İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İÇERİSİNDE AKIŞKAN BULUNAN DEĞİŞKEN YARIÇAPLI ELASTİK TÜPLERDE NONLİNEER DALGA YAYILIMI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ali Erinç ÖZDEN
509021004

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 9 Mayıs 2005
Tezin Savunulduğu Tarih: 31 Mayıs 2005

Tez Danışmanı: Yrd.Doç.Dr. Nalan ANTAR

Diğer Jüri Üyeleri: Prof.Dr. Faruk GÜNGÖR (İTÜ)
Prof.Dr. Hilmi DEMİRAY (Işık Ü.)

HAZİRAN 2005

ÖNSÖZ

Yüksek lisans çalışmam boyunca beni teşvik edip ilgisini esirgemeyen, çalışmalarımın her bölümünde beni yönlendiren ve destek veren danışmanım Yar. Doç. Dr. Nalan Antar'a,

yüksek lisans öğrenimim ve tez çalışmam süresince katkılarını ve büyük desteğini gördüğüm, üstün bilimsel şahsiyetini örnek aldığım Prof. Dr. Hilmi Demiray'a,

yüksek lisans eğitimime başlama aşamasında beni teşvik edip yol gösteren, sıkıntılı anlarımda her zaman desteğini gördüğüm Yar. Doç. Dr. İlkay Bakırtaş'a,

lisans öğrenimim sırasında iştirak ettiğim dersler neticesinde düşünce sistemimi ve bakış açımı değiştiren Prof. Dr. Esin İnan'a,

daima yanımda olan, destek ve sevgilerini eksik etmeyen aileme,

en içten teşekkürlerimi sunarım.

Haziran 2005 Ali Erinç Özden

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbf{Z}$	:Maddesel noktanın şekil değiştirmeden önceki eksenel koordinatı
$\mathbf{z}$	:Maddesel noktanın statik şekil değiştirmeden sonraki eksenel koordinatı
$\mathbf{f}$	:Tüp yarıçapındaki değişimi temsil eden fonksiyon
$\mathbf{H}$	:Statik şekil değiştirmeden önceki tüp kalınlığı
$\mathbf{h}$	:Statik şekil değiştirmeden sonraki tüp kalınlığı
$\mathbf{h}^{'}$	:Tüpün nihai kalınlığı
$\lambda_{\mathbf{z}}$	:Eksenel yöndeki germe
$\mathbf{\Pi}$	:Hidrostatik basınç
μ	:Elastik cismin küçük şekil değiştirme halindeki kayma modülü
$\mathbf{c}_{\mathbf{kl}}^{-1}$	:Finger deformasyon tansörü
$\bar{\mathbf{P}}$	:Akışkanın hidrostatik basıncı
$\rho_{\mathbf{a}}$	:Akışkanın kütle yoğunluğu
$\mathbf{v}_{\mathbf{r}}$	:Akışkanın radyal doğrultudaki hız bileşeni
$\mathbf{v}_{\mathbf{z}}$	:Akışkanın eksenel doğrultudaki hız bileşeni
$\mathbf{w}$	:Akışkanın ortalama anlamda eksenel doğrultudaki hız bileşeni

İÇERİSİNDE AKIŞKAN BULUNAN DEĞİŞKEN YARIÇAPLI ELASTİK TÜPLERDE NONLİNEER DALGA YAYILIMI

ÖZET

Bu çalışmada içi akışkanla dolu, ön gerilmeli yarıçapı değişken, ince elastik tüplerde nonlineer dalga yayılımı incelenmiştir. Bölüm 1'de konunun tarihsel gelişimi ve bu konudaki mevcut çalışmalar sunulmuştur. Bölüm 2'de içi sıkışmaz viskoz olmayan akışkanla dolu, ön gerilmeli, yarıçapı değişken ince elastik tüpe ait alan denklemleri türetilmiştir. Bölüm 3'te kullanılacak pertürbasyon yöntemleri hakkında kısa bir özet verilmiştir. Bölüm 4'te indirgeyici pertürbasyon yöntemi kullanılarak, içi sıkışmaz bir akışkanla dolu yarıçapı değişken elastik bir tüpte zayıf nonlineer dalgaların yayılımı problemi ilk olarak genel halde ve daha sonra başlangıç deformasyonunun belirli bir değeri için μ_1 katsayısının sıfır olması halinde incelenmiştir. İlk durumda evolüsyon denklemi olarak değişken katsayılı Korteweg-de Vries denklemi elde edilmiştir. $\mu_1 = 0$ durumunda ise evolüsyon denklemi olarak değişken katsayılı modifiye Korteweg-de Vries denklemi elde edilmiştir. Bu bölümün sonunda, evolüsyon denklemlerine ilerleyen dalga çözümleri sunulmuş ve dalga hızlarının, daralan tüpler için sabit yarıçaplı tüpe göre artmakta olduğu ve genişleyen tüplerde ise azalmakta olduğu gösterilmiştir. Bölüm 5'de ise içerisinde viskoz olmayan akışkan bulunan yarıçapı değişken ince elastik tüpte nonlineer dalgaların genlik modülasyonu incelenmiştir. İndirgeyici pertürbasyon yöntemi kullanılarak evolüsyon denklemi olarak değişken katsayılı nonlineer Schrödinger denklemi elde edilmiştir. Bu evolüsyon denkleminin yalnız dalga tipi bir çözümü kabul ettiği gösterilmiş ve dalga hızı elde edilmiştir.

Temel Denklemler

Büyük damarlar, değişken yarıçaplı, ince, ön gerilmeli elastik tüp yapısında ve kan da sıkışmaz bir akışkan olarak kabul edilecek olursa, nonlineer hareket denklemleri aşağıdaki gibi verilir.

Yarıçapı değişken elastik tüpün hareket denklemleri :

$$p = \frac{m}{\lambda_z(\lambda_\theta + f + u)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{\lambda_z(\lambda_\theta + f + u)}\frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_2}$$

$$-\frac{1}{(\lambda_\theta + f + u)}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{(f' + \frac{\partial u}{\partial z})}{\left[1 + (f' + \frac{\partial u}{\partial z})^2\right]^{1/2}}\frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_1}\right\}. \qquad (1)$$

Burada λ_z statik şekil değiştirmeden sonraki eksenel germeyi, f yarıçap değişimini belirleyen fonksiyonu, $\mu\Sigma$ tüp malzemesinin şekil değştirme enerjisi yoğunluğu fonksiyonunu, p akışkan basıncını, λ_1 ve λ_2 asal germeleri göstermektedir.

Akışkan Denklemleri :

Viskoz olmayan akışkana ilişkin yaklaşık akışkan denklemleri aşağıdaki gibi verilir

$$2\frac{\partial u}{\partial t} + (\lambda_\theta + f + u)\frac{\partial w}{\partial z} + 2(f^{'} + \frac{\partial u}{\partial z})w = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \tag{3}$$

Burada, w hızın ortalama anlamda eksenel yöndeki bileşenini göstermektedir.

Zayıf Nonlineer Dalgalar

Bu bölümde, akışkanla dolu yarıçağı değişken elastik tüplerde zayıf nonlineer dalga yayılımı iki farklı durum için incelenmiştir. Bu tür problemlerde, aşağıda verilen tipte bir koordinat dönüşümü tanımlamak uygundur

$$\xi = \epsilon^{1/2}(z - gt), \quad \tau = \epsilon^{3/2}z. \tag{4}$$

Burada ϵ, nonlineeritenin ve dispersiyonun küçüklüğünü karakterize eden bir parametre, g ise bir ölçek parametresi olup çözümün bir parçası olarak elde edilecektir. (4) denkleminden z çözülerek $f(z)$ de yerine konursa

$$f(z) = h(\epsilon, \tau) \tag{5}$$

şeklini alır. Ayrıca $h(\epsilon, \tau)$ fonksiyonunun ve u, w, p alan büyüklüklerinin aşağıdaki şekilde bir asimptotik seriye açılacağı kabul edilecektir

$$h = \epsilon h_1(\tau) + \epsilon^2 h_2(\tau) + ..., \quad u = \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + ...,$$

$$w = \epsilon w_1 + \epsilon^2 w_2 + ..., \quad p = p_0 + \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_2 + ... \tag{6}$$

(4) ve (6) ilişkileri (1)-(3) alan denklemlerinde kullanılmıştır. ϵ'un benzer kuvvetlerinin katsayılarının sıfıra eşitlenmesi ile bir diferansiyel denklemler seti elde edilmiştir. Bu denklemler ardışık olarak çözülürse aşağıdaki değişken katsayılı Korteweg-de Vries denklemi elde edilir

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \mu_1 U\frac{\partial U}{\partial \xi} + \mu_2\frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} - \mu_3 h_1(\tau)\frac{\partial U}{\partial \xi} = 0. \tag{7}$$

Bu bölümde ikinci olarak, başlangıç deformasyonunun belirli bir değeri için μ_1 katsayısının sıfır olması durumu incelenmiştir. Bu durumda nonlineer evolüsyon denklemi dejenere olur ve lineer denkleme dönüşür, zayıf nonlineerite ile dispersiyon dengelenemez. Bu durumda ölçek parametresini değiştirmek gerekir ve aşağıdaki koordinat dönüşümünü kullanmak uygun olur

$$\xi = \epsilon(z - gt), \quad \tau = \epsilon^3 z. \tag{8}$$

Buna göre (6) ve (8) ilişkileri (1)-(3) alan denklemlerinde kullanılarak sonuç olarak aşağıdaki değşken katsayılı modifiye KdV denklemi elde edilir

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \lambda_1 U^2 \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{4}{\lambda_\theta} h_2(\tau) \frac{\partial U}{\partial \xi} + \mu_2 \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} = 0. \tag{9}$$

Bölüm 4'ün sonunda (7) ve (9) ile verilen evolüsyon denklemlerine ilerleyen dalga çözümleri sunulmuş ve dalga yayılım hızları da verilmiştir.

Nonlineer Dalga Modülasyonu

Bölüm 5'te içi viskoz olmayan akışkan ile dolu değişken yarıçaplı elastik tüplerde nonlineer dalgaların genlik modülasyonu incelenmiştir. Dispersiyon bağıntısının incelenmesi ve problemin bir sınır değer problemi olarak kabul edilmesinin bir sonucu olarak aşağıdaki biçimde bir koordinat dönüşümü tanımlanmıştır

$$\xi = \epsilon(z - \lambda t), \quad \tau = \epsilon^2 z. \tag{10}$$

Burada ϵ nonlineeritenin zayıflığını karakterize eden küçük bir parametre, λ ise çözümden belirlenecek olan bir sabittir. z 'yi τ cinsinden çözüp $f(z)$ fonkiyonun ifadesinde yazarsak

$$f(z) = h(\epsilon, \tau) \tag{11}$$

elde ederiz. $h(\epsilon, \tau)$ fonksiyonunun ve alan değişkenleri olan u, w ve p'nin aşağıdaki formda asimptotik seriye açılabileceğini varsayacağız

$$h(\epsilon, \tau) = \epsilon h_1(\tau) + \epsilon^2 h_2(\tau) + ...,$$

$$u = \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \epsilon^3 u_3 + ...,$$
$$w = \epsilon w_1 + \epsilon^2 w_2 + \epsilon^3 w_3 + ...,$$
$$p = p_0 + \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_2 + \epsilon^3 p_3 + ... \tag{12}$$

Burada $u_1, ..., p_3$ (z, t) hızlı değişkenleri ve (ξ, τ) yavaş değişkenlerinin birer fonksiyonudurlar. (10) ve (12) ilişkileri (1) - (3) ile verilmiş olan alan denklemlerinde kullanılır ve elde edilen denklem sistemi ϵ'nun çeşitli mertebelerinden kuvvetlerini içerecek biçimde düzenlenirse bir diferansiyel denklem takımı elde edilir. Bu denklemler ardışık olarak çözüldüğünde aşağıdaki değişken katsayılı nonlineer Schrödinger denklemi elde edilir

$$i\frac{\partial U}{\partial \tau} + \mu_1 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \mu_2 |U|^2 U + i\mu_3 h_1(\tau) \frac{\partial U}{\partial \xi} + [\mu_4 h_1^2(\tau) + \mu_5 h_2(\tau)$$

$$+\mu_6 \frac{dh_1(\tau)}{d\tau} \xi] U = 0. \tag{13}$$

Bu bölümün sonunda (13) ile verilen evolüsyon denklemine ilerleyen dalga tipi çözüm sunulmuş ve ilerleyen dalga ve zarf dalgalarının hız ifadeleri verilmiştir.

NONLINEAR WAVE PROPAGATION IN FLUID FILLED TAPERED ELASTIC TUBES

SUMMARY

In this work, nonlinear wave propagation in a prestressed tapered thin elastic tube filled with an incompressible inviscid fluid is studied. In Chapter 1, the historical evolution of the subject and some works on this area are presented. In Chapter 2, the basic equations governing the motion of a prestressed tapered thin elastic tube filled with an incompressible inviscid fluid are derived. In Chapter 3, a brief summary of the perturbation methods that we shall utilize in this work is given. In Chapter 4, by employing the reductive perturbation method, the propagation of weakly nonlinear waves in a tapered elastic tube filled with an incompressible inviscid fluid is studied for the general case and then for the case in which the coefficient μ_1 is zero for a particular value of the initial deformation. For the first case, variable coefficient Korteweg-de Vries equation is obtained as the evolution equation. For the second case, variable coefficient modified Korteweg-de Vries equation is obtained as the evolution equation. At the end of this chapter, the progressive wave solutions to these equations are given and it is shown that the wave speeds increase with distance for narrowing tubes while they decrease for expanding tubes. In Chapter 5, amplitude modulation of nonlinear waves in fluid filled tapered thin elastic tubes is investigated. By employing the reductive perturbation method, the evolution equation is obtained as nonlinear Schrödinger equation with variable coefficient. It is shown that this evolution equation admits a solitary wave type of solution with variable wave speed.

Basic Equations

Treating the arterial tree as a tapered, thin walled, prestressed elastic tube and blood as an incompressible fluid, the nonlinear equations of motion are given as follows.

Nonlinear equations of a tapered elastic tube :

$$p = \frac{m}{\lambda_z(\lambda_\theta + f + u)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{\lambda_z(\lambda_\theta + f + u)}\frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_2}$$

$$-\frac{1}{(\lambda_\theta + f + u)}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{(f' + \frac{\partial u}{\partial z})}{\left[1 + (f' + \frac{\partial u}{\partial z})^2\right]^{1/2}}\frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_1}\right\}, \tag{1}$$

where λ_z is the stretch ratio in the axial direction after the static deformation, f is the function which defines the tapering, $\mu\Sigma$ is the strain energy density function of the tube material, p is the fluid pressure and λ_1 and λ_2 are the stretch ratios in the final configuration.

Equations of fluid :

The approximate equations of an inviscid fluid may be given as follows

$$2\frac{\partial u}{\partial t} + (\lambda_\theta + f + u)\frac{\partial w}{\partial z} + 2(f' + \frac{\partial u}{\partial z})w = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \tag{3}$$

where w is the averaged axial fluid velocity.

Weakly Nonlinear Waves

In this part, the propagation of weakly nonlinear waves in a fluid filled tapered elastic tube is investigated in two cases. For this type of problems, it is convenient to introduce the following type of stretched coordinates

$$\xi = \epsilon^{1/2}(z - gt), \quad \tau = \epsilon^{3/2}z, \tag{4}$$

where ϵ is a small parameter measuring the weakness on nonlinearity and dispersion, g is a scale parameter to be determined from the solution. By using (4), z is obtained in terms of ϵ and τ. Introducing z into $f(z)$, we obtain

$$f(z) = h(\epsilon, \tau). \tag{5}$$

We further assume that $h(\epsilon,\tau)$ and the field quantities can be expressed as some asymptotic series of the form

$$h = \epsilon h_1(\tau) + \epsilon^2 h_2(\tau) + ..., \quad u = \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + ...,$$

$$w = \epsilon w_1 + \epsilon^2 w_2 + ..., \quad p = p_0 + \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_2 + ..., \tag{6}$$

where $u_1, ..., p_2$ are some unknown functions of the stretched coordinates (ξ, τ). The expansions (4) and (6) are introduced into field equations (1)-(3). By setting the coefficients of like powers of ϵ to zero, we obtain a set of differential equations. If these equations are solved simultaneously, we obtain the following variable coefficient Korteweg-de Vries equation

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \mu_1 U\frac{\partial U}{\partial \xi} + \mu_2\frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} - \mu_3 h_1(\tau)\frac{\partial U}{\partial \xi} = 0. \tag{7}$$

In the second part of this chapter, the case in which the coeffcient μ_1 is zero for a particular value of the initial deformation is investigated. In this case, nonlinear evolution equation degenerates and transforms into the linear equation; weak nonlinearity and dispersion can not be balanced. We should change the scale parameter and it is convenient to introduce the following coordinate transformation

$$\xi = \epsilon(z - gt), \quad \tau = \epsilon^3 z. \tag{8}$$

The expansions (6) and (8) are introduced into the field equations (1)-(3) and as a result the following variable coeffcient modified Korteweg-de Vries equaiton is obtained

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \lambda_1 U^2 \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{4}{\lambda_\theta} h_2(\tau) \frac{\partial U}{\partial \xi} + \mu_2 \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} = 0. \tag{9}$$

At the end of Chapter 4, the progressive wave solution to the evolution equations (7) and (9) are presented. Also the propagation speeds are given.

Nonlinear Wave Modulation

In Chapter 5, the problem of the amplitude modulation of nonlinear waves in fluid filled tapered elastic tubes is investigated. Analyzing the dispersion relation and considering that the problem of concern is the boundary value problem, the following stretched coordinates may be introduced

$$\xi = \epsilon(z - \lambda t), \quad \tau = \epsilon^2 z, \tag{10}$$

where ϵ is a small parameter measuring the weakness of nonlinearity and λ is a scale parameter to be determined from the solution. By using (4), z is obtained in terms of ϵ and τ. Introducing z into $f(z)$, we obtain

$$f(z) = h(\epsilon, \tau). \tag{11}$$

We further assume that $h(\epsilon, \tau)$ and the field variables can be expanded into an asymptotic series of ϵ as follows

$$\begin{aligned} h(\epsilon, \tau) &= \epsilon h_1(\tau) + \epsilon^2 h_2(\tau) + ..., \\ u &= \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \epsilon^3 u_3 + ..., \\ w &= \epsilon w_1 + \epsilon^2 w_2 + \epsilon^3 w_3 + ..., \\ p &= p_0 + \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_2 + \epsilon^3 p_3 + ..., \end{aligned} \tag{12}$$

where $u_1, ..., p_3$ are functions of the fast variables (z, t) and the slow variables (ξ, τ). Introducing (10) and (15) into the field equations (1)-(3) and setting the coefficients of the like powers of ϵ to zero, we obtain a set of differential equations. By solving these equaitons simultaneously, we obtain the following variable coefficient nonlinear Schrödinger equation

$$\begin{aligned} i\frac{\partial U}{\partial \tau} + \mu_1 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \mu_2 |U|^2 U + i\mu_3 h_1(\tau) \frac{\partial U}{\partial \xi} + [\mu_4 h_1^2(\tau) + \mu_5 h_2(\tau) \\ + \mu_6 \frac{dh_1(\tau)}{d\tau} \xi] U = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

At the end of this chapter, a progressive wave type of solution is presented to equation (13) and the speeds of the progressive wave and the envoloping wave are given.

1. GİRİŞ VE KISA TARİHSEL GELİŞİM

İçerisinde akışkan bulunan öngerilmeli veya öngerilmesiz, elastik veya viskoelastik tüp içinde lineer veya nonlineer dalga yayılımı problemi, üzerinde uzun zamandan beri çalışmalar yapılan bir konudur. Bu nedenle konunun tarihsel gelişimi hakkında özet bilgi sunmakta fayda olabilir. Büyük damarlarda dalga yayılımı problemi üzerindeki çalışmalar uzun zamandan beri devam etmektedir. Bu problemin önemi kısaca şöyle özetlenebilir: Büyük damarlarda dalga yayılımı problemi incelendiğinde, dalga hızının ve aktarma katsayısının çeşitli parametrelere göre değişimini matematiksel olarak izlemek mümkün hale gelecek, bu değerlerde zamanla görülen değişimler yorumlanarak kan veya damar malzemesinin yapısındaki değişimler gözlenebilecektir. Bu sebeple, kan ve damar ikilisinin matematik modeli oluşturulurken, hem tüp malzemesinin hem de kanın mekanik özellikleri dikkate alınmalıdır.

Silindirik tüpler içerisinde dalga yayılımı problemi ilk olarak Thomas Young (1773-1829) [1] tarafından ortaya konup incelenmiştir. Thomas Young 1808'de insan atardamarlarında yayılan pals dalgalarının hızını hesaplamıştır ve bu dalga Young modu olarak bilinmektedir. Bu çalışmadan sonra 19. yüzyıl boyunca birçok araştırmacı tüp içerisinde dalga yayılımı problemini incelemiş ve bunlardan bir kısmı Young tarafından bulunan pals dalgalrının hızını tekrar yorumlayıp formüle etmişlerdir.

Fizikçi olan Wilhelm Eduard Weber (1804-1896) ve anatomist olan Ernest Heinrick Weber (1795-1878) kardeşler Young'dan hemen sonra bu konular üzerinde birlikte çalışarak dalgaların atardamarlardaki dallanma noktalarındaki yansıma ve dalganın aktarılması konuları üzerindeki bulguları ile biyofiziğin ilk uygulamalarını vermişlerdir. Weber kardeşlerin çalışmalarını, Korteweg'in teorik ve Moens'in deneysel çalışmaları takip etmiştir. Moens ve Korteweg, içi viskoz olamayan akışkanla dolu ince elastik tüplerde dalga yayılımı problemini incelemişlerdir. Uzun dalga boyuna karşı gelen faz hızı literatürde Moens-Korteweg hızı, ilgili dalga da Moens-Korteweg modu olarak anılır. Viskozitenin dalga hızına olan etkisini ilk olarak inceleyen bilim adamı Witzig [2] dir. Tüplerde dalga yayılması ile ilgili diğer katkılar Morgan ve Kiely [3] ve Womersley [4] tarafından yapılmıştır. 1950 yılına kadar bu konuda yapılan çalışmaların bir dökümü Lambossy [5]'de bulunabilir.

Şimdiye kadar bahsedilen çalışmalarda atardamarların maruz kaldığı ön gerilme pek dikkate alınmamıştır. Atabek ve Lew [6] 1966 yılında eksenel ve radyal doğrultuda bir öngermeye maruz ince elastik tüp halinde, statik ön gerilme üzerine küçük dinamik yerdeğiştirmeler süperpoze ederek tüpün ve viskoz akışkanın hareket denklemlerini elde etmişler ve bu denklemlere harmonik dalga tipi çözümler arayarak dispersiyon bağıntısını elde etmişlerdir. Öngerilme haricinde bu model, Womersley modelinin aynısıdır. Daha sonra Atabek [7], aynı yaklaşımı kullanarak ortotropik ve viskoelastik bir tüp içerisinde hareket eden viskoz akışkanın içindeki harmonik dalga hareketini ve ön gerilmenin dalga karakteristiklerine olan etkilerini incelemiştir. Bu çalışmalarda malzemenin genel bünye bağıntısı bilinmediğinden Atabek ve Lew[6] ve Atabek [7]'in çalışmalarında artımsal gerilmede elastik katsayılar sabit olarak alınmıştır. Aslında bu katsayılar teğetsel malzeme sabitlerine karşı geldiğinden bunlar sabit olmayıp ön şekil değiştirmeye bağlı birtakım katsayılardır, dolayısıyla şekil değiştirme ile birlikte değişirler. Mirsky [8], büyük ön şekil değiştimenin dalga hızına etkisini benzer bir çalışmada sayısal olarak incelemiştir. Bütün bu çalışmalarda tüpün ince olduğu kabul edilmiş ve ilgili mambran denklemleri kullanılmıştır.

Cox[9,10], tüp malzemesi için sıkışmaz viskoelastik katı, akışkan için de lineerleştirilmiş Navier- Stokes denklemlerini kullanıp kalın tüp halinde harmonik dalga yayılımı problemini incelemiş ve dispersiyon bağıntısını elde etmiştir. Rubinov ve Keller[11], içerisinde sıkışan Newton akışkanı bulunan ve dış yüzeyinden eksenel doğrultuda harekete engel olunmuş bir viskoelastik kalın tüp içerisindeki eksenel simetrik dalga hareketini incelemişler ve disperisyon bağıntısını elde etmişlerdir. Bu durumda, genellikle dispersiyon bağıntısının incelenmesi oldukça karmaşık olduğundan viskoz etkilerin ihmal edildiği durum incelenmiş ve sonsuz sayıda dalga modu elde etmişlerdir. Aynı bilim adamları daha sonraki bir çalışmalarında viskozitenin etkisini de dikkate almışlar ve dalga sayısının frekans cinsinden asimptotik değerini elde etmişlerdir[12].

