

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**METALLERİN PLASTİK ŞEKİLLENDİRİLMESİNDE
KULLANILAN MALZEME MODELLERİNİN SONLU
ELEMENLAR İLE ANALİZİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Mak. Müh. İlker CEYLAN**

Anabilim Dalı : MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ

Programı : KONSTRÜKSİYON

HAZİRAN 2008

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**METALLERİN PLASTİK ŞEKİLLENDİRİLMESİNDE
KULLANILAN MALZEME MODELLERİNİN SONLU
ELEMENLAR İLE ANALİZİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Mak. Müh. İlker CEYLAN
(503051219)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 2 Mayıs 2008
Tezin Savunulduğu Tarih : 11 Haziran 2008**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ata MUĞAN
Diğer Jüri Üyeleri Yrd.Doç.Dr. Vedat TEMİZ
Yrd.Doç.Dr. Vedat Z. DOĞAN**

HAZİRAN 2008

ÖNSÖZ

Tez çalışmam süresince bana değerli görüşleriyle yol gösteren ve yardımcı olan çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Ata Muğan'a en içten teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Çalışma sırasında deneyler konusunda yardımcı olan İ.T.Ü. Uçak ve Uzay Bilimleri Fakültesinin Laboratuvarı'ndaki sorumlu değerli öğretim elemanlarına teşekkürlerimi sunarım.

Gerek tez çalışmamda gerekse de iş hayatımda hertürlü desteği esirgemeyen Sayın Doç. Dr. Ali Çınar , Sayın Dr. Mustafa Erdener'e, meslektaşlarım ve arkadaşlarım Sayın Dr. Polat Şendur ve Sayın Mak. Yük. Mühendisi Sertan Aşkan'a teşekkürlerimi bir borç bilirim .

Son olarak hayatım boyunca maddi ve manevi her türlü destekleriyle bana güç veren aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Mayıs 2008

İlker CEYLAN

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR	v
ŞEKİL LİSTESİ	vi
SEMBOL LİSTESİ	viii
ÖZET	ix
SUMMARY	x
1. GİRİŞ	1
2. PLASTİSİTE TEORİSİNE GENEL BAKIŞ	3
2.1. Plastisite Teorisinin Tarihsel Gelişimi	3
2.2. Akma Kriteri	5
2.3. Plastiklik Potansiyeli ve Akış Kuralı	5
2.4. Maksimum Kayma Gerilmesi Teorisi	6
2.5. Von Mises Akma Kriteri (Distorsiyon İşî Teorisi)	7
2.6. Pekleşme	9
2.7. Histerezis Etkisi	11
2.8. Baushinger Etkisi	11
3. PROFİL EĞİLME TESTİ	13
3.1. Profilin CAD Modeli	13
3.2. Eğilme Test Düzenegi	14
4. SONLU ELEMAN YAKLAŞIMI VE MALZEME MODELLERİ	18
4.1. Sonlu Eleman Yaklaşımları	19
4.1.1. İç ve Dış Kuvvetlerin Bulunması	20
4.1.2. Kütle Matrisi ve Atalet Kuvvetleri	21
4.1.3. Ayrık Denklemler	22
4.1.4. Doğrusal Hızlar İçin Hareket Denklemi	22
4.1.5. Açısal Hızlar İçin Hareket Denklemi	23
4.1.6. Element Koordinatları	25
4.1.7. İntegrasyon ve Nodal Kuvvetler	26
4.1.8. Fonksiyonların Türevleri	28
4.1.9. Nümerik Tümler Alma – İndirgenmiş İntegrasyon	28
4.1.10. Nümerik Hesaplama Yöntemi	31

4.2. Malzeme Modelleri	33
4.2.1. Johnson-Cook Plastik Malzeme Modeli	33
4.2.2. Cowper-Symonds Plastik Malzeme Modeli	36
4.2.3. Zerilli-Armstrong Plastik Malzeme Modeli	37
4.2.4. Piecewise Malzeme Modeli	38
4.2.5. Sünek Hasar Malzeme Modeli	39
5. SONLU ELEMAN ANALİZLERİ	41
5.1. Ağ Eleman Yöntemi ile Sonlu Elemanlar Modelinin Hazırlanması	41
5.2. Sınır ve Yükleme Koşulları	45
5.3. Örtük (Implicit) Yöntem ile Yapılan Analizler	48
5.4. Örtük Yöntem ile Yapılan Analiz Sonuçları	51
5.5. Açık (Explicit) Yöntem ile Yapılan Analizler	52
5.5.1. Johnson-Cook Malzeme Modeli için Analiz Sonuçları	53
5.5.2. Cowper-Symonds Malzeme Modeli için Analiz Sonuçları	58
5.5.3. Zerilli-Armstrong Plastik Malzeme Modeli için Analiz Sonuçları	60
5.5.4. Piecewise Malzeme Modeli için Analiz Sonuçları	61
5.5.5. Sünek Hasar Malzeme Modeli için Analiz Sonuçları	63
5.6. Açık Yöntem ile Yapılan Analiz Sonuçları	63
6. SONUÇLAR VE TARTIŞMALAR	67
KAYNAKLAR	69
ÖZGEÇMİŞ	71

KISALTMALAR

CS	: Cowper-Symonds Malzeme Modeli
JC	: Johnson-Cook Malzeme Modeli
SEM	: Sonlu Elemanlar Metodu
ZA	: Zerilli-Armstrong Malzeme Modeli

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1 : Düzlem gerilme için Tresca akma kriterinin gösterimi.....	7
Şekil 2.2 : Von-Mises akma yörüngesi.....	9
Şekil 2.3 : Tresca ve Von-Mises akma yörüngeleri.....	9
Şekil 2.4 : Gerilme- Birim uzama eğrisi.....	10
Şekil 2.5 : İzotropik (a) ve kinematik (b) sertleşme için akma yüzeyleri.....	10
Şekil 2.6 : Histerezis etkisi.....	11
Şekil 2.7 : Baushinger etkisi.....	12
Şekil 3.1 : Dikdörtgen kesitli düz profil CAD modeli.....	13
Şekil 3.2 : Test profilinin kesit görünüşü.....	14
Şekil 3.3 : Kare kesitli düz profil burulma deneyi düzeneği şeması.....	14
Şekil 3.4 : Baushinger etkisi.....	15
Şekil 3.5 : Eğilme testi düzeneği.....	16
Şekil 3.6 : Eğilme testi sonucu.....	16
Şekil 3.7 : Test sonrası numunenin üstten görünüşü.....	17
Şekil 3.8 : Test sonrası numunenin yandan görünüşü.....	17
Şekil 4.1 : Basitleştirilmiş hesaplama algoritması.....	32
Şekil 4.2 : Gerilme hızının etkisi.....	35
Şekil 4.3 : İzotropik ve kinematik sertleşme şekilleri.....	37
Şekil 4.4 : Piecewise lineer gerilme-birim uzama eğrileri.....	39
Şekil 4.5 : Sünek hasar malzeme modeli.....	40
Şekil 5.1 : Eleman ve düğüm noktası.....	41
Şekil 5.2 : Eleman şekilleri ve dereceleri.....	42
Şekil 5.3 : Dörtgen profil sonlu eleman modeli.....	43
Şekil 5.4 : Dörtgen profil ve baskı silindiri sonlu eleman modeli.....	44
Şekil 5.5 : Baskı silindiri ve oluşturulan rijit eleman.....	44
Şekil 5.6 : Sınır koşulları.....	45
Şekil 5.7 : Analiz modeli sınır koşulları.....	46
Şekil 5.8 : Analiz modeli sınır koşulları yakından görünüm.....	46
Şekil 5.9 : Baskı silindirine verilen sınır koşulları.....	47
Şekil 5.10 : Örtük analiz yöntemi modeli.....	48
Şekil 5.11 : Örtük analiz yöntemi modeli sınır şartları.....	49
Şekil 5.12 : Johson-Cook modeli için gerilme-birim uzama eğrisi.....	50
Şekil 5.13 : Örtük(implicit) analiz yöntemi ve Test sonucu, kuvvet- deplasman grafiği.....	50
Şekil 5.14 : Açık(Explicit) analiz yöntemi ve yükleme durumu.....	53
Şekil 5.15 : Johnson-Cook malzeme modeli analiz sonucu ile test..... sonuçlarının karşılaştırılması.....	55
Şekil 5.16 : Johnson-Cook malzeme modelinin sertleşme katsayılarının ayarlanması ile oluşan eğri ile test eğrisinin karşılaştırılması.....	56
Şekil 5.17 : Johnson-Cook malzeme modeli ile yapılan analiz sonucu.....	56

Şekil 5.18	: Johnson-Cook malzeme modeli ile yapılan analiz sonucu.....	57
Şekil 5.19	:Johnson-Cook malzeme modelinin deformasyon artışı katsayısının düşürülmesiyle oluşan eğrinin test ve önceki analiz eğrileri ile karşılaştırılması.....	58
Şekil 5.20	: Cowper-Symonds malzeme modelinin sertleşme katsayılarının ayarlanması ile oluşan eğri ile test eğrisinin karşılaştırılması.....	59
Şekil 5.21	: ZA malzeme modelinin sertleşme katsayılarının ayarlanması ile oluşan eğri ile test eğrisinin karşılaştırılması.....	61
Şekil 5.22	: Piecewise malzeme modeli için değişik birim uzama hızlarında yapılan test sonuçları.....	62
Şekil 5.23	: Piecewise malzeme modelinin analiz sonuçları ve test sonuçlarının karşılaştırılması.....	62
Şekil 5.24	: Sünek malzeme hasar modelinin analiz sonuçları ve test sonuçlarının karşılaştırılması.....	63
Şekil 5.25	: Test sonuçları ve analizlerde kullanılan malzeme modellerinin karşılaştırılması.....	64

SEMBOL LİSTESİ

σ	: Gerilme
ϵ	: Birim uzama
ϵ_p	: Plastik birim uzama
τ	: Kayma gerilmesi
E	: Elastiklik modülü
t	: Zaman
f	: Kuvvet
v	: Hız
w	: Açısal hız
L_{ij}	: Hız gradyanı
M	: Moment
a	: Akma gerilmesi
b	: Sertleşme modülü
n	: Sertleşme üsteli
c	: Deformasyon hızı katsayısı
$\dot{\epsilon}$	: Deformasyon hızı
m	: Sıcaklık üs katsayısı
T	: Sıcaklık
I	: Atalet momenti
$1/p$	: deformasyon hızı üsteli
d	: Deplasman
$\dot{\epsilon}_0$	: Referans deformasyon hızı
C_i	: Zerilli malzeme modeli sabitleri
ρC_p	: Özgül ısı kapasitesi

METALLERİN PLASTİK ŞEKİLLENDİRİLMESİNDE KULLANILAN MALZEME MODELLERİNİN SONLU ELEMANLAR İLE ANALİZİ

ÖZET

Taşıtların dayanıklılığı ve güvenliği açısından, iskeleti oluşturan şasinin mukavemeti büyük önem kazanmaktadır. Şasi yoldan gelen kuvvetler tarafından dinamik olarak zorlanmaktadır. Ayrıca devrilme, çarpışma gibi durumlarda şasiyi oluşturan profillerin davranışları çok önemlidir. Aşırı yükleme durumlarının araç şasisi üzerine etkisini görmek için çeşitli testler yapılmaktadır. Testler fiziksel durumu en gerçekçi şekilde gösterse de maliyet ve zaman kaybına yol açmaktadır. Yapılan test sayısını azaltmak için kullanılan sayısal yöntemler de ise matematiksel modellemeden ve kabullerden kaynaklanan sapmalar görülebilmektedir. Sonlu elemanlar yönteminin güvenilirliğini belirleyen en önemli etken malzeme davranışdır.

Bu çalışmada test numunesi olarak alınan dikdörtgen profilden eğilme testi yapılarak kuvvet-deplasman eğrisi elde edilmiştir. Daha sonra plastik deformasyona yol açan yükleme koşulları altındaki malzeme davranışını belirlemek için ilk önce açık ve örtük çözüm yöntemleri ile analizler yapılmış ve test sonuçlarına uygun olan çözüm yöntemi belirlenmiştir. Daha sonra literatürde olan malzeme modelleri ile analizler tekrarlanmış ve test sonuçları ile karşılaştırılarak en iyi modelleme tekniği belirlenmeye çalışılmıştır. Kullanılan malzeme modelleri Johnson-Cook (JC), Cowper-Symonds (CS), Zerilli-Armstrong (ZA), Piecewise ve elastik plastik hasar malzeme modelleridir. Bu modellerin Radioss programı kullanılarak analizleri yapılmış, avantajları ve dezavantajları açıklanmıştır. Son olarak da malzeme modelleri karşılaştırılarak en uygun malzeme modeli belirlenmiştir. Bu çalışmanın ilerde otomotiv mühendislerinin kompleks analizlerindeki malzeme modeli seçimine yardımcı olacağı düşünülmektedir.

FINITE ELEMENT ANALYSIS OF PLASTIC DEFORMATIONS DETERMINED BY MATERIAL LAWS FOR METALS

SUMMARY

In terms of vehicle durability and safety, the structural strength of frame plays a significant role. Frame is stressed by dynamic loads caused from road condition. The structural behaviour of frame becomes even more important especially in rollover and crash, condition. To obtain effects of overloading on frame, some tests are carried out. However, vehicle tests take a long time and ;therefore, are very costly. Numerical methods are employed to reduce these costs, but there could be some error due to mathematical solution approximation and assumptions. These errors make bigger safety factor so this caused material waste and makes the vehicle heavier. It is difficult to obtain material behaviors of metals under big plastic deformations. The plasticity behaviour of the material has significant effect on simulation accuracy. Moreover , solution methods can also affect the accuracy.

In this study, Three point bending test is done for rectangular beam profile to compare experimental results to analysis results. Comparison is made in terms of force- displacement curve & data. Implicit and explicit finite element methods are applied to solve bending problem of rectangular beam profile. The differences between these solution method is tried to explain for the thesis work. Then several material laws, which are defined in literature, are applied. Five constitutive relations were used to simulate the mechanical properties of steel: Johnson-Cook (JC), Cowper-Symonds (CS), Zerilli-Armstrong (ZA), Piecewise and elastic-plastic damage. All five constitutive relations are featured in the current version of the commercial explicit finite element code Radioss. Constants, advantages and disadvantages of these laws are defined. Finally, conclusion are drawn to explain the effectiveness of each law & method. It is believed that conclusions and solutions of these study may lead automotive engineers to understand and find proper material law during complex computer aided analysis.

1.GİRİŞ

Otobüs, minibüs gibi toplu taşıma araçlarının şasi iskeletlerinde profiller kullanılmaktadır. Taşıt dayanıklılığı ve güvenliği açısından, bu profillerden oluşan şasinin mukavemeti büyük önem kazanmaktadır. Şasi yoldan gelen kuvvetler tarafından dinamik olarak zorlanmaktadır. Ayrıca devrilme, çarpışma gibi durumlarda şasiyi oluşturan profillerin davranışları çok önemlidir.

Çeşitli durumlarda ortaya çıkan aşırı yüklerin şasi üzerinde yaptığı etkileri görmek için çeşitli testler uygulanmaktadır. Bu testler gerçek etkileri tespit açısından yegane yöntemdir. Fakat otobüs gibi büyük araçlarda hem zaman kaybına hemde maliyet artışına yol açmaktadır. Sonlu elemanlar yöntemleri kullanılarak yapılan analizler, tasarımı yönlendirerek test sayısını ve maliyetlerini azaltmakta büyük rol oynamaktadır. Sayısal hesaplamalarda yapılan varsayımlar ve matematiksel modellemeden dolayı, gerçek durum ve deneysel yöntemlerdeki sonuçlarla sapmalar ve farklılıklar ortaya çıkabilir. Ortaya çıkan bu sapmalar nedeniyle, birçok otomobil firması kullanılan araçların tasarımı aşamasında yüksek emniyet katsayıları seçmekte, bu da malzeme kaybına ve aracın ağırlaşmasına sebep olmaktadır. Tasarım aşamasında, güvenilir bir sonlu eleman modeli ile sayısal hesaplamalar yapılabilirse, düşük emniyet katsayıları seçilebilir ve böylece araçların gerekenden pahalı ve ağır yapılmasının önüne geçilebilir.

Güvenilir sonlu elemanlar modeli için en önemli etken malzeme modelinin gerçeğe en yakın şekilde olmasıdır. Yüklemeler esnasında profilde meydana gelecek plastik şekil değiştirmeler için profilin malzemesinin plastik şekil değiştirme modelinin bilinmesi gerekmektedir.

Çarpışma ve devrilme analizlerinin kompleks ve dinamik durumda oluşundan dolayı, sonlu eleman yaklaşımının doğruluğu sınır koşulları, eleman boyutları, sonlu eleman formülasyonu ve malzeme davranışını belirleyen modellemeler gibi önemli faktörlere bağlıdır. Ağ elemanı boyutu sonucu etkileyebilecek önemli bir faktördür ve belirlenmesi diğer faktörlere nispeten koladır. Sınır koşulları modellenecek

parçanın fiziksel problemini en uygun şekilde yansıtacak şekilde belirlenir. Bu durum için genellikle mühendislik bilgisi ve tecrübesi yeterli olmaktadır. Analizlerde kullanılan parçaların malzemelerinin davranışlarını tek tek belirlenmesi ve uygulanması çok zor bir işlemdir. Bu yüzden kritik bölgeler ve parçalar belirlenerek ve bunlar için mevcut malzeme modelleri kullanmak yeterli olmaktadır.

Bu çalışmanın amacı, literatürde var olan plastik şekil değiştirme malzeme modellerini karşılaştırmak ve bu modelleri kullanarak elde edilen analiz sonuçlarını test sonuçlarıyla kıyaslayarak gerçeği yansıtan, kabul edilebilir plastik malzeme modelini bulmaktır. Bu sayede lineer olmayan analizlerde çok önemli olan malzeme davranışının en doğru şekilde tespit edilmesi amaçlanmıştır. Bilgisayar ortamında yapılan hesaplamalar ile literatürdeki modellerin karşılaştırılması ile çıkan sonuçlar yorumlanmıştır.

Karşılaştırılacak başlıca modeller şunlardır:

- Johson- Cook malzeme modeli
- Cowper-Symonds malzeme modeli
- Zerilli-Armstrong malzeme modeli
- Piecewise malzeme modeli
- Elastik plastik hasar malzeme modeli

Ele alınacak modellerin, sonlu elemanlar modelinin oluşturulması için Hypermesh 7.0, çözdürme işlemi için Abaqus/Radioss ve test datalarının toplanması için İstanbul Teknik Üniversitesi Uçak ve Uzay Bilimleri Fakültesinin laboratuvarı kullanılmıştır.

Bu proje ile çarpışma ve devrilme analizlerinde gelecekte, şasi tasarımlarında sonlu elemanlar metodlarının daha doğru şekilde kullanılması sağlanarak, ortaya çıkabilecek sorunları ve yetersizlikleri prototip üretmeden görebilmek mümkün olacak, böylece daha az sayıda test yapılarak ve gereksiz malzeme kullanımı önlenerek maliyet tasarrufu sağlanacaktır.

2. PLASTİSİTE TEORİSİNE GENEL BAKIŞ

Katı cisimler sadece düşük kuvvetler ve yükler altında elastik davranış gösterirler. Gerçek yük veya yüklerin etkisi altında, elastik olmayan veya plastik deformasyonlara maruz kalmaktadırlar. Plastisite teorisi deforme olabilen cisimler mekaniğine bakış açısidir ve elastisite teorisi ile bağlantılıdır.

Cisimlerin plastik özellikleri çok değişken olmakla birlikte malzeme özelliklerine ve çevre koşullarına bağlıdır (sıcaklık, proses süresi, nem, vb)

2.1 Plastisite Teorisinin Tarihsel Gelişimi

Plastisite ile ilgili çalışmaların başlangıcının, Tresca'nın 1864 ve 1872 yılları arasında metallerin ekstrüzyonu üzerine yaptığı ve yayınladığı çalışmalar olduğu kabul edilir. Tresca çalışmalarında ilk olarak akma (yield) durumları açıklanmıştır. Tresca; maksimal kayma gerilmesi kritik değere ulaştığında metallerin esnediğinden bahsetmiştir. Aynı tarihlerde St.Venant katı cisimlerin ve ideal plastik malzemelerin düzlem gerilme (plane stress) teoreminde temel prensiplerini açıklamıştır.

Lévy ise bu denklemleri 3 boyutlu koordinat sistemi için geliştirmiştir. 1913 yılında von Mises [1] plastisite ile ilgili genel denklemleri bulmuştur. 1924 yılında Prandtl [2] St. Venant - Lévy- von Mises denklemlerini elastik komponentlerdeki gerinmeleri (strain) de içeren düzlem sürekliliği (plane continuum) problemleri için genişletmiş ve geliştirmiştir. Reuss ise 1930 yılında bu çalışmayı 3 boyutlu sistemlerde için genişletmiştir. Von Mises 1928 [3] yılında önceki çalışmalarını genel akma fonksiyonlarını içeren rijit ve ideal plastik katılar için genişletmiş ve plastik gerinmelerin artımının yönü ile düzgün akma yüzeyi (smooth yield surface) ilişkisini açıklamaya çalışmıştır. Böylece akış teorisinde plastik durumdaki akma fonksiyonunun (yield function) gerilme- gerinme(birim uzama) ilişkisinin temel konseptini oluşturmuştur.

İdeal plastisiteye kıyasla pekleşen (hardening) malzemeler için artımlı bünye denklemleri (incremental constitutive relations) ilişkisinin gelişimi çok yavaş olmuştur. 1928 yılında Prandtl [4] pekleşen malzemelerin genel ilişkisini açıklayan genel formülleri bulmak için çalışmalarda bulunmuştur. 1938 yılında Melan [5] bazı varsayımlarda bulunarak, sözkonusu ideal plastisite konseptini artım ilişkileriyle verilen düzgün akma yüzeyi ile pekleşen katılar için genelleştirmiştir ve ideal plastik malzemeler ve pekleşen malzemeler için elastoplastik artımlı problemlerde önemli sonuçlardan bahsetmiştir.

1940 yılından sonra plastisite teorisi hızlı bir gelişme göstermiştir. 1949 yılında Prager düzgün akma fonsiyonu (smooth yield function) ile pekleşen malzemeler için plastik bünye denklemlerinin (plastic constitutive relations) genel çerçevesini çıkarmıştır. Drucker, 1951 yılında malzeme kararlılığı hakkındaki hipotezini açıklamıştır. 1953 yılında Koiter düzgün olmayan akma yüzeyleri (nonsmooth yield surface) için plastik gerilme-gerinme ilişkisini açıklamış ve bazı önemli sonuçlara ulaşmıştır.

Plastisite teorisi ile ilgili 1980 den önceki diğer detaylı araştırmalar, Zyczkowski tarafından yapılmıştır. Zyczkowski'nin çalışmaları plastisiteye bakış açısı ve plastisite teorisi ile ilgili tartışmalara zenginlik katmıştır.

