

55680

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KÜP ŞEKLİNDEKİ BİR CİSMİN CİVARINDAKİ BİR KÜTLEYE ETKİYEN
KUVVETİN DEĞİŞİMİNİN SONLU ELEMANLARLA HESAPLANMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

UÇAK Müh. Mustafa ARSLANALP

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 15 Ocak 1996

Tezin Savunulduğu Tarih : 29 Ocak 1996

Tez Danışmanı

: Doç. Dr. Arif N. GÜLLÜOĞLU *A. Güllüoğlu*

Diğer Jüri Üyeleri

: Prof. Dr. Zekai ŞEN *Z. Şen*

Doç. Dr. Gülseren AYDIN *G. Aydın*

OCAK 1996

ÖNSÖZ

Yer çekimi kuvveti her zaman ilgi çekicidir. Tarih boyunca insanların konuya yaklaşımı mistik veya bazı kişilerin görüşlerini kabul şeklinde belirmektedir. Uzun yıllar boyu Aristo'nun düşünceleri egemen olmuş, konu ile ilgili modern anlayış son üçyüz yılda şekillenmiştir. Literatür araştırmaları sırasında, kütle çekimi hesaplarında, analitik yöntem kullanıldığı görülmüş olup sonlu elemanlar yönteminin kullanıldığı hakkında bir kayda rastlanmamıştır. Bu açıdan kütle çekiminin hesaplanması düşünülmüştür.

Master tezimi hazırlamamda bana yardımını esirgemiyen değerli hocam Doç. Dr. Arif N. GÜLLÜOĞLU'na ve sayın Prof. Dr. Zekai ŞEN'e teşekkürü bir borç bilirim.

Mustafa ARSLANALP
Uçak Mühendisi

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ÖZET	v
SUMMARY	vi

BÖLÜM 1

EVRENSEL KÜTLE ÇEKİM KANUNU

1.1 Giriş	1
1.1.1 Newton Öncesi	2
1.1.2 Newton ve sonrası gravitasyon	4
1.2 Küresel simetrik bir kütlenin kütle çekim etkisi	6

BÖLÜM 2

KÜBİK BİR CİSMİN CİVARINDAKİ BİR m KÜTLESİ ÜZERİNE UYGULADIĞI KUVVETİN BİR DOĞRULTU BOYUNCA DEĞİŞİMİNİN SONLU ELEMANLAR KULLANILARAK HESAPLANMASI

2.1.1 kütle çekim kuvvetinin hesaplanmasında kullanılan yöntemler	13
2.1 Kütle çekim kuvvetinin hesaplanmasında kullanılan yöntemler	14
2.2 Kübik bir cismin civarındaki bir m kütlesi üzerine uyguladığı kuvvetin bir doğrultu boyunca değişiminin sonlu elemanlar kullanılarak hesaplanması	15
2.3 Küp eleman için sonuçların bulunması	16

BÖLÜM 3.

VEKTÖRLER VE SONLU ELEMANLAR KULLANARAK KÜP CİVARINDAKİ KÜTLE ÇEKİM KUVVETİNİN HESABI

3.1 Vektörlerin Skaler Çarpımı 19

3.2 Vektörler Ve Sonlu Elemanlar Kllanarak Küp Civarındaki Kütle Çekim
Kuvvetinin Hesabı 20

BÖLÜM 4

SONUÇLAR VE YORUMLAR 24

EK 1 PASKAL PROGRAMLARI

EK 1.1 PASKAL PROĞRAMINDA KULLANILAN NOTASYON 25

EK 1.2 Vektör Hesaplamaları ile ilgili Kullanılan Paskal Programında Kullanılan
Notasyon 26

EK 2 DATALAR VE GRAFİKLER 27

TABLO LİSTESİ

Tablo 2.1 Bir birim boyutlu alt küplerin kütle merkezlerinin koordinatları. 14

Tablo 2.2 Alt küp elmanların boyutunu iki birim aldıktan sonra elemanların kütle merkezlerinin koordinatlarının son durumu 15

Tablo 2.3 27 küp elemanın kütle merkezlerinin koordinatları 18

Tablo 2.4 Kübün kenar uzunluğuna bağlı olarak küp elman sayısının değişimi . . . 18



ŞEKİL LİSTESİ

ŞEKİL 1.1 Ay ve elmanın yerin merkezine doğru ivmelenmesi.	5
ŞEKİL 1.2 Bir küresel kabuğun ds parçasının, kütlesi m olan bir parçacık üzerinde kütle çekim etkisi.	7
ŞEKİL 2.1 8 Küp elemanın bir kübün içine yerleştirilişi	14
ŞEKİL 2.2 Küp elmanların ve m kütlesinin yerleri	16
ŞEKİL 3.1 İki vektör arasındaki açı	19
ŞEKİL 3.2 Bir kübün dışındaki bir nokta ile küp içindeki rasgele bir eleman arasındaki vektörün durumu	21

ÖZET

Bütün ömrümüz boyunca hep ayaklarımız üzerinde durmağa çalışırız. Birşey bizi hep yerde tutmaktadır. Çağlar boyunca insanlar bu konuyu merak etmiş olmalı ki, bu konuya pek çok açıklama getirmişlerdir. Bu açıklamaları: (1) Newton öncesi, (2) Newton sonrası, diye guruplandırabiliriz.

Newton öncesine göre: Kainattaki herşeyin ait oldukları bir ilk yer, orijin, vardır. Cisimler bu ilk oluştukları yere dönmek istemektedirler. Suyun akışı, havaya atılan taşın yere düşmesi, bu maddelerin kainatın merkezine gitme eğilimlerinden dolaydır. Kainatın merkezi ile dünyanın merkezi çakışmaktadır.

Newton ile birlikte gravitasyon kavramı değişmiş, “Bütün maddeler biri birlerini, kütleleri ile doğru ve aralarındaki uzaklığın karesi ile ters orantılı olarak çekerler” şekline gelmiştir.

Maddelerin aralarındaki uzaklık kavramı ile, kütle merkezleri arasındaki uzaklık alınması, yalnızca noktasal yükler ve küresel simetrik cisimler için geçerlidir. Gök cisimlerini, noktasal bir kütle gibi kabul adabiliriz. Bunun isbatı verilmiştir. Kübik bir cisim noktasal bir kütle gibi düşünemeyiz.

Bu çalışma ile kübik bir cisim, alt küp elemanlara bölünmüş, civarındaki bir noktasal m kütleline, bir doğrultu boyunca uyguladığı kuvvet bulunarak, kübün kütleline eşdeğer küresel bir kütle için bulunan sonuca oranlanmıştır. Bilahare vektörler yardımı ile hesaplama yapılmış, istenen herhangi bir doğrultu için benzer hesapların yapılabileceği bulunmuştur.

SUMMARY

DEVELOPMENT OF GRAVITATIONAL THEORY

Until Newton's findings, around 1665 it was not realised that both the movement of celestial bodies and the free fall of objects on Earth are determined by the same force. The classical Greek philosophers for example, did not consider the celestial bodies to be affected by gravity because the bodies were observed to follow perpetually repeating, non-descending trajectories in the sky. Thus, Aristotle considered that each heavenly body followed a particular "natural" motion, unaffected by external causes or agents. Aristotle also believed that massive earthly objects possess a natural tendency to move toward the Earth's centre. These ideas have prevailed for centuries that a body moving at constant speed requires a continuous force acting on it and that force must be applied by contact rather than interaction at a distance. These views impeded the understanding of the principles of motion and precluded the development of ideas about universal gravitation.

The 17th-century German astronomer Johannes Kepler accepted the Copernican perspective in which the planets' orbit the Sun rather than the Danish astronomer Tycho. Kepler described the planetary orbits with simple geometric and arithmetic relations. Kepler's three quantitative laws of well known planetary motion are: (1) the planets describe elliptic orbits with the Sun at one focus (one of two points inside an ellipse: rays coming from one of the points bounce off any side); (2) the line joining a planet to the Sun sweeps equal areas in equal times; and (3) the square of the period of revolution of a planet is proportional to the cube of its average distance from the Sun. During these same period the Italian astronomer and physicist Galileo made progress in understanding "natural" motion for earthly objects. He realised that bodies that are uninfluenced by forces continue indefinitely to move and that force is necessary to change motion. In studying how objects fall toward the Earth, Galileo discovered that the motion is one of constant acceleration. He was able to show that the distance a falling body travels from rest in this way varies as the square of the time.

Newton discovered the relationship between the motion of the Moon and the motion of any falling body on Earth. His gravitational theory explained Kepler's laws and established the modern quantitative science of gravitation. Newton assumed the presence of an attractive force between all massive bodies, one which does not require bodily

contact and acts at a distance. By invoking his law of Newton observed that a force exerted by the Earth on the Moon is needed to keep it in a circular motion rather than moving in a straight line. He realised that this force could be at long range, the same as the force with which the Earth pulls objects on its surface downward. When Newton discovered that the acceleration of the Moon is $1/3.600$ smaller than the acceleration at the surface of the Earth he related the number 3.600 to the radius of the Earth squared. He calculated that the circular orbital motion of radius R and period T requires a constant inward acceleration A equal to the product of $4.\pi^2$ and the ratio of the radius to the square of the time:

$$A = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \quad (1)$$

Newton applied his result to the Moon's orbit, which has a period of 27.3 days and a radius of about 384.000 kilometres (approximately 60 Earth radii). He found the Moon's inward acceleration in its orbit to be 0.0027 metre per square second, the same as $(1/60)^2$ of the acceleration of a falling object at the surface of the Earth. Because Newton could relate the two accelerations to a common interaction. He deduced that the gravitational force between bodies diminishes as the inverse square of the distance between the bodies. A further result, that the mass of the Earth acts gravitationally on the outside world as if the mass were concentrated at the planet's centre. Newton proved it to be true for all spherically symmetric bodies.

Newton saw that the gravitational force between bodies must depend on the masses of the bodies. Since a body of mass M experiencing a force F accelerates at a rate F/M , a force of gravity proportional to M would be consistent with Galileo's observation that all bodies accelerate under gravity toward the Earth at the same rate. In Newton's equation, F_{12} is the magnitude of the gravitational force acting between masses M_1 and M_2 separated by distance r_{12} .

$$F_{12} = \frac{G M_1 \cdot M_2}{r_{12}^2} \quad (2)$$

The constant G is a quantity with the physical dimensions (length)/(mass)(time)² its numerical value depends on the physical units of length mass and time used. The attractive force of a number of bodies of masses M_1 on a body of mass M is

$$F = \frac{G M \sum_1 M_1 r_1}{r_1^3} \quad (3)$$

Where Σ_1 means that the vector forces due to all the attracting bodies must be added together. This is Newton's gravitational law essentially in its original form.

