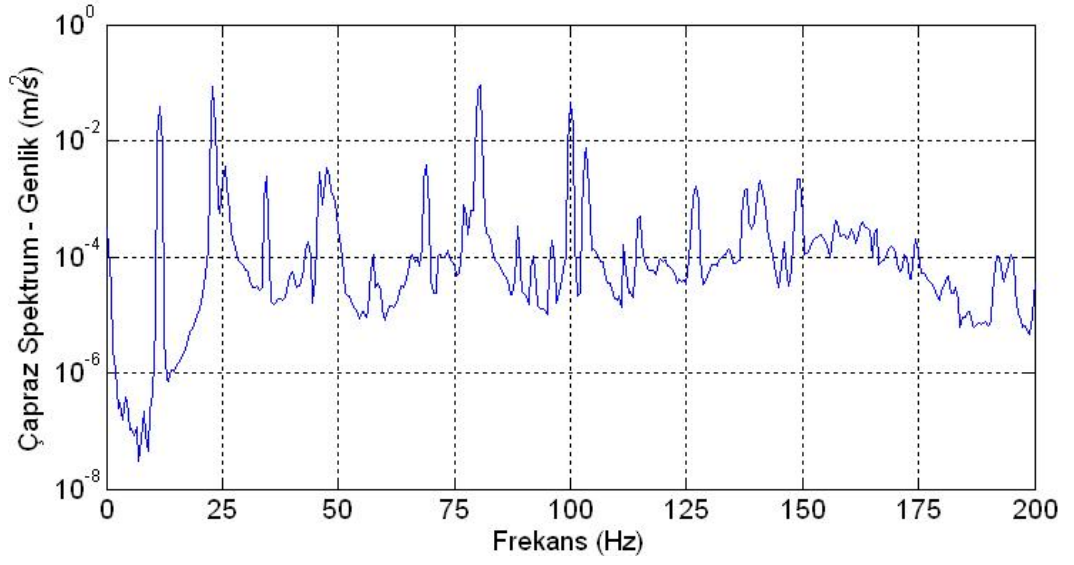


Şekil 4.52 Çamaşır Makinası Yan Paneli MGK

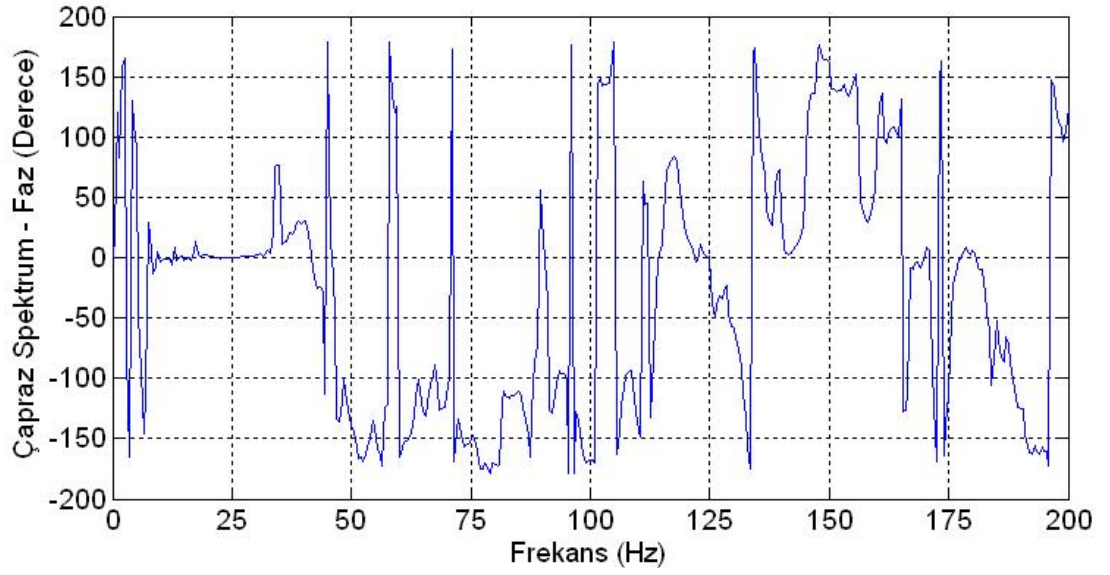
Sonuç olarak görülmektedir ki çamaşır makinası yan panelinde kuvvet bilinerek ve bilinmeden elde edilen her iki modelin modal parametreleri bir birleriyle uyumludur. Bu da FAA yönteminin karmaşık yapılarda da uygulanabilirliğini göstermektedir. Bazı modlarda meydana gelen küçük farklılıklar ihmal edilebilecek düzeydedir. Bu küçük farklılıkların temel nedenleri olarak yapının modal çekiç ile aynı darbe kuvvetinde uyarılamaması, alınan 3 ortalamanın yetersiz olması gibi deneysel ölçüm hataları ve mod şekillerinin çalışma şartlarında ölçeklendirilememesi verilebilir. Ayrıca geleneksel olarak elde edilen modelde, yapının çekiçle uyarılması sonucu elde edilen ivme verilerine eksponansiyel pencereleme fonksiyonu uygulanmıştır. Bu da yapıya sayısal bir sönüm eklenmesine neden olmuştur. Bu nedenle geleneksel olarak elde edilen sönüm kayıp faktörleri çalışma şartlarında elde edilen sönüm kayıp faktörlerinden bir miktar yüksek çıkmıştır.

Çalışmanın bundan sonraki bölümünde gerçek çalışma şartları altında FAA yönteminin pratikte uygulanabilirliğinin gösterilmesi amacı ile çamaşır makinesi sıkma adımı çalıştırılmış ve üzerinden titreşimler ölçülerek modal parametreleri belirlenmeye çalışılmıştır.