Hemen hemen statik (Quasistatic) problemlerde elastoplastisiteye matematiksel ve nümerik bakış 1970 yılından sonraki çalışmalara dayanır. Sınır değerleri (Boundary values) ile ilgili ilk sistematik matematiksel çalışmalara Duvaut ve Lions tarafından yapılmıştır. Duvaut ve Lions , elastik ve ideal plastik problemlerini değişken eşitsizlik (variational inequality) üzerine formüle etmiştir. Moreau daha çok geometrik bakış açısında bulunarak aynı konular üzerinde çalışmıştır. Johnson analizi , iki aşamada yaklaşarak genişletmiştir. İlk aşama; hızı ihmal edilmiştir ve böylece problem zamandan bağımsız biçimde değişken eşitsizlik (variational inequality) durumuna gelmiştir. İkinci aşama ise hızı tekrar hesaba katarak yapılan çözümden meydana gelmektedir. Johnson 'un elastik-ideal plastik durumdaki çalışmasına göre ayrık sistemlerde (discrete in both time and space) gerilme en önemli değişkendir ve hata tespitinden (error estimate) türetilmiştir. Daha sonraki çalışmalarında Johnson [6] tamamen ayrık (fully discrete) sistemler için pekleşen elastoplastisite problemlerinde, sonlu elemanlar yaklaşımında bulunmuştur.

Kullanmış olduğu formülasyonda gerilme ve hız değişkindir. Benzer çalışmalar ayrıca Hlaváček tarafından yapılmıştır.

Pekleşen plastisite problemleri analiz ve nümerik analiz ile klasik yaklaşımları Bonnetieri Li ve Babuška tarafından yapılmıştır. Han ve Reddy' nin son yıllardaki çalışmaları , pekleşen elastoplastik problemlerin matematiksel ve nümerik analizleri ile ilgili kapsamlı tanımlamalarda bulunmuşlardır [7].

2.2 Akma Kriteri

Elastisite limitini belirleyen koşul akma sınırıdır. Herhangi gerilme kombinasyonlarının etkisi altında plastik deformasyonun başladığı sınır olarak da tanımlanabilir. Elastik bölgede oluşan deformasyon, uygulanan gerilme kaldırıldığında tekrar ilk önceki haline dönecektir. Akma sınırı aşıldığı takdirde ise uygulanan gerilme ortadan kaldırıldığında bir miktar deformasyon kalıcı olacaktır. Bu deformasyona plastik deformasyon , diğer bir deyişle kalıcı deformasyon adı verilir [7,12].

Tek boyutlu basit yükleme koşulunda akma kriteri, plastik deformasyonun başladığı gerilme değeri olarak belirlenebilir. Bu değeri grafikte gösterilecek olursa nokta şeklinde görülecektir. İki boyutlu bir yükleme sisteminde akma eğriye benzeyecektir. Üç boyutlu sistemlerde ise akma yüzeye benzeyecektir. Yani akma kriteri uzayda akma yüzeyi (yield surface) olarak tanımlanacaktır. Eğer yükleme altında oluşan gerilme akma yüzeyi içindeyse malzemenin davranışı elastik olacaktır. Oluşan gerilme akma yüzeyi üzerindeyse plastik deformasyon meydana gelecektir.

Akma yüzeyi matematiksel ifade ile gösterilecek olursa;

$$f(\sigma_{ij}) = f(I_1, I_2, I_3) = 0 \quad (2.1)$$

2.3 Plastiklik Potansiyeli ve Akış Kuralı (Flow Rule)

Plastisitenin temel problemi gerilme, akma yüzeyinin üzerindeyken plastik deformasyonun belirlenmesidir. En çok kullanılan yöntem plastik birim uzama hızı (plastic strain rate) kabulüdür. Bu formül aşağıdaki gibi yazılabilir [3,5]:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.2)$$

$$g = g(\sigma_{ij}) = g(I_1, I_2, I_3) = 0 \quad (2.3)$$

(2.2) denklemi plastik birim uzama hızına dayanan temel akış kuralını ifade etmektedir. Bu akış kuralı, 1870 yılında St. Venant ın metaller üzerinde yaptığı çalışmalara dayanmaktadır. Bu denklem nerdeyse bütün plastisite modellerinde kullanılmaktadır ve eşeksenli varsayım (coaxial assumption) olarak adlandırılmaktadır. Fakat son yıllardaki test çalışmaları ve datalarının gösterdiği üzere bu denklem zemin mekaniğinde geçerliliği onaylanmamıştır.

Eğer plastik potansiyeli (plastic potential), akma yüzeyi ile aynı ise plastik akış kuralı (2.2), birleşik akış kuralı (associated flow rule) olarak adlandırılır. Akma yüzeyi ile aynı değilse ilintisiz akış kuralı (non-associated flow rule) denir.

2.4 Maksimum Kayma Gerilmesi Teorisi

Bu teoriye kısaca Tresca kriteri de denir ve sünek metal ve alaşımlarda doğruya yakın sonuç verir. Buna karşılık gevrek malzemelerde bu kriter doğru sonuç vermez.

Tresca, yaptığı ekstrüzyon deneyleri sonucunda, plastik şekil değişimi başladığı anda, maksimum kayma gerilmesinin belirli bir değer aldığını görmüştür [8].

Asal gerilmeler $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ile gösterilirse ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$), maksimum kayma gerilmesi

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (2.4)$$

olduğundan Tresca kriteri

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = c \quad (2.5)$$

şeklinde ifade edilebilir ($c = \text{sabit}$) σ_0 , basit kaymada ise kayma gerilmesi akma sınırı k ile gösterilirse

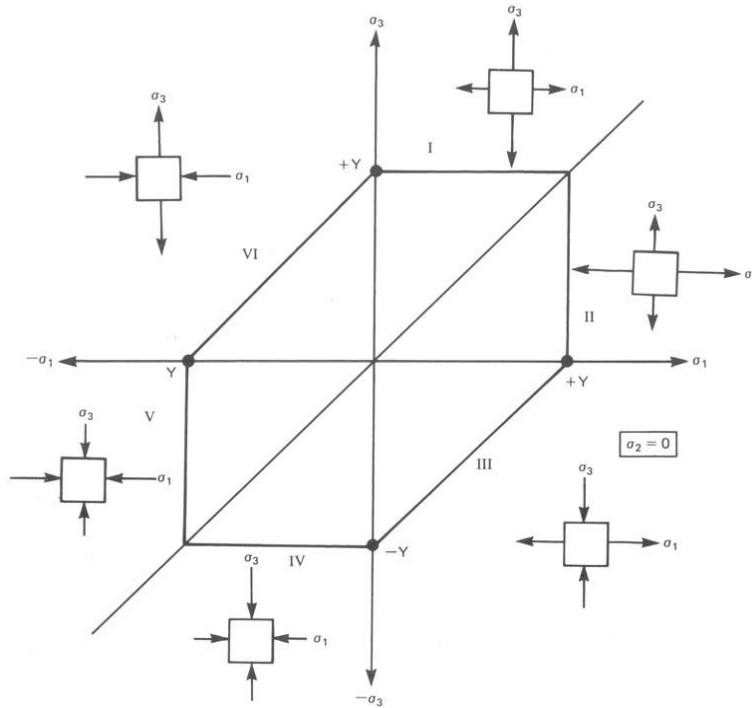
Basit çekmede $\sigma_1 = \sigma_0$ $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$

Basit çekmede $\sigma_1 = -\sigma_3 = k$ $\sigma_2 = 0$

olduğundan, (2.5) denklemi

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_0 = 2k \quad (2.6)$$

olarak ifade edilebilir.



Şekil 2.1: Düzlem Gerilme için Tresca Akma Kriterinin Gösterimi ($\sigma_2 = 0$).

2.5 Von Mises Akma Kriteri (Distorsiyon İş Teorisi)

Von Mises, Hencky ve Huber tarafından ileri sürülen bu kritere göre, cisim içindeki bir noktada distorsiyon işi belirli bir değere eriştiği anda akma başlar [8]. Birim hacim distorsiyon işi

$$w_d^e = \frac{1}{2G} J_2 \quad (2.7)$$

olduğundan, bu denklemde

$$J_2 = -\frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

kondluğu takdirde, distorsiyon işi teorisine göre

$$-\frac{1}{12G} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = c$$

yazılabilir (c = sabit). Basit çekmede $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ve akma başlangıcında

$\sigma_1 = \sigma_0$ olduğundan $c = \frac{\sigma_0^2}{6G^2}$ bulunur. Böylece distorsiyon işi teorisi

$$[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} = \sqrt{2} \sigma_0 \quad (2.8)$$

şeklinde ifade edilir.

Basit kaymada, kayma gerilmesi akma sınırı k ile gösterilirse, $\sigma_1 = -\sigma_3 = k$ ve

$\sigma_2 = 0$ olduğundan, distorsiyon işi teorisi k cinsinden

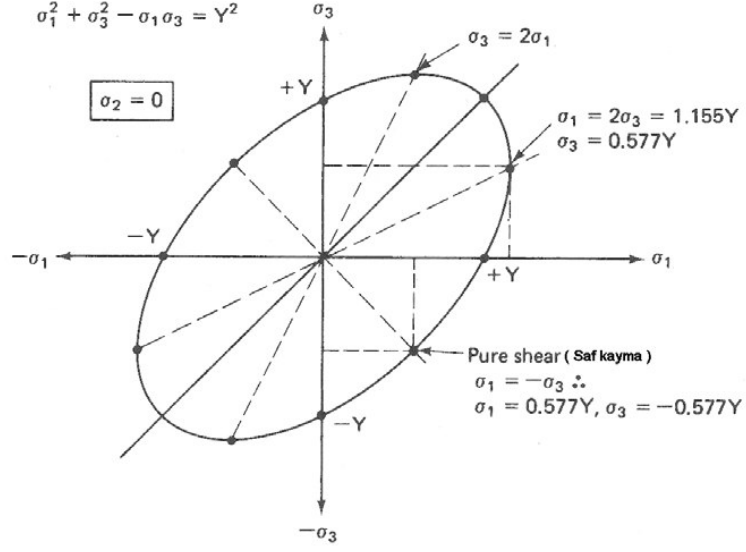
$$[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = 6k^2 \quad (2.9)$$

şeklinde yazılır. Denklem (2.8) ve (2.9) dan

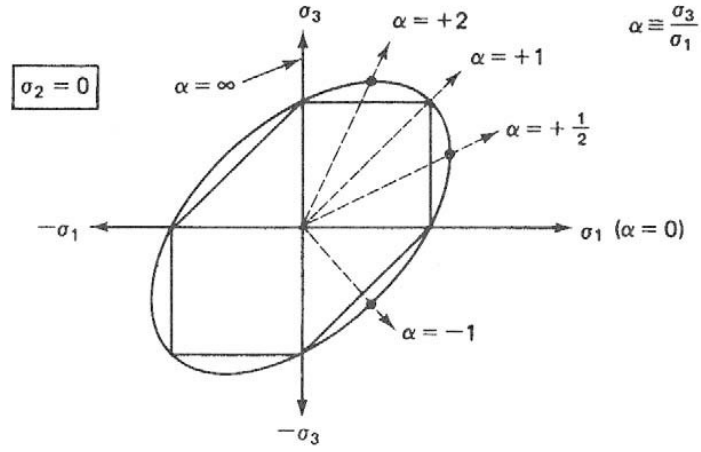
$$k = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_0$$

bulunur. Maksimum kayma gerilmesi teorisine göre $k = \frac{\sigma_0}{2}$ idi. Her iki değer

arasındaki fark %15.5 dir. Bu iki kriter arasındaki en büyük farktır.



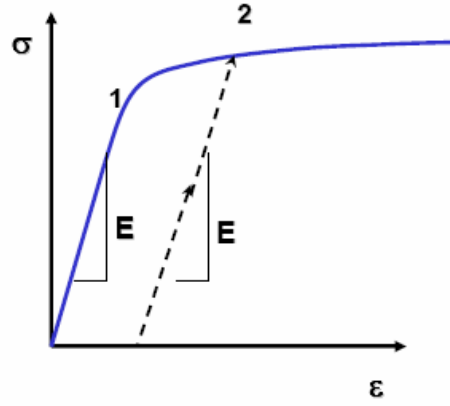
Şekil 2.2: Von-Mises Akma Yörüngesi



Şekil 2.3: Tresca ve Von-Mises Akma Yörüngeleri

2.6 Pekleşme (hardening)

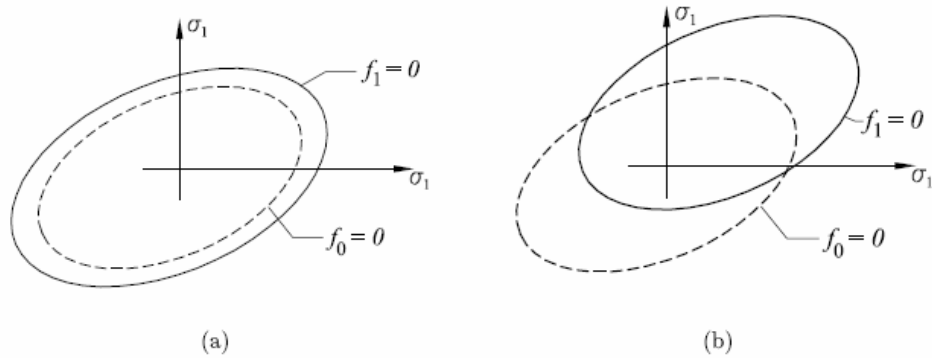
Metallerin uygulanan yükler altında elastik bölgeyi geçerek kalıcı şekil değişimine uğraması ve buna bağlı olarak mukavemet ve sertlik değerlerinin artmasına pekleşme adı verilir. Diğer bir ifade ile pekleşmenin anlamı, akma yüzeyinin şeklinin ve boyutunun plastik deformasyon (yükleme) süresince değişmesidir.



Şekil 2.4: Gerilme- Birim Uzama Eğrisi

Şekil 2.4 de verilen gerilme-birim uzama grafiğinde malzeme için 1 noktası elastik limit kabul edilirse ve malzeme bu limitin üzerinde yüklenip yük kaldırılırsa malzemede plastik deformasyon meydana gelmiş olur. Malzemeye tekrar yük uygulandığında, malzemenin elastik limitinin 1 noktasından 2 noktasına geldiği görülür. Böylece plastik deformasyonla malzemenin mukavemeti arttırılmış olur. Bu işlem Literatürde şekil değiştirme pekleşmesi olarak tanımlanır.

Pekleşme genelde gelişigüzel olmaktadır ve tam olarak tanımlanması çok zordur. Bu yüzden izotropik ve kinematik olmak üzere iki farklı şekilde tanımlanmıştır. İzotropik pekleşme durumunda, plastik yükleme devam ederken, akma yüzeyi her yönde eşit miktarda ve şekilde genişlemektedir. Kinematik pekleşme durumunda ise Baushinger etkisi gözlemlenmektedir [18].

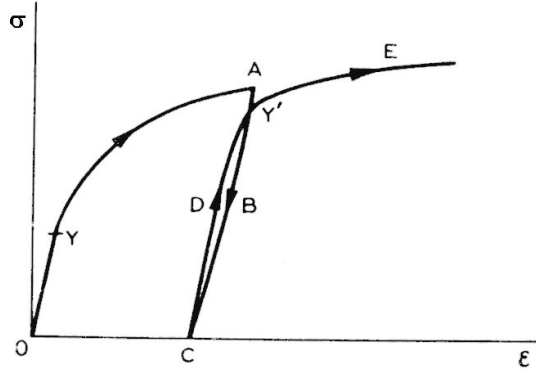


Şekil 2.5: İzotropik (a) ve Kinematik (b) Pekleşme için Akma Yüzeyleri

2.7 Histerezis Etkisi

Eğer basit çekme deneyinde yük akma sınırı geçildikten sonra kaldırılırsa ve tekrar yükleme yapılırsa histerezis etkisi oluşur.

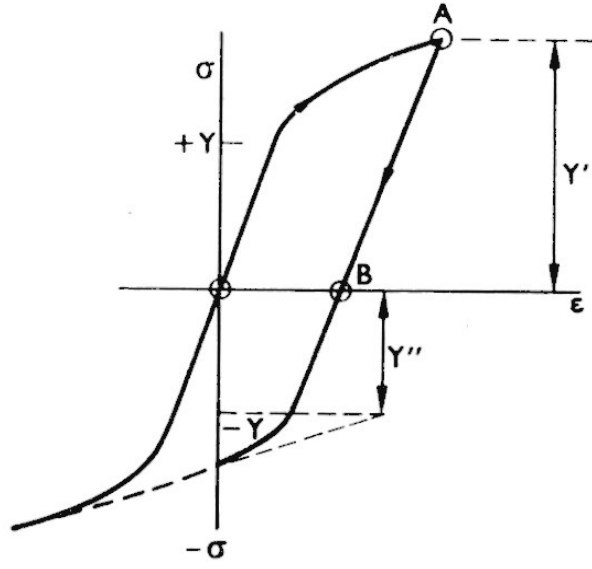
Şekil 2.6 de malzemenin tekrar yüklemeli gerilme-birim uzama eğrisi görülmektedir. Malzeme O noktasında yüklenmeye başlanmıştır. Akma sınırını geçen A noktasında ise yük kaldırılmıştır. Gerilme-gerinim eğrisi B noktasının olduğu yolu takip ederek C noktasına ulaşır. Tekrar yüklendiğinde ise geldiği yolu takip etmeksizin D noktasından geçerek Y' a oradan da E noktasına ulaşır. İdeal analizlerde bu etki ihmal edilir. Burada Y'-B-C-D arasında gerilme-gerinim eğrisi ile belirlenen iç alan histerezis etkisini aşmak için gerekli enerjiyi verir.



Şekil 2.6: Histerezis Etkisi

2.8 Baushinger Etkisi

Bir metal plastik deformasyona uğradıktan sonra yükleme kaldırılırsa malzeme üzerinde mikroskobik ölçekte artık gerilmeler (residual stresses) kalır. Eğer bir malzeme A noktasına kadar düzgün çekilirse (Şekil 2.7) ve yük kaldırılarak gerilme-gerinim eğrisi B noktasına ulaşır ve daha sonra ters yönde baskı yüküne maruz bırakılırsa artık gerilmeler sonucu akma Y'' noktasında oluşur. Y'' değeri Y' dan daha küçüktür. Bu olay Baushinger etkisi olarak adlandırılır ve gerilme yönü terslendiği durumlarda görülür.



Şekil 2.7: Baushinger Etkisi

3. PROFİL EĞİLME TESTİ

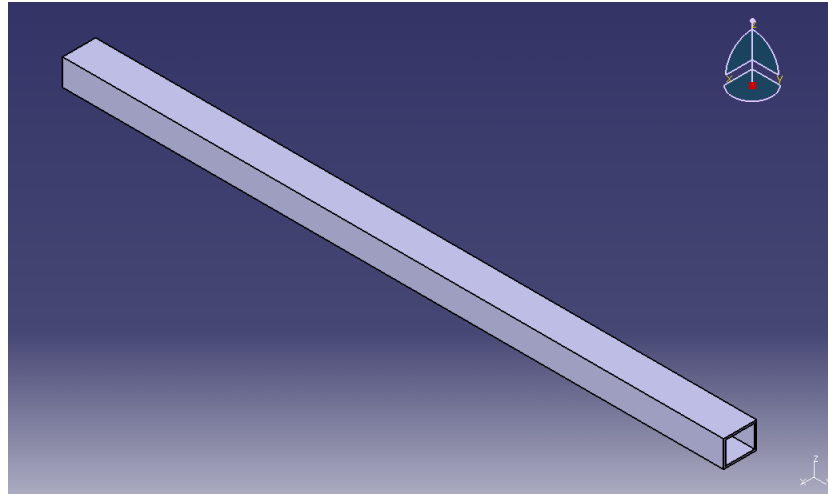
Bu çalışmada malzeme modelleri ile karşılaştırmak için 3 noktalı eğilme testi denilen ,eğme testi yapılmış, piecewise malzeme modeli için ise aynı malzemenin farklı birim uzama hızlarında yapılmış çekme testi dataları literatürden alınmıştır.

Test numunesi dikdörtgen kesitli düz profildir. Dikdörtgen kesitli düz profil basitliği ve otobüs minübüs gibi araçların şasilerinde kullanılması sebebiyle seçilmiştir.

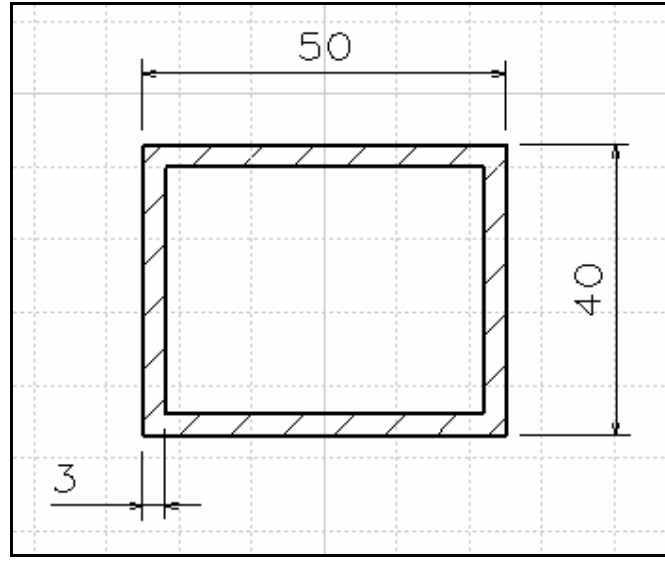
Deneylerde profil için de 3.0 mm kalınlığında; malzemesi galvanizli çelik (S350GD+Z) olan sac kullanılmıştır. Alınan numunenin testleri İstanbul Teknik Üniversitesi Uçak ve Uzay Bilimleri Fakültesinin labaratuvarında yapılmış ve kuvvet deplasman dataları elde edilmiştir.

3.1 Profilin CAD Modeli

Şekil 3.1’de görülen deney aparatı borusan tarafından üretilmiş dikdörtgen kesitli bir profildir. Şekil 3.2’de görüldüğü üzere profilin önden görünüşü kenarları 50x40 mm olan dikdörtgen kesit şeklindedir ve kalınlığı 3 mm dir. Profilin uzunluğu ise 1000 mm dir.



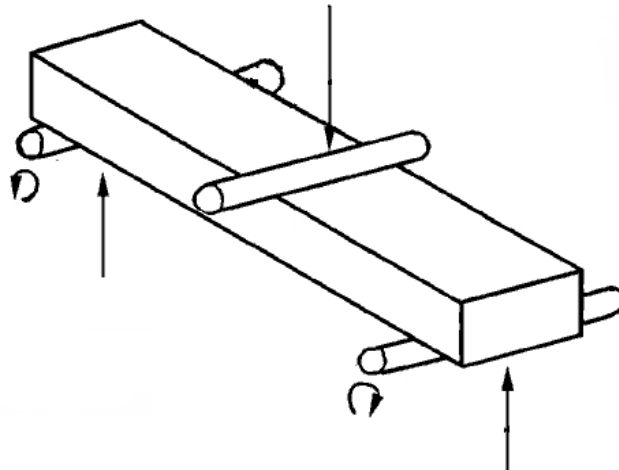
Şekil 3.1: Dikdörtgen Kesitli Düz Profil CAD Modeli.



Şekil 3.2: Test Profilinin Kesit Görünüşü.