Equations (1) and (2) above can be used to derive Kepler's third law for the case of circular planetary orbits. By using the expression for the acceleration A in equation (1) for the force of gravity for the planet $G.M_p.M_s / R^2$ divided by the planet's mass M the following equation, in which M_s is the mass of the Sun, is obtained:

$$\frac{GM_s}{R^2} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \quad \text{or} \quad R^3 = \left(\frac{GM_s}{4\pi^2} \right) T^2 \quad (4)$$

Newton was able to show that all three of Kepler's observationally derived laws follow mathematically from the assumption of his own laws of motion and gravity. In all observations of the motion of a celestial body, only the product of G and the mass can be found. Newton first estimated the magnitude of G by assuming the Earth's average mass density to be about 5.5 times that of water (somewhat greater than the Earth's surface rock density) and by calculating the Earth's mass from this. Then, taking M_E and r_E as the Earth's mass and radius, respectively, the value of G was that numerically comes close to the accepted value of $6.6726 \times 10^{-11} \text{ ms}^2/\text{kg}$

$$G = \frac{gr_E}{M_E} \quad (5)$$

Comparing $g = \frac{GM_E}{r_E^2}$ above for the Earth's surface acceleration g with the R^3/T^2 ratio for the planets, a formula for the ratio of the Sun's mass, M_s to Earth's mass, M_E , was obtained in terms of known quantities. R_E being the radius of the Earth's orbit:

$$\frac{M_s}{M_E} = \frac{4\pi^2 R_E^3}{g T_E^2 r_E^2} \cong 325.000 \quad (6)$$

It was already known in Newton's day that the Moon does not move in a simple Keplerian orbit. Later, more accurate observations of the planets also showed discrepancies from Kepler's laws. The motion of the Moon is particularly complex: however, apart from a long-term acceleration due to tides on the Earth, it can be accounted for by the gravitational attraction of the Sun, the Earth, and the other planets. In addition, the gravitational attraction of the planets for each other explains almost all the features of their motions. The exceptions are nonetheless important. Uranus the seventh planet from the Sun, was observed to undergo variations in its motion that could not be explained by perturbations from Saturn, Jupiter, and the other planets. Measurements of the motion of the innermost planet, Mercury, over an extended period led astronomers to conclude that the major axis of this planet's elliptical orbit processes in space at a rate 43 arc seconds per century faster than could be accounted for from perturbations of the other planets. In this case, however, no other bodies could be found that could produce this

discrepancy, and very slight modification of Newton's law of gravitation seemed to be needed. Einstein's theory of relativity precisely predicts this observed behaviour of Mercury's orbit.

In the last three hundred years long, the development of gravitation understanding became a section of the classical mechanics. When somebody would like to find out how a body produces gravitational force onto another one three things must be in consideration: First, the shape of the body. Second, the element shape that it is easy to locate the centre of gravity of the element. And third, the coordinate system that would be helpful demonstrating the calculations. As long as I see when I was studying on the subject I found out that the traditional mass element is very small (differential) elements. The selection of the elements will determine whether the resulting integral be a single, a double, or a triple. If we would like to have an exact solution, for any body that doesn't have symmetrical planes then we need to know the orientation of the gravitational force on an element.

In my study I tried to find out a cube's gravitational attraction on a very small body that can be accepted as a point mass, by dividing the cube into different number of finite cube elements. The least of the element number may be one. By trying to calculate it we will find out it is like a point mass. After this attempt we can conclude that the least number is eight and if we continue using integers, next possible element number is twenty-seven and it goes on the cube of four, five etc. I went on trying the higher number of cube elements as much as one million. I found out that it has no difference by using two-thousand or one million.

Another view is to make the results compare with a point mass that as if it was located on the cube's centre of gravity. I divided the resultant force by the point mass' gravitational force that had already been mentioned above.

At the beginning of my study I accepted the cube dimension 1, but I saw that the higher the number of elements the smaller the cube elements dimensions. All the time I had to use ratios. I decided to use the cube elements dimensions one each time that I took more elements. The dimensions of the cube become larger and larger. The location of the mass m was bigger each time. I divided the distances by the radius of the sphere that it's mass is equal to the mass of the cube. So my results weren't affected by the dimensions of the cubes.

It is easy to use the cube element dimensions as 1 but I found out it would be easy if I accept the dimensions 2 because of the location of the element's centre of gravity would be integer.

I also decided to calculate the desired results for any directions instead of just for x directions. So I applied vectors on finding the element's centre of gravity.

In summary we can accept a cube as a point mass if some approximations can be convenient. As an example, if one percent approximation is acceptable, than we can accept the cube as a point mass after two and half times of equal sphere radius.



BÖLÜM 1

EVRENSEL KÜTLE ÇEKİM KANUNU

1.1 Giriş

İnsanlar daima çevrelerinde olup biteni anlamağa çalışmışlardır. Bilinmeyen konular daima korku uyandırmış ve insanları çareler düşünmeğe zorlamıştır. Bazıları bir koruyucu ararken bazıları da bilinmeyeni açıklığa kavuşturma çabasına girmiştir. Gravitasyon veya kütle çekimi de bizi en çok ilgilendiren konuların başında gelir.

Bu çalışmamda önce konu ile ilgili antik çağdaki açıklamaları ve bugünkü kavramın ortaya çıkarılışı, sonra küresel simetrik bir kütle için kütle çekim kuvveti anlatılmıştır. İkinci bölümde sonlu elemanlar kullanılarak, kübik bir cismin civarındaki bir m kütesine uyguladığı kütle çekim kuvvetinin bir doğrultu boyunca değişimi incelenmiştir. Aynı cismin vektörler yardımı ile, sonlu elemanlara ayrılmış hali için de çözümün nasıl bulunacağı eklenmiştir. Bu durumda, istenen herhangi bir doğrultu için kübik cismin civarındaki bir m kütesine uyguladığı kütle çekim kuvveti bulunabilmektedir. Turbo Paskal dili ile yazılmış program çıktısı datalar ve grafikler ise Ek.1 ile verilmiştir.

1.1.1 Newton Öncesi

Gravitasyon kavramı ile ilgili antik çağların ve modern zamanların anlayışları arasında çok belirgin farklar olacağı aşikardır. Onyedinci yüzyıldan itibaren bilim adamları, gravitasyonu maddenin temel özelliklerinden biri olarak kabul edebileceklerini düşündüler. Bir kütle diğerini ihtiva ettiği madde miktarı ile ve aralarındaki uzaklığın karesine ters olarak bağlı bir kuvvetle çeker. Antik ve orta çağlarda ise gravitasyonu maddenin kendisine bağlı olarak değil, bulunduğu pozisyona bağlı kabul ettiler. Aristonun zamanında, her maddenin önceden belirli bir yeri vardı ki herhangi bir şekilde oradan ayrıldığında oraya geri dönme eğilimi olduğu kabul edilmişti. Taşlar yere doğru düşerlerdi çünkü onların asıyeri olan kainatın orijinine ulaşmak istiyorlardı. Bu orijinle de yerin orijini çakışık veya aralarında çok az mesafe vardı. Fakat çamurlu ve sulu şeyler, dünya kainatın merkezinde olmasa da onlar kainatın merkezine doğru gidiyorlardı. Tıpkı hava ve alev gibi şeylerin ayın yörüngesinin altında onları gökyüzüne doğru çekecek orijinleri dışında hiçbirşeyin olmamasına rağmen yukarıya doğru hareket etmeleri gibi...

Gravitasyonla ilgili bu anlayış, Kopernik'in teorisinde problemler çıkarmağa başladı. Taşlar açıkça yere doğru düşerler, fakat eğer dünya bir yılda güneş etrafında bir tur atıyorsa evrenin merkezinde olamazdı. Bu yüzden Kopernik, Güneş, Dünya, Ay ve gezegenler gibi kütlelerin herbirinin kendi gravitasyon sistemi olduğunu, böylece uzayda bir taşın en yakın gök cismine doğru düşeceğini ortaya attı. Kopernik'in düşüncesine göre gravitasyon, maddelerin evrenin merkezine doğru gitmek istekleri yerine, konuldukları herhangi bir yerde küresel bir şekil içinde toplanma eğilimiydi. Fakat hala O, geometrik olarak, kürenin merkez noktasını gravitasyonun odak noktası olarak düşünüyordu. Kopernik şöyle yazıyordu: "Dünyanın elementi en ağırdır ve bütün ağır şeyler ona doğru çekilirler, en orta noktaya varmak isterler."

Kopernik, güneş sisteminin kütlelerinin birbirlerini, kendi gravitasyon sistemleri ölçünde etkilediklerini düşünmedi. Gök cisimlerinin dizilişleri ve onların hareketleri, herhangi bir mekanik kabul veya gravitasyonla belirlenmedi. Gök

cisimlerinin hareketleri tamamen doğaldı ve bunun yanında gezegenlerin hızları ve yörüngelerine bağlı olarak matematik dizilerle belirlenmişti. Kopernik, gezegenler arası uzayın yapısını ne şekilde olduğunu belirtmedi, fakat ondan sonra, Keppler, Kopernik'in, birbirlerinin içine yerleşmiş dönen, aynı merkezli katı kristal prizmaların yüzeylerinde gömülü olarak gezegenleri taşıdığına inandığını söylemiştir.

Tyco Brache ve diğerleri tarafından 1577 yılında bir kuyruklu yıldızın, güneş sistemi içinde, aristo uzayı tarafından belirlenen prizmatik kabukların hepsini kesip geçmesi ile, böyle bir kabul dışlanmış oldu.

Tyco Brache şöyle yazıyordu: 'Şimdi bana göre açıkçası gökyüzünde hiç katı küre yok ve otoriteler gökyüzündeki cisimlerin hareketlerini açıklayabilmek amacıyla kendi hayal güçlerinin mücade ettiği ölçüde bir küresel cisimden bahsettiler.'

Fakat eğer kristal küreler yoksa, gökcisimlerini neyin hareket ettirdiği ve onların düzenliliğinin nasıl sağlandığı sorusu ortaya çıktı. Gök cisimlerinin biri birlerinden bağımsız olarak kendi akortlarına göre hareket ettiklerini aralarında bir düzen olmadığını söylemek mümkündü. Francis Bacon şöyle yazıyordu: 'Gök cisimleri ile ilgili ilk soru, Dünya ve Gök cisimlerini içine alan tek merkezli bir global sistem var mı, yoksa Dünya ve yıldızların birbirlerinden bağımsız olarak, uzayda rasgele dağılmış, diğer sistemleri ilgilendirmeyen kendi global sistemleri mi var?'