Atabek ve Lew[6]'in çalışması dışında atardamarlardaki ön gerilme pek dikkate alınmamıştır. Rachev[13] içinde sıkışmaz ve viskoz akışkan bulunan ön gerilmeli ince tüp içerisinde eksenel simetrik dalga yayılması problemini incelemiş ve dispersiyon bağıntısını elde etmiştir. Damarı saran kas aktivitesinin dalga hareketine olan etkisini uygun bir şekilde hesaba katmış ve dalga faz hızının ve aktarma katsayısının iç basınç, eksenel germe ve yaşlılık ile değişimi verilmiştir. Bu konularda daha fazla bilgi Rudinger [14], Skalak [15], Attinger[16] ve Cox [10] tarafından yazılmış derleme makalelerden ve McDonald[17] ve Fung[18] tarafından hazırlanmış kitaplardan temin edilebilir.

Bahsedilen bu çalışmaların büyük bir kısmında atardamarların ön şekil değiştirmesi pek dikkate alınmamış, ön gerilmeyi dikkate alan birkaç çalışmada da malzemenin nonlineer bünye denklemi bilinmediğinden artımsal elastik katsayıların ön şekil değiştirmeyle olan ilişkisi sağlıklı bir biçimde incelenememiştir. Örneğin, ön şekil değiştirmenin özelliğine bakılmaksızın artımsal gerilmeler için Hooke yasası kabul edilmiş ve elastik katsayılar sabit olarak düşünülmüştür fakat bu katsayılar sabit olmayıp ön şekil değiştirmeye bağlıdır. Bu konu ilk defa etraflı olarak Demiray[19] ve arkadaşları tarafından, "Büyük statik ön deformasyon üzerine küçük yer değiştirmelerin süperpozisyonu teorisi" kullanılarak incelenmiş ve literatürdeki mevcut çalışmalar ile karşılaştırılmıştır.

Şimdiye kadar sözü edilen çalışmaların hepsinde modellenmek istenen dalga hareketinin genliği küçük kabul edilmiş ve hareketi yöneten kısmi türevli diferansiyel denklemler bazı varsayımlar altında lineerleştirilmiştir. Fakat dalganın genliği büyük ise dalga hareketini yöneten kısmi türevli diferansiyel denklemleri lineerleştirmek mümkün değildir ve dalga hareketi nonlineer kısmi türevli diferansiyel denklemler ile verilir. Ayrıca deneysel çalışmalar da nonlineer terimlerin ihmal edilmesinin damarlarda pulsatif hareketi tanımlamada önemli bir hataya yol açacağını göstermiştir. Çok farklı fiziksel durumlarda ortaya çıkan nonlineerlik uzun zamandan beri araştırmacıların ilgisini çekmiş ve bu konuda yoğun çalışmalar yapılmıştır.

Atardamarlardaki pals dalgalarının nonlineer analizi ilk defa 1972 yılında Ling ve Atabek [20] tarafından verilmiştir. Kanı sıkışmaz ve Newtonyen tipte bir akışkan olarak kabul ederek, kan için iki boyutlu Navier-Stokes denklemlerini ve süreklilik denklemini almışlar, elde ettikleri sonuç denklemleri sonlu farklar yöntemini kullanarak çözmüşlerdir. Daha sonra 1980 yılında Lamb [21] damarı elastik halkaların birleşiminden oluşan bir tüp olarak kabul ederek yönetici denklem olarak Korteweg-de Vries denklemini elde etmiştir. Engelbrecht [22] bir boyutlu ve iki boyutlu durumlar için benzer hareket denklemleri kullanarak içi akışkan ile dolu elastik tüplerde küçük genlikli basınç dalgalarının KdV denklemi ile yönetildiğini göstermiştir. Engelbrecht [23]'in yaptığı deneylerde damarlarda basınç dalgalarının önünün dikleştiğini ve damar kesit alanı ve basınç cinsinden ifade edilen dalga hızının nonlineer olduğunu gözlemlemiştir. Ayrıca McDonald [17] büyük damarlarda pals dalgalarının yayılırken genişliğinin azaldığını ve maksimum genliğinin arttığını göstermiştir. Bu olay dalga problemlerinde dikleşme(steeping) ve sivrileşme(peaking) olarak bilinir. Damarlarda dalga önünün dikleşmesine nonlineerite neden olur ve bu dikleşme aortta ve büyük damarlarda sıkça gözlenir. Normal koşullarda bu dikleşme ortaya çıkmaz [24]. Ancak damarları anormal genişleyen veya pals genliklerinin büyük olduğu hastalarda bu dikleşme oldukça önem kazanır.

İçerisinde akışkan bulunan elastik veya viskoelastik tüplerde sonlu genlikli dalgaların yayılımı karakteristikler yöntemi kullanılarak birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir. 1958 yılında Lambert [25] ilk defa nonlineer kan akımının hesaplanması için karakteristikler metodunun kullanılmasını önermiştir. Fakat Lambert'in seçtiği sayısal parametrelerle yapılan çalışmalar gerçeğe uygun sonuçlar vermemiştir. Bununla ilgili sonuçlar Skalak [15]'ın makalesinde bulunabilir. Rudinger [14], Anliker [26,27] ve diğer araştırmacıların geliştirdiği bir boyutlu nonlineer yaklaşımda temel denklemler akışkanın hareket denklemi, süreklilik denklemi ve damar duvarının davranışını tanımlayan denklemlerdir. Damar duvarının davranışını belirleyen denklemlerde kesit alanının tüp boyunca uzaklığın ve basıncın bilinen bir fonkisyonu olduğu kabul edilmiştir. Geliştirdikleri teorilerde, viskozitenin etkisini sınırdaki kayma gerilmesini hareket denklemlerine katarak, dallanma noktalarındaki dışa akımı ise süreklilik denklemine bir akı terimi ekleyerek çözmüşlerdir. Rudinger [14]'in tek boyutlu yaklaşımı içinde incelediği denklemler süreklilik ve momentum denklemleridir. Rudinger [28], içi viskoz olmayan akışkanla dolu yarı sonsuz düzgün genişleyen tüplerde sonlu genlikli dalgaların yayılımını incelemiş ve karakterisitkler yöntemini kullanarak şok formu için bir ifade elde etmiştir. Daha sonra Hoogstraten ve Smith [29] düzgün olmayan tüplerde sürtünme terimini de ekleyerek Rudinger'in çalışmasını genelleştirmişlerdir. Tait ve Moodie [30] ise içinde viskoz olmayan akışkan bulunan ince elastik (viskoelastik) tüplerde dalga yayılımını karakterisitkler yöntemi kullanarak incelemişler ve Mooney-Rivlin malzemesi için şeklini değiştirmeden yayılan dalgalar biçiminde basit fakat kesin çözümler elde etmişlerdir.

Zayıf nonlineer dalgaların dissipatif ve dispersif ortamlarda uzak alan davranışı bazı bilinen nonlineer evolüsyon denklemleri ile tanımlanabilir. Örneğin, dissipatif ortamlarda Burgers denklemi, dispersif ortamlarda ise Korteweg-de Vries(KdV) denklemi bilinen en basit evolüsyon denklemleridir. Dissipasyon, dispersiyon ve nonlineerite arasında bir denge varsa KdV ve Burgers denklemlerinin birleşimi olarak gösterilen Korteweg-de Vries Burgers(KdVB) denklemi elde edilir.

Hashizume [31] ve Yomosa [32] içerisinde viskoz olmayan akışkan bulunan ince nonlineer elastik bir tüpte zayıf nonlineer dalgaların yayılmasını KdV denklemi ile yönetildiğini göstermişler ve büyük damarlarda gözlenen dikleşme ve sivrileşme olayı ile yalnız dalga arasındaki ilişkiyi tartışmışlardır.

Viskoelastik tüplerde zayıf nonlineer dalga yayılımı ile ilgili önemli incelemeler arasında Ravindran ve Prasad [33], Swaters ve Sawatzky [34] ve Erbay [35] ve arkadaşlarının yaptıkları çalışmalar sayılabilir. Ravindran ve Prasad[33] yaptıkları çalışmada viskoelastik tüpü lineer Maxwell-Voigt modeli olarak almışlar ve küçük genlikli basınç dalgalarının yayılmasının dissipasyon , dispersiyon ve nonlineerite arasındaki dengeye bağlı olarak Burgers, KdV ve KdVB denklemleri olarak elde etmişlerdir. Swaters ve Swatzky [34] ise tüp malzemesini lineer Kelvin-Voigt modeli alarak basınç ifadesine Ravindran ve Prasad [33]'ın aldıkları modelde olmayan dönme ataletini, eğilme rijitliğini ve çevresel germenin etkilerini de eklemişlerdir. Eklenen bu terimler yüksek mertebeden zaman ve uzaysal türevleri içerdiğinden kullanılan asimptotik açılımının bir sonucu olarak bu terimler KdVB denklemini veren analizlerin mertebesinde önemli bir rol oynamamıştır. Aynı bilim adamları viskoelastik etkinin yalnız dalgaların genliğini düşürdüğünü göstermişlerdir. Erbay [35] ve arkadaşlarının yaptıkları çalışmada Tait ve Moodie [30]'nin çalışmasını temel alarak nonlineer viskoelastik bir tüp için verilen üniform içbasınç-tüp kesit alanı ilşkisine tüpün atalet teriminide eklemişlerdir. Viskoz olmayan akışkanla dolu nonlineer elastik bir tüpte basınç dalgalarının yayılımını dissipasyon, dispersiyon ve nonlineeritenin mertebelerinin seçimine bağlı olarak çeşitli evolüsyon denklemleri ile karakterize edilebileceğini göstermişlerdir. Burada söylenmesi gereken önemli nokta, Tait ve Moodie [30]'nin temel denklemlerindeki içbasınç-tüp kesit alan ilşkisi üniform bir iç basınç elde edilmiş, ancak temel denklemlerde yerine konurken eksenel koordinata bağlılığı suni olarak kabul edilmiştir.

Zayıf nonlineer dalgaların yayılımıyla ilgili yapılan çalışmalarda akışkanın viskozitesi ve tüpün eksenel yöndeki hareketi ihmal edilmiştir. Ancak Johnson [36] içi viskoz akışkanla dolu elastik bir tüpte laminar elastik sıçramayı inceleyerek bu sıçramaların KdVB denklemi ile yönetildiğini göstermiştir. Cowley [37] ise içi viskoz akışkanla dolu elastik bir tüpte laminar elastik sıçramaların sınır tabakası yaklaşımı kullanarak viskoz-KdV ile yönetildiğini göstermiştir. Mainardi ve Buggish [38] ise içi akışkanla dolu ince ve elastik tüpte nonlineer dalgaların yayılımı üzerine viskozitenin etkilerini gösterebilmek için bir analiz geliştirerek sınır tabakası yaklaşımı altında bir boyutlu teorinin denklem sistemlerini viskoziteden dolayı Laplace konvolüsyon integralini içeren tek bir nonlineer dalga denkelemine eşdeğer olduğunu göstermişlerdir. Bu denklem Keller [39]'in bulduğu sınır tabakası yaklaşımında viskoz etkileri de alarak içi gazla dolu rigid tüplerde basit nonlineer dalgaları yöneten denklem ile aynıdır. Hashizume [40]'de içerisinde viskoz akışkan bulunan ve yarıçapı eksenel koordinat ile değişen elastik tüpte zayıf nonlineer dalgaların yayılmasının pertürbe-KdV denklemi ile yönetildiğini göstermiştir. İçi akışkanla dolu genişleyen tüplerde küçük fakat sonlu genlikli dalgaların yayılımı daha birçok araştırmacı tarafından çeşitli asimptotik yöntemler kullanılarak incelenmiş ve KdV, Burgers ve KdVB evolüsyon denklemleri elde edilmiştir.

Şimdiye kadar söz edilen çalışmalarda atardamarların maruz kaldığı ön gerilmeler dikkate alınmamıştır. Oysa yapılan deneysel çalışmalar damarların ön iç basınca ek olarak eksenel yönde 1.5-1.7 mertebesinde bir eksenel germeye maruz kaldığını göstermektedir. Bu nedenle tüpün şekil değiştirme analizinde ön şekil değiştirmelerin de işin içine katılması gerekir. Demiray [41], bütün bu etkileri hesaba katarak içinde viskoz olmayan akışkan bulunan ince elastik tüplerde zayıf nonlineer dalgaların yayılımı problemini incelemiş ve evolüsyon denklemi olarak KdV denklemini elde etmiştir. Demiray ve Antar [42]'da öngerilmeli nonlineer ince viskoelastik tüpte nonlineer dalga yayılımı incelenmiş ve nonlineerite, dissipasyon ve dispersiyon arasındaki dengeye bağlı olarak Burgers, KdV ve KdVB denklemleri elde edilmiştir. Bu çalışmada viskoelastik tüp malzemesi olarak yumuşak dokular için Demiray[43] tarafından önerilen model kullanılmıştır. Akgün ve Demiray [44] ise içi viskoz olmayan akışkanla dolu nonlineer viskoelastik tüpte zayıf nonlineer dalgaların yayılımının Burgers, KdV ve KdVB denklemleri ile verilebileceğini göstermişlerdir. Diğer bir çalışmada Demiray [45] akışkanın eksenel hızının radyal hızdan daha büyük olduğu yaklaşımını (hidrolik yaklaşım) kabul etmiş ve Navier-Stokes denklemlerine kesit alanına göre ortalama işlemi uygulayarak akışkanın yaklaşık denklemlerini elde etmiştir. Bu yaklaşık akışkan denklemlerini kullanarak içinde viskoz akışkan bulunan ön gerilmeli ince elastik tüpte zayıf nonlineer dalgaların yayılmasını incelemiş ve viskozitenin mertebesine bağlı olarak pertürbe-KdV ve KdV denklemlerini elde etmiştir.

İçinde akışkan bulunan elastik veya viskoelastik tüplerde basınç dalgalarının genlik modülasyonu birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Eğer dalganın genliği yeterince küçük ise birçok nonlineer sistem nonlineer terimlerin ihmal edildiği harmonik dalga çözümü içerir ve genlik de zaman içinde sabit kalır. Eğer dalganın genliği küçük fakat sonlu ise nonlineer terimler ihmal edilemez ve genlik, uzay ve zaman parametrelerine bağlı olarak değişken kalır. Eğer genlik salınım periyodu boyunca yavaş değişiyorsa, koordinat dönüşümleri vasıtasıyla sistemi salınımı hızlı değişen ve genliği de yavaş değişen olmak üzere iki kısıma ayırabiliriz. O zaman çözüm asimptotik açılım biçiminde verilebilir ve dalganın genlik modülasyonunu tanımlayan bir denklem türetilebilir. Nonlineer Schrödinger (NLS) denklemi dispersif ortamlarda bir boyutlu monokromatik düzlem dalgaların self modülasyonunu tanımlayan en basit yönetici denklemdir. NLS denklemi, nonlineerite ve dispersiyon arasında bir denge sergiler. Uygun koşullar altında böyle bir denge durumu, modüle olmuş dalgaların genlikleri için zarf yalnız dalgaları gibi kararlı bir yapının oluşmasını sağlar.

İçerisi akışkanla dolu tüplerde küçük fakat sonlu genlikli dalgaların nonlineer self modülasyon problemi Ravindran ve Prasad [46] tarafından incelenmiştir. Bu araştırmacılar lineer elastik tüp modelini alarak basınç dalgalarının self modülasyonunun Nonlineer Schrödinger (NLS) denklemi ile yönetildiğini göstermişlerdir. Erbay ve Erbay [35] ise nonlineer viskoelastik tüp alarak ve akışkanın yaklaşık denklemlerini kullanarak basınç dalgalarının nonlineer modülasyonunun dissipatif Nonlineer Schrödinger denklemi ile yönetildiğini göstermişlerdir. Demiray [47] içerisinde viskoz olmayan akışkan bulunan ince elastik tüplerde nonlineer dalga modülasyonu problemini incelemiş ve akışkanın yaklaşık denklemlerini kullanarak yönetici denklem olarak NLS denklemini elde etmiştir. Antar ve Demiray [48] ise içerisinde viskoz olmayan akışkan bulunan ince nonlineer elastik tüplerde zayıf nonlineer dalgaların genlik modülasyonunun NLS denklemi ile yönetildiğini göstermişlerdir. Akgün ve Demiray [49] içi viskoz olmayan akışkanla dolu, nonlineer viskoelastik tüplerde zayıf nonlineer, dissipatif fakat kuvvetli dispersif ortamlarda dalgaların genlik modülasyonunu incelemişler ve yönetici denklem olarak dissipatif NLS denklemini elde etmişlerdir.

2. TEMEL DENKLEMLER

2.1 Giriş

Bu bölümde içi sıkıştırılamayan viskoz olmayan bir akışkanla dolu ön gerilmeli ince elastik tüpte dalga yayılımı probleminde kullanılacak olan alan denklemleri elde edilecektir.

2.2 Değişken Yarıçaplı İnce Elastik Tüpün Hareket Denklemleri

Bu kısımda içi sıkıştırılamayan viskoz olmayan akışkanla dolu elastik tüpün hareketini yöneten diferansiyel denklemler türetilecektir. Ele aldığımız tüpün ince, uzunluğunun sonsuz ve yarıçapının değişken olduğu varsayılacaktır. Bu amaçla koordinat merkezindeki yarıçapı R_0 olan dairesel silindirik elastik tüp göz önüne alalım. Bu durumda $\mathbf{e_r}, \mathbf{e}_\theta$ ve $\mathbf{e_z}$ silindirik kutupsal koordinatlardaki birim baz vektörleri, Z^* ise şekil değiştirmeden önceki eksenel koordinat olmak üzere, tüp üzerinde incelenmekte olan bir noktanın konum vektörü aşağıdaki biçimde ifade edilebilir

$$\mathbf{R} = R_0\mathbf{e_r} + Z^*\mathbf{e_z}. \tag{2.1}$$

Şekil değiştirmeden önceki meridyenel ve yanal doğrultulardaki yay uzunlukları ise aşağıdaki gibi verilebilir.

$$dS_Z = dZ^*,\ dS_\Theta = R_0\, d\Theta. \tag{2.2}$$

Elastik tüpün bir λ_z eksenel germesine ve bir $P_0(Z)$ statik basıncına maruz kaldığını kabul edeceğiz. Şekil değistirmeden sonra koordinat merkezindeki yarıçap r_0 ile gösterilirse tüp üzerindeki bir noktanın konum vektörü aşağıdaki biçimde verilebilir

$$\mathbf{r_0} = [r_0 + f^*(z^*)]\mathbf{e_r} + z^*\mathbf{e_z}, \quad z^* = \lambda_z Z^*. \tag{2.3}$$

Burada z^* statik şekil değiştirmeden sonraki eksenel koordinatı, $f^*(z^*)$ ise yarıçap değişimini gösteren ve daha sonra belirlenecek olan bir fonksiyondur. Bu statik şekil değiştirme üzerine $u^*(z^*, t^*)$ dinamik radyal yerdeğiştirmesinin süperpoze edildiğini varsayalım. Burada t^* zaman parametresidir. Eksenel yöndeki yataklama kuvvetlerini göz önünde bulundurarak, eksenel yöndeki yer değiştirme ihmal edilebilir. Bu durumda tüp üzerindeki bir noktanın konum vektörü aşağıdaki şekilde ifade edilebilir

$$\mathbf{r} = [r_0 + f^*(z^*) + u^*(z^*, t^*)]\mathbf{e_r} + z^*\mathbf{e_z}. \tag{2.4}$$

Şekil değiştirmeden sonraki meridyenel ve yanal doğrultulardaki yay uzunlukları aşağıdaki biçimde verilebilir

$$ds_z = \left[1 + (f^{*'} + \frac{\partial u^*}{\partial z^*})^2\right]^{1/2} dz^*, \quad ds_\theta = (r_0 + f^* + u^*)d\theta. \tag{2.5}$$

Burada $f^{*'}$ ile f'in z^* 'a göre türevi gösterilmiştir. O halde meridyenel ve yanal doğrultulardaki germe oranları, sırasıyla, aşağıdaki biçimde tanımlanabilir

$$\lambda_1 = \frac{ds_z}{dS_Z} = \lambda_z \left[1 + (f^{*'} + \frac{\partial u^*}{\partial z^*})^2\right]^{1/2}, \ \lambda_2 = \frac{ds_\theta}{dS_\Theta} = \frac{1}{R_0}(r_0 + f^* + u^*). \tag{2.6}$$

Nihai şekil değiştirmeye uğramış meridyene teğet birim $\mathbf{t}$ vektörü ve nihai şekil değiştirmeye uğramış tüpün birim dış normali $\mathbf{n}$ aşağıdaki gibi verilir

$$\mathbf{t} = \frac{(f^{*'} + \frac{\partial u^*}{\partial z^*})\mathbf{e_r} + \mathbf{e_z}}{\left[1 + (f^{*'} + \frac{\partial u^*}{\partial z^*})^2\right]^{1/2}}, \ \mathbf{n} = \frac{\mathbf{e_r} - (f^{*'} + \frac{\partial u^*}{\partial z^*})\mathbf{e_z}}{\left[1 + (f^{*'} + \frac{\partial u^*}{\partial z^*})^2\right]^{1/2}}. \tag{2.7}$$

T_1 ve T_2 , sırasıyla, meridyen ve yanal doğrultulardaki mambran kuvvetlerini göstersin. O zaman $z^* = sabit$, $z^* + dz^* = sabit$, $\theta = sabit$ ve $\theta + d\theta = sabit$ düzlemleri arasında kalan küçük bir tüp elemanına etkiyen kuvvet vektörü aşağıdaki gibi verilebilir

$$\mathbf{F} = -\mathbf{T_1} ds_\theta \mid_{z^*} + \mathbf{T_1} ds_\theta \mid_{z^* + dz^*} - \mathbf{T_2} ds_z \mid_\theta + \mathbf{T_2} ds_z \mid_{\theta + d\theta}$$

$$+[(P_z^* - T)\mathbf{e_z} + P_r^*\mathbf{e_r}]ds_\theta ds_z. \tag{2.8}$$

Burada T eksenel doğrultudaki yataklama kuvveti, P_r^* ve P_z^* ise şekil değiştirmiş mambranın birim alanına $\mathbf{e_r}$ ve $\mathbf{e_z}$ doğrultularında etkiyen akışkan tepki kuvvetleridir. $\mathbf{T_1}$ ve $\mathbf{T_2}$ mambran kuvvet vektörleri aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır

$$\mathbf{T_1} = T_1\mathbf{t}, \quad \mathbf{T_2} = T_2\mathbf{e}_\theta. \tag{2.9}$$

Eksenel yöndeki yer değiştirme ihmal edildiğinden eksenel yöndeki ivme sıfır olmalıdır. Dolayısıyla (2.8) de verilen kuvvet vektörünün eksenel yöndeki bileşeni $(F)_z$ sıfır alınmalıdır. O halde, (2.9)'dan aşağıdaki ifade elde edilir

$$(F)_z = \frac{\partial}{\partial z^*}\{\frac{T_1(r_0 + f^* + u^*)}{[1 + (f^{*'} + \frac{\partial u^*}{\partial z^*})^2]^{1/2}}\}$$

$$+(P_z^* - T)[1 + (f^{*'} + \frac{\partial u^*}{\partial z^*})^2]^{1/2}(r_0 + f^* + u^*) = 0 \tag{2.10}$$

Bu denklem T kuvvetini belirlememizi sağlar. (2.8)'de verilen F kuvvetinin radyal yöndeki bileşeni aşağıdaki biçimde verilebilir

$$(F)_r = \{-T_2 \left[1 + (f^{*'} + \frac{\partial u^*}{\partial z^*})^2\right]^{1/2}$$

$$+\frac{\partial}{\partial z^*}\left[\frac{(f^* + \frac{\partial u^*}{\partial z^*})(r_0 + f^* + u^*)}{[1 + (f^{*'} + \frac{\partial u^*}{\partial z^*})^2]^{1/2}} T_1\right]$$

$$+P_r^*(r_0 + f^* + u^*)\left[1 + (f^{*'} + \frac{\partial u^*}{\partial z^*})^2\right]^{1/2}\} dz^* d\theta \tag{2.11}$$

H şekil değiştirmeden önceki tüp kalınlığı ve ρ_0 mambranın kütle yoğunluğu olmak üzere, radyal doğrultudaki hareket denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir

$$-T_2\left[1 + (f^{*'} + \frac{\partial u^*}{\partial z^*})^2\right]^{1/2} + \frac{\partial}{\partial z^*}[\frac{(f^{*'} + \frac{\partial u^*}{\partial z^*})(r_0 + f^* + u^*)}{[1 + (f^{*'} + \frac{\partial u^*}{\partial z^*})^2]^{1/2}} T_1]$$

$$+P_r^*(r_0 + f^* + u^*)\left[1 + (f^{*'} + \frac{\partial u^*}{\partial z^*})^2\right]^{1/2} = \rho_0 \frac{HR_0}{\lambda_z}\frac{\partial^2 u^*}{\partial t^{*2}}. \tag{2.12}$$