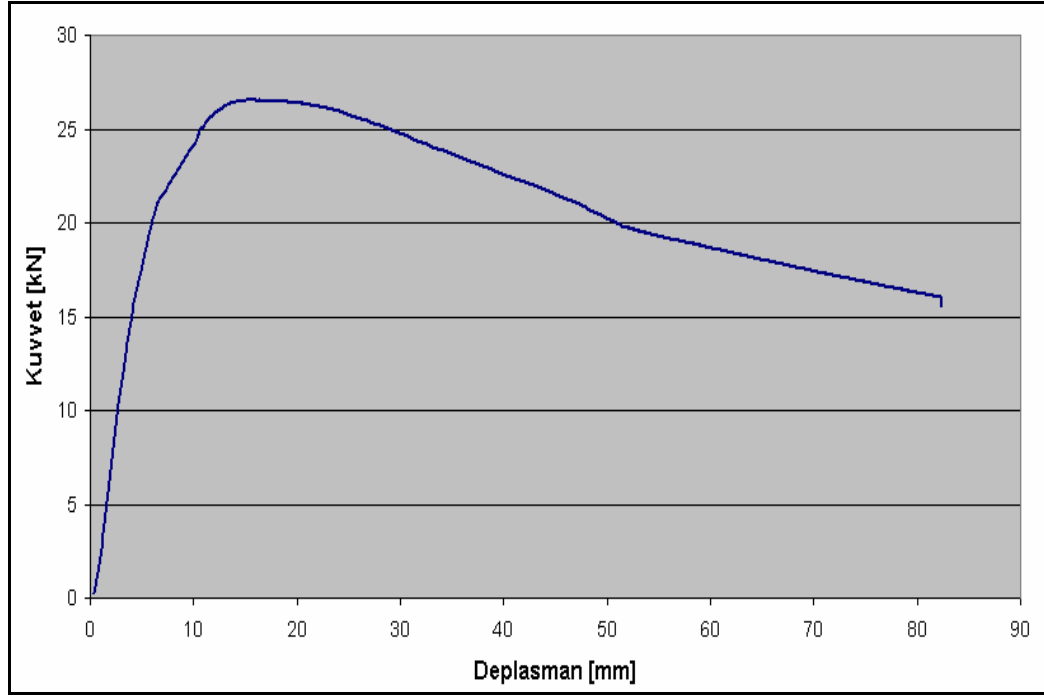
3.2 Eğilme Test Düzenegi

Şekil 3.3 dikdörtgen kesitli düz profil için test düzenegi şemasını göstermektedir. Her iki uçtan da 100 mm genişliğinde bir bölge alınıp (eğilmeye maruz kalan toplam boy 800 mm) her iki uç aksenal yönde serbest bırakılıp diğer yönlerde sabitlenmiştir. (Sabitlenme bileziği yardımıyla). Böylece profilin eğilme esnasında her iki yönden uzaması sağlanarak baskı silindirin kayması engellenmiştir. Profil üzerine hidrolik sistemli silindir ile 80 mm lik deplasman uygulanmış ve silindir üzerinden kuvvet-deplasman dataları ölçülmüştür.

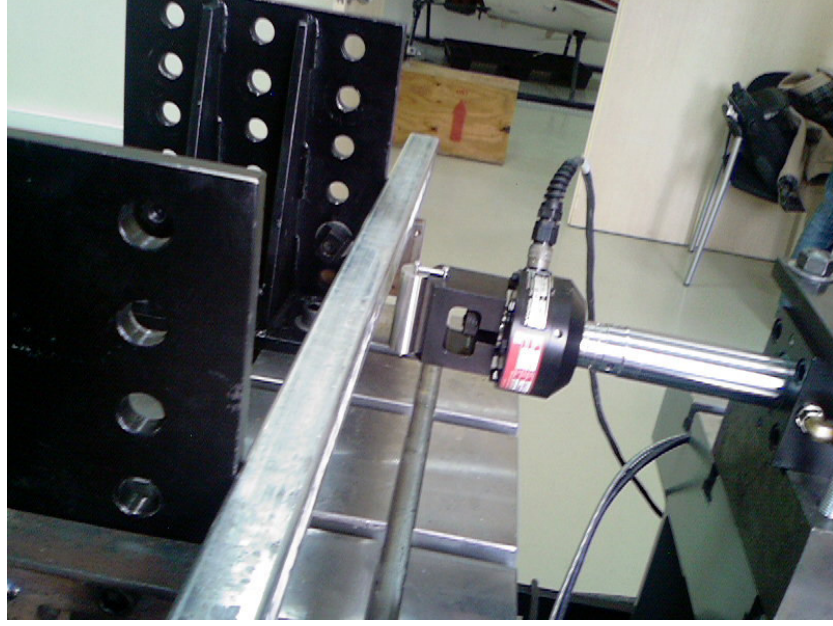


Şekil 3.3: Kare Kesitli Düz Profil Burulma Deneyi Düzenegi Şeması

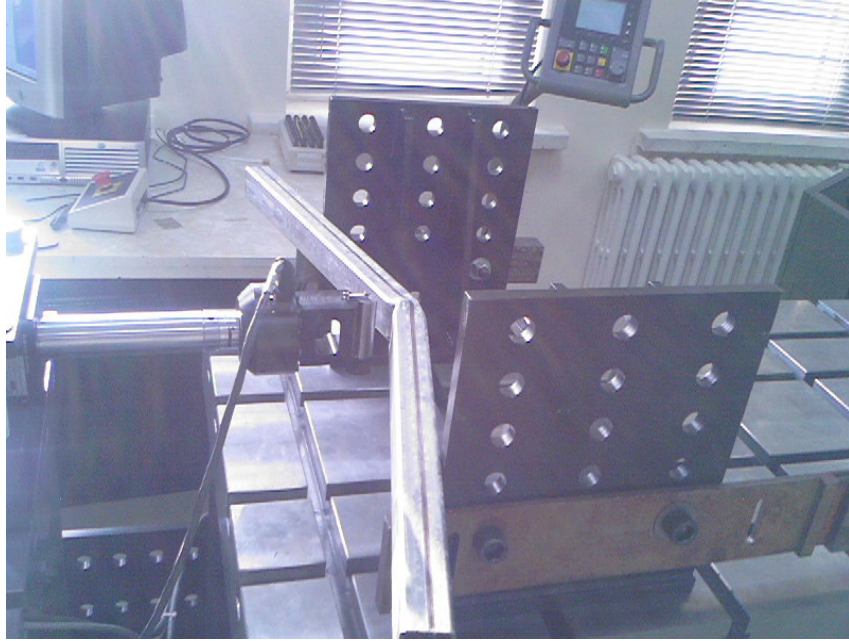
Eğilme testi sonucundan elde edilen kuvvet deplasman grafiği ve oluşan plastik deformasyon resimleri şekil 3.4 ve şekil 3.5-a, b ve c de görülmektedir. Profil üzerindeki lokal sıkışma gerilmelerinden (local compression stress) dolayı lokal burkulma meydana gelmiş buda burkulma oluşuktan sonra ölçülen kuvvetin azalmasına yol açmıştır. Bu durum şekil 3.4 de görülmektedir.



Şekil 3.4: Eğilme Testi Kuvvet-Deplasman Eğrisi



Şekil 3.5: Eğilme Testi Düzeneği



Şekil 3.6: Eğilme Testi Sonucu



Şekil 3.7: Test Sonrası Numunenin Üstten Görünüşü



Şekil 3.8: Test Sonrası Numunenin Yandan Görünüşü

4. SONLU ELEMAN YAKLAŞIMI VE MALZEME MODELLERİ

Mühendislik problemlerini çözmek için fiziksel problemlerin, matematiksel modelleri ele alınır. Matematiksel modeller ise, başlangıç ve sınır koşullarına sahip diferansiyel denklemlerden oluşmaktadır. Fiziksel modellerin başlangıç ve sınır koşullarını tam olarak bilmenin çok zor olduğu düşünülürse gerçeği yansıtan matematiksel modelleri oluşturmak mümkün olmamaktadır. Bu yüzden fiziksel problemlerin üstesinden gelebilmek için sayısal yaklaşımlara başvurulur.

Fiziksel modeli, davranışını doğru bir şekilde belirleyebilen diferansiyel parçalara ayırarak ve bu parçaları belirli yöntemlerle birleştirerek gerçeğe uygun sonuçlar elde edilmesi mümkündür. Sonlu elemanlar metodu (SEM), gerilme analizi, ısı geçişi, elektromanyetizma ve akış analizini içeren mühendislik problemlerinin çözümünde kullanılan bir sayısal yaklaşımdır [9].

Sonlu elemanlar yöntemi, sürekli ortamın birbirine düğüm noktaları ile bağlı olan küçük bölgelere bölünmesi esasına dayanır. Böylelikle serbestlik derecesi sonsuz olan sürekli ortamın yerini, serbestlik dereceleri yani bilinmeyenleri belli sayıda olan elemanlar topluluğu alır.

Çarpışma ve devrilme analizlerinin kompleks ve dinamik durumda oluşundan dolayı, sonlu eleman yaklaşımının doğruluğu sınır koşulları, eleman boyutları, sonlu eleman formülasyonu ve malzeme davranışını belirleyen modellemeler gibi önemli faktörlere bağlıdır. Ağ elemanı boyutu basit bir modelin, test datası ile karşılaştırılmasıyla kolayca bulunabilir. Otomotiv sektöründe sıkça kullanılan sonlu elemanlar metodundaki eleman boyutları ile ilgili araştırmalar ve sonuçlar literatürde bulunabilir. Sınır koşulları modellenecek parçanın fiziksel problemini en uygun şekilde yansıtacak şekilde belirlenir. Bu durum için genellikle mühendislik bilgisi ve tecrübesi yeterli olmaktadır. Analizlerde kullanılan parçaların malzemelerinin davranışlarını tek tek belirlenmesi ve

uygulanması çok zor bir işlemdir. Bu yüzden kritik bölgeler ve parçalar belirlenerek ve bunlar için mevcut malzeme modelleri kullanmak yeterli olmaktadır.

Tez çalışmasında, ağ modeli oluşturmak için ve eleman boyutları için mevcut tecrübelerden yararlanılmıştır. Sonlu eleman formülasyonu için ilk önce örtük (implicit) yöntemden yararlanılmış çıkan sonuçlar doğrultusunda açık (explicit) yöntemi kullanılmasına karar verilmiştir. Tezin amacı olan malzeme davranışı ve modelleri için de yapılan test datalarından yararlanılarak mevcut malzeme modelleriyle yapılan sonuçlar doğrulanarak kıyaslanmıştır.

Sonlu eleman modeli için ticari yazılımlardan HYPERMESH programı kullanılmıştır. Gerekli malzeme, sınır şartları ve yükleme durumlarının oluşturulması için ise, MCRASH programı kullanılmıştır. Modellerin çözümlenmesi için ise ABAQUS ve RADIOSS çözümleme programları kullanılmıştır [10,11].

4.1 Sonlu Eleman Yaklaşımları

Sonlu elemanlar yaklaşımında [10] hareket aşağıdaki formül ile ifade edilir.

$$x_i(X, t) = \Phi_I(X) x_{ij}(t) \quad (4.1)$$

Bu formülde $\Phi_I(X)$ interpolasyon şekil fonksiyonu ve x_{ij} , I düğüm noktasının yer vektörüdür. Küçük harfli indisler koordinat sayısını, büyük harfli indisler ise düğüm noktası sayısını göstermektedir.

Düğüm noktalarının yerdeğiştirmeleri aşağıdaki formül ile ifade edilir.

$$u_{il}(X, t) = x_{il}(t) - X_{il} \quad (4.2)$$

Yer değiştirme alanı;

$$u_i(X, t) = \Phi_I(X) x_{ij}(t) \quad (4.3)$$

olarak ifade edilir. Hız ise yerdeğiştirmenin zamana göre türevinden bulunmaktadır.

$$V(X,t) = \frac{u_i(X,t)}{\partial t} = \Phi_I(X)v_{ij}(t) \quad (4.4)$$

İvme de benzer olarak hızın zamana göre türevinden elde edilmektedir.

$$\dot{V}(X,t) = \frac{u_i(X,t)}{\partial t} = \Phi_I(X)\dot{v}_{ij}(t) \quad (4.5)$$

Hız gradyanının fonksiyonu ;

$$L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \Phi_I}{\partial x_j} = v_{il}\Phi_{I,j} \quad (4.6)$$

deformasyon oranı ise şu formülle ifade edilir.

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(L_{ij} + L_{ji}) = \frac{1}{2}(v_{il}\Phi_{I,j} + v_{jl}\Phi_{I,i}) \quad (4.7)$$

Benzer şekilde test fonksiyonu da aşağıdaki gibi yazılır.

$$\partial v_i(X) = \Phi_I(X)\delta v_{il} \quad (4.8)$$

δv_{il} , fiili nodal hızları ifade etmektedir.

Bulunan test fonksiyonu virtüel iş denkleminde yerine konursa,

$$\delta v_{il} \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi_I}{\partial x_j} \sigma_{ji} d\Omega - \delta v_{il} \int_{\Omega} \Phi_I \rho b_i d\Omega - \delta v_{il} \int_{\Gamma_{\sigma}} \Phi_I t_i d\Gamma + \delta v_{il} \int_{\Omega} \Phi_I \rho \dot{v}_i d\Omega \quad (4.9)$$

denklemini elde edilir.

4.1.1 İç ve Dış Kuvvetlerin Bulunması

Virtüel güç eşitliğine göre iç nodal kuvvetler tanımlanabilir.

$$\delta P^{\text{int}} = \delta v_{il} f_{il}^{\text{int}} = \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \sigma_{ji} d\Omega = \delta v_{il} \int_{\Gamma_{\sigma}} \frac{\Phi_I}{\partial x_j} \sigma_{ji} d\Omega \quad (4.10)$$

Gerilme gerçek gerilmedir (Cauchy)

$$f_{il}^{int} = \int_{\Omega} \sigma_{ji} \left(\frac{\partial \Phi_I}{\partial x_j} \right) d\Omega \quad (4.11)$$

Bu nodal kuvvetler, gövde üzerindeki gerilmeleri temsil ettiği için iç kuvvetler adını alır. Bu ifade bütün ağ modeli ve herhangi bir elemana uygulanır. Türevler uzay koordinatları baz alınarak alınır ve integraller ise mevcut deforme olmuş şekli gösterir.

Dış kuvvetler de benzer olarak dış virtüel güçten tanımlanır.

$$\delta P^{ext} = \delta v_{il} f_{il}^{ext} = \delta v_{il} \int_{\Omega} \Phi_I \rho b_i d\Omega + \delta v_{il} \int_{\Gamma_{\sigma}} \Phi_I i_i d\Gamma \quad (4.12)$$

Böylece dış kuvvetler şu şekilde ifade edilebilir.

$$\delta P^{ext} = \delta v_{il} f_{il}^{ext} = \delta v_{il} \int_{\Omega} \Phi_I \rho b_i d\Omega + \delta v_{il} \int_{\Gamma_{\sigma}} \Phi_I i_i d\Gamma \quad (4.13)$$

4.1.2 Kütle Matrisi ve Atalet Kuvvetleri

(4.14) denklemi gövde atalet kuvvetlerini tanımlamaktadır.

$$\delta P^{inert} = \delta v_{il} f_{il}^{inert} = \delta v_{il} \int_{\Omega} \Phi_I \rho \dot{v}_i d\Omega = \delta v_{il} \int_{\Gamma_{\sigma}} \Phi_I i_i d\Gamma \quad (4.14)$$

Böylelikle atalet kuvvetleri şu şekilde yazılabilir.

$$f_{il}^{inert} = \int_{\Omega} \Phi_I \rho \dot{v}_i d\Omega \quad (4.15)$$

veya (4.5) denklemi kullanılarak;

$$f_{il}^{inert} = \int_{\Omega} \rho \Phi_I \Phi_j \dot{v}_{ij} d\Omega \quad (4.16)$$

şeklinde yazılabilir.

Nodal atalet kuvvetlerini, kütle matrisinin ve nodal ivmelerin sonucu olarak da yazmak mümkündür. Kütle matrisi (4.17) deki denklem ile ifade edilirse;

$$M_{ijIJ} = \delta_{ij} \int_{\Omega} \rho \Phi_I \Phi_J d\Omega \quad (4.17)$$

atalet kuvvetleri (4.18) deki eşitlik ile ifade edilebilir.

$$f_{iI}^{inert} = M_{ijIJ} \dot{v}_{ij} \quad (4.18)$$

4.1.3 Ayrık Denklemler

İç, dış ve atalet kuvvetlerinin tanımlarını kullanarak, virtüel güç denklemini (4.19) eşitliğindeki gibi yazmak mümkündür.

$$\delta v_{iI} (M_{ijIJ} \dot{v}_{ij} + f_{iI}^{int} - f_{iI}^{ext}) = 0 \quad (4.19)$$

Veya (4.20) deki eşitlik gibi de yazılabilir.

$$M_{ijIJ} \dot{v}_{ij} + f_{iI}^{int} = f_{iI}^{ext} \quad (4.20)$$

4.1.4 Doğrusal hızlar için Hareket Denklemi

(4.20) deki eşitlik matris gösteriminde yazılırsa;

$$M \frac{dv}{dt} = f_{iI}^{ext} - f_{iI}^{int} \quad (4.21)$$

Newton yasasından kütle matrisi bulunabilir.

$$M = \int_{\Omega} \rho \Phi^T \Phi d\Omega \quad (4.22)$$

Analizlerde kullanılan Radioss programı “Noktasal kütle sistemi (lumped mass)” yaklaşımı kullanmaktadır. Her düğüm noktası, sıfır boyutta (zero size) ayrık kütle temsil eder. Buda diogonal M matrisini oluşturmaktadır ve bu kütle matrisi , nodal ivmelenmelerde denklemler sistemini çözmek için elimine edilmelidir.

$$f^{ext} = \int_{\Gamma} \Phi^T i d\Gamma + \int_{\Omega} \rho b \Phi^T d\Omega \quad (4.23)$$

(4.23) eşitliği dışarıdan uygulanan yüküdür ve,

$$f^{int} = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial \Phi_I}{\partial x_j} d\Omega \quad (4.24)$$

(4.24) ise iç kuvvet vektörüdür.

Anti hourglass eklenmiş halindeki kısmın ayrıntısına girilmeyecektir fakat genel olarak bu denklem (4.25) eşitliğindeki gibi yazılmaktadır.

$$M \frac{dv}{dt} = f_{iI}^{ext} - f_{iI}^{int} + f^{hgr} + f^{cont} \quad (4.25)$$

4.1.5 Açısal Hızlar için Hareket Denklemi

Kabuk, kiriş ve rijit teorileri açısal serbestlik derecesini ortaya çıkarmıştır. Açısal serbestlik derecesindeki hareket denklemlerini, global referans sisteminde yazmak oldukça zordur. Sonuç olarak çıkan denklemler Euler denklemleridir. Bu denklemler, doğrusal koordinatlardaki Newton un kanununa tamamen paraleldir ve (4.26), (4.27) ve (4.28) deki eşitlikler gibi ifade edilmektedir.

$$I_1 \alpha_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 = m_1^{ext} - m_1^{int} \quad (4.26)$$

$$I_2 \alpha_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = m_2^{ext} - m_2^{int} \quad (4.27)$$

$$I_3 \alpha_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 = m_3^{ext} - m_3^{int} \quad (4.28)$$

$\Rightarrow I_1, I_2$ ve I_3 terimleri x,y ve z koordinatlarındaki atalet momentleridir.

$\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ terimleri açısal ivmeleri göstermektedir.

$\Rightarrow \omega_1, \omega_2, \omega_3$ terimleri açısal hızları temsil etmektedir.

$\Rightarrow m_1^{ext}, m_2^{ext}, m_3^{ext}$ terimleri uygulanan dış momentleri göstermektedir.

$\Rightarrow m_1^{int}, m_2^{int}, m_3^{int}$ terimleri ise iç momentleri ifade etmektedir.

Dönme serbestlik derecesine göre hareket denklemleri, doğrusal serbestlik derecelerine göre yazılan denklemlere benzerdir. Matris yazımında ve prensip nodal referans biçiminde şöyle ifade edilmektedir;

$$I \frac{dw}{dt} = M^{ext} - M^{int} + F(w) \quad (4.29)$$

$F(w)$ vektör fonksiyonu $t - \frac{\delta t}{2}$ de w değeri için hesaplanır. (4.49) denklemi rijit cisim (rigid body) hareketi için kullanılır.

Kabuk, kiriş ve çubuk elemanlar için küresel atalet kullanılır. Bu durumda hareket denklemi;

$$I \frac{dw}{dt} = M^{ext} - M^{int} + M^{hgr} \quad (4.30)$$

şeklinde ifade edilir. Eşitlikteki ifadeler de

$$I = \sum_{elements} I_e \text{ diyagonal atalet matrisi ,}$$

$$M^{ext} = \sum_{elements} m^{ext} \text{ dış moment vektörü,}$$

$$M^{int} = \sum_{elements} m^{int} \text{ iç moment vektörü,}$$

$M^{hgr} = \sum_{elements} m^{hgr}$ anti- hourglass, kabuk moment vektör olarak tanımlanmaktadır.

4.1.6 Element Koordinatları

Sonlu elemanlar, intrinsic koordinat sisteminde ifade edilen (ξ, η, ζ) şekil fonksiyonlarından geliştirilmiştir. Bundan sonra bu koordinat sisteminde ifade edilen şekil fonksiyonlarının, malzeme koordinatlarının kullanımına benzediği görülmektedir. Bir eleman intrinsic koordinat sisteminde ele alındığında, bu elemana karşılık gelen üç alan (domain) olduğu söylenebilir.

- intrinsic koordinat sistemindeki alan,
- geçerli eleman alanı,
- içsel referans eleman alanı,

ξ , u hareket yönünü ifade etmektedir.

η , v hareket yönünü ifade etmektedir.

ζ , w hareket yönünü ifade etmektedir.

Herbir eleman için hareket, üç eşlem (map) düzeninde ifade edilmektedir.

- intrinsic koordinat sisteminden elde edilen başlangıç konfigürasyondaki eşlem;

$$X(\xi) \tag{4.31}$$

- intrinsic koordinat sisteminden elde edilen geçerli (Current) konfigürasyondaki eşlem;

$$X(\xi, t) \tag{4.32}$$

- başlangıç şartlarından elde edilen geçerli konfigürasyondaki eşlem;

$$x = \varphi(X, t) \tag{4.33}$$

Böylece bir eleman üzerindeki hareketi (4.34) denklemi şeklinde ifade etmek mümkün olmaktadır.

$$x_i(\xi, t) = \Phi_I(\xi)x_{iI}(t) \quad (4.34)$$

$\Phi_I(\xi)$ şekil fonksiyonları boyutsuzdur ve sadece fiziksel dünyadaki intrinsic koordinat sistemi ile ilişkilidir. (4.34) eşitliği $t = 0$ da tekrar yazılırsa;

$$x_i(\xi) = x_i(\xi, t) = \Phi_I(\xi)x_{iI}(0) = \Phi_I(\xi)x_{iI} \quad (4.35)$$

eşitliği elde edilir.

Son eşitlikten görülebileceği gibi malzeme k ve intrinsic koordinat sistemleri Langrangian elemanlarının envaryantlarıdır (invariant) . Sonuçta intrinsic koordinat sisteminin zamandan bağımsız olduğu ve deplasman, hız ve ivmenin intrinsic koornatı terimleri olarak yazılabileceği görülür (bir koordinat sistemi, diğer iki koordinat aynı şekil fonksiyonuna sahip).

$$u_i(\xi, t) = \Phi_I(\xi)u_{iI}(t) \quad (4.36)$$

$$\dot{u}_i(\xi, t) = \Phi_I(\xi)\dot{u}_{iI}(t) \quad (4.37)$$

$$\dot{v}_i(\xi, t) = \Phi_I(\xi)\dot{v}_{iI}(t) \quad (4.38)$$

isoparametrik elemanlar x , u , $\dot{u}$ ve $\dot{v}$ interpolasyonları için aynı şekil fonksiyonlarını kullanırlar.

4.1.7 İntegrasyon ve Nodal Kuvvetler

Pratikte, iç, dış nodal kuvvetlerin ve kütle matrisinin geçerli düzlemdeki integrallerinin Δ intrinsic koordinat sistemindeki integrallerine dönüştürülmesi gerekmektedir.