Bununla beraber, modern bilimin öncüleri, gök cisimlerinin düzenli hareketlerine bakarak, belirli bir prensibe dayanan, Dünya, Ay, Güneş ve gezegenlerin içinde bulunduğu bir global sistemin olduğu yolunda izlenimlerini belirttiler. Collchester'li William Gilbert, 1600 yılında güneş sistemini bir arada tutan '*principle*'in manyetizma olduğunu söyledi. Gilbert manyetit taşı ile pek çok denemeler yapıyordu. Baktı ki taş ne kadar büyükse demiri o kadar fazla çekiyor. Denemelerinden birinde manyetitin demiri çekmesinin tersinir olduğunu gördü. Demir de manyetitin kendisini çektiği kuvvetin aynısıyla onu çekiyordu. Bu denemeler sonunda gravitasyonun odak noktası ile değil madde miktarı ile ilgisi olduğunu düşündü. Gilbert'in bu araştırmaları bugünkü gravitasyon anlayışını

başlatmaktadır. Bunlardan küresel olanlarla Yer arasında bir benzerlik kurdu ve yerin üzeri kayalar ve toprakla örtülü dev bir küresel mıknatıs olduğunu söyledi.

Gilbertin fikirleri zamanında çok etkileyici idi ve Keppler tarafından dikkate alındı. Keppler zamanında, eylemsizlik kavramını bilinmediği için, ayın dünyaya düşeceğini hesapladı. Bu durumda Güneşin manyetik etkisi gezegenleri bir arada tutabilmek için, tıpkı yumurta çırpın kaşık gibi döndürücü olmalıydı. Keplere göre gezegenlerin yörüngesi eliptik, Galileo'ye göre daireseldi. Ondan sonraki yıllarda Descartes de O'nu desteklemiş, Keppler'in çalışmalarına kayıtsız kalmışlardır.

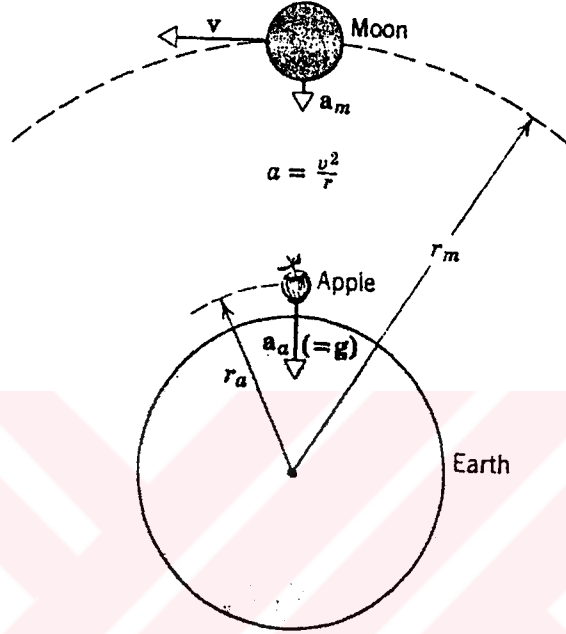
Descartes'in fikirleri Christian Huygens tarafından denemelerle isbatlanmağa çalışılmış, sonuçlar O'nu desteklemese de ilk defa merkezkaç kuvveti ile ilgili ilk izlenimleri ortaya koydu. İtalyan fizikçi Alfred Borelli, Gezegenleri karşılıklı biri birine çeken bir kuvvetten dolayı yörüngelerinin eliptik olduğunu söyledi.

İngilterede'deki Stuart bilim akademisinde bir gurup bilim adamının çalışmaları ile kütle çekiminde modern anlayış gelişmiştir. Bunlar: Edmund Halley, İsaac Newton, Robert Hook ve Christopher Wren başlıcalarıdır. Aşağıda Newton ve sonrası gravitasyon kavramının gelişimi anlatılmaktadır.

1.1.2 Newton ve Sonrası Gravitasyon.

Eski çağlardan beri insanoğlu iki önemli gözlemin nedenini araştırmıştır. Bunlar : (1) Serbest bırakılan cisimlerin yere düşmesi (örneğin bir taş). (2) Gezegenlerin hareketleridir. Bu çağlarda güneş ve ay gezegen sınıfından sayılırlardı. İlk zamanlar bu iki problem birbirinden bağımsız olarak düşünülmüştür. İsa-ac Newton, kendinden önce yapılan çalışmaları da dikkate alarak, tüm problemlerin tek bir kanunla çözülebileceğini göstermiştir. 1665 yılında 23 yaşında olan Newton, veba salgını yüzünden, yüksek tahsilini sürdürmekte olduğu Cambridge şehrinden ayrılarak, Linolnshire'e göç etmek zorunda kalmıştır. Yaklaşık elli yıl sonra , Newton şöyle yazıyordu. " O yıllarda

kütle çekiminin etkisini, ayın yörüngesine kadar genişletmeyi düşündüm. Ayı yörüngesinde tutan kuvveti, yeryüzeyindeki kütle çekimi kuvveti ile karşılaştırdığımda, birbirine oldukça yakın olduğunu gördüm.”



Şekil 1.1 Ay ve elmanın yerin merkezine doğru ivmelenmesi

Ayın dolanım periyodu ve yörünge yarıçapı bilindiğinde yere yönelmiş ivmesi, $0,0027 \text{ m/s}^2$ olarak hesaplanır. Bu değer kütle çekim ivmesi g den 3600 defa daha küçüktür. Newton, Kepler’in üçüncü kanununu göz önüne alarak, bu farkı, “Serbest düşen bir parçacığın ivmesi, parçacığın yerden uzaklığının karesiyle ters orantılıdır.” varsayımı ile açıklamıştır.

Hemen akla gelenbilen soru “yerden uzaklık” ile ne demek istenildiğidir. Newton, yeryüzeyindeki her bir parçacığın diğer parçacıklarla kütle çekimi ile bağlı olduğunu göz önüne almıştır. Böylece Newton, yerin kütlesini merkezinde toplanmış gibi kabul etmiştir.

Örneğin dünyayı, güneşe göre bir parçacık gibi kabul edebiliriz. Bu çok açık olmamakla birlikte, elmayı dünyaya göre bir parçacık gibi düşünmemize benzer.

Newton'un evrensel kütle çekim kanununun ifadesi aşağıdaki gibidir:

Kütleleri m_1 ve m_2 , aralarındaki uzaklık r olan iki parçacığın birbirini çekme kuvveti, bu parçacıkları birleştiren doğru boyunca etkir ve büyüklüğü:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (1.1)$$

ifadesi ile verilmiştir.

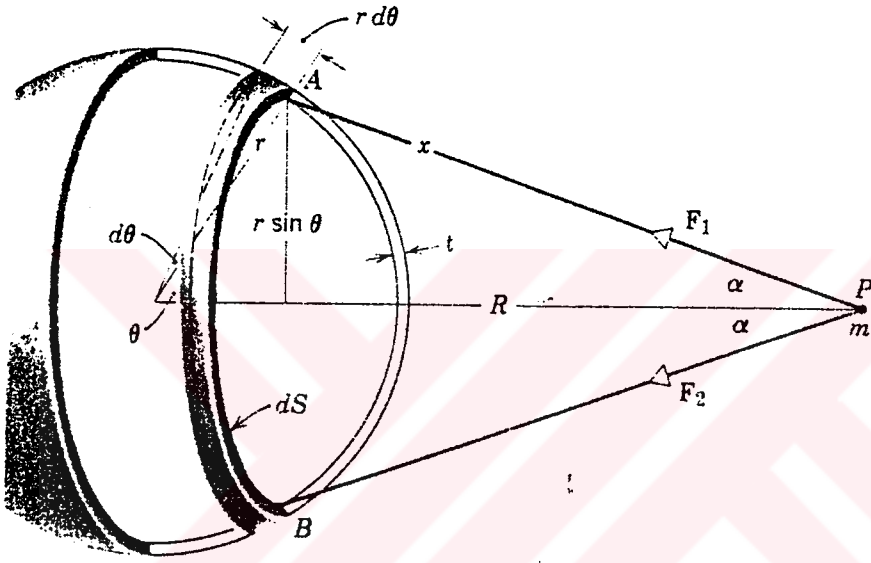
1.2 KÜRESEL SİMETRİK BİR KÜTLENİN KÜTLE ÇEKİM ETKİSİ

Daha önce de belirttiğimiz gibi, bir küre, dışında bulunan parçacıkları, tüm kütlesi merkezinde toplanmış gibi çeker. Şimdi bunun isbatı yapılacaktır.

Şekil 1.2'de gösterildiği gibi kalınlığı t olan bir küresel kabuk düşünelim. Bu kalınlık kürenin yarıçapına (r) oranla çok küçüktür. P noktasındaki kütlesi m olan parçacığa kabuğun uyguladığı kütle-çekim kuvvetini gözönüne alalım. Kabuğu oluşturan her bir parçacık P noktasına bir kuvvet etki ettirir. Bu kuvvet denklem (1)' kabuk üzerindeki küçük parçanın kütlesi ile doğru orantılı fakat bu parça ile P noktası arasındaki uzaklığın karesi ile ters orantılıdır. P noktasına

etkiyen bileşke kuvvet, küresel kabukların teker teker P noktasında oluşturdukları kuvvetlerin toplamına eşittir.

Küresel kabuk üzerinde ve çapın iki ucunda m kütesinden eşit uzaklıkta bulunan A ve B noktalarını düşünelim. Bu noktalarda eşit kütleli küresel kabuk parçalarını gözönüne alalım. A noktasındaki küçük küresel kabuk m kütesini F_1 kuvveti ile, aynı şekilde B noktasındaki kabuk m kütesini F_2 kuvveti ile çeker. Bu iki kuvvetin m üzerindeki bileşkesi $F_1 + F_2$ dir. Ancak bu kuvvetlerin



Şekil 1.2 Bir küresel kabuğun ds parçasının, kütlesi m olan bir parçacık üzerinde kütle çekim etkisi

düşey bileşenleri birbirlerini yokederler. Yatay bileşenleri $F_1.Cos(a)$ ve $F_2.Cos(a)$ ise birbirlerine eşittir. Küresel kabuğun yukarıdaki gibi küçük parçacıklara bölünmesi halinde tüm düşey bileşenler birbirlerini yokederler. Üst yarı küredeki küçük bir kütle eleman, m üzerine doğru bileşeni olan bir etki doğurur. Üst yarıküreye göre simetrik olan kabuğun alt yarıküresi, küçük kütle elemanı m üzerine aşağıya doğru yönelmiş bir kuvvet etki ettirir. P de etkin olan aşağı ve yukarı doğru olan kuvvetler birbirlerini yok ederler. Böylece m üzerindeki bileşke kuvvet, bu kuvvetlerin yatay bileşenleri göz önüne alınarak hesap edilir.

