İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELASTİK ZEMİNE OTURAN ÇERÇEVE SİSTEMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnş. Müh. Berkay ÇENGEL

Anabilim Dalı : İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ

Programı : YAPI MÜHENDİSLİĞİ

OCAK 2003

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELASTİK ZEMİNE OTURAN ÇERÇEVE SİSTEMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnş. Müh. Berkay ÇENGEL
(501991316)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 24 Aralık 2002
Tezin Savunulduğu Tarih : 14 Ocak 2003

Tez Danışmanı : **Prof.Dr. A.Yalçın AKÖZ**
Diğer Jüri Üyeleri : **Prof.Dr. Gülay ALTAY (B.Ü.)**
Yrd.Doç.Dr. Nihal Uzcan ERATLI (İ.T.Ü)

OCAK 2003

ÖNSÖZ

Çalışmalarımın her aşamasında bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yardımlarını esirgemeden çalışmamı destekleyerek şevk veren Sayın Hocam Prof. Dr .A.Yalçın AKÖZ ' e en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Çalışmalarım sırasında fikir ve ilgilerini esirgemeden yol gösteren İ.T.Ü İnşaat Fakültesi Mekanik Anabilim Dalı Öğretim Üyelerine, çalışmamı tamamlamam konusunda cesaretlendirip yardımcı olan başta Dr .Fethi KADIOĞLU olmak üzere, Yrd. Doç. Dr. Nihal ERATLI, Dr .Atilla ÖZÜTOK, İnş. Yük. Müh Nursel GÜVEN ve Araş.Gör.Murat YILMAZ'a, ayrıca bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım tüm arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Bilim alanında ilerlemem için hiçbir fedakarlıktan kaçınmayıp bu yola teşvik eden, maddi ve manevi desteğini esirgemeyen babam Hayrettin ÇENGEL, annem Ümmühan ÇENGEL ve canım kardeşim Gıda Yük. Müh. Ayça ÇENGEL'e sonsuz teşekkür ederim.

Ocak 2003 Berkay ÇENGEL

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ

ŞEKİL LİSTESİ

SEMBOL LİSTESİ

u_i : Yer değiştirmeler
p_i : Uç kuvvetler
α : zeminle ilgili bir katsayı (Bkz.2.54)
β : zeminle ilgili bir katsayı (Bkz.2.26)
C : Katsayılar matrisi
Φ : Fonksiyon matrisi
S : Durum vektörü
D : Diferansiyel geçiş matrisi
F : Taşıma matrisi
K : Rijitlik matrisi
$\mathbf{K_e}$: Eksenel yük rijitlik matrisi
M : Kütle matrisi
u, v, w : Yer değiştirmeler
q_1, q_2, q_3 : Yer değiştirmeler
ω : Titreşim frekansı
$\bar{T}$: Periyot
NS : Düğüm noktası sayısı
NES : Çubuk sayısı
MS : Bilinmeyen uç yer değiştirme sayısı
KM : Kod matrisi
RM : Rijitlik matrisi
SM : Sistem matrisi
YM : Yük matrisi
q : Uç yer değiştirme matrisi
Q : Uç kuvvetleri matrisi
E : Elastisite modülü
I : Atalet momenti
A : Çubuk Alanı
L : Çubuk boyu
δ_A, δ_B : Çökmeler
θ_A, θ_B : Dönmeler
v : Elastik eğri
θ : Dönme
M : Moment
T : Kesme kuvveti
N : Normal kuvvet
k : zemin yatak katsayısı
$\mathbf{k_e}$: eksenel zemin katsayısı
b : çubuk genişliği
$\bar{k}$: yay katsayısı
m : kütle

U	: Yer değiştirme matrisi
P	: Kuvvet matrisi
$\mathbf{K}^*$	: İndirgenmiş rijitlik matrisi
$\overline{\boldsymbol{D}}$	: Katsayılar matrisi
W	: Ağırlık
g	: Yer çekimi ivmesi

ELASTİK ZEMİNE OTURAN ÇERÇEVE SİSTEMLERİN STATİK VE DİNAMİK ANALİZİ

ÖZET

Yapıların hesabında öncelikle yapıya gelen yüklerin mesnetlere verdiği yükler hesap edilir. Bu yüklerin etkisi temele aktarılarak temel hesabı yapılır. Bu yaklaşım statik yükler altında mühendislik amaçları için iyi sonuçlar verdiğinden uygulamada yaygın olarak kullanılır. Ancak dinamik hesaplarda sonuçlar yapının, yere mesnetlenme tipine bağlıdır. Örneğin iki noktasından yere temellenen tek açıklıklı yapının iki mesnedi, klasik hesap tarzında sabit noktalardır. Gerçekte ise bu iki nokta deprem kuvvetleri halinde birbirine göre hareket eder. Bu çalışmada yapı, mesnetleri ile bir bütün olarak statik ve dinamik yükler altında hesaplanmıştır.

Altı bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde problem tanıtılarak literatürde bulunan konu ile ilgili çalışmalarla, yapılan çalışmanın amaç ve kapsamı verilmiştir.çalışmada kullanılan yöntemin diğer yöntemlerden farkları üzerinde durulmuştur.

İkinci bölümde elastik zemine oturan yatay düzlemdeki doğru eksenli, homojen, lineer elastik bir elemanın diferansiyel denklemi ve çözümü verilerek, taşıma matrisi yardımıyla zemin eleman rijitlik matrisleri elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde çerçeve sistem rijitlik matrisinin oluşturulması anlatılarak, bu çalışma için hazırlanmış fortran bilgisayar programının algoritması verilerek, programın daha kolay anlaşılabilmesi için bir uygulama yapılmıştır.

Dördüncü bölümde çerçeve sisteminin dinamik etkiler altındaki davranışı incelenmiş, dinamik kısımla ilgili hazırlanan bilgisayar programının algoritması verilerek bir basit örnek üzerinde anlatılmıştır.

Beşinci bölümde ise bu çalışma için yapılmış bilgisayar programı kullanılarak çeşitli mühendislik problemleri çözülmüş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Son bölümde ise hesaplardan elde edilen sonuçlar tartışılmış ve değerlendirilmiştir.

STATIC AND DYNAMIC ANALYSIS OF FRAME SYSTEMS RESTING ON ELASTIC FOUNDATION

SUMMARY

In the structural analysis, first the reactions due to external loads are calculated. Foundation analysis is done by transferring these reactions to the foundation. This approach is widely used in engineering application due to its satisfactory results in engineering objective considering static loads. On the other hand, in dynamic analysis results are related with the supporting style of the structure to the ground. As an example, in classical analysis two supports of a one bay structure are fixed at the points. But in reality, these two points move relatively from each other by the effect of earthquake forces. In this study, structure is analyzed totally with its supports in the effect of static and dynamic forces.

In the first section of this study that is composed of six sections, the problem is presented, the aim and scope of this study is given also the literature related with the subject. The difference of the method used in this study from other methods, is explained.

In the second section; by giving the solution of the differential equation of beam element resting on elastic foundation; element rigidity matrices are formed by using carry over matrix.

In the third section, formation of the frame system rigidity matrix is explained. The algorithm of fortran computer program prepared for this study is given and an application is done for better understanding of the program.

In the fourth section, behavior of the structure under dynamic effects is studied. The algorithm of the program prepared for dynamic analysis is given and is explained by a simple example.

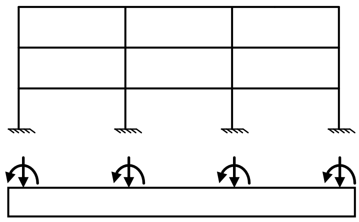
In the fifth section, several engineering problems are solved by using the program prepared for this study and the results are compared.

Finally in the last section, results of the analysis are discussed and evaluated.

1.GİRİŞ

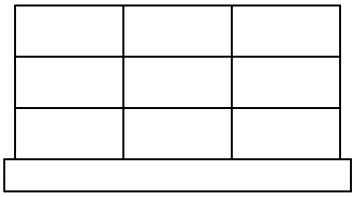
1.1 Problemin Tanımı

Çerçeve yapılar uygulamada mühendislerin en çok karşılaştığı sistemlerdir. Mühendislikte genel yaklaşım çerçeve sistemin hesabında mesnetler ankastre kabul edilir. Önce çerçeve dış yükler etkisinde hesaplandıktan sonra, mesnet reaksiyonları temele aktarılarak, temel kirişi ayrıca hesaplanır.(Bkz.Şekil 1.1)



Şekil.1.1 Klasik çerçeve sistem ve temel kirişi

Bu çalışmada Şekil 1.2 de görülen gibi zemin ve yapı bir bütün olarak ele alınmıştır. Böylece iç kuvvetlerin oluşumu ve reaksiyon kuvvetleri birbirini etkilemektedir. Önce zeminle etkileşen bir kirişin, yatay ve düşey etkiler altında rijitlik matrisi, başlangıç değerler metodu kullanılarak elde edilmiştir. Daha sonra yapının bütünü bilinen yöntemle hesaplanmıştır.



Şekil 1.2 Elastik zemine oturan çerçeve sistem

Mühendisliğe ait çeşitli problemlerde, sınır şartları yardımıyla belirtilmesi gereken, sabitlerin sayısı çok olursa, hesap yorucu olduğu kadar hata yapma ihtimali de fazla olur. Bu yüzden problemin kuruluşunda sabit miktarını minumumda tutmanın çareleri aranır. Başlangıç değerleri metodu adı verilen metot, bu amacı sağlayan bir yöntemdir. Tek değişkenli problemlere uygulanan bu metotta esas fikir, sınır değerleri probleminin hepsini başlangıç değerleri problemlerine dönüştürmek, bu şekilde ara şartlardan dolayı girebilecek yeni sabitlerin önüne geçmek ve problemlerin denklemlerini hep aynı başlangıçtaki sabitlerle ifade etmekten ibarettir.

Elastik zemine oturan çerçeve sistemleri üç aşamada ele alarak incelemek gerekir. Birinci aşama elastik zemine oturan doğru eksenli kiriş eleman probleminin tanımlanması ve çözümünün yapılması, ikinci aşamada çerçeve sistemlerin tanımlanması ve çözümünün yapılması. ve üçüncü aşamada ise her iki aşamanın birbiriyle birleştirilerek bir bütün içinde statik ve dinamik analizlerinin yapılmasıdır.

Elastik zemin üzerine oturan kiriş problemi, önce Winkler tarafından incelenmiş ve teorinin esasları verilmiştir. Winkler tarafından ortaya konan Winkler hipotezi basit olmasına karşılık iyi sonuçlar vermektedir. Bu hipoteze göre yer değiştirme sırasında kirişin zeminden gördüğü tepki yer değiştirme ile doğru orantılıdır ve yakın noktaların etkileşimi bahis konusu edilmemektedir. Bu varsayımla zemin , bağımsız elastik yaylardan meydana gelmiş bir fiziksel model olarak göz önüne alınabilir. Zemin genellikle **k** ile gösterilen bir zemin katsayısı ile karakterize edilir. Zemin katsayısı, düşey yer değiştirme bir birim olduğunda, birim genişlikteki birim alana gelen reaksiyonu ifade eder.

1.2 Konu İle İlgili Çalışmalar

Winkler tarafından geliştirilen, birçok etkene ve özellikle zeminin elastik karakteristikleri ile, yüklü alanın boyutlarına bağlı olan yatak katsayısı kavramı, 1942’de Zimmermann tarafından balast üzerine oturan demiryolu traverslerinin hesabında kullanılarak, kendi özel uygulamalarında belirli türdeki zeminler için buldukları ve kullandıkları k değerlerini vermişler. Winkler zemin tipi üzerinde 1946’da Hetenyi [1] çalışmış ve kesin çözümlerle uğraşmıştır. Kesin çözümlerde ne kadar kolaylaştırma yapılırsa yapılsın yine de büyük zaman kaybı olmaktadır. Birçok araştırmacı bu zaman kaybını ortadan kaldırmak için daha hızlı ve genel olan çeşitli metotlar geliştirerek problemlerini çözmeye çalışmışlardır.

1960'da Iyengar ve Anantharamu [2], elastik zemine oturan kirişlerin davranışlarını seriler yardımıyla incelemiş ve buna ait eğrileri vermişlerdir. Aynı yıl, bu tür kirişlerin Malter [3] tarafından sonlu elemanlar yöntemi ile çözümü geliştirilmiştir.

1964'te Dodge [4] tarafından yayınlanmış çalışmada elastik zemin üzerine oturan yarı sonsuz ve sonlu uzunluktaki kirişlerin davranışları ile ilgili tesir fonksiyonları ve buna ait eğriler verilmiştir. Aynı konu ile ilgili olarak 1965'te Donalt ve arkadaşları [5], bu tür kirişlerin orta noktasından tekil yük ve eğilme momenti etkimesi durumunu ele almıştır. Bu iki çalışmada kirişlerin davranışı ile ilgili çizelgeler de verilmiştir. 1966'da ise Miranda ve Nair [6], sonlu uzunluktaki elastik zemin üzerine oturan kirişlerin diferansiyel denkleminin özel fonksiyonlarla çözümünü yapmış ve bununla ilgili sayısal örnekler vermişlerdir. Bu çalışmada üzerinde durduğumuz doğru eksenli çubuklar için başlangıç değerler yöntemi kullanılarak genel bir çözüm yöntemi 1966'da İnan [7] tarafından geliştirilmiştir ve taşıma matrisi verilmiştir. Aynı yöntem kullanılarak elastik zemin üzerine oturan doğru eksenli kirişler içinde kapalı olarak bir taşıma matrisi bulunmuş ve çözüme ulaşılmıştır. 1969'da Durelli ve arkadaşları [8] tarafından, elastik zemine oturan sonlu ve sonsuz uzunlukta olan kirişlerin fotoelastik çalışması yapılmıştır. Bu kirişlerin bir ve iki noktadan daha yüklenerek davranışları incelenip bulunan sonuçlar teorik çözümle karşılaştırılmıştır. Bu 1969'daki çalışmadan sonra 1970'de Munther [9], aynı durumdaki kirişlerin davranışlarını sonlu elemanlar yöntemi ile incelemiş ve bulunan sonuçları, fotoelastik çalışmadan elde edilen sonuçlarla birlikte çizilen eğriler üzerinde vermiştir. Yine 1970'de Weistman [10] sadece basınca çalışan Winkler ve Reissner zemin modelini kullanarak bir çalışma yapmıştır. Weistman bu çalışmasında, elastik zemin üzerine oturan ortasından tekil yükle yüklü sonlu bir kirişin, çökme ve kesit tesirlerine ait grafiklerini vermiştir. 1971'de Rao ve arkadaşları [11] tarafından yapılan çalışmada da sadece ortadan tekil yüklü kirişleri ele alarak başlangıç değerleri yöntemi ile çözüme ulaşmışlardır. Bu kirişlerle ilgili çizelge ve eğriler de verilmiştir. 1982'de Ting [12], Winkler zemini üzerindeki elastik mesnetli sonlu kirişin diferansiyel denkleminin bir çözümünü ortaya koymuştur. Bu çözüm farklı sınır şartlarına sahip elastik temeller üzerindeki kirişlere benzetilerek kullanılabilir. Sonra 1983'te Ting ve arkadaşları [13] elastik Winkler zemini üzerine oturan her iki ucundan basit mesnetle mesnetlenmiş yayılı yükle yüklü sonlu uzunlukta bir kirişin çökme ve kesit tesirlerine ait tablolar vermişlerdir.

Yine aynı yıl Ting ve arkadaşları [14], düzlem çerçeve analizi için, tekil yük, tekil moment ve lineer olarak yayılı kuvvetlere bağlı olarak elastik zemin üzerindeki bir kiriş için yük eleman vektörleri ve sonlu eleman rijitlik matrisi geliştirmiş ve bu rijitlik matrisi elemanın bilinen deplasman metoduna kolayca uygulanabileceği belirtmişlerdir. 1985'de Eisenberg ve Yankelevski [15] çalışmalarında, elastik zemin üzerine oturan kirişlerin kesin bir rijitlik matrisini formule etmişlerdir. Winkler zemini üzerindeki bir kirişin sürekli bir parçasını kesin olarak temsil etmesi için bir eleman gereklidir. Bundan dolayı tipik bir problemin çözümü için birkaç eleman yeterlidir. 1987'de Lin ve Adams [16] tarafından çekme gerilmesi almayan Winkler zemini üzerine oturan, kendi ağırlığına ilaveten üzerinde aynı hızla hareket eden bir çift yük etkisi dikkate alınarak elastik kirişin davranışı incelenmiştir. Çalışmalarında sonuçlar tekil yüklere, hızlarına ve zeminden ayrılma noktalarına bağlı olarak elde edilmiştir. 1988'de Celep ve arkadaşları [17], yayılı yük, telik yük ve moment etkisi altındaki kirişin çekme gerilmesi almayan elastik Winkler zemini üzerine oturması halinde statik ve dinamik davranışlarını incelemişlerdir. Çalışmalarında statik ve dinamik eksantrik yüklemeler altında kiriş deformasyonu ve zeminden ayrılma noktalarına ait grafikler vermişlerdir. 1988'de elastik zemin üzerine oturan sonlu uzunluktaki ahşap ve betonarme kirişlerin davranışı Elmas [18] tarafından incelenmiştir. Bu çalışmanın da orta noktadan etkiyen tekil yükün limit değeri araştırılarak, kirişlerin davranışına ve limit yüke, farklı malzeme ve boyutların etkisi de incelenmiştir. 1993'te Doğan [19] tarafından yapılan bir çalışmada, zeminin basınç ve çekmede farklı davranış gösterdiği kabul edilerek elastik zemin üzerine oturan ağırlıksız kirişlerin statik ve dinamik yükleri altındaki davranışları incelenmiştir. 1994'te Kadıoğlu [20] Winkler zemin tipini ele alarak elastik zemin üzerine oturan doğru ve daire eksenli kirişlerin, çeşitli yüklemeler altındaki davranışlarını incelemiştir.

Buraya kadar olan kısımda elastik zemin üzerine yapılan çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir. Şimdi bu çalışmanın çerçeve ve dinamik kısmı oluşturulurken yararlanılan kaynaklar üzerinde duralım ve konuyla ilgili çalışmaları verelim.