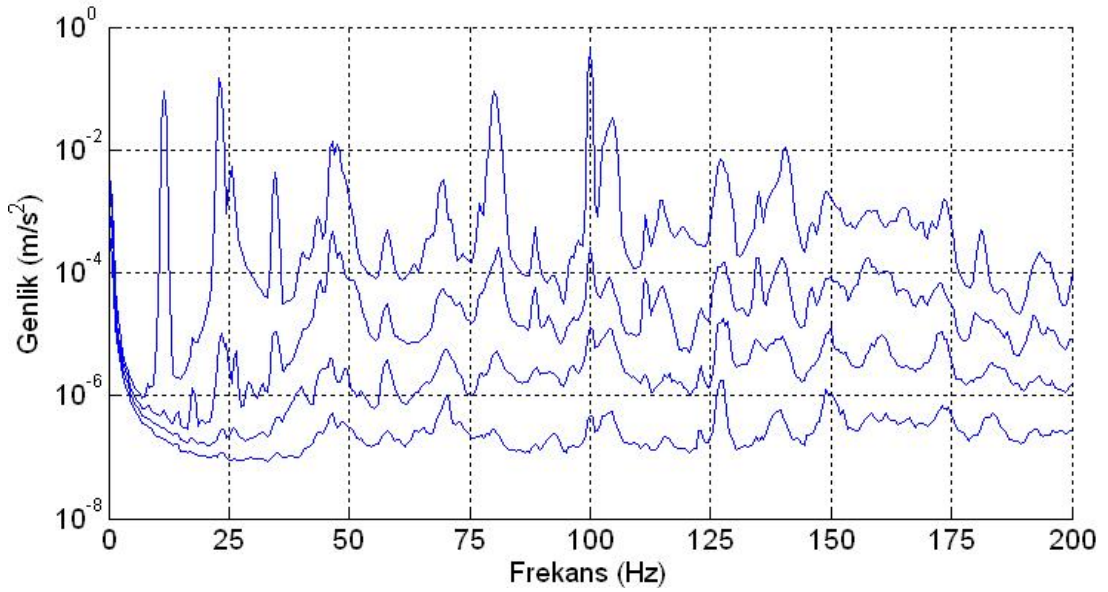
Çamaşır makinesi sıkma adımı 690 rpm’de çalıştırılarak panel üzerindeki 66 adet ölçüm noktasından 3 adet gezici ve 1 adet referans ivmeölçer kullanılarak B&K Pulse analizörü yardımıyla frekansa bağlı ivme spektrumları alınmıştır. Referans ivmeölçer yine 16 noktaya konulmuştur. Her bir ölçümde yine bu 4 adet ivmeölçerin (3 gezici, 1 referans) bir birleriyle olan öznel ve çapraz spektrumları hesaplanarak 4x4 boyutunda güç ve çapraz spektrum matrisleri elde edilmiştir. Şekil 4.53 ve 4.54’de çalışır durumdaki çamaşır makinası üzerindeki iki noktadan alınan çapraz spektrumun genlik ve faz bilgisi görülmektedir. Bu matrislerin her bir ölçümde tekil değerlerine ayrıştırılması ve ortalamalarının alınmasıyla Şekil 4.55’de görülen tekil değerler grafiği elde edilmiştir. Elde edilen bu grafikteki her bir tepe yapının doğal frekanslarını vermektedir. Bulunan bu doğal frekanslarda güç ve çapraz spektrum matrislerinin tekil değerlerine ayrıştırılmasıyla da mod şekilleri elde edilmiştir.



Şekil 4.53 Çalışır Durumdaki Çamaşır Makinası Yan Paneli Üzerinden Alınan Çapraz Spektrum – Genlik Bilgisi



Şekil 4.54 Çalışır Durumdaki Çamaşır Makinası Yan Paneli Üzerinden Alınan Çapraz Spektrum – Faz Bilgisi



Şekil 4.55 Çalışır Durumdaki Çamaşır Makinası Yan Paneli Üzerinden Elde Edilen Tekil Değerler Grafiği

Çamaşır makinası yan paneli bu çalışmada yine 200Hz'e kadar incelenmiş ve 400 adet veri noktası kullanılmıştır. Ölçülen öznel ve çapraz spektrumlarda 100 adet ortalama alınmıştır. Böylelikle ölçüm gürültüleri en aza indirilmiş olacaktır.

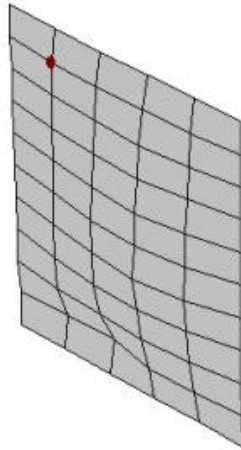
Bu çalışmada diğerlerinden farklı olarak çamaşır makinası 690 rpm'de çalıştırıldığından ki bu 11.5 Hz'e denk gelmektedir ölçülen ivme spektrumlarında dönüş frekansı olan 11.5 Hz ve katlarında sivri tepeler gözükülecektir. Bu durum Çalışma Şartlarında Modal Analizin önemli dezavantajlarından biridir, çünkü bu dönüş frekansı ve katlarında mod sanılan tepeleri (sanal mod) yapının gerçek fiziksel modlarından ayırmak gerekmektedir. Eğer dönüş frekansının herhangi bir katı yapının gerçek fiziksel bir moduna denk gelirse bu frekansta modal parametreleri belirlemek çok güç olacaktır.

Sonuç olarak Şekil 4.55'de görülen dönüş frekansı ve katlarının bilinmesinden dolayı bu tepeleri yapının gerçek fiziksel modlarından ayırarak modal parametreler belirlenmiş ve geleneksel olarak (kuvvet bilinerek) elde edilen modelle aşağıda karşılaştırılmıştır. Ayrıca dönüş frekansı ve katlarındaki tepelerin diğer fiziksel modlardaki tepelere oranla biraz daha sivri olması modları belirlemede az da olsa bir fikir vermiştir.