2.3 Bünye Denklemleri

(2.12) ile verilen hareket denkleminde T_1 ve T_2 mambran kuvvetlerinin yer değiştirmelere olan fonksiyonel bağıntısı, yani bünye denklemleri belirlenirse denklem tamamlanır. Tüp malzemesinin sıkışmaz, elastik ve izotrop olduğunu kabul edeceğiz. Böyle bir malzemeye ait bünye bağıntısı aşağıdaki biçimde yazılabilir

$$t_{kl} = \Pi\delta_{kl} + \mu(\Phi c_{kl}^{-1} + \Psi B_{kl}). \tag{2.13}$$

Burada Π hidrostatik basınç, μ elastik cismin küçük şekil değiştirme halindeki kayma modülü, c_{kl}^{-1} ise Finger deformasyon tansörünü göstermekte olup

$$c_{kl}^{-1} = F_{kK}F_{lK}, \quad F_{kK} = \frac{\partial x_k}{\partial X_K} \tag{2.14}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada $x_k = x_k(X_K, t)$ cismin hareketini temsil etmektedir. (2.13) ifadesinde yer alan diğer büyüklükler ise

$$B_{kl} = I_1 c_{kl}^{-1} - c_{km}^{-1}c_{ml}^{-1}, \quad \Phi = 2\frac{\partial \Sigma}{\partial I_1}, \; \Psi = 2\frac{\partial \Sigma}{\partial I_2} \tag{2.15}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada I_1, I_2 ve $I_3 = 1$, c_{kl}^{-1}'in temel invaryantlarını, $\mu\Sigma = \mu\Sigma(I_1, I_2)$ ise incelenen elastik cisme ait şekil değiştirme enerjisi yoğunluğu fonksiyonunu göstermektedir. O halde asal eksenlere göre ifade edilmiş c_{kl}^{-1} ve B_{kl} tansörü bileşenleri aşağıdaki biçimde verilebilir

$$c_{11}^{-1} = \lambda_1^2, \quad c_{22}^{-1} = \lambda_2^2, \quad c_{33}^{-1} = \lambda_3^2 = \frac{1}{\lambda_1^2\lambda_2^2}, \tag{2.16}$$

$$B_{11} = \frac{1}{\lambda_2^2} + \lambda_1^2\lambda_2^2, \; B_{22} = \frac{1}{\lambda_1^2} + \lambda_1^2\lambda_2^2, \; B_{33} = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2}. \tag{2.17}$$

Burada λ_1, λ_2 mambran teğet düzlemi içerisindeki asal germeleri göstermekte olup sıkışmazlık koşulu $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$ şeklinde ifade edilebilir. Keza c_{kl}^{-1} tansörünün temel invaryantları da

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2\lambda_2^2}, \quad I_2 = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \lambda_1^2\lambda_2^2 \tag{2.18}$$

şeklinde ifade edilebilir. Buna göre asal gerilme bileşenleri

$$t_{11} = \Pi + \mu[\Phi\lambda_1^2 + \Psi(\lambda_1^2\lambda_2^2 + 1/\lambda_2^2)],$$

$$t_{22} = \Pi + \mu[\Phi\lambda_2^2 + \Psi(\lambda_1^2\lambda_2^2 + 1/\lambda_1^2)],$$

$$t_{33} = \Pi + \mu[\Phi/(\lambda_1^2\lambda_2^2) + \Psi(1/\lambda_1^2 + 1/\lambda_2^2)], \tag{2.19}$$

şeklinde ifade edilebilir. Mambranın çok ince kabul edilmesi nedeniyle kalınlığı doğrultusundaki gerilme bileşeni, yaklaşık olarak sıfır kabul edilebilir. Buna göre

$$t_{33} = \Pi + \mu[\Phi/(\lambda_1^2\lambda_2^2) + \Psi(1/\lambda_1^2 + 1/\lambda_2^2)] \cong 0, \tag{2.20}$$

olur ve buradan Π hidrostatik basıncı

$$\Pi = -\mu[\Phi/(\lambda_1^2\lambda_2^2) + \Psi(1/\lambda_1^2 + 1/\lambda_2^2)], \tag{2.21}$$

şeklinde elde edilir. O halde (2.20) ifadesi (2.19)' da yerine konursa t_{11}, t_{22} asal gerilme ifadeleri

$$t_{11} = \mu[\Phi(\lambda_1^2 - 1/\lambda_1^2\lambda_2^2) + \Psi(\lambda_1^2\lambda_2^2 - 1/\lambda_1^2)],$$

$$t_{22} = \mu[\Phi(\lambda_2^2 - 1/\lambda_1^2\lambda_2^2) + \Psi(\lambda_1^2\lambda_2^2 - 1/\lambda_2^2)], \tag{2.22}$$

olarak bulunur. I_1, I_2 temel invaryantlarının asal germeler cinsinden ifadeleri hatırlanacak olursa aşağıdaki ilişkiler yazılabilir

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial\lambda_1} = \frac{\partial\Sigma}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial\lambda_1} + \frac{\partial\Sigma}{\partial I_2}\frac{\partial I_2}{\partial\lambda_1}, \quad \frac{\partial\Sigma}{\partial\lambda_2} = \frac{\partial\Sigma}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial\lambda_2} + \frac{\partial\Sigma}{\partial I_2}\frac{\partial I_2}{\partial\lambda_2}. \tag{2.23}$$

Φ ve Ψ' nin tanımları dikkate alınır ve gerekli türetmeler yapılırsa

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial\lambda_1} = \Phi(\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1^3\lambda_2^2}) + \Psi(\lambda_1\lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_1^3}), \quad \frac{\partial\Sigma}{\partial\lambda_2} = \Phi(\lambda_2 - \frac{1}{\lambda_1^2\lambda_2^3}) + \Psi(\lambda_1^2\lambda_2 - \frac{1}{\lambda_2^3}) \tag{2.24}$$

ilişkileri, (2.21),(2.22)-(2.24) denklemlerinin karşılaştırılmasından ise

$$t_{11} = \mu\lambda_1\frac{\partial\Sigma}{\partial\lambda_1}, \quad t_{22} = \mu\lambda_2\frac{\partial\Sigma}{\partial\lambda_2} \tag{2.25}$$

bünye bağıntıları elde edilir. Bilindiği gibi meridiyen ve çevresel eğri boyunca birim uzunluğa etkiyen mambran kuvvetleri

$$T_1 = h' t_{11}, \quad T_2 = h' t_{22} \tag{2.26}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada h' şekil değiştirmiş kalınlık olup sıkışmazlık koşulu nedeniyle , şekil değiştirmeden önceki H mambran kalınlığına

$$h'\lambda_1\lambda_2 = H \tag{2.27}$$

şeklinde bağlıdır. Buna göre T_1, T_2 mambran kuvvetleri Σ şekil değiştirme enerjisi cinsinden

$$T_1 = \frac{\mu H}{\lambda_2}\frac{\partial\Sigma}{\partial\lambda_1}, \quad T_2 = \frac{\mu H}{\lambda_1}\frac{\partial\Sigma}{\partial\lambda_2} \tag{2.28}$$

şeklinde ifade edilebilir. (2.28) ifadesini, (2.12) ile verilen hareket denkleminde kullanırsak, radyal doğrultudaki hareket denklemi aşağıdaki hali alır

$$-\frac{\mu}{\lambda_z}\frac{\partial\Sigma}{\partial\lambda_2} + \mu R_0\frac{\partial}{\partial z^*}\left\{\frac{(f^{*'} + \frac{\partial u^*}{\partial z^*})}{[1 + (f^{*'} + \frac{\partial u^*}{\partial z^*})^2]^{1/2}}\frac{\partial\Sigma}{\partial\lambda_1}\right\}$$

$$+\frac{P_r^*}{H}(r_0 + f^* + u^*)\left[1 + (f^{*'} + \frac{\partial u^*}{\partial z^*})^2\right]^{1/2} = \rho_0\frac{R_0}{\lambda_z}\frac{\partial^2 u^*}{\partial t^{*2}}. \tag{2.29}$$

2.4 Akışkanın Hareket Denklemleri

Genelde kan sıkıştırılamayan Newtonyen olmayan akışkan olarak bilinir. Kanın Newtonyen olmayan akışkan gibi davranmasının ana nedeni hücre yoğunluk düzeyi (hematokrit oranı) ve alyuvarların şekil değiştirebilmesidir. Kan akımı sırasında, alyuvarlar damarın merkezine kaçar. Böylece, Poiseuille akımından da bilindiği gibi, şekil değiştirme hızının yüksek olduğu damar çeperlerinin yakınında hematokrit oranı düşer. Deneysel çalışmalar, hematokrit oranının düşük olduğu ve şekil değiştirme hızının yüksek olduğu durumlarda, kanın bir Newtonyen akışkan gibi davrandığını göstermektedir [18]. Rudinger[28]'de işaret edildiği üzere, büyük kan damarlarındaki akım için, kanın viskozitesi birince mertebe yaklaşımlar için ihmal edilebilir. O halde, sıkıştırılamayan viskoz olmayan bir akışkanın eksenel simetrik hareket denklemleri silindirik kutupsal koordinatlarda

$$\frac{\partial V_r^*}{\partial r} + \frac{V_r^*}{r} + \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} = 0, \tag{2.30}$$

$$\frac{\partial V_r^*}{\partial t^*} + V_r^* \frac{\partial V_r^*}{\partial r} + V_z^* \frac{\partial V_r^*}{\partial z^*} + \frac{1}{\rho_a} \frac{\partial \bar{P}}{\partial r} = 0, \tag{2.31}$$

$$\frac{\partial V_z^*}{\partial t^*} + V_r^* \frac{\partial V_z^*}{\partial r} + V_z^* \frac{\partial V_z^*}{\partial z^*} + \frac{1}{\rho_a} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} = 0, \tag{2.32}$$

şeklinde yazılabilir. Burada V_r^*, V_z^* akışkanın radyal ve eksenel yöndeki hız bileşenlerini, $\bar{P}$ akışkan basınç fonksiyonunu ve ρ_a akışkanın kütle yoğunluğunu göstermektedir.

Akışkanın bu kesin denklemleriyle uğraşmanın zorluklarını düşünerek, "hidrolik yaklaşım" diye adlandırılan bazı basitleştirici varsayımlarda bulunacağız. Bu yaklaşımda, eksenel yöndeki hızın radyal yöndeki hızdan çok daha büyük olduğunu ve kesit alanı üzerinde bir ortalama işleminin yapılabildiğini varsayacağız. Bir g fonksiyonunun kesit alanı üzerindeki ortalama değeri aşağıdaki şekilde verilebilir

$$\langle g \rangle = \frac{2\pi}{A} \int_0^{r_0+f^*+u^*} g \ r dr. \tag{2.33}$$

Burada A kesit alanı $A = \pi(r_0 + f^* + u^*)^2$ olarak tanımlanmıştır. Ortalama işlemini (2.30)-(2.32) denklemlerine uyguladığımızda

$$\frac{\partial A^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial z^*}(Aw^*) = 0, \tag{2.34}$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial t^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} + \frac{1}{\rho_a} \frac{\partial P^*}{\partial z^*} = 0, \tag{2.35}$$

ifadelerini elde ederiz. Bu ifadelerdeki büyüklükler ise aşağıdaki gibi tanımlanmıştır

$$Aw^* = 2\pi \int_0^{r_0+f^*+u^*} r V_z^* dr, \quad AP^* = 2\pi \int_0^{r_0+f^*+u^*} r \bar{P} dr. \tag{2.36}$$

Burada w^* eksenel doğrultuda ortalama akışkan hızı, P^* ise ortalama akışkan basıncıdır. (2.34)-(2.35) denklemleri elde edilirken aşağıda verilen varsayım kullanılmıştır([50])

$$A(w^*)^2 = 2\pi \int_0^{r_0+f^*+u^*} r{V_z^*}^2 dr. \tag{2.37}$$

Kesit alanı ile şekil değiştirmeden sonraki yarıçap arasındaki ilişki göz önünde bulundurulursa, (2.34) denklemi aşağıdaki hali alır

$$2\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + (r_0 + f^* + u^*)\frac{\partial w^*}{\partial z^*} + 2w^*(f^{*'} + \frac{\partial u^*}{\partial z^*}) = 0. \tag{2.38}$$

İncelemekte olduğumuz problem için akışkan tepki kuvveti P_r^* aşağıdaki biçimi alır

$$P_r^* = \frac{P^*}{\left[1 + \left(f^{*'} + \frac{\partial u^*}{\partial z^*}\right)^2\right]^{1/2}}. \tag{2.39}$$

Bu aşamada aşağıdaki boyutsuz büyüklükleri tanımlamak uygun olacaktır

$$t^* = \left(\frac{R_0}{c_0}\right)t,\ z^* = R_0 z,\ u^* = R_0 u,\ m = \frac{\rho_0 H}{\rho_a R_0},\ w^* = c_0 w,$$

$$f^* = R_0 f,\ r_0 = R_0 \lambda_\theta,\ P^* = \rho_a f c_0^2 p,\ c_0^2 = \frac{\mu H}{\rho_a R_0}. \tag{2.40}$$

Bu büyüklükleri (2.29), (2.35) ve (2.38) denklemlerinde kullanırsak, aşağıdaki boyutsuz denklemler elde edilir

$$2\frac{\partial u}{\partial t} + (\lambda_\theta + f + u)\frac{\partial w}{\partial z} + 2(f' + \frac{\partial u}{\partial z})w = 0, \tag{2.41}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned} p = {} & \frac{m}{\lambda_z(\lambda_\theta + f + u)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{\lambda_z(\lambda_\theta + f + u)}\frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_2} \\ & - \frac{1}{(\lambda_\theta + f + u)}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{(f' + \frac{\partial u}{\partial z})}{\left[1 + (f' + \frac{\partial u}{\partial z})^2\right]^{1/2}}\frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_1}\right\}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Bu denklemler, alan büyüklükleri u, w ve p'yi belirlememiz için gerekli ilişkileri sağlarlar.

3. PERTÜRBASYON YÖNTEMLERİ

3.1 Giriş

Nonlineer dalga yayılımı ile ilişkili fiziksel sistemlerin yönetici denklemleri genellikle korunum kanunları kullanılarak elde edilir. Basit hallerde bu yönetici denklemler integre edilebildiği halde ortamın fiziksel özelliklerinin probleme etkileri nedeniyle elde edilen yönetici denklemler bilinen analitik yöntemlerle çözülemeyecek kadar karmaşık yapıda olabilirler. Bu nedenle sistemin fiziksel özelliklerini yitirmesine neden olmadan problemi basitleşitirecek bir yöntemin gerekli olduğu görülmektedir. Bu amaçla problemin yönetici denkleminin türetilmesi için çeşitli asimptotik yöntemler geliştirilmiştir. Bunlardan biri de pertürbasyon yöntemidir. Bu yöntem su dalgalarından plazmaya, nonlineer optikten değişik sürekli ortam modelleri gibi birçok alanda kullanılmış ve sistemin dispersif ve dissipatif olmasına bağlı olarak uzun dalga yaklaşımı için Korteweg-de Vries, Burgers denklemi veya onların genelleştirilmiş biçimleri, kuvvetli dispersif hallerde ise nonlineer Schrödinger denklemi evolüsyon denklemi olarak elde edilmiştir. Bu çalışmada içi viskoz olmayan akışkanla dolu tüplerde nonlineer dalga yayılımı probleminin asimptotik olarak incelenmesi için indirgeyici pertürbasyon yöntemi seçilmiştir. Bu amaçla genel sistemler için indirgeyici pertürbasyon yöntemi açıklanacaktır.

3.2 Türev Açılım Yöntemi

Birçok fiziksel problemde çeşitli mertebelerde ölçeklendirme gereksinimi doğar çünkü çeşitli fiziksel etkiler farklı yer değiştirme ve zaman ölçeklerinde kendilerini gösterirler. Dolayısıyla, çok ölçekli açılım veya türev açılım yöntemi olarak adlandırılan pertürbasyon yönteminin oldukça geniş bir yelpazede kullanımı söz konusudur.

Yöntemin kullanımına ilişkin tarihçe incelenecek olursa, türev açılım yöntemi ilk kez Sturrock [51] tarafından 1957 yılında elektron plazmada nonlineer etkilerin araştırılmasına ilişkin bir çalışma ile ortaya konmuştur. Daha sonra, Sandri [52], 1963-1967 yıllarında istatistik mekanik alanında yaptığı çalışmalarda bu yöntemi kullanmıştır. Akışkanlar mekaniği ve plazma fiziğinde yapılan uygulamalar arasında ise Stuart [53], Watson [54], Hasimoto ve Ono [55], Frieman [56], Nayfeh [57], ve Kawahara [58]'nın çalışmaları sayılabilir. Bu araştırmacılar türev açılım yönteminin sistematik olarak uygulanması ile kuvasi-monokromatik dalgaların genlik modülsayonunda yönetici denklem olarak NLS denklemini, uzun dalga yaklaşımında ise KdV denklemini elde etmişlerdir.

Türev açılım yöntemini açıklamak için, lineer L ve nonlineer N olmak üzere iki operatör tanımlayalım

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u(x,t) = N\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) F(u). \tag{3.1}$$

Burada F, u'ya ve türevlerine bağlı bir fonksiyondur. x ve t bağımsız değişkenlerinin aşağıdaki biçimde daha geniş bir yapıda ölçeklendirildiğini varsayalım

$$x_0, x_1, x_2, ..., x_M \text{ ve } t_0, t_1, t_2, ..., t_M \tag{3.2}$$

Burada $x_n = \epsilon^n x$ ve $t_n = \epsilon^n t$ (n =0,1,2,...,M) biçiminde tanımlanmış olup, ϵ küçük bir parametredir. Dolayısıyla $u(x,t)$ bağlı değişkeni de genişletilmiş bağımsız değişkenlerin bir fonksiyonu olacaktır

$$u(x_0, x_1, x_2, ..., x_M; t_0, t_1, t_2, ..., t_M). \tag{3.3}$$

Bu durumda x ve t değişkenlerine göre türev bağıntıları aşağıdaki gibi verilebilir

$$\frac{\partial}{\partial x} \equiv \sum_{n=0}^{M} \epsilon^n \frac{\partial}{\partial x^n}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \equiv \sum_{n=0}^{M} \epsilon^n \frac{\partial}{\partial t^n}. \tag{3.4}$$

Bu bağıntılar L , N operatörlerinde yerine konursa aşağıdaki yapılar elde edilir

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) \equiv \sum_{n=0}^{M} \epsilon^n L_n \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, ..., \frac{\partial}{\partial x_M}, \frac{\partial}{\partial t_0}, ..., \frac{\partial}{\partial t_M}\right) + O(\epsilon^{M+1}),$$

$$N\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) \equiv \sum_{n=0}^{M} \epsilon^n N_n \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, ..., \frac{\partial}{\partial x_M}, \frac{\partial}{\partial t_0}, ..., \frac{\partial}{\partial t_M}\right) + O(\epsilon^{M+1}). \tag{3.5}$$

Benzer biçimde bağımlı değişken u da aşağıdaki asimptotik açılım ile karakterize edilebilir

$$u(x_0, ..., x_M, t_0, ..., t_M; \epsilon) = \sum_{m=1}^{M} \epsilon^m u_m(x_0, ..., x_M, t_0, ..., t_M). \tag{3.6}$$

(3.5) ve (3.6) ilişkileri (3.1) diferansiyel denkleminde yerine konur ve ϵ'un çeşitli mertebeden kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenecek olursa bağımlı değişkenleri yöneten bir diferansiyel denklem seti elde edilir. Bu denklemlerin ardışık olarak çözülmesiyle kuvvetli dispersiyon içeren halde NLS, uzun dalga yaklaşımında ise KdV tipinde denklemler elde edilir. Burada önemli bir nokta, ortamda dissipasyon varsa elde edilecek olan denklemin dispersif NLS olacağıdır ki bu da pertürbasyon yönteminin dissipatif sistemlere uygulanacak biçimde modifiye edilmesi gereğini ortaya koyar. Buna ilişkin bir araştırma Asano [59] tarafından, zayıf nonlineer sistemler için, ısıtılan bir sınır tabakasında konvektif dalganın modülasyonu probleminde ele alınmış ve yönetici denklem olarak dissipatif NLS denklemi elde edilmiştir.

3.3 İndirgeyici Pertürbasyon Yöntemi

İndirgeyici pertürbasyon yöntemi ilk defa kuvasi-monokromatik dalgaların yavaş modülasyonunun yayılımı için Taniuti ve Washimi [60] ve uzun dalga yaklaşımı için Tanuiti ve Wei [61] tarafından verilmiştir. Bu yöntem daha sonra Tanuiti ve Yajima [62] ve Assano ve Tanuiti [63] tarafından birçok nonlineer dalga sistemlerine genelleştirilmiştir. Ayrıca dispersif sistemlerin uzak alan davranışlarına ilişkin daha geniş bir araştırma Jeffrey ve Kakutani [64]'de bulunabilir. Nonlineer dispersif dalgaların asimptotik davranışını incelemek için Gardner ve Morikawa [65] aşağıdaki biçimde bir koordinat dönüşümü tanımlamışlardır

$$\xi = \epsilon^{\gamma}(x - \lambda t), \ \tau = \epsilon^{\mu} t. \tag{3.7}$$

Burada λ, γ ve μ birer pozitif sabittir. Lineerleştirilmiş alan denklemelerinin uzun dalga yaklaşımının asimptotik davranışını tanımlayabilmek için tanımlanan bu dönüşüm ile bağlı değişkenlerin ϵ cinsinden kuvvet serisine açılımını birleştirip buna indirgeyici pertürbasyon yöntemi adını vermişlerdir. İndirgeyici pertürbasyon yöntemi genel olarak nonlineer sistemi sistemin uzak alan davranışını karakterize eden bir veya birkaç nonlineer denkleme indirgemek için sistematik bir yol önerir. Tanuiti [66] aşağıda verilen denklemler sınıfı için uzun dalga yaklaşımı altında asimptotik bir yöntem geliştirmiştir

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{U})\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{b}(\mathbf{U}) + \sum_{\beta=1}^{s}\prod_{\alpha=1}^{p}(\mathbf{H}_{\alpha}^{\beta}\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{K}_{\alpha}^{\beta}\frac{\partial}{\partial x})\mathbf{U} = 0. \tag{3.8}$$

Burada $\mathbf{U}(u^1, u^2, u^3, ..., u^n)$ n bileşenli kolon vektörü, $\mathbf{A}, \mathbf{H}_{\alpha}^{\beta}$ ve $\mathbf{K}_{\alpha}^{\beta}$ $n \times n$'lik matrisler, $\mathbf{b}$ ise n bileşenli kolon vektörünü göstermektedir. Yöntemi açıklamada basitlik sağlaması amacıyla , (3.8) denkleminin son teriminin sıfırlanması ile oluşan aşağıdaki sistem göz önüne alınacaktır

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{U})\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{b}(\mathbf{U}) = 0. \tag{3.9}$$

(3.9) denkleminin $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0$ sabit çözümünün $\mathbf{b}(\mathbf{U}_0) = 0$ uygunluk koşulunu sağlaması gerekir. Kuvasi-monokromatik dalgaların yayılımı ile ilgilendiğimiz için (3.3) denklemine aşağıdaki biçimde çözüm arayalım

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \delta\mathbf{U}\mathrm{e}^{i(kz-\omega t)} + k.e. \tag{3.10}$$

Burada ω açısal frekansı, k dalga sayısını, $k.e.$ ise üstel ifadenin kompleks eşleniğini göstermektedir. Ayrıca $\delta\mathbf{U}$ artımsal büyüklüğünün başındaki δ , bu parametrenin küçüklüğünü vurgulamak için eklenmiştir. Bu çözüm önerisi (3.9) denkleinde kullanılır ve gerekli lineerleştirme yapılırsa aşağıdaki dispersiyon bağıntısı elde edilir

$$|i\omega\mathbf{I} - ik\mathbf{A}_0 + \nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{b}_0| = 0. \tag{3.11}$$

Burada $\mathbf{I}$ birim matrisi, $\nabla_{\mathbf{U}}$ $\mathbf{U}$'ya göre gradyan operatörünü göstermektedir. $\mathbf{A}_0$ ve $\mathbf{b}_0$ ise

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}|_{\mathbf{U}=\mathbf{U}_0}, \quad \mathbf{b}_0 = \mathbf{b}|_{\mathbf{U}=\mathbf{U}_0} \tag{3.12}$$

şeklinde tanımlanmıştır. (3.11) denklemi ω ile k arasında $\omega = \omega(k)$ biçiminde bir bağıntı verir. Aşağıdaki biçimde bir W_l matrisi tanımlayalım

$$W_l = il(\omega\mathbf{I} - k\mathbf{A}_0) + \nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{b}_0 \tag{3.13}$$