1965'de Keskinel [21] elastik zemine oturan dikdörtgen düzlem kapalı çerçeveler üzerinde çalışmış, bu konuda doçentlik tezi yapmıştır. Çalışmasında elastik zemine oturan eleman için rijitlik matrisleri ve çerçeve rijitlik matrislerini oluşturmuştur. Ayrıca elektronik hesap makineleri için bir program yapmıştır. Sistemi sadece statik olarak hesaplamıştır. 1970'te Tezcan [22] çubuk sistemlerin elektronik hesap makineleri ile çözümü ile ilgili bir kitap yayınlamıştır. Bu kitabında, rijitlik matrisleri metotları kullanmıştır. Çubuk ve çerçeve sistemlerin statik ve dinamik analizleri üzerinde durmuştur. 1975'te Clough ve Penzien [23] yapıların dinamik etkileri altındaki davranışlarını incelemişler ve bu konuda bir kitap yayınlamışlardır. Deprem mühendisliği üzerinde durmuşlar ve yapıların deprem etkisindeki davranışlarını incelemişlerdir. 1981'de Craig [24] yapıların dinamiği üzerine bir kitap yazmıştır. Bu kitabında bilgisayar metotlarına giriş üzerinde durarak yapıların dinamik etkiler altındaki davranışlarını bir çok yöntemle incelemiştir. 1994'te Geradin ve Rixen [25] mekanik titreşimler isimli bir kitap yayınlamış ve bu kitaplarında yapı dinamiğinin teorileri ve uygulamaları üzerinde durmuşlardır. 1995'te Aydoğan [26] elastik zemine oturan kirişlerin kayma etkisindeki davranışlarını incelemiş ve sonlu eleman rijitlik matrisini elde etmiştir. Aynı çalışmada elastik zemine oturan çerçeve sistemleri sonlu eleman metodu kullanarak bir bütün olarak hesap etmiş ve bir bilgisayar programı hazırlamıştır. Çalışmasında sadece statik yüklemeleri göz önüne almış, dinamik etkileri incelememiştir. 1999'da Çengel [27] çerçeve sistemlerin statik yükler altındaki davranışlarını incelemiştir. Bu çalışmasında rijitlik matrisleri metotlarını kullanarak bir bilgisayar programı hazırlamıştır.

1.3 Çalışmanın Amaç ve Kapsamı

Elastik zemin üzerine oturan çubukla ilgili çalışmalarda en çok kullanılan Winkler hipotezidir. Bu hipotezin pek çok mühendislik problemlerinde daha önceden de belirtildiği gibi doğru sonuçlar verdiği bilinmektedir. Bu çalışma da elastik zemin incelenirken kirişlerin Winkler zemini üzerine oturdukları kabul edilmiştir. Winkler zemininin en belirgin özelliklerinden biri, zeminin sıkça yerleştirilmiş ve birbirinden bağımsız yaylardan oluştuğu varsayımıdır.

Çalışmada çerçeve sistemler ve zemin ilişkileri üzerinde durulmuş ve zemin yatak katsayısının değişmesinin çerçeve sistem üzerindeki etkileri araştırılmıştır. Ayrıca çerçeve sistemin titreşim frekanslarının, zemininin özelliğinin değişmesine bağlı olarak ne şekilde değişiklik gösterdiği incelenmiştir.

Bu çalışmanın en önemli amacı doğru modellemeyi yapıp daha gerçeğe yakın sonuçlar elde etmektir. Bu nedenle yapının zeminle gerçekte olduğu gibi bir bütün olarak düşünülmesi ve zeminin etkisinin mutlaka göz önüne alınması gerekliliği üzerinde durulmuştur.

Son yıllarda bilgisayar teknolojisinin hızla ilerlemesi, mühendislerin hesaplarını bilgisayarlar programlarıyla yaparak daha hızlı ve kesin sonuçlar elde etmelerini sağlamıştır. Piyasada inşaat sektörü üzerine yazılmış değişik yöntemlerle çözüm üreten bir çok program vardır. Bu çalışmada da bu konu üzerinde detaylı bir şekilde durulmuş, elastik zemin üzerine oturan çerçeve sistemin statik ve dinamik analizini yapan, fortran programlama dilinde bir bilgisayar programı hazırlanmıştır.

2. ELASTİK ZEMİNE OTURAN DOĞRU EKSENLİ ÇUBUK ELEMAN

2.1 Taşıma Matrisi Hesabı

Rijitlik matrisini sistematik olarak bulmak için taşıma matrisi metodu kullanılacaktır. Bu nedenle önce bu konu hakkında bilgi verilecektir.[7] İnan

2.1.1 Durum Vektörü

Herhangi bir sistemi ele alalım; bu sistemin durumunu belirtmek için n tane değere ihtiyaç olsun:

$S_1, S_{2,} S_3, \ldots\ldots, S_n$

S_i değerlerine sistemin koordinatları adı verilir. Bu koordinatların ayrıca bir x serbest değişkenine bağlı olarak değiştiklerini kabul edelim. Genel olarak bu parametre zaman olduğu gibi, bir boyutlu sürekli ortamlarda yeri gösteren değişken de olabilir.

O halde

$$S_i(x), \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.1}$$

gibi n tane tek değişkenli fonksiyon sisteminin durumunu belirtiyor demektir. Bu n büyüklüğü bir vektörün koordinatları olarak göz önüne alalım ve bu vektörü

$$S(x) = \begin{bmatrix} S_1(x) \\ S_2(x) \\ \vdots \\ S_n(x) \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

ile gösterelim. Bu büyüklüğe *durum vektörü* adı verilir.

2.1.2. Diferansiyel Geçiş Matrisi

Durum vektörünü belirtebilmek için, $S_i(x)$ fonksiyonlarının hepsinin birinci türevi olduğunu varsayalım. $\mathbf{S}'(x)$ ile $\mathbf{S}(x)$arasındaki bağıntıyı inceleyelim.

Durum vektörü ile bunun türevleri arasındaki bağıntının lineer olduğunu kabul edelim.

$$
\begin{aligned}
S_1'(x) &= d_{11}\cdot S_1(x) + d_{12}\cdot S_2(x) + \ldots + d_{1n}\cdot S_n(x) \\
S_2'(x) &= d_{21}\cdot S_1(x) + d_{22}\cdot S_2(x) + \ldots + d_{2n}\cdot S_n(x) \\
\cdots & \qquad\qquad\quad \ldots \qquad\qquad\quad \ldots \\
S_n'(x) &= d_{n1}\cdot S_1(x) + d_{n2}\cdot S_2(x) + \ldots + d_{nn}\cdot S_n(x)
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Burada d_{ik} ile gösterilen katsayılar S_i koordinatlarından bağımsızdır, fakat genel olarak x parametresine bağlı değişken katsayılar da olabilir.

$$\mathbf{S}'(x)=\mathbf{D}.\mathbf{S}(x) \tag{2.4}$$

burada **D** kare matrisine *diferansiyel geçiş matrisi* adı verilir.

türev tarifi hatırlanacak olursa burada (2.4) yerine

$$\mathbf{S}(x+dx)=\mathbf{S}(x)+[\mathbf{D}.\mathbf{S}(x)]dx \tag{2.5}$$

ifadesini yazabiliriz.

2.1.3 Geçiş veya Taşıma Matrisi

Yukarıda anlatılan parça parça diferansiyel geçiş yerine x=0 başlangıç durumundan parametrenin x gibi sonlu değerine ait duruma geçmek için tek bir integral geçiş de düşünülebilir. İşte bu tek geçişi sağlayan matrise *taşıma matrisi* adı verilir. Şu şekilde:

$$\mathbf{S}(x)=\mathbf{F}(x).\mathbf{S}(0) \tag{2.6}$$

tarif edilir. Burada **S**(0) sistemin başlangıçtaki durumunu gösterir.

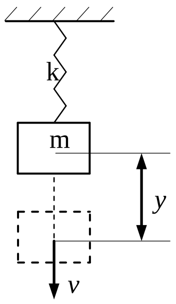
F(x) ile kare formda olan taşıma matrisi gösterilmektedir:

$$
F(x)=\begin{bmatrix}
f_{11}(x) & f_{12}(x) & \ldots & f_{1n}(x) \\
f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
f_{n1}(x) & f_{2n}(x) & \ldots & f_{nn}(x)
\end{bmatrix}
\tag{2.7}
$$

Konunun daha kolay anlaşılması için basit bir örnek yapalım.

2.1.4 Örnek: Basit Harmonik Sistem

Şekil 2.1 de verilen k yay sabiti ve m kütleli basit bir harmonik sistemi ele alalım. Sistemdeki m kütlesinin y ekseni boyunca küçük hareketler yaptığını varsayalım.



Şekil 2.1 Basit harmonik sistem

Burada durum koordinatları iki tanedir, birisi yeri bildiren y, diğeri hızı gösteren v dir. Parametre olarak alınması gereken büyüklük de x=t zamandır. O halde durum vektörü **S**(t) iki koordinatlı olup

$$S(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \\ v(t) \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

den ibarettir.

Sistemin denklemleri ise

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= v(t) \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{k}{m}y(t) \end{aligned} \tag{2.9}$$

olup birincisi uygunluk denklemi (hız –mesafe ilişkisi), diğeri ise Newton hareket kanununu ifade eden denklemi gösterir. Bu hale göre **D** matrisi, (2.4) tarifinden dolayı

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

gibi sabit elemanlardan oluşan bir matristir.

Şimdi, sistemin t=0 anındaki başlangıç değerleri verilmiş olan y(0) ve v(0) verilmiş iken, herhangi bir andaki y(t) ve v(t) değerleri aranıyor. Matris notasyonuyla,

$$S(0)=\begin{bmatrix} y(0) \\ \\ v(0) \end{bmatrix} \qquad \text{ve} \qquad S(t)=\begin{bmatrix} y(t) \\ \\ v(t) \end{bmatrix}$$

durum vektörleri arasındaki dönüşümü tanımlayan **F**(t) matrisi aranıyor demektir. (2.9) denklemlerini çözersek,

$$\begin{aligned} y(t) &= y(0)\cos\omega t + v(0)\frac{\sin\omega t}{\omega} \\ v(t) &= -y(0)\omega\sin\omega t + v(0)\cos\omega t \end{aligned} \tag{2.11}$$

elde ederiz.

burada $\omega^2=\dfrac{k}{m}$ bağıntısı vardır. (2.6) de verilen ifade tarzına göre **F**(t) taşıma matrisi, bu basit sistem için

$$F(t)=\begin{bmatrix} \cos\omega t & \dfrac{\sin\omega t}{\omega} \\ \\ -\omega\sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

den başka bir şey değildir.

2.1.5 Taşıma Matrisinin Elde Edilmesi

Taşıma matrisi iki şekilde elde edilebilir. Birincisi denklem (2.3) ten

$$\mathbf{S}(x)=\mathbf{C}.e^{x.\mathbf{D}} \tag{2.13}$$

olarak elde edilir. Taşıma matrisi **F** ise,

$$\mathbf{F}=e^{x.\mathbf{D}} \tag{2.14}$$

olarak tanımlanabilir.

İkinci yaklaşımda n tane değişkenden (n-1) tanesi n tane diferansiyel denklemden yok edilerek bir değişkene bağlı n ci mertebeden bir diferansiyel denklem bulunur. Bu diferansiyel denklemin homogen çözümünden n tane $\Phi_{11}(x)$, $\Phi_{21}(x)$,….., $\Phi_{n1}(x)$ fonksiyonları bulunur. n durum değişkeni bu fonksiyonlara bağlı olarak,

$$\begin{aligned} S_1(x) &= \phi_{11}(x).C_1+\phi_{12}(x).C_2+.......+\phi_{1n}(x).C_n \\ S_2(x) &= \phi_{21}(x).C_1+\phi_{22}(x).C_2+......+\phi_{2n}(x).C_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_n(x) &= \phi_{n1}(x).C_1+\phi_{n2}(x).C_2+......+\phi_{nn}(x).C_n \end{aligned} \tag{2.15}$$

elde edilir. Matris formunda (2.15) denklemi

$$\mathbf{S}(x)=\mathbf{\Phi}(x).\mathbf{C} \tag{2.16}$$

olarak ifade edilebilir.

C sabiti başlangıçtaki durum vektörlerinin değeri cinsinden

$$\mathbf{S}(0)=\mathbf{\Phi}(0).\mathbf{C} \tag{2.17}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\mathbf{C}=\mathbf{\Phi}^{-1}(0).\mathbf{S}(0) \tag{2.18}$$

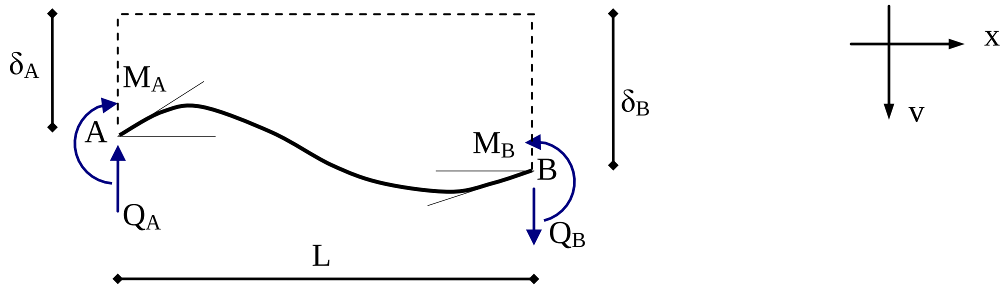
C sabiti bulunur. **C** matrisi (2.16) denkleminde geri yazılırsa taşıma matrisi,

$$\mathbf{F}(x)=\mathbf{\Phi}(x).\mathbf{\Phi}^{-1}(0) \tag{2.19}$$

olarak elde edilir.

2.2. Elastik Zemine Oturan Çubuğun Taşıma Matrisi

Zeminle etkileşen yapının bir elemanını göz önüne alalım. Sadece uç kuvvetler altında çubuğun $v=v(x)$ elastik eğrisini bulmak isteyelim. Kesit tesirleri için, sağ kesitte eksen takımıyla çakışan, sol kesitte ise eksen takımıyla çakışmayan kesit tesirleri pozitif alınmıştır ve eksenler Şekil 2.2. de gösterilmiştir. Çubuğun durum vektörü **S**(x)=[v,θ,M,T] olarak tanımlanmıştır.



Şekil 2.2 Uç kuvvetleri etkisindeki elastik zemine oturan prizmatik bir çubuğun elastik eğrisi

Diferansiyel geçiş matrisi ve çubuğa ait denklemler

$$\frac{d}{dx}\begin{Bmatrix} v \\ \theta \\ M \\ T \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{EI} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.\begin{Bmatrix} v \\ \theta \\ M \\ T \end{Bmatrix} \tag{2.20}$$

olarak elde edilir.

(2.20) denkleminde θ, M, T yok edilirse,

$$EIv^4 + kv = 0 \tag{2.21}$$

elde edilir. (2.21) denkleminde, elemanın genişliği b, temel zemini modülü k_0 olduğuna göre, $k=k_0b$ olarak tanımlanmıştır.

(2.21) denklemi çözümünden elastik eğri ve değişik türevleri,

$$v = \cosh\beta x(C_1\cos\beta x + C_3\sin\beta x) + \sinh\beta x(C_2\cos\beta x + C_4\sin\beta x) \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned} v' &= \beta\cosh\beta x[(C_2+C_3)\cos\beta x + (C_4-C_1)\sin\beta x] \\ &\quad + \beta\sinh\beta x[(C_1+C_4)\cos\beta x + (C_3-C_2)\sin\beta x] \end{aligned} \tag{2.23}$$

$$v'' = 2\beta\sinh\beta x[C_3\cos\beta x - C_1\sin\beta x] + 2\beta^2\cosh\beta x[C_4\cos\beta x - C_2\sin\beta x] \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned} v''' &= 2\beta^3\cosh\beta x[(C_3-C_2)\cos\beta x - (C_1+C_4)\sin\beta x] \\ &\quad + 2\beta^3\sinh\beta x[(C_4-C_1)\cos\beta x - (C_2+C_3)\sin\beta x] \end{aligned} \tag{2.25}$$

olarak bulunur.

Bu bağıntılarda

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} \tag{2.26}$$

olarak tanımlanmıştır. (2.26) ifadesinde β nın boyutu $\frac{1}{L}$ dir.

Bu çözümler bilindikten sonra rijitlik matrisini sistematik olarak bulmak için taşıma matrisini hesaplayalım.

(4x4) lük **Φ** (x) matrisinin terimleri,

$$\phi_{11} = \cos\beta x\cosh\beta x$$

$$\phi_{12} = \cos\beta x\sinh\beta x$$

$$\phi_{13} = \sin\beta x\cosh\beta x$$

$$\phi_{14} = \sin\beta x\sinh\beta x$$

$$\phi_{21} = \beta(\cos\beta x\sinh\beta x - \sin\beta x\cosh\beta x)$$

$$\phi_{22} = \beta(\cos\beta x\cosh\beta x - \sin\beta x\sinh\beta x)$$

$$\phi_{23} = \beta(\cos\beta x\cosh\beta x + \sin\beta x\sinh\beta x)$$

$$\phi_{24} = \beta(\mathit{sin}\,\beta x\,\mathit{cosh}\,\beta x + \mathit{cos}\,\beta x\,\mathit{sinh}\,\beta x)$$

$$\phi_{31} = 2EI\beta^2\,\mathit{sin}\,\beta x\,\mathit{sinh}\,\beta x$$

$$\phi_{32} = 2EI\beta^2\sin\beta x\cosh\beta x$$

$$\phi_{33} = -2EI\beta^2\cos\beta x\sinh\beta x \tag{2.27}$$

$$\phi_{34} = -2EI\beta^2 \cos\beta x \cosh\beta x$$

$$\phi_{41} = 2EI\beta^3 (\cosh\beta x \sin\beta x + \sinh\beta x \cos\beta x)$$

$$\phi_{42} = 2EI\beta^3 (\sinh\beta x \sin\beta x + \cosh\beta x \cos\beta x)$$

$$\phi_{43} = -2EI\beta^3 (\cosh\beta x \cos\beta x - \sinh\beta x \sin\beta x)$$

$$\phi_{44} = -2EI\beta^3 (\sinh\beta x \cos\beta x - \cosh\beta x \sin\beta x) \tag{2.27}$$

bulunur.