Şekilde olduğu gibi kabuk üzerinde halka şeklinde bir ds elemanı alalım. Halkanın çevresi $2\pi (r \sin \theta)$, genişliği $r d\theta$ ve kalınlığı t dir. Hacmi,

$$dV = 2\pi r^2 t \sin \theta d\theta \quad (1.2)$$

dir. Yoğunluğu ρ ise halkanın kütlesi,

$$dM = \rho dV = 2\pi t \rho r^2 \sin \theta d\theta \quad (1.3)$$

ile ifade edilir. dM kütlesinin P noktasındaki m kütlesine yatay bir kuvvet etki ettirir. Bu kuvvetin değeri,

$$\begin{aligned} dF &= G \frac{m dM}{x^2} \cos \alpha \\ &= 2\pi G t \rho m r \frac{\sin \theta d\theta}{x} \cos \alpha \end{aligned} \quad (1.4)$$

olarak elde edilir. Burada x, α ve θ birbirlerine bağlıdır. Şekilden,

$$\cos \alpha = \frac{R - r \cos \theta}{2R} \quad (1.5)$$

olduğu kolayca görülür. Kosinüs teoremine göre;

$$x^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta \quad (1.6)$$

yazılabilir. Buradan:

$$r \cos \theta = \frac{R^2 + r^2 - x^2}{2R} \quad (1.7)$$

elde edilir. Denklem (6)'daki ifadenin toplam diferansiyeli alındığında

$$2 x dx = 2 R r \sin\theta d\theta \quad (1.8)$$

veya

$$\sin\theta d\theta = \frac{x}{Rr} dx \quad (1.9)$$

bulunur. Önce deklemler (1.5) ve (1.9)'un denklem (1.7)'de yerine konması ve sonra gerekli cebir hesaplamalarından sonra,

$$dF = \frac{\pi G t \rho m r}{R^2} \left(\frac{R^2 - r^2}{x^2} + 1 \right) dx \quad (1.10)$$

bulunur. Bu, ds halkası tarafından m kütleli parçacığa etkiyen kuvvettir.

Şimdi kabuğu oluşturan tüm halkaları düşünebiliriz. Bu durum kabuk üzerinden x değişkenine göre alınan bir integrasyon işlemidir. x değişkeni, $R-r$ minimum değeri ile $R+r$ maksimum değeri arasındadır.

Bu değerler arasında

$$\int_{R-r}^{R+r} \left(\frac{R^2 - r^2}{x^2} + 1 \right) dx = 4r \quad (1.11)$$

ise bileşke kuvvet ;

$$F = \int_{R-r}^{R+r} dF = G \frac{(4 \pi r^2 \rho t) m}{R^2} = G \frac{Mm}{R^2} \quad (1.12)$$

olarak elde edilir. Burada kabuğun toplam kütlesi

$$M = (4\pi r^2 t \rho)$$

dır. Bu sonuç aralarında R uzaklığı olan M ve m kütleleri arasında oluşan kuvvet ile aynıdır. Böylece düzgün bir küresel kabuk, dışındaki bir nokta kütleyi, sanki tüm küresel kabuğun kütlesi kütle merkezinde toplanmış başka bir noktasal kütle gibi çeker.

Bir dolu (katı) küre, aynı merkezli kabuklardan oluşmuş düşünülebilir. Farklı kabuklar farklı yoğunluğa sahip olsalar dahi, her bir küresel kabuk düzgün bir yoğunluğa sahiptir. Bu özellik dolu küreler için de geçerlidir. Yeri, ayı ve güneşi dolu küreler olarak düşünebiliriz. Bu tür kürelere, dışındaki cisimlere göre noktasal kütle çekimli parçacıklar olarak bakabiliriz. Dikkat edilmesi gerekir ki, bu durum, yalnız yoğunluğu sabit olan veya yoğunluğu yarıçapın bir fonksiyonu olan küreler için geçerlidir.

Bu problemin önemli sonuçlarından biri de, küresel kabuk içinde bulunan kütesel bir parçacığa etkiyen kuvvetin olmamasıdır. Bu durumda R , r 'den küçüktür. İntegrasyonumuzun limitleri $r - R$ den $r + R$ ye kadar olmasına rağmen:

$$\int_{R-r}^{R+r} \left(\frac{R^2 + r^2}{x^2} \right) dx = 0$$

dır. Bu sonuç kuvvetin sıfır olduğunu gösterir. Yani $F = 0$ dır.

Bu sonuç aynı zamanda ters-kare kuvvet kanununun özel bir niteliğidir.

Şimdi yerin yoğunluğunun düzgün olduğunu varsayalım. Bu durumda yerin, bir parçacık üzerindeki kütle çekim kuvveti yüzeyinde maksimum olur. Bildiğimiz gibi kütle çekim kuvveti yeryüzeyinden uzaklaştıkça azalır. Bu kuvvet yerin içine doğru ise; iki farklı etkisi vardır: (1) Yerin merkezine doğru yaklaştıkça kuvvetin şiddeti artar. (2) Yer yüzeyinin dış kabukları, parçacıklar

üzerine herhangi bir kuvvet etki ettirmez. Bu yüzden kütle çekim kuvveti azalır. Eğer yerin yoğunluğu sabit olsaydı, (2)'nci durum geçerli olurdu. Yerinde bulunuyormuşuz gibi kütle çekim kuvveti azalır.

Gerçekte yerin yoğunluğu her yerde sabit değildir. Dış kabuk ($\rho \cong 3 \text{ gr/cm}^3$), iç kabuktan ($\rho \cong 13 \text{ gr/cm}^3$) daha az bir yoğunluğa sahiptir. Bu yüzden de (2)'nci durum fazla geçerli değildir.



BÖLÜM 2

2.1 KÜBİK BİR CİSMİN CİVARINDAKİ BİR m KÜTLESİ ÜZERİNE UYGULADIĞI KUVVETİN BİR DOĞRULTU BOYUNCA DEĞİŞİMİNİN SONLU ELEMANLAR KULLANILARAK HESAPLANMASI

2.1.1 Kütle çekim kuvvetinin hesaplanmasında kullanılan yöntemler

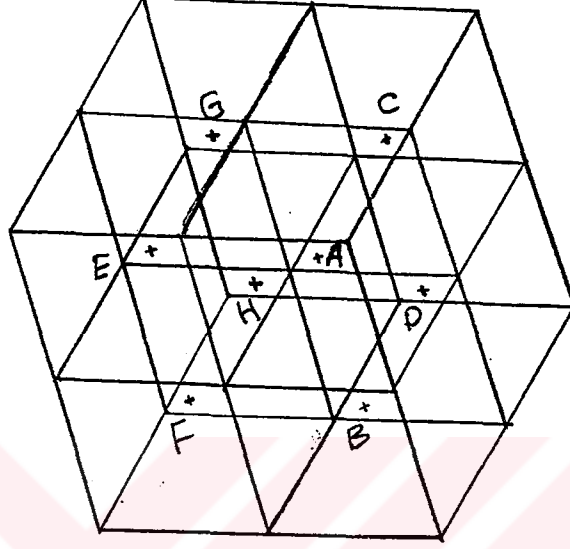
Kütle çekim kuvvetinin hesaplanması gerektiğinde, en çok kullanılan metot, çok küçük diferansiyel bir eleman alarak, işe başlamaktır. Bunun için önce diferansiyel elementin şeklinin, hesap yapılmak istenen kütlenin geometrisine göre seçilmesi işleri kolaylaştırır. Çünkü herşeyden önce seçilen diferansiyel elementin kütle merkezinin tanımlanması gerekmektedir. Kullanılacak eksen takımının da hesap kolaylığı sağlamada rolü vardır. Cismin şekline göre, kartezyen, silindirik veya küresel koordinat sistemleri kullanılabilir. Cismin simetri düzlemleri olması kütle merkezinin bulunmasında önemlidir. Kütle merkezi simetri eksenlerinin kesiştiği yerdedir.

Kütle çekim kuvvetinin hesaplanmasında vektörler de kullanılmaktadır, fakat sonlu elemanlar yönteminin kullanıldığı konusunda hiçbir kaynakta yer verilmemiştir. Bu çalışmamızda sonlu elemanlar yöntemi kullanılacaktır.

2.1.2 Kübik bir cismin civarındaki bir m kütlesi üzerine uyguladığı kuvvetin bir doğrultu boyunca değişiminin sonlu elemanlar kullanılarak hesaplanması

Bir kübün kütle merkezini koordinat merkezi koordinat merkezi olarak alalım. Yapılacak işlerden ilk akla geleni, kübümüzü en az sayıda küp elemana bölmektir. Açıkça görüleceği gibi, bu sayı bir olabilir. Bu durumda yapılan

hesaplarda elde edilen sonuçla, aynı büyüklükteki noktasal kütle için bulunanlar arasında bir fark olmayacaktır. Bu durumda kübümüzün bir kenarına bir yerine iki küp elman koyarsak, bütün kübün içine sekiz küp eleman yerleşeceğini görebiliriz (bak: Şekil 2.1).



Şekil 2.1 8 Küp elemanın bir kübün içine yerleştirilişi

Küp elemanlarımızın kütle merkezlerini harflerle işaretliyerek koordinatlarını yazalım:

A(1/2,1/2,1/2) B(1/2,1/2,-1/2) C(1/2,-1/2,1/2) D(1/2,-1/2,-1/2)

E(-1/2,1/2,1/2) F(-1/2,1/2,-1/2) G(-1/2,-1/2,1/2) H(-1/2,-1/2,-1/2)

Bu koordinatları bir tablo halinde gösterelim:

Küp Eleman	Koordinatlar (i,j,k)
1	(1/2,1/2,1/2)
2	(1/2,1/2,-1/2)
3	(1/2,-1/2,1/2)
4	(1/2,-1/2,-1/2)
5	(-1/2,1/2,1/2)
6	(-1/2,1/2,-1/2)
7	(-1/2,-1/2,1/2)
8	(-1/2,-1/2,-1/2)

Tablo 2.1 Bir birim boyutlu alt küplerin kütle merkezlerinin koordinatları.