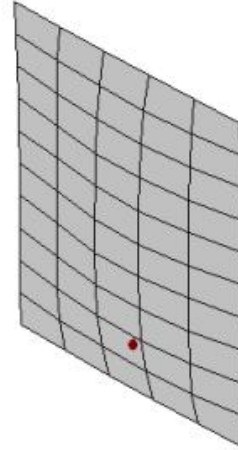
Tablo 4.9 Çalışır Durumdaki Çamaşır Makinası Yan Paneli Doğal Frekansların ve Sönüm Kayıp Faktörlerinin Karşılaştırılması

	Doğal Frekanslar (Hz)		Sönüm Kayıp Faktörü (%)	
	GMA	ÇŞMA	GMA	ÇŞMA
1. Mod	21,40	23	7,20	2,00
2. Mod	24,86	25,50	6,80	2,58
3. Mod	39,01	40,50	8,10	3,20
4. Mod	44,08	43,50	4,35	2,35
5. Mod	47,04	47,50	2,86	1,81
6. Mod	66,59	63,50	3,71	2,18

Geleneksel

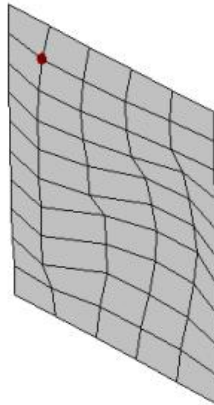


Çalışma Şartlarında

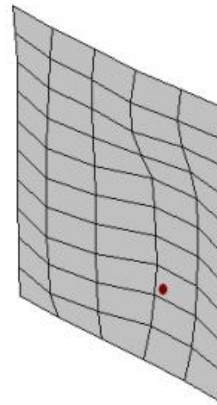


Şekil 4.56 Çalışır Durumdaki Çamaşır Makinası Yan Paneli 1. Mod Karşılaştırılması

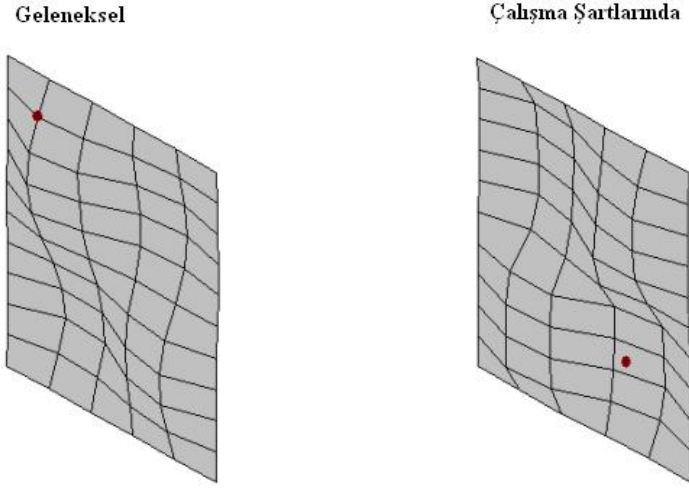
Geleneksel



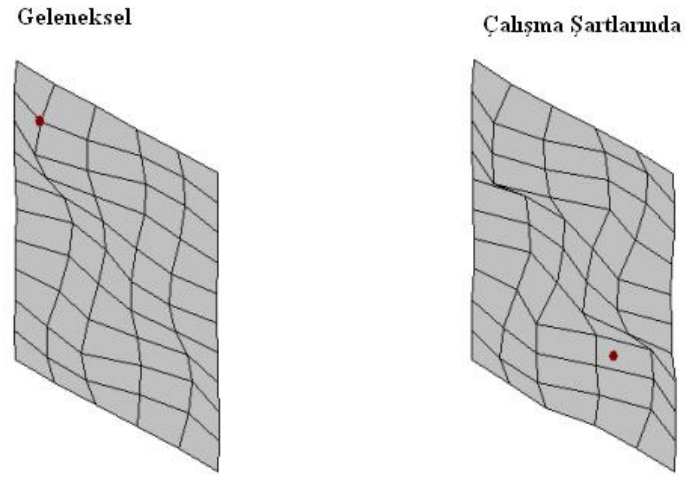
Çalışma Şartlarında



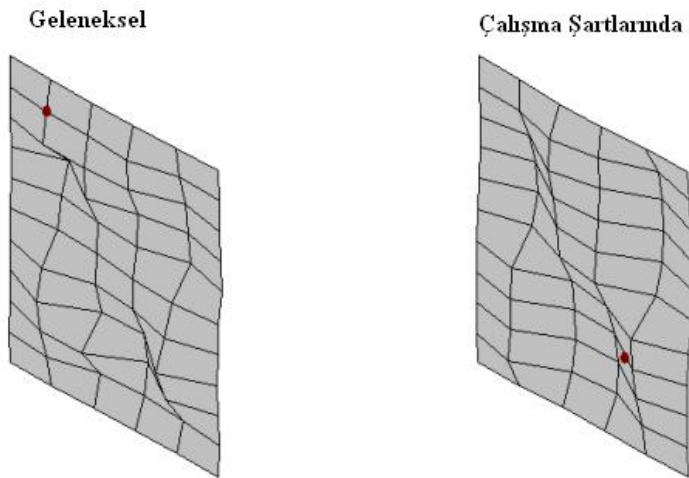
Şekil 4.57 Çalışır Durumdaki Çamaşır Makinası Yan Paneli 4. Mod Karşılaştırılması