F(x) taşıma matrisi (2.19) ifadesinde belirtildiği gibi yukarıda verilen $\phi_{ij}(x)$ lerden ve $\phi^{-1}(0)$ den hesaplanır. Bu nedenle (2.27) ifadelerini kullanarak gerekli olan $\phi(0)$ ve $\phi^{-1}(0)$ matrislerini hesaplayalım,

$$\Phi(0)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2EI\beta^2 \\ 0 & 2EI\beta^3 & -2EI\beta^3 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

$$\Phi^{-1}(0)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\beta} & 0 & \frac{1}{4EI\beta^3} \\ 0 & \frac{1}{2\beta} & 0 & -\frac{1}{4EI\beta^3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2EI\beta^2} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

bulunur.

Buradan (2.27) ve (2.29) ifadeleri (2.19) da yerine konulursa **F**(x) bulunur. (4x4) lük **F**(x) terimleri,

$$f_{11} = \cosh\beta x \cos\beta x$$

$$f_{12} = \frac{1}{2\beta}(\cosh\beta x \sin\beta x + \cos\beta x \sinh\beta x)$$

$$f_{13} = -\frac{1}{2EI\beta^2}\sinh\beta x \sin\beta x$$

$$f_{14} = -\frac{1}{4EI\beta^3}(\cosh\beta x \sin\beta x - \cos\beta x \sinh\beta x)$$

$$f_{21} = -\beta(\cosh\beta x \sin\beta x - \cos\beta x \sinh\beta x) \tag{2.30}$$

$$f_{22} = \cosh\beta x \cos\beta x$$

$$f_{23} = -\frac{1}{2EI\beta}(\cosh\beta x \sin\beta x + \cos\beta x \sinh\beta x)$$

$$f_{24} = -\frac{1}{2EI\beta^2}\sinh\beta x \sin\beta x$$

$$f_{31} = 2EI\beta^2 \sinh\beta x \sin\beta x$$

$$f_{32} = EI\beta(\cosh\beta x \sin\beta x - \cos\beta x \sinh\beta x)$$

$$f_{33} = \cosh\beta x \cos\beta x$$

$$f_{34} = \frac{1}{2\beta}(\cosh\beta x \sin\beta x + \cos\beta x \sinh\beta x)$$

$$f_{41} = 2EI\beta^3(\cosh\beta x \sin\beta x + \cos\beta x \sinh\beta x)$$

$$f_{42} = 2EI\beta^2 \sinh\beta x \sin\beta x$$

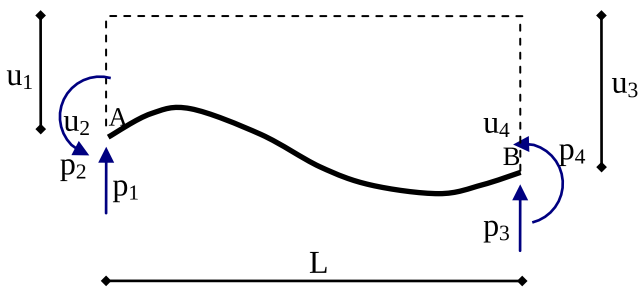
$$f_{43} = -\beta(\cosh\beta x \sin\beta x - \cos\beta x \sinh\beta x)$$

$$f_{44} = \cosh\beta x \cos\beta x \tag{2.30}$$

bulunur.

2.3 Rijitlik Matrisi Hesabı

Elastik zemine oturan düzlem kapalı çerçeve probleminin bilgisayardan faydalanarak çözümü için hazırlanan programda üniformluğu sağlamak amacıyla, eleman uçlarına Şekil.2.3 de gösterilen durumda uç kuvvetleri ve bu kuvvetler doğrultusundaki yer değiştirmeleri (+) olarak kabul edelim.



Şekil.2.3 Uç kuvvetleri (p) ve uç yer değiştirmeleri (u) için işaret kabulü

2.3.1 Rijitlik Matrisinin Bulunması

p=**K**.**u** (2.31)

(2.31) denkleminde **K** matrisi (4x4) simetrik bir kare matristir ve *eleman rijitlik matrisi* olarak bilinir. Yukarıdaki ifade açık olarak yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

(2.32) ifadesindeki k_{ij} katsayıları aşağıdaki durumlar kullanılarak elde edilir.

$u_1 = 1,\ u_2 = u_3 = u_4 = 0$ iken k_{1i} i=1,2,3,4

$u_2 = 1,\ u_1 = u_3 = u_4 = 0$, iken k_{2i} i=1,2,3,4

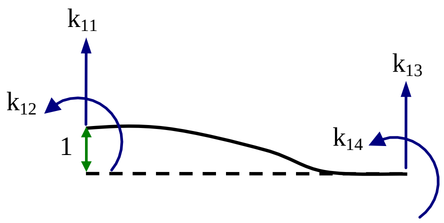
$u_3 = 1,\ u_1 = u_2 = u_4 = 0$, iken k_{3i} i=1,2,3,4

$u_4 = 1,\ u_1 = u_2 = u_3 = 0$, iken k_{4i} i=1,2,3,4

değerleri k_{ij} rijitlik katsayılarını verir.

Şimdi taşıma matrisi yardımıyla bu rijitlik katsayılarını hesaplayarak elastik zemine oturan doğru eksenli eleman için rijitlik matrisini oluşturalım. Pozitif yönler ve bu durumlara karşı gelen matris eşitlikleri aşağıdaki gösterilmiştir.

1. Şekil 2.4 te $u_1 = 1,\ u_2 = u_3 = u_4 = 0$ iken k_{1i} rijitlik katsayılarının yönleri gösterilmiştir. (2.30) ifadesinde terimleri açık olan yazılan **F**(x) taşıma matrisi kullanılarak, **S**(0) ve **S**(L) durum vektörleri göz önüne alınarak bu katsayılar elde edilir.

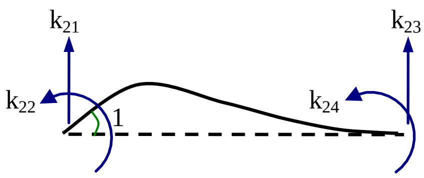


Şekil.2.4 $u_1 = 1,\ u_2 = u_3 = u_4 = 0$ iken k_{1i} katsayılarının yönleri ile gösterimi

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -k_{12} \\ k_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_{14} \\ -k_{13} \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

(2.33) ifadesinden k_{11} , k_{12} , k_{13} , k_{14} elde edilir.

2. Şekil 2.5 te $u_2 = 1$, $u_1 = u_3 = u_4 = 0$, iken k_{2i} rijitlik katsayılarının yönleri gösterilmiştir. Bu katsayılar da birinci maddede anlatıldığı gibi **F**(x), **S**(0) ve **S**(L) kullanılarak elde edilir.

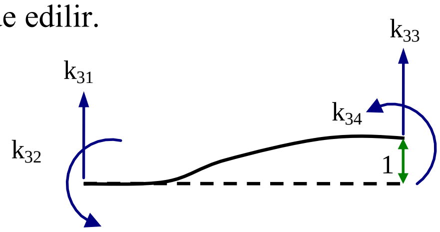


Şekil.2.5 $u_2 = 1$, $u_1 = u_3 = u_4 = 0$, iken k_{2i} katsayılarının yönleri ile gösterimi

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -k_{22} \\ k_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_{24} \\ -k_{23} \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

(2.34) ifadesinden k_{21} , k_{22} , k_{23} , k_{24} elde edilir.

3. Şekil 2.6 da $u_3 = 1$, $u_1 = u_2 = u_4 = 0$, iken k_{3i} rijitlik katsayılarının yönleri gösterilmiştir. Bu katsayılar da birinci maddede anlatıldığı gibi **F**(x), **S**(0) ve **S**(L) kullanılarak elde edilir.

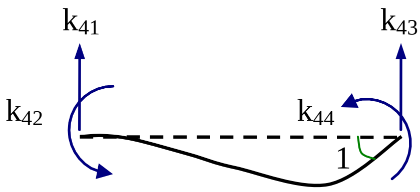


Şekil.2.6 $u_3 = 1$, $u_1 = u_2 = u_4 = 0$, iken k_{3i} katsayılarının yönleri ile gösterimi

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -k_{32} \\ k_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ k_{34} \\ -k_{33} \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

(2.35) ifadesinden k_{31} , k_{32} , k_{33} , k_{34} elde edilir.

4. Şekil 2.7 de $u_4 = 1$, $u_1 = u_2 = u_3 = 0$, iken k_{4i} rijitlik katsayılarının yönleri gösterilmiştir. Bu katsayılar da birinci maddede anlatıldığı gibi **F**(x), **S**(0) ve **S**(L) kullanılarak elde edilir.



Şekil.2.7 $u_4 = 1$, $u_1 = u_2 = u_3 = 0$, iken k_{4i} katsayılarının yönleri ile gösterimi

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -k_{42} \\ k_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ k_{44} \\ -k_{43} \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

(2.36) ifadesinden k_{41} , k_{42} , k_{43} , k_{44} elde edilir.

(2.33), (2.34), (2.35), (2.36) ifadelerinden elde edilen rijitlik katsayıları,

$$k_{11} = \frac{4EI\beta^3(\sin 2\beta L + \sinh 2\beta L)}{-2 + \cos 2\beta L + \cosh 2\beta L}$$

$$k_{12} = \frac{2EI\beta^2(-\cos 2\beta L + \cosh 2\beta L)}{-2 + \cos 2\beta L + \cosh 2\beta L}$$

$$k_{13} = \frac{-8EI\beta^3(\cosh \beta L \sin \beta L + \cos \beta L \sinh \beta L)}{-2 + \cos 2\beta L + \cosh 2\beta L}$$

$$k_{14} = \frac{8EI\beta^2 \sin \beta L \sinh \beta L}{-2 + \cos 2\beta L + \cosh 2\beta L} \tag{2.37}$$

$$k_{21}=\frac{-2EI\beta^2(\cos 2\beta L-\cosh 2\beta L)}{-2+\cos 2\beta L+\cosh 2\beta L}$$

$$k_{22}=\frac{2EI\beta(-\sin 2\beta L+\sinh 2\beta L)}{-2+\cos 2\beta L+\cosh 2\beta L}$$

$$k_{23}=\frac{-8EI\beta^2\sin\beta L\sinh\beta L}{-2+\cos 2\beta L+\cosh 2\beta L}$$

$$k_{24}=\frac{-4EI\beta(\cos\beta L\sinh\beta L-\cosh\beta L\sin\beta L)}{-2+\cos 2\beta L+\cosh 2\beta L}$$

$$k_{31}=\frac{-8EI\beta^3(\cosh\beta L\sin\beta L+\cos\beta L\sinh\beta L)}{-2+\cos 2\beta L+\cosh 2\beta L}$$

$$k_{32}=\frac{-8EI\beta^2\sin\beta L\sinh\beta L}{-2+\cos 2\beta L+\cosh 2\beta L}$$

$$k_{33}=\frac{4EI\beta^3(\sin 2\beta L+\sinh 2\beta L)}{-2+\cos 2\beta L+\cosh 2\beta L}$$

$$k_{34}=\frac{-2EI\beta^2(-\cos 2\beta L+\cosh 2\beta L)}{-2+\cos 2\beta L+\cosh 2\beta L}$$

$$k_{41}=\frac{8EI\beta^2\sin\beta L\sinh\beta L}{-2+\cos 2\beta L+\cosh 2\beta L}$$

$$k_{42}=\frac{4EI\beta(-\cos\beta L\sinh\beta L+\cosh\beta L\sin\beta L)}{-2+\cos 2\beta L+\cosh 2\beta L}$$

$$k_{43}=\frac{-2EI\beta^2(-\cos 2\beta L+\cosh 2\beta L)}{-2+\cos 2\beta L+\cosh 2\beta L}$$

$$k_{44}=\frac{2EI\beta(-\sin 2\beta L+\sinh 2\beta L)}{-2+\cos 2\beta L+\cosh 2\beta L} \qquad (2.37)$$

bulunur.Herhangi bir elemana ait rijitlik matrisi genel olarak,

$$[\mathrm{K}]=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

Çubuk elemanın genel rijitlik matrisi,

$$[K]=\left[\begin{array}{c:c:c:c} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \hdashline \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \hdashline -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \hdashline \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{array}\right]$$

olarak yazılabilir. (2.37) ifadelerinde elastik zemine oturan çubuğa ait rijitlik matrisinin terimleri verilmiştir. Bu ifadeleri genel rijitlik matrisinin terimlerine benzetmek için (2.39) ifadelerindeki ϕ katsayıları kullanılırsa, yeniden düzenlenen elastik zemine oturan çubuklara ait rijitlik matrisi,

$$\begin{bmatrix} Q_A \\ M_A \\ Q_B \\ M_B \end{bmatrix} = \frac{EI}{L}\cdot\left[\begin{array}{c:c:c:c} \frac{12}{L^2}\phi_1 & \frac{6}{L}\phi_2 & -\frac{12}{L^2}\phi_3 & \frac{6}{L}\phi_4 \\ \hdashline \frac{6}{L}\phi_2 & 4\phi_5 & -\frac{6}{L}\phi_4 & 2\phi_6 \\ \hdashline \frac{12}{L^2}\phi_3 & -\frac{6}{L}\phi_4 & \frac{12}{L^2}\phi_1 & -\frac{6}{L}\phi_2 \\ \hdashline \frac{6}{L}\phi_4 & 2\phi_6 & -\frac{6}{L}\phi_2 & 4\phi_5 \end{array}\right]\cdot\begin{bmatrix} \delta_A \\ \theta_A \\ \delta_B \\ \theta_B \end{bmatrix} \tag{2.38}$$

olarak yazılabilir. (2.38) ifadesindeki ϕ katsayıları,

$$\phi_1 = \frac{(\beta L)^3}{3}\cdot\frac{\sin 2\beta L+\sinh 2\beta L}{-2+\cos 2\beta L+\cosh 2\beta L}$$

$$\phi_2 = \frac{(\beta L)^2}{3}\cdot\frac{-\cos 2\beta L+\cosh 2\beta L}{-2+\cos 2\beta L+\cosh 2\beta L}$$

$$\phi_3 = \frac{2(\beta L)^3}{3}\cdot\frac{\cosh\beta L\sin\beta L+\cos\beta L\sinh\beta L}{-2+\cos 2\beta L+\cosh 2\beta L}$$

$$\phi_4 = \frac{4(\beta L)^3}{3}\cdot\frac{\sin\beta L\sinh\beta L}{-2+\cos 2\beta L+\cosh 2\beta L}$$

$$\phi_5 = \frac{\beta L}{2}\cdot\frac{-\sin 2\beta L+\sinh 2\beta L}{-2+\cos 2\beta L+\cosh 2\beta L}$$

$$\phi_6 = -2\beta L\cdot\frac{\cos\beta L\sinh\beta L-\cosh\beta L\sin\beta L}{-2+\cos 2\beta L+\cosh 2\beta L} \tag{2.39}$$

ile gösterilir.

2.3.2 Çubuğun Bir Ucunun Mafsallı Olması Durumda Rijitlik Matrisinin Bulunması

Elemanın bir ucunun mafsallı olması durumu Şekil 2.8 de gösterilmiştir.Bu halde mafsal bulunan uçta moment sıfır olduğundan buna karşılık gelen rijitlik katsayıları da sıfır olarak bulunur. (2.40) ,(2.41) ve (2.42) ifadelerinden k_{ij} terimleri hesaplanır.

Şekil 2.8 Çubuğun bir ucunun mafsallı olması hali

1. Elastik zemine ait **F**(x) taşıma matrisi ve mafsallı çubuğa ait **S**(x) durum vektörleri kullanılarak k_{1i} katsayıları hesaplanır.

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} -1 \\ \theta_1 \\ 0 \\ k_{11} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_{14} \\ -k_{13} \end{Bmatrix} \tag{2.40}$$

(2.40) ifadesinden θ_1, k_{11}, k_{13} ve k_{14} katsayıları elde edilir. Bu katsayılar,

$$\theta_1 = \frac{\beta(\cos 2\beta x - \cosh 2\beta x)}{\sin 2\beta x - \sinh 2\beta x}$$

$$k_{11} = \frac{-2EI\beta^3(2 + \cos 2\beta x + \cosh 2\beta x)}{\sin 2\beta x - \sinh 2\beta x}$$

$$k_{13} = \frac{8EI\beta^3(\cos \beta x.\cosh \beta x)}{\sin 2\beta x - \sinh 2\beta x}$$

$$k_{14} = \frac{-4EI\beta^2(\cosh \beta x \cdot \sin \beta x + \cos \beta x \cdot \sinh \beta x)}{\sin 2\beta x - \sinh 2\beta x}$$

olarak bulunur.

2. Elastik zemine ait **F**(x) taşıma matrisi ve mafsallı çubuğa ait **S**(x) durum vektörleri kullanılarak k_{3i} katsayıları hesaplanır.

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} 0 \\ \theta_2 \\ 0 \\ k_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ k_{34} \\ -k_{33} \end{Bmatrix} \tag{2.41}$$

(2.41) ifadesinden θ_2, k_{31}, k_{33} ve k_{34} katsayıları elde edilir. Bu katsayılar,

$$\theta_2 = \frac{4\beta \sin\beta x \cdot \sinh\beta x}{\sin 2\beta x - \sinh 2\beta x}$$

$$k_{31} = \frac{8EI\beta^3(\cos\beta x . \cosh\beta x)}{\sin 2\beta x - \sinh 2\beta x}$$

$$k_{33} = \frac{-4EI\beta^3(\cos 2\beta x + \cosh 2\beta x)}{\sin 2\beta x - \sinh 2\beta x}$$

$$k_{34} = \frac{2EI\beta^2(\sin 2\beta x + \sinh 2\beta x)}{\sin 2\beta x - \sinh 2\beta x}$$

olarak bulunur.

3. Elastik zemine ait **F**(x) taşıma matrisi ve mafsallı çubuğa ait **S**(x) durum vektörleri kullanılarak k_{4i} katsayıları hesaplanır.

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} 0 \\ \theta_3 \\ 0 \\ k_{41} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ k_{44} \\ -k_{43} \end{Bmatrix} \tag{2.42}$$

(2.41) ifadesinden θ_3, k_{41}, k_{43} ve k_{44} katsayıları elde edilir. Bu katsayılar,

$$\theta_3 = \frac{2(-\cosh\beta x \cdot \sin\beta x + \cos\beta x \cdot \sinh\beta x)}{\sin 2\beta x - \sinh 2\beta x}$$

$$k_{41} = \frac{-4EI\beta^2(\cosh\beta x \cdot \sin\beta x + \cos\beta x \cdot \sinh\beta x)}{\sin 2\beta x - \sinh 2\beta x}$$

$$k_{43} = \frac{2EI\beta^2(\sin 2\beta x + \sinh 2\beta x)}{\sin 2\beta x - \sinh 2\beta x}$$

$$k_{44} = \frac{2EI\beta(\cos 2\beta x - \cosh 2\beta x)}{\sin 2\beta x - \sinh 2\beta x}$$

olarak bulunur.