Burada l bir tamsayıdır. Lineer düzlem dalgaların modülasyonunu inceleyebilmek için (3.7) dönüşümünde $\gamma = 1$ ve $\mu = 2$ olarak alınacaktır. Bu durumda (3.7) dönüşümü aşağıdaki şekli alır

$$\xi = \epsilon(x - \lambda t), \;\; \tau = \epsilon^2 t. \tag{3.14}$$

Burada $\lambda = \frac{\partial\omega}{\partial k}$ olup v_g grup hızı olarak tanımlanmıştır. $\mathbf{U}$ vektörünün $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0$ civarında

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \mathbf{U}_n \tag{3.15}$$

şeklinde seriye açılabildiğini varsayalım. (3.15) açılımı $\mathbf{A}(\mathbf{U})$ ve $\mathbf{b}(\mathbf{U})$ büyüklüklerinin açık ifadelerinde yerine konursa aşağıdaki ifadeler elde edilir

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \epsilon\mathbf{U}_1.\nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{A}_0 + \epsilon^2\left(\mathbf{U}_2.\nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{A}_0 + \frac{1}{2}\nabla_{\mathbf{U}}\nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{A}_0 : \mathbf{U}_1\mathbf{U}_1\right) + ...$$

$$\mathbf{b} = \epsilon \mathbf{U}_1 . \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 + \epsilon^2 \left(\mathbf{U}_2 . \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 + \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 : \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1 \right)$$

$$+ \epsilon^3 (\mathbf{U}_3 . \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 + \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 : \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_2 + \frac{1}{6} \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} : \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1). \tag{3.16}$$

Burada aşağıdaki notasyonlar kullanılmıştır

$$\mathbf{U}_1 . \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 \equiv \sum_{i=1}^{N} u_1^i \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u^i} \right)_{\mathbf{U} = \mathbf{U}_0},$$

$$\mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1 : \nabla \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 \equiv \sum_{i,j}^{N} u_1^i u_1^j \left(\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial u^i \partial u^j} \right)_{\mathbf{U} = \mathbf{U}_0}. \tag{3.17}$$

(3.14) dönüşümü kullanılarak gerekli türev operatörleri ise

$$\frac{\partial}{\partial x} \to \frac{\partial}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial t} - \epsilon \lambda \frac{\partial}{\partial \xi} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau}. \tag{3.18}$$

şeklinde elde edilir. (3.18) ile verilen türev açılımları ve (3.16) seri açılımları (3.9) diferansiyel denklem sisteminde yazılırsa ϵ'un çeşitli mertebeden kuvveterini içeren bir denklem seti elde edilir. Bunlar sırasıyla aşağıdaki şekilde verilmiştir

$O(\epsilon)$ mertebe denklemler:

$$\frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial t} + \mathbf{A}_0 \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial x} + \mathbf{U}_1 . \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 = 0. \tag{3.19}$$

$O(\epsilon^2)$ mertebe denklemler:

$$\frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial t} - \lambda \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial \xi} + \mathbf{A}_0 \frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial x} + \mathbf{U}_1 . \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial x} + \mathbf{A}_0 \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial \xi}$$

$$+ \mathbf{U}_2 . \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 + \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 : \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1 = 0. \tag{3.20}$$

$O(\epsilon^3)$ mertebe denklemler:

$$\frac{\partial \mathbf{U}_3}{\partial t} - \lambda \frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial \tau} + \mathbf{A}_0 \left(\frac{\partial \mathbf{U}_3}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial \xi} \right) + \mathbf{U}_1 . \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 \left(\frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial \xi} \right)$$

$$+ \left(\mathbf{U}_2 . \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 + \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 : \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1 \right) \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial x} + \mathbf{U}_3 . \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0$$

$$+ \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 : \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_2 + \frac{1}{6} \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} : \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1 = 0. \tag{3.21}$$

$O(\epsilon), O(\epsilon^2)$ ve $O(\epsilon^3)$ mertebe denklemler ardışık olarak çözülmeye başlanırsa, $O(\epsilon)$ mertebeden denklemlerin yapısının incelenmesinden

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_1^{(1)} \mathrm{e}^{i(\omega t - kz)} + k.e. \tag{3.22}$$

biçiminde bir çözümün uygun olacağı görülebilir. Burada $\mathbf{U}_1^{(1)}(\xi, \tau)$ bilinmeyen bir fonksiyon olup yönetici denklemi daha sonra elde edilecektir. (3.22) çözümü (3.19)'de yerine konduğunda, sıfırdan farklı $\mathbf{U}_1^{(1)}$ için (3.11) dispersiyon bağıntısının sağlanması gerekir. $\mathbf{W}_1$ matrisinin sağ özvektörü $\mathbf{R}$ ile gösterilirse $\mathbf{U}_1^{(1)}$ çözümü

$$\mathbf{U}_1^{(1)} = \Phi_1(\xi, \tau)\mathbf{R} \tag{3.23}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\Phi_1(\xi, \tau)$ bilinmeyen bir fonksiyon, $\mathbf{R}$ ise

$$\mathbf{W}_1 \mathbf{R} = 0 \tag{3.24}$$

denklemini sağlayan ve λ özdeğerine karşı gelen sağ özvektördür. (3.24) çözümü (3.22)'de yerine yerleştirilirse aşağıdaki denklem elde edilir

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial t} + \mathbf{A}_0 \frac{\partial \mathbf{U}_2}{\partial x} + \mathbf{U}_2 . \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 + (\mathbf{A}_0 - \lambda \mathbf{I}) \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \mathbf{R} \mathrm{e}^{i(\omega t - kz)} \\ &+ |\Phi_1|^2 [ik \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 : (\mathbf{R}\mathbf{R}^* - \mathbf{R}^*\mathbf{R}) + \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 : (\mathbf{R}\mathbf{R}^* + \mathbf{R}^*\mathbf{R})] \\ &+ \Phi_1^2 [-ik \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{A}_0 : \mathbf{R}\mathbf{R} + \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{U}} \nabla_{\mathbf{U}} \mathbf{b}_0 : \mathbf{R}\mathbf{R}] \mathrm{e}^{2i(\omega t - kz)} + k.e.. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Bu denklem incelenecek olursa $\mathbf{U}_2$ için aşağıdaki biçimde bir çözüm önermenin uygun olaccağı görülecektir

$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_2^{(0)} + \mathbf{U}_2^{(1)} \mathrm{e}^{i(\omega t - kz)} + \mathbf{U}_2^{(2)} \mathrm{e}^{2i(\omega t - kz)} + k.e.. \tag{3.26}$$

Bu ifade (3.25)'de yerine konursa $\mathbf{U}_2^{(1)}$'i yöneten diferansiyel denklem

$$\mathbf{W}_1 \mathbf{U}_2^{(1)} + (\mathbf{A}_0 - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{R} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} = 0 \tag{3.27}$$

şeklinde bulunur. Buradan $det \mathbf{W}_1 = 0$ olması nedeniyle (3.27) denkleminin $\mathbf{U}_2^{(1)}$'e göre çözülebilmesi için

$$\mathbf{L}(\mathbf{A}_0 - \lambda \mathbf{I})\mathbf{R} = 0 \tag{3.28}$$

uygunluk koşulunun sağlanması gerekir. burada $\mathbf{L}$, $\mathbf{R}$'ye karşı gelen sol özvektör olup

$$\mathbf{L}\mathbf{W}_1 = 0 \tag{3.29}$$

denklemini sağlar. (3.24)'in k'ya göre türevi alınırsa

$$i(\mathbf{A}_0 - \lambda\mathbf{I})\mathbf{R} + \mathbf{W}_1\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k} = 0 \tag{3.30}$$

bulunur. Bu ilişki (3.27)'de kullanılırsa

$$\mathbf{W}_1(\mathbf{U}_2^{(1)} + i\frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k}) = 0 \tag{3.31}$$

elde edilir. Bu denklemin çözümü aşağıdaki şekilde verilir

$$\mathbf{U}_2^{(1)} = \Phi_2\mathbf{R} - i\frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k}. \tag{3.32}$$

Burada $\Phi_2(\xi,\tau)$ bilinmeyen diğer bir fonksiyon olup yüksek mertebe açılımlardan elde edilmelidir. (3.25)'den $\mathbf{U}_2^{(0)}$ ve $\mathbf{U}_2^{(2)}$ çözümleri aşağıdaki gibi verilir

$$\mathbf{U}_2^{(0)} = |\Phi_1|^2\mathbf{R}_2^{(0)}, \quad \mathbf{U}_2^{(2)} = \Phi_1^2\mathbf{R}_2^{(2)}. \tag{3.33}$$

Burada Φ_1^* , Φ_1'in karmaşık eşleniği olmak üzere $|\Phi_1|^2 = \Phi_1\Phi_1^*$ şeklindedir ve $\mathbf{R}_2^{(0)}$ ve $\mathbf{R}_2^{(2)}$ vektörleri de aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır

$$\mathbf{R}_2^{(0)} = -\mathbf{W}_0^{-1}[ik\nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{A}_0 : (\mathbf{R}\mathbf{R}^* - \mathbf{R}^*\mathbf{R}) + \frac{1}{2}\nabla_{\mathbf{U}}\nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{b}_0 : (\mathbf{R}\mathbf{R}^* + \mathbf{R}^*\mathbf{R})],$$

$$\mathbf{R}_2^{(2)} = -\mathbf{W}_2^{-1}[ik\nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{A}_0.\mathbf{R}\mathbf{R} + \frac{1}{2}\nabla_{\mathbf{U}}\nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{b}_0 : \mathbf{R}\mathbf{R}]. \tag{3.34}$$

(3.22) ve (3.26) çözüm önerileri (3.21)'de yerine konacak olursa $\mathbf{U}_3$ için aşağıdaki şekilde bir çözümün uygun olduğu görülebilir

$$\mathbf{U}_3 = \mathbf{U}_3^{(0)} + \mathbf{U}_3^{(1)}\mathrm{e}^{i(\omega t - kz)} + \mathbf{U}_3^{(2)}\mathrm{e}^{2i(\omega t - kz)}$$

$$+\mathbf{U}_3^{(3)}\mathrm{e}^{3i(\omega t - kz)} + k.e.. \tag{3.35}$$

Burada $\mathbf{U}_3^{(\alpha)}$ $(\alpha = 0,1,2,3)$ yavaş değişkenlerin fonksiyonlarıdır. Burada Φ_1'i yöneten diferansiyel denklemi elde etmeye çalıştığımızdan $\mathbf{U}_3^{(1)}$'i yöneten diferansiyel denklemi yazmak yeterli olacaktır

$$\mathbf{W}_1\mathbf{U}_3^{(1)} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau}\mathbf{R} + (\mathbf{A}_0 - \lambda\mathbf{I})(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi}\mathbf{R} - i\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \xi^2}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial k})$$

$$+[-2ik\mathbf{R}^*.\nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{A}_0\mathbf{R}_2^{(2)} - ik\mathbf{R}_2^{(0)}.\nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{A}_0\mathbf{R} + ik\mathbf{R}_2^{(2)}.\nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{A}_0\mathbf{R}^*$$

$$-ik\nabla_{\mathbf{U}}\nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{A}_0 : \mathbf{R}\mathbf{R}^*\mathbf{R} + \frac{ik}{2}\nabla_{\mathbf{U}}\nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{A}_0 : \mathbf{R}\mathbf{R}\mathbf{R}^* + \nabla_{\mathbf{U}}\nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{b}_0 : \mathbf{R}\mathbf{R}_2^{(0)}$$

$$+\nabla_{\mathbf{U}}\nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{b}_0:\mathbf{R}^*\mathbf{R}_2^{(2)}+\frac{1}{2}\nabla_{\mathbf{U}}\nabla_{\mathbf{U}}\nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{b}_0:\mathbf{RRR}^*]|\Phi_1|^2\Phi_1=0. \tag{3.36}$$

Bu ifade soldan $\mathbf{L}$ ile çarpılır ve (3.30) uygunluk koşulu kullanılırsa aşağıdaki Nonlineer Schrödinger denklemi elde edilir

$$i\frac{\partial\Phi_1}{\partial\tau}+p\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\xi^2}+q|\Phi_1|^2\Phi_1=0. \tag{3.37}$$

Burada p ve q katsayıları aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır

$$p=i\mathbf{L}.(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}_0).\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial k}/(\mathbf{LR}),$$

$$q=i\mathbf{L}.[-2ik\mathbf{R}^*.\nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{A}_0\mathbf{R}_2^{(2)}-ik\mathbf{R}_2 3(0).\nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{A}_0\mathbf{R}+ik\mathbf{R}_2^{(2)}.\nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{A}_0\mathbf{R}^*$$
$$-ik\nabla_{\mathbf{U}}\nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{A}_0:\mathbf{RR}^*\mathbf{R}+\frac{ik}{2}\nabla_{\mathbf{U}}\nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{A}_0:\mathbf{RRR}^*+\nabla_{\mathbf{U}}\nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{b}_0:\mathbf{RR}_2^{(0)}$$
$$+\nabla_{\mathbf{U}}\nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{b}_0:\mathbf{R}^*\mathbf{R}_2^{(2)}+\frac{1}{2}\nabla_{\mathbf{U}}\nabla_{\mathbf{U}}\nabla_{\mathbf{U}}\mathbf{b}_0:\mathbf{RRR}^*]/(\mathbf{LR}). \tag{3.38}$$

Şimdi p katsayısına değişik bir ifade bulmaya çalışalım. Bunun için (3.30) denklemi k'ya göre bir defa türetilirse aşağıdaki ifade elde edilir

$$i\frac{\partial\lambda}{\partial k}\mathbf{R}+2i(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}_0)\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial k}-\mathbf{W}_1\frac{\partial^2\mathbf{R}}{\partial k^2}=0. \tag{3.39}$$

Bu ifade soldan $\mathbf{L}$ ile çarpılır ve (3.29) kullanılırsa

$$p=\frac{1}{2}\frac{\partial\lambda}{\partial k}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2} \tag{3.40}$$

bulunur. Bu tip denklemlerin geniş bir incelemesi Teymur ve Şuhubi [68]'de bulunabilir.

3.4 Denklem Sistemlerinin Uzun Dalga Yaklaşımı Altında İncelenmesi

Bu yöntem hem dispersif hem de dissipatif sistemleri karakterize edebilen aşağıdaki denklem sistemleri için uygulanabilir

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial t}+\mathrm{A}(\mathrm{U})\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}+\sum_{\beta=1}^{s}\prod_{\alpha=1}^{p}(\mathrm{H}_\alpha^\beta\frac{\partial}{\partial t}+\mathrm{K}_\alpha^\beta\frac{\partial}{\partial x})\mathrm{U}=0. \tag{3.41}$$

Gardner-Morikawa dönüşümü aşağıdaki yapıda tanımlansın

$$\xi=\epsilon^\alpha(x-\lambda t),\quad \tau=\epsilon^{\alpha+1}t,\quad a=\frac{1}{p-1}. \tag{3.42}$$

Burada ϵ küçük bir parametre olup lineer denklemlerin uzun dalga yaklaşımında asimptotik analizinden elde edilir. λ ise $\mathrm{U} = \mathrm{U}_0$ için $\mathrm{A}(\mathrm{U}_0) = \mathrm{A}_0$ matrisinin özdeğeridir. $\mathrm{U}, \mathrm{A}, \mathrm{H}_\alpha^\beta, \mathrm{K}_\alpha^\beta$ ifadelerinin $\mathrm{U} = \mathrm{U}_0$ sabit çözümü civarında aşağıdaki şekilde seriye açıldığı varsayılmıştır

$$\mathrm{U} = \sum_{j=1}^{\infty} \epsilon^j \mathrm{U}_j, \;\; \mathrm{A} = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \mathrm{A}_j, \;\; \mathrm{H}_\alpha^\beta = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \mathrm{H}_{\alpha j}^\beta, \;\; \mathrm{K}_\alpha^\beta = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \mathrm{K}_{\alpha j}^\beta. \tag{3.43}$$

Bu açılmlar ve (3.42) dönüşümü (3.41)'de yerine yazılır ve ϵ'un kuvvetlerine göre düzenlenirse aşağıdaki denklem takımı elde edilir

$O(\epsilon^{\alpha+1})$ mertebe denklemler :

$$(\mathrm{A}_0 - \lambda \mathrm{I}) \frac{\partial \mathrm{U}_1}{\partial \xi} = 0, \tag{3.44}$$

$O(\epsilon^{\alpha+2})$ mertebe denklemler :

$$(\mathrm{A}_0 - \lambda \mathrm{I}) \frac{\partial \mathrm{U}_2}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathrm{U}_1}{\partial \tau} + \mathrm{U}_1.(\nabla_{\mathrm{U}} \mathrm{A}_0) \frac{\partial \mathrm{U}_1}{\partial \xi}$$

$$+ \sum_{\beta=1}^{s} \prod_{\alpha=1}^{p} (-\lambda \mathrm{H}_{\alpha 0}^\beta + \mathrm{K}_{\alpha 0}^\beta) \frac{\partial^p \mathrm{U}_1}{\partial \xi^p} = 0. \tag{3.45}$$

A_0 'ın λ özdeğerine karşı gelen özvektör R ile gösterilirse aşağıdaki bağıntı yazılabilir

$$(\mathrm{A}_0 - \lambda \mathrm{I})\mathrm{R} = 0. \tag{3.46}$$

O halde (3.44) denkleminin çözümü

$$\mathrm{U}_1 = \Phi_1(\xi, \tau)\mathrm{R} + \mathrm{V}_1(\tau) \tag{3.47}$$

şeklinde verilebilir. Burada $\Phi_1(\xi, \tau)$, U_1'in R boyunca olan bileşeni olup, diğer bileşeni $V_1(\tau)$, başlangıç koşullarından belirlenecek olan bir fonksiyondur. λ, A_0'ın bir özdeğeri olduğundan (3.45)'in $\partial \mathrm{U}_2 / \partial \xi$ cinsinden çözülebilmesi için aşağıdaki uygunluk koşulunun sağlanması gerekir

$$\mathrm{L}. \frac{\partial \mathrm{U}_1}{\partial \tau} + \mathrm{L}.(\mathrm{U}_1.\nabla_{\mathrm{U}} \mathrm{A}_0 \frac{\partial \mathrm{U}_1}{\partial \xi}) + \mathrm{L}. + \sum_{\beta=1}^{s} \prod_{\alpha=1}^{p} (-\lambda \mathrm{H}_{\alpha 0}^\beta + \mathrm{K}_{\alpha 0}^\beta) \frac{\partial^p \mathrm{U}_1}{\partial \xi^p} = 0. \tag{3.48}$$

$\xi \to \infty$ için $\mathrm{U} \to \mathrm{U}_0$ olduğundan $\xi \to \infty$ için $\mathrm{U}_1 \to 0$ geçerlidir. Bu durumda $\mathrm{V}_1(\tau) = 0$ alınabilir ve U_1 çözümü $\mathrm{U}_1 = \Phi_1(\xi, \tau)\mathrm{R}$ şekline dönüşür. Buna göre

Φ_1'i yöneten evolüsyon denklemi

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau} + c_1 \Phi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} + c_2 \frac{\partial^p \Phi_1}{\partial \xi^p} = 0. \tag{3.49}$$

haline gelir. Burada $c_1,\ c_2$ sabitleri

$$c_1 = \mathrm{L}.(\mathrm{R}.\nabla_{\mathrm{U}} \mathrm{A}_0 \mathrm{R})/(\mathrm{L}.\mathrm{R}),$$

$$c_2 = \mathrm{L}.\sum_{\beta=1}^{s} \prod_{\alpha=1}^{p} (-\lambda \mathrm{H}_{\alpha 0}^{\beta} + \mathrm{K}_{\alpha 0}^{\beta}) \mathrm{R}/(\mathrm{L}.\mathrm{R}). \tag{3.50}$$

şeklinde tanımlanmıştır. (3.49) denklemi $p = 2$ için Burgers ve $p = 3$ için de Korteweg-de Vries denklemi olarak bilinir. Verilen bir nonlineer diferansiyel denklem sistemine uygun Gardner-Morikawa dönüşümü bulunmadığı hallerde denklem sisteminin lineerleştirilmiş haline ait dispersiyon bağınıtısına bakılır. a ve v reel sabitler olmak üzere dispersiyon bağıntısını k'nın küçük değerleri için

$$\omega = ak + bk^3 + O(k^4)$$

$$\omega = ak + bk^2 + O(k^4) \tag{3.51}$$

şeklinde seriye açılabiliyorsa, sonlu genlikli dalga yayılması incelenmesi durumunda nonlineer diferansiyel denklem sisteminin asimptotik olarak Burgers denklemine, KdV veya onun genelleştirilmiş formalarına indirgeneceği söylenebilir. Burada özet olarak sunulmaya çalışılan yöntemlerde indirgeyici pertürbasyon yöntemi, bundan sonraki bölümlerde incelenecek problemde kullanılacak ve ilgili evolüsyon denklemi elde edilecektir.

4. ZAYIF NONLİNEER DALGALAR

4.1 Giriş

Bu bölümde boyutsuz yönetici denklemleri (2.41)-(2.43) ile verilen içi akışkanla dolu değişken yarıçaplı ince elastik tüpte küçük fakat sonlu genlikli dalgaların yayılımı incelenecektir. Bu amaçla uzun dalga yaklaşımı altında indirgeyici pertürbasyon metodu kullanılacaktır. İncelenen problemin doğası gereği, problemi bir sınır değer problemi olarak ele almak uygun olacaktır. Bu tür problemlerde frekans belirlenir ve dalga sayısı dispersiyon bağıntısından elde edilir.