$d\Omega = |F|\Omega_0$ eşitliğini kullanarak, geçerli konfigürasyonun integralinin, referans konfigürasyonundaki ve intrinsic koordinat sistemi düzlemindeki integralin ilişkili olduğu söylenebilir .

$$\int_{\Omega} g(x) d\Omega = \int_{\Omega_0} g(x) |F| d\Omega_0 = \int_{\Delta} g(x) |F_{\xi}| d\Delta \quad (4.39)$$

ve

$$\int_{\Omega_0} g(x) |F| d\Omega_0 = \int_{\Delta} g(x) |F_{\xi}^0| d\Delta \quad (4.40)$$

şeklinde yazılabilir. $|F|$ geçerli ve başlangıç konfigürasyonları arasındaki dönüşüm jacobianının detarminatını ifade etmektedir. $|F_{\xi}|$ geçerli konfigürasyon ve intrinsic koordinat sisteminin düzlemi arasındaki dönüşüm jacobianının detarminatını ifade etmektedir. $|F_{\xi}^0|$ ise referans konfigürasyon ve intrinsic koordinat sistemi arasındaki transformasyon jacobianının detarminantıdır.

Diğer taraftan $D_j \frac{\partial}{\partial X_j}$ transformasyonu ve $|F_{\xi}|$ kullanılarak;

$$F_{\xi kj} = \frac{\partial x_k}{\partial \xi_j} = \frac{\partial \Phi_I(\xi)}{\partial \xi_j} x_{kl} \quad (4.41)$$

eşitliği yazılabilir.

Böylece (4.39) eşitliğini kullanarak, geçerli düzlem üzerinden integrasyon ile elde edilmesiyle hesaplanan iç kuvvetler (4.42) eşitliğindeki gibi belirlenir.

$$f_{il}^{\text{int}} = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial \Phi_I}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Delta} \sigma_{ij} \frac{\partial \Phi_I}{\partial x_j} |F_{\xi}| d\Delta \quad (4.42)$$

$|F_{\xi}|$ ise (4.41) eşitliği kullanılarak belirlenir.

Dış kuvvetler ve kütle matrisi aynı şekilde intrinsic koordinat sistemindeki düzlemin integrasyonu ile belirlenmektedir.

4.1.8 Fonksiyonların türevleri

İç kuvvetler (4.43) eşitliğindeki formun türevi şeklinde de gösterilebilir.

$$\frac{\partial}{\partial X_j} \quad (4.43)$$

Bu uzamsal (spatial) türetimler implicit türevlerden belirlenir. Hız gradyanı da göz önüne alınırsa;

$$L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (4.44)$$

ve

$$L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial \xi_k} F_{\xi kj}^{-1} = v_{il} \frac{\partial \Phi_l}{\partial \xi_k} F_{\xi kj}^{-1} \quad (4.45)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu eşitlikte $F_{\xi kj}$;

$$F_{\xi kj} = \frac{\partial x_k}{\partial \xi_j} = v_{il} \frac{\partial \Phi_l(\xi)}{\partial \xi_j} x_{kl} \quad (4.46)$$

geçerli koordinat sistemi ve intrinsic koordinat sistemi arasındaki jacobian matrisinin eşlemidir.

Genellikle jacobian matrisinin kapalı formunu elde etmek mümkün değildir. Tersine çevrimin sonuçları numerik olarak hesaplanacaktır ve nümerik tümlev alma (Numerical quadrature) , nodal kuvvetlerin ölçümünde gerekli olacaktır.

4.1.9 Nümerik Tümlev Alma (Numerical quadrature) – İndirgenmiş İntegrasyon

Sonlu elemanlar açık (explicit) çözücü programlarında bütün elemanların nümerik olarak birleştirilmiştir. Böylece nodal kuvvetlerin integralleri için, (4.47) eşitliği kullanılmıştır.

$$\int f(\xi) d\xi = \sum_{j=1}^n w_j f(\xi_j) \quad (4.47)$$

Bu eşitlikteki n integrasyon noktası sayısını, w_j ise j integrasyon noktasının ağırlığını ifade etmektedir. w_j nin değeri ve ξ_j nin lokasyonları nümerik tümlev alma yaklaşımına göre hazırlanmış tablolardan alınmaktadır. Tezde kullanılan RADIOSS programı tam (full) ve indirgenmiş (reduced) integrasyon yöntemlerinin ikisini de kullanmaktadır.

Tam integrasyon için, virtüel işdeki integrasyon ifadesi için integrasyon noktası sayısı yeterlidir. Tam integrasyon yöntemi daha çok , örtük zaman integrasyonu yöntemindeki statik ve dinamik problemler için kullanılır. Kararlılık için problem oluşturmaz fakat genellikle hesaplama yöntemi açısından genellikle daha uzun zaman alır.

İndirgenmiş integrasyon yönteminde, integrasyon noktası sayısı, şekil fonksiyonundan bir derece düşük olan birim uzama alanının integrasyonu için yeterlidir.

Bu yöntemde, kuvvet vektörlerini açık zaman integrasyonu ile hesaplayan programlarda büyük ölçüde bir noktalı tümlev kullanılmaktadır. Böylece hesaplama zamanı büyük ölçüde düşürülmektedir ve indirgenmiş integrasyon sonucu oluşan ve genellikle hourglass mod adı verilen modlar tam anlamıyla kararlı biçimdeyse hesaplama zamanı açısından oldukça uygun bir yöntemdir. İki boyutlu düzlemde bir noktalı integrasyon düzeni dört noktalıya göre dört kat daha az zamanda hesaplanabilmektedir. Zamandan kazanım üç boyutlu sistemlerde artmaktadır. Bir noktalı integrasyon yöntemi işlemci zamanı açısından önerilen bir yöntemdir ayrıca kayma kilitlenmesi (shear locking) ve hacim kilitlenmesi (volume locking) gibi “kilitlenme” problemlerinden de kaçınılmasını sağlar.

Kayma kilitlenmesi, eğilme davranışı ile bağlantılıdır. Nispeten ince parçalar gerilme analizlerinde eğilmeye maruz kalırlar. Kalınlık doğrultusundaki birim uzama değişimi en azından lineer olmalıdır. Böylece, sabit birinci dereceden elemanlar bu değişimi yansıtmak için uygun değildir bu durum kayma kilitlenmesine yol açmaktadır. Böyle bir durumda elemanın davranışı olması gerektiğinden daha rijit olacaktır.

Diğer taraftan tam integrasyon yöntemi kullanılan katı elemanlar, sıkıştırılmaz malzeme davranışlarının (volume locking) analizleri için uygun bir yöntem değildir. Bunun sebebi malzeme davranışının, malzemenin hacim değişimi olmadan deforme olması şeklinde olmasıdır. Tam integrasyon yöntemi kullanılmış katı elemanlar ve özellikle düşük dereceli elemanlar bu şekilde deformasyonlara izin vermezler. İndirgenmiş integrasyon yönteminin kullanılma sebeplerinden biride budur. İndirgenmiş integrasyon yöntemi hacim birim şekil değiştirme (volume strain) durumları için, tam integrasyon yöntemi ise sapma birim şekil değiştirmesinin (deviatoric strain) olduğu durumlar için uygundur.

Daha öncede bahsedildiği gibi indirgenmiş integrasyon yönteminin dezavantajı, kullanıldığı elemanlarda integrasyon noktalarında gerilmelerin oluşmadığı deformasyon modları görülebilmesidir. Bu sıfır enerji modları elemanları rank-deficient yapar ve bu hadise hourglass olarak adlandırılır. Bu sıfır enerji modları ağa doğru yayılır ve doğru olmayan sonuçlara sebep olur. Bu problem birinci dereceden dörtgen kabuk elemanlarda ve altıyüzlü katı elemanlarda görülmektedir.

Bu fazla deformasyonları önlemek için, sıfır enerji modları ile ilişkili olan küçük yapay rijitlikler ve viskosite eklenir. Bu eklentilere anti-hourglass kuvveti ve momenti adı verilir.

$$M \frac{dw}{dt} = f^{ext} - f^{int} + f^{hgr} \quad (4.48)$$

$$I \frac{dw}{dt} = M^{ext} - M^{int} + M^{hgr} \quad (4.49)$$

Sıfır enerji veya hourglass modları, Flanagan-Belyrschko[23] tarafından bulunan düzensizlik stabilizasyonu (perturbation stabilization) adı verilen yöntemle giderilir. Bu konunun ayrıntısına girilmeyecektir.

4.1.10 Nümerik Hesaplama Yöntemi

Sonlu eleman çözücü programının nümerik çözüm yöntemi şekil 4.9 da gösterildiği gibi özetlenebilir.

1. Belirli bir zaman adımındaki deplasman, hız ve ivme için dış kuvvetler düzenlenir ve uygulanır.
 2. Geçiş elemanları (loop over) uygulanır. İç ve hourglass kuvvetler ve sonraki zaman adımı hesaplanır. Bu döngü için prosedür şu şekildedir.
- Ara deplasman için intrinsic koordinat sisteminde jacobian matrisi hesaplanır.

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right|_t = F_{\xi}^{-1} \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right|_t \quad (4.50)$$

- Birim şekil değiştirme oranı (strain rate) hesaplanır.

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) \dot{x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.51)$$

- Gerilme oranı (stress rate) hesaplanır.

$$\dot{\sigma}_{ij} = f(\dot{\epsilon}, \text{malzeme_modeli}) \quad (4.52)$$

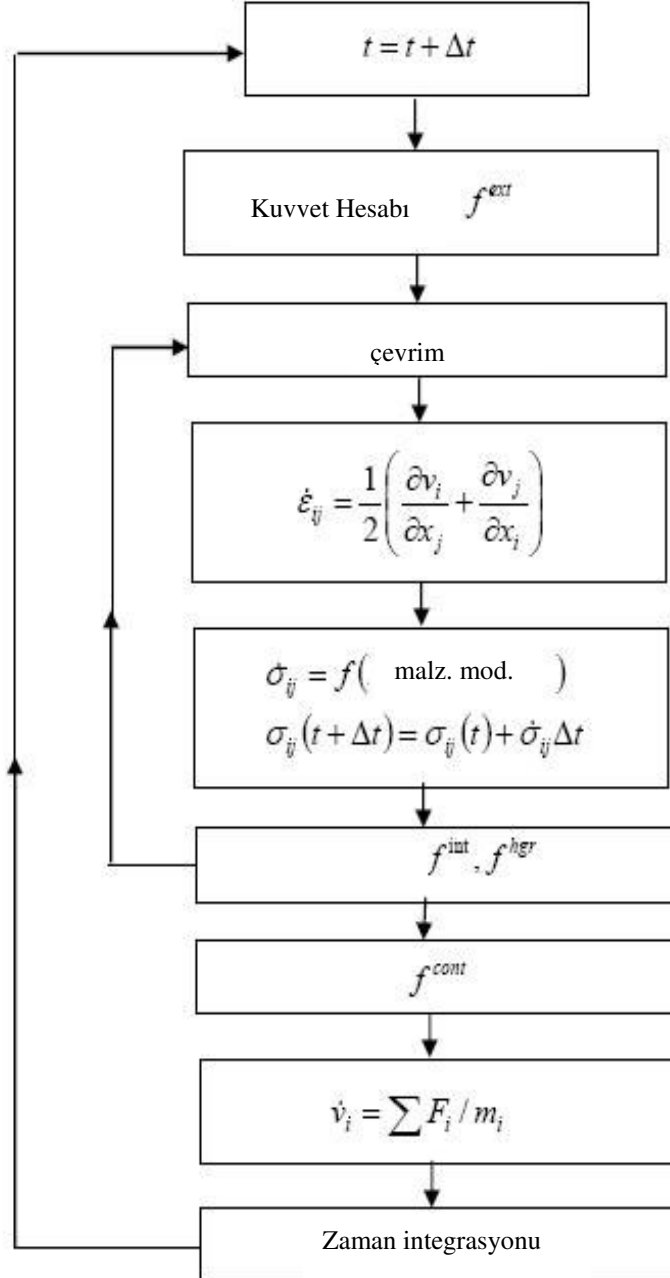
- Açık (explicit) zaman integrasyonu kullanılarak Cauchy gerilmeleri hesaplanır.

$$\sigma(t + \Delta t) = \sigma(t) + \dot{\sigma}(\Delta t) \quad (4.53)$$

- İç ve hourglass kuvvet vektörleri hesaplanır.
 - Element veya düğüm noktası zaman adımı kullanılarak bir sonraki zaman adımı hesaplanır.
4. Herbir eleman için iç ve hourglass kuvvetler hesaplandıktan sonra program algortiması her ara yüzey için kontak kuvvetlerini hesaplayarak ilerler.
 5. Bütün kuvvetler bulunduktan sonra, kütle matrisi ve dış kuvvetler kullanılarak yeni ivmeler hesaplanır.

$$\dot{v}_i = M^{-1}(f_{exti} - f_{inti}) \quad (4.54)$$

6. Son olarak hız ve deplasman integrasyonu yeni değerler kullanılarak uygulanır.



Şekil 4.1: Basitleştirilmiş Hesaplama Algoritması

4.2 Malzeme Modelleri

Metallerin yapısal davranışlarını veya plastik kararsızlık durumlarını belirleyen en önemli faktör, malzemelerin birim deformasyon pekleşmesi (strain hardening) davranışlarıdır. Plastik deformasyonların fazla olduğu durumlarda bu davranışın tanımlanması gerekmektedir. Birçok plastisite probleminde pekleşme davranışı, malzemenin gerilme-birim uzama eğrisinin basit formu ile tanımlanmaktadır. Orantılı yükler için bu tanımlama doğrudur. Dinamik ve kararlı olmayan durumlarda veya değişik yükleme koşulları altında ise bu kabul, gerçek sonuçlar ile örtüşmemektedir.

Adım adım artımlı (incremental) plastisite teorisi genellikle hesaplamalı yöntemlerde kullanılmaktadır. Plastisite modelleri deformasyon hızına bağımlı (rate dependent) veya bağımsız (rate-independent) olarak adlandırılabilir. Deformasyon hızına bağlı modellerde, uzama pekleşmesi, bünye denklemlerini (constitutive law) etkilemektedir. Bu durum birçok metalde erime sıcaklığının çok altındaki sıcaklıklarda geçerlidir.

Analizlerde kullanılan malzeme modellerinde Von Mises akma kriteri göz önüne alınmıştır [6]. Analizler elastik-plastik malzeme modeli, Johnson – Cook (JC) malzeme modeli, Cowper-Symonds (CS) malzeme modeli, Zerilli-Armstrong (ZA) malzeme modeli, Piecewise malzeme modeli ve son olarak da elastik-plastik hasar malzeme modeli kullanılmıştır [10].

4.2.1 Johnson-Cook Plastik Malzeme Modeli

Bu malzeme modeli akma sınırının altındaki gerilmelerde hook kanununa uygun olarak lineer elastik davranış göstermektedir. Akma sınırının üzerinde çıkan gerilme durumlarında ise plastik davranış göstermektedir. Bu model kiriş, çubuk, kabuk ve katı elemanlar için kullanılabilir. Gerilme ve birim uzama arasındaki ilişki (4.55) eşitliğinde verilmektedir.

$$\sigma = (a + b \epsilon_p^n) \left(1 + c \ln \frac{\dot{\epsilon}_p}{\dot{\epsilon}_0}\right) (1 - T^{*m}) \quad (4.55)$$

σ = Akma mukavemeti

ϵ_p = Plastik birim uzama

a = Akma gerilmesi

b = Pekleşme modülü

n = Pekleşme üst katsayısı

c = Deformasyon hızı katsayısı

$\dot{\epsilon}$ = Deformasyon hızı

$\dot{\epsilon}_0$ = Referans deformasyon hızı

m = Sıcaklık üst katsayısı

$$T^* = \frac{T - 298}{T_{mel} - 298} \quad (4.56)$$

T^* Kelvin cinsinden erime sıcaklığıdır. Sıcaklık hesabı için ortamın adyabatik olduğu kabul edilmiştir.

$$T = T_i + \frac{E_{int}}{\rho C_p (\text{Volume})} \quad (4.57)$$

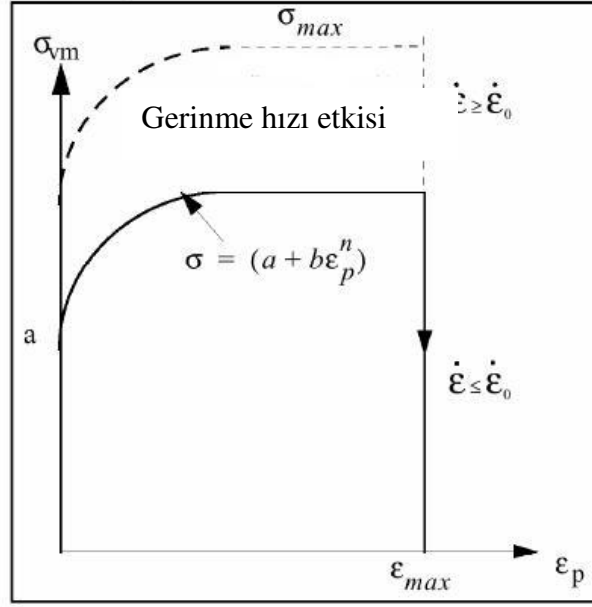
ρC_p = Özgül ısı kapasitesi

T_i = Başlangıç sıcaklığı

Bu değerlere ek olarak maksimum akma gerilmesi ve kopma noktasındaki plastik birim uzama değeri de girilebilir.

σ_{max} = Maksimum akma gerilmesi

ϵ_{max} = Maksimum plastik birim uzama değeri (Kopma sınırı)



Şekil 4.2: Gerilme Hızının Etkisi

Şekilde plastik bölgedeki gerilme-birim uzama eğrisi gösterilmektedir. Maksimum gerilmeye ulaşıldığında gerilme sabit kalıp birim uzama artışı devam edecektir. Maksimum plastik birim uzamayı geçildiği anda ise kopma başlayacaktır. Yazılımda kopmanın gerçekleştiği bölgelerde kabuk elemanlar silinir, katı elemanlarda ise eleman gerilme değerleri sıfıra sabitlenir.

4.2.1.1 Birim Uzama hızı Tanımı

Birim uzama artışı hızının ifade edilişi plastikleşme metodunun kullanılmasından dolayı farklıdır.

Birim uzama için, eğer aşamalı plastikleşme metodu (progressive plastification method) kullanılırsa;

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \max\left(\frac{d\epsilon_x}{dt}, \frac{d\epsilon_y}{dt}, 2\frac{d}{dt}(\epsilon_{xy})\right) \quad (4.58)$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{xy} \quad (4.59)$$

global plastikleşme metodu kullanılırsa;

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \left(\frac{dE_i / dt}{\sigma_{VM}} \right) \quad (4.60)$$

Eşitlikleri yazılabilir. E_i iç enerjiyi göstermektedir.

Katı elemanlar için maksimum birim uzama artışı kullanılmaktadır:

$$\dot{\varepsilon} = \max(\dot{\varepsilon}_x, \dot{\varepsilon}_y, \dot{\varepsilon}_z, 2\dot{\varepsilon}_{xy}, 2\dot{\varepsilon}_{yz}, 2\dot{\varepsilon}_{xz}) \quad (4.61)$$

4.2.2 Cowper-Symonds Plastik Malzeme Modeli

Bu malzeme modeli elastik plastik malzeme modelidir. Kopma değeri girilebilir. Hasar bu malzeme modeli için ihmal edilmiştir. Pekleşme davranışı johnson-Cook malzeme modeline benzemektedir fakat birim uzama artışı farklı hesaplanmaktadır. Malzemeyi isotropik ve/veya kinematik tanımlamak mümkündür. Ayrıca sıcaklık etkisi de bu malzeme modeli için kullanılmamaktadır. Gerilme formülasyonu (4.62) denkleminde gösterilmektedir. Bu model sadece kabuk ve katı elemanlar için kullanılabilir.

$$\sigma = (a + b\varepsilon_p^n) \left(1 + \frac{1}{c} \dot{\varepsilon}^{\frac{1}{p}} \right) \quad (4.62)$$

σ = Akma mukavemeti

ε_p = Plastik birim uzama

a = Akma gerilmesi

b = Pekleşme modülü

n = Pekleşme üst katsayısı

c = Deformasyon hızı katsayısı

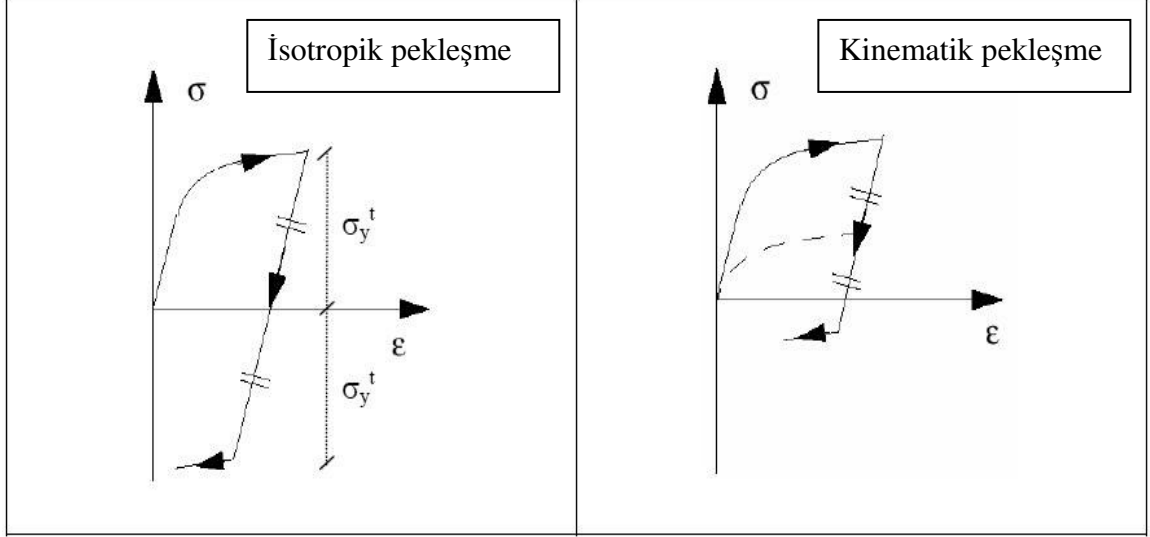
$\dot{\varepsilon}$ = Deformasyon hızı

$\dot{\varepsilon}_0$ = Referans deformasyon hızı

$1/p$ = Deformasyon hızı üst katsayısı

Bu malzeme modelinde isotropik ve kinematik yaklaşımla pekleşme periyodik olarak tanımlıdır. Programda pekleşme katsayısı olarak tanımlana C_{hard} değerini atamak yeterlidir. Katsayının 0 değeri için malzeme tamamen isotropik davranış göstermekte, 1

olarak tanımlanması durumunda ise tamamen kinematik davranış göstermektedir. Yüklemin yönü değiştiğinde malzeme yüksüz duruma geçip, birim uzama düşmektedir. Şekil 4.3 de isotropik ve kinematik davranış gösterilmektedir.



Şekil 4.3: İsootropik ve kinematik pekleşme şekilleri

4.2.3 Zerilli-Armstrong Plastik Malzeme Modeli

Bu malzeme modeli Johnson-Cook modeline çok benzemektedir ve aynı katsayılar kullanılmaktadır. Fakat gerilme denklemi farklı ifade edilmektedir.

$$\sigma = C_0 + \left[C_1 \exp \left(-C_3 T + C_4 T \ln \frac{\dot{\epsilon}^*}{\epsilon_0} \right) \right] + C_5 \epsilon_p^n \quad (4.63)$$

σ = Akma mukavemeti

C_i = Akış gerilmesi katsayıları

ϵ_p = Plastik birim uzama

T = Sıcaklık (Johnson-Cook modeliyle aynı şekilde hesaplanmaktadır.)

n = Pekleşme üst katsayısı

c = Deformasyon hızı katsayısı

$\dot{\epsilon}$ = Deformasyon hızı

$\dot{\epsilon}_0$ = Referans deformasyon hızı

Deformasyon artışı hesabı da Johnson-Cook modeline benzemektedir. Ayrıca kopma değerleri de girilebilir.