A ucu mafsallı çubuğun genel halde rijitlik matrisi,

$$[K]=\begin{bmatrix} \frac{3EI}{L^3} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3EI}{L^3} & 0 & \frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} \\ \frac{3EI}{L^2} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} \end{bmatrix} \tag{2.43}$$

şeklinde yazılabilir. Elastik zemine oturan çubukta mafsalın A ucunda olması halinde rijitlik matrisi,

$$\begin{bmatrix} Q_A \\ M_A \\ Q_B \\ M_B \end{bmatrix} = \frac{EI}{L}\cdot\begin{bmatrix} \frac{3}{L^2}\varphi_1 & 0 & -\frac{3}{L^2}\varphi_2 & \frac{3}{L}\varphi_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2}\varphi_2 & 0 & \frac{3}{L^2}\varphi_4 & -\frac{3}{L}\varphi_5 \\ \frac{3}{L}\varphi_3 & 0 & -\frac{3}{L}\varphi_5 & 3\varphi_6 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \delta_A \\ \theta_A \\ \delta_B \\ \theta_B \end{bmatrix} \tag{2.44}$$

olarak bulunur. Mafsalın B ucunda olması halinde ise rijitlik matrisi,

$$\begin{bmatrix} Q_A \\ M_A \\ Q_B \\ M_B \end{bmatrix} = \frac{EI}{L}\cdot\begin{bmatrix} \frac{3}{L^2}\varphi_1 & \frac{3}{L}\varphi_3 & -\frac{3}{L^2}\varphi_2 & 0 \\ \frac{3}{L}\varphi_3 & 3\varphi_6 & -\frac{3}{L}\varphi_5 & 0 \\ -\frac{3}{L^2}\varphi_2 & -\frac{3}{L}\varphi_5 & \frac{3}{L^2}\varphi_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \delta_A \\ \theta_A \\ \delta_B \\ \theta_B \end{bmatrix} \tag{2.45}$$

olarak bulunur. (2.44) ve (2.45) ifadelerinde ki φ katsayıları,

$$\varphi_1 = \frac{-2(\beta\mathrm{L})^3}{3}\cdot\frac{(2+\cos 2\beta\mathrm{L}+\cosh 2\beta\mathrm{L})}{\sin 2\beta\mathrm{L}-\sinh 2\beta\mathrm{L}}$$

$$\varphi_2 = \frac{-8(\beta\mathrm{L})^3}{3}\cdot\frac{(\cos\beta\mathrm{L}.\cosh\beta\mathrm{L})}{\sin 2\beta\mathrm{L}-\sinh 2\beta\mathrm{L}}$$

$$\varphi_3 = \frac{-4(\beta\mathrm{L})^2}{3}\cdot\frac{(\cosh\beta\mathrm{L}\cdot\sin\beta\mathrm{L}+\cos\beta\mathrm{L}\cdot\sinh\beta\mathrm{L})}{\sin 2\beta\mathrm{L}-\sinh 2\beta\mathrm{L}}$$

$$\varphi_4 = \frac{-4(\beta\mathrm{L})^3}{3}\cdot\frac{(\cos 2\beta\mathrm{L}+\cosh 2\beta\mathrm{L})}{\sin 2\beta\mathrm{L}-\sinh 2\beta\mathrm{L}} \tag{2.46}$$

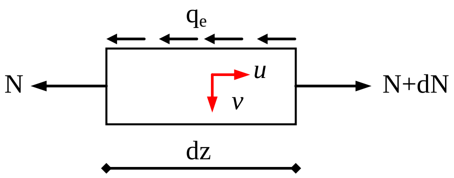
$$\varphi_5 = \frac{-2(\beta\mathrm{L})^2}{3} \cdot \frac{(\sin 2\beta\mathrm{l} + \sinh 2\beta\mathrm{L})}{\sin 2\beta\mathrm{L} - \sinh 2\beta\mathrm{L}}$$

$$\varphi_6 = \frac{2\beta\mathrm{L}}{3} \cdot \frac{(\cos 2\beta\mathrm{L} - \cosh 2\beta\mathrm{L})}{\sin 2\beta\mathrm{L} - \sinh 2\beta\mathrm{L}} \tag{2.46}$$

ile gösterilir.

2.4. Elastik Zemine Oturan Çubukta Eksenel Yük

Temel kirişi, zemin içerisinde sürtünme kuvvetlerinin etkisi ve uç noktalarından hareketlerinin engellenmesi ile yatay yüklere karşı koyabilir. Bu nedenle Şekil 2.9 da görülen bir model seçilmiş, hesaplar bu modele göre yapılmıştır. Şekil 2.9 a göre bünye denklemlerini yazalım.



Şekil.2.9 Eksenel yük etkisindeki zemine oturan çubuk

$$\frac{dN}{dz} = q_e \tag{2.47}$$

q_e nin yer değiştirme ile orantılı olduğunu kabul edersek,

$$\frac{dN}{dz} = k_e.u \tag{2.48}$$

yazılabilir. Hooke bağıntılarından,

$$\frac{du}{dz} = \frac{N}{EA} \tag{2.49}$$

yazılırsa, bütün denklemler (2.50) ifadesiyle gösterilir.

$$\frac{d}{dz}\begin{Bmatrix} u \\ N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{EA} \\ k_e & 0 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} u \\ N \end{Bmatrix} \tag{2.50}$$

(2.50) ifadesinde diferansiyel geçiş matrisi

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{EA} \\ k_e & 0 \end{bmatrix} \tag{2.51}$$

olarak bulunur.

Sistemin diferansiyel denklemi

$$u'' - \alpha^2 u = 0 \tag{2.52}$$

olarak bulunur. Çözüm için

$$u = C_1 e^{\alpha z} + C_2 e^{-\alpha z} \tag{2.53}$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\alpha = \sqrt{\frac{k_e}{EA}} \tag{2.54}$$

yazılabilir. Şimdi **Φ**(z) matrisini yazalım.

$$\mathbf{\Phi}(z) = \begin{bmatrix} e^{\alpha z} & e^{-\alpha z} \\ EA\alpha e^{\alpha z} & -EA\alpha e^{-\alpha z} \end{bmatrix} \tag{2.55}$$

(2.55) ifadesinde z yerine sıfır konulursa,

$$\mathbf{\Phi}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha EA & -\alpha EA \end{bmatrix} \tag{2.56}$$

bulunur. Buradan (2.56) ifadesinin tersi alınırsa,

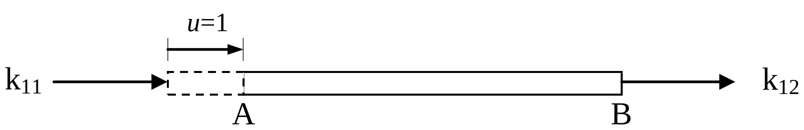
$$\mathbf{\Phi}^{-1}(0) = \frac{1}{2\alpha EA} \begin{bmatrix} \alpha EA & 1 \\ \alpha EA & -1 \end{bmatrix} \tag{2.57}$$

olarak bulunur. Taşıma matrisi (2.19) ifadesinden,

$$\mathbf{F}(z) = \mathbf{\Phi}(z)\,\mathbf{\Phi}^{-1}(0) = \begin{bmatrix} cosh(\alpha z) & \dfrac{sinh(\alpha z)}{EA\alpha} \\ EA\alpha\, sinh(\alpha)z & cosh(\alpha z) \end{bmatrix} \tag{2.58}$$

bulunur.

Şekil 2.10 da A ucuna birim yatay yer değiştirme uygulanmış zemine oturan bir eleman görülmektedir. Bu durumda taşıma matrisi kullanılarak k_{1i} zemin eksenel rijitlik katsayıları bulunur.



Şekil.2.10 u_1=1 ve u_2=0 halinde k_{1i} katsayıları yönleri

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -k_{11} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ k_{12} \end{Bmatrix} \tag{2.59}$$

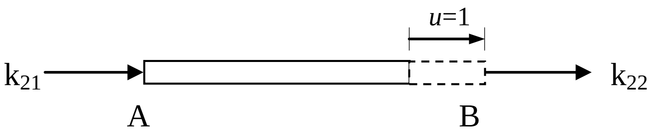
(2.59) ifadesinden k_{11} ve k_{12} katsayıları bulunur.

$$k_{11} = \frac{f_{11}}{f_{12}} = \alpha EA \frac{cosh(\alpha L)}{sinh(\alpha L)} \tag{2.60}$$

$$k_{12} = f_{21} - f_{22}.k_{11} = \alpha EA sin(\alpha L) - \alpha EA \frac{cosh^2(\alpha L)}{sin(\alpha L)}$$

$$k_{12} = -\frac{\alpha EA}{sinh(\alpha L)} \tag{2.61}$$

Şekil 2.11 de B ucuna birim yatay yer değiştirme uygulanmış zemine oturan bir eleman görülmektedir. Bu durumda taşıma matrisi yardımıyla k_{2i} zemin eksenel rijitlik katsayıları bulunur.



Şekil.2.11 u_1=0 ve u_2=1 hali k_{2i} katsayıları yönleri

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -k_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ k_{22} \end{Bmatrix} \tag{2.62}$$

(2.62) ifadesinden k_{21} ve k_{22} bulunur.

$$k_{21} = -\frac{1}{f_{12}} = -\frac{\alpha EA}{sinh(\alpha L)} \tag{2.63}$$

$$k_{22} = f_{22}k_{21} = \alpha EA \frac{cosh(\alpha L)}{sinh(\alpha L)} \tag{2.64}$$

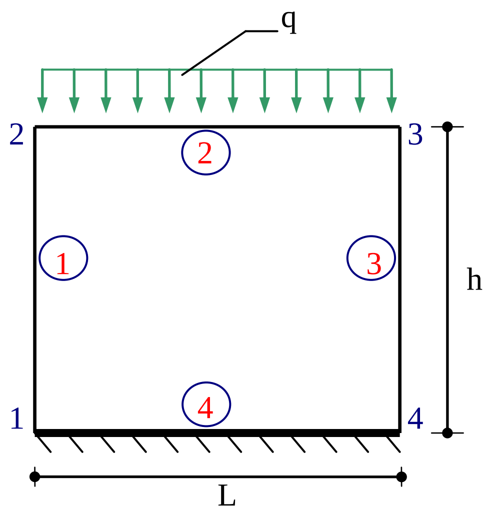
Zemin eksenel rijitlik matrisi,

$$K_e = \frac{\alpha EA}{sinh(\alpha L)} \begin{bmatrix} cosh(\alpha L) & -1 \\ -1 & cosh(\alpha L) \end{bmatrix} \tag{2.65}$$

olarak bulunur.

3. ELASTİK ZEMİNE OTURAN DÜZLEM ÇERÇEVE SİSTEMİN BİLGİSAYAR PROGRAMI İLE ÇÖZÜMÜ

3.1 Programın Algoritmasının Anlatılması



Şekil.3.1 Tek katlı ve tek açıklıklı elastik zemine oturan çerçeve

Elastik zeminle etkileşen ve düşey üniform yayılı yük etkisindeki çerçeveye ait programı açıklanırken Şekil 3.1 deki sistem çözülecektir.

Düğüm noktası (nod) sayısı NS = 4

Eleman (çubuk) sayısı NES = 4

Bilinmeyen uç deplasman (q_i) sayısı MS = 12

1. Ele alınan çerçeve sistemin düğüm noktaları sıralı bir şekilde numaralandırılır. Düğüm noktası (nod) sayısı NS belirlenir. Örnek sistemde NS = 4 dir.

2. Sistemin elemanları (çubuklar) numaralandırılır. Eleman sayısı NES belirlenir. Örnek sistemde NES = 4 dir .

3. Her bir düğüm noktasında oluşabilecek bilinmeyen uç deplasmanlar numaralandırılır . q_1 , q_2 , q_3 , q_4 , q_5 , q_6 gibi numaralandırılarak MS belirlenir. Örnek sistemde MS = 12 dir

4. Her çubuğun elastisite modülü (E), kesit alanı (A), atalet momenti (I), çubuk boyu (L) ve açısı (θ) belirlenir.

5. Zemine üzerindeki eleman için $\beta = K_0 B$ değeri belirlenir.

6. Kod matrisi **KM** oluşturulur . Kod matrisi ; eleman sayısı NES kadar satırdan, sol ve sağ uçta oluşan yatay, düşey ve dönme uç yer değiştirmelerin bulunduğu 6 kolondan oluşur. Kod numaraları olarak bilinmeyen uç yer değiştirmelerin (q_i) numaralarıdır. Örnek sistemde **Kod Matrisi** :

NO	**N1**			**N2**		
1	1	2	3	4	5	6
2	4	5	6	7	8	9
3	7	8	9	10	11	12
4	1	2	3	10	11	12

7. Her bir çubuğun rijitlik matrisi oluşturulur. Rijitlik matrisi **RM** (6x6) bir matristir. Çubuğun C , S , E , I, A , L değerleri yerine konularak hesap edilir. Bu işlem çubuk sayısı kadar tekrarlanır . Zemin üzerindeki elemanın rijitlik matrisi hesaplanırken $\beta = K_0 B$ eğeri dikkate alınır. Zemin rijitlik matrisi kullanılır.

8. Sistem matrisi **SM**, kod matrisi **KM** yardımıyla toplama ilkesiyle oluşturulur. **SM** bilinmeyen uç deplasman sayısı MS kadar satır ve sütundan oluşan simetrik kare matristir.

Sistem Matrisinin Oluşturulması : Çubuğun kodu kod matrisi **KM** den alınır. Rijitlik matrisinin üstüne ve yanına yazılır. Rijitlik matrisinde kodlara karşılık gelen değer, **SM** de aynı koddaki yere yazılır. Örneğin: 1 . Çubuğun rijitlik matrisindeki 3 numaralı satır ve 3 numaralı kolondaki x değeri **SM** de 3. satır, 3. kolona yazılır. Bu çubuk için SM ye gönderilecek bütün değerler gönderildikten sonra bir sonraki çubuğa geçilir ve bu işlemler eleman sayısı NES kadar tekrarlanır. Gönderilen bütün değerler üs üste toplanır ve **SM** oluşturulur .

9. Yük matrisi **YM** oluşturulur. **YM** si 1 kolondan ve bilinmeyen uç deplasman sayısı MS kadar satırdan oluşmaktadır .

YM nin oluşturulması: Noda gelen yükler hangi bilinmeyen uç deplasmanla (q_i) ile çakışıyorsa onun bulunduğu sırada **YM1** sine yerleştirilir .

$$YM1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \\ \overline{0} \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

Çerçeve sistemlerde ayrıca nodal yüklerden başka çubuk üzerine gelen yükler vardır. Bu örnekte q yayılı yükü 2.eleman üzerinde bulunuyor.

$$YM2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \\ 0 \\ -\frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

10. Denklem çözülerek bilinmeyen uç deplasmanlar (q_i) ler bulunur.

$$\begin{bmatrix} \ \ SM \ \ \end{bmatrix}_{(MS*MS)} \times \begin{bmatrix} q_i \end{bmatrix}_{(MS*1)} = \begin{bmatrix} YM \end{bmatrix}_{(MS*1)} \tag{3.3}$$

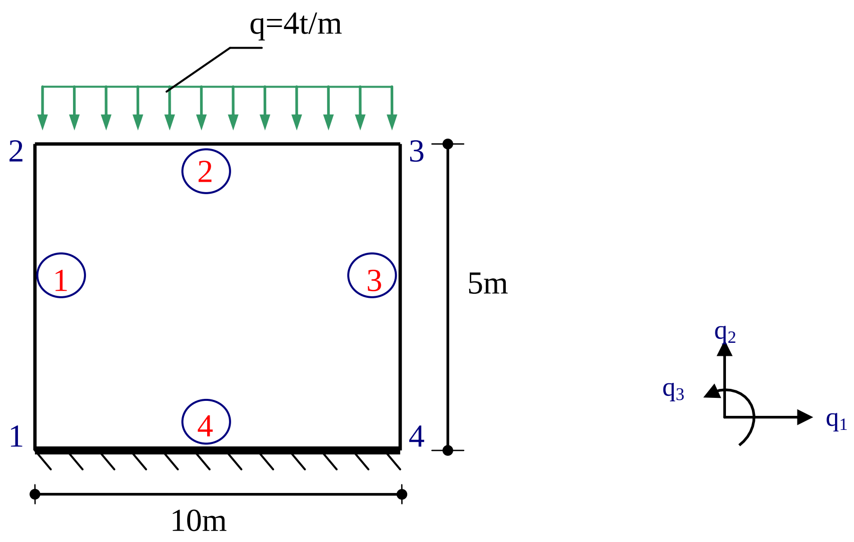
11. Çubuk kesit tesirleri (N , T , M) bulunur. Bunun için her çubuğun rijitlik matrisi (K) , koda göre düzenlenmiş (6x1) lik uç deplasman (q_i) matrisi ile çarpılır ve eğer çubuk üzerinde yük varsa, çarpımın sonucuna bu yükten dolayı oluşan yük matrisi (Q_0) eklenerek çubuğun uç kuvvetleri (Q_i) bulunur.

$$\begin{bmatrix} Q_i \end{bmatrix}_{(6*1)} = \begin{bmatrix} \ \ K \ \ \end{bmatrix}_{(6*6)} * \begin{bmatrix} q_i \end{bmatrix}_{(6*1)} + \begin{bmatrix} Q_0 \end{bmatrix}_{(6*1)} \tag{3.4}$$

Bu sonuçlar kullanılarak çubukların kesit tesirleri N , T ve M (3.5) formülleriyle hesaplanır . Formüllerde *l:* $\cos\theta$ ve *m:* $\sin\theta$ göstermektedir.

$$
\begin{aligned}
&N_1 = Q_1 \cdot l + Q_2 \cdot m \\
&T_1 = -Q_1 \cdot m + Q_2 \cdot l \\
&M_1 = Q_3 \\
&N_2 = +Q_4 \cdot l + Q_5 \cdot m \\
&T_2 = -Q_4 \cdot m + Q_5 \cdot l \\
&M_2 = Q_6
\end{aligned}
\qquad (3.5)
$$

3.2 Elastik Zemine Oturan Basit Bir Rijid Kapalı Çerçeve Uygulaması



Şekil.3.2 Elastik zemine oturan basit bir rijid kapalı çerçeve

Şekil.3.2. de üniform yayılı düşey yük etkisindeki elastik zemine oturan basit bir rijid kapalı çerçeve görülmektedir. Elemanların atalet momentleri $I_1 = I_3 = 0.5\times10^2\,dm^4, I_2 = 2\times10^2\,dm^4$, $I_4 = 14.875\times10^2\,dm^4$ ve zemine elastik yaylarla mesnetlenmiş 4 elemanı için $\mathrm{k} = \mathrm{k_0 b} = 2000\ {}^{t}\!/_{m^2}$ olarak kabul edilmiştir. Bütün elemanlar için elastisite modülü $\mathrm{E} = 2.1\times10^6\ {}^{t}\!/_{m^2}$ dir. 2 nolu çubuk üzerindeki yayılı yük q=4t/m dir.