4.2 Viskoz Olmayan Akışkan ile Dolu Tüplerde Nonlineer Dalga Yayılımı

Bu kısımda içi viskoz olmayan akışkan ile dolu ince tüplerde uzun dalga boyu yaklaşımı halinde nonlineer dalgaların yayılımı problemi incelenecektir. Bu amaca yönelik olarak aşağıdaki koordinat dönüşümü kullanılacaktır

$$\xi = \epsilon^{1/2}(z - gt), \quad \tau = \epsilon^{3/2}z. \tag{4.1}$$

Burada ϵ, nonlineeritenin ve dispersiyonun küçüklüğünü karakterize eden bir parametre, g ise bir ölçek parametresi olup çözümün bir parçası olarak elde edilecektir. (4.1) denkleminden z çözülecek olursa

$$z = \epsilon^{-3/2}\tau \tag{4.2}$$

bulunur. Bu ifade $f(z)$ de yerine konursa

$$f(z) = h(\epsilon, \tau) \tag{4.3}$$

şeklini alır. Bu yazılım şeklinin yapılabilmesi için $f(z)$ fonksiyonunun $O(\epsilon^{3/2})$ mertebesinde olması gerekir. Bu çalışmada $h(\epsilon, \tau)$ fonksiyonunun ve u, w, p alan büyüklüklerinin aşağıdaki şekilde bir asimptotik seriye açılacağı kabul edilecektir

$$h = \epsilon h_1(\tau) + \epsilon^2 h_2(\tau) + ...$$

$$u = \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + ...$$

$$w = \epsilon w_1 + \epsilon^2 w_2 + ...$$

$$p = p_0 + \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_2 + ... \tag{4.4}$$

Ayrıca, aşağıdaki diferansiyel bağıntılar gözönünde bulundurularak

$$\frac{\partial}{\partial t} \to -\epsilon^{1/2} g \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \to \epsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} + \epsilon^{3/2} \frac{\partial}{\partial \tau} \tag{4.5}$$

(4.4) ve (4.5) açılımları (2.41)-(2.43) alan denklemlerinde yerine konur ve ϵ'nun çeşitli mertebeden katsayıları sıfıra eşitlenirse aşağıdaki diferansiyel denklem takımları elde edilir

$O(\epsilon)$ mertebesinden denklemler

$$-2g \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \lambda_\theta \frac{\partial w_1}{\partial \xi} = 0$$

$$-g \frac{\partial w_1}{\partial \xi} + \frac{\partial p_1}{\partial \xi} = 0, \quad p_1 = \beta_1 (u_1 + h_1) \tag{4.6}$$

$O\ (\epsilon^2)$ mertebesinden denklemler

$$-2g \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \lambda_\theta \frac{\partial w_2}{\partial \xi} + \lambda_\theta \frac{\partial w_1}{\partial \tau} + 2 w_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + u_1 \frac{\partial w_1}{\partial \xi} + h_1(\tau) \frac{\partial w_1}{\partial \xi} = 0,$$

$$-g \frac{\partial w_2}{\partial \xi} + \frac{\partial p_2}{\partial \xi} + \frac{\partial p_1}{\partial \tau} + w_1 \frac{\partial w_1}{\partial \xi} = 0,$$

$$p_2 = (\frac{m g^2}{\lambda_\theta \lambda_z} - \alpha_0) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + \beta_1 (u_2 + h_2) + \beta_2 (u_1 + h_1)^2. \tag{4.7}$$

Bu denklemler elde edilirken (2.43) denkleminin argümanları cinsinden aşağıdaki şekilde seriye açılabileceği kabul edilmiştir

$$p = p_0 + L_1(u) + L_2(u) + L_3(u) + ... \ . \tag{4.8}$$

Burada p_0 statik ön basıncı göstermekte olup $L_1(u), L_2(u)$ ve $L_3(u)$ fonksiyonları da aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır

$$L_1(u) = \frac{m}{\lambda_\theta \lambda_z} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - \alpha_0 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} + \beta_1 \bar{u}, \quad p_0 = \beta_0,$$

$$L_2(u) = -\frac{m}{\lambda_\theta^2 \lambda_z} \bar{u} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} - \alpha_1 (\frac{\partial \bar{u}}{\partial z})^2 - (2\alpha_1 - \frac{\alpha_0}{\lambda_\theta}) \bar{u} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} + \beta_2 \bar{u}^2,$$

$$L_3(u) = \frac{m}{\lambda_\theta^3\lambda_z}\bar{u}^2\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2} - (\alpha_2 - \frac{\alpha_1}{\lambda_\theta})\bar{u}(\frac{\partial\bar{u}}{\partial z})^2 + \beta_3\bar{u}^3$$

$$-(\alpha_2 - \frac{2\alpha_1}{\lambda_\theta} + \frac{\alpha_0}{\lambda_\theta^2})\bar{u}^2\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial z^2} - 3(\gamma_1 - \frac{\alpha_0}{2})(\frac{\partial\bar{u}}{\partial z})^2\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial z^2}. \tag{4.9}$$

Yukarıdaki ifadede $\bar{u} = f + u$ olup $\alpha_0, .., \gamma_1$ katsayıları

$$\alpha_0 = \frac{1}{\lambda_\theta}\frac{\partial\Sigma}{\partial\lambda_z}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2\lambda_\theta}\frac{\partial^2\Sigma}{\partial\lambda_\theta\lambda_z}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2\lambda_\theta}\frac{\partial^3\Sigma}{\partial\lambda_\theta^2\partial\lambda_z},$$

$$\beta_0 = \frac{1}{\lambda_\theta\lambda_z}\frac{\partial\Sigma}{\partial\lambda_\theta}, \quad \beta_1 = \frac{1}{\lambda_\theta\lambda_z}\frac{\partial^2\Sigma}{\partial\lambda_\theta^2} - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta}, \quad \beta_2 = \frac{1}{2\lambda_\theta\lambda_z}\frac{\partial^3\Sigma}{\partial\lambda_\theta^2} - \frac{\beta_1}{\lambda_\theta},$$

$$\beta_3 = \frac{1}{6\lambda_\theta\lambda_z}\frac{\partial^4\Sigma}{\partial\lambda_\theta^4} - \frac{\beta_2}{\lambda_\theta}, \quad \gamma_1 = \frac{\lambda_z}{2\lambda_\theta}\frac{\partial^2\Sigma}{\partial\lambda_z^2}. \tag{4.10}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Alan Denklemlerinin Çözümü

O(ϵ) mertebesindeki (4.6) denklemlerinin integrasyonundan

$$u_1 = U(\xi,\tau), w_1 = \frac{2g}{\lambda_\theta}[U + \bar{w}_1(\tau)]$$

$$p_1 = \frac{2g^2}{\lambda_\theta}[U + h_1(\tau)] \tag{4.11}$$

bulunur. Burada $U(\xi,\tau)$ bilinmeyen bir fonksiyon olup yönetici denklemi daha sonra elde edilecektir. (4.11) denklemindeki $\bar{w}_1(\tau)$ fonksiyonu değişken yarıçap nedeniyle başlangıçtaki daimi akımı karakterize etmektedir ve çözümü daha sonra elde edilecektir. (4.11) çözümünün geçerli olabilmesi için g ölçek parametresinin aşağıdaki şekilde verilmesi gerekir

$$g^2 = \frac{\lambda_\theta\beta_1}{2}. \tag{4.12}$$

Burada g'nin, uzun dalga yaklaşımı halinde faz hızını gösterdiğini belirtmek gerekir.

(4.11) ile verilen çözüm (4.7) denklemlerinde yerine konacak olursa aşağıdaki denklem takımı elde edilir

$$-2g\frac{\partial u_2}{\partial\xi} + \lambda_\theta\frac{\partial w_2}{\partial\xi} + 2g(\frac{\partial U}{\partial\tau} + \frac{d\bar{w}_1}{d\tau}) + \frac{4g}{\lambda_\theta}(U + \bar{w}_1)\frac{\partial U}{\partial\xi}$$

$$+\frac{2g}{\lambda_\theta}U\frac{\partial U}{\partial\xi} + \frac{2g}{\lambda_\theta}h_1(\tau)\frac{\partial U}{\partial\xi} = 0$$

$$-g\frac{\partial w_2}{\partial \xi}+\frac{\partial p_2}{\partial \xi}+\frac{2g^2}{\lambda_\theta}(\frac{\partial U}{\partial \tau}+\frac{dh_1}{d\tau})+\frac{4g^2}{\lambda_\theta^2}(U+\bar{w}_1))\frac{\partial U}{\partial \xi}=0,$$

$$p_2=(\frac{mg^2}{\lambda_\theta\lambda_z}-\alpha_0)\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}+\beta_2(U+h_1)^2+\beta_1(u_2+h_2). \tag{4.13}$$

(4.13) denklemleri arasında w_2 değişkeni elimine edilecek olursa aşağıdaki denklem elde edilir

$$-\frac{2g^2}{\lambda_\theta}\frac{\partial u_2}{\partial \xi}+\frac{\partial p_2}{\partial \xi}+\frac{4g^2}{\lambda_\theta}\frac{\partial U}{\partial \tau}+\frac{10g^2}{\lambda_\theta^2}U\frac{\partial U}{\partial \xi}+\frac{2g^2}{\lambda_\theta^2}(4\bar{w}_1+h_1)\frac{\partial U}{\partial \xi}$$

$$+\frac{2g^2}{\lambda_\theta}\frac{d}{d\tau}(\bar{w}_1+h_1)=0. \tag{4.14}$$

(4.13) denklemindeki p_2 ifadesi (4.14)'de yerine konursa

$$\frac{4g^2}{\lambda_\theta}\frac{\partial U}{\partial \tau}+(\frac{10g^2}{\lambda_\theta^2}+2\beta_2)U\frac{\partial U}{\partial \xi}+\frac{\partial U}{\partial \xi}(\frac{8g^2}{\lambda_\theta^2}\bar{w}_1+\frac{2g^2}{\lambda_\theta^2}h_1+2\beta_2 h_1)$$

$$+(\frac{mg^2}{\lambda_\theta\lambda_z}-\alpha_0)\frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3}+\frac{2g^2}{\lambda_\theta}\frac{d}{d\tau}(\bar{w}_1+h_1)=0 \tag{4.15}$$

buılunur. (4.15) denklemi dinamik yer değiştirmeninin sıfır olması (U=0) halinde de geçerli olmalıdır. Dolayısıyla, (4.15) de U=0 yazılırsa, aşağıdaki denklem elde edilir

$$\frac{d}{d\tau}[\bar{w}_1(\tau)+h_1(\tau)]=0. \tag{4.16}$$

Bu denklemin çözümü $\bar{w}_1(\tau) = -h_1(\tau)$ şeklinde alınabilir. O halde (4.15) denkleminde görünen $\bar{w}_1(\tau)$ yerine $-h_1(\tau)$ yazılırsa aşağıdaki değişken katsayılı KdV denklemi elde edilir

$$\frac{\partial U}{\partial \tau}+\mu_1 U\frac{\partial U}{\partial \xi}+\mu_2\frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3}-\mu_3 h_1(\tau)\frac{\partial U}{\partial \xi}=0. \tag{4.17}$$

Buradaki μ_1, μ_2, ve μ_3 katsayıları aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır

$$\mu_1=\frac{5}{2\lambda_\theta}+\frac{\beta_2}{\beta_1}, \quad \mu_2=(\frac{m}{4\lambda_z}-\frac{\alpha_0}{2\beta_1}), \quad \mu_3=\frac{3}{2\lambda_\theta}-\frac{\beta_2}{\beta_1}. \tag{4.18}$$

Bilindiği gibi μ_1, μ_2, μ_3 katsayıları başlangıç deformasyonunun birer fonksiyonudur. Başlangıç deformasyonuna bağlı olarak bu katsayıların değişimi önem kazanabilir. Özellikle başlangıç deformasyonunun belirli bir değeri için μ_1 katsayısının sıfır olması büyük öneme sahiptir. Bu durumda nonlineer evolüsyon denklemi dejenere olur ve lineer denkleme dönüşür; dolayısıyla zayıf nonlineerite ile dispersiyon dengelenemez. Bunun sonucu olarak da pertürbasyon şemasındaki ϵ ölçek parametresi'nin değiştirilmesi gerekir.

(4.17) de görülen μ_1 katsayısının sıfır olup olmayacağını anlamak içi tüp malzemesi özelliğinin bilinmesi gerekir. Bu çalışmada damar malzemeleri için Demiray [69] tarafından önerilen model kullanılacaktır. Bu modele göre şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu aşağıdaki biçimde verilebilir

$$\Sigma = \frac{1}{2\alpha}\{\exp[\alpha(\lambda_\theta^2 + \lambda_z^2 + \frac{1}{\lambda_\theta^2\lambda_z^2} - 3] - 1\}. \tag{4.19}$$

Burada α bir malzeme sabiti olup deneysel olarak tayin edilmesi gerekir. (4.19) ifadesi (4.10) denkleminde yerine konacak olursa $\alpha_0, ...\beta_3$ katsayıları aşağıdaki şekli alırlar

$$\alpha_0 = \frac{1}{\lambda_\theta}(\lambda_z - \frac{1}{\lambda_\theta^2\lambda_z^3})\ F,\ \beta_1 = [\frac{4}{\lambda_\theta^5\lambda_z^3} + 2\frac{\alpha}{\lambda_\theta\lambda_z}(\lambda_\theta - \frac{1}{\lambda_\theta^3\lambda_z^2})^2]\ F,$$

$$\beta_2 = [-\frac{10}{\lambda_\theta^6\lambda_z^3} + \frac{\alpha}{\lambda_\theta\lambda_z}(\lambda_\theta - \frac{1}{\lambda_\theta^3\lambda_z^2})(1 + \frac{11}{\lambda_\theta^4\lambda_z^2}) + 2\frac{\alpha^2}{\lambda_\theta\lambda_z}(\lambda_\theta - \frac{1}{\lambda_\theta^3\lambda_z^2})^3]\ F,$$

$$\beta_3 = [\frac{20}{\lambda_\theta^7\lambda_z^3} + \alpha(\frac{36}{\lambda_\theta^9\lambda_z^5} - \frac{20}{\lambda_\theta^5\lambda_z^3}) + 2\alpha^2(\frac{1}{\lambda_\theta\lambda_z} + \frac{7}{\lambda_\theta^5\lambda_z^3})(\lambda_\theta - \frac{1}{\lambda_\theta^3\lambda_z^2})^2$$
$$+\frac{4}{3}\frac{\alpha^3}{\lambda_\theta\lambda_z}(\lambda_\theta - \frac{1}{\lambda_\theta^3\lambda_z^2})^4]F. \tag{4.20}$$

Burada F fonksiyonu aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır

$$F = \exp[\alpha(\lambda_\theta^2 + \lambda_z^2 + \frac{1}{\lambda_\theta^2\lambda_z^2} - 3]. \tag{4.21}$$

(4.20) denklemiyle verilen β_1, β_2 ifadeleri, (4.18)'deki μ_1 ifadesinde yerine konacak olursa aşağıdaki denklem elde edilir

$$(\lambda_\theta - \frac{1}{\lambda_\theta^3\lambda_z^2})[3 + \frac{3}{\lambda_\theta^4\lambda_z^2} + \alpha(\lambda_\theta - \frac{1}{\lambda_\theta^3\lambda_z^2})^2] = 0. \tag{4.22}$$

$\alpha > 0$ olduğundan (4.22) denkleminde köşeli parantez içerisindeki ifade pozitiftir ve sıfır olamaz. O halde birinci faktör sıfır olmalıdır. Buna göre aşağıdaki ilişki elde edilir

$$\lambda_\theta = \lambda_z^{-1/2}. \tag{4.23}$$

Şimdi bu hale ait pertürbasyon şeması tekrar incelenecektir.

4.2.1 μ_1'in Sıfır Olması Hali ($\beta_2 = -\frac{5}{2\lambda_\theta}\beta_1$)

μ_1'in sıfır olması halinde nonlineerite çok küçük olduğu için dispersiyonu dengelemeyecektir. Bu durumda ölçek parametresini değiştirmek gerekecektir ve aşağıdaki koordinat dönüşümü kullanılacaktır

$$\xi = \epsilon(z - gt), \quad \tau = \epsilon^3 z. \tag{4.24}$$

Bu halde aşağıdaki diferansiyel ifadeler geçerli olacaktır

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\epsilon g \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \epsilon \frac{\partial}{\partial \xi} + \epsilon^3 \frac{\partial}{\partial \tau}. \tag{4.25}$$

Buna göre (4.4) açılımı ve (4.25) ifadesi (2.41)-(2-43) alan denklemlerinde yerine konursa aşağıdaki denklem takımları elde edilir.

$O(\epsilon)$ mertebesinden denklemler :

$$-2g\frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \lambda_\theta \frac{\partial w_1}{\partial \xi} = 0, \quad -g\frac{\partial w_1}{\partial \xi} + \frac{\partial p_1}{\partial \xi} = 0, \quad p_1 = \beta_1(u_1 + h_1). \tag{4.26}$$

$O(\epsilon^2)$ mertebesinden denklemler :

$$-2g\frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \lambda_\theta \frac{\partial w_2}{\partial \xi} + 2w_1\frac{\partial u_1}{\partial \xi} + (u_1 + h_1)\frac{\partial w_1}{\partial \xi} = 0,$$

$$-g\frac{\partial w_2}{\partial \xi} + \frac{\partial p_2}{\partial \xi} + w_1\frac{\partial w_1}{\partial \xi} = 0,$$

$$p_2 = \beta_1(u_2 + h_2) - \frac{5}{2\lambda_\theta}\beta_1(u_1 + h_1)^2. \tag{4.27}$$

$O(\epsilon^3)$ mertebesinden denklemler :

$$-2g\frac{\partial u_3}{\partial \xi} + \lambda_\theta \frac{\partial w_3}{\partial \xi} + 2\frac{\partial u_1}{\partial \xi}w_2 + 2\frac{\partial u_2}{\partial \xi}w_1$$

$$+\lambda_\theta \frac{\partial w_1}{\partial \tau} + (u_1 + h_1)\frac{\partial w_2}{\partial \xi} + (u_2 + h_2)\frac{\partial w_1}{\partial \xi} = 0,$$

$$-g\frac{\partial w_3}{\partial \xi} + \frac{\partial p_3}{\partial \xi} + \frac{\partial p_1}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi}(w_1 w_2) = 0,$$

$$p_3 = (\frac{mg^2}{\lambda_\theta \lambda_z} - \alpha_0)\frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + \beta_1(u_3 + h_3) + 2\beta_2(u_1 + h_1)(u_2 + h_2) + \beta_3(u_1 + h_1)^3. \tag{4.28}$$

Alan Denklemlerinin Çözümü

Öncelikle (4.26) denklem takımının çözümünden

$$u_1 = U(\xi,\tau), \quad w_1 = \frac{2g}{\lambda_\theta}[U + \bar{w}_1(\tau)]$$

$$p_1 = \beta_1[U + h(\tau)], \quad \beta_1 = \frac{g^2}{2\lambda_\theta} \tag{4.29}$$

elde edilir. Burada $U(\xi,\tau)$ bilinmeyen bir fonksiyon olup yönetici denklemi daha sonra elde edilecektir. $\bar{w}_1(\tau)$ fonksiyonu ise başlangıçtaki daimi akım karakterize etmekte olup çözümün bir parçası olarak elde edilecektir.

(4.29) çözümü (4.27) denkleminde yerine konacak olursa aşağıdaki denklemler elde edilir

$$-2g\frac{\partial u_2}{\partial\xi} + \lambda_\theta\frac{\partial w_2}{\partial\xi} + \frac{2g}{\lambda_\theta}(3U + 2\bar{w}_1 + h_1)\frac{\partial U}{\partial\xi} = 0,$$

$$-g\frac{\partial w_2}{\partial\xi} + \beta_1\frac{\partial u_2}{\partial\xi} + [\frac{2\beta_1}{\lambda_\theta}(U + \bar{w}_1) - \frac{5}{\lambda_\theta}\beta_1(U + h_1)]\frac{\partial U}{\partial\xi} = 0. \tag{4.30}$$

Bu denklemler arasında w_2 elimine edilirse ve $\mu_1 = 0$ olduğu gözönünde bulundurulursa aşağıdaki denklem elde eldilir

$$(\bar{w}_1 - h_1)\frac{\partial U}{\partial\xi} = 0. \tag{4.31}$$

U'nun sıfırdan farklı bir çözüme sahip olabilmesi için

$$\bar{w}_1(\tau) = h_1(\tau) \tag{4.32}$$

olmalıdır. Buna göre (4.30) denkleminin çözümünden w_2 aşağıdaki şekilde verilebilir

$$w_2 = \frac{2g}{\lambda_\theta}u_2 - \frac{6g}{\lambda_\theta^2}h_1(\tau)U - \frac{3g}{\lambda_\theta^2}U^2 + \bar{w}_2(\tau). \tag{4.33}$$

Burada $\bar{w}_2(\tau)$ fonksiyonu daimi akımı karakterize etmektedir.

(4.29) ve (4.33) çözümleri (4.28) denkleminde yerine konacak olursa aşağıdaki denklemler bulunur

$$-2g\frac{\partial u_3}{\partial\xi} + \lambda_\theta\frac{\partial w_3}{\partial\xi} + 2w_2\frac{\partial U}{\partial\xi} + \frac{4g}{\lambda_\theta}(U + \bar{w}_1)\frac{\partial u_2}{\partial\xi} + 2g(\frac{\partial U}{\partial\tau} + \frac{d\bar{w}_1}{d\tau})$$

$$+(U + h_1)\frac{\partial w_2}{\partial\xi} + \frac{2g}{\lambda_\theta}(u_2 + h_2)\frac{\partial U}{\partial\xi} = 0,$$

$$-g\frac{\partial w_3}{\partial\xi}+(\frac{mg^2}{\lambda_\theta\lambda_z}-\alpha_0)\frac{\partial^3U}{\partial\xi^3}+\beta_1\frac{\partial u_3}{\partial\xi}-\frac{5}{\lambda_\theta}\beta_1(u_2+h_2)\frac{\partial U}{\partial\xi}$$
$$-\frac{5}{\lambda_\theta}\beta_1(U+h_1)\frac{\partial u_2}{\partial\xi}+3\beta_3(U+h_1)^2\frac{\partial U}{\partial\xi}+\frac{2g^2}{\lambda_\theta}(\frac{\partial U}{\partial\tau}+\frac{dh_1}{d\tau})$$
$$+\frac{2g}{\lambda_\theta}(U+\bar{w}_1)\frac{\partial w_2}{\partial\xi}+\frac{2g}{\lambda_\theta}w_2\frac{\partial U}{\partial\xi}=0. \tag{4.34}$$

(4.34) denklemleri arasında w_3 elimine edilirse aşağıdaki ifade elde edilir

$$\frac{\partial U}{\partial\tau}+\frac{dh_1}{d\tau}+(\frac{3\beta_3}{2\beta_1}-\frac{15}{2\lambda_\theta^2})U^2\frac{\partial U}{\partial\xi}+(\frac{3\beta_3}{\beta_1}-\frac{15}{\lambda_\theta^2})h_1U\frac{\partial U}{\partial\xi}$$
$$-[(\frac{3\beta_3}{2\beta_1}+\frac{9}{2\lambda_\theta^2})h_1^2+\frac{2}{\lambda_\theta}h_2-\frac{\bar{w}_2}{g}]\frac{\partial U}{\partial\xi}+(\frac{m}{4\lambda_z}-\frac{\alpha_0}{2\beta_1})\frac{\partial^3U}{\partial\xi^3}=0. \tag{4.35}$$

Bu denklem $U=0$ hali için de geçerli olmalıdır. Buradan h_1 =sabit bulunur. Problemin genelliğini bozmaksızın h_1 sabiti sıfır alınabilir. Görülüyorki $h(\epsilon,\tau)$ açılımı ϵ^2 ile başlamaktadır. Bu durumda (4.35) denklemi aşağıdaki şekli alır

$$\frac{\partial U}{\partial\tau}+(\frac{3\beta_3}{2\beta_1}-\frac{15}{2\lambda_\theta^2})U^2\frac{\partial U}{\partial\xi}+(\frac{2h_2}{\lambda_\theta}-\frac{\bar{w}_2}{g})\frac{\partial U}{\partial\xi}+(\frac{m}{4\lambda_z}-\frac{\alpha_0}{2\beta_1})\frac{\partial^3U}{\partial\xi^3}=0. \tag{4.36}$$

Bu ise değişken katsayılı modifiye KdV denklemidir. Ancak, problemin tam olarak çözülebilmesi için $\bar{w}_2(\tau)$ fonksiyonunun bilinmesi gerekir. Bunun için daha yüksek mertebeden pertürbasyon açılımına gitmek gerekir. (2.41)-(2.43) denkleminde u=0 yazılır ve $O(\epsilon^4)$ mertebesindeki denklemler çözülecek olursa

$$\bar{w}_2(\tau)=-\frac{2g}{\lambda_\theta}h_2(\tau) \tag{4.37}$$

şeklinde bulunur. Buna göre (4.36) ile verilen değişken katsayılı modifiye KdV denklemi aşağıdaki şekli alır

$$\frac{\partial U}{\partial\tau}+\lambda_1U^2\frac{\partial U}{\partial\xi}+\frac{4}{\lambda_\theta}h_2(\tau)\frac{\partial U}{\partial\xi}+\mu_2\frac{\partial^3U}{\partial\xi^3}=0. \tag{4.38}$$

Burada λ_1 katsayısı aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır

$$\lambda_1=\frac{3\beta_3}{2\beta_1}-\frac{15}{2\lambda_\theta^2}. \tag{4.39}$$

4.3 İlerleyen Dalga Çözümleri

Bu kısımda (4.17)'de verilen değişken katsayılı KdV ve (4.38)'de verilen değişken katsayılı modifiye KdV denklemleri için ilerleyen dalga çözümleri aranacaktır.

Bunu yapabilmek için, aşağıdaki koordinat dönüşümünü yapmak uygun olacaktır

$$\tau^{'} = \tau, \quad \xi^{'} = \xi + \varphi(\tau). \tag{4.40}$$

Burada $\varphi(\tau)$ bilinmeyen bir fonksiyon olup değişken katsayılı KdV denklemlerini sabit katsayılı KdV denklemlerine dönüştürecek şekilde belirlenecektir. (4.40) dönüşümü (4.17) ve (4.38) denklemlerinde kullanılacak olursa aşağıdaki evolüsyon denklemleri elde edilir

$$\frac{\partial U}{\partial \tau'} + \mu_1 U \frac{\partial U}{\partial \xi'} + \mu_2 \frac{\partial^3 U}{\partial \xi'^3} + [\varphi^{'}(\tau) - \mu_3 h_1(\tau)] \frac{\partial U}{\partial \xi'} = 0, \tag{4.41}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau'} + \lambda_1 U^2 \frac{\partial U}{\partial \xi'} + \mu_2 \frac{\partial^3 U}{\partial \xi'^3} + [\varphi^{'}(\tau) + \frac{4}{\lambda_\theta} h_2(\tau)] \frac{\partial U}{\partial \xi'} = 0. \tag{4.42}$$

Yukarıdaki denklemlerin sabit katsayılı KdV denklemlerine dönüşebilmesi için $\varphi(\tau)$ fonksiyonunun aşağıdaki şekilde belirlenmesi gerekir. KdV denklemi için

$$\varphi(\tau) = \mu_3 \int_0^\tau h_1(s) ds \tag{4.43}$$

olarak verilir. Modifiye KdV denklemi için ise bu fonksiyon

$$\varphi(\tau) = -\frac{4}{\lambda_\theta} \int_0^\tau h_2(s) ds \tag{4.44}$$

şeklinde verilebilir. Sabit katsayılı KdV denkleminin lokalize çözümü $(\xi^{'}, \tau^{'})$ değişkenleri cinsinden aşağıdaki gibi verilebilir([78])

$$U = a \ \mathrm{sech}^2 \zeta, \ \zeta = (\frac{\mu_1 a}{12\mu_2})^{1/2} (\xi^{'} - \frac{\mu_1 a}{3} \tau^{'}). \tag{4.45}$$

Bu çözüm (ξ, τ) değişkenleri cinsinden yazılırsa

$$U = a \ \mathrm{sech}^2 \zeta, \ \zeta = (\frac{\mu_1 a}{12\mu_2})^{1/2} (\xi + \mu_3 \int_0^\tau h_1(s) ds - \frac{\mu_1 a}{3} \tau). \tag{4.46}$$

değişken katsayılı KdV denkleminin ilerleyen dalga çözümünü verir.