$\sigma_{\max}$ = Maksimum akma gerilmesi

$\epsilon_{\max}$ = Maksimum plastik birim uzama değeri (Kopma sınırı)

4.2.4 Piecewise Malzeme Modeli

Bu malzeme modelinde izotropik malzemenin elasto-plastik davranışı, pekleşme davranışına göre tanımlanan fonksiyon ile belirlenir. Malzemenin elastik davranışı diğer modellerde olduğu gibidir. Pekleşme davranışı ise verilen birim uzama hızına göre tanımlanan fonksiyondan elde edilir.

Otomotiv endüstrisinde yapılan analizlerde en çok kullanılan malzeme modelidir. Bunun sebebi uzama hızı belirlenmesinin diğer modellere göre daha hassas ve esnek oluşudur. Modelde gerilme-birim uzama eğrisinin değerleri için direk test dataları kullanılır. Gerilme değeri girilen test eğrilerinin interpolasyonundan elde edilmektedir. Kullanılacak malzeme için, maksimum birim uzama hızı mutlaka test ile belirlenmelidir. Belirlenen bu değere kadar değişik birim uzama hızlarında yapılan test dataları modelde kullanılmaktadır. Eğriler arasında kalan değerler için interpolasyon yapılacağından test sayısının da belirlenmesi gerekmektedir.

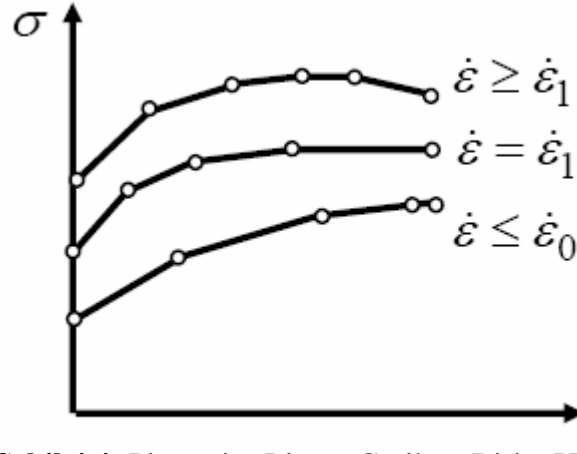
Pekleşme modeli izotropik, kinematik veya her ikisi birlikte şeklinde verilebilir. Akma gerilmesi (4.64) eşitliğindeki gibi belirlenir.

$$\sigma_y = \sigma_y^0(\epsilon_p)f(p) \quad (4.64)$$

Çelik malzemeler için bu eşitlik;

$$\sigma_y = \sigma_y^0(\epsilon_p).c.f(p) \quad (4.65)$$

şeklinde tanımlanır. C sabit bir katsayı ve p deforma olan konfigürasyondan hesaplanan basınç değeridir.



Şekil 4.4: Piecewise Linear Gerilme-Birim Uzama Eğrileri

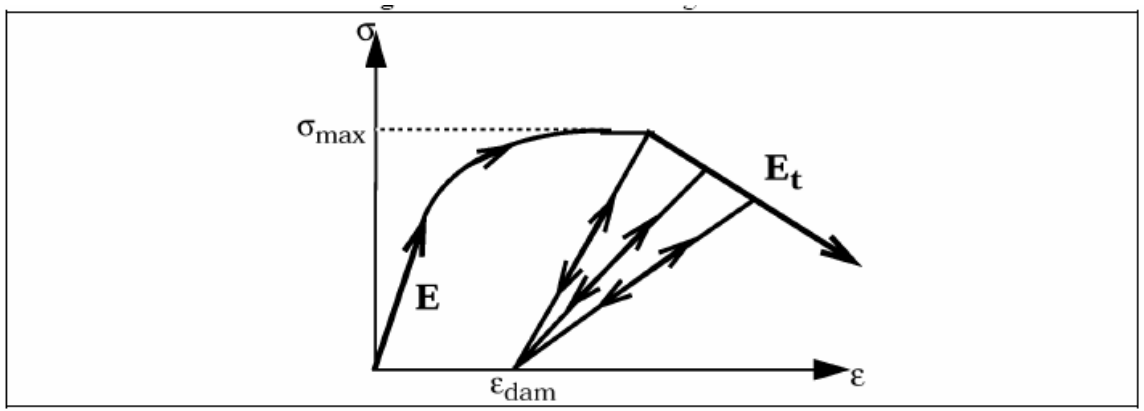
4.2.5 Sünek Hasar Malzeme Modeli

Sünek malzemeler için hasar modeli RADIOSS programında tanımlanmıştır. Bu malzeme modeli katı ve kabuk elemanlar için uygulanabilir. Malzemenin elastik-plastik davranışı Johnson-Cook modeli ile ifade edilmektedir. Malzeme üzerindeki hasar δ katsayısı ile belirlenebilmektedir. Belirlenen ϵ_{dam} değeri geçildiğinde hasar malzeme üzerinde oluşur.

$$0 \leq \delta \leq 1$$

- $\epsilon < \epsilon_{dam} \Rightarrow \delta = 0$ durumunda Bu malzeme modeli Johnson-Cook malzeme modeline dönüşecektir.
- $\epsilon \geq \epsilon_{dam} \Rightarrow E_{dam} = (1 - \delta)E$ ve $v_{dam} = \frac{1}{2}\delta + (1 - \delta)v$ olarak ifade edilecektir. Bu ifadenin anlamı malzemenin çekme ve basma durumlarında aynı etkiyi göstereceği yani izotropik hasara yolaçağıdır.

Malzeme üzerinde hasarın başlangıcı ve yumuşama eğrisi şekil 4.5 de görülmektedir.



Şekil 4.5: Sünek Hasar Malzeme Modeli.

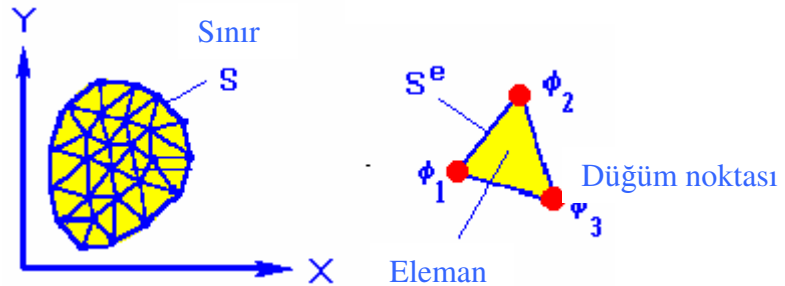
5. SONLU ELEMAN ANALİZLERİ

5.1 Ağ Eleman Yöntemi ile Sonlu Elemanlar Modelinin Hazırlanması

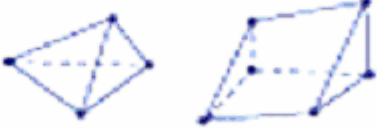
Elemanlara ayrılma, SEM' in önemli adımlarından biridir [13]. Doğal bir sistem sonsuz sayıda bileşenden meydana gelir. Böyle bir sistem üzerinden hesaplama yapılamayacağı için sistem sonlu sayıda elemandan oluşan bir yapıya ayrıştırılır. Bu işlem, problemin çözümünün gerçeğe yaklaşırlığı açısından oldukça önemlidir.

Elemanların geometrik şekli, düğüm noktalarının koordinatları cinsinden interpolasyon fonksiyonu ile ifade edilir. Buradaki interpolasyon eğrileri, genellikle düşük dereceli polinomlardır (lineer, kuadratik vb.).

Elemanlar, çözüm bölgesinin geometrik yapısına ve problemin tipine göre farklılıklar gösterir. Örneğin, bir kafes sistemin incelenmesinde tek boyutlu elemanlar kullanılabileceği gibi. Akış analizlerinde ve ısı geçişlerinde 3 boyutlu elemanlar kullanılabilir. Tezde yapılan analizlerde 2 boyutlu kabuk eleman adı verilen 4 nodlu lineer elemanlar kullanılmıştır.

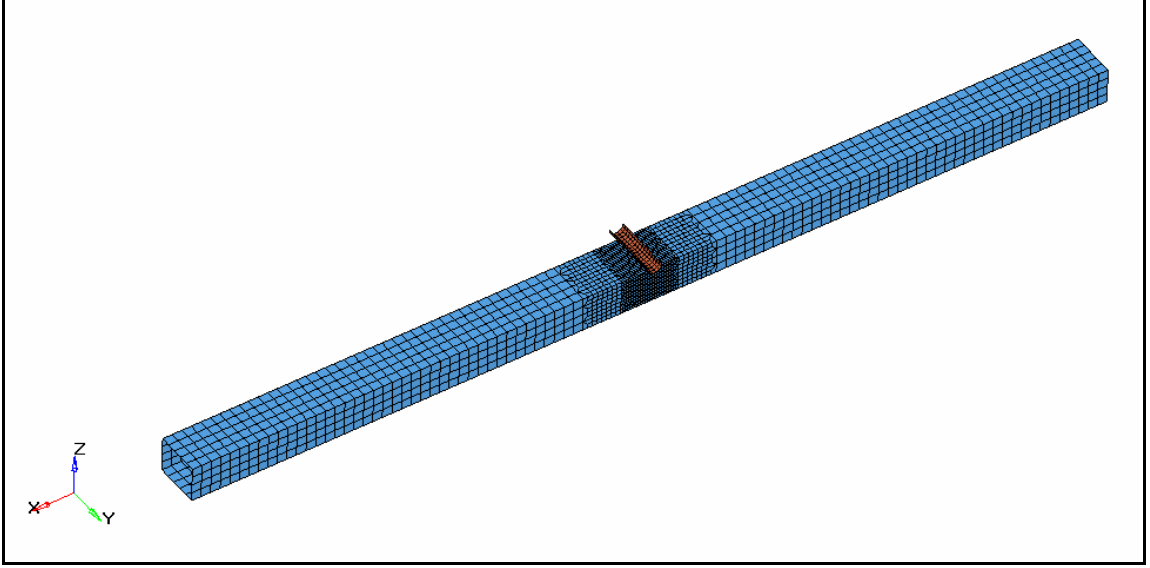


Şekil 5.1: Eleman ve Düğüm Noktası

boyut	el. derece.	eleman şekli	eleman tipi
1D (eğri)	lineer		kiriş
	kuadratik		kiriş
	kübik		kiriş
2D (alan)	lineer		tabaka, kabuk
	kuadratik		
	kübik		
3D (hacim)	lineer		
	kuadratik		

Şekil 5.2: Eleman Şekilleri ve Dereceleri

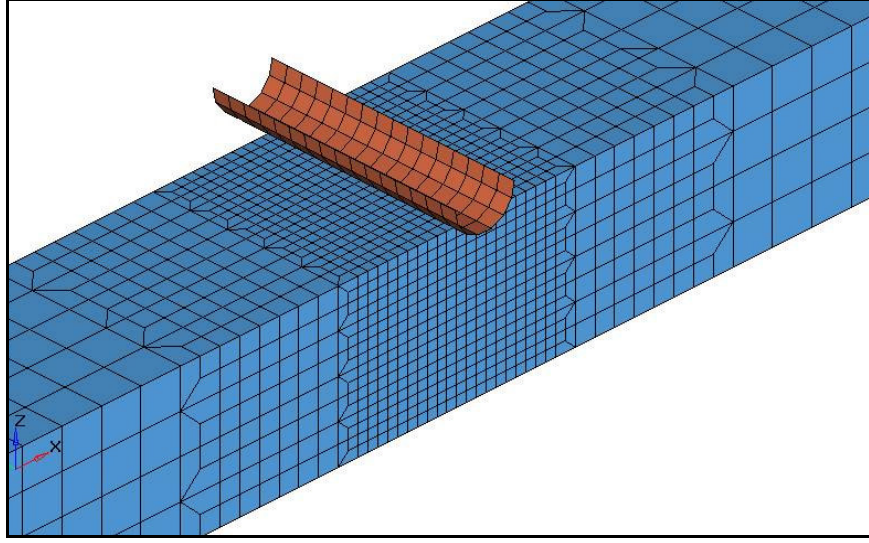
Şekil 3.4 de görülen modelde 10 mm boyutunda elemanlar kullanılmıştır. Kritik bölge olan silindirin basma alanında eleman boyutu 2.5 mm ye kadar düşürülmüştür [14]. Geçiş elemanları kullanılmış ve kademeli geçiş yapılmıştır. Böylelikle büyük elemanlardan küçük elemanlara geçişin düzgün olması sağlanmıştır (Şekil 5.4). Düzgün geçiş, boyut farklılıkları nedeniyle elemanlarda oluşabilecek büyük gerilme farklarının engellemesini sağlar.



Şekil 5.3: Dörtgen Profil Sonlu Eleman Modeli

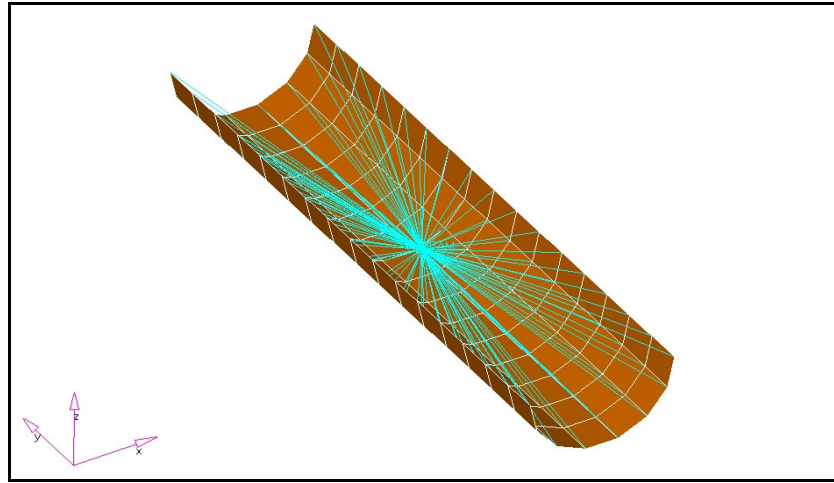
Profil modellenirken CAD çiziminin orta yüzeyi alınarak iki boyutlu PSHELL kabuk elemanlar ile sonlu eleman modeli hazırlanmıştır. Profil üzerine baskı uygulayarak deplasmana yol açacak silindir ise temasın olacak şekilde yarım modellenmiştir (Şekil 5.4).

Profil modelinde 3672 lineer kare eleman, 4 tanede lineer üçgen eleman ve 3692 düğüm noktası bulunmaktadır. Silindir modelinde de 112 lineer kare eleman ve 136 düğüm noktası bulunmaktadır.



Şekil 5.4: Dörtgen Profil ve Baskı Silindiri Sonlu Eleman Modeli

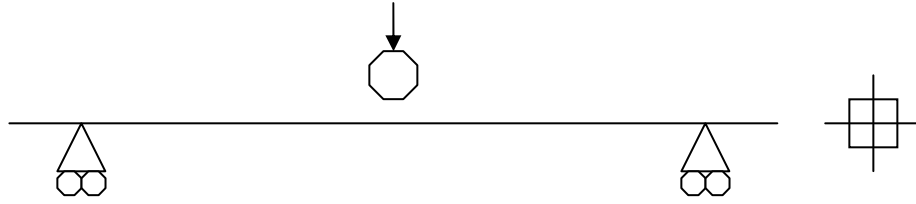
Rijit silindir modeli içinde şekil 5.5 da görülebileceği gibi rijit eleman oluşturulmuştur. Bağımsız düğüm noktası olarak silindirin orta noktasında oluşturulan düğüm noktası alınmıştır. Silindir üzerindeki bütün düğüm noktaları bağımsız düğüm noktaları olarak tutulmuştur. Böylelikle baskı silindiri rijit olarak tanımlanmıştır



Şekil 5.5: Baskı Silindiri ve Oluşturulan Rijit Eleman

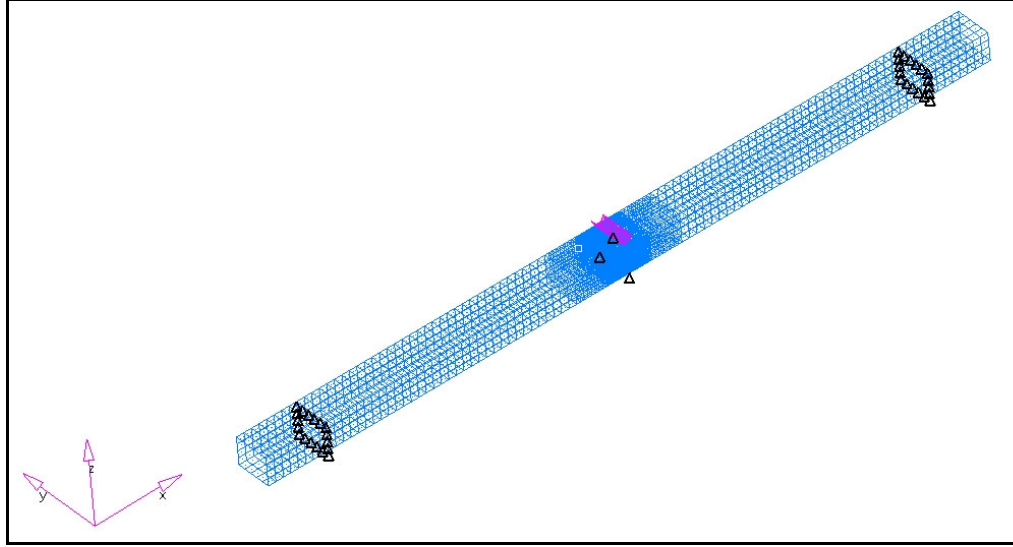
5.2 Sınır ve Yükleme Koşulları

Testlerin anlatıldığı bölümde gösterildiği gibi, profile silindir ile baskı uygulandığında her iki yönden uzayacak şekilde test düzeneğine yerleştirilmiş ve diğer eksenlerde kaymaması için merkezleme bilezikleri konulmuştur. Bu durumun matematiksel olarak modeli şekil 5.6 da gösterilmiştir.

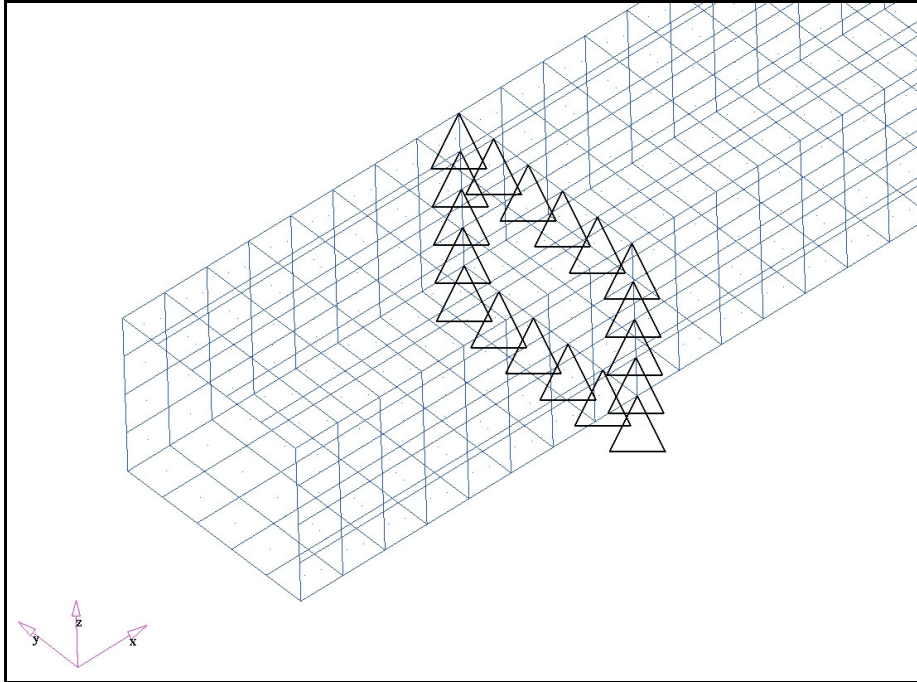


Şekil 5.6: Sınır Koşulları

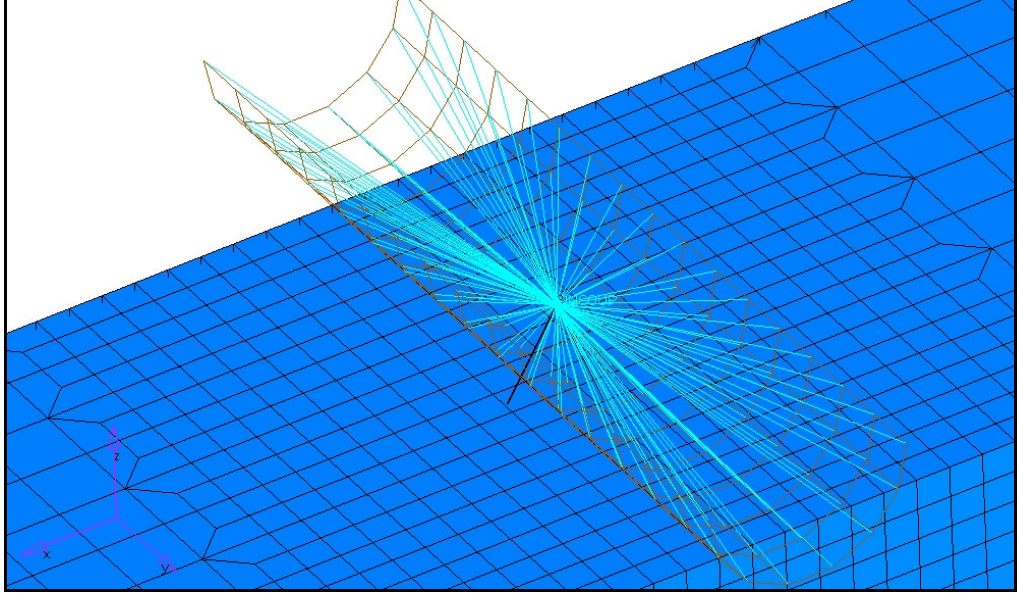
Test parçasının eğme boyu 800 mm olarak ayarlandığından analiz modelide aynı boyda olacak şekilde sınır şartları uygulanmıştır. Sınır şartları olarak sistem x hareket yönünde serbest bırakılmıştır bu sayede testte de olduğu gibi çubuk eğilirken rijit silindirin çubuk üzerinde kayması engellenmiştir. Şekil 5.7 de Hypermesh ile hazırlanan modelin sınır koşulları görülmektedir. Ortasından rijit eleman ile bütün nodları tutturulduğundan modelleme kısmında bahsedilmiştir. Bu sayede silindir üzerinde herhangi bir şekil değişimi oluşmaması sağlanmıştır. Baskı silindirine, bağımsız rijit eleman düğüm noktasından -z ekseninde 81 mm deplasman verilmiştir. Profil ile baskı silindiri arasında kontak tanımlanarak silindirin de profile aynı oranda deplasmanı iletmesi sağlanmıştır. Bu sayede test düzeneği ile analiz modelinin benzer davranış göstermesi beklenmektedir.