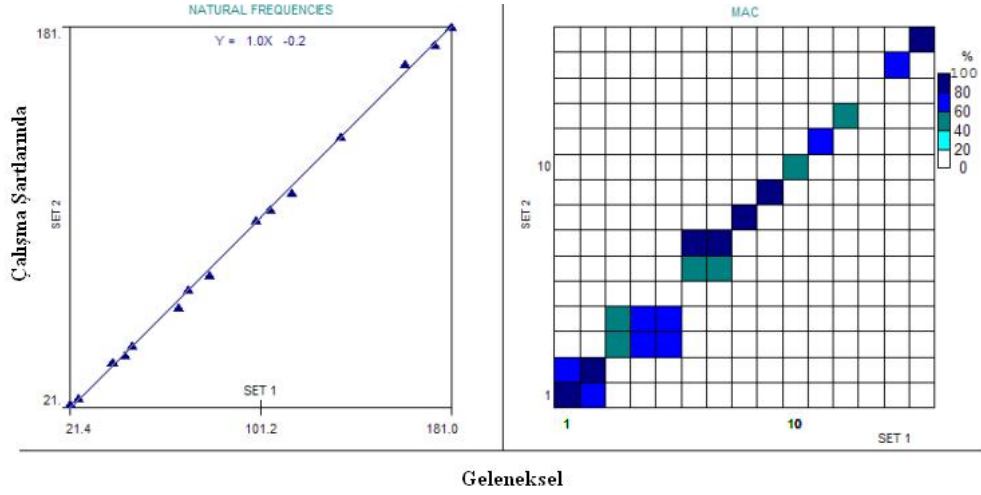
Şekil 4.58 Çalışır Durumdaki Çamaşır Makinası Yan Paneli 7. Mod Karşılaştırılması



Şekil 4.59 Çalışır Durumdaki Çamaşır Makinası Yan Paneli 9. Mod Karşılaştırılması



Şekil 4.60 Çalışır Durumdaki Çamaşır Makinası Yan Paneli 10. Mod Karşılaştırılması



Şekil 4.61 Çalışır Durumdaki Çamaşır Makinası Yan Paneli MGK

Sonuç olarak Tablo 4.9’da da görüldüğü gibi çamaşır makinası yan panelinde kuvvet bilinerek geleneksel modal analiz sonucu elde edilen doğal frekanslar ve çalışır durumdaki çamaşır makinasından FAA yöntemi sonucu elde edilen doğal frekanslar bir birleriyle uyumludur. Ancak tablodan da görüldüğü gibi elde edilen sönüm kayıp faktörlerinde bir miktar uyumsuzluk görülmektedir. Bunun temel nedenlerinden biri çalışır durumdaki çamaşır makinesinin dönüş harmoniklerinin etkisinden dolayı görülen doğal frekans tepelerinin geleneksel modele göre daha sivri oluşudur. Bu nedenle çalışma şartlarında elde edilen sönüm kayıp faktörleri geleneksel modele göre daha düşüktür. Bir başka nedeni ise daha önceden de belirtildiği gibi geleneksel olarak elde edilen ivme verilerine eksponansiyel pencereleme fonksiyonu uygulanmasından dolayı yapıya sayısal bir sönüm eklenmesidir. Bu da geleneksel olarak elde edilen sönüm kayıp faktörlerinin yüksek çıkmasına neden olmaktadır. Elde edilen mod şekillerinde ise bazı modlar hariç büyük oranda uyumluluk görülmektedir. Uyumlu olmayan mod şekillerinin bazıları geleneksel olarak elde edilen modelden bazıları ise çalışma şartlarında elde edilen modelden kaynaklanmaktadır. Şekil 4.60’daki karşılaştırmadan da görüldüğü gibi çamaşır makinası bazı modlarda geleneksel modal analiz sonucu modal çekiç ile yapının karmaşıklığından dolayı yeterince tahrik edilememektedir. Bu yüzden geleneksel olarak o mod görülememiştir. Bunun bir başka nedeni alınan 3 ortalamanın yetersiz olması gibi deneysel ölçüm hataları olabilir. Bir başka neden ise çalışma şartlarında bazı dönüş frekansı harmonikleri yapının doğal frekanslarına yakın olabilmektedir. Bu da elde edilen mod şeklinde uyumsuzluk yaratmaktadır.

Özetle çalışır durumdaki çamaşır makinasına Frekans Alanında Ayırıklaştırma yöntemini uygulayarak çalışma şartlarında modal parametreleri belirlenebilmekte fakat yapının dönüş frekansı harmonikleri bazı modal parametrelerin belirlenmesini çok zorlaştırmaktadır.

5. GENEL DEĞERLENDİRME VE GELECEKTE YAPILABİLECEK ÇALIŞMALAR

5.1 Genel Değerlendirme

Bu tez kapsamında, yapıların çalışma şartlarında (yapı üzerine etkiyen kuvvet bilinmeden) modal parametrelerinin belirlenmesine yönelik bir metodoloji geliştirilmeye çalışılmıştır. Bazı yapıların darbe çekiçleri veya sarsıcılarla titreşime sokulması ya mümkün olmamaktadır ya da bunu gerçekleştirmek oldukça zor ve zaman alıcıdır. Bazı durumlarda ise oluşan kuvvetler sensörlerle ölçülemeyecek kadar büyük olmaktadır. Bu nedenlerden dolayı tahrik uygulamaya gerek kalmadan sistemlerin gerçek çalışma şartları altındaki dinamik özelliklerinin belirlenebilmesini hedefleyen çalışma şartlarındaki modal analiz yöntemleri bu süreci daha kolay ve daha ekonomik hale getirmeyi amaçlamaktadır ve uygulama için cazip gözükmektedir.

Literatürde tanımlanmış çok sayıda çalışma şartlarında modal analiz yöntemleri mevcuttur. Tez kapsamında bu yöntemler incelenmiş, gerekli sınıflandırmalar yapılmış ve bu yöntemler arasından Frekans Alanında Ayırıklaştırma yöntemi (FAA) seçilmiş ve Matlab programında yazılım geliştirilerek uygulanmaya çalışılmıştır.