Aşağıda çözümü verilen bu uygulama [21] F.Keskinel'in çalışması ile karşılaştırılmıştır.Veriler bu çalışmadan birimleriyle aynen alınmıştır.

3.2.1. Çerçeve Sistem Rijitlik Matrisinin Oluşturulması

a.Eleman Rijitlik Matrislerinin bulunması

Yukarıda verilen veriler kullanılarak dört elemanın ayrı ayrı rijitlik matrisleri hesap edilir. [21] Keskinel çalışmasında normal kuvvet etkilerini göz önüne almamıştır. Dolayısıyla bu uygulamada normal kuvvet etkisi için gerekli olan alan değerleri atalet momentlerinden tahmin edilerek bulunmuştur.

1.elemanının rijitlik matrisi:

$$\mathbf{k_1}= \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{bmatrix} 1.01 & 0.00 & -2.52 & -1.01 & 0.00 & -2.52 \\ 0.00 & 72.70 & 0.00 & 0.00 & -72.70 & 0.00 \\ -2.52 & 0.00 & 8.40 & 2.52 & 0.00 & 4.20 \\ -1.01 & 0.00 & 2.52 & 1.01 & 0.00 & 2.52 \\ 0.00 & -72.70 & 0.00 & 0.00 & 72.70 & 0.00 \\ -2.52 & 0.00 & 4.20 & 2.52 & 0.00 & 8.40 \end{bmatrix} \end{array} \cdot 10^3$$

2.elemanının rijitlik matrisi:

$$\mathbf{k_2}= \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} & \begin{bmatrix} 72.70 & 0.00 & 0.00 & -72.70 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.51 & 2.52 & 0.00 & -0.51 & 2.52 \\ 0.00 & 2.52 & 16.80 & 0.00 & -2.52 & 8.40 \\ -72.70 & 0.00 & 0.00 & 72.70 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & -0.51 & -2.52 & 0.00 & 0.51 & -2.52 \\ 0.00 & 2.52 & 8.40 & 0.00 & -2.52 & 16.80 \end{bmatrix} \end{array} \cdot 10^3$$

3.elemanının rijitlik matrisi

$$
\mathbf{k_3}=\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccccc} 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array} \\
\begin{array}{c} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{array} & \begin{bmatrix}
1.01 & 0.00 & 2.52 & -1.01 & 0.00 & 2.52 \\
0.00 & 72.70 & 0.00 & 0.00 & -72.70 & 0.00 \\
2.52 & 0.00 & 8.40 & -2.52 & 0.00 & 4.20 \\
-1.01 & 0.00 & -2.52 & 1.01 & 0.00 & -2.52 \\
0.00 & -72.70 & 0.00 & 0.00 & 72.70 & 0.00 \\
2.52 & 0.00 & 4.20 & -2.52 & 0.00 & 8.40
\end{bmatrix}
\end{array} \cdot 10^3
$$

4.elemanının rijitlik matrisi:

$$
\mathbf{k_4}=\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 10 & 11 & 12 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{array} & \begin{bmatrix}
281.00 & 0.00 & 0.00 & -281.00 & 0.00 & 0.00 \\
0.00 & 10.80 & 28.30 & 0.00 & -1.55 & 13.40 \\
0.00 & 28.30 & 142.00 & 0.00 & -13.40 & 50.00 \\
-281.00 & 0.00 & 0.00 & 281.00 & 0.00 & 0.00 \\
0.00 & .-1.55 & -13.40 & 0.00 & 10.80 & -28.30 \\
0.00 & 13.40 & 50.00 & 0.00 & -28.30 & 142.00
\end{bmatrix}
\end{array} \cdot 10^3
$$

b.Sistem Rijitlik Matrisinin bulunması:

Sistem rijitlik matrisi **SM** elemanların üzerinde yazılı olan kodlar kullanılarak toplama metodu ile oluşturulur.

MS: Bilinmeyen sayısı

$$
\begin{bmatrix} \quad SM \quad \end{bmatrix}_{(MS*MS)} \times \begin{bmatrix} q_i \end{bmatrix}_{(MS*1)} = \begin{bmatrix} YM \end{bmatrix}_{(MS*1)}
$$

SİSTEM MATRİSİ:

$$
\begin{array}{cl}
 & \begin{matrix} \;\;1 & \;\;\;2 & \;\;\;3 & \;\;\;4 & \;\;\;5 & \;\;\;6 & \;\;\;7 & \;\;\;8 & \;\;\;9 & \;\;10 & \;\;11 & \;\;12 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
282 & 0 & -2.52 & -1.01 & 0 & -2.52 & 0 & 0 & 0 & -282 & 0 & 0 \\
0 & 83.4 & 28.3 & 0 & -72.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.55 & 13.4 \\
-2.52 & 28.3 & 151 & 2.52 & 0 & 4.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13.4 & 50 \\
-1.01 & 0 & 2.52 & 73.7 & 0 & 2.52 & -72.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -72.7 & 0 & 0 & 73.2 & 2.52 & 0 & -0.504 & 2.52 & 0 & 0 & 0 \\
-2.52 & 0 & 4.2 & 2.52 & 2.52 & 25.2 & 0 & -2.52 & 8.4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -72.7 & 0 & 0 & 73.7 & 0 & 2.52 & -1.01 & 0 & 2.52 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -0.504 & -2.52 & 0 & 73.2 & -2.52 & 0 & -72.7 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2.52 & 8.4 & 2.52 & -2.52 & 25.2 & -2.52 & 0 & 4.2 \\
-281 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.01 & 0 & -2.52 & 282 & 0 & -2.52 \\
0 & -1.55 & -13.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -72.7 & 0 & 0 & 83.4 & -28.3 \\
0 & 13.4 & 50 & 0 & 0 & 0 & 2.52 & 0 & 4.2 & -2.52 & -28.3 & 151
\end{bmatrix} \cdot 10^3
\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \\ q_9 \\ q_{10} \\ q_{11} \\ q_{12} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ -20.00 \\ -33.34 \\ 0.00 \\ -20.00 \\ 33.4 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

3.2.2 Yer değiştirmelerin Hesabı:

Yer değiştirme matrisinin hesabı $\mathbf{K}^{-1}$ sistem matrisinin tersi ile **P** yük matrisinin çarpımı işleminden ibarettir. Bu işlem,

$\mathbf{q}=\mathbf{K}^{-1}.\mathbf{P}$

şeklinde yazılabilir.

q_1: yatay yer değiştirme (m)

q_2: düşey yer değiştirme (m)

q_3: dönme(radyan)

olmak üzere yer değiştirmeler aşağıda tablo olarak gösterilmiştir.

Tablo 3.1 Yer değiştirmeler

Nod No	q_1 (m)	q_2 (m)	q_3 (radyan)
1	0.08021×10^{-3}	-3.05351×10^{-3}	0.54256×10^{-3}
2	0.11446×10^{-3}	-3.32877×10^{-3}	-2.12490×10^{-3}
3	0.06006×10^{-3}	-3.32877×10^{-3}	2.12490×10^{-3}
4	0.09430×10^{-3}	-3.05351×10^{-3}	-0.54256×10^{-3}

Yer değiştirmeler bulunduktan sonra geri yerleştirme yöntemi ile çubuk uç kuvvetleri hesaplanır.

3.2.3 Çubuk Uç Kuvvetlerinin Bulunması

$\mathbf{Q}_i=\mathbf{k}_i.\mathbf{q}_i+\mathbf{Q}_{0i}$

(1) elemanı için geri yerleştirme yapılırsa, uç kuvvetler:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.01 & 0 & -2.52 & -1.01 & 0 & -2.52 \\ 0 & 72.7 & 0 & 0 & -72.7 & 0 \\ -2.52 & 0 & 8.4 & 2.52 & 0 & 4.2 \\ -1.01 & 0 & 2.52 & 1.01 & 0 & 2.52 \\ 0 & -72.7 & 0 & 0 & 72.7 & 0 \\ -2.52 & 0 & 4.2 & 2.52 & 0 & 8.4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0.0821 \\ -3.05351 \\ 0.54256 \\ 0.11446 \\ -3.32877 \\ -2.12490 \end{bmatrix}$$

Q_1=3.953, Q_2=20.0, Q_3=-4.281, Q_4=-3.953, Q_5=-20.0, Q_6=-15.484 olarak bulunur.

(2) elemanı için geri yerleştirme yapılırsa, yük teriminden dolayı ilave bir matris eklenmesi gerekir.**Q**=**k**.**q**+$\mathbf{Q_0}$. Buradan uç kuvvetler:

$$\begin{bmatrix} Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 72.7 & 0 & 0 & -72.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.504 & 2.52 & 0 & -0.504 & 2.52 \\ 0 & 2.52 & 16.8 & 0 & -2.52 & 8.4 \\ -72.7 & 0 & 0 & 72.7 & 0 & 0 \\ 0 & -0.504 & -2.52 & 0 & 0.504 & -2.52 \\ 0 & 2.52 & 8.4 & 0 & -2.52 & 16.8 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0.11446 \\ -3.32877 \\ -2.12490 \\ 0.06006 \\ -3.32878 \\ 2.12490 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 20.0 \\ 33.34 \\ 0 \\ 20.0 \\ -33.34 \end{bmatrix}$$

Q_4=3.953, Q_5=20.0, Q_6=15.484, Q_7=-3.953, Q_8=-20.0, Q_9=-15.484 olarak bulunur.

(3) elemanı için geri yerleştirme yaparsak, uç kuvvetler:

$$\begin{bmatrix} Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \\ Q_{10} \\ Q_{11} \\ Q_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.01 & 0 & 2.52 & -1.01 & 0 & 2.52 \\ 0 & 72.7 & 0 & 0 & -72.7 & 0 \\ 2.52 & 0 & 8.4 & -2.52 & 0 & 4.2 \\ -1.01 & 0 & -2.52 & 1.01 & 0 & -2.52 \\ 0 & -72.7 & 0 & 0 & 72.7 & 0 \\ 2.52 & 0 & 4.2 & -2.52 & 0 & 8.4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0.06006 \\ -3.32878 \\ 2.12490 \\ 0.09430 \\ -3.05352 \\ -0.54256 \end{bmatrix}$$

Q_7=3.953, Q_8=-20.0, Q_9=15.484, Q_{10}=-3.953, Q_{11}=20.0, Q_{12}=4.281 olarak bulunur.

(4) elemanı için geri yerleştirme yapılırsa, uç kuvvetler:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_{10} \\ Q_{11} \\ Q_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 281 & 0 & 0 & -281 & 0 & 0 \\ 0 & 10.8 & 28.3 & 0 & -1.55 & 13.4 \\ 0 & 28.3 & 142 & 0 & -13.4 & 50 \\ -281 & 0 & 0 & 281 & 0 & 0 \\ 0 & .-1.55 & -13.4 & 0 & 10.8 & -28.3 \\ 0 & 13.4 & 50 & 0 & -28.3 & 142 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0.0821 \\ -3.05351 \\ 0.54256 \\ 0.09430 \\ -3.05352 \\ -0.54256 \end{bmatrix}$$

Q_1=-3.953, Q_2=-20.0, Q_3=4.281, Q_{10}=3.953, Q_{11}=-20.0, Q_{12}=-4.281 olarak bulunur.

3.2.4 Kesit Tesirlerinin Hesabı

Bulunan bu uç kuvvetlerinden kesit tesirlerine (N,T,M) geçmek için aşağıdaki (3.6) formülleri kullanılır. (3.6) formüllerinde $l=\cos\theta$ ve $m=\sin\theta$ göstermektedir.

$$
\begin{aligned}
N_1 &= Q_1 \cdot l + Q_2 \cdot m \\
T_1 &= -Q_1 \cdot m + Q_2 \cdot l \\
M_1 &= Q_3 \\
N_2 &= +Q_4 \cdot l + Q_5 \cdot m \\
T_2 &= -Q_4 \cdot m + Q_5 \cdot l \\
M_2 &= Q_6
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Elemanlardaki kesit tesirleri hesaplanarak aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.Tablo 3.2 de normal kuvvet ve kesme kuvvetinin birimi t, momentin birimi tm dir.

Tablo.3.2 Çubuk kesit tesirleri

Eleman No	**N_1**	**T_1**	**M_1**	**N_2**	**T_2**	**M_2**
1	20.0	-3.953	-4.281	-20.0	3.953	-15.484
2	3.953	20.0	15.484	-3.953	20.0	-15.484
3	20.0	3.953	15.484	-20.0	-3.953	4.281
4	-3.953	-20.0	4.281	3.953	-20.0	-4.281

Keskinel'in [21] bu uygulama için bulduğu sonuçlar aşağıda gösterilmiştir.

Yer değiştirmeler,

$u_1 = 2.91197x10^{-3}$ *radyan*

$u_2 = -0.5432x10^{-3}$ *radyan*

$u_3 = 3.0551x10^{-3}$ *m*

olarak verilmiştir.

Eleman uç kuvvetlerini,

$[p] = [p_0] + [k][u]$

bağıntısıyla hesaplamıştır.

(1) elemanı:

$$[p]_1 = [0] + \begin{bmatrix} 8.4 & 4.2 \\ \\ 4.2 & 8.4 \end{bmatrix} x10^3 \begin{bmatrix} 2.1197 \\ \\ -0.5432 \end{bmatrix} x10^{-3} = \begin{bmatrix} 15.52 \\ \\ 4.34 \end{bmatrix}$$

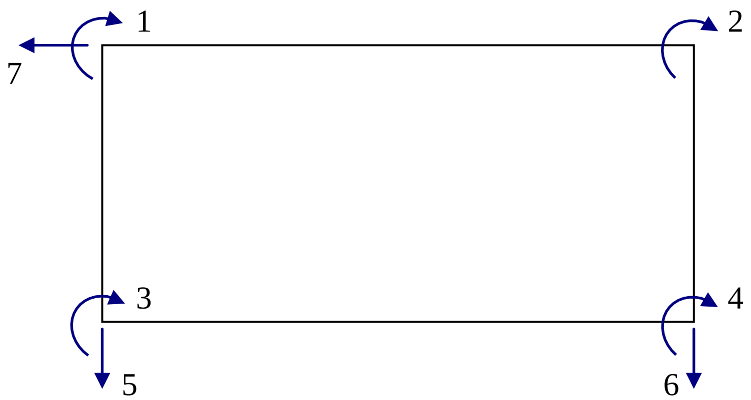
(2) elemanı:

$$[p]_2 = \begin{bmatrix} -33.33 \\ \\ -20.0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8.4 & 0 \\ \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x10^3 \begin{bmatrix} 2.1197 \\ \\ 3.0551 \end{bmatrix} x10^{-3} = \begin{bmatrix} -15.22 \\ \\ -20.0 \end{bmatrix}$$

(4) elemanı:

$$[p]_4 = [0] + \begin{bmatrix} 92.24 & 14.8 \\ \\ 14.8 & 9.21 \end{bmatrix} x10^3 \begin{bmatrix} -0.5432 \\ \\ 3.0551 \end{bmatrix} x10^{-3} = \begin{bmatrix} -4.34 \\ \\ 20.0 \end{bmatrix}$$

Eleman uç kuvvetleri bulunurken simetriden faydalanılmıştır. Normal kuvvet etkisi göz önüne alınmamıştır. Ayrıca yön kabulleri farklı olduğu için işaretler farklılık göstermektedir. Şekil 3.3 te Keskinel'in [21] çalışmasında çözdüğü örnekteki uç yer değiştirmelerin yönü ve numaralanması görülmektedir.



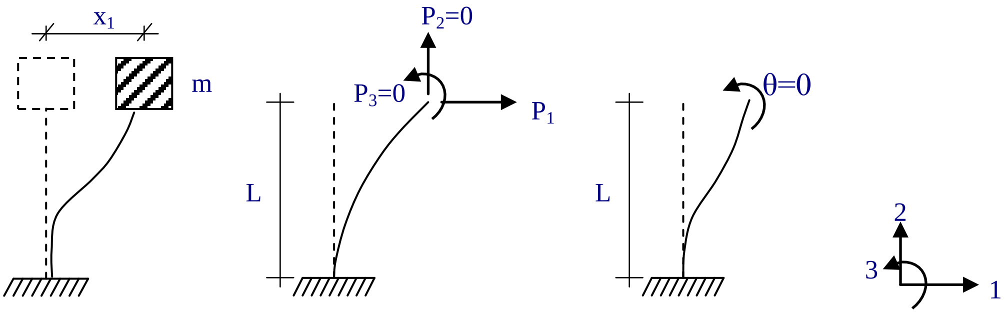
Şekil 3.3 Çerçevenin uç yer değiştirmelerinin numaralanması

4.ÇERÇEVE SİSTEMLERİN DİNAMİK ANALİZİ

4.1.Çubuk Sistemlerin Serbest Titreşimi

4.1.1 Tek Kütleli Sistem

Rijitlik karakteristikleri bilinen bir çubuğun ucuna yerleştirilmiş *m* kütlesinin Şekil 4.1 de gösterildiği gibi, yatay titreşim hareketi yaptığını düşünelim.