Şekil 5.7: Analiz Modeli Sınır Koşulları



Şekil 5.8: Analiz Modeli Sınır Koşulları Yakından Görünüm



Şekil 5.9: Baskı Silindirine Verilen Sınır Koşulları

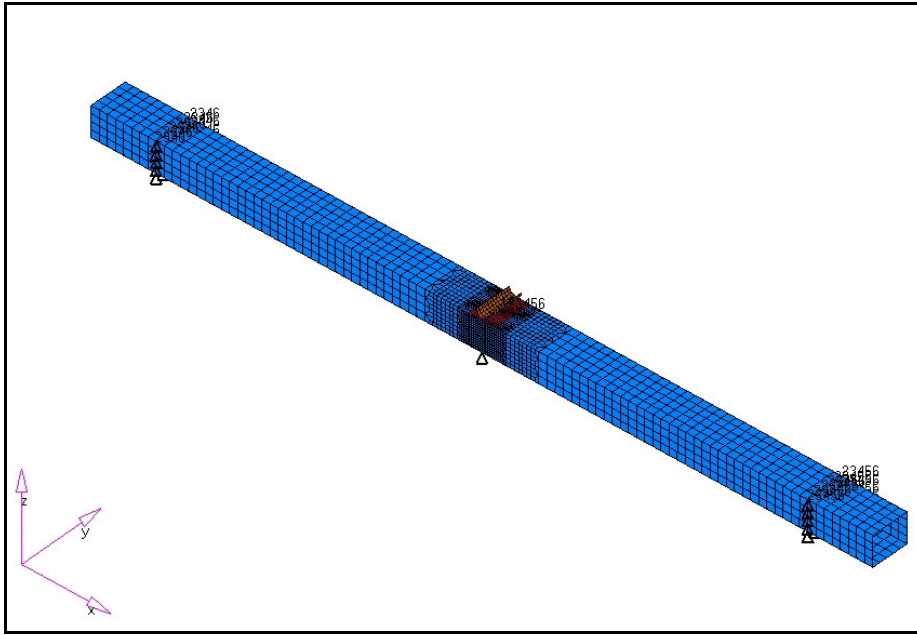
Modellemesi ve kullanılacak malzeme modellerinin seçilmesinden sonra sonlu elemanlar analizlerine geçilmiştir. Yapılan deneydeki sınır şartlarından ve yükleme durumunda profil üzerinde lokal burkulma meydana gelmiştir. Kullanılacak uygun analiz yöntemini belirlemek için ilk önce örtük (implicit) yöntem ile gerinme değişimi hız gözönüne alınmadan analiz yapılmıştır. Malzeme değerleri ve kontak belirlenerek yapılan analiz, Abaqus programı yardımıyla örtük yöntem ile çözdürülmüştür. Çıkan sonuçlar doğrultusunda açık (explicit) yöntem kullanan Radioss programına geçilmiştir.

Çok küçük zaman aralıklarında büyük deformasyonların meydana geldiği durumlarda, büyük deformasyonun olduğu hemen hemen statik (quasistatik) durumlarda, nonlinear durumların çok olduğu zamanda, kompleks kontak ve çarpışma problemlerinde açık yöntemin kullanılması uygundur. Bu analizlere, çarpışma, düşme, derim çekme, kuş çarpması, haddeleme gibi problemler örnek verilebilir.

Açık ve örtük yöntemlerin ikisinde de oluşan deformasyonu bulmak için nümerik zaman integrasyonları kullanılabilir. Örtük yöntemde t_n zaman adımı ile t_{n+1} zaman adımı arasındaki deplasmanı bulmak için matris tersi alınarak, yapısal rijitlik matrisi hesaplanır. Açık yöntemde bu matris hesaplanmaz bir önceki zaman adımındaki sonuçlar bir sonrakinde başlangıç değerleri olarak kullanılır [9,10].

5.3 Örtük (Implicit) Yöntem ile Yapılan Analizler

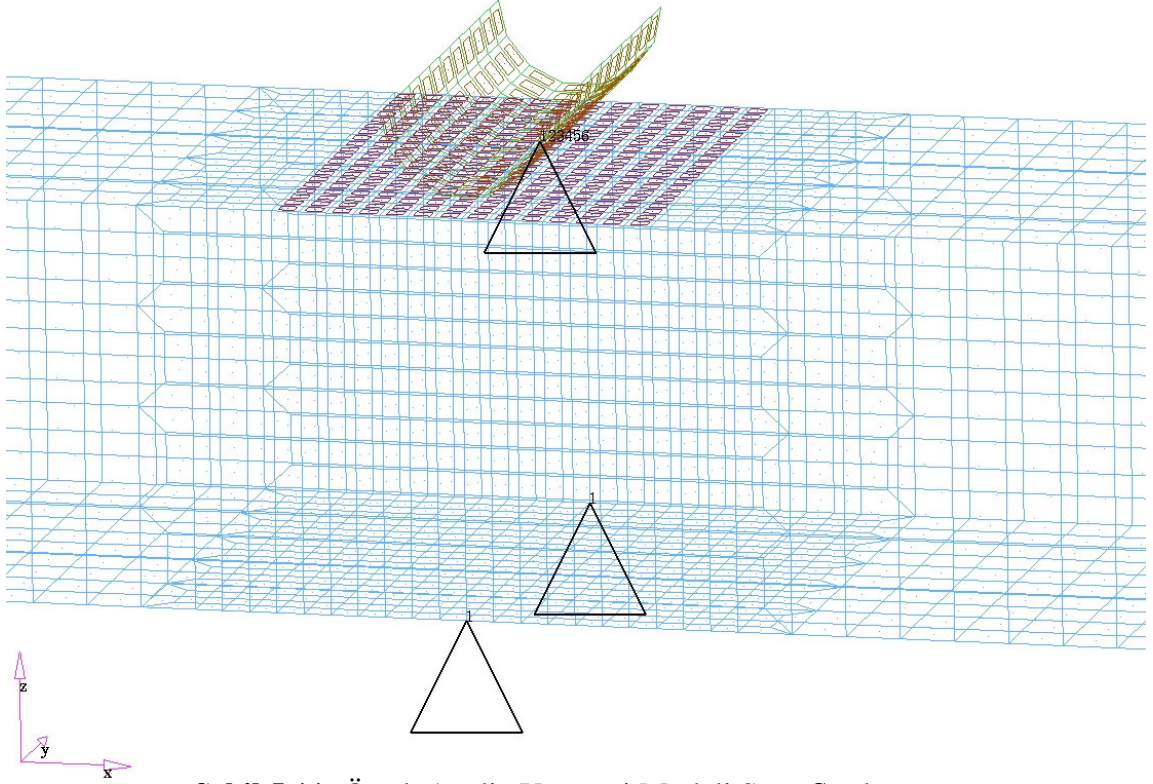
Test numunesinde iki ucundan modelleme kısmında anlatılan sınır şartları verilen profile rijit bir silindir ile baskı uygulanmış ve dikdörtgen kesitli profil üzerinde eğilme ve burkulma durumları görülmüştür. Çalışmada önce örtük analiz yönteminin denenmesinin sebebi; burkulma etkisinin büyük zaman dilimlerinde yapılan analizle gözlemlenip açık yöntem ile yapılan analizler ile kıyaslamaktır.



Şekil 5.10: Örtük Analiz Yöntemi Modeli

Şekil 5.5 de görülen modeldeki baskı silindiri rijit olarak tanımlanmıştır. Modelleme kısmında anlatıldığı gibi sadece kontağa giren yarısının modellendiği silindir elemanları ile profilin üst yüzeyinde silindir ile temas eden elemanlar arasında kontak yüzeyi tanımlanmıştır. Rijit silindir üzerinde oluşturulan rijit elemanın bağımsız düğüm noktasına ise test de olduğu gibi z ekseninin tersi yönünde 80 mm deplasman verilmiştir. Örtük yöntemde 0-1 zaman aralığında bu deplasmanı değerini uygulayacaktır. Rijit eleman hareket ettikçe silindir ile profil arasında tanımlanan kontak elemanları sayesinde silindir ile profil temasa girecek ve profil üzerinde aynen test numunesinde olduğu gibi deformasyon meydana gelecektir.

Verilen sınır şartları nedeniyle ve örtük (implicit) analiz yöntemi kullanıldığı için model üzerinde stabilizasyonun sağlanması gereklidir.



Şekil 5.11: Örtük Analiz Yöntemi Modeli Sınır Şartları

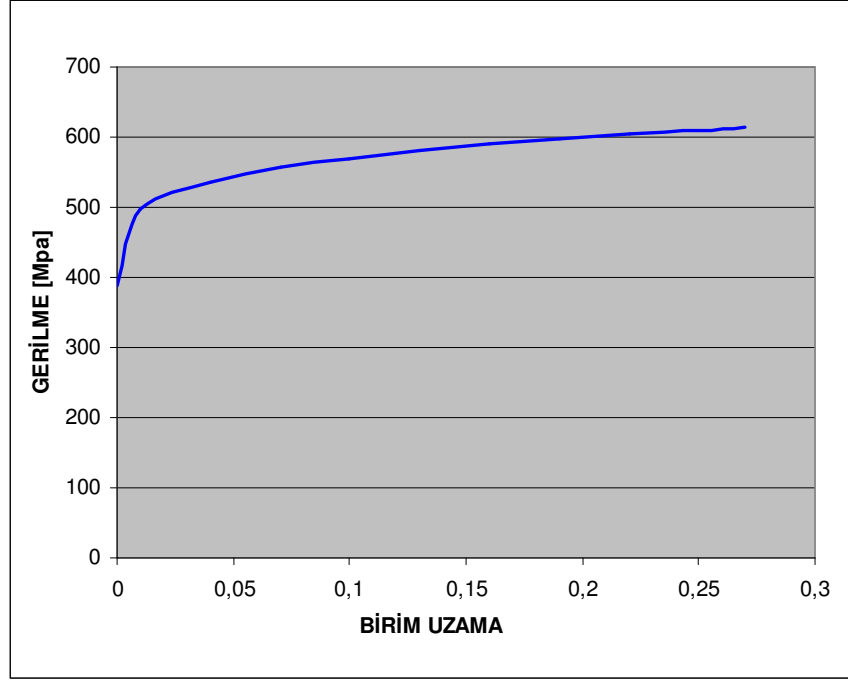
Baskı silindirin profil üzerinde kaymaması ve eğilme sırasında uzaması istenmesi nedeniyle profil eksenini doğrultusunda sınır şartı verilmemiştir. Bu durumda örtük yöntemin çözüm yapabilmesi için eksenel doğrultuda hareket etmeyecek olan ve profilin alt tarafında yer alan iki düğüm noktası sadece x yönünde harekete sınırlandırılmıştır.

Abaqus programı içinde yer alan ve burkulma gibi kararsız durumlarda daha iyi sonuçlar veren Riks yöntemi seçilerek stabilizasyonun sağlanması çalışılmıştır. Malzeme olarak Johnson-Cook modeli seçilmiştir.

a ; maksimum akma gerilmesi olup S350GD+Z malzemesi için 389 Mpa değerindedir.

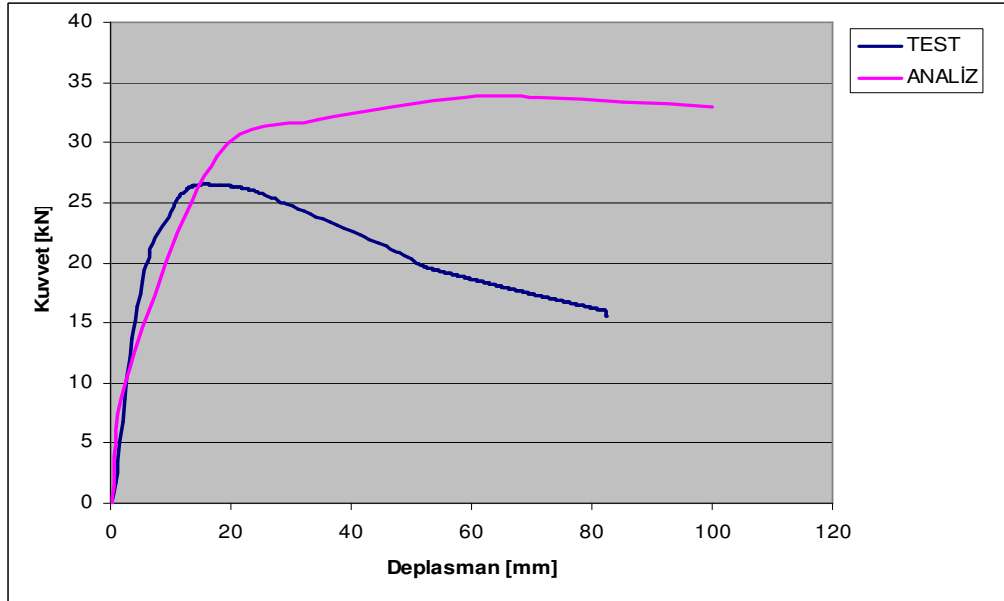
b; pekleşme modülü 0.3

n; pekleşme üst katsayısı ise 0.22 alınmıştır.



Şekil 5.12: Johson-Cook Modeli İçin Gerilme-Birim Uzama Eğrisi

Şekil 5.12 de alınan değerler ile hesaplanan malzeme modelinin gerilme-birim uzama eğrisi görülmektedir. Malzeme modeli ve gerekli diğer verilerin girilmesinden sonra analiz koşturulmuştur.



Şekil 5.13: Örtük(implicit) Analiz Yöntemi ve Test sonucu, Kuvvet-Deplasman Grafiği.

5.4 Örtük (Implicit) Yöntem ile Yapılan Analiz Sonuçları

Şekil 5.13 de görüldüğü gibi test sonucu ile analiz sonucu kuvvet-deplasman grafikleri örtüşmemektedir. Rijit silindir üzerindeki düğüm noktasında oluşan maksimum kuvvet değeri Johnson-Cook modelindeki parametreler ile oynanarak, test değerine yaklaştırılabilir. Fakat burada önemli olan iki eğrinin karakteristiğinin birbirine benzemesidir ve yapılan analizde bu durumun gerçekleşmediği görülmüştür.

Bu durumun iki açıklaması vardır. Örtük analiz yönteminde kısaca

$$\Delta u^{(i+1)} = \Delta u^{(i)} + K_t^{-1} \cdot (F^{(i)} - I^{(i)}) \quad (5.1)$$

Eşitsizliği çözülerek deplasman ve tepki kuvvetleri değerleri bulunmaktadır. K_t rijitlik matrisi F , uygulanan kuvvet, I , iç kuvvet, Δu ise çözüm adımı için deplasman değeridir. Örtük sistemi koşulsuz olarak kararlı bir çözüm yöntemine sahiptir fakat bazı komplike analizlerde, tez çalışmasında olduğu gibi, çözüm yaparken zorlukla karşılaşılmaktadır. Zaman adımı küçültüldüğünde rijitlik matrisi büyüdüğünden bu matrisin çözümlenmesinde problem yaşanmakta yani ıraksaklık problemi ortaya çıkmaktadır (divergence problem). Bu nedenden dolayı lokal kararsızlık durumlarında kuvvet eşitliği sağlanamamaktadır ve doğru sonuçlardan uzaklaşmaktadır. Tez çalışmasında da lokal burkulma meydana gelmiştir. Böylesi kararsız durumlar için Riks metodu geliştirilse de, kontağın ve kararsızlığın olduğu durumlarda malzemenin davranışının yakalanması mümkün olmamaktadır. Çıkan analiz sonuçları ile çizilen eğriye dikkat edilirse burkulma anındaki kuvvet düşüşü çok az sağlansa bile gerçek duruma benzememektedir.

Bu durum iki yöntemin transfer fonksiyonlarının ve integrasyon yöntemlerinin farklı olması ile açıklanabilir. Farklı transfer fonksiyonları nedeniyle sistemin verdiği cevaplarda farklı olmaktadır [15,16,17].

Açık analiz yönteminde ise bir önceki zaman adımındaki değerler bir sonrakinde başlangıç değerleri olarak kullanıldığından zaman adımları örtük yöneme göre çok az olabilmekte ve işlemci zamanı açısından maliyetli olmamaktadır. Bir önceki adımın değerlerinin bir sonrakinde başlangıç değerleri olarak girilebilmesi yani yeniden rijitlik matrisinin oluşturulmasının gerekmemesi ve çok küçük zaman dilimleri kullanılabilmesi

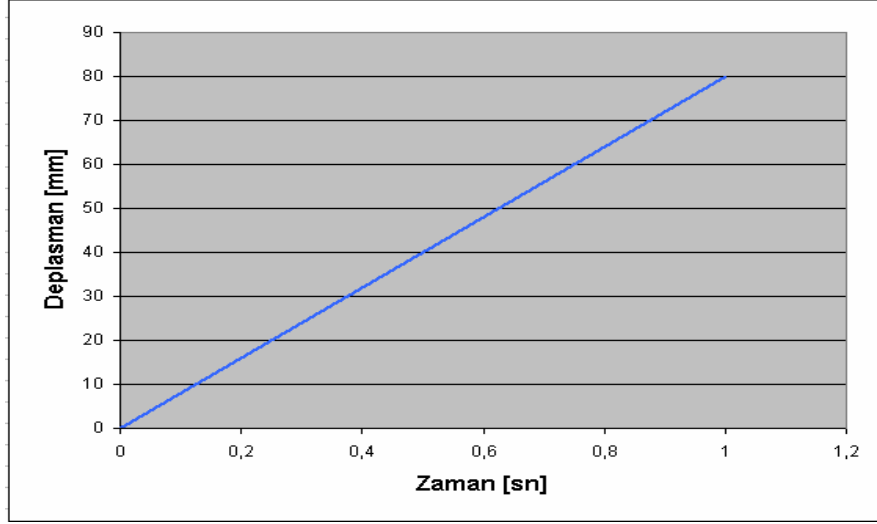
nedeniyle burkulma gibi kararsız durumları açık yöntem ile yakalamak çok daha gerçekçi olacaktır. Bu sebepten dolayı test çalışması açık (explicit) analiz yöntemine göre yapılmıştır. Fakat açık yöntem koşullu kararlılığa sahiptir yani zaman adımı en küçük eleman boyutuna göre hesaplanmaktadır. Eğer kullanılan zaman adımı eleman boyutuna göre hesaplanan değerden büyük olursa program bunu elemanlara kütle ekleyerek giderir. Eklenen bu kütlenin kritik bölgelerde olmaması ve toplam kütlenin %2 sini geçmemesi gerekmektedir. Eğri karakteristiği doğru olarak yansıtılamadığından örtük yöntemde diğer malzeme modelleri denenmemiştir.

5.5 Açık (Explicit) Yöntem ile Yapılan Analizler

Örtük yöntem ile yapılan analiz sonuçlarından sonra açık sistem ile devam edilmesine karar verilmiştir. Açık sistemin örtük sisteme göre en büyük avantajı, büyük matrislerin oluşturulmasına ve tersinin alınmasına gerek olmamasıdır. Bu sayede çok küçük zaman adımları ve fazla nonlinearite kullanılabilir.

Kullanılan profilin modeli için açık yönteme benzer şekilde sınır şartları ve yükleme koşulları alınmıştır. Sadece matris tersi alınmadığından ve dolayısıyla tekil matris (singularity) problemi olmadığından modelin çözülebilmesi için örtük sistemde sadece 2 düğüm noktasından x yönünde hareketi engellenen sınır şartının oluşturulmasına gerek olmamıştır.

Yükleme koşulu içinde kullanılan toplam zaman içinde rijit silindirin lineer biçimde 0 mm den 80 mm ye kadar hareketi ve profil ile kontağı sağlanmıştır.



Şekil 5.14: Açık(Explicit) Analiz Yöntemi ve Yükleme Durumu.

Baskı silindiri rijit olarak tanımlanmıştır ve bir önceki analizde olduğu gibi profil arasında kontak verilmiştir. Rijit olarak tanımlanmasına rağmen RADIOSS programında baskı silindirine malzeme atanması gerekmektedir. Bunun içinde standart çelik değerlerinin elastisite modülü ve poissons oranı girilmiştir.

Baskı silindiri için malzeme değerleri ;

E ; Elastisite modülü olup 210 GPa alınmıştır.

ν ; poissons oranı 0.29 alınmıştır

ρ ; yoğunluk olarak 7.85 E-6 kg/m^3 alınmıştır.

Analizin amacı, kullanılan model için malzeme davranışının gerçek durumla benzer olmasını sağlamak daha sonra malzemenin pekleşme katsayılarını test sonucu ile kıyaslayarak belirlemektir. Böylelikle herbir malzeme modeli için bu değerler bulunmuş olacaktır. Son olarak da kullanılan malzeme modellerinin birbiri ile kıyaslamaları yapılacaktır.

5.5.1 Johson-Cook Malzeme Modeli için Analiz Sonuçları

Malzeme modelleri bölümünde anlatıldığı gibi elasto-plastik malzeme modelidir ve birim uzama hızının etkisi eklenebilmektedir [20]. İlk analizler tecrübe sonucunda elde

edilen ve standartlaştırılmış katsayılar ile yapılmış daha sonra test datasından elde edilen kuvvet-deplasman grafiğine uygun olacak şekilde ayarlanmıştır.

Profil modelinde kullanılan malzeme değerleri;

Elastisite modülü

$$\sigma = (a + b\varepsilon_p^n)(1 + c \ln \frac{\dot{\varepsilon}_p}{\dot{\varepsilon}_0})(1 - T^{*m}) \quad (4.55)$$

$$\varepsilon_p = \%27$$

$$a = 398 \text{ MPa}$$

$$b = 0,1$$

$$n = 0,22$$

$$c = 0.0209$$

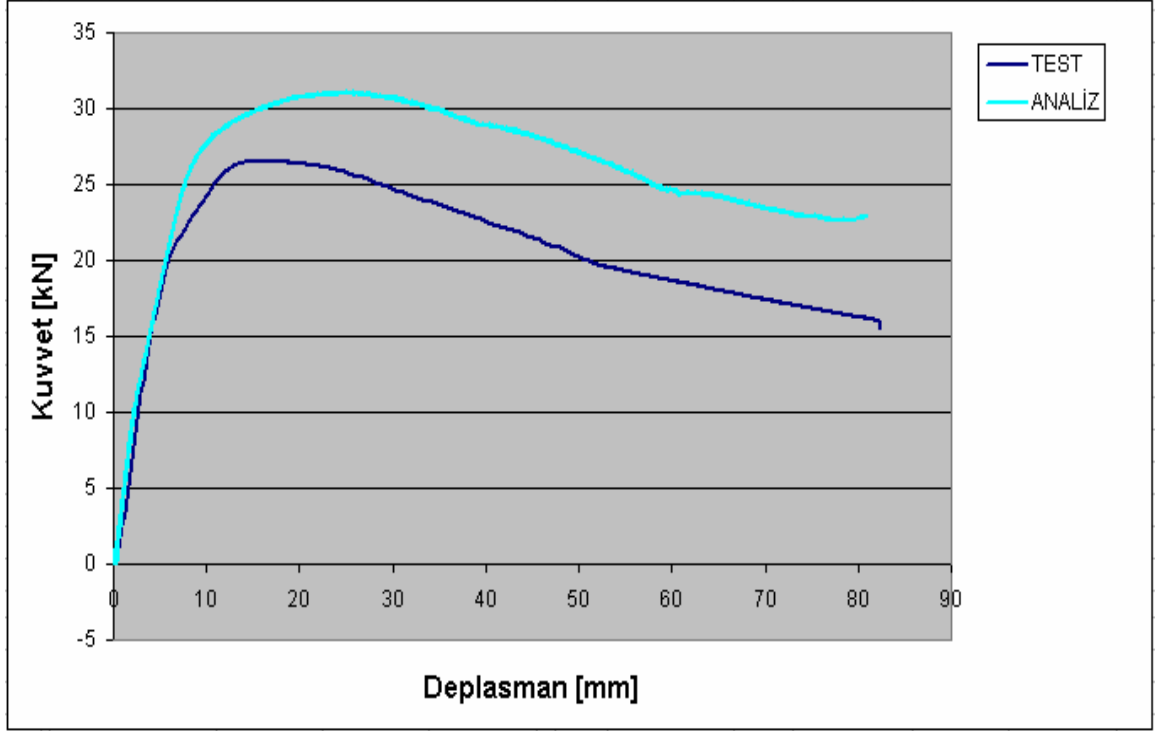
$\dot{\varepsilon}$ = Her adım için hesaplanmaktadır.

$$\dot{\varepsilon}_0 = 1e-6$$

$m = 0$ alınarak ihmal edilmiştir.