FAA yöntemi, yapıların çalışma şartları altındaki titreşimlerini kullanarak dinamik özelliklerinin (doğal frekans, sönüm, mod şekilleri) belirlenmesini sağlayan bir yöntemdir. İlk adım olarak yapı üzerindeki ölçüm noktalarından bir adet ivmeölçer referans olmak şartıyla diğer ivmeölçerlerin yapı üzerinde gezdirilmesi sonucu referans ivmeölçeri ile gezici ivmeölçerler ve aynı zamanda gezici ivmeölçerlerin kendi aralarındaki öznel ve çapraz spektrumları hesaplanarak spektral yoğunluk matrisleri elde edilir. Daha sonra bu matrislerin tekil değerlerine ayrıştırılması sonucu doğal frekanslar ve mod şekilleri, elde edilen öznel spektrumlara yarım güç bant genişliği yönteminin uygulanmasıyla da sönüm oranları bulunmaya çalışılmıştır. Çalışma şartlarında modal analiz hem sayısal hem de deneysel durum için gerçekleştirilmiştir.

Tez çalışmasında FAA yönteminin hangi şartlarda doğru sonuç vereceği, uygulama esnasında ne gibi problemlerle karşılaşılacağı ve bunların üstesinden nasıl gelinebileceği gibi konular açıklanmaya çalışılmıştır.

Yapılan sayısal uygulamalar, FAA yönteminin etkin bir şekilde çalıştığını göstermiştir. Farklı yapılar üzerinde farklı sönüm tipleri ve uygun sönüm oranları kullanılarak modal parametreler yüksek doğrulukla bulunmuştur. Ayrıca geleneksel ve çalışma şartlarında elde edilen modal parametreler arasında farklılıklar var ise bunların sebeplerine değinilmiştir. Çalışmalar, FAA yönteminin sayısal modeller üzerinde etkin bir şekilde çalıştığını göstermiştir.

Yapılan uygulamaların ikinci bölümünde deneysel çalışmalar yapılmıştır. Bu bölümde farklı yapıların çalışma şartları altındaki titreşimleri ölçülerek modal parametreleri belirlenmeye çalışılmıştır. Örneğin düz giriş ve plakada yapı üzerine tahrik kuvveti uygulanmış fakat bu kuvvet değeri ölçülmeden modal parametreler belirlenmiş, çamaşır makinasında ise yapı gerçek çalışma koşulları altında çalıştırılarak üzerinden alınan titreşimler yardımıyla modal parametreleri belirlenmiş ve geleneksel olarak (kuvvet bilinerek) elde edilen modellerle karşılaştırılmıştır. Deneysel durumdan elde edilen sonuçlar bazı modlar hariç tatmin edicidir.

Tez boyunca yapılan çalışmalardan çıkarılan en önemli sonuçlar şunlardır:

- Çalışma şartlarındaki modal analiz tekniklerinin bir varsayımı, sistemlerin beyaz tahrik ile yüklendiğidir. Beyaz tahrik sinyali yapıdaki tüm frekansları tahrik edebilmekte ve oldukça düz bir spektruma sahiptir. Dolayısıyla beyaz tahrik sinyalinin güç spektrumu uygun bir tahrik olarak herhangi bir sistemde kullanılabilir. İkinci bir varsayım ise yöntemin düşük sönümlü sistemlere uygulanabilmesidir. Bu varsayımların geçerli olmadığı durumlarda çalışma şartlarında modal parametrelerin belirlenebilmesi zorlaşmaktadır.
- En ideal durum yapı üzerindeki tüm ölçüm noktalarından aynı anda ölçüm alınmasıdır. Fakat pratikte bu durum pek mümkün olmadığından (ivmeölçer ve analizör kanalı yetersizliği) yapı üzerindeki bir noktaya referans ivmeölçer konularak diğer ivmeölçerlerin yapı üzerinde gezdirilmesi sonucu ölçümler alınmaktadır. Referans noktasının yerinin seçilmesi ise önemlidir. Bunun için yapı üzerinde bir ön bilgiye sahip olunmalı ve bu referans ivmeölçer herhangi bir mod şeklinde yapı üzerinde hareketsiz kalan noktalara konmamalıdır.

- Çalışma şartlarında modal analiz sonucu elde edilen mod şekilleri, tahrik kuvvetinin bilinmemesinden dolayı ölçeklendirilememektedir. Ölçeklendirilemeyen bu mod şekillerine birim normalizasyon uygulanmalıdır.
- Deneysel ölçümlerden kaynaklanan gürültüler yükseğe uygun sonuçlar elde edilememektedir. Bu gürültüleri azaltmak için frekans spektrumunda mümkün olduğunca çok ortalama alınmalıdır. Zaman alanında kullanılan tek ölçüm hatalara neden olabilmektedir.
- İvmeölçerlerin yarattığı kütle etkisinin ve uzun kabloların yarattığı sönüm etkisinin sonuçlar üzerinde olumsuz etkileri vardır. Bunun önüne geçebilmek için ölçümler lazer ölçüm cihazı yardımıyla alınabilir.
- Yapının çalışma şartları altındaki tahrik frekansı ve harmoniklerinin yapının doğal frekanslarına çok yakın olduğu durumlarda modal parametreleri belirlemek çok zor gözükmemektedir. Ayrıca bu harmonikler elde edilen sönüm oranlarının olması gerekenden düşük elde edilmesine neden olabilmektedir.

5.2 Gelecekte Yapılabilecek Çalışmalar

Bu tez kapsamında çalışma şartlarında modal analiz yöntemlerinden Frekans Alanında Ayırıklaştırma yöntemi üzerinde durulmuştur. Bir diğer yöntem olan zaman alanındaki Olasılık Alt-Uzay Belirleme (Stochastic Subspace Identification) tekniği daha detaylı incelenerek bu yönde bir çalışma da yapılabilir. Bu metodun avantajlarından da faydalanılarak elde edilen sonuçların kalitesi biraz daha iyileştirilmeye çalışılabilir.