Şekil 4.1 Tek kütleli sistemin serbest titreşimi

Newton kanununa göre bu titreşim hareketinin denklemi

$$F = m\ddot{x} = -\bar{k}x \tag{4.1}$$

şeklindedir. Burada, x kütlenin yatay hareket mesafesi, $\ddot{x}$ kütlenin yatay ivmesi, k kütlenin yatay olarak birim mesafe kat etmesi halinde çubuk tarafından kütleye uygulanan kuvvetdir. Bu ikinci derece ve homojen diferansiyel denklemin çözümü için

$$x = C e^{i\omega t} \tag{4.2}$$

kabul eder ve (4.1) de yerine koyar ve $Ce^{i\omega t}$ her iki taraftan götürürsek

$$\bar{k} - \omega^2 m = 0 \tag{4.3}$$

bulunur. Bu denkleme sistemin *frekans denklemi* denir ve ω nın

$$\omega = \sqrt{\frac{\bar{k}}{m}} \tag{4.4}$$

Şeklindeki değerine, sistemin *frekansı* ve

$$\bar{T} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\bar{k}}} \tag{4.5}$$

değerine de sistemin *periyodu* denir.

(4.3) ile verilen frekans denklemi, çok kütleli sistemlerde de aynı formdadır. Yalnız, orada $\bar{k}$ rijitlik terimi yerine, **K** rijitlik matrisi, m kütle değerinin yerini, **M** köşegenel kütle matrisi alacaktır.

Örnek 4.1.: Şekil 4.1. deki çubuk elemanı göz önüne alalım. Burada, P_1 kütlenin çubuğa 1 No.lu doğrultuda yaptığı tesirdir. 2 ve 3 No.lu doğrultularda kütlede atalet kuvvetleri bulunmadığı için P_2 ve P_3 yerine sıfır yazılmıştır. Mukavemetten bilindiği gibi

$$\frac{3EI}{L^3} X_1 = P_1 \tag{4.6}$$

olur. X_1=1 değeri için, kütleye etki eden kuvvet

$$\bar{k} = 3\frac{EI}{L^3} \tag{4.7}$$

bulunur. Bu değer, (4.5) te yerine konursa, sistemin periyodu için

$$\bar{T} = \frac{2\pi}{\sqrt{3\frac{EI}{mL^3}}} \tag{4.8}$$

elde edilir.

Şekil 4.1 deki dönmeyi sıfır kabul edelim. m kütlesinin yatay olarak birim boy ötelenmesi halinde, çubuğun kütleye etkiteceği kuvvet, $\bar{k} = 12EI / L^3$ tür. Bu değeri, denklem (4.5) te yerine koyarsak, sistemin periyodu

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{12\frac{EI}{mL^3}}} \tag{4.9}$$

bulunur.

Periyot ifadesini incelersek şu sonuçlara varabiliriz:

1. Bir taşıyıcı sistemin rijitliği arttıkça, periyodu azalır. Aksine, ne kadar esnek ve fazla yer değiştirme kabiliyetine sahipse periyodu o oranda uzundur.(4.8)
2. Bir taşıyıcı sistemin boyu ve benzer şekilde bir binanın yüksekliği artıkça periyodu büyür.(4.8)
3. Bir taşıyıcı sistemin, periyodu hem taşıyıcı elemanların rijitliğine, hem de kütlesine bağlıdır. Periyot, rijitlikle ters, kütle ile doğru orantılıdır.(4.5)

4. Bir taşıyıcı sistemin periyoduna sadece, titreşim yaptığı doğrultudaki rijitlikleri değil, titreşim olmayan ötelenme ve dönme doğrultularındaki rijitlikleri de etki eder.

4.1.2 İndirgenmiş Rijitlik Matrisi

Bir taşıyıcı sistem herhangi bir doğrultuda titreşim yapabilir. Ama, hesaplarımızda sadelik sağlamak amacıyla titreşimin yalnız bir doğrultuda olduğunu, bu esnada diğer doğrultularda titreşim olmadığını kabul edebiliriz.

Her düğüm noktasında, titreşim yapan serbestlik derecelerini 1,2,3….,n_1 diye ve titreşim yapmayan serbestlik derecelerini de (n_1+1), (n_2+1), ……,n diye, sıra ile numaralarsak, sistemin, dış yüklerini yer değiştirmelere bağlayan **K**.**U**=**P** rijitlik denklemini şu şekilde yazabiliriz.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} n_1 & n-n_1 \end{array} \\ \begin{array}{c} n_1 \\ n-n_1 \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} K_{11} & K_{12} \\ \hline K_{21} & K_{22} \end{array}\right]_{(nxn)} \end{array} \cdot \left[\begin{array}{c} \{U\} \\ \hline \{U_0\} \end{array}\right]_{(nx1)} = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c} \{P\} \\ \hline 0 \end{array}\right]_{(nx1)} & \begin{array}{c} n_1 \\ n-n_1 \end{array} \end{array} \tag{4.10}$$

Burada, toplam serbestlik derecesi sayısı *n*, titreşim yapan serbestlik derecesi sayısı n_1, titreşim yapan serbestlik derecelerindeki yer değiştirme kolon vektörü $\{U\}$,n_1 adet yer değiştirme; titreşim yapmayan serbestlik derecelerindeki yer değiştirmeler kolon vektörü $\{U_0\}$, (n-n_1) adet yer değiştirme, titreşim yapan doğrultularda, kütlelerin sisteme yaptığı atalet kuvvetleri kolon vektörü $\{P\}$, n_1 adet kuvvet, titreşim yapan ve titreşim yapmayan doğrultuları ayırarak yazarsak

$$K_{11}U + K_{12}U_0 = P \tag{4.11}$$

$$K_{21}U + K_{22}U_0 = 0 \tag{4.12}$$

buluruz. (4.10) denkleminde U_0 yer değiştirmeleri çözülür.

Burada

$$\{P\} = -\omega^2 \{U\} \tag{4.13}$$

olarak yazılabilir.

U_0 (4.11) denkleminde yerine konursa, rijitlik denklemi

$$\mathbf{K}^*.\mathbf{U}=\mathbf{P} \tag{4.14}$$

şeklini alır.

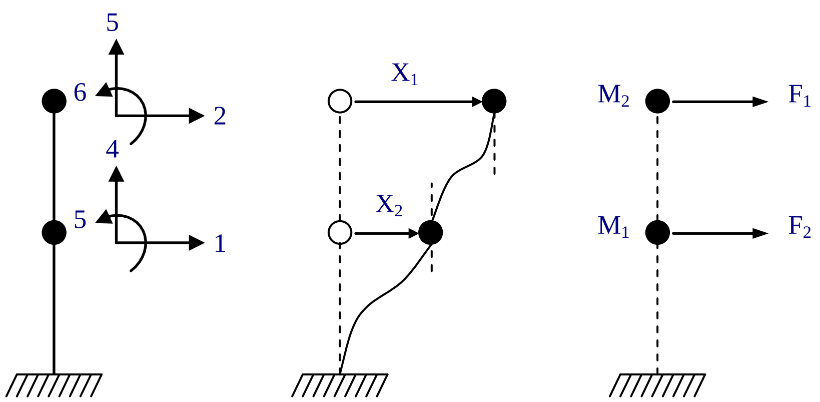
Burada, $\mathbf{K}^*$ matrisine, *indirgenmiş rijitlik matrisi* denir. (n_1xn_1) boyutundadır. İndirgenmiş rijitlik matrisi, yalnız titreşim yapan doğrultulardaki kuvvetleri, bu doğrultudaki yer değiştirmeleri bağlar ve

$$\mathbf{K}^*=\mathbf{K}_{11}-\mathbf{K}_{12}\,\mathbf{K}_{22}^{-1}\,\mathbf{K}_{12}^{T} \tag{4.15}$$

ifadesinden elde edilir. Böylece (4.10) da verilen ifadenin içinden titreşim yapmayan doğrultular elenmiş ve sadece titreşim yapan doğrultuları içeren indirgenmiş yeni bir denklem takımı bulunmuş olur.

İndirgenmiş rijitlik matrisinin en büyük özelliği, yalnız titreşim yapan doğrultulardaki yer değiştirmeleri ilgili kuvvetlere bağladığı halde, titreşim yapmayan diğer doğrultulardaki rijitlikleri de temsil etmesidir. Titreşim olan doğrultudan başka doğrultularda serbestlik derecesi tarif edilmiş bütün taşıyıcı sistemlerde, indirgenmiş $\mathbf{K}^*$ matrisinin kullanılması, her doğrultudaki rijitliğin göz önüne alınmış olması sebebi ile, periyot hesaplarındaki kesinlik derecesini artırır. İndirgenmiş rijitlik matrisinin boyutu n_1xn_1 dir. Tarif edilmiş bütün serbestlik derecelerinde titreşim oluyorsa, yani $n_1=n$ ise, indirgenmiş rijitlik matrisi, esas sistem rijitlik matrisine eşittir. Yani $\mathbf{K}=\mathbf{K}^*$ dir.

4.1.3 Çok Kütleli Sistem



Titreşim yapan doğrultular = 1 ve 2

Titreşim yapmayan doğrultular = 3,4,5 ve 6

Şekil 4.2. İki kütleli sistemin titreşimi

Çok kütleli bir taşıyıcı sisteme ait serbest titreşim denklemlerini çıkarabilmek için, ifadelerde sadelik olsun diye Şekil 4.2 de gösterildiği gibi, iki kütleli bir sistem göz önüne alalım. Kütleleri M_1 ve M_2 ile, kütleler üzerine etkiyen atalet kuvvetlerini de sırasıyla F_1 ve F_2 ile gösterirsek , 1 ve 2 No.lu doğrultularda yer alan titreşim denklemini,

$$M_1 \ddot{X}_1 = F_1 \tag{4.16}$$

$$M_2 \ddot{X}_2 = F_2 \tag{4.17}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada X_1 ve X_2, kütlelerin sırası ile, 1 ve 2 doğrultularındaki ötelenmeleridir. $\ddot{X}_1$ ve $\ddot{X}_2$ ise, uzaklığın zamana göre ikinci türevidir. Bu diferansiyel denklemleri matris formunda yazarsak

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \tag{4.18}$$

bulunur. Buradaki, F_1 ve F_2 kuvvetleri, sistemin kütlelere olan etkileridir ve pozitif yönleri, X lerin pozitif yönündedir. Newton'un etki=tepki prensibine göre, bu kuvvetlerin ters işaretlileri kütleler tarafından sistemin düğüm noktalarına etki eder. Yani, düğüm noktalarında sisteme etki eden P_1 ve P_2 atalet kuvvetleri için

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \tag{4.19}$$

yazılmalıdır.

Düğüm noktalarındaki $\{P\}$ kuvvetleri, sistemin $\{X\}$ ile gösterilen yer değiştirmelerine sistem rijitlik matrisi ile bağlıdır. Eğer, $\{P\}$ ler yalnız titreşim yapan doğrultuları içeriyorsa, sistemin rijitlik matrisi olarak, $\mathbf{K}^*$ indirgenmiş rijitlik matrisi kullanılmalıdır. O halde

$$[K]^* \{X\} = \{P\} \tag{4.20}$$

yazılır. Özellikle, iki kütleli sitem için, bu ifadenin açık şekli şöyledir:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^* & K_{12}^* \\ K_{21}^* & K_{22}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} \tag{4.21}$$

(4.21) da, $\{P\}$ kolon vektörünü, (4.19) den yararlanarak, ters işaretle (4.18) da yerine koyarsak, diferansiyel denklem takımı,

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} K_{11}^* & K_{12}^* \\ K_{21}^* & K_{22}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \tag{4.22}$$

şeklini alır. Burada,

$$X_1 = D_1 e^{i\omega t} \qquad \text{ve} \qquad X_2 = D_2 e^{i\omega t} \tag{4.23}$$

çözümleri kabul edilir ve iki defa türev alınarak,(4.22) de yerine konursa ve her iki taraftan $e^{i\omega t}$ terimleri götürülür ve düzenlenirse,

$$\left[\begin{bmatrix} K_{11}^{*} & K_{12}^{*} \\ K_{21}^{*} & K_{22}^{*} \end{bmatrix} - \omega^{2}\begin{bmatrix} M_{1} & 0 \\ 0 & M_{2} \end{bmatrix}\right] \cdot \begin{Bmatrix} D_{1} \\ D_{2} \end{Bmatrix} = \{0\} \tag{4.24}$$

bulunur.

Bu denklemde ω sistemin frekansıdır, ve iki kütleli sistemde ω_1 ile ω_2 gibi iki ayrı değere sahiptir. İki kütle için yazılan (4.24) denklemi genelleştirilirse, *n* sayıda kütle için şöyle yazılabilir:

$$\left[\begin{bmatrix} K_{11}^{*} & K_{12}^{*} & \ldots & K_{1n}^{*} \\ K_{21}^{*} & K_{22}^{*} & \ldots & K_{2n}^{*} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{n1}^{*} & K_{n2}^{*} & \ldots & K_{nn}^{*} \end{bmatrix} - \omega^{2}\begin{bmatrix} M_{1} & 0 & 0 \\ 0 & M_{2} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & M_{n} \end{bmatrix}\right]_{(nxn)} \begin{Bmatrix} D_{1} \\ D_{2} \\ \ldots \\ D_{n} \end{Bmatrix} = \{0\} \tag{4.25}$$

veya

$$[\mathbf{K}^{*}\text{-}\omega^{2}\mathbf{M}]\,\overline{\boldsymbol{D}} = \mathbf{0} \tag{4.26}$$

Genellikle hesaplarda kolaylık sağlamak bakımından M kütlesi yerine, $M = W/g$ ağırlığı kullanılır ve g yerçekimi ivmesi sabit olduğu için, matrisin dışına çıkarılarak ω^2/g şeklinde aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$[\mathbf{K}^{*}\text{-}\lambda\,\mathbf{W}]\;\overline{\boldsymbol{D}} = \mathbf{0} \tag{4.27}$$

Burada, yardımcı notasyon,

$$\lambda = \omega^2/g$$

dir ve W kütlelerin ağırlıklarını gösterir.

Denklem (4.25) de verilen lineer homojen denklem takımının, sıfır olmayan köklere sahip olabilmesi için, katsayılar determinantının sıfır olması gerekir.

$$Det\left|[K]^{*} - \omega^{2}[M]\right| = 0 \tag{4.28}$$

bu determinanta *frekans determinantı* denir. Frekans determinantını sıfır yapan ω değerlerine *özfrekans* denir. Özfrekans değerlerinin, matematikte

$$[A] - \lambda[I] = 0 \tag{4.29}$$

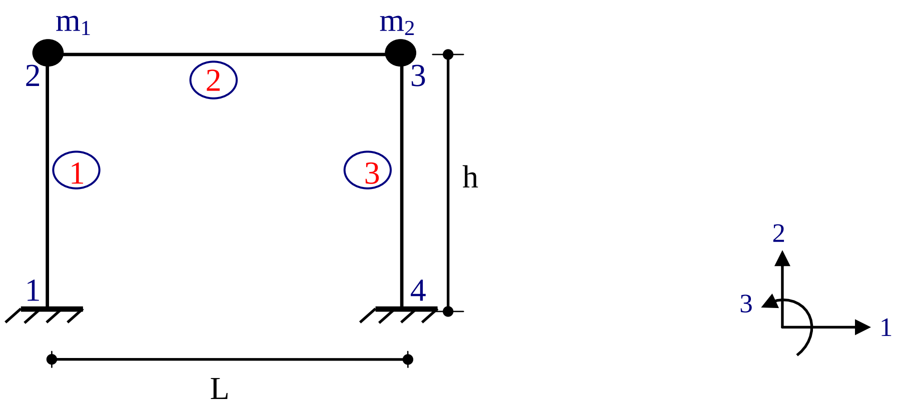
şeklinde verilen öz değer problemi yardımıyla çözülür.

4.2 Çerçeve Sistemin Bilgisayar Programı İle Çözümü

Bölüm 3 te anlatıldığı gibi sistemin statik hesabı yapılıp sistem matrisi hesaplandıktan sonra, aşağıda anlatılan dinamik hesap adımlarına geçilir. Burada çerçeve sistemin serbest titreşimi üzerinde durulmuştur.

1. İndirgenmiş rijitlik matrisi boyutu (n_1) belirlenir. Bu işlem için nod matrisinin yatay yer değiştirme kolonundaki en büyük değer alınır.
2. Data dosyasından kütle matrisi girişi yapılır. Kütle matrisi **M** köşegenel bir matristir.
3. Sistem matrisi (4.10) ifadesinde gösterildiği $\mathbf{K}_{11}$, $\mathbf{K}_{12}$, $\mathbf{K}_{21}$, $\mathbf{K}_{22}$ matrislerine ayrılır.$\mathbf{K}_{22}$ matrisinin tersi alınması için bir alt programdan yararlanılır. Ayrıca gerekli matris çarpım işlemlerinin yapılabilmesi için bir çarpım alt programı da hazırlanmıştır.
4. (4.15) ifadesi oluşturularak $\mathbf{K}^*$ matrisi bulunmuş olur.
5. $\mathbf{K}^*$ ve **M** kütle matrisi hazırlandıktan sonra (4.26) ifadesi yardımıyla bir öz değer hesabı yapabilen bilgisayar programı kullanılarak öz değer ve öz vektörler bulunur ve bu ifadelerden öz frekans, periyot ve sistemin modları hesap edilir. Bu ifadeler hesaplanırken birkaç değişik öz değer bilgisayar programı hazırlanmış ve birbirleriyle karşılaştırılmışlardır.

Yukarıda anlatılan adımları daha iyi anlaşılabilmesi için Şekil 4.3. te görülen çerçeve sistemlerden yaralanarak bir basit örnek yapalım ve zeminin titreşime etkisini klasik sistemle karşılaştıralım.



Şekil 4.3 Zemine ankastre bağlı tek katlı ve tek açıklıklı çerçeve

Şekil 4.3 te zemine ankastre olarak mesnetlenmiş rijit bir çerçeve sistem görülmektedir. Kolaylık açısından E=1kN/m^2 , A=1m^2 , I=1m^4 olarak alınmıştır. Ayrıca çerçeve yüksekliği h=1m, çerçeve açıklığı L=1m, kütleler m_1=m_2=0.5t olarak alınmıştır. Sistem matrisi,

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	13	-1	0	0	6	0
2	-1	13	0	0	0	6
3	0	0	13	-12	6	6
4	0	0	-12	13	-6	-6
5	6	0	6	-6	8	2
6	0	6	6	-6	2	8

olarak hesaplanır.

İndirgenmiş rijitlik matrisi, (4.15) formülü kullanılarak

$$\mathbf{K}^*=\begin{bmatrix} -13 & -1 \\ -1 & 13 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Kütle matrisi,

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir.