Tablo (2.1) de görüldüğü gibi: Küp elemanlarımızın kütle merkezlerinin koordinatlarının her elemanında 1/2 çarpanı vardır. Eğer alt küp elemanların boyutunu 2 olarak alırsak; büyük kübümüzün boyutu 4 olmakta fakat bizi bu koordinatları kullanırken her defasında 2 ile çarpma zahmetinden kurtarmaktadır. Böylece hesaplamalarda zamandan kazanmış oluruz. Tablo (2.2) ile bu yeni durumu görebiliriz.

Küp Eleman No	Koordinatlar (i,j,k)
1	(1,1,1)
2	(1,1,-1)
3	(1,-1,1)
4	(1,-1,-1)
5	(-1,1,1)
6	(-1,1,-1)
7	(-1,-1,1)
8	(-1,-1,-1)

Tablo 2.2 Alt küp elemanların boyutunu iki birim aldıktan sonra, elemanların kütle merkezlerinin koordinatlarının son durumu.

Küp elemanların kütlesini m ve x eksenini üzerindeki herhangi bir noktasal kütlenin kütlesini de m ile gösterirsek Şekil 2.2'den anlaşılacağı üzere 1 nolu elemana etki eden kütle çekim kuvvetinin x eksenini doğrultusundaki bileşeni, f_s , şu şekilde hesaplanacaktır:

$$f_s = G \frac{m.m}{r^2} \cdot \cos \theta \quad (2.1)$$

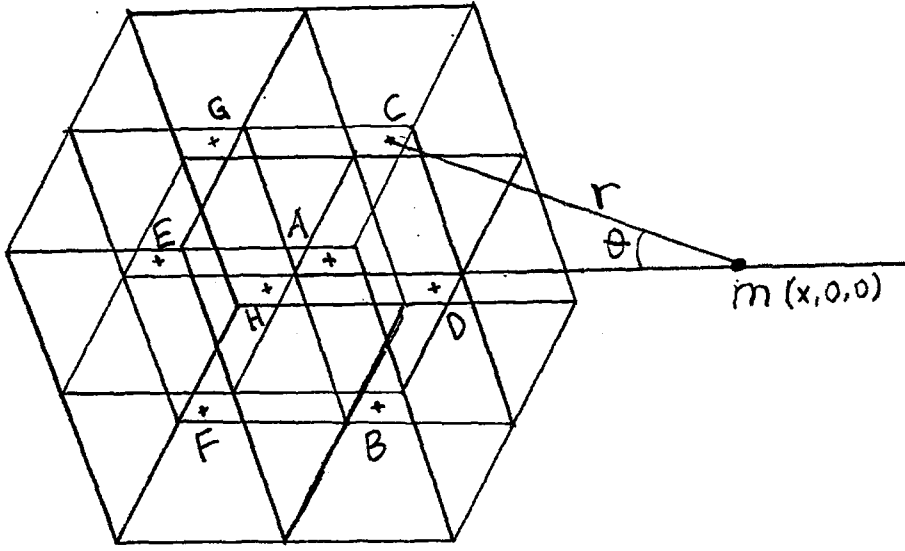
olarak yazılabilecektir. Burada $r = \sqrt{(x-i)^2 + (y-j)^2 + (z-k)^2}$ ve $\cos \theta$ da

$\cos \theta = \frac{x}{r}$ olarak bulunabileceği için her eleman için kuvvet ifadeleri

yazılabilir. Birinci eleman için:

$$f_1 = G \frac{m.m.(x-1)}{((x-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2)^{3/2}} \quad (2.2)$$

İkinci eleman için:



Şekil 2.2 Küp elemanların ve m kütesinin yerleri

$$f_2 = G \frac{m.m.(x-1)}{((x-1)^2 + (-1)^2 + (1)^2)^{3/2}} \quad (2.3)$$

Üçüncü eleman için:

$$f_3 = G \frac{m.m.(x-1)}{((x-1)^2 + (1)^2 + (-1)^2)^{3/2}} \quad (2.4)$$

Dördüncü eleman için;

$$f_4 = G \frac{m.m.(x-1)}{((x-1)^2 + (1)^2 + (1)^2)^{3/2}} \quad (2.5)$$

Beşinci eleman için:

$$f_5 = G \frac{m.m.(x+1)}{((x+1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2)^{3/2}} \quad (2.6)$$

Altıncı eleman için:

$$f_6 = G \frac{m.m.(x+1)}{((x+1)^2 + (-1)^2 + (1)^2)^{3/2}} \quad (2.7)$$

Yedinci elman için:

$$f_7 = G \frac{m.m.(x+1)}{((x+1)^2 + (1)^2 + (-1)^2)^{3/2}} \quad (2.8)$$

Sekizinci elman için:

$$f_8 = G \frac{m.m.(x+1)}{((x+1)^2 + (1)^2 + (1)^2)^{3/2}} \quad (2.9)$$

Bütün elemanlar için kuvvet ifadesi yazıldığına göre toplam kuvveti bunların toplamı olarak yazabiliriz:

$$F_{top} = \sum_{s=1}^8 f_s \quad (2.10)$$

şeklinde gösterilebilecektir. Bu toplamı basit paskal programı yazarak bilgisayarla bulabiliriz. X'in çeşitli değerleri için yazılan programlar ve elde edilen datalardan birer örnek verilmiştir.

Yukarıda görülen R değeri kübün boyutlarından bağımsız değerlendirme yapabilmek amacıyla, kübün hacmine eşdeğer küre yarıçapı cinsindendir. R'nin yaklaşık 2,5 civarında bir değer için kübümüzü % 99'luk bir yaklaşımla küre veya noktasal kütle kabul edebileceğiz.

Basit bir akıl yürütme ile büyük kübümüzün bir kenarını: A, küp elemanımızın bir kenarını: 2 a ile ifade edersek, herhangi bir küp içine yerleşecek küp eleman sayısını şu şekilde bulabiliriz:

$$s(Eleman) = \left(\frac{A}{2a} \right)^3 \quad (2.11)$$

olacağı kolayca bulunabilir. Bir adım daha atıp A= 6 alalım: Bu durumda denklem (13) kullanılarak: s(Eleman)= 27 bulunur. Bulduğumuz küp elemanların koordinatları Tablo (3) ile verilmiştir. Bu durumda da her küp eleman tek tek dikkate alınıp *m* kütlesi ile aralarındaki kütle çekim kuvvetinin, x eksenine doğrultusundaki bileşeni bulunmalıdır. Bulduğumuz tüm sonuçlar üst üste

toplandığında bizim kübümüzle m kütlesi arasındaki kütle çekim kuvvetini bulmuş olacağız.

Eleman No:	Koord. (i,j,k)	Eleman No:	Koord. (i,j,k)	Eleman No:	Koord.
1	2,2,2	10	0,2,2	19	2,2,2
2	2,2,0	11	0,2,0	20	2,2,0
3	2,2,-2	12	0,2,-2	21	2,2,-2
4	2,0,2	13	,0,2	22	2,0,2
5	2,0,0	14	0,0,0	23	2,0,0
6	2,0,-2	15	0,0,-2	24	2,0,-2
7	2,-2,2	16	0,-2,2	25	2,-2,2
8	2,-2,0	17	0,-2,0	26	2,-2,0
9	2,-2,-2	18	0,-2,-2	27	2,-2,-2

Tablo 2.3 27 Küp elemanın kütle merkezlerinin koordinatları

Eğer kübümüzün boyutunu $A = 8$ alırsak $s(El.) = 64$ bulunur. Devamla $A=10$ alındığında $s(El.) = 125$ olacaktır. Aşağıdaki Tablo (4) ile $A = 20$ 'ye kadar olan küpler için eleman sayısı verilmiştir.

Kübün Kenarı=A	Küp Elmn. Sayısı = s
6	216
7	343
8	512
9	729
10	1.000

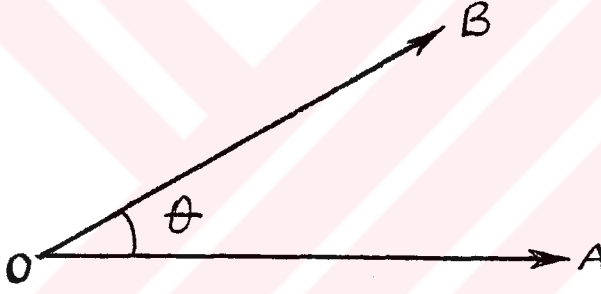
Tablo 2.4 Kübün kenaruzunluğuna bağlı olarak , Küp eleman sayısının değişimi.

Yapılan hesaplamalar sonucu elde edilen datalar ve çizilen grafikler EK I de verilmiştir.

BÖLÜM 3

VEKTÖRLER VE SONLU ELEMANLAR KULLANARAK KÜP CİVARINDAKİ KÜTLE ÇEKİM KUVVETİNİN HESABI

3.1 VEKTÖRLERİN SKALER ÇARPIMI



Şekil. 3.1 İki vektör ve aralarındaki açı

Şekil 3.1’de görülen vektörleri yazalım: Burada noktaların üç boyutlu uzaydaki koordinatları (x,y,z) şeklindedir. AO arasındaki vektör şöyle yazılabilir.

$$\vec{A} = (A_x - O_x)\vec{i} + (A_y - O_y)\vec{j} + (A_z - O_z)\vec{k} \quad (3.1)$$

ve benzer şekilde,

$$\vec{B} = (B_x - O_x)\vec{i} + (B_y - O_y)\vec{j} + (B_z - O_z)\vec{k} \quad (3.2)$$

Vektörlerini yazabiliriz. Kaynaklara bakarak böyle iki vektörün skaler çarpımının da şu şekilde olduğunu buluruz.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta \quad (3.3)$$

şeklindedir. Denklem (3.3)'den $\cos \theta$ çekilirse:

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} \quad (3.4)$$

olduğu kolayca görülebilir. Burada vektörlerin mutlak değerlerinin nasıl bulunduğunu hatırlıyalım:

$$|\vec{A}| = \sqrt{(A_x - O_x)^2 + (A_y - O_y)^2 + (A_z - O_z)^2} \quad (3.5)$$

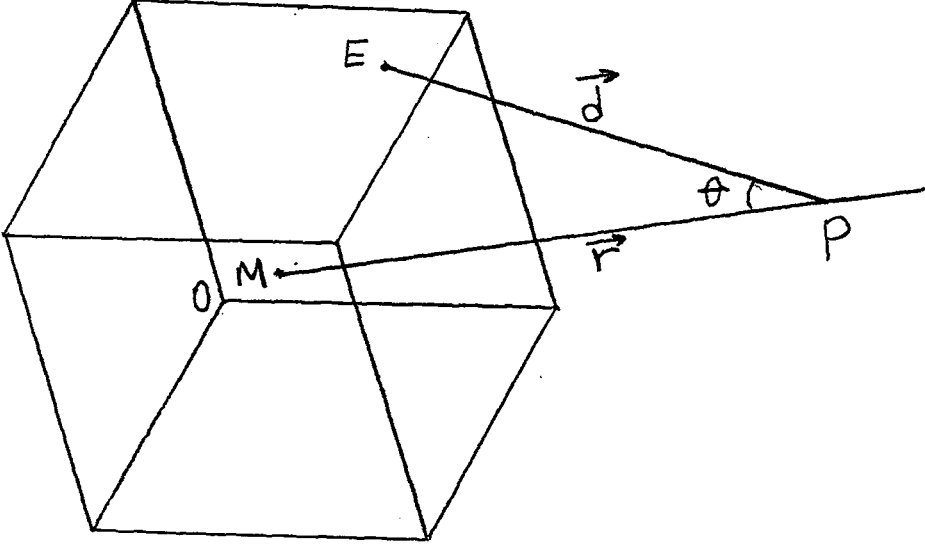
ve benzer şekilde:

$$|\vec{B}| = \sqrt{(B_x - O_x)^2 + (B_y - O_y)^2 + (B_z - O_z)^2} \quad (3.6)$$

Denklem (3.1), (3.2) ile Denklem (3.5),(3.6) bulunarak Denklem (3.4)'de yerine konursa $\cos \theta$ kolayca hesaplanabilir. Bundan sonra yapılacak iş, modelimizi vektörler kullanarak kurabilmek olacaktır.

3.2 VEKTÖRLER VE SONLU ELEMANLAR KULLANARAK KÜP CİVARINDAKİ KÜTLE ÇEKİM KUVVETİNİN HESABI

Şekil (3.2)'de görüldüğü gibi büyük kübün kütle merkezinin koordinatlarını $M(e, f, g)$ ile ve yine kübün herhangi bir noktasındaki küp elemanın kütle merkezinin koordinatlarını da $E(i, j, k)$ ile gösterelim. Kübümüzün kütle



Şekil 3.2 Bir kübün dışındaki bir nokta ile küp içindeki rasgele bir eleman arasındaki vektörlerin durumu

merkezinden geçen rasgele bir doğrultudaki doğru üzerinde de rasgele seçilen bir noktanın koordinatları da $P(x,y,z)$ olsun. Bundan sonra yapılacak iş: $M(e,f,g)$ noktası ile $P(x,y,z)$ noktası arasında bir $\vec{r}$ vektörü ile $E(i,j,k)$ noktası ile $P(x,y,z)$ noktası arasında bir $\vec{d}$ vektörü alalım. Şimdi bu iki vektörü belirleyelim: Burada önce $\vec{d}$ vektörünü yazalım,

$$\vec{d} = (x-i)\vec{i} + (y-j)\vec{j} + (z-k)\vec{k} \quad (3.7)$$

olacaktır. Şimdi de $\vec{r}$ vektörünü belirleyelim,

$$\vec{r} = (x-e)\vec{i} + (y-f)\vec{j} + (z-g)\vec{k} \quad (3.8)$$

olduğu kolayca görülecektir.

Bundan sonra yapılacak işlem ise her m elemanı için kuvvet ifadesini yazarak toplamak olacaktır.

İki kütle arasındaki çekim kuvvetinin:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{d^2} \cos \theta \quad (3.9)$$

olduğu hatırlatılarak buradaki θ açısını hesaplayalım:

Vektörlerle ilgili işlemleri kısaca hatırlarsak, iki vektörün skaler çarpımının, bu iki vektörün mutlak değerlerinin çarpımının bir de aralarındaki açının kosinüsü ile çarpılarak elde edildiğini hatırlayabiliriz. Söylediklerimizin formülle ifadesini yazalım;

$$\vec{r} * \vec{d} = |\vec{r}| * |\vec{d}| * \cos \theta \quad (3.10)$$

Yukarıda vektörlerimizi tarif etmiştik. Şimdi vektörlerin mutlak değerlerini yazalım:

$$d = |\vec{d}| = \sqrt{(x-i)^2 + (y-j)^2 + (z-k)^2} \quad (3.11)$$

Aynı şekilde $\vec{r}$ vektörü içinde mutlak değer ifadesini yazalım.

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{(x-e)^2 + (y-f)^2 + (z-g)^2} \quad (3.12)$$

olduğu kolayca görülecektir.

İki vektörün skaler çarpımı ise:

$$\vec{r} * \vec{d} = (x-i)(x-e) + (y-j)(y-f) + (z-k)(z-g) \quad (3.13)$$

Buraya kadar yazdığımız bilinenlerle $\cos \theta$ bilinmeyenini çekebiliriz ve neticede:

$$\cos \theta = \frac{\vec{r} * \vec{d}}{|\vec{r}| * |\vec{d}|} \quad (3.14)$$

Şimdi denklem (3.9)'da; denklem (11),denklem (12), denklem (13) ve denklem (14), yerine konularak n'inci elemana etki eden F_n bulunabilir.

$$F_n = G \frac{m_1.m_2}{d^2} * \frac{(x-i)(x-e) + (y-j)(y-f) + (z-k)(z-g)}{\sqrt{(x-e)^2 + (y-f)^2 + (z-g)^2} . \sqrt{(x-i)^2 + (y-j)^2 + (z-k)^2}}$$

Bir tek elman için yukarıdaki ifade elde edilmiştir. Bütün elemanlar için şöyle olacaktır.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n F_n \quad (3.15)$$

Yukarıdaki denklem (3.15)'i çözmek için bir paskal programı yazılmış ve Ek 1 ile verilmiştir.

BÖLÜM 4

SONUÇLAR VE YORUMLAR

Bu çalışmada bir kübü en az sekiz alt elemana bölerek başladım ve alt eleman sayısını 1.000.000'a kadar yükselttim. Sonuçlar ek 1 ile verilmiştir. Ek 1' deki veriler incelendiğinde görülmektedir ki, kübümüzü 1.000 alt elemana bölmekle 1.000.000 alt elemana bölmek arasındaki hata onbinde birbuçuk civarındadır. Yine Ek 1'den görüleceği gibi kübümüzü yaklaşık 2.000 alt elemana bölmek ile 1.000.000 alt elemana bölmek arasında bir fark gözükmemektedir.

Eşdeğer küre yarıçapının bir olduğu noktada kübümüzün aynı kütleli noktasal bir kütlenin uyguladığı kütle çekim kuvvetinin % 77.35'i kadar bir kuvvet uygularken, yaklaşık ikibuçuk eşdeğer yarıçap uzaklıklar civarında bu oran % 99' çıkmaktadır. Eşdeğer yarıçapın beş katları civarında da binde bir yaklaşıklıkla kübümüzü noktasal bir kütle gibi düşünebileceğimiz görülmektedir. Eşdeğer yarıçapın sekiz katı geçildiğinde hata payımız onbinde birlere geleceği görülmektedir.

Vektörleri kullanmakla, istenen herhangi bir doğrultuda kübün uyguladığı kütle çekim kuvvetinin bulunabileceği üçüncü bölümde görülmüştür. Bu konuda yapılan birkaç hesap sonucu elde edilen datalar ve çizilen grafikler de Ek 2'de verilmiştir.

Ek 1

Ek 1.1 Paskal Programında Kullanılan Notasyon

i,j,k = Küp elemanların kütle merkezlerinin koordinatları

d = m kütlesi ile herhangi bir eleman arasındaki uzaklığı gösteren (d) vektörünün mutlak değeri

r = (r) m kütlesi ile kübün kütle merkezi arasındaki uzaklığı gösteren (r) vektörünün mutlak değeri.

dr = (d) ve (r) vektörlerinin skaler çarpımı.

$$p = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot \pi}{3}}$$

is = Herhangi bir elemanın m kütlesi üzerine uyguladığı kuvvetin, $m=1$, eleman kütlesi =1 ve G evrensel çekim sabiti ile bölünmüş hali.

top = Elemanlar m kütlesi üzerine uyguladığı kuvvetin, m ve eleman kütlesi = 1 ve G evrensel çekim sabiti ile bölünmüş hallerinin toplamı.

cek = Kübün kütlesine denk noktasal yüke etkiyen kuvvetin G evrensel çekim sabiti ile bölünmüş hali.

ds = Kübün hacmine denk hacimdeki eşdeğer kürenin yarıçapı.

$cek1$ = Elemanların m kütlesi üzerine uyguladıkları kütle çekim kuvvetinin x doğrultusundaki değerinin, aynı elemanların kütlesine denk noktasal kütlelerin m kütlesine uyguladığı kütle çekim kuvvetine oranı.

Ek 1

Ek 1.2 Vektör Hesapları İçin Paskal Programında Kullanılan Notasyon

i,j,k = Küp elemanların kütle merkezlerinin koordinatları
 e,f,g = Kübün kütle merkezinin koordinatları
 d = m kütlesi ile herhangi bir eleman arasındaki uzaklığı gösteren (d) vektörünün mutlak değeri
 r = (r) m kütlesi ile kübün kütle merkezi arasındaki uzaklığı gösteren (r) vektörünün mutlak değeri.
 dr = (d) ve (r) vektörlerinin skaler çarpımı.

$$p = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot \pi}{3}}$$

is = Herhangi bir elemanın m kütlesi üzerine uyguladığı kuvvetin, $m=1$, eleman kütlesi =1 ve G evrensel çekim sabiti ile bölünmüş hali.

top = Elemanların m kütlesi üzerine uyguladıkları kuvvetin, m ve eleman kütlesi = 1 ve G evrensel çekim sabiti ile bölünmüş hallerinin toplamı.

cek = Kübün kütlelerine denk noktasal yüke etkiyen kuvvetin G evrensel çekim sabiti ile bölünmüş hali.

ds = Kübün hacmine denk hacimdeki eşdeğer kürenin yarıçapı.

$cek1$ = Elemanların m kütlesi üzerine uyguladıkları kütle çekim kuvvetinin x doğrultusundaki değerinin, aynı elemanların kütlelerine denk noktasal kütlelerin m kütlelerine uyguladığı kütle çekim kuvvetine oranı.