Sönüm oranlarında elde edilen verilerin iyileştirilmesi amacıyla Geliştirilmiş FAA tekniği ile sönüm oranları bulunabilir. Bu yöntem öznel ve çapraz korelasyon fonksiyonlarını hesaplayarak belirli bir moddaki doğal frekansı ve sönümü bulmaya dayanır. Önceden hesaplanan öznel ve çapraz spektrumlara Ters Ayırık Fourier Transformu uygulanarak, zaman bölgesine dönülerek rezonans tepesi etrafında tek serbestlik dereceli güç spektrum yoğunluk fonksiyonu belirlenir. Sönüm, ilgili tek serbestlik dereceli normalize edilmiş öznel korelasyon fonksiyonunun logaritmik azalma miktarından elde edilir.

Ölçümlerin hem kısa zamanda hem de aynı anda alınabilmesi için lazer ölçüm cihazı kullanılarak metodun verdiği sonuçların kalitesi yükseltilebilir. Böylelikle

ivmeölçerlerin yarattığı kütle etkisinden ve uzun kabloların yarattığı sönüm etkisinden kurtulunabilir.

Bu tez çalışmasında çalışır durumdaki çamaşır makinası üzerinden deneysel olarak titreşimler ölçülmüş ve modal parametreler belirlenmeye çalışılmıştır. Sayısal olarak da ADAMS programında çamaşır makinası modeli kurulup çalışma şartları altındaki titreşimleri ölçülerek modal parametreleri belirlenebilir. Böylelikle çamaşır makinasına ait sistem parametrelerinin (yay, amortisör, körük) değişiminin sistemin dinamik özellikleri üzerindeki etkileri deneysel prototip oluşturulmadan sayısal ortamda incelenebilecektir.

Deneysel olarak çamaşır makinası içinde herhangi bir dengesizlik yok iken modal parametreler belirlenmeye çalışılmıştır. İleriki çalışmalarda çamaşır makinası içerisinde bir dengesizlik oluşturarak modal parametreleri belirlenmeye çalışılabilir. Aynı zamanda bu durum sayısal olarak modellenen çamaşır makinasında da sınanabilir.

KAYNAKLAR

- [1] **P.Mendes, M.A.Baptista**, 2004. "Output Only Analysis Applied on a Reinforced Concrete Building, Lisbon", *Proc. 22th International Modal Analysis Conference*, Detroit, USA.
- [2] **Maria Ana Baptista, Paulo Mendes, Sérgio Oliveira**, 2005. "Use of ambient vibration tests for structural identification: 3 case studies", *Proceedings of 1st International Operational Modal Analysis (IOMAC)*, Copenhagen.
- [3] **B.Peeters**, 2000. "System Identification and Damage Detection in Civil Engineering", *PhD thesis*, Katholieke Universiteit Leuven, 2000.
- [4] **G.H.James III, T.G.Carne and J.P.Laufer**, 1995. "The Natural Excitation Technique (NExT) for modal parameter extraction from operating structures", *The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis* 10(4), pp.260-277.
- [5] **L. Hermans AND H. Van Der Auweraer**, 1999 "Modal Testing And Analysis of Structures under Operational Conditions: Industrial Applications", *Journal of Mechanical Systems and Signal Processing* 13(2), pp.193-216, 1999.
- [6] **R.Brincker, L.Zhang and P.Andersen**, 2000. "Modal Identification from Ambient Responses using Frequency Domain Decomposition", *Proceedings Of the 18th International Modal Analysis Conference*. San Antonio, Texas.
- [7] **R.Brincker, L.Zhang and P.Andersen**, 2001. "Modal identification of output-only systems using frequency domain decomposition", *Smart Materials and Structures* (10), pp.441–445.
- [8] **P.Andersen, R.Brincker, B.Peeters, G.De Roeck, L.Hermans**, 1999. "Comparison of System Identification Methods Using Ambient Bridge Test Data", *Proceedings of 17th International Modal Analysis Conference (IMAC)*, Kissimmee, Florida.
- [9] **B.Peeters and G.De Roeck**, 1999. "Reference-based stochastic subspace identification for output-only modal analysis", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Volume 13, Issue 6, pp. 855-878.
- [10] **H.Herlufsen, N.Møller**, 2002. "Operational Modal Analysis of a Wind Turbine Wing using Acoustical Excitation", *Brüel&Kjær Application Note*, Denmark.
- [11] **R.Brincker, P.Andersen and N.Møller**, 2000. "Ambient Response Analysis of the Heritage Court Tower Building Structure", *Proceedings of the 18th International Modal Analysis Conference*, San Antonio, Texas.