Öz değer ve öz vektörler (4.26) ifadesi yardımıyla bir öz değer hesabı yapan bir bilgisayar alt programı yardımıyla ana program içinde hesaplanır. Buradan

$$\omega_1 = 4.899 \, rad/s$$

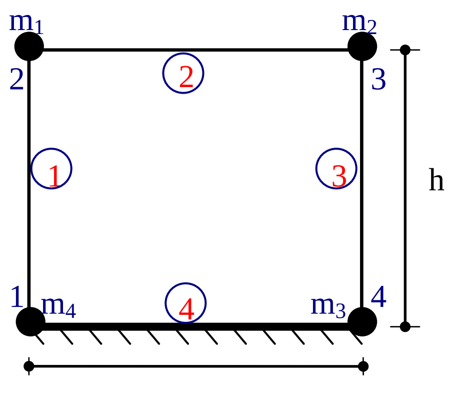
$$\omega_2 = 5.2915 \, rad/s$$

olarak bulunur.

Sistemin modları ise ϕ_1 ve ϕ_2,

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{ve} \qquad \phi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.



Şekil 4.4 Elastik zemin üzerine oturan tek katlı ve tek açıklıklı çerçeve

Şekil 4.4 teki sistemin kütle matrisini,

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

olarak ele alalım.

Değişik k zemin katsayıları ve frekanslar arasındaki ilişki Tablo 4.1 de verilmiştir.

Tablo. 4.1 Zemin katsayıları ve frekanslar arasındaki ilişki

$k(kN/m^2)$	ω_1 (rad/s)	ω_2 (rad/s)
2.10^2	3.2071	3.6394
2.10^3	4.2388	4.6605
2.10^4	4.6881	5.0941
2.10^5	4.8329	5.2301

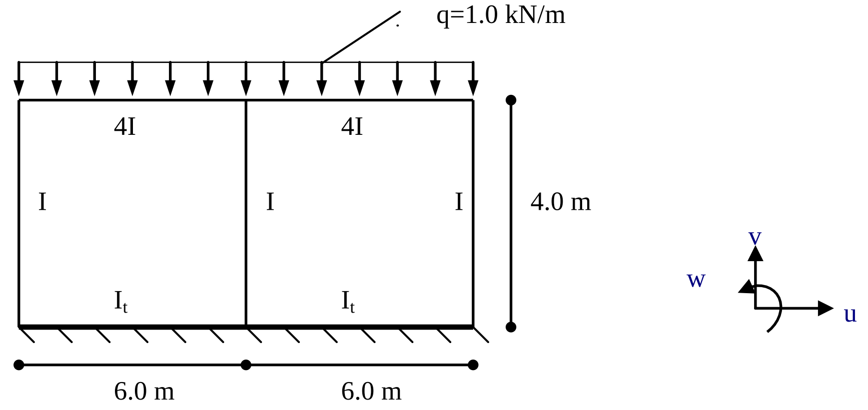
Tablodan görüldüğü gibi zemin yatak katsayısının yüksek olması durumunda frekanslar zemine ankastre olarak bağlı olan klasik çerçeve sistemin frekanslarına yaklaşıktır.

Bu sistemlerin eşdeğeri konsol titreşimini incelersek, (4.9) ifadesinden frekans, $\omega = 4.89\,rad/s$ bulunur. Eğer (4.8) ifadesi kullanılırsa $\omega = 2.45\,rad/s$ olarak bulunur.

5.UYGULAMALAR

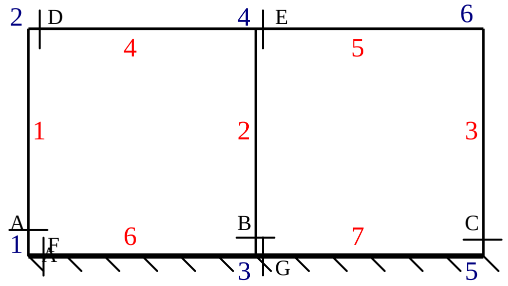
5.1 Elastik Zemine Oturan İki Açıklıklı Çerçeve Sistemin Statik Analizi

Şekil 5.1 de görülen elastik zemine oturan iki açıklıklı ve tek katlı çerçeve sistem incelenmiştir. Elemanların elastisite modülü E= 2.1×10^6 KN/m, atalet momentleri $I = 1.6 \times 10^{-3}$ m^4, zemin üzerine oturan çubukların atalet momentleri $I_t = 2.893 \times 10^{-2}$ m^4, zemin yatak katsayısı k=3000 kN/m^2, 4 ve 5 nolu eleman üzerinde yayılı yük bulunmaktadır. Bu yayılı yükün değeri q=1.0 kN/m olarak verilmiştir. Kirişlerin boyları L_k=6.0 m, kolonların boyları L_{kl}=4.0 m olarak verilmiştir.



Şekil 5.1 Betonarme kapalı çerçeve

Aşağıda Şekil 5.2 de sistemin elemanlarının numaraları ve düğüm noktaları numaraları gösterilmiştir.



Şekil 5.2 Çerçevenin numaralandırılması

Bölüm 3 te anlatıldığı gibi sistem hesaplandıktan sonra yer değiştirmeler bulunur. Bulunan yer değiştirmeler Tablo 5.1 de gösterilmiştir.

Tablo 5.1 Yer değiştirmeler

Nod No	**v ($x10^{-3}$) mm**	**θ ($x10^{-3}$) mm**
1	-0,44878	0,09369
2	-0,45335	-0,24307
3	-0,36638	0
4	-0,38009	0
5	-0,44878	-0,09369
6	-0,45335	0,24307

Geri yerleştirme yapıldıktan sonra sistemin kesit tesirleri bulunmuş olur. Kesit tesirleri Tablo 5.2 te gösterilmiştir.

Tablo 5.2 Kesit tesirleri

Eleman No	**T_1**	**M_1**	**T_2**	**M_2**
1	-0,19	-0,09	0,19	-0,66
2	0	0	0	0
3	0,19	0,09	-0,19	0,66
4	2,40	0,66	3,60	-4,25
5	3,60	4,25	2,40	-0,66
6	-2,40	0,09	-3,60	3,89
7	-3,60	-3,89	-2,40	-0,09

Tablo 5.3 te zemin katsayısı yüksek derecede olan bir sistemle aynı sistemin zemine ankastre bağlı çerçeve çözümü karşılaştırılmıştır. Tablodaki birinci kolonlar zemine ankastre bağlı çerçeve sistem sonuçlarını, ikinci kolonlar ise zemin yatak katsayısı yüksek olan sistemin sonuçlarını göstermektedir. Zemin yatak katsayısı $k=3.10^6$ kN/m^2 olarak alınmıştır.

Tablo 5.3 Kesit tesirleri

Eleman No	**T_1 (kN)**		**M_1(kNm)**		**T_2(kN)**		**M_2(kNm)**	
1	-0,31	-0,30	-0,41	-0,38	0,31	0,30	-0,82	-0,81
2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0,31	0,30	0,41	0,38	-0,31	-0,30	0,82	0,81
4	2,46	2,45	0,82	0,81	3,54	3,55	-4,08	-4,09
5	3,54	3,55	4,08	4,09	2,46	2,45	-0,82	-0,81

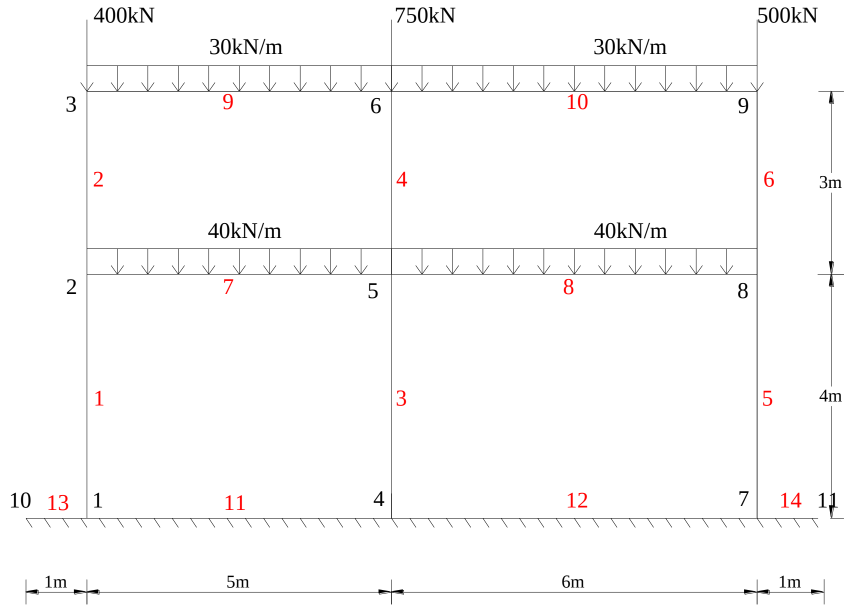
Tablo 5.4 da k zemin yatak katsayılarını değiştirerek çubukların ilk uçlarında oluşan moment değerleri verilmiştir. Harflerin elemanların hangi bölgesini gösterdiği Şekil 5.2 de gösterilmiştir.

Tablo 5.4 Değişik k katsayıları için Elemanların ilk uçlarındaki moment değerleri

	A	B	C	D	E	F	G
$k(kN/m^2)$	M11	M12	M13	M14	M15	M16	M7
3000	-0.09	0.00	0.09	0.66	4.25	0.09	-3.89
30000	-0.21	0.00	0.21	0.73	4.16	0.21	-3.12
300000	-0.33	0.00	0.33	0.79	4.10	0.33	-1.68
3000000	-0.38	0.00	0.38	0.81	4.09	0.38	-0.95

5.2 Elastik Zemine Oturan İki Açıklıklı ve İki Katlı Çerçeve Sistemin Statik ve Dinamik Çözümü

Şekil 5.3 te görülen iki açıklıklı ve iki katlı çerçeve sistem, zemine sürekli bir temel kirişiyle mesnetlenmiştir. Zemin yatak katsayısı k=450MPa dir. İdealleştirme, geometri ve yükleme şeması Şekil 5.3 te gösterilmiştir. Çubuk malzemesinin elastisite modülü E= 25 GPa olarak alınmıştır.



Şekil.5.3 Sistem, idealleştirme, geometri ve yükleme durumu

1 kat kolonları 0.25mx 0.50m boyutunda, 2.kat kolonları 0.25mx0.40m boyutunda, kat kirişleri 0.60m x0.20m boyutlarında T kesit olarak göz önüne alınmıştır. Döşeme kalınlığı 0.12m dir. Zemin kirişi ters T olarak modellenmiştir. Alt tarafı 1.5 m, üst tarafı 0.75m, yüksekliği 1.5 m ve yan kolların yüksekliği 0.40 m olarak verilmiştir. 1.kat kirişleri üzerinde 40 kN/m, 2 .kat kirişleri üzerinde 30 kN/m yayılı yük bulunmaktadır. 3 nolu düğüm noktasında düşey 400 kN, 6 nolu düğüm noktasında düşey 750 kN ve 9 nolu düğüm noktası üzerinde düşey 500 kN yük yük bulunmaktadır. Bu veriler kullanılarak çözümler yapılmış ve sonuçlar aşağıda yorumlanmıştır.

Bulunan sonuçlar Aydoğan ’ın [26] yapmış olduğu makale sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Aydoğan [26] çalışmasında sistemin statik çözümlerini vermiş, dinamik etkileri göz önüne almamıştır. Bu çalışmasında farklı olan, elastik zemine oturan çubukta hesap yapılırken kayma etkisini de göz önüne alınmasıdır. Aydoğan [26] çalışmasında sonlu eleman metodunu kullanmış ve sistemin rijitlik matrislerini tanımlayarak sistemi çözen bir bilgisayar programı da hazırlamıştır.

Sistemin çözümleri yapıldığında Tablo 5.5. te bulunan yer değiştirmeler bulunmuştur. Tablo 5.5. de sadece zemin üzerine oturan çubuklardaki düşey yer değiştirme değerleri verilmiştir. Aydoğan [26] çalışmasında sadece 4 nolu elemanın düşey yer değiştirmesini vermiştir. Bu değer -0.44702 dir. Diğer yer değiştirmeleri bir grafik üzerinde göstermiştir.

Tablo 5.5 Yer değiştirmeler

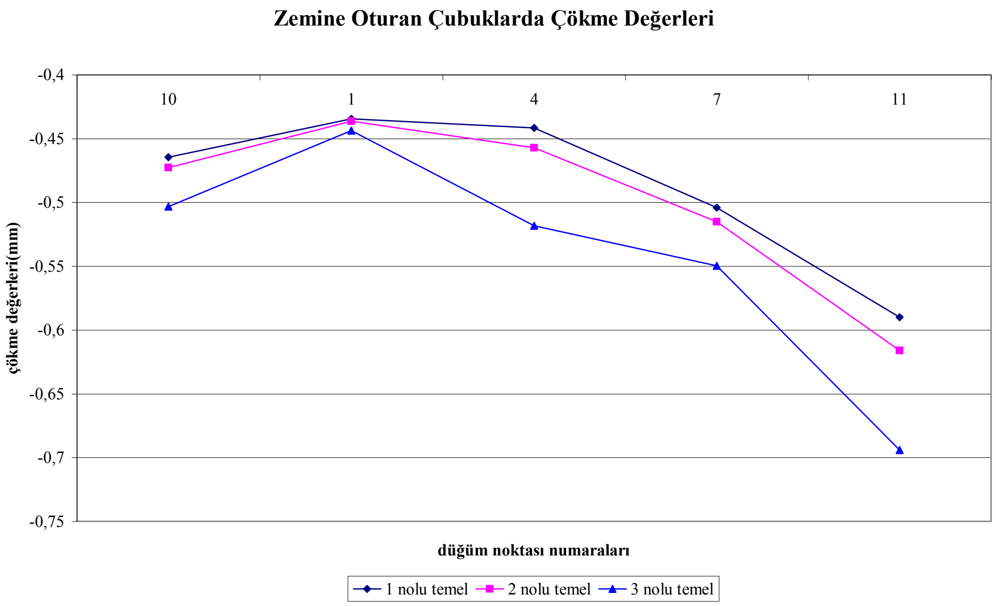
Düğüm Noktası No	Düşey Yer değiştirme (mm)
1	-0.43445
4	-0.44172
7	-0.50398
10	-0.46469
11	-0.59001

Sistemin kesit tesirleri hesaplanmış ve Tablo 5.6 de 4 nolu düğüm noktasına birleşen 3, 11, 12 nolu çubuklar ile en üst kat kirişlerinden 10 nolu eleman seçilmiştir.

Tablo 5.6 Kesit tesirleri

Çubuk no	N_1(kN)	T_1(kN)	M_1(kNm)	N_2	T_2	M_2
3	1165.40	-3.64	-4.53	-1165.40	3.64	-10.04
10	28.55	96.41	82.91	-28.55	83.59	-44.44
11	-8.70	-355.83	-91.67	8.70	-568.89	594.92
12	-12.35	-596.51	-590.39	12.35	-450.01	112.78

Karşılaştırma bakımından 3 ayrı temel durumu incelenmiştir. Bunlardan 1 nolu temel yüksekliği 1.5 m ve genişliği 1.5m olan temeli, 2 nolu temel yüksekliği 1.5m ve genişliğin 1.2m olan temeli ve 3 nolu temelde yükseklik 1.2m iken temel genişliğinin 1.5m olduğu hali göstermektedir. Çözümler yapılmış ve sonuçlar Şekil 5.4 te grafik olarak gösterilmiştir.



Şekil.5.4 Zemine oturan çubukların düşey yer değiştirmeleri

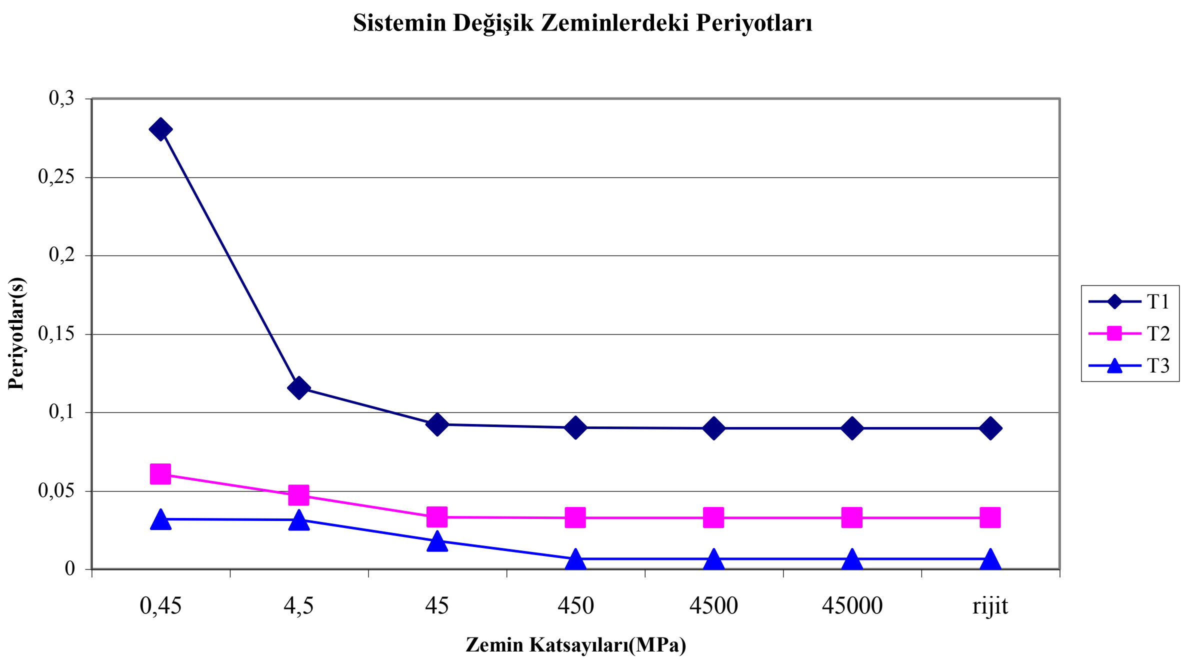
Şekil 5.4 ten görüldüğü gibi temel yüksekliğinin değişmesi çökme değerlerini önemli ölçüde etkiliyor.

Tablo 5.7 da Şekil 5.3 te verilen sistemde 4 nolu düğüm noktasının, değişik zemin katsayıları ve temel yüksekliğinin değişmesi sonucunda bulunan çökme ve maksimum moment değerleri gösterilmiştir.