Sabit katsayılı modifiye KdV denkleminin lokalize çözümü $(\xi^{'}, \tau^{'})$ değişkenleri cinsinden aşağıdaki gibi verilebilir

$$U = a \ \mathrm{sech} \zeta, \ \zeta = (\frac{\lambda_1}{6\mu_2})^{1/2} a (\xi^{'} - \frac{\lambda_1 a^2}{6} \tau^{'}). \tag{4.47}$$

Burada a dalga genliğini karakterize etmektedir. Bu çözüm (ξ, τ) değişkenleri için yazılacak olursa

$$U = a\ \mathrm{sech}\zeta,\ \zeta = (\frac{\lambda_1}{6\mu_2})^{1/2} a(\xi - \frac{4}{\lambda_\theta}\int_0^\tau h_2(s)ds - \frac{\lambda_1 a^2}{6}\tau) \tag{4.48}$$

değişken katsayılı modifiye KdV denkleminin ilerleyen lokalize çözümü elde edilir. Bu çalışmada kullanılan koordinat dönüşümü dikkate alınırsa dalga hızı $\frac{d\tau}{d\xi}$ şeklinde ifade edilebilir. Buna göre (4.46) ve (4.48)'de verilen dalgaların hızları sırasıyla

$$v_p = \frac{1}{\frac{\mu_1 a}{3} - \mu_3 h_1(\tau)} \tag{4.49}$$

$$v_p = \frac{1}{\frac{\lambda_1 a^2}{6} + \frac{4}{\lambda_\theta} h_2(\tau)} \tag{4.50}$$

şeklinde verilebilir. Sayısal incelemeler μ_3 katsayısının daima negatif olduğunu göstermektedir. Bunun bir sonucu olarak $h_1(\tau) > 0$ ve $h_2(\tau) > 0$ halleri için v_p dalga hızları azalmaktadır. Yani genişleyen tüp halinde, sabit yarıçaplı tüpe göre dalga hızı azalmakta, daralan tüp için ise hızlar artmaktadır. Fiziksel gözlemlere göre bu sonuç beklenen bir sonuçtur.

5. NONLİNEER DALGA MODÜLASYONU

5.1 Giriş

Bu bölümde içi viskoz olmayan akışkanla dolu değişken yarıçaplı ince elastik tüplerde zayıf nonlineer dalgaların genlik modülasyonu problemi ele alınacaktır. Elastik tüp ve akışkan denklemleri kullanılarak yönetici denklem olarak değişken katsayılı nonlineer Schrödinger denklemi elde edilecektir. Bunun sonunda önce standart NLS denklemine, daha sonra da değişken katsayılı NLS denklemine ilerleyen dalga çözümleri sunulacaktır. Son olarak, değişken katsayılı NLS denkleminin çözümleri kullanılarak, dalga hızının tüp yarıçapının artması veya azalması ile değişimine yorum getirilmeye çalışılacaktır.

5.2 İçerisinde Viskoz Olmayan Akışkan Bulunan Yarıçapı Değişken İnce Elastik Tüplerde Nonlineer Dalga Modülasyonu

Bu bölümde boyutsuz yönetici denklemleri (2.41)-(2.43) ile verilen içi akışkanla dolu değişken yarıçaplı elastik tüpte zayıf nonlineer dalgaların genlik modülasyonu incelenecektir. Bu amaçla indirgeyici pertürbasyon yöntemi kullanılacaktır. İncelenen problemin doğası gereği, problemi bir sınır değer problemi olarak ele almak uygun olacaktır. Bu tür problemlerde, frekans belirlenir ve dalga sayısı dispersiyon bağıntısından elde edilr. Bu amaçla aşağıda verilen yapıda bir koordinat dönüşümünü kullanmak uygun olacaktır

$$\xi = \epsilon(z - \lambda t), \quad \tau = \epsilon^2 z. \tag{5.1}$$

Burada ϵ nonlineeritenin ve dispersiyonun mertebesini gösteren küçük bir parametre, λ ise çözümden belirlenecek bir sabittir. (5.1) ile verilen koordinat dönüşümü kullanılarak aşağıdaki diferansiyel ilişkiler elde edilir

$$\frac{\partial}{\partial z} \to \frac{\partial}{\partial z} + \epsilon\frac{\partial}{\partial \xi} + \epsilon^2\frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial t} - \epsilon\lambda\frac{\partial}{\partial \xi}. \tag{5.2}$$

z 'yi τ cinsinden çözüp $f(z)$ fonkiyonun ifadesinde yazarsak

$$f(z) = h(\epsilon, \tau) \tag{5.3}$$

elde ederiz. $h(\epsilon, \tau)$ fonksiyonunun ve alan değişkenleri olan u, w ve p'nin aşağıdaki formda asimptotik seriye açılabileceği varsayılacaktır

$$h(\epsilon, \tau) = \epsilon h_1(\tau) + \epsilon^2 h_2(\tau) + ...,$$

$$u = \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \epsilon^3 u_3 + ...,$$

$$w = \epsilon w_1 + \epsilon^2 w_2 + \epsilon^3 w_3 + ...,$$

$$p = p_0 + \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_2 + \epsilon^3 p_3 + ... \,. \tag{5.4}$$

Burada $u_1, ..., p_3$ (z, t) hızlı değişkenleri ve (ξ, τ) yavaş değişkenlerinin birer fonksiyonudurlar. (5.2) ve (5.4) ilişkileri (2.42)-(2.43) ile verilmiş olan akışkana ait alan denklemlerinde kullanılır ve elde edilen denklem sistemi ϵ'nun çeşitli mertebelerinden kuvvetlerini içerecek biçimde düzenlenirse aşağıdaki diferansiyel denklem takımları elde edilir.

$O(\epsilon)$ mertebesinden denklemler :

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\lambda_\theta}{2}\frac{\partial w_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial z} = 0. \tag{5.5}$$

$O(\epsilon^2)$ mertebesinden denklemler :

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\lambda_\theta}{2}\frac{\partial w_2}{\partial z} - \lambda\frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\lambda_\theta}{2}\frac{\partial w_1}{\partial \xi} + \frac{(u_1 + h_1)}{2}\frac{\partial w_1}{\partial z} + w_1\frac{\partial (u_1 + h_1)}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial \tau} + \frac{\partial p_2}{\partial z} - \lambda\frac{\partial w_1}{\partial \xi} + \frac{\partial p_1}{\partial \xi} + w_1\frac{\partial w_1}{\partial \xi} = 0. \tag{5.6}$$

$O(\epsilon^3)$ mertebesinden denklemler :

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + \frac{\lambda_\theta}{2}\frac{\partial w_3}{\partial z} - \lambda\frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \frac{\lambda_\theta}{2}\frac{\partial w_2}{\partial \xi} + \frac{(u_1 + h_1)}{2}\frac{\partial w_2}{\partial z} + w_1\frac{\partial u_2}{\partial z}$$

$$+\frac{\lambda_\theta}{2}\frac{\partial w_1}{\partial \tau} + w_2\frac{\partial u_1}{\partial z} + w_1\frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{(u_1 + h_1)}{2}\frac{\partial w_1}{\partial \xi} + \frac{(u_2 + h_2)}{2}\frac{\partial w_1}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial w_3}{\partial \tau} + \frac{\partial p_3}{\partial z} - \lambda\frac{\partial w_2}{\partial \xi} + \frac{\partial p_2}{\partial \xi} + w_1\frac{\partial w_2}{\partial z} + \frac{\partial p_1}{\partial \tau} + w_2\frac{\partial w_1}{\partial z} + w_1\frac{\partial w_1}{\partial \xi} = 0. \tag{5.7}$$

Bu denklemlerdeki p_1, p_2 ve p_3 fonksiyonları radyal yerdeğiştirme denklemi olan (2.43) 'den elde edilecektir. (5.1) dönüşümü ve (5.4) açılımı (2.43) denkleminde yerine konulursa, basıç terimleri aşağıdaki şekilde elde edilir

$$p_0 = \beta_0, \quad p_1 = \beta_1(u_1 + h_1) + \frac{m}{\lambda_z\lambda_\theta}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \lambda_z\alpha_0\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2},$$

$$p_2=\beta_2(u_1+h_1)^2+\beta_1(u_2+h_2)+\frac{m}{\lambda_\theta\lambda_z}(\frac{\partial^2u_2}{\partial t^2}-2\lambda\frac{\partial^2u_1}{\partial t\partial\xi})-\frac{1}{2}\lambda_z\alpha_1(\frac{\partial u_1}{\partial z})^2$$

$$-\frac{m}{\lambda_z\lambda_\theta^2}(u_1+h_1)\frac{\partial^2u_1}{\partial t^2}-\lambda_z\alpha_0(\frac{\partial^2u_2}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2u_1}{\partial z\partial\xi})-\lambda_z(\alpha_1-\frac{\alpha_0}{\lambda_\theta})(u_1+h_1)\frac{\partial^2u_1}{\partial z^2},$$

$$p_3=\beta_3(u_1+h_1)^3+2\beta_2(u_1+h_1)(u_2+h_2)+\beta_1(u_3+h_3)$$

$$-\lambda_z\alpha_0(\frac{\partial^2u_3}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2u_2}{\partial z\partial\xi}+2\frac{\partial^2u_1}{\partial z\partial\tau})-\lambda_z(\alpha_1-\frac{\alpha_0}{\lambda_\theta})(u_1+h_1)(\frac{\partial^2u_2}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2u_1}{\partial z\partial\xi})$$

$$-\frac{m}{\lambda_z\lambda_\theta^2}(u_1+h_1)(\frac{\partial^2u_2}{\partial t^2}-2\lambda\frac{\partial^2u_1}{\partial t\partial\xi})-\frac{m}{\lambda_z\lambda_\theta^2}\left[(u_2+h_2)-\frac{(u_1+h_1)^2}{\lambda_\theta}\right]\frac{\partial^2u_1}{\partial t^2}$$

$$-\lambda_z(\alpha_1-\frac{\alpha_0}{\lambda_\theta})(u_2+h_2)\frac{\partial^2u_1}{\partial z^2}-\lambda_z(\alpha_3-\frac{\alpha_1}{\lambda_\theta}+\frac{\alpha_0}{\lambda_\theta^2})(u_1+h_1)^2\frac{\partial^2u_1}{\partial z^2}$$

$$-\lambda_z(\alpha_3-\frac{\alpha_1}{2\lambda_\theta})(u_1+h_1)(\frac{\partial u_1}{\partial z})^2-3\lambda_z(\alpha_2-\frac{\alpha_0}{2})(\frac{\partial u_1}{\partial z})^2\frac{\partial^2u_1}{\partial z^2}-\lambda_z\alpha_0\frac{\partial^2u_1}{\partial\xi^2}$$

$$+\frac{m}{\lambda_z\lambda_\theta}(\frac{\partial^2u_3}{\partial t^2}-2\lambda\frac{\partial^2u_2}{\partial t\partial\xi}+\lambda^2\frac{\partial^2u_1}{\partial\xi^2})-\lambda_z\alpha_1(\frac{\partial u_1}{\partial\xi}+\frac{\partial u_2}{\partial z})\frac{\partial u_1}{\partial z}.\qquad(5.8)$$

Bu ilişkiler elde edilirken aşağıdaki açılımlar kullanılmıştır

$$\lambda_1=\lambda_z\left[1+\epsilon^2\frac{1}{2}(\frac{\partial u_1}{\partial z})^2+\epsilon^3(\frac{\partial u_1}{\partial z})(\frac{\partial u_2}{\partial z}+\frac{\partial u_1}{\partial\xi})\right]+...,$$

$$\lambda_2=\lambda_\theta+\epsilon(u_1+h_1)+\epsilon^2(u_2+h_2)+\epsilon^3(u_3+h_3)+...,$$

$$(\lambda_\theta+f+u)^{-1}=\frac{1}{\lambda_\theta}-\epsilon\frac{(u_1+h_1)}{\lambda_\theta^2}+\epsilon^2[\frac{(u_1+h_1)^2}{\lambda_\theta^3}-\frac{(u_2+h_2)}{\lambda_\theta^2}]$$

$$+\epsilon^3[-\frac{(u_1+h_1)^3}{\lambda_\theta^4}+\frac{2}{\lambda_\theta^3}(u_1+h_1)(u_2+h_2)-\frac{(u_3+h_3)}{\lambda_\theta^2}]+...,$$

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial\lambda_1}=\lambda_\theta\lambda_z\{\alpha_0+\epsilon\alpha_1(u_1+h_1)+\epsilon^2[\alpha_2(\frac{\partial u_1}{\partial z})^2+\alpha_1(u_2+h_2)$$

$$+\alpha_3(u_1+h_1)^2]+\epsilon^3[2\alpha_2(\frac{\partial u_1}{\partial z})(\frac{\partial u_2}{\partial z}+\frac{\partial u_1}{\partial\xi})+2\alpha_3(u_1+h_1)(u_2+h_2)$$

$$+\alpha_1(u_3+h_3)+\alpha_4(u_1+h_1)(\frac{\partial u_1}{\partial z})^2+\alpha_5(u_1+h_1)^3]\}+...,$$

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial\lambda_2}=\lambda_\theta\lambda_z\{\beta_0+\epsilon\bar{\beta}_1(u_1+h_1)+\epsilon^2[\bar{\beta}_2(u_1+h_1)^2+\bar{\beta}_1(u_2+h_2)$$

$$+\frac{\lambda_z}{2}\alpha_1(\frac{\partial u_1}{\partial z})^2]+\epsilon^3[\bar{\beta}_3(u_1+h_1)^3+2\bar{\beta}_2(u_1+h_1)(u_2+h_2)+\bar{\beta}_1(u_3+h_3)$$

$$+\lambda_z\alpha_3(u_1+h_1)(\frac{\partial u_1}{\partial\xi})^2+\lambda_z\alpha_1(\frac{\partial u_1}{\partial z})(\frac{\partial u_2}{\partial z}+\frac{\partial u_1}{\partial\xi})]\}+....\qquad(5.9)$$

Burada

$$\beta_1 = \bar{\beta}_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta}, \quad \beta_2 = \bar{\beta}_2 - \frac{\beta_1}{\lambda_\theta}, \quad \beta_3 = \bar{\beta}_3 - \frac{\beta_2}{\lambda_\theta}, \tag{5.10}$$

olarak tanımlanmıştır. $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \bar{\beta}_0, \bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2$ ve $\bar{\beta}_3$ katsayıları ise aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır

$$\alpha_0 = \frac{1}{\lambda_\theta\lambda_z}\frac{\partial\Sigma}{\partial\lambda_z}|_{u=0}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{\lambda_\theta\lambda_z}\frac{\partial^2\Sigma}{\partial\lambda_z\partial\lambda_\theta}|_{u=0}, \alpha_2 = \frac{1}{2\lambda_\theta}\frac{\partial^2\Sigma}{\partial\lambda_z^2}|_{u=0},$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2\lambda_\theta\lambda_z}\frac{\partial^3\Sigma}{\partial\lambda_z\partial\lambda_\theta^2}|_{u=0}, \quad \alpha_4 = \frac{1}{2\lambda_\theta}\frac{\partial^3\Sigma}{\partial\lambda_z^2\partial\lambda_\theta}|_{u=0},$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{6\lambda_\theta\lambda_z}\frac{\partial^4\Sigma}{\partial\lambda_z\partial\lambda_\theta^3}|_{u=0}, \ \beta_0 = \frac{1}{\lambda_\theta\lambda_z}\frac{\partial\Sigma}{\partial\lambda_\theta}|_{u=0}, \quad \bar{\beta}_1 = \frac{1}{\lambda_\theta\lambda_z}\frac{\partial^2\Sigma}{\partial\lambda_\theta^2}|_{u=0},$$

$$\bar{\beta}_2 = \frac{1}{2\lambda_\theta\lambda_z}\frac{\partial^3\Sigma}{\partial\lambda_\theta^3}|_{u=0}, \ \bar{\beta}_3 = \frac{1}{6}\frac{\partial^4\Sigma}{\partial\lambda_\theta^4}|_{u=0}. \tag{5.11}$$

Alan Denklemlerinin Çözümleri

Bu bölümde (5.5)-(5.7) ve (5.8) ile verilen alan denklemlerine çözüm aranacaktır.

$O(\epsilon)$ mertebesinden denklemlerin çözümü :

(5.5) ve $(5.8)_1$ denklemlerinin formu incelenecek olursa, bu denklemlere aşağıdaki biçimde bir çözüm önermenin uygun olacağı görülür

$$u_1 = U_0(\xi,\tau) + \{U(\xi,\tau)e^{i(\omega t - kz)} + k.e.\},$$

$$w_1 = W_0(\xi,\tau) + \{W_1^{(1)}(\xi,\tau)e^{i(\omega t - kz)} + k.e.\},$$

$$p_1 = P_0(\xi,\tau) + \{P_1^{(1)}(\xi,\tau)e^{i(\omega t - kz)} + k.e.\}. \tag{5.12}$$

Burada k dalga sayısını, ω açısal frekansı, U_0, ..., $P_1^{(1)}$ denklemlerin çözümü sonucunda elde edilecek olan bilinmeyen fonksiyonları göstermektedir. Yukarıdaki öneride yer alan $k.e.$ kısaltması ile ilgili ifadenin karmaşık eşleniği gösterilmiştir. (5.12) çözüm önerisi, $(5.8)_1$ basınç denkleminde kullanılırsa aşağıdaki ifadeler elde edilir

$$P_0 = \beta_1(U_0 + h_1),$$

$$P_1^{(1)} = (-\frac{m\omega^2}{\lambda_\theta\lambda_z} + \alpha_0\lambda_z k^2 + \beta_1)U. \tag{5.13}$$

(5.12) çözüm önerisi (5.5) denkleminde yerine konursa aşağıdaki ifadelere ulaşılır

$$W_1^{(1)} = \frac{2\omega}{\lambda_\theta k}U, \quad P_1^{(1)} = \frac{2\omega^2}{\lambda_\theta k^2}U. \tag{5.14}$$

Bu ifadeler

$$\omega^2(2 + \frac{mk^2}{\lambda_z}) - \alpha_0\lambda_\theta\lambda_z k^4 - \beta_1\lambda_\theta k^2 = 0 \tag{5.15}$$

dispersiyon bağıntısı sağlanmak koşuluyla geçerlidir.

$O(\epsilon^2)$ mertebesinden denklemlerin çözümü :

Bu mertebeden denklemlerin yapısı incelenecek olursa, aşağıdaki biçimde bir çözüm önermenin uygun olduğu görülecektir

$$u_2 = U_2^{(0)} + \{\sum_{l=1}^{2} U_2^{(l)} \mathrm{e}^{il(\omega t - kz)} + k.e.\},$$

$$w_2 = W_2^{(0)} + \{\sum_{l=1}^{2} W_2^{(l)} \mathrm{e}^{il(\omega t - kz)} + k.e.\},$$

$$p_2 = P_2^{(0)} + \{\sum_{l=1}^{2} P_2^{(l)} \mathrm{e}^{il(\omega t - kz)} + k.e.\}. \tag{5.16}$$

Burada $U_2^{(0)}$, ... , $P_2^{(l)}$, (ξ, τ) yavaş değişkenlerine bağlı bilinmeyen fonksiyonlardır. (5.16) çözüm önerisini $(5.8)_2$ denkleminde kullanılır ve (5.15) ile verilen dispersiyon bağıntısı göz önünde bulundurulursa aşağıdaki ifadeler elde edilir

$$P_2^{(0)} = \beta_2(U_0 + h_1)^2 + \beta_1(U_2^{(0)} + h_2) + [2(\beta_2 + \frac{\beta_1}{\lambda_\theta}) - \frac{4\omega^2}{\lambda_\theta^2 k^2} + \alpha_1\lambda_z k^2]|U|^2 \tag{5.17}$$

$$\begin{aligned} P_2^{(1)} &= \frac{2\omega^2}{\lambda_\theta k^2}U_2^{(1)} + 2i(\alpha_0\lambda_z k - \frac{m\omega\lambda}{\lambda_\theta\lambda_z})\frac{\partial U}{\partial \xi} \\ &+ [2\beta_2 + \frac{\beta_1}{\lambda_\theta} - \frac{2\omega^2}{\lambda_\theta^2 k^2} + \alpha_1\lambda_z k^2](U_0 + h_1)U \end{aligned} \tag{5.18}$$

$$P_2^{(2)} = [\frac{8\omega^2}{\lambda_\theta k^2} - 3\beta_1]U_2^{(2)} + [\beta_2 + \frac{\beta_1}{\lambda_\theta} + \frac{3\alpha_1\lambda_z k^2}{2} - \frac{2\omega^2}{\lambda_\theta^2 k^2}]U^2. \tag{5.19}$$

(5.12) ve (5.16) çözüm önerileri (5.6) denklemlerinde yerine yazılırsa aşağıdaki denklemlere ulaşılır

$$-\lambda\frac{\partial U_0}{\partial \xi} + \frac{\lambda_\theta}{2}\frac{\partial W_0}{\partial \xi} = 0, \quad -\lambda\frac{\partial W_0}{\partial \xi} + \frac{\partial P_0}{\partial \xi} = 0 \tag{5.20}$$

$$\omega U_2^{(1)} - \frac{\lambda_\theta k}{2} W_2^{(1)} + i(\lambda - \frac{\omega}{k})\frac{\partial U}{\partial \xi} - [\frac{\omega}{\lambda_\theta}(U_0 + h_1) + kW_0]U = 0$$

$$\omega W_2^{(1)} - kP_2^{(1)} - i\frac{2\omega}{\lambda_\theta k}(\frac{\omega}{k} - \lambda)\frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{2\omega}{\lambda_\theta} W_0 U = 0 \qquad (5.21)$$

$$2\omega U_2^{(2)} - \lambda_\theta k W_2^{(2)} - \frac{3\omega}{\lambda_\theta} U^2 = 0$$

$$\omega W_2^{(2)} - kP_2^{(2)} - \frac{2\omega^2}{\lambda_\theta^2 k} U^2 = 0. \qquad (5.22)$$

(5.20) denklemlerinin $(5.13)_1$ ile beraber çözümünden aşağıdaki eşitlikler elde edilir

$$W_0 = \frac{2\lambda}{\lambda_\theta} U_0 + C(\tau), \quad \left[\beta_1 - \frac{2\lambda^2}{\lambda_\theta}\right]\frac{\partial U_0}{\partial \xi} = 0. \qquad (5.23)$$

Burada $C(\tau), \tau$ değişkeninin bir fonksiyonudur.İlk olarak $\partial U_0/\partial \xi$ büyüklüğünün sıfırdan farklı olduğu durumu inceleyelim. Bu durumda $\lambda^2 - (\lambda_\theta \beta_1/2) = 0$ ve $U = 0$ olmalıdır. Bunun sonucu olarak aşağıdaki ifadelere ulaşılır

$$W_2^{(1)} = \frac{2\omega}{\lambda_\theta k} U_2^{(1)}, \quad P_2^{(1)} = \frac{2\omega^2}{\lambda_\theta k^2} U_2^{(1)}, \quad U_2^{(2)} = W_2^{(2)} = P_2^{(2)} = 0. \qquad (5.24)$$

$O(\epsilon^3)$ denklemler ise aşağıdaki şekilde verilir

$$-\lambda\frac{\partial U_2^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\lambda_\theta}{2}\frac{\partial W_2^{(0)}}{\partial \xi} + \lambda\frac{\partial U_0}{\partial \tau} + \frac{\lambda_\theta}{2}\frac{dC(\tau)}{d\tau} + \frac{3\lambda}{\lambda_\theta} U_0 \frac{\partial U_0}{\partial \xi}$$

$$+(\frac{\lambda}{\lambda_\theta} h_1(\tau) + C(\tau))\frac{\partial U_0}{\partial \xi} = 0$$

$$\frac{\partial P_2^{(0)}}{\partial \xi} - \lambda\frac{\partial W_2^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{4\lambda^2}{\lambda_\theta^2} U_0 \frac{\partial U_0}{\partial \xi} + \beta_1\frac{\partial U_0}{\partial \tau} + \frac{2\lambda}{\lambda_\theta} C(\tau)\frac{\partial U_0}{\partial \xi} + \beta_1 \frac{dh_1(\tau)}{d\tau}. \qquad (5.25)$$

$P_2^{(0)}$ büyüklüğü ise

$$P_2^{(0)} = \beta_1(U_2^{(0)} + h_2) + \beta_2(U_0 + h_1)^2 \qquad (5.26)$$

olarak verilir. Bu ifade kullanılır ve (5.25) denklemlerinden $W_2^{(1)}$ yok edilirse aşağıdaki evolüsyon denklemi elde edilir

$$\frac{\partial U_0}{\partial \tau} + (\frac{\beta_2}{\beta_1} + \frac{5}{2\lambda_\theta})U_0\frac{\partial U_0}{\partial \xi} + (\frac{\beta_2}{\beta_1} - \frac{3}{2\lambda_\theta})h_1\frac{\partial U_0}{\partial \xi} = 0. \qquad (5.27)$$

Burada evolüsyon denklemindeki sabit terimi yok edebilmek için $C(\tau)$ fonksiyonu $C(\tau) = -(\beta_1/\lambda)h_1(\tau)$ olarak seçilmiştir. Elde edilen bu denklem değişken katsayılı KdV denkleminin dejenere bir formu olarak değerlendirilebilir.