Bu değerlere ek olarak maksimum akma gerilmesi ve kopma noktasındaki plastik birim uzama ve sınır frekans değerleride girilebilir. Bu değerler için RADIOSS programında bulunan varsayılan standart değerler kullanılmıştır.

Alınan değerler sonucu ortaya çıkan kuvvet deplasman grafiği çizdirilip test datasındaki eğri ile kıyaslanırsa;



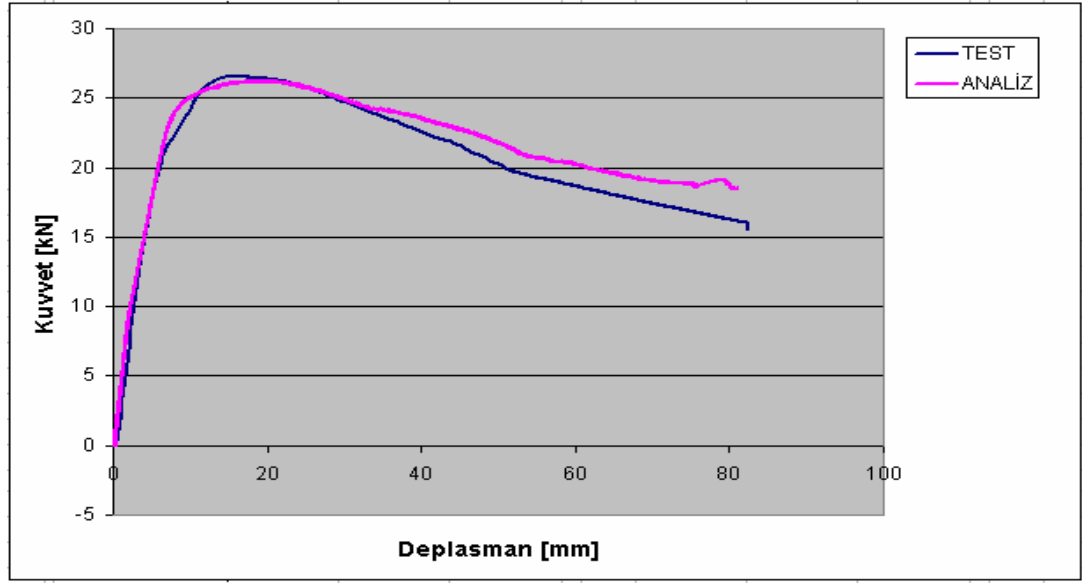
Şekil 5.15: Johnson-Cook Malzeme Modeli Analiz Sonucu ile Test Sonuçlarının Karşılaştırılması.

Grafiği elde edilir. Grafikten de görüleceği gibi test datalarından elde edilen eğri ile analiz sonuçlarından çizilen eğri karakteristikleri birbirine çok benzemektedir. Bunun anlamı gerçekteki malzeme davranışı ile hesaplamalı yöntem kullanılarak yapılan analizdeki malzeme modelinin davranışının birbirini ile benzer oluşudur. Bu durumda elde edilen sonuçlar ile gerçekçi yorumlar yapmak mümkün olmaktadır.

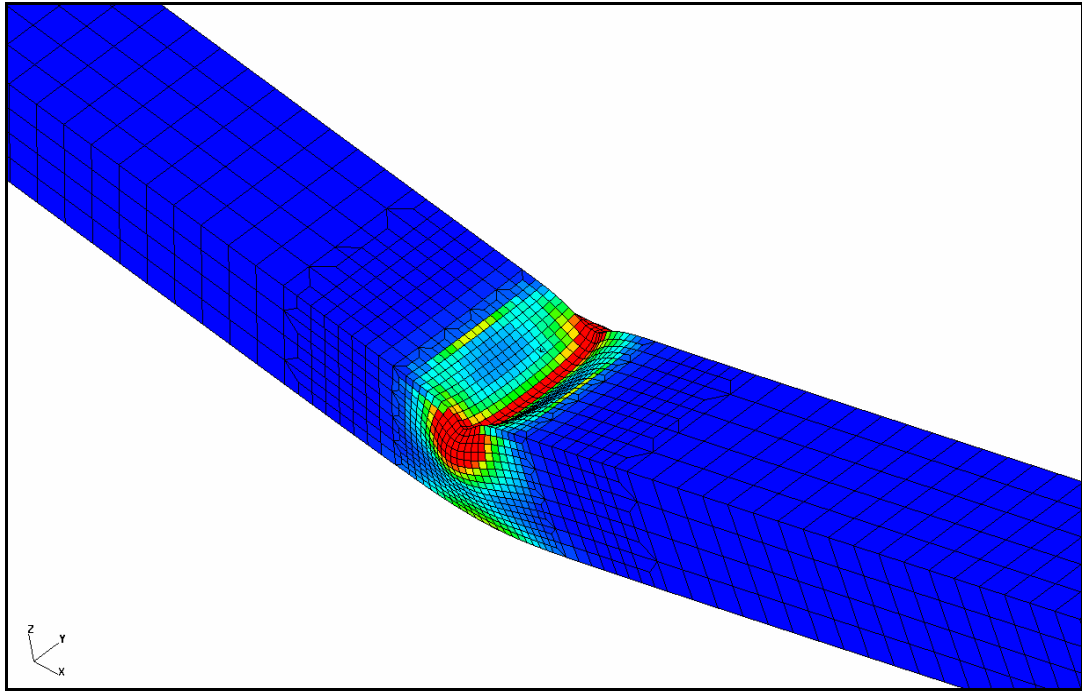
Malzemenin pekleşme parametreleri b ve n ve deformasyon hızı (Strain rate) değerleri belirlenerek bu iki grafiğin üst üste çıkışması sağlanabilir.

(4.55) Eşitliğine bakılırsa basitçe , b değeri düşürüldüğünde gerilmenin lineer olarak azalacağı düşünülebilir. Bu durumda kuvvetin de yaklaşık olarak lineer azalacağı kabul edilebilir. Yani b değeri azaltılırsa eğrinin eğiminde pek fazla değişim olmadan maksimum kuvvet değeri azalacak böylece grafik test datasındaki grafiğe benzeyecektir.

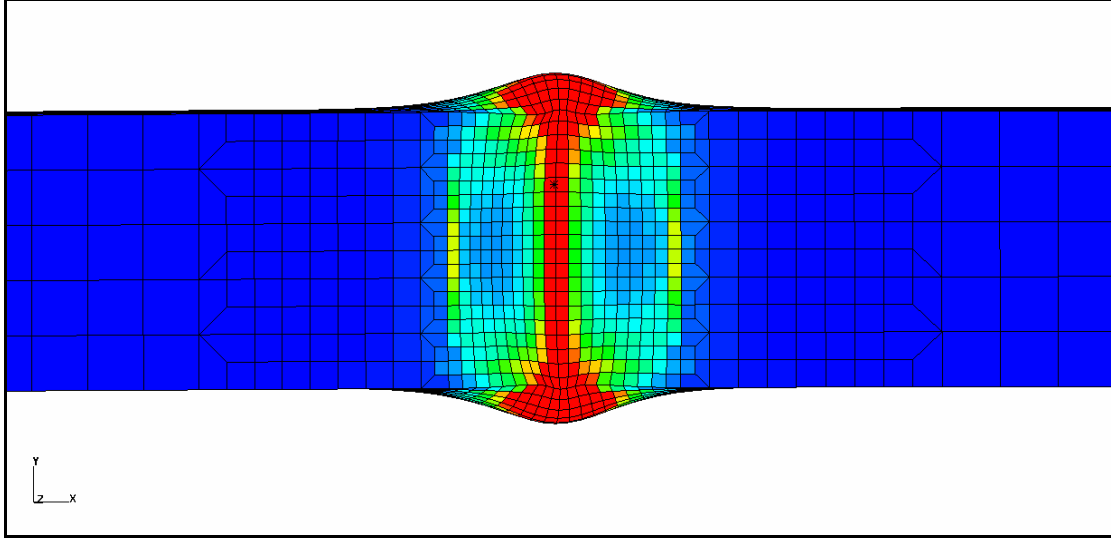
Tekrarlanan analizler sonucunda $b=0.1$ alınıp grafikteki sonuç elde edilmiştir.



Şekil 5.16: JC Malzeme Modelinin Pekleşme Katsayılarının Ayarlanması ile Oluşan Eğri ile Test Eğrisinin Karşılaştırılması.



Şekil 5.17: Johnson-Cook Malzeme Modeli ile Yapılan Analiz Sonucu

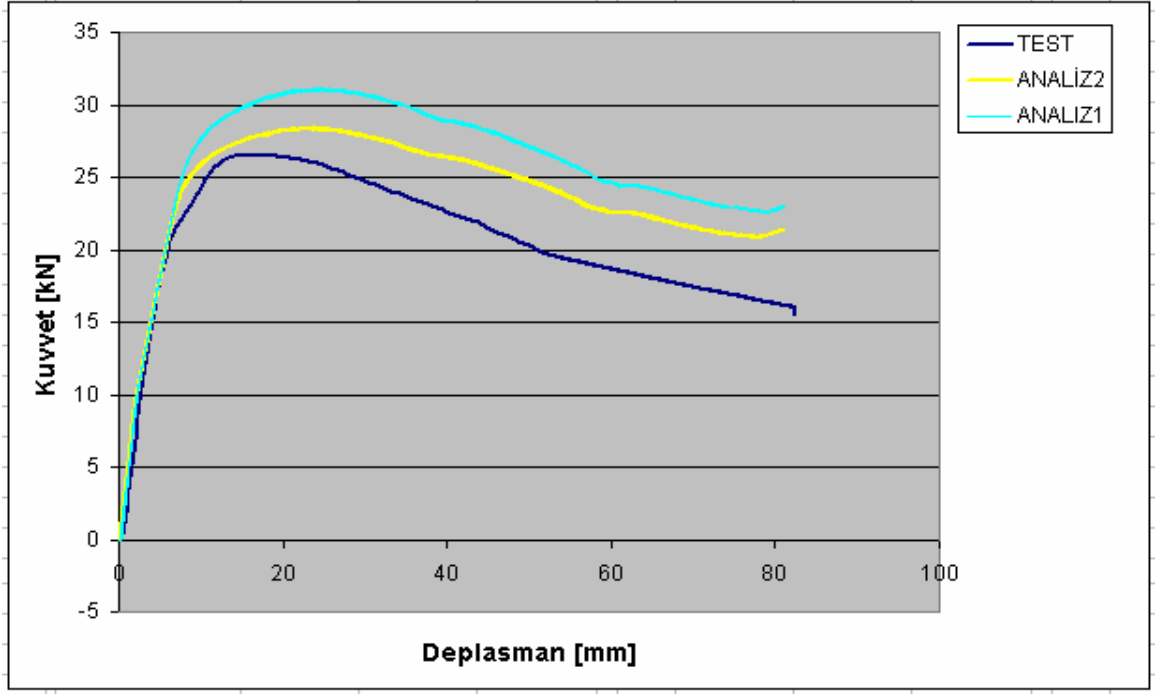


Şekil 5.18: Johnson-Cook Malzeme Modeli ile Yapılan Analiz Sonucu

Şekil 5.16 de görülebileceği gibi yeniden belirlenen pekleşme modülü ile analiz ve test sonuçlarından elde edilen eğrilerin üst üste çakışması sağlanmıştır. Belirlenen bu malzeme katsayılarının ve modelinin kullanılması ile test numunesinin kullanıldığı bütün analizlerde elde edilen sonuçların daha gerçekçi olması sağlanmıştır.

Pekleşme üst katsayısı ile gerilme arasındaki ilişki lineer değil üstel şekilde artan veya azalan şekildedir. Basitçe, n azaltıldığında veya azaltıldığında şekil 5.15 ve 5.16 deki eğrinin eğiminin değişeceği söylenebilir.

Birim uzama hızının etkisi ise b pekleşme modülünün etkisi ile benzerdir. Şekil 4.29 da gerilme hızının etkisi gösterilmektedir. Birim uzama katsayısının (c) 0.028 den 0.01 e düşürülmesiyle yapılan analizden elde edilen eğri ise şekil 5.19 görülmektedir. Daha iyi gözükebilmesi açısından grafiğe şekil 5.15 daki eğride eklenmiştir.



Şekil 5.19: Johnson-Cook Malzeme Modelinin Deforma Katsayıların Düşürülmesiyle Oluşan Eğrinin Test ve Önceki Analiz Eğrileri ile Karşılaştırılması.

Şekilden de anlaşılabileceği gibi deformasyon artışı katsayısının (c) azaltılmasının etkisi aynı pekleşme modülünün (b) azaltılmasına benzemektedir.

5.5.2 Cowper-Symonds Malzeme Modeli İçin Analiz Sonuçları

Pekleşme davranışı johnson-Cook malzeme modeline benzemesine rağmen birim uzama artışı farklı hesaplanmaktadır. Johnson-Cook (JC) modeline göre bir avantajı malzemenin davranışının izotropik veya kinematik olarak tanımlanabilmesidir. İstenildiğinde hem izotropik hemde kinematik olarak da tanımlanabilir. Yapılan tez çalışmasında kullanılan model tamamen izotropik olarak tanımlanmıştır.

Bu malzeme modeli için kullanılan değerler;

$$\sigma = (a + b\epsilon_p^n) \left(1 + \frac{1}{c} \dot{\epsilon}^p\right) \quad (4.62)$$

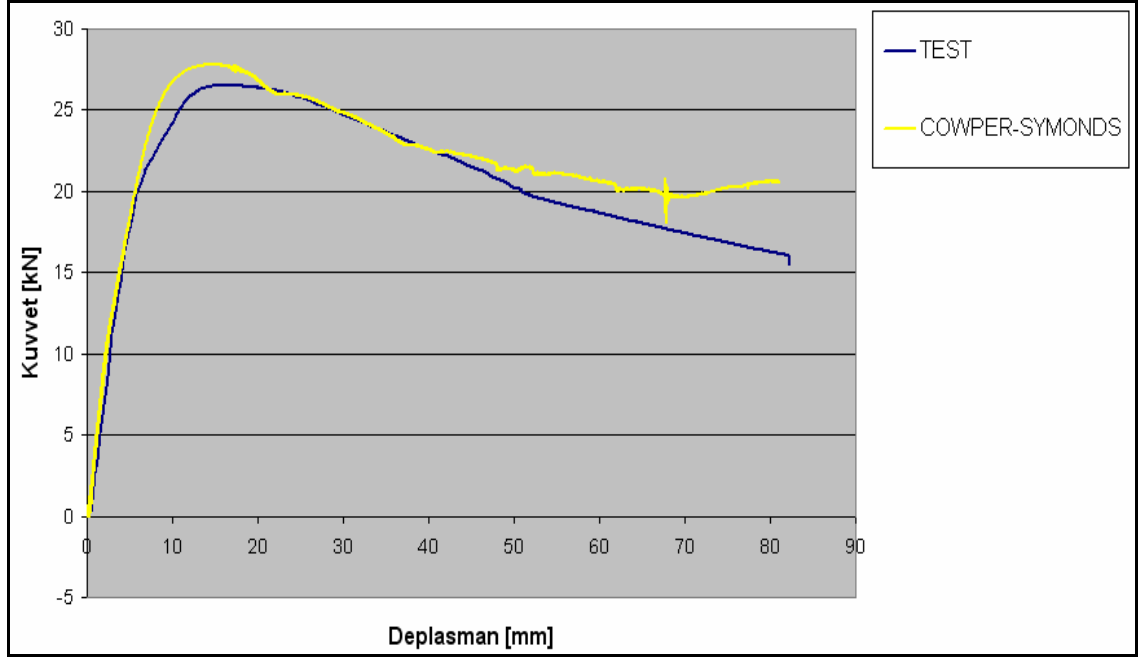
$$b = 0.3$$

$$n = 0.1$$

$$c = 0.1$$

$$1/p = 0.01$$

Verilen değerler ve Cowper-Symonds (CS) modeli ile analiz yapıldığında çıkan sonuç Şekil 5.20 deki gibidir.



Şekil 5.20: Cowper-Symonds Malzeme Modelinin Pekleşme Katsayılarının Ayarlanması ile Oluşan Eğri ile Test Eğrisinin Karşılaştırılması.

ıkan eğriden de görülebileceği gibi test datası ile CS modeliyle yapılan analiz datalarının eŐleŐtirmeleri ve eğri karaterleri birbirine çok benzemektedir. CS modelinin JC modeline göre en büyük avantajı birim uzama hızına yaklaŐımın lineer olmamasıdır. JC modelinde logaritmik birim uzama hızına lineer yaklaŐmaktadır (Bknz eşitlik 4.55). Yapılan çalışmada test datalarıyla JC modelinin dataları uygun olmasına rağmen günümüz çalışmalarında birim uzama artışına bu Şekilde bir yaklaŐımın pek uygun olmadığını göstermektedir [21]. Bu nedenden dolayı Cowper-Symonds modelindeki eŐitlięin birim uzamaya yaklaşımı daha farklıdır. Modelde sıcaklık deęiŐimini etkisinin olmaması ve malzemenin hasar özelliğinin girilememesi nedeniyle çarpışma analizlerinde fazla tercih edilmemektedir.

5.5.3 Zerilli-Armstrong Plastik Malzeme Modeli İçin Analiz Sonuçları

Zerilli-Armstrong modeli birim uzama pekleşmesi (strain hardening), birim uzama hızı pekleşmesi (strain rate hardening), ve termal yumuşama etkilerinin metaller üzerine uygulanabilmesi için dislokasyon teorisinden geliştirilmiştir [19].

$$\sigma = C_0 + \left[C_1 \exp \left(-C_3 T + C_4 T \ln \frac{\dot{\epsilon}^*}{\epsilon_0} \right) \right] + C_5 \epsilon_p^n \quad (4.63)$$

$$C_0 = 0.42$$

$$C_1 = 1$$

$$C_3 = 0.01275$$

$$C_4 = 0.00065$$

$$n = 0.22$$

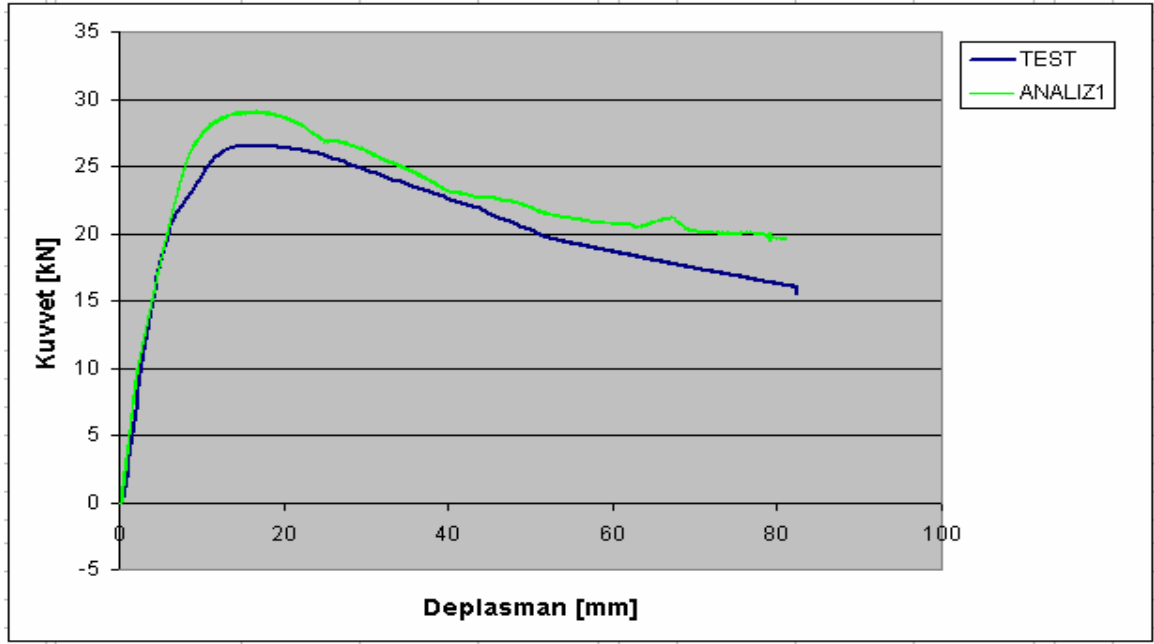
$$\dot{\epsilon}_0 = 1e-6$$

Deformasyon artışı hesabı da Johnson-Cook modeline benzemektedir. Kopma değerleri JC modelinde olduğu gibi RADIOSS programının içindeki standart değerler kullanılmıştır.

$$\sigma_{\max} = \text{Maksimum akma gerilmesi}$$

$$\epsilon_{\max} = \text{Maksimum plastik birim uzama değeri (Kopma sınırı)}$$

Yapılan analizden sonra elde edilen eğri ;



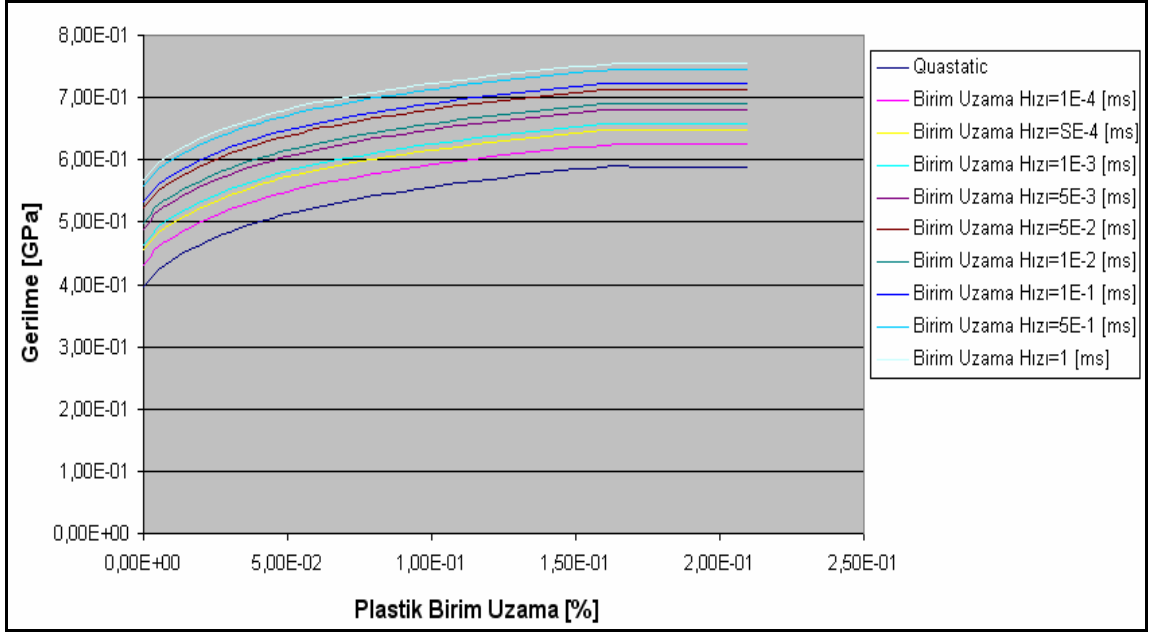
Şekil 5.21: ZA Malzeme Modelinin Pekleşme Katsayılarının Ayarlanması ile Oluşan Eğri ile Test Eğrisinin Karşılaştırılması.