- [12] **H.Ahmadian**, 2005. "Extracting Modes of a Railway Vehicle From Measured Responses.", *Proceedings of 1st International Operational Modal Analysis Conference*, Copenhagen, Denmark.
- [13] **M. Teimouri-Sichani, H. Ahmadian**, 2006 "Identification of Railway Car Body Model Using Operational Modal Analysis", *Proceedings of 8th international railway transportation conference (IRTC8)*, Tehran, Iran.
- [14] **R.Brincker, P.Andersen, N.Møller**, 2000. "Output-Only Modal Testing of a Car Body Subject to Engine Excitation", *Proceedings Of the 18th International Modal Analysis Conference*, San Antonio, Texas, 2000.
- [15] **S.-E.Rosenow, G.Scholottmann**, 2006. "Parameter identification of ship structures using classical and operational modal analysis", *Proceedings of International seminar on noise and vibration (ISMA32)*, KULeuven, Belgium.
- [16] **A. W. Phillips, R. J. Allemang, and W. A. Fladung**, 1998. "The Complex Mode Indicator Function (CMIF) as a parameter estimation method.", *International Modal Analysis Conference*.
- [17] **B.Peeters, G.De Roeck**, 2001. "Stochastic system identification for operational modal analysis: a review", *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control* (123), pp.659–667.
- [18] **M. Teimouri, M. Mahjoop**, 2007. "Operational Modal Analysis Applied To A Horizontal Washing Machine: A Comparative Approach", *International Operational Modal Analysis Conference*.
- [19] **James, G.H., Carne, T.G., Lauffer, J.P. Nard, A.R.**, 1992. Modal Testing Using Natural Excitation, *Proc. Of the 10-th IMAC*, San Diego, CA, USA
- [20] **Vold, H. et. Al.**, 1982. A Multi-Input Modal Estimation Algorithm for Mini-Computers, *SAE Paper No. 820194*
- [21] **Brown, D.L. et al.**, 1979. Parameter Estimation Techniques for Modal Analysis, *SAE Paper No. 790221*
- [22] **Juang, J. N. and Pappa, R.**, 1984. An Eigensystem Realization Algorithm (ERA) for Modal Parameter Identification, CA, USA
- [23] **Ibrahim, S.R. & Mikulcik, E.C.**, 1977. A Method for the Direct Identification of Vibration parameters from the Free Response, *The Shock and Vibration Bulletin*
- [24] **Fukuzono, K.** 1986. Investigation of Multiple Reference Ibrahim Time Domain Modal Parameter Estimation Technique, *M.S. Thesis, Dept. of Mechanical and Industry Engineering*, University of Cincinnati.
- [25] **Zhang, L.-M., Yao, Y. -X. & Lu, M. -F.**, 1987. An Improved Time Domain Polyreference Method for Modal Identification, *Mechanical System and Signal Processing*
- [26] **Juang, J. -N., Cooper, J. E. And Wright, J. R.**, 1988. An Eigensystem Realization Algorithm Using Data Correlation (ERA/DC) for Modal Parameter Identification, *Control-Theory and Advanced Technology*
- [27] **Ewins, D. J.**, 2000. Modal Testing: Theory, Practice and Application. Research Studies Press Ltd., Hertfordshire, England

- [28] **Prasenjit Mohanty**, 2005. Operational Modal Analysis in the Presence of Harmonic Excitations, *Ph.D Thesis*.
- [29] **Ljung, L.**, 1987. System Identification, Theory for the User, *Prentice Hall*. Englewood Cliffs.
- [30] **Andersen, Palle**, 1997. Identification of Civil Engineering Structures using Vector ARMAR Model, *Ph.D. Thesis*, Aalborg University, Denmark.
- [31] **Akaike, H.**, 1974. Stochastic Theory of Minimal Realization, *IEEE Trans. Automatic Control*
- [32] **Benveniste, A. and Fuche, J.J.**, 1985. Single Simple Modal Identification of a Nonstationary Stochastic Process, *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-30.
- [33] **Arun, K.S. and Kung, S.Y.**, 1990. Balanced Approximation of Stochastic System, *SIAM J. Matrix Analysis Application*.
- [34] **L.Zhang, R.Brincker, P. Andersen**, 2006. An Overview of Operational Modal Analysis: Major Development and Issues
- [35] **Overschee, P. van & De Moor, B.**, 1996. Subspace identification for linear systems – Theory, Implementation, Applications. *Kluwer Academic Publishers*, ISBN 0-7923-9717-7
- [36] **Van Overchee, P. and De Moor, B.**, 1993. Subspace Algorithms for the Stochastic Identification Problem, *Automatica*
- [37] **R. Brincker, P. Andersen**, 2006. Understanding Stochastic Subspace Identification. *Proceedings of The 24th International Modal Analysis Conference (IMAC)* St. Louis, Missouri.
- [38] **Mehdi Batel, Brüel & Kjaer**, 2002. “Operational Modal Analysis – Another Way of Doing Modal Testing” Norcross, Georgia, *Sound and Vibration*.
- [39] **Bendat, Julius S and Allan G. Piersol**, 1986. Random Data, Analysis and Measurement Procedures, New York, USA.
- [40] **Brincker, R.; Ventura, C.; Andersen, P.**, 2001. Damping Estimation by Frequency Domain Decomposition, *IMAC XIX*, Kissimmee, USA.
- [41] **Zhang, L.-M. Wang, T. And Tamura, Y.**, 2005. Frequency-spatial Domain Decomposition Technique with Application to Operational Modal Analysis of Civil Engineering Structures, *IOMAC*, Copenhagen, Denmark.
- [42] **Pintelon, R. and Schoukens, J.**, 2001. System Identification: A Frequency Domain Approach, *IEEE Press and John Wiley & Son*.
- [43] **Guillaume, F. et. al.**, 1998. Frequency Domain Maximum Likelihood Identification of Modal Parameters with Confidence Levels, *Proc. Of ISMA 23*, Leuven, Belgium
- [44] **Guillaume, P. et. al.**, 2003. A Poly-reference Implementation of the Least-Squares Complex Frequency Domain Estimator, *IMAC XXI*, Kissimmee, USA
- [45] **Bernal, D and Gunes, B.**, Damage Localization in Output-Only systems: A Flexibility Based Approach. *In Proc. of the International Modal Analysis Conference (IMAC) XX*, Los Angeles (CA), February, 2002

- [46] **Brüel & Kjaer**, 1987. “Technical Review, Windows to FFT Analysis (Part 1)”
No: 3.
- [47] **Hakan Ersoy**, 2003. Yapısal Sistemlerin Tasarım Duyarlılığı Analizlerinin Tekil Değerler Ayırıştırma (TDA) Metoduna Dayalı Olarak Yapılması. *Doktora Tezi*, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul
- [48] **Wikipedia web sitesi**, <http://en.wikipedia.org/wiki>
- [49] **MathWorld web sitesi**, <http://mathworld.wolfram.com/>.
- [50] **Uslu, A. A.**, 2006. Titreşim Verileri Yardımıyla Bilinmeyen Tahrik Kuvvetlerinin Belirlenmesi, *Yüksek Lisans Tezi*, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [51] **I-DEAS**, 2006. Version 11. Structural Dynamics Research Corporation.
- [52] **ADAMS**, Version 2005. MSC Corporate Santa Ana, CA – USA
- [53] **MATLAB**, Version 7.3.0.267 (R2006b). The MathWorks
- [54] **ICATS**, 2006. Imperial College, London.