Diğer durum da, $\beta_1 - 2\lambda^2/\lambda_\theta \neq 0$ olmasıdır. Bu durumda, U_0, τ'nun keyfi bir fonksiyonu olur ve $C(\tau)$ keyfi fonksiyonu sıfır alınabilir. Böylece çözüm aşağıdaki şekilde elde edilir

$$W_0 = \frac{2\lambda}{\lambda_\theta} U_0(\tau), \quad P_0 = \beta_1(U_0(\tau) + h_1(\tau)). \tag{5.28}$$

(5.18) denklemi ile verilen $P_2^{(1)}$ ifadesi (5.21) denklemlerinde yerine konur ve bu denklemler arasından $W_2^{(1)}$ yok edilirse

$$i[2\omega(\frac{\omega}{k} - \lambda) + \lambda_\theta k^2(\alpha_0\lambda_z k - \frac{m\omega\lambda}{\lambda_\theta\lambda_z})]\frac{\partial U}{\partial \xi} + \{[\frac{4k\lambda\omega}{\lambda_\theta}$$

$$+(\lambda_\theta\beta_2 + \beta_1/2)k^2 + \frac{\alpha_1\lambda_\theta\lambda_z k^4}{2}]U_0 + [(\lambda_\theta\beta_2 + \beta_1/2)k^2 + \frac{\alpha_1\lambda_\theta\lambda_z k^4}{2}]h_1\}U = 0 \tag{5.29}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde $\partial U/\partial\xi$'nin katsayısı imajiner, U'nun katsayısı ise reeldir. Bu durumda, sıfırdan farklı çözümün varolabilmesi için bu katsayıların sıfıra eşit olması gerekir. O zaman aşağıdaki denklemler elde edilir

$$2\omega(\frac{\omega}{k} - \lambda) + \lambda_\theta k^2(\alpha_0\lambda_z k - \frac{m\lambda\omega}{\lambda_\theta\lambda_z}) = 0,$$

$$[\frac{4\lambda\omega k}{\lambda_\theta} + (\lambda_\theta\beta_2 + \beta_1/2)k^2 + \frac{\alpha_1\lambda_\theta\lambda_z k^4}{2}]U_0$$

$$+[(\lambda_\theta\beta_2 + \beta_1/2)k^2 + \frac{\alpha_1\lambda_\theta\lambda_z k^4}{2}]h_1 = 0. \tag{5.30}$$

$(5.30)_1$ denkleminin çözümünden λ parametresi grup hızına eşit ve aşağıdaki biçimde elde edilir

$$\lambda = \frac{2\omega^2 + \alpha_0\lambda_\theta\lambda_z k^4}{\omega k(2 + mk^2/\lambda_z)}. \tag{5.31}$$

$(5.30)_2$ denkleminin çözümünden ise

$$U_0 = \Theta h_1(\tau), \quad \Theta = -\frac{[(\lambda_\theta\beta_2 + \beta_1/2)k^2 + \frac{\alpha_1\lambda_\theta\lambda_z k^4}{2}]}{[\frac{4\lambda\omega k}{\lambda_\theta} + (\lambda_\theta\beta_2 + \beta_1/2)k^2 + \frac{\alpha_1\lambda_\theta\lambda_z k^4}{2}]} \tag{5.32}$$

bulunur. Bu halde (5.21) denklemlerinin çözümünden ise aşağıdaki eşitliklere ulaşılır

$$W_2^{(1)} = \frac{2\omega}{\lambda_\theta k}U_2^{(1)} - \frac{2i}{\lambda_\theta k}(\frac{\omega}{k} - \lambda)\frac{\partial U}{\partial\xi} - \frac{2}{\lambda_\theta^2}[(\frac{\omega}{k} + 2\lambda)\Theta + \frac{\omega}{k}]h_1 U,$$

$$P_2^{(1)} = \frac{2\omega^2}{\lambda_\theta k^2}U_2^{(1)} - \frac{4i\omega}{\lambda_\theta k^2}(\frac{\omega}{k} - \lambda)\frac{\partial U}{\partial\xi} - \frac{2\omega}{\lambda_\theta^2 k}[(\frac{\omega}{k} + 4\lambda)\Theta + \frac{\omega}{k}]h_1 U. \tag{5.33}$$

(5.19) ve (5.22) denklemlerinin çözümünden

$$U_2^{(2)} = \frac{[3\omega^2/\lambda_\theta + (\lambda_\theta\beta_2 + \beta_1)k^2 + \frac{3\alpha_1\lambda_\theta\lambda_z k^4}{2}]}{3[\lambda_\theta\beta_1 k^2 - 2\omega^2]}U^2, \; W_2^{(2)} = \frac{2\omega}{\lambda_\theta k}U_2^{(2)} - \frac{3\omega}{\lambda_\theta^2 k}U^2 \quad (5.34)$$

elde edilir.

$O(\epsilon^3)$ mertebesinden denklemlerin çözümü :

Bu mertebeden denklemlerin çözümü için aşağıdaki biçimde çözüm önermek uygun olacaktır

$$u_3 = U_3^{(0)} + \{\sum_{l=1}^{3} U_3^{(l)} \mathrm{e}^{il(\omega t - kz)} + k.e.\},$$

$$w_3 = W_3^{(0)} + \{\sum_{l=1}^{3} W_3^{(l)} \mathrm{e}^{il(\omega t - kz)} + k.e.\},$$

$$p_3 = P_3^{(0)} + \{\sum_{l=1}^{3} P_3^{(l)} \mathrm{e}^{il(\omega t - kz)} + k.e.\}. \quad (5.35)$$

Burada $U_3^{(0)}$, ... , $P_3^{(l)}$, (ξ, τ) yavaş değişkenlerine bağlı bilinmeyen fonksiyonlardır. Bilinmeyen fonksiyonları belirleyebilmek için, sıfırıncı ve birinci moddan denklemler yeterli olacaktır. (5.35) çözüm önerisi $(5.8)_3$ denkleminde kullanılarak $P_3^{(1)}$ büyüklüğü aşağıdaki biçimde elde edilir

$$P_3^{(1)} = \frac{2\omega^2}{\lambda_\theta k^2}U_3^{(1)} + 2i\alpha_0\lambda_z k\frac{\partial U}{\partial \tau} + 2i(\alpha_0\lambda_z k - \frac{m\lambda\omega}{\lambda_\theta\lambda_z})\frac{\partial U_2^{(1)}}{\partial \xi}$$

$$+(\frac{m\lambda^2}{\lambda_\theta\lambda_z} - \alpha_0\lambda_z)\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + [2\beta_2 + 5\beta_1/\lambda_\theta + 3\alpha_1\lambda_z k^2 - \frac{10\omega^2}{\lambda_\theta^2 k^2}]U_2^{(2)}U^*$$

$$+[2\beta_2 + \beta_1/\lambda_\theta + \alpha_1\lambda_z k^2 - \frac{2\omega^2}{\lambda_\theta^2 k^2}](U_2^{(0)} + h_2)U$$

$$+[3(\beta_3 - \beta_1/\lambda_\theta^2) + \lambda_z k^2(2\alpha_3 - \frac{5\alpha_1}{2\lambda_\theta}) + 3\lambda_z k^4(\alpha_2 - \frac{\alpha_0}{2}) - \frac{6\omega^2}{\lambda_\theta^3 k^2}]|U|^2 U$$

$$+[2\beta_2 + \beta_1/\lambda_\theta + \alpha_1\lambda_z k^2 - \frac{2\omega^2}{\lambda_\theta^2 k^2}](\Theta + 1)h_1 U_2^{(1)}$$

$$+2i[\frac{m\lambda\omega}{\lambda_\theta^2\lambda_z} + \lambda_z k(\alpha_1 - \frac{\alpha_0}{\lambda_\theta})](\Theta + 1)h_1\frac{\partial U}{\partial \xi}$$

$$+[3\beta_3 - \beta_1/\lambda_\theta^2 + \lambda_z k^2(\alpha_3 - \frac{\alpha_1}{\lambda_\theta}) + \frac{2\omega^2}{\lambda_\theta^3 k^2}](\Theta + 1)^2 h_1^2 U. \quad (5.36)$$

(5.35) çözüm önerisi (5.7) denklemlerinde kullanılır ve elde edilen diğer eşitliklerde yerine konursa aşağıdaki denklem takımına ulaşılır

$$-\lambda\frac{\partial U_2^{(0)}}{\partial\xi}+\frac{\lambda_\theta}{2}\frac{\partial W_2^{(0)}}{\partial\xi}+\frac{1}{\lambda_\theta}(\frac{4\omega}{k}-\lambda)\frac{\partial}{\partial\xi}|U|^2+\lambda\Theta\frac{\partial h_1}{\partial\tau}$$

$$+\frac{2i}{\lambda_\theta^2}[(\omega+2\lambda k)\Theta+\omega]|U|^2(h_1^*-h_1)=0,$$

$$\frac{\partial P_2^{(0)}}{\partial\xi}-\lambda\frac{\partial W_2^{(0)}}{\partial\xi}+\frac{4\omega^2}{\lambda_\theta^2k^2}\frac{\partial}{\partial\xi}|U|^2+\beta_1(\Theta+1)\frac{\partial h_1}{\partial\tau}=0,$$

$$P_2^{(0)}=\beta_2(\Theta+1)^2h_1^2+\beta_1(U_2^{(0)}+h_2)+[2(\beta_2+\frac{\beta_1}{\lambda_\theta})-\frac{4\omega^2}{\lambda_\theta^2k^2}+\alpha_1\lambda_z k^2]|U|^2. \quad (5.37)$$

$$i\omega U_3^{(1)}-\frac{ik\lambda_\theta}{2}W_3^{(1)}+\frac{\omega}{k}\frac{\partial U}{\partial\tau}+(\frac{\omega}{k}-\lambda)\frac{\partial U_2^{(1)}}{\partial\xi}-\frac{i}{k}(\frac{\omega}{k}-\lambda)\frac{\partial^2U}{\partial\xi^2}$$

$$-\frac{3i\omega}{\lambda_\theta}U_2^{(2)}U^*-ikW_2^{(0)}U-\frac{i\omega}{\lambda_\theta}(U_2^{(0)}+h_2)U-\frac{1}{\lambda_\theta}(\frac{\omega}{k}-\lambda)(\Theta+1)h_1\frac{\partial U}{\partial\xi}$$

$$-i[(\frac{2\lambda k}{\lambda_\theta}+\frac{\omega}{\lambda_\theta})\Theta+\frac{\omega}{\lambda_\theta}]h_1U_2^{(1)}+\frac{i}{\lambda_\theta}[(\frac{\omega}{\lambda_\theta}+\frac{2\lambda k}{\lambda_\theta})\Theta+\frac{\omega}{\lambda_\theta}](\Theta+1)h_1^2U=0,$$

$$i\omega W_3^{(1)}-ikP_3^{(1)}+\frac{2\omega}{\lambda_\theta k}(\frac{\omega}{k}-\lambda)\frac{\partial U_2^{(1)}}{\partial\xi}+\frac{2\omega^2}{\lambda_\theta k^2}\frac{\partial U}{\partial\tau}$$

$$-\frac{2i}{\lambda_\theta k}(\frac{2\omega}{k}-\lambda)(\frac{\omega}{k}-\lambda)\frac{\partial^2U}{\partial\xi^2}-\frac{2i\omega}{\lambda_\theta}W_2^{(0)}U-\frac{4i\omega^2}{\lambda_\theta^2k}U_2^{(2)}U^*+\frac{6i\omega^2}{\lambda_\theta^3k}|U|^2U$$

$$-\frac{4i\lambda\omega}{\lambda_\theta^2}\Theta h_1U_2^{(1)}-\frac{2}{\lambda_\theta^2}(\frac{\omega}{k}-\lambda)[(\frac{\omega}{k}+4\lambda)\Theta+\frac{\omega}{k}]h_1\frac{\partial U}{\partial\xi}$$

$$\frac{4i\lambda}{\lambda_\theta^2}[(\frac{\omega}{\lambda_\theta}+\frac{2\lambda k}{\lambda_\theta})\Theta+\frac{\omega}{\lambda_\theta}]\Theta h_1^2U=0. \quad (5.38)$$

Eğer $h_1(\tau)$ fonksiyonunu reel fonksiyon olarak alırsak (5.37) denklem takımının çözümünden aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz

$$U_2^{(0)}=\frac{\frac{1}{\lambda_\theta}[-\lambda^2+4\lambda\frac{\omega}{k}+\lambda_\theta^2(\beta_2+\beta_1/\lambda_\theta)+\frac{\alpha_1\lambda_\theta^2\lambda_z k^2}{2}]}{[\lambda^2-\lambda_\theta\beta_1/2]}|U|^2+\frac{(\beta_1\lambda_\theta/2)h_2}{[\lambda_2-\beta_1\lambda_\theta/2]}$$

$$+\frac{[\beta_2\lambda_\theta/2]}{[\lambda_2-\beta_1\lambda_\theta/2]}(\Theta+1)^2h_1^2+\frac{[\frac{\beta_1\lambda_\theta}{2}(\Theta+1)+\lambda^2\Theta]}{[\lambda_2-\beta_1\lambda_\theta/2]}\frac{\partial h_1}{\partial\tau}\xi,$$

$$W_2^{(0)}=\frac{2\lambda}{\lambda_\theta}U_2^{(0)}-\frac{2}{\lambda_\theta^2}(\frac{4\omega}{k}-\lambda)|U|^2-\frac{2\lambda}{\lambda_\theta}\Theta\frac{\partial h_1}{\partial\tau}\xi. \quad (5.39)$$

(5.38) ile verilen denklemler arasından $U_3^{(1)}$, $W_3^{(1)}$ ve $P_3^{(1)}$ büyüklükleri yok edilirse ve (5.39) denklemiyle verilen $U_2^{(0)}$ ve $W_2^{(0)}$ büyüklükleri kullanılırsa U'yu yöneten denklem olarak aşağıdaki değişken katsayılı nonlineer Schrödinger denklemi elde edilir

$$i\frac{\partial U}{\partial \tau}+\mu_1\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}+\mu_2|U|^2U+i\mu_3 h_1(\tau)\frac{\partial U}{\partial \xi}+[\mu_4 h_1^2(\tau)+\mu_5 h_2(\tau)$$

$$+\mu_6\frac{dh_1(\tau)}{d\tau}\xi]U=0. \tag{5.40}$$

Burada μ_1, ... ,μ_6 katsayıları aşağıdaki gibi tanımlanmıştır

$$\mu_1=\frac{[(\frac{3\omega}{k}-\lambda)(\frac{\omega}{k}-\lambda)+\frac{m\lambda^2k^2}{2\lambda_z}-\frac{\alpha_0\lambda_z\lambda_\theta k^2}{2}]}{[\alpha_0\lambda_\theta\lambda_z k^3+2\omega^2/k]},$$

$$\mu_2=[\alpha_0\lambda_\theta\lambda_z k^3+2\omega^2/k]^{-1}\{\frac{-16\omega^2}{\lambda_\theta^2}+\frac{4\lambda\omega k}{\lambda_\theta^2}+\frac{3k^2}{2}(\lambda_\theta\beta_3-\beta_1/\lambda_\theta)$$

$$+\lambda_\theta\lambda_z k^4(\alpha_3-\frac{5\alpha_1}{4\lambda_\theta})+\frac{3\lambda_\theta\lambda_z k^6}{2}(\alpha_2-\alpha_0/2)+[\beta_2\lambda_\theta k^2+\frac{5}{2}\beta_1 k^2$$

$$+\frac{3}{2}\alpha_1\lambda_\theta\lambda_z k^4]\left[\frac{\frac{3\omega^2}{\lambda_\theta}+(\lambda_\theta\beta_2+\beta_1)k^2+\frac{3\alpha_1\lambda_\theta\lambda_z k^4}{2}}{3[\lambda_\theta\beta_1k^2-2\omega^2]}\right]$$

$$+\frac{[-\lambda^2+4\lambda\frac{\omega}{k}+\lambda_\theta^2(\beta_2+\beta_1/\lambda_\theta)+\frac{\alpha_1\lambda_\theta^2\lambda_z k^2}{2}]}{\lambda_\theta[\lambda^2-\lambda_\theta\beta_1/2]}$$

$$\mathrm{x}[\beta_2\lambda_\theta k^2+\beta_1 k/2+\frac{\alpha_1\lambda_\theta\lambda_z k^4}{2}+\frac{4\lambda\omega k}{\lambda_\theta}]\},$$

$$\mu_3=[\alpha_0\lambda_\theta\lambda_z k^3+2\omega^2/k]^{-1}\{[\frac{m\lambda\omega k^2}{\lambda_\theta\lambda_z}+\lambda_\theta\lambda_z k^3(\alpha_1-\alpha_0/\lambda_\theta)](\Theta+1)$$

$$-(\frac{\omega}{k}-\lambda)[(\frac{2\omega}{\lambda_\theta}+\frac{4\lambda k}{\lambda_\theta})\Theta+\frac{2\omega}{\lambda_\theta}]\},$$

$$\mu_4=[\alpha_0\lambda_\theta\lambda_z k^3+2\omega^2/k]^{-1}\{[\beta_2\lambda_\theta k^2+\beta_1 k/2+\frac{\alpha_1\lambda_\theta\lambda_z k^4}{2}+\frac{4\lambda\omega k}{\lambda_\theta}]$$

$$\frac{[\beta_2\lambda_\theta/2]}{[\lambda^2-\beta_1\lambda_\theta/2]}(\Theta+1)^2+[\frac{3\beta_3\lambda_\theta k^2}{2}-\frac{\beta_1 k^2}{2\lambda_\theta}+\frac{\lambda_\theta\lambda_z k^4}{2}(\alpha_3-\alpha_1/\lambda_\theta)$$

$$-\left(\frac{\omega^2}{\lambda_\theta^2}+\frac{2\lambda\omega k}{\lambda_\theta^2}\right)\Theta](\Theta+1)-\frac{2\lambda k}{\lambda_\theta}[(\frac{\omega}{\lambda_\theta}+\frac{2\lambda k}{\lambda_\theta})\Theta^2+\frac{\omega}{\lambda_\theta}\Theta]\},$$

$$\mu_5=[\alpha_0\lambda_\theta\lambda_z k^3+2\omega^2/k]^{-1}\{[\beta_2\lambda_\theta k^2+\beta_1 k/2+\frac{\alpha_1\lambda_\theta\lambda_z k^4}{2}]\frac{\lambda^2}{[\lambda^2-\lambda_\theta\beta_1/2]}$$

$$+\frac{2\lambda\omega k\beta_1}{[\lambda^2-\lambda_\theta\beta_1/2]}\},$$

$$\mu_6=[\alpha_0\lambda_\theta\lambda_z k^3+2\omega^2/k]^{-1}\{[\beta_2\lambda_\theta k^2+\beta_1 k/2+\frac{\alpha_1\lambda_\theta\lambda_z k^4}{2}+\frac{4\lambda\omega k}{\lambda_\theta}]$$

$$\mathrm{x}\left[\frac{\lambda^2+(\lambda_\theta\beta_1/2)(\Theta+1)}{[\lambda^2-\lambda_\theta\beta_1/2]}\right]-\frac{4\lambda\omega k}{\lambda_\theta}\Theta\}. \tag{5.41}$$

(5.40) denkleminde yarıçap değişimini gösteren $h_1(\tau)$ ve $h_2(\tau)$ fonksiyonları sıfırlanacak olursa, evolüsyon denklemi standart NLS denklemine indirgenir

$$i\frac{\partial U}{\partial \tau} + \mu_1 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \mu_2 |U|^2 U = 0. \tag{5.42}$$

5.3 Evolüsyon Denklemlerinin İlerleyen Dalga Çözümleri

Bu alt bölümde, önce standart NLS denkleminin daha sonra ise değişken katsayılı NLS denkleminin ilerleyen dalga çözümleri verilecektir

NLS Denkleminin İlerleyen Dalga Çözümleri :

NLS denklemi dispersif ortamlarda bir boyutlu monokromatik düzlem dalgaların self modülasyonunu karakterize eden bir denklemdir. NLS denkleminin kararlı çözümleri genellikle Jakobiyen eliptik fonksiyonlar cinsinden ifade edilir ve farklı haller için karanlık ve parlak zarf solitonları, faz sıçraması ve sabit genlikli düzlem dalga çözümlerini içerir. $\mu_1\mu_2 > 0$ veya $\mu_1\mu_2 < 0$ olması, verilmiş bir başlangıç datasının NLS denklemi tarafından yönetilen asimptotik alanda uzun bir zaman sonunda nasıl yol alacağının belirlenmesi açısından önemlidir. (5.42) ile verilen NLS denklemine aşağıdaki biçimde ilerleyen dalga çözümleri önerelim

$$U(\xi,\tau) = V(\eta)\mathrm{e}^{i(K\xi - \Omega\tau)}, \quad \eta = \xi - c\tau, \quad c = \text{sabit}. \tag{5.43}$$

Burada $V(\eta)$ reel bir fonksiyon, K ve Ω sabit sayılardır. (5.43) çözüm önerisi NLS denkleminde yerine yazılırsa

$$\mu_1 \frac{d^2V}{d\eta^2} + (\Omega - \mu_1 K^2)V + \mu_2 V^3 + i(2\mu_1 K - c)\frac{dV}{d\eta} = 0 \tag{5.44}$$

adi türevli diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin reel ve imajiner kısımlarının ayrı ayrı sıfıra eşit olması için $c = 2\mu_1 K$ ve

$$\mu_1 \frac{d^2V}{d\eta^2} + (\Omega - \mu_1 K^2)V + \mu_2 V^3 = 0 \tag{5.45}$$

olmalıdır. Bu diferansiyel denklem $\frac{dV}{d\eta}$ ile çarpılıp η değişkenine göre integre edilerse aşağıdaki denkleme ulaşılır

$$\left(\frac{dV}{d\eta}\right)^2 + (\frac{\Omega}{\mu_1} - K^2)V^2 + \frac{\mu_2}{2\mu_1}V^4 = C. \tag{5.46}$$

Burada C integrasyondan gelen sabit olup V fonksiyonunun sonsuzdaki değeri ile ilgilidir. Burada iki ayrı durum incelenecektir

(i) *İncelenen dalganın lokalize olması hali :* Bu durumda $|\eta| \to \infty$ olurken V ve $\frac{dV}{d\eta} \to \infty$ olduğundan C sabiti sıfır olur. O zaman (85) denklemi aşağıdaki hali alır

$$\left(\frac{dV}{d\eta}\right)^2 + (\frac{\Omega}{\mu_1} - K^2)V^2 + \frac{\mu_2}{2\mu_1}V^4 = 0. \tag{5.47}$$

Bu denkleme $V = A\ \mathrm{sech}\beta\eta$ şeklinde bir çözüm arayalım. Bu ifadenin kendisi ve η'ya göre türevleri (5.47) denkleminde kullanılırsa aşağıdaki ifadeler elde edilir

$$\beta = (\frac{\mu_2}{2\mu_1})^{1/2}A, \quad \Omega = \mu_1 K^2 - \frac{\mu_2 A^2}{2}. \tag{5.48}$$

Bu çözüm $\mu_1\mu_2 > 0$ durumunda geçerlidir.

(ii) Eğer $|\eta| \to \infty$ olurken $|V| \to V_0$ ve $\frac{dV}{d\eta} \to 0$ ise, bu durumda $C = (\Omega/\mu_1 - K^2)V_0^2 + (\mu_2/2\mu_1)V_0^4$ olur. O zaman (5.46) denklemi

$$\left(\frac{dV}{d\eta}\right)^2 + (\frac{\Omega}{\mu_1} - K^2)(V - V_0^2) + (\frac{\mu_2}{2\mu_1})(V^2 - V_0^2) = 0 \tag{5.49}$$

bulunur. Bu denkleme $V = A\tanh\beta\eta$ şeklinde bir çözüm arayalım. Gerekli türetmeler yapılıp (5.49) denkleminde kullanılırsa

$$A = V_0, \quad \Omega = \mu_1 K^2 - \mu_2 V_0^2, \quad \beta = (\frac{-\mu_2}{2\mu_1})^{1/2}V_0 \tag{5.50}$$

bulunur. Bu çözümün geçerli olabilmesi için $\mu_1\mu_2 < 0$ sağlanmalıdır. Yukarıda sunulan çözümler, sırasıyla, zarf yalnız dalga ve faz sıçramasına karşı gelir.