Tablo 5.7 4 nolu düğüm noktasının çökme ve moment değerlerinin karşılaştırması

Durum	Zemin katsayısı(MPa)	Kiriş yüksekliği(m)	Çökme değeri(mm)	Maksimum moment(kNm)
1	300	1.2	-0.71907	588.44
2	300	1.5	-0.63866	590.28
3	600	1.5	-0.34354	593.85

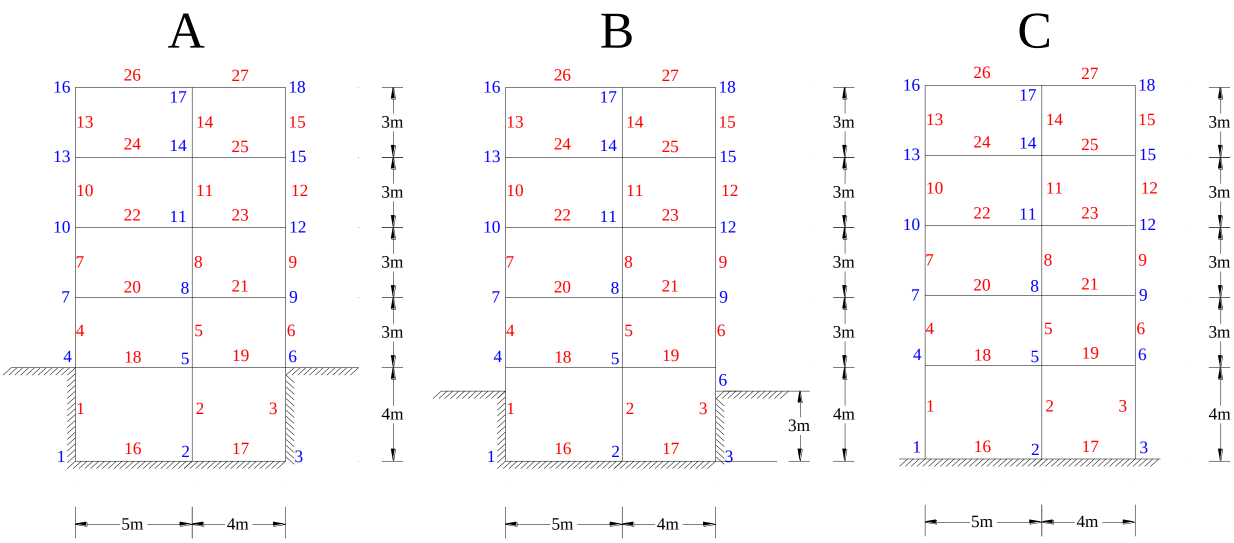
Sistem dinamik olarak çözülürse, sistemin ilk üç periyodu, T_1=0.089 sn ,T_2=0.0326 sn ve T_3=0.00634 sn olarak bulunur. Değişik zemin katsayıları kullanılarak sistem çözüldüğünde zeminin periyotlara etkisi Şekil 5.5 te gösterilmiştir. Bu çözümler klasik sistemle yapılan hesapla da karşılaştırılmıştır. Grafikten de görüldüğü gibi zemin sertleştikçe periyot azalıyor.



Şekil 5.5 Sistemin değişik zeminlerdeki periyotları

5.3 Zemine Oturan Çok Katlı Çerçeve Sistem

Şeki 5.6 da görülen iki açıklıklı ve 5 katlı sistem elastik zemin üzerine oturmaktadır. Bu çerçeve sistemde 27 eleman ve 18 düğüm noktası vardır. Bu sistem çözülürken zemin yatak katsayısı k=45MPa, sistemde kullanılan malzemenin elastisite modülü E=25GPa, kolaylık açısından tüm çubuk kesitleri 0.25mx0.50m olarak alınmıştır. 13 nolu düğüm noktasında yatay ve pozitif yönde 2kN, 16 nolu düğüm noktasında yatay ve pozitif yönde 3kN, 9 nolu düğüm noktasında yatay ve negatif yönde 4kN ve 17 nolu düğüm noktasında düşey yönde 3kN nodal yük bulunmaktadır. 20,21,22,23,24,25,26 ve 27 nolu çubuklar 4kN/m değerinde yayılı yük ile yüklenmiştir. Sistemin statik ve dinamik çözümleri yapılmış ve aşağıda yorumlanmıştır. Tablo 5.8 de seçilen beş elemandaki kesit tesirlerinin karşılaştırılması yapılmıştır.



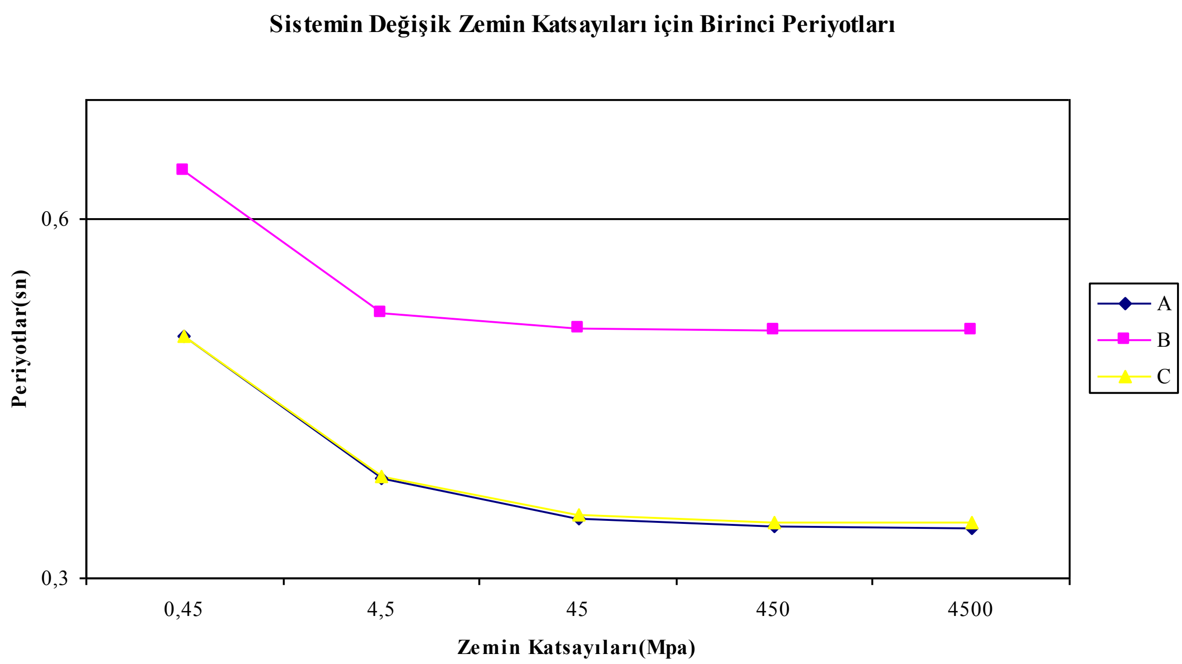
Şekil 5.6 Çerçeve sistem ve idealleştirme

Tablo 5.8 A,B,C Sistemlerinde 1, 3 16 , 27 ve 8 nolu elamanlardaki kesit tesiri değişimi

		Elemanın Sağ Tarafı			Elemanın Sol Tarafı		
	E.No	N_1(kN)	T_1(kN)	M_1(kNm)	N_1(kN)	T_1(kN)	M_1(kNm)
A	1	0.15	0.04	0.02	-30.86	1.02	-0.52
B	1	4.15	1.26	1.25	-32.04	0.29	-0.21
C	1	29.15	2.19	6.25	-29.15	-2.19	2.53
A	3	0.15	-0.03	-0.02	-31.05	-2.07	0.58
B	3	4.78	-1.59	-1.55	-32.75	-1.24	-0.01
C	3	29.40	-1.64	-5.13	-29.40	1.64	-1.43
A	8	71.21	3.28	5.04	-71.21	-3.28	4.79
B	8	69.76	3.27	5.03	-69.76	-3.27	4.79
C	8	72.66	3.29	5.03	-72.66	-3.29	4.82
A	16	0.04	-0.15	-0.02	-0.03	-42.60	10.46
B	16	1.26	-4.15	-1.25	-0.49	-41.03	17.89
C	16	2.19	-29.15	-6.25	-0.44	-43.67	19.01
A	27	-4.11	17.01	29.43	4.11	-1.01	6.60
B	27	-4.04	16.94	29.33	4.04	-0.94	6.44
C	27	-4.18	17.07	29.52	4.18	-1.07	6.75

Tablo 5.8 de N_1, T_1, M_1 sırasıyla elemanların birinci ucundaki normal kuvvet, kesme kuvveti ve moment değerlerini, N_2, T_2, M_2 sırasıyla elemanların ikinci ucundaki normal kuvvet, kesme kuvveti ve moment değerlerini gösterir. Sistem hazırlanırken elamanın ilk ucu küçük numaralı düğüm noktasının olduğu taraf, ikinci noktasıda büyük numaralı düğüm noktasının olduğu taraf olarak kabul edilmiştir. Örneğin, 11 nolu elemanı göz önüne alınırsa elemanın birinci ucunun düğüm noktası numarası 11, ikinci ucunun düğüm noktası numarası ise 14 olarak alınır.

Değişik zemin katsayıları için dinamik çözümleri her üç sistem için çözülmüş ve sonuçlar Şekil 5.7 da grafik olarak gösterilmiştir. Grafikten görüldüğü gibi zemin sertleştikçe periyotlar azalıyor.



Şekil.5.7 Sistemin periyotları

6. SONUÇLAR

Bu çalışmada Winkler elastik zeminine oturan çerçeve sistemler için, enerji yöntemleri ve başlangıç değerler metodunu kullanan, statik ve dinamik hesap yapabilen bir bilgisayar programı geliştirilmiştir.

Problemlerin çözümünden sonra aşağıdaki yargılara ulaşılmıştır.

1. Yapılan bilgisayar programı mevcut çeşitli bilgisayar programları ve literatürde varolan çeşitli problemlerle karşılaştırıldığında geçerli sonuçlar vermektedir.

2. Üçüncü bölümde yapılan uygulamada Keskinel [21] normal kuvvet etkilerini göz önüne almadan hesapları yapmıştır. Bu çalışmada ise normal kuvvet etkileri dikkate alınmıştır. Ortaya çıkan sonuçlar karşılaştırıldığında normal kuvvet etkisinin sonuçları çok fazla etkilemediği görülmüştür.

3. Zemin katsayılarının değişmesinin sonuçlara önemli ölçüde etki ettiği görülmüştür. Klasik yöntemle çözülen sistemlerle karşılaştırıldığında zemin yatak katsayısının çok büyük olması halinde aynı sonuçların bulunduğu görülmüştür.

4. Yüksek katlı sistemlerde yapının zemin içindeki durumu alt kattaki elemanlarda özellikle kolonlarda değişik sonuçlar ortaya çıkarırken, üst katlarda kolon ve kirişlerde sonuçları değiştirmediği görülmüştür.

5. İncelenen çerçeve sistemlerde zemin katsayılarının değişmesi sonuçları artırıp veya azaltmasına rağmen, elemanlardaki uç kuvvetlerine bakıldığında anormal bir artış yada azalma olmadığı görülmüş, sonuçların orantılı olarak azalıp veya arttığı tespit edilmiştir. Yani çerçeve içinde herhangi bir elamanda çok farklı kuvvetler oraya çıkmamıştır.

6. Bu çalışma için oluşturulan zemine oturan çubuğa ait rijitlik matrislerinde zemin katsayısı sonsuza olarak alınırsa, bulunan rijitlik matrisi klasik rijitlik matrisinin aynısıdır.

7. Yapılan hesaplarda temel yüksekliğinin değişmesi de sonuçları etkilediği görülmüştür.

8.a. Sistemde dinamik hesaplar yapıldığında, zemin sertleştikçe periyodun azaldığı görülmüştür.

8.b. Sistemin kütlesini artırdığımızda periyodunun da arttığı görülmüştür.

8.c. Sistemin yüksekliği arttıkça periyodunun arttığı görüldü.

9. Dinamik hesaplar yapılırken öz değer hesabı yapan üç ayrı teori dikkate alınarak üç ayrı bilgisayar programı hazırlanmış ve programlar test edilmiştir. Tüm yapılan programların aynı sonuçları verdiği görülmüştür.

10. Sonlu eleman metoduyla hazırlanmış programlar ile bu çalışmada kullanılan başlangıç değerler metoduyla yapılan program karşılaştırılmış, sonlu eleman metodundan daha kesin sonuçlar verdiği görülmüştür.

11. Dinamik hesaplarda sistemin sadece serbest titreşimi incelenmiştir.

12. Elastik zemine oturan elemanda eksenel yük hesabı yapılmış, zemin yanal sürtünme kuvvetleri kabul edilen bir model dikkate alınarak başlangıç değerler metoduyla hesaplanarak yapılan bilgisayar programında kullanılmıştır.

13. Yapılan bilgisayar programı yayılı yükler, tekil yük ve düğüm noktalarına gelen yükler altında çözüm yapabilmektedir.

KAYNAKLAR

[1] **Hetenyi, M.,** 1946. Beams on Elastic Foundation, The University of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan.

[2] **İyengar, S.R., Anantharamu, S.,** 1960. Influence Lines for Beams on Elastic Foundations, J.Struc. Div.Proceedings, ASCE, June.

[3] **Malter, H.,** 1960.Numerical Solutions for Beams on Elastic Foundations, Transactions, ASCE, Vol.125, pp.757-791.

[4] **Dodge, A.,** 1964. Influence Function for Beams on Elastic Foundations, J.Struc. Div. Proceedings, ASCE, August, pp.63-101.

[5] **Donalt, D., ELY, F.J., Sergev, S., Barbarito, B.,** 1965. Influence Functions for Beams on Elastic Foundation. Diccussion, ASCE, April, pp.187-194.

[6] **Miranda, C.K., Nair, K.,** 1966.Finite Beams on Elastic Foundations, J. Struc. Div. Proceedings, ASCE, Vol.92, No.ST2, April, pp.131-142.

[7] **İnan, M.,** 1966. Elastik Çubukların Genel Teorisi, İTÜ Yayınları.

[8] **Durelli, A.J., Parks, V.J., Mok, C.K.C.,** 1966. Photoelastic Beams on Elastic Foundations, J. Struc.Div. Proceedings, ASCE, August, pp.1713-1725.

[9] **Munther, J.H.,** 1970. Photoelastic Study of Baems on Elastic Foundations, Diccussion, ASCE, Vol.96, April, pp.864-870.

[10] **Weistman, Y.,** 1970. On Foundation That React in Compression Only, J. App. Mechanics, Transactions, ASME, Vol.37, Pg.1019-1030.

[11] **Rao, N.S.V.K., Das, Y. C.,** 1971. Anandakrishnana, M., Variational Approach to Beams on Elastic Foundation, J.Eng. Mech. Div. Proceedings, ASCE, April, pp.271-294.

[12] **Ting, B.Y,** 1982. Finite Beams on Elastic Foundation with Restraints, J.Struc Div. Proceedings, ASCE, Vol.108, No.ST3, March, pp.611-621.

[13] **Ting, B.Y, M ESCE and Mockry, E.F.,** 1983. Beam on Elastic Foundation Finite Element, J.Appl.Mech. Vol.109, No.6, December. Pg.1390-1402.

[14] **Ting, B.Y, ,Mockry, E.F,** 1984. Beam on Elastic Foundation Finite Element, J. of Struc. Eng., ASCE,Vol.110, No.10, October, pp.2324-2339.

[15] **Eisenberger, M.,Yankelevsky, D.Z.,** 1985. Exact Stiffness Matrix for Beams on Elastic Foundation, Computers and Structures, Vol.21, No.6, pp.1355-1359.

[16] **Lin, L.,Adams, G.G.,** 1987. Beam on Tensionless Elastic Foundation, J.Eng. Mech.,ASCE, Vol.113, No.4, April, pp.542-553.

[17] **Celep, Z.,Malaika, A., Abu-Hussein, M.,** 1988. Forced Vibrations of a Beam on a Tensionless Foundation, J. Sound and Vibration, pp.235-246, 128/2.

[18] **Elmas , M.,** 1988. Elastik Zemine Oturan Sonlu Kirişlerin Deneysel İncelenmesi, İTÜ Fen Bilimleri Enst., Doktora Tezi, İstanbul.

[19] **Doğan, O.,** 1993. Elastik Zemine Oturan Kirişler, İTÜ Fen Bilimleri Enst., Y. Lisans Tezi.

[20] **Kadıoğlu, F.,** 1994. Elastik Zemine Oturan Doğru ve Daire Eksenli Çubuklar, İTÜ Fen Bilimleri Enst., Y. Lisans Tezi.

[21] **Keskinel, F.,** 1967. Elastik Zemine Oturan Dikdörtgen Düzlem Kapalı Çerçeveler, İTÜ Mimarlık Fakültesi, Doktora Tezi, İstanbul

[22] **Tezcan, S.,** 1970. Çubuk Sistemlerin Elektronik Hesap Makineleri ile Çözümü (Stifnes Matrisleri Metoduyla), Arı Kitabevi Matbaası, İstanbul.

[23] **Clough, R.W., Penzien, J.,** 1993. Dynamics of Structures, Second Edition, McGraw-Hill, Inc, New York

[24] **Craig, Jr.R.R,** 1981. Structural Dynamics ,An Introduction to Computer Methods, John Wiley & Sons, New York.

[25] **Geradin, M., Rixen, D.,** 1994. Mechanical Vibration, Theory and Application to Structural Dynamics, Wiley, Chichester.

[26] **Aydoğan, M.,** 1995. Stiffness-Matrix Formulation of Beams with Shear Effect on Elastic Foundation, J.of Struc.Eng.,ASCE, Vol.121.,No.9, pp.1265-1270.

[27] **Çengel, B.,** 1999. Çerçeve Sistemlerin Bilgisayar Programı ile Hesabı, İTÜ İnşaat Fakültesi, Bitirme Tezi.

ÖZGEÇMİŞ

Berkay ÇENGEL, 1976 yılında Bursa'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Gemlik Gazi İlköğretim Okulu'nda, liseyi Bursa Atatürk Lisesi'nde bitirdi. 1994 yılında girdiği İstanbul Teknik Üniversitesi İnşaat Fakültesi İnşaat Mühendisliği bölümünden 1999 yılında İnşaat Mühendisi olarak mezun oldu.Aynı yıl İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Mekanik Anabilin Dalı programında yüksek lisansa başladı.