Ek 1.3 8 Eleman için Paskal Programı

```

program bir;
uses crt;
var
  i,j,k :integer;
  a,p,cek1,cek,top,is,kok,ds,r,x,u : double;
  dosya : text;
begin
  assign(dosya, 'sonuc2.dat'); rewrite(dosya);
  clrscr;
  x := 2.48140196;
  repeat {x dongusu}
  p:=1.611991954;
  top:=0;
  i:=-1;
  repeat
    j:=-1;
    repeat
      k:=-1;
      repeat
        kok:=sqrt((x-i)*(x-i)+j*j+k*k);
        is:=(x-i)/(kok*kok*kok);
        top:=top+is;
        k:=k+2;
      until (k>1);
      j:=j+2 ;
    until (j>1);
    i:=i+2;
  until (i>1);
  cek:=8/(x*x);
  ds:=4/p;
  r:=x/ds;
  cek1:=top/cek;
  writeln('gkup=',top:10:5);
  writeln('gkure=',cek:10:5);
  writeln('gkup/gkure=',cek1:10:5);
  writeln('u=',r:10:5);
  writeln(dosya, r:2:5, ' ', cek1:2:5);
  x := x +0.1*x;
until x > 35;
  readln;readln;
  close(dosya);
end.

```

Ek 1.4 125 Eleman İçin Paskal Programı

```

program bir;
uses crt;
var
  i,j,k :integer;
  a,p,cek1,cek,top,is,kok,ds,r,x,u : double;
  dosya : text;
begin
  assign(dosya, 'sonuc5.dat'); rewrite(dosya);
  clrscr;
  x := 6.203504909;
  repeat {x dongusu}
  p:=1.611991954;
  top:=0;
  i:=-4;
  repeat
    j:=-4;
    repeat
      k:=-4;
      repeat
        kok:=sqrt((x-i)*(x-i)+j*j+k*k);
        is:=(x-i)/(kok*kok*kok);
        top:=top+is;
        k:=k+2;
      until (k>4);
      j:=j+2 ;
    until (j>4);
    i:=i+2;
  until (i>4);
  cek:=125/(x*x);
  ds:=10/p;
  r:=x/ds;
  cek1:=top/cek;
  writeln('gkup=',top:10:5);
  writeln('gkure=',cek:10:5);
  writeln('gkup/gkure=',cek1:10:5);
  writeln('u=',r:10:5);
  writeln(dosya, r:2:5, ' ', cek1:2:5);
  x := x + 0.1*x;
until x > 82;
  readln;readln;
  close(dosya);
end.

```

Ek 1.5 1.000 Eleman için Paskal programı

```

program bir;
uses crt;
var
  i,j,k :integer;
  a,p,cek1,cek,top,is,kok,ds,r,x,u : double;
  dosya : text;
begin
  assign(dosya, 'son10.dat'); rewrite(dosya);
  clrscr;
  x := 12.40700982;
  repeat {x dongusu}
  p:=1.611991954;
  top:=0;
  i:=-9;
  repeat
    j:=-9;
    repeat
      k:=-9;
      repeat
        kok:=sqrt((x-i)*(x-i)+j*j+k*k);
        is:=(x-i)/(kok*kok*kok);
        top:=top+is;
        k:=k+2;
      until (k>9);
      j:=j+2 ;
    until (j>9);
    i:=i+2;
  until (i>9);
  cek:=1000/(x*x);
  ds:=20/p;
  r:=x/ds;
  cek1:=top/cek;
  writeln('gkup=',top:10:5);
  writeln('gkure=',cek:10:5);
  writeln('gkup/gkure=',cek1:10:5);
  writeln('u=',r:10:5);
  writeln(dosya, r:2:5, '      ', cek1:2:5);
  x := x + 0.1*x;
until x > 102;
  readln;readln;
  close(dosya);
end.

```

Ek 1.6 1.000.000 Eleman İçin Paskal Programı

```

program bir;
uses crt;
var
  i,j,k,u,w,v,m,n      :integer;
  a,p,cek1,cek,top,is,kok,ds,r,x,y,z : double;
  dosya : text;
begin
  assign(dosya, 'vek11.dat'); rewrite(dosya);
  clrscr;
  x:=124.;
  repeat {x dongusu}
  p:=1.611991954;
  top:=0;
  i:=-99;
  repeat
    j:=-99;
    repeat
      k:=-99;
      repeat
        kok:=sqrt((x-i)*(x-i)+j*j+k*k);
        is:=(x-i)/(kok*kok*kok);
        top:=top+is;
        k:=k+2;
      until (k>99);
      j:=j+2 ;
    until (j>99);
    i:=i+2;
  until (i>99);
  cek:=1000000/(x*x);
  ds:=200/p;
  r:=x/ds;
  cek1:=top/cek;
  writeln('gkup=',top:10:5);
  writeln('gkure=',cek:10:5);
  writeln('gkup/gkure=',cek1:10:5);
  writeln('u=',r:10:5);
  writeln(dosya, r:2:5, '      ', cek1:2:5);
  x := x + 0.1*x;
until x > 1100;
  readln;readln;
  close(dosya);
end.

```

Ek 1.7 64 Elemanı Vektörlerle Belli Sonlu Eleman Çözümü

```

program bir;
uses crt;

var
  i,j,k,e,f,g :integer;
  a,p,cek1,cek,dr,d,top,v,is,kok,ds,r,x,y,z,u : double;
  dosya : text;

begin
  assign(dosya, 's4.dat'); rewrite(dosya);

  clrscr;

  x := 8;
  y := 8;
  z := 8;
  e := 4;
  f := 4;
  g := 4;

  repeat {x dongusu}

    p:=1.611991954;
    top:=0;
    i:=1;
    repeat
      j:=1;
      repeat
        k:=1;
        repeat

          d:=sqrt((x-i)*(x-i)+(y-j)*(y-j)+(z-k)*(z-k));
          r:=sqrt((x-e)*(x-e)+(y-f)*(y-f)+(z-g)*(z-g));
          dr:=(x-i)*(x-e)+(y-j)*(y-f)+(z-k)*(z-g);
          is:=dr/(r*r*r*d);
          top:=top+is;

          k:=k+2;
        until (k>8);
      until (j>8);
    until (i>8);
  end;

```

```
j:=j+2 ;

until (j>8);
i:=i+2;
until (i>8);
cek:=64/(r*r);
ds:=8/p;
v:=r/ds;
cek1:=top/cek;
writeln('gkup=',top:10:5);
writeln('gkure=',cek:10:5);
writeln('gkup/gkure=',cek1:10:5);
writeln('u=',v:10:5);
writeln(dosya, v:2:5, '      ', cek1:2:5);

x := x +0.1*x;
y := y +0.1*y;
z := z +0.1*z;

until x > 80;
y :=80;
z :=80;
readln;readln;
close(dosya);
end.
```

FES	8
1.00000	0.73290
1.10000	0.79671
1.21000	0.84848
1.33100	0.88901
1.46410	0.91984
1.61051	0.94277
1.77156	0.95950
1.94872	0.97155
2.14359	0.98013
2.35795	0.98618
2.59374	0.99042
2.85312	0.99338
3.13843	0.99544
3.45227	0.99686
3.79750	0.99784
4.17725	0.99852
4.59497	0.99898
5.05447	0.99930
5.55992	0.99952
6.11591	0.99967
6.72750	0.99978
7.40025	0.99985
8.14027	0.99990

FES	27
1.00000	0.78926
1.10000	0.82603
1.21000	0.86276
1.33100	0.89524
1.46410	0.92201
1.61051	0.94304
1.77156	0.95903
1.94872	0.97087
2.14359	0.97947
2.35795	0.98564
2.59374	0.99000
2.85312	0.99307
3.13843	0.99521
3.45227	0.99670
3.79750	0.99773
4.17725	0.99844
4.59497	0.99893
5.05447	0.99927
5.55992	0.99950
6.11591	0.99966
6.72750	0.99976
7.40025	0.99984
8.14027	0.99989

FES	64
1.00000	0.76871
1.10000	0.81916
1.21000	0.86068
1.33100	0.89463
1.46410	0.92177
1.61051	0.94288
1.77156	0.95888
1.94872	0.97073
2.14359	0.97936
2.35795	0.98554
2.59374	0.98993
2.85312	0.99302
3.13843	0.99518
3.45227	0.99667
3.79750	0.99771
4.17725	0.99843
4.59497	0.99892
5.05447	0.99926
5.55992	0.99949
6.11591	0.99965
6.72750	0.99976
7.40025	0.99984
8.14027	0.99989

FES	125
1.00000	0.77548
1.10000	0.82078
1.21000	0.86102
1.33100	0.89468
1.46410	0.92176
1.61051	0.94285
1.77156	0.95884
1.94872	0.97069
2.14359	0.97932
2.35795	0.98552
2.59374	0.98991
2.85312	0.99300
3.13843	0.99516
3.45227	0.99667
3.79750	0.99771
4.17725	0.99842
4.59497	0.99892
5.05447	0.99926
5.55992	0.99949
6.11591	0.99965
6.72750	0.99976
7.40025	0.99984
8.14027	0.99989

FES = SONLU ELEMEN SAYISI

FES	216
1.00000	0.77276
1.10000	0.82037
1.21000	0.86097
1.33100	0.89468
1.46410	0.92175
1.61051	0.94283
1.77156	0.95882
1.94872	0.97068
2.14359	0.97931
2.35795	0.98551
2.59374	0.98991
2.85312	0.99300
3.13843	0.99516
3.45227	0.99666
3.79750	0.99770
4.17725	0.99842
4.59497	0.99892
5.05447	0.99926
5.55992	0.99949
6.11591	0.99965
6.72750	0.99976
7.40025	0.99984
8.14027	0.99989

FES	343
1.00000	0.77380
1.10000	0.82049
1.21000	0.86099
1.33100	0.89468
1.46410	0.92174
1.61051	0.94283
1.77156	0.95882
1.94872	0.97067
2.14359	0.97931
2.35795	0.98550
2.59374	0.98990
2.85312	0.99300
3.13843	0.99516
3.45227	0.99666
3.79750	0.99770
4.17725	0.99842
4.59497	0.99892
5.05447	0.99926
5.55992	0.99949
6.11591	0.99965
6.72750	0.99976
7.40025	0.99984
8.14027	0.99989

FES	512
1.00000	0.77337
1.10000	0.82046
1.21000	0.86099
1.33100	0.89468
1.46410	0.92174
1.61051	0.94282
1.77156	0.95881
1.94872	0.97067
2.14359	0.97930
2.35795	0.98550
2.59374	0.98990
2.85312	0.99300
3.13843	0.99516
3.45227	0.99666
3.79750	0.99770
4.17725	0.99842
4.59497	0.99892
5.05447	0.99926
5.55992	0.99949
6.11591	0.99965
6.72750	0.99976
7.40025	0.99984
8.14027	0.99989