(iii) Eğer $|U|$ sonsuzda U_0 sabitine yaklaşırsa Nonlineer Schrödinger denkleminin çözümü aşağıdaki şekilde verilir

$$U(\xi, \tau) = U_0 \mathrm{e}^{[i(K\xi - \Omega\tau)]}. \tag{5.51}$$

NLS Denkleminin Düzlem Dalga Çözümlerinin Kararlılığı

Bu bölümde nonlineer Schrödinger denkleminin düzlem dalga çözümünün küçük pertürbasyonlar altında kararlılığı incelenecektir. NLS denkleminin çözümü aşağıdaki formda verilebilir

$$U(\xi,\tau) = \rho(\xi,\tau)\mathrm{e}^{[i\theta(\xi,\tau)]}. \tag{5.52}$$

Bu ifadede $\rho(\xi,\tau)$ genliği ve $\theta(\xi,\tau)$ faz açısını göstermektedir. Bu çözüm NLS denkleminde yerine yazılırsa aşağıdaki diferansiyel denklemler elde edilir

$$\frac{\partial\rho}{\partial\tau} + \mu_1\left[\rho\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2} + 2\frac{\partial\rho}{\partial\xi}\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right] = 0 \tag{5.53}$$

$$\rho\frac{\partial\theta}{\partial\tau} - \mu_1\left[\frac{\partial^2\rho}{\partial\xi^2} - \rho\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right] - \frac{\mu_2}{4}\rho^3 = 0. \tag{5.54}$$

ρ ve θ fonksiyonları $\rho = \rho_0$ ve $\theta = \theta_0$ denge konumu civarında aşağıdaki şekilde seriye açılabilir

$$\rho = \rho_0 + \epsilon\rho_1 + \epsilon^2\rho_2 + ...$$

$$\theta = \theta_0 + \epsilon\theta_1 + \epsilon^2\theta_2 + ... \,. \tag{5.55}$$

(5.55) açılımları (5.53) ve (5.54) denklemlerinde yerine konur ve gerekli lineerleştirme yapılırsa ρ_1 ve θ_1 için aşağıdaki denklemlere ulaşılır

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial\tau} + \mu_1\rho_0\frac{\partial^2\theta_1}{\partial\xi^2} = 0, \tag{5.56}$$

$$\rho_0\frac{\partial\theta_1}{\partial\tau} - \mu_1\frac{\partial^2\rho_1}{\partial\xi^2} - \frac{3\mu_2}{4}\rho_0^2\rho_1 = 0. \tag{5.57}$$

(5.56) ve (5.57) denklem sistemi için aşağıdaki şekilde düzlem dalga çözümleri aranacaktır

$$(\rho_1,\theta_1) = (A,B)\mathrm{e}^{[i(K\xi-\Omega\tau)]}. \tag{5.58}$$

Bu çözümler (5.56) ve (5.57) denklemlerinde yerine konur ve sıfırdan farklı olma koşulu kullanılırsa aşağıdaki dispersiyon bağıntısı elde edilir

$$\Omega^2 = \mu_1^2K^4 - \frac{3}{4}\mu_1\mu_2\rho^2K^2. \tag{5.59}$$

Bu ifade yeniden düzenlenecek olursa

$$\Omega = (-\mu_1\mu_2)^{1/2}\left(\frac{3}{4\rho^2}\right)^{1/2}K\left(1 - \frac{4\mu_1K^2}{2\mu_2\rho_0^2}\right)^{1/2} \tag{5.60}$$

bulunur. (5.60) dispersiyon bağıntısından görüldüğü üzere verilen bir K için eğer $\mu_1\mu_2 < 0$ ise Ω reel olacak ve ρ_1 ve θ_1 sınırlı kalacaklardır. $\mu_1\mu_2 > 0$ ise $K < (3\mu_1/\mu_2)^{1/2}\rho_0/2$ eşitsizliğini sağlayan değerleri için Ω kompleks olacak ve dolayısı ile ρ_1 ve θ_1 sınırsız olarak büyüyecektir. Bu nedenle $\mu_1\mu_2 < 0$

ise Nonlineer Schrödinger denkleminin dalga çözümleri küçük pertürbasyonlar altında kararlı olduğu, $\mu_1\mu_2 > 0$ ise kararlı olmadığı söylenebilir. $\mu_1\mu_2$ çarpımının sıfır olduğu hale ise marjinal hal adı verilir. Bu durumda NLS denklemi lineer hale dejenere olur.

Değişen Katsayılı NLS denklemine İlerleyen Dalga Çözümleri:

Bu bölümde (5.40) ile verilen değişken katsayılı NLS denklemine ilerleyen dalga çözümleri sunulacaktır. Bunun için (5.40) denklemine aşağıdaki biçimde bir çözüm önerelim

$$U(\xi,\tau) = V(\zeta)\mathrm{e}^{i[(\gamma(\tau)+K)\xi-(\varphi(\tau)+\Omega\tau)]}, \quad \zeta = \xi - \phi(\tau) \tag{5.61}$$

Burada K ve Ω çözümden belirlenecek olan sabitler, $\gamma(\tau)$, $\varphi(\tau)$ ve $\phi(\tau)$ çözümden belirlenecek olan fonksiyonlar, $V(\zeta)$ ise reel bir fonksiyondur. (5.60) ile verilen çözüm önerisi (5.40) denkleminde kullanılırsa

$$\mu_1 V'' + (\mu_6\frac{dh_1}{d\tau} - \frac{d\gamma}{d\tau})\xi V + i[2\mu_1(\gamma+K) + \mu_3 h_1 - \frac{d\phi}{d\tau}]V' + \mu_2 V^3$$

$$+[\mu_4 h_1^2 + \mu_5 h_2 - \mu_3(\gamma+K)h_1 - \mu_1\gamma^2 - 2\mu_1\gamma K - \mu_1 K^2 + \Omega + \frac{d\varphi}{d\tau}]V = 0 \tag{5.62}$$

Bu denklemi standart NLS denkleminin ilerleyen dalga çözümüne formel olarak indirgeyebilmek için, katsayıların aşağıdaki ilişkileri sağlaması gerekir

$$\gamma(\tau) = \mu_6 h_1(\tau), \quad \phi(\tau) = 2\mu_1 K\tau + \int^{\tau}(2\mu_1\mu_6 + \mu_3)h_1(s)ds,$$

$$\begin{aligned}\varphi(\tau) = \int^{\tau}[&-\mu_5 h_2(s) + (\mu_3\mu_6 - \mu_4 + \mu_1\mu_6^2)h_1^2(s)\\ &+(2\mu_1\mu_6+\mu_3)Kh_1(s)]ds.\end{aligned} \tag{5.63}$$

Bu ilişkiler sağlandığında (5.62) denklemi aşağıdaki diferansiyel denkleme indirgenir

$$\mu_1 V'' + (\Omega - \mu_1 K^2)V + \mu_2 V^3 = 0 \tag{5.64}$$

Standart NLS denkleminin ilerleyen dalga çözümünden yararlanırsak (5.64) denkleminin çözümleri aşağıdaki biçimde verilir

(i) $\mu_1\mu_2 > 0$ ise

$$V(\zeta) = C\mathrm{sech}[(\frac{\mu_2}{2\mu_1})^{1/2}C\zeta] \tag{5.65}$$

olur. Burada standart NLS denklemi çözümünde belirtildiği gibi $\Omega = \mu_1 K^2 - \mu_2 C^2/2$ olarak verilir.

(ii) $\mu_1\mu_2 < 0$ ise

$$V(\zeta) = C \tanh[(-\frac{\mu_2}{2\mu_1})^{1/2} C\zeta] \tag{5.66}$$

olur. Burada $\Omega = \mu_1 K^2 - \mu_2 C^2$ olarak verilmiştir. Her iki halde de C yalnız dalganın genliğini ifade etmektedir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, içi sıkışmaz viskoz olmayan bir akışkanla dolu değişken yarıçaplı, ince elastik tüplerde nonlineer dalga yayılımı problemi incelenmiştir.

İlk olarak konu ile ilgili geçmişte yapılan çalışmalardan kısaca bahsedilmiş ve bu çalışmalarda tüp yarıçapının değişmez kabul edildiği, yarıçapın değiştiği çalışmalarda ise bu genişlemenin doğrusal olarak kabul edildiği ortaya konmuştur. Oysa bu çalışmada yarıçap değişimi bir fonksiyonla temsil edilerek, diğer yapılan çalışmalara nispeten fiziksel koşullara daha uygun bir model kullanılmıştır. Problemin incelenmesinde kullanılacak olan pertürbasyon yöntemlerinin kısaca özetlenmesinden sonra, içerisinde sıkışmaz viskoz olmayan bir akışkan bulunan yarıçapı değişken ince elastik tüpte nonlineer dalga yayılımı probleminde kullanılacak olan alan denlemleri elde edilmiştir. İndirgeyici pertürbasyon yöntemi kullanılarak problem, uzun dalga yaklaşımı altında genel halde ve başlangıç deformasyonun belirli bir değeri için μ_1 katsayısının sıfır olması halinde incelenmiş ve yönetici denklem olarak değişken katsayılı Korteweg-de Vries ve değişken katsayılı modifiye Korteweg-de Vries denklemleri elde edilmiştir. Bu yönetici denklemlere ilerleyen dalga çözümleri sunulmuş ve dalga hızlarının ifadeleri elde edilmiştir. Bu hız ifadelerinin incelenmesinden, yarıçapı genişleyen tüplerde sabit yarıçaplı tüplere göre dalga hızının azaldığı görülmüş ve yarıçapı daralan tüplerde sabit yarıçaplı tüpe göre dalga hızının arttığı görülmüştür.

Çalışmanın son bölümünde, içi sıkışmaz viskoz olmayan akışkanla dolu, yarıçapı değişken ince elastik tüplerde nonlineer dalga modülasyonu problemi incelenmiştir. Bu amaçla indirgeyici pertürbasyon yöntemi kullanılarak yönetici denklem olarak değişken katsayılı nonlineer Schrödinger denklemi elde edilmiştir. Daha sonra da bu yönetici denkleme ilerleyen dalga çözümleri sunulmuştur.

Bu çalışmada incelenen problemlerde damar bir mambran gibi işleme sokulmuştur ancak mambran denklemleri kalınlığın ortalama yarıçapa oranının 1/20'den daha küçük olduğu durumlarda geçerlidir. Biyolojik uygulamalar göz önüne alındığında, bu oranın 1/6 ve 1/4 arasında olduğu gerçeği, incelenen problemde mambran denklemlerinin geçerli olmadığını ortaya koyar. Gerçekçi bir yaklaşım damarın kalın tüp olarak kabul edilmesini ve işlemlerin buna göre düzenlenmesini gerektirir. Ayrıca deneysel çalışmalar, damarların viskoelastik ve anizotrop yapıda olduğunu göstermektedir. Daha gerçekçi bir modelleme için, bu verilerin de göz önünde bulundurulması gerekir. İşte bu problemler gelecekte üzerinde çalışılması gereken önemli konulardır.

KAYNAKLAR

[1] **Young, T.**, 1809. On the function of the heart and arteries, The Croonian Lecture, *Phil.Trans.Roy.*, **99**, 1-31

[2] **Witzig, K.**, 1914. Uber erzwungene wellenbewegungen zaher inkompressibler Flussigikeiten in elastischen rohren, Inaugural Dissertation, University of Bern.

[3] **Morgan, G.W. and Kiely, J. P.,** 1958. Wave propagation in viscous fluid contained in a flexible tube, *J.Acoust.Soc.Am.* , **26**, 326-338.

[4] **Womersley, J.R.**, 1955. Oscilatory motion of a viscous liquid in a thin walled elastic tube-I : The linear approximation for long waves, *Phil. Mag.,* **46** , 199-219.

[5] **Lambossy, P.**, 1951. Aperçu historique sur le problem de la propagation des ondes dans un liquide compressible enferme dans un tube élastique, *Helv. Pyhsical Acta* **9**, 145-161.

[6] **Atabek, H.B. and Lew, H.S.,** 1966. Wave propagation through a viscous incompressible fluid contained in an initially stressed elastic tube, *J.Biophys.,* **6** , 481-503.

[7] **Atabek, H.B.**, 1968. Wave propagation through a viscous fluid contained in an initially stressed elastic tube, *Biophys. J.*, **8**, 626-649.

[8] **Mirsky, I.**, 1967. Wave propagation in a viscous fluid contained in an orthotropic elastic tube, *Biophys. J.*, **7**, 165-186.

[9] **Cox, R.H.** , 1968. Wave propagation through a Newtonian fluid contained within a thin walled viscoelastic tube, *J.Biomech.*,**8**, 691-709.

[10] **Cox, R.H.** , 1969. Wave propagation through a Newtonian fluid contained within a thin walled viscoelastic tube : The influence of wall compressibility, *J.Biomech.*, 270-291.

[11] **Rubinov, S.I. and Keller, J.B.**, 1971. Wave propagation in a fluid filled tube, *J. Acoust. Soc. Am.*, **50**, 198-223.

[12] **Rubinov, S.I. and Keller, J.B.**, 1978. Wave propagation in a viscoelastic tube containing a viscous fluid, *J. Fluid. Mech.*, **88**, 181-203.

[13] **Rachev, A.I.**, 1980. Effects of transmural pressure and muscular activity

on pulse waves in arteries, *J. Biomech. Engng.*, ASME, **102**, 119-123.

[14] **Rudinger, G.**, 1966. Review of current mathematical methods for the analysis of blood flow , *Biomedical Fluid Mechanics Symposium* , ASME, New York, 1-33.

[15] **Skalak, R.**, 1966. Wave propagation in blood flow. In : Biomechanics Symposium (Edited by Y. C. Fung), 20-46, ASME.

[16] **Attinger E. O.**, 1968. Analysis of pulsatile blood flow, *In Advances in Biomedical Engineering and Medical Physics*, (Edited by S. N. Levine) 1-59, Interscience, New York.

[17] **McDonald, D. A.**, 1960. Blood Flow in Arteries, The Williams and Wilkins Co., Baltimore Md.

[18] **Fung, Y. C.**, 1984. Biodynamics : Circulation, Springer Verlag, New York.

[19] **Demiray, H.**, **Erbay, H. A. and Erbay, S.**, 1987. Effects of prestress on pulse waves in arteries, *ZAMM*, **67**, 473-485.

[20] **Ling, S.C. and Atabek H.B.,** 1972. A nonlinear analysis of pulsatile flow in arteries. *J. Fluid Mech.,* **55**, 493-511.

[21] **Lamb, G.L.,** 1980. Elements of Soliton Theory. Wiley, New York.

[22] **Engelbrecht, J.,** 1987. On KdV soliton splitting. *Wave Motion*, **9**, 127-132.

[23] **Engelbrecht, J.,** 1994. Waves in blood vessels and the KdV approximation, Research Report (Mech 107/94), Estonian Academy of Sciences, Tallinn.

[24] **Caro, C.G., Pedley, T.J., Schroter, R.C. and Seed, W.A.,** 1978. The Mechanics of the Circulation, Oxford, Oxford University Press.

[25] **Lambert J.W.,** 1958. On the nonlinearities of fluid flow in nonrigid tubes, *J. Franklin Inst.*, **266**, 83.

[26] **Anliker, M.**, **Histand, M.B. and Ogden, E.,** 1968. Dispersion and attenuation of small artificial pressure waves in the canine aorta, *Circ. Res.*, **23**, 539-551.

[27] **Anliker, M.**, **Rockwell, R.L. and Ogden, E.**, 1971. Nonlinear analysis of flow pulses and shock waves in arteries. Part I : Derivation and properties of mathematical model, *ZAMP*, **22**, 217-246.

[28] **Rudinger, G.**, 1970. Shock waves in mathematical models of the aorta, *J. Appl. Mech.*, **37**, 34-37.

[29] **Hoogstraten, H.W. and Smith, C.H.**, 1978. A mathematical theory of shock-wave formation in arterial blood flow, *Acta Mechanica*, **30**, 145-155.

[30] **Tait, R.J. and Moodie, T.B.,** 1984. Waves in nonlinear fluid filled tubes, *Wave Motion*, **6**, 197-203.

[31] **Hashizume Y.**, 1985. Nonlinear pressure waves in a fluid-filled elastic tube, *J. Phys. Soc. Japan*, **54**, 3305-3312.

[32] **Yomosa, S.**, 1987. Solitary waves in large blood vessels, *J. Phys.Soc. Japan*, **56**, 506-520.

[33] **Ravindran, R. and Prasad, P.**, 1979. A mathematical analysis of nonlinear waves in a fluid-filled visco-elastic tube, *Acta Mechanica*, **31**, 253-280.

[34] **Swaters, G. and Sawatzky, R.P.**, 1989. Viscoelastic modulation of solitary pressure pulses in nonlinear fluid-filled distensible tubes, *Q. J. Mech. Appl. Math.*, **42**, 213-228.

[35] **Erbay, H., Erbay, S. and Dost, S.**, 1992. Wave propagation in fluid filled nonlinear viscoelastic tubes, *Acta Mechanica*, **95**, 87-102.

[36] **Johnson, R.S.,** 1970. A nonlinear equation incorporating damping and dispersion, *J. Fluid Mechanics* , **42**, 49-60.

[37] **Cowley, S.J.**, 1983. On the wave trains associated with elastic jumps on fluid-filled elastic tube, *Q. J. Mech. Appl. Math.*, **36**, 289-312.

[38] **Mainardi, F. and Buggish, H.**, 1982. On nonlinear waves in liquid filled elastic tubes, *Nonlinear Deformation Waves* , IUTAM Symposium Tallinn.

[39] **Keller, J.J.**, 1981. Propogation of simple non-linear waves in gas filled tubes with friction, *Z.Angrew. Math. Phys.*, **32**, 170-181.

[40] **Hashizume, Y.**, 1988. Nonlinear pressure wave propagation in arteries, *J. Phys. Soc. Japan*, **57**, 4160-4168.

[41] **Demiray, H.,** 1996. Solitary waves in prestressed elastic tubes, *Bull. Math. Biology* , **58** , 939-955.

[42] **Demiray, H. and Antar, N.**, 1997. Nonlinear waves in an inviscid fluid contained in a prestressed viscoelastic thin tube, *ZAMP*, **48**, 325-340.

[43] **Demiray, H.,** 1996. A quasi-linear viscoelastic constitutive relation for arterial wall materials, *J. Biomechanics*, **29**, 1011-1014.

[44] **Akgün, G. and Demiray, H.**, 1999. Nonlinear wave modulation in a prestressed viscoelastic thin tube filled with an inviscid fluid , *Int.*

J. Non-linear Mechanics , **34**, 571-588.

[45] **Demiray, H.**, 1998. Slowly varying solitary waves in an elastic tube filled with a viscous fluid, *ARI*, **51**, 98-102.

[46] **Ravindran, R. and Prasad, P.**, 1979. A mathematical analysis of nonlinear waves in a fluid-filled visco-elastic tube, *Acta Mechanica*, **31**, 253-280.

[47] **Demiray, H.**, 1997., Nonlinear wave modulation in a prestressed thin elastic tube filled with an inviscid fluid, *J. Appl. Math.*, **59**, 165-181.

[48] **Antar, N. and Demiray, H.**, 1999. Nonlinear wave modulation in a prestressed thin elastic tube, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, **34**, 123-138.

[49] **Akgün, G. and Demiray, H.**, 2000. Modulation of nonlinear axial and transverse waves in a fluid-filled thin elastic tube, *Int.J. Non-Linear Mechanics*, **35**, 347-353.

[50] **Prandtl, L. and Tietjens O.G.**, 1957. Applied Hydro and Aero -mechanics. New York : Dover.

[51] **Sturrock, P.A.**, 1957. Nonlinear effects in electron plasma, *Proc. R. Soc. London*, **A242**, 277-299 .

[52] **Sandri, G.,** 1963. The foundations of nonequilibrium statistical mechanics I, II, *Ann. Phys.*, **24**, 332-379, 380-418.

[53] **Stuart, J.T.,** 1960. On the nonlinear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows, Part 1. The basic behavior in plane Poiseuille flow, *J. Fluid Mech.*, **9**,353-370.

[54] **Watson, J.,** 1960. On the nonlinear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows, Part 2. The development of a solution for plane Poiseuille flow and Couette flow, *J. Fluid Mech.*, **9**,371-389.

[55] **Hasimoto, H. and Ono, H.** 1972. Nonlinear modulation of gravity waves, *J. Phys. Soc. Japan*, **33**, 805-811.

[56] **Frieman, E.A.**, 1963. On a new method in the theory of irreversible processes, *J. Math. Phys.*, **4**, 410-418.

[57] **Nayfeh, A.**, 1965. A perturbation method for treating nonlinear oscillation problems, *J. Math. Phys.*, **44**, 368-374.

[58] **Kawahara, T.,** 1973. The derivative-expansion method and nonlinear dispersive waves, *J. Phys. Soc. Japan*, **38**, 265-270.

[59] **Asano, N.**, 1974. Modulation for nonlinear wave in dissipative or unstable

media, *J.Phys. Soc. Japan* , **36**, 861-868.

[60] **Taniuti, T. and Washimi, H.**, 1968. Self-trapping and instability of hydromagnetic waves along the magnetic field in a cold plasma, *Phys. Rev. Letters*, **21**, 209-212.

[61] **Taniuti, T. and Wei, C.C.** , 1968. Reductive perturbation method in nonlinear wave propagation I, *J.Phys. Soc. Japan*, **24**, 941-946 .

[62] **Taniuti, T. and Yajima, N.**, 1969. Perturbation method for a nonlinear wave modulation I, *J. Math. Phys.*, **10**,1369-1372.

[63] **Asano, N. and Taniuti, T.**, 1969. Reductive perturbation method for nonlinear wave propagation in inhomogeneous media I, *J.Phys. Soc. Japan*, **27**, 1059-1062.

[64] **Jeffrey, A. and Kakutani, T.**, 1972. Weak nonlinear dispersive waves : a discussion centered around the Korteweg-de Vries, *SIAM, Rev.*, **14**, 582-643.

[65] **Gardner, C.S. and Morikawa, G.K.**, 1960. Similarity in the asymptotic behaviour of collision-free hydromagnetic waves and water waves, *Courant Inst. Math. Sci. Rep.*, NYO-9082, 1-30.

[66] **Taniuti, T.**, 1974. Reductive perturbation method and far fields of wave equations, *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, **55**, 1-35.

[67] **Teymur, M. and Şuhubi, E.**, 1978. Wave propagation in dissipative or dispersive non-linear media, *J. Inst. Maths. Applics.*, **21**, 25-40.

[68] **Joshi, N.**, 1987. Painlevé property of general variable-coefficient versions of the Korteweg-de Vries and non-linear Schrdinger equations, *Pyhs. Letters A*, **125**, no:9, 456-460.

[69] **Demiray, H.**, 1972. On the elasticity of soft biological tissues, *J. Biomechanics*, **5**, 309-311.

[70] **Simon, B.R., Kobayashi, A.S., Stradness, D.E. and Wiederhielm, C.A.**, 1972. Re-evaluation of arterial constitutive laws, *Circulation Research*, **30**, 491-500.

[71] **Demiray, H.**, 1976. Large deformation analysis of some basic problems in biophysics, *Bull. Math. Biology*, **38**, 701-711.

[72] **Karpman, V.I.**, 1975. Non-linear Waves in Dispersive Media, New York, Pergamon Press.

[73] **Infeld, E. and Rowlands, G.**, 1992. Nonlinear Waves, Solitons and Chaos, Cambridge University Press, Cambridge.

[74] **Ablowitz, M.J. and Clarkson, P.A.**, 1992. Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering, Cambridge University

Press, Cambridge.

[75] **Jeffrey, A. and Engelbrecht, J.**, 1994. Nonlinear Waves in Solids, Springer Verlag, New York.

[76] **Engelbrecht, J.**, 1997. Nonlinear Wave Dynamics, Complexity and Simplicity, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[77] **Eringen, C.A.**, 1962. Nonlinear Theory of Continuous Media, McGraw-Hill, New-York.

[78] **Jeffrey, A. and Kawahara, T.**, 1981. Asmyptotic Methods in Nonlinear Wave Theory, Boston: Pitman.

[79] **Şuhubi, E.**, 1993. Akışkanlar Mekaniği, Fen-Edebiyat Fakültesi, İstanbul.

[80] **Johnson, R.S.**, 1997. A modern introduction to the mathematical theory of water waves, Cambridge University Press, Cambridge.

[81] **Debnath, L.**, 1997. Nonlinear partial differential equations, Birkhäuser, Boston.

[82] **Whitham, G.B.**, 1974. Linear and Nonlinear waves, John Wiley-Sons, New York.

[83] **Drazin, P.G. and Johnson, R.S.**, 1989. Solitons: an introduction, Cambridge University Press, Cambridge.

ÖZGEÇMİŞ

Ali Erinç Özden 1980 yılında Sinop'ta doğdu. 1997 yılında Üsküdar Burhan Felek Lisesinden ve 2002 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Mühendisliği programından mezun oldu. 2002 yılında İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Mühendisliği bölümünde yüksek lisans eğitimine başladı. 2002 yılından bu yana Işık Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.