JC modeli ampirik olmasına ve kolay uygulanabilmesine rağmen yüksek sıcaklıklarda doğru olmayan küçük birim uzama (small strain rate dependence) hızları sergilemektedir. Ayrıca Literatürdeki [21] test çalışmasındaki sonuçlar, çeliklerin bir çoğunda birim uzama pekleşmesi hızı, birim uzama hızının artışıyla düşmektedir. JC modeli bu genel eğilimi tam olarak karşılayamamaktadır. ZA modeli ile birlikte bütün bu eksiklikler giderilmek istense de, Mohadevan et al. [22] yapmış olduğu çalışmalarda çarpışma analizlerinde JC modelinin daha iyi sonuçlar verdiğini savunmaktadır. Şekil 5.21 de de görülebileceği gibi test datasıyla aynı karakteri yakalamasına rağmen JC modeli daha iyi sonuçlar vermektedir.

5.5.4 Piecewise Malzeme Modeli İçin Analiz Sonuçları

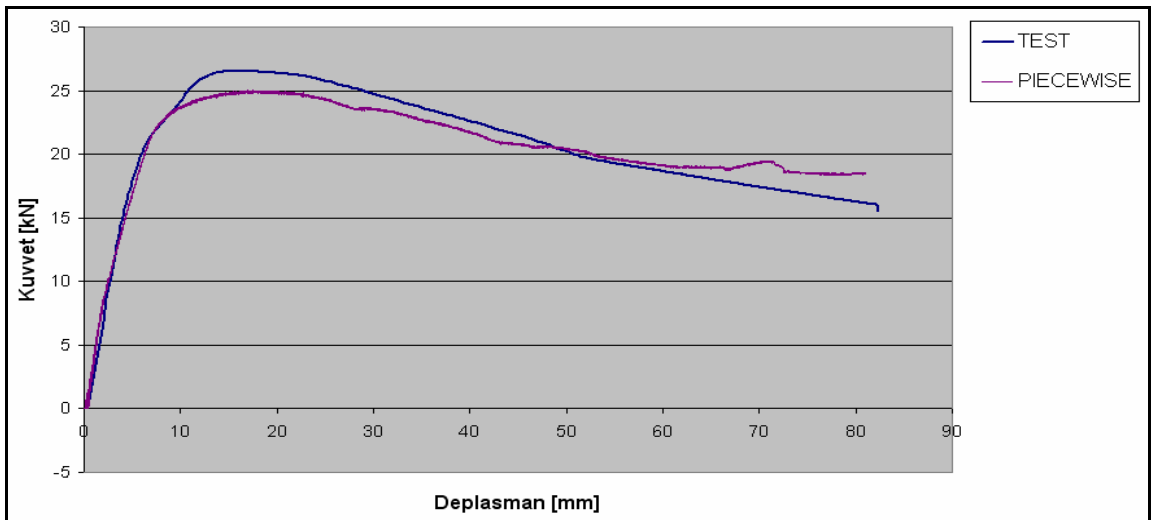
Diğer modellere göre ampirik olan bu yöntemde direk testlerden kullanılan datalar ile hassasiyetin ve doğruluğun artması sağlanmıştır. Maksimum birim uzama hızından minimum değere kadar çeşitli testler yapılarak çıkan gerilme-birim uzama eğrileri analizde kullanılır [14]. Bu nedenle kullanılacak olan malzemenin maksimum birim uzama hızı da test ile belirlenmelidir. Test eğrilerinin arasında kalan değerlerin için de

interpolasyon kullanılmaktadır. Bu nedenle test sayısının da doğrulanması gerekmektedir.



Şekil 5.22: Piecewise Malzeme Modeli için Değişik Birim Uzama Hızlarında Yapılan Test Sonuçları

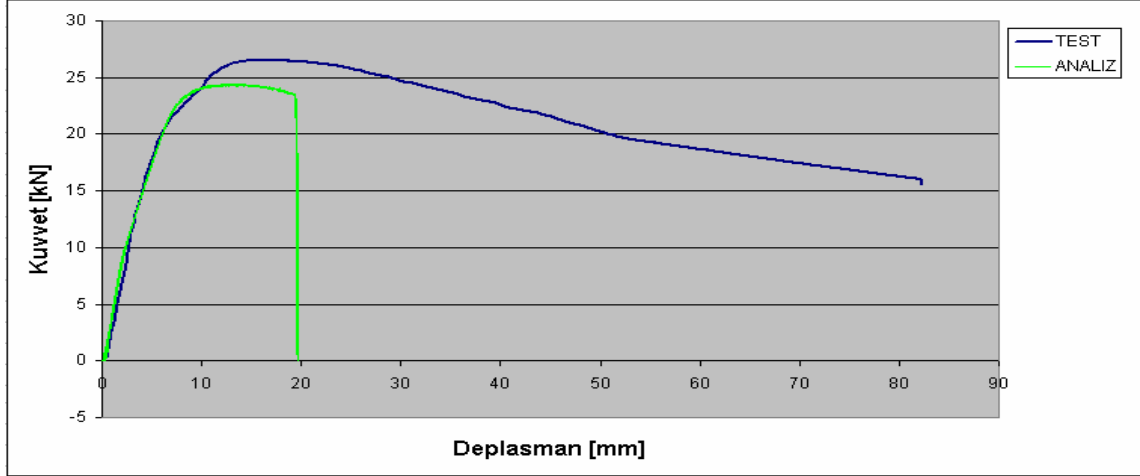
Analizde şekil 5.22 de görülen on adet testin eğrileri kullanılmıştır. Kullanılan test datları ile yapılan analizden çıkan sonuç ise şekil 5.23 de görülmektedir.



Şekil 5.23: Piecewise Malzeme Modelinin Analiz Sonuçları ile Test Sonuçlarının Karşılaştırılması

5.5.5 Sünek Hasar Malzeme Modeli İçin Analiz Sonuçları

Bu malzeme modeli JC malzeme modeliyle hasar tanımlanması opsiyonu dışında tamamen aynıdır. Tanımlanan hasar parametresi ile malzemedeki hasar istenilen yerde tanımlanabilir.

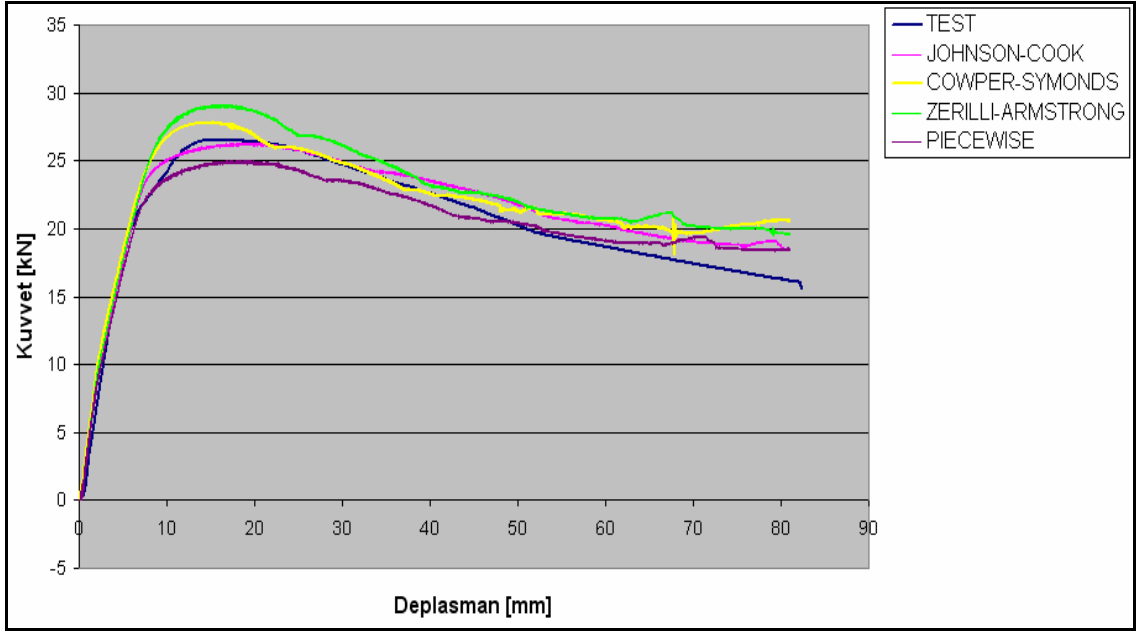


Şekil 5.24: Sünek Malzeme Hasar Modelinin Analiz Sonuçları ile Test Sonuçlarının Karşılaştırılması

Şekilde görüldüğü gibi 0.15 verilen hasar parametresi ile plastik birim uzama 0.15 e ulaştığı anda malzemede kopma görülmüştür. E_t değeri değiştirilerek kuvvetin düşmeye başladığı andan sifıra ulaşana kadar olan eğrinin eğimini belirlemekte mümkündür. E_t değeri 0 girildiğinde ise model aynen JC modeline dönüşmektedir.

5.6 Açık Yöntem ile Yapılan Analiz Sonuçları

Açık yöntemde çıkan sonuçlarla, örtük sistem karşılaştırıldığında açık sistemin gerçeğe yakın sonuçlar verirken , örtük sistemin test dasetindeki sonuçlardan uzaklaştığı görülür. Açık sistemde çok küçük zaman adımları kullanıldığından ve her zaman adımında bir öncekinin sonuçları başlangıç değeri olarak girildiğinden, burkulma gibi kararsız bir durumu yakalamış ve malzemenin fiziksel davranışını yakalamıştır.



Şekil 5.25: Test Sonuçları ve Analizlerde Kullanılan Malzeme Modellerinin Karşılaştırılması.

Analizlerin ikinci kısmında ise çeşitli malzeme modelleri denenerek karşılaştırılma yapılmış ve en iyi malzeme modeli belirlenmeye çalışılmıştır. Genel olarak malzeme akışının baskın olduğu metal işlemlerinde (derin çekme, eğme, form verme gibi) izotropik malzeme modeli olan Johnson-Cook modeli doğru sonuçlar verebilmektedir.

Johnson-Cook birim uzama hızının düşük olduğu durumlarda iyi sonuçlar vermektedir. Katsayılarının kolayca tek bir test ile belirlenebileceği gibi, bu model ile ilgili birçok çalışma olduğundan literatürden de elde edilebilir. Modelde birim uzama hızına diğer modellere göre lineer yaklaşılmaktadır. Yani (4.55) eşitliğinde de anlaşılabileceği gibi birim uzama hızı artıkça gerilme eksponansiyel şekilde artacaktır yani gerinmenin arttığı fakat gerinme hızının azaldığı durumlar formülasyon nedeniyle oluşmayacaktır. Bu tür yaklaşım çarpışma, ezilme gibi analizlerde malzemenin davranışını tam olarak yansıtamayabilir. JC modeli tamamen izotropik davranışlıdır ve yüksek sıcaklıklarda (Malzemenin mekanik özelliklerinin değiştiği yani termal yumuşamanın görüldüğü sıcaklıklarda) doğru sonuçlardan uzaklaşabilmektedir.

Bütün bu nedenlerden dolayı Cowper-Symonds modeli geliştirilmiştir. Bu model hem izotropik hemde kinematik davranış gösterebilir. Ayrıca birim uzama artışı yaklaşımı JC

modeline göre daha lineer olmayan biçimdedir. Fakat yapılan analizde de görülebileceği gibi CS modelinin JC ye göre lineer olmamasına rağmen, birim uzama hızına yaklaşımı nedeniyle malzemenin fiziksel davranışını yansıtmakta tam olarak yeterli olmamaktadır. Johnson-Cook modelinin eksikliği giderilmeye çalışılsada birim uzama hızına yaklaşımı, malzemeye sıcaklık etkisinin ve hasar özelliklerinin girilememesi nedeniyle pek tercih edilmemektedir.

Zerilli-Armstrong (ZA) modelinde ise birim uzama artışı JC modeline göre daha nonlineerdir. Yani bu modelde birim uzama hızı azalmasına rağmen birim uzamanın ve gerilmenin arttığı durumlar oluşturulabilir. Fakat JC modelinde (4.55) eşitliğinde birim uzama pekleşmesi ve birim uzama hızı çarpan şeklindedir ve birbirlerini direk etkilemektedirler. ZA modelinde ise, (4.62) eşitliğinde görülebileceği gibi bu iki terim toplam şeklinde birbirini etkilediğinden malzemenin davranışını yansıtmakta her zaman başarılı olamamaktadır. CS modelinden farklı olarak sıcaklık etkisi eklenebilmektedir. Analiz sonuçlarından görülebileceği gibi malzeme karakteristiğini yakalayabilmesine rağmen, JC modeli daha yakın sonuçlar vermiştir. Literatürde yapılan araştırmaların sonucunda da JC modelinin ZA modeline göre daha doğru sonuçlar verdiği görülebilmektedir.

Bodner-Partom ve Khan-Huang modellerinde birim uzama hızı JC modeline göre daha esnek hale getirilmiş ve ZA modelinin eksiklikleri giderilmiştir. Ancak bu modeller henüz ticari sonlu eleman yazılımlarına adapte edilmemişlerdir.

Otomobil üzerine çalışan ve sonlu eleman yöntemini kullanan mühendisler genellikle Piecewise modelini kullanmaktadır. Bunu sebebi modelin diğer modellere nazaran ampirik olması ve dolayısıyla birim uzama hızını hesaplamak yerine test datalarından temin etmesidir. Bu durumda gerçek dataların kullanılması sayesinde doğru sonuçlara ulaşmak daha kolaydır. Ayrıca diğer malzeme modellerinde olduğu gibi test ile belirlenen sabit katsayılarla sahip olmadığından analiz sırasında uygulanması daha kolaydır. Piecewise modelinde analiz sırasında hesaplanan gerilme uzaması değerine göre test datalarından elde edilen en yakın iki eğri arasında interpolasyon yapılarak gerilme uzaması değeri elde edilir ve buna göre hesaplamalar yapılır. Bu modeli kullanmak için gerekli malzemelerin hepsi ile ayrı ayrı ve değişik birim uzama

hızlarında test yapmak gerekmektedir. Yapılan tez çalışmasından Piecewise modeli için on ayrı test datası kullanılmaktadır. Bir çok malzemedan bu şekilde test ile data toplanması maliyetli olmakta ve uzun sürebilmektedir.

Yapılan tez çalışmasında birim uzama hızı çok yüksek ve sıcaklık faktörü önemli olmadığından yani termal yumuşama etkisinin az olduğu durumlarda Johnson-Cook modeli en doğru sonucu vermiştir. Piecewise modeli ise katsayılarla uğraşmadan kolay biçimde malzemenin karakterini yakalamıştır fakat JC modeli daha iyi gözükmektedir. Çarpışma gibi yüksek gerinim hızının olduğu durumlar ve ortam sıcaklığının çok yüksek olmadığı durumlarda tek test ile kullanabilinen JC modelini kullanmak, Piecewise'a göre daha az maliyetli olmaktadır. Diğer komplike durumlarda ise sonucun doğruluğundan emin olmak için Piecewise modelini kullanmak daha uygun olmaktadır.

6.SONUÇLAR VE TARTIŞMALAR

Otomotiv sektöründe kullanılan araçların dayanıklılığı ve özellikle güvenliği açısından şasi gövde gibi parçalarının, aşırı yükleme durumlarındaki mukavemeti ve davranışı önem kazanmaktadır. Özellikle çarpışma devrilme gibi büyük deformasyonları meydana geldiği durumlarda malzemelerin plastik şekil değiştirme davranışlarının belirlenmesi zor olmaktadır.

Bu davranışların belirlenmesi için testler ve bilgisayar destekli analizler yapılmaktadır ve daha öncede bahsedildiği gibi yapılan bilgisayar destekli mühendisliğin amacı test sayısını azaltmak dolayısıyla zaman ve maliyetten kazanç sağlamaktır. Sonlu elemanlar yöntemlerinde kullanılan matematiksel modelleme ve kabuller nedeniyle çıkan sonuçlarda sapmalar olmaktadır. Doğru sonuçlardan uzaklaşmamak için fiziksel durumların yansıtıldığı yükleme ve sınır şartlarının verilmesi ve malzeme özelliklerinin doğru olarak tanımlanması gerekmektedir. Karşılaşılan en büyük problem, malzemenin plastik deformasyon davranışının modele doğru olarak tanımlanmasının gerekmesidir .

Yapılan tez çalışmasında otobüs, minübüs gibi toplu taşıma araçlarında kullanılan dikdörtgen kesitli profil örneği alınmış ve bu numuneye test yapılmıştır. Elde edilen sonuçlarla analiz sonuçları karşılaştırılmıştır. Analizler için ilk önce örtük yöntem ile analiz yapılmış ve daha sonra açık çözüm yöntemine geçilip, iki yöntem arasındaki farklılıklar açıklanmıştır. Analiz sonuçları göstermektedir ki; örtük yöntemin kullandığı transfer fonksiyonları, integratörleri, integrasyon yöntemi ve açık yöntemle kıyasla çok büyük zaman adımları nedeniyle burkulma gibi kararsız durumları yakalamak mümkün olmamaktadır. Tezin daha sonraki bölümünde RADIOSS ticari yazılımına entegre edilen plastik şekil değiştirme malzeme modelleri kullanılarak ve bu modellerin sabit katsayıları elde edilmiştir.

Kullanılan modeller şunlardır:

- Johson- Cook malzeme modeli
- Cowper-Symonds malzeme modeli

- Zerilli-Armstrong malzeme modeli
- Piecewise malzeme modeli
- Elastik-plastik hasar malzeme modeli

Piecewise için kullanılan datalar, değişik birim uzama hızlarında yapılan on ayrı çekme testinden elde edilmiştir.

Yapılan analizler sonucunda düşük birim uzama hızlarında ve sıcaklığın etki etmediği durumlarda Johnson-Cook modeli iyi sonuçlar vermektedir. Yapılan test de düşük birim uzama hızlarında gerçekleştiğinden JC modeli ile tam olarak örtüşmüştür. Diğer modellerin avantajlı yanları olsada JC modeli daha iyi sonuçlar vermiştir. Modellerin birbirlerine göre dezavantajları ve avantajları açıklanmıştır. Piecewise modeli ise özellikle çarpışma analizlerinde kullanılan bir malzeme modelidir. Bu model kullandığı dataları direk test sonuçlarından aldığından diğer modellere göre daha güvenilir sonuç vermekte ve analiz programında sabit katsayıların belirleme işlemi olmadığından daha kolay uygulanabilmektedir.

Sonuç olarak yapılan tez çalışmasında hali hazırda kullanılan ve kullanılabilecek olan plastik şekil değiştirme malzeme modelleri açıklanmış ve yapılan test çalışmasına dayanılarak birbirleri ile karşılaştırılmıştır. Bu çalışma sayesinde yapılan analizlerde kullanılacak malzeme modelinin seçilmesi daha kolay hale getirilmiş ve bilgisayar destekli analizlerin sonuçlarının daha güvenilir olması sağlanmıştır.

KAYNAKLAR

- [1] **Von Mises, R.**, 1913. Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand, Gött. Nach. Math. Phys. Kl., 582–592.
- [2] **Prandtl, L.T.**, 1924. Spannungsverteilung in plastischen Körpern, in Proc. *1st Intern. Congr. Mechanics*, Delft, 43–54.
- [3] **Von Mises, R.**, 1928. R. von Mises, Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen, *ZAMM* 8 , 161–185.
- [4] **Prandtl, L.T.**, 1928. Ein Gedankenmodell zur kinetischen Theorie der festen Körper, *ZAMM* 8, 85–106.
- [5] **Melan, E.**, 1938. Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums, *Ing. Arch.* **9**, 116–125.
- [6] **Johnson, C.**, 1977. A mixed finite element method for plasticity problems with hardening, *SIAM J. Numer. Anal.* **14** , 575–583.
- [7] **Hai-Sui YU**, 2006. Plasticity and Geotechnics, Springer, University of Nottingham, UK.
- [8] **Çapan, L.**, 1986. Plastisiteye Giriş, İ.T.Ü Gemi İnşaatı ve Deniz Bilimleri Fakültesi Matbaası, İstanbul.
- [9] **Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.**, 2000. The Finite Element Method Volume 1: The Basis, Butterworth –Heinemann, Oxford.
- [10] **Radioss User's Guide**, Radioss Theory Manuel.
- [11] **Abaqus Documentation**, Chapter 2, Abaqus Analysis User Manuel.
- [12] **Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.**, 2000. The Finite Element Method Volume 2: Solid Mechanics, Butterworth –Heinemann, Oxford.
- [13] **Huebner & Thorton**, The Finite Element Method for Engineers, Wiley-Interscience
- [14] **Ford Motor Company**, Internal Documents.

- [15] **Muğan, A., Hulber, G.M.**, 2001. Frequency Domain Analysis of Time Integration Methods for Semidiscrete Finite Element Equations, Part 1: Parabolic Problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **51** (3), 333-350
- [16] **Muğan, A., Hulber, G.M.**, 2001. Frequency Domain Analysis of Time Integration Methods for Semidiscrete Finite Element Equations, Part 2: Hyperbolic and Parabolic-Hyperbolic Problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **51** (3), 351-376
- [17] **Muğan, A.**, 2001. Frequency Domain Analysis of Time Integration Algorithms, *Computer Methods Appl. Mech. Eng.*, **190**, 5777-5793.
- [18] **Chen W. F., Han D. J.**, 1988. Plasticity for Structural Engineers. Springer Verlag, New York.
- [19] **Zerilli, F.J., and Armstrong, R.W.**, 1987. Dislocation-Mechanics- Based Constitutive Relations for Material Dynamics Calculations, *Journal of Applied Physics*, **61**, 5.
- [20] **Johnson, G.R., and Cook H.W.**, 1983. *Proceedings of the Seventh International Symposium on Ballistics*, The Hague, The Netherlands, p. 541.
- [21] **Mahadevan K., McCoy R.**, 1998. Strain-Rate Characterization of Automotive Steel and the Effect of Strain-Rate in Component Crush Analysis, *International Body Engineering Conference & Exposition*, Detroit, Michigan, 982392.
- [22] **Simunovic S., Kumar P.**, 2003. Modeling of Strain Rate Effects in Automotive Impact, *SAE World Congress*, Detroit, Michigan, 2003-01-1380.
- [23] **Flanagan D., Belytschko T.**, 1981. A Uniform Strain Hexahedron and Quadrilateral with Orthogonal Hourglass Control, *Int. Journal Numerical Methods in Engineering* **17** 679-70

ÖZGEÇMİŞ

İlker CEYLAN 1982 yılında İstanbul'da doğdu. İlköğretimini Aksaray Zafer İlkokulu'nda tamamladı. Ortaöğretimini Karaman Anadolu lisesi'nde, lise Öğrenimini ise Konya Fen Lisesi'nde tamamladıktan sonra 2000 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi Makine Fakültesi'nde yüksek öğrenim hayatına başladı. 1 yılı hazırlık olmak üzere 5 yıllık lisans eğitimini başarıyla tamamlamasının ardından 2005 yılında makine mühendisi olarak üniversiteden mezun oldu. İlker CEYLAN 2005 senesinden bugüne dek İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Makine Mühendisliği Ana Bilim Dalı, Konstrüksiyon programında yüksek lisans öğrenimine devam etmektedir.