EKLER

Ek A

Aşağıdaki matrisi tekil değerlerine ayırtırmak gerekirse aşağıdaki adımları izlemek gerekmektedir.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

İlk olarak A matrisinin transpozunu A^T ve $A^T A$ 'yı hesaplamak gerekecektir.

$$A^T = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \quad A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 25 & -15 \\ -15 & 25 \end{bmatrix}$$

Daha sonra $A^T A$ matrisinin özdeğerleri hesaplanmalı ve bunlar azalan sıra ile yazılmalıdır. Bu özdeğerlerin karekökü A matrisinin tekil değerlerini verecektir.

$$A^T A - cI = \begin{bmatrix} 25-c & -15 \\ -15 & 25-c \end{bmatrix} \quad |A^T A - cI| = (25-c)(25-c) - (-15)(-15) = 0$$

$$\text{Karakteristik denklem: } c^2 - 50c + 400 = 0$$

$$\text{Özdeğerler: } c_1 = 40 \quad c_2 = 10$$

$$\text{Tekil Değerler: } s_1 = \sqrt{40} = 6.3245 > s_2 = \sqrt{10} = 3.1622$$

Bir diğer adımda tekil değerleri azalan sıra ile matrisin köşegenleri üzerine koyarak köşegen S matrisi oluşturulmalı ve tersi hesaplanmalıdır (s^{-1}).

$$S = \begin{bmatrix} 6.3245 & 0 \\ 0 & 3.1622 \end{bmatrix} \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1581 & 0 \\ 0 & 0.3162 \end{bmatrix}$$

Daha önce bulunan özdeğerleri kullanarak $A^T A$ matrisinin özvektörleri hesaplanmalıdır. Bu özvektörleri V matrisinin sütunlarına yerleştirip, transpozunu V^T hesaplanmalıdır.

$$c_1 = 40 \text{ için}$$

$$A^T A - cI = \begin{bmatrix} 25-40 & -15 \\ 15 & 25-40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & -15 \\ -15 & -15 \end{bmatrix}$$

$$(A^T A - cI)X_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -15 & -15 \\ -15 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bu denklem çözülürse $x_2 = -x_1$

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix}$$

Daha sonra uzunluğa bölünmelidir.

$$L = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = x_1 \sqrt{2}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 / L \\ -x_1 / L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7071 \\ -0.7071 \end{bmatrix}$$

$c_2 = 10$ için bu işlemler tekrarlanırsa:

$$A^T A - cI = \begin{bmatrix} 25-10 & -15 \\ 15 & 25-10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -15 \\ -15 & 15 \end{bmatrix}$$

$$(A^T A - cI)X_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 15 & -15 \\ -15 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bu denklem çözülürse $x_2 = x_1$

$$X_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

Uzunluğa bölersek:

$$L = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = x_1 \sqrt{2}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} x_1 / L \\ x_1 / L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7071 \\ 0.7071 \end{bmatrix}$$

Sonuç olarak V matrisi de aşağıdaki şekilde hesaplanmış olur.

$$V = [X_1 \quad X_2] = \begin{bmatrix} 0.7071 & 0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix}$$

$$V^T = \begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 \\ 0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix}$$

$U = AVS^{-1}$ 'den de U matrisi aşağıdaki şekilde hesaplanabilir ve $A = USV^T$ denklemini ispatlanabilir.

$$U = AVS^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7071 & 0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1581 & 0 \\ 0 & 0.3162 \end{bmatrix}$$

$$U = AVS^{-1} = \begin{bmatrix} 0.4472 & 0.8944 \\ 0.8944 & -0.4472 \end{bmatrix}$$

$$A = USV^T = \begin{bmatrix} 0.4472 & 0.8944 \\ 0.8944 & -0.4472 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6.3245 & 0 \\ 0 & 3.1622 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 \\ 0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix}$$

$$A = USV^T = \begin{bmatrix} 3.9998 & 0 \\ 2.9999 & -4.9997 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

Ek B

Örneğin denklem (B.1)'de verilen kompleks bir matrisi ele alırsak:

$$A = \begin{bmatrix} 7+9i & 2+3i \\ 1-2i & 6+5i \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Bu matrisin Hermitian bölümü denklem (B.2)'de verilen hali alır.

$$A_H = \frac{1}{2}(A + A^H) = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 7+9i & 2+3i \\ 1-2i & 6+5i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7-9i & 1+2i \\ 2-3i & 6-5i \end{bmatrix} \right)$$
$$A_H = \begin{bmatrix} 7 & 1.5+2.5i \\ 1.5-2.5i & 6 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Denklem (B.2)'deki A_H matrisinin özdeğerleri: $3.5420 > 0$ ve $9.4580 > 0$ dır. Aynı zamanda A_H matrisinin determinanı: $\det(A_H) = 33.5 > 0$ dır. Dolayısıyla A matrisi pozitif belirlidir.

ÖZGEÇMİŞ

Aleks Kuyumcuoğlu, 1982 yılında İstanbul’da doğdu. 2000 yılında Özel Pangaltı Lisesinden mezun olduktan sonra girdiği Yıldız Teknik Üniversitesi Makine Fakültesi Makina Mühendisliği Lisans programını 2005 yılında tamamladı ve İstanbul Teknik Üniversitesi Mekatronik Mühendisliği yüksek lisans programından 2008 yılında mezun oldu. Halen Arçelik A.Ş. Titreşim Akustik Laboratuvarında ARGE Mühendisi olarak çalışmaktadır.