FES	729
1.00000	0.77355
1.10000	0.82047
1.21000	0.86099
1.33100	0.89468
1.46410	0.92174
1.61051	0.94282
1.77156	0.95881
1.94872	0.97067
2.14359	0.97930
2.35795	0.98550
2.59374	0.98990
2.85312	0.99300
3.13843	0.99516
3.45227	0.99666
3.79750	0.99770
4.17725	0.99842
4.59497	0.99892
5.05447	0.99926
5.55992	0.99949
6.11591	0.99965
6.72750	0.99976
7.40025	0.99984
8.14027	0.99989

FES = SONLU ELEMEN SAYISI (ALT KÜP ELEMENLARIN SAYISI)

FES	1.000
1.00000	0.77347
1.10000	0.82047
1.21000	0.86099
1.33100	0.89468
1.46410	0.92174
1.61051	0.94282
1.77156	0.95881
1.94872	0.97067
2.14359	0.97930
2.35795	0.98550
2.59374	0.98990
2.85312	0.99300
3.13843	0.99516
3.45227	0.99666
3.79750	0.99770
4.17725	0.99842
4.59497	0.99892
5.05447	0.99926
5.55992	0.99949
6.11591	0.99965
6.72750	0.99976
7.40025	0.99984
8.14027	0.99989

FES	2.197
1.00000	0.77350
1.10000	0.82047
1.21000	0.86099
1.33100	0.89468
1.46410	0.92174
1.61051	0.94282
1.77156	0.95881
1.94872	0.97067
2.14359	0.97930
2.35795	0.98550
2.59374	0.98990
2.85312	0.99299
3.13843	0.99516
3.45227	0.99666
3.79750	0.99770
4.17725	0.99842
4.59497	0.99892
5.05447	0.99926
5.55992	0.99949
6.11591	0.99965
6.72750	0.99976
7.40025	0.99984
8.14027	0.99989

FES	4.096
1.00000	0.77350
1.10000	0.82047
1.21000	0.86099
1.33100	0.89468
1.46410	0.92174
1.61051	0.94282
1.77156	0.95881
1.94872	0.97067
2.14359	0.97930
2.35795	0.98550
2.59374	0.98990
2.85312	0.99299
3.13843	0.99516
3.45227	0.99666
3.79750	0.99770
4.17725	0.99842
4.59497	0.99892
5.05447	0.99926
5.55992	0.99949
6.11591	0.99965
6.72750	0.99976
7.40025	0.99984
8.14027	0.99989

FES	8.000
1.00000	0.77350
1.10000	0.82047
1.21000	0.86099
1.33100	0.89468
1.46410	0.92174
1.61051	0.94282
1.77156	0.95881
1.94872	0.97067
2.14359	0.97930
2.35795	0.98550
2.59374	0.98990
2.85312	0.99299
3.13843	0.99516
3.45227	0.99666
3.79750	0.99770
4.17725	0.99842
4.59497	0.99892
5.05447	0.99926
5.55992	0.99949
6.11591	0.99965
6.72750	0.99976
7.40025	0.99984
8.14027	0.99989

FES = SONLU ELEMAN SAYISI

FES	15.625
1.00000	0.77350
1.10000	0.82047
1.21000	0.86099
1.33100	0.89468
1.46410	0.92174
1.61051	0.94282
1.77156	0.95881
1.94872	0.97067
2.14359	0.97930
2.35795	0.98550
2.59374	0.98990
2.85312	0.99299
3.13843	0.99516
3.45227	0.99666
3.79750	0.99770
4.17725	0.99842
4.59497	0.99892
5.05447	0.99926
5.55992	0.99949
6.11591	0.99965
6.72750	0.99976
7.40025	0.99984
8.14027	0.99989

FES	42.875
1.00000	0.77350
1.10000	0.82047
1.21000	0.86099
1.33100	0.89468
1.46410	0.92174
1.61051	0.94282
1.77156	0.95881
1.94872	0.97067
2.14359	0.97930
2.35795	0.98550
2.59374	0.98990
2.85312	0.99299
3.13843	0.99516
3.45227	0.99666
3.79750	0.99770
4.17725	0.99842
4.59497	0.99892
5.05447	0.99926
5.55992	0.99949
6.11591	0.99965
6.72750	0.99976
7.40025	0.99984
8.14027	0.99989

FES	64.000
1.00000	0.77350
1.10000	0.82047
1.21000	0.86099
1.33100	0.89468
1.46410	0.92174
1.61051	0.94282
1.77156	0.95881
1.94872	0.97067
2.14359	0.97930
2.35795	0.98550
2.59374	0.98990
2.85312	0.99299
3.13843	0.99516
3.45227	0.99666
3.79750	0.99770
4.17725	0.99842
4.59497	0.99892
5.05447	0.99926
5.55992	0.99949
6.11591	0.99965
6.72750	0.99976
7.40025	0.99984
8.14027	0.99989

FES	91.125
1.00000	0.77350
1.10000	0.82047
1.21000	0.86099
1.33100	0.89468
1.46410	0.92174
1.61051	0.94282
1.77156	0.95881
1.94872	0.97067
2.14359	0.97930
2.35795	0.98550
2.59374	0.98990
2.85312	0.99299
3.13843	0.99516
3.45227	0.99666
3.79750	0.99770
4.17725	0.99842
4.59497	0.99892
5.05447	0.99926
5.55992	0.99949
6.11591	0.99965
6.72750	0.99976
7.40025	0.99984
8.14027	0.99989

FES = SONLU ELEMAN SAYISI: İLGİLİ GRAFİKLER İÇİN DATALAR

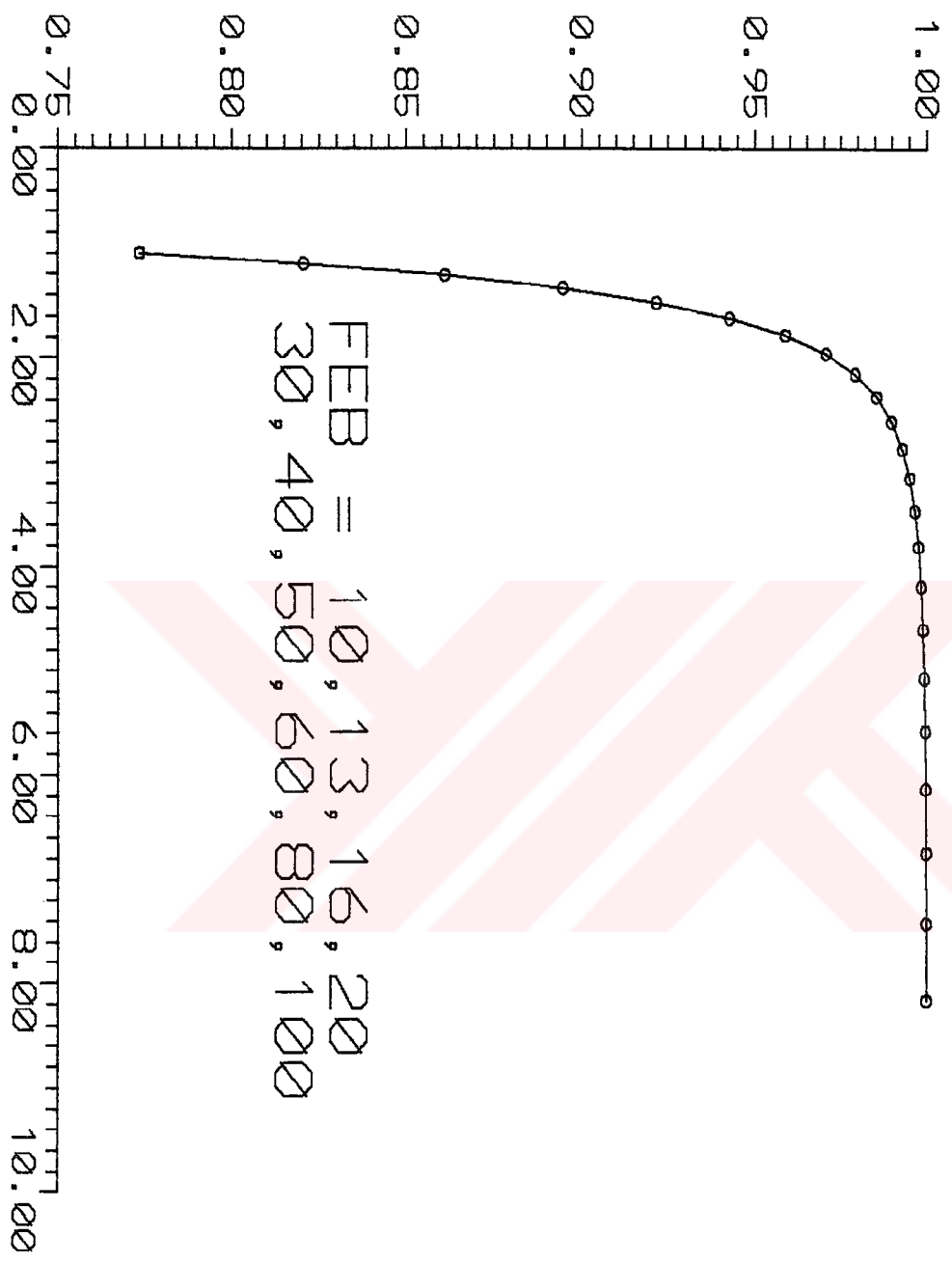
FES	125.000
1.00000	0.77350
1.10000	0.82047
1.21000	0.86099
1.33100	0.89468
1.46410	0.92174
1.61051	0.94282
1.77156	0.95881
1.94872	0.97067
2.14359	0.97930
2.35795	0.98550
2.59374	0.98990
2.85312	0.99299
3.13843	0.99516
3.45227	0.99666
3.79750	0.99770
4.17725	0.99842
4.59497	0.99892
5.05447	0.99926
5.55992	0.99949
6.11591	0.99965
6.72750	0.99976
7.40025	0.99984
8.14027	0.99989

FES	216.000
1.00000	0.77350
1.10000	0.82047
1.21000	0.86099
1.33100	0.89468
1.46410	0.92174
1.61051	0.94282
1.77156	0.95881
1.94872	0.97067
2.14359	0.97930
2.35795	0.98550
2.59374	0.98990
2.85312	0.99299
3.13843	0.99516
3.45227	0.99666
3.79750	0.99770
4.17725	0.99842
4.59497	0.99892
5.05447	0.99926
5.55992	0.99949
6.11591	0.99965
6.72750	0.99976
7.40025	0.99984
8.14027	0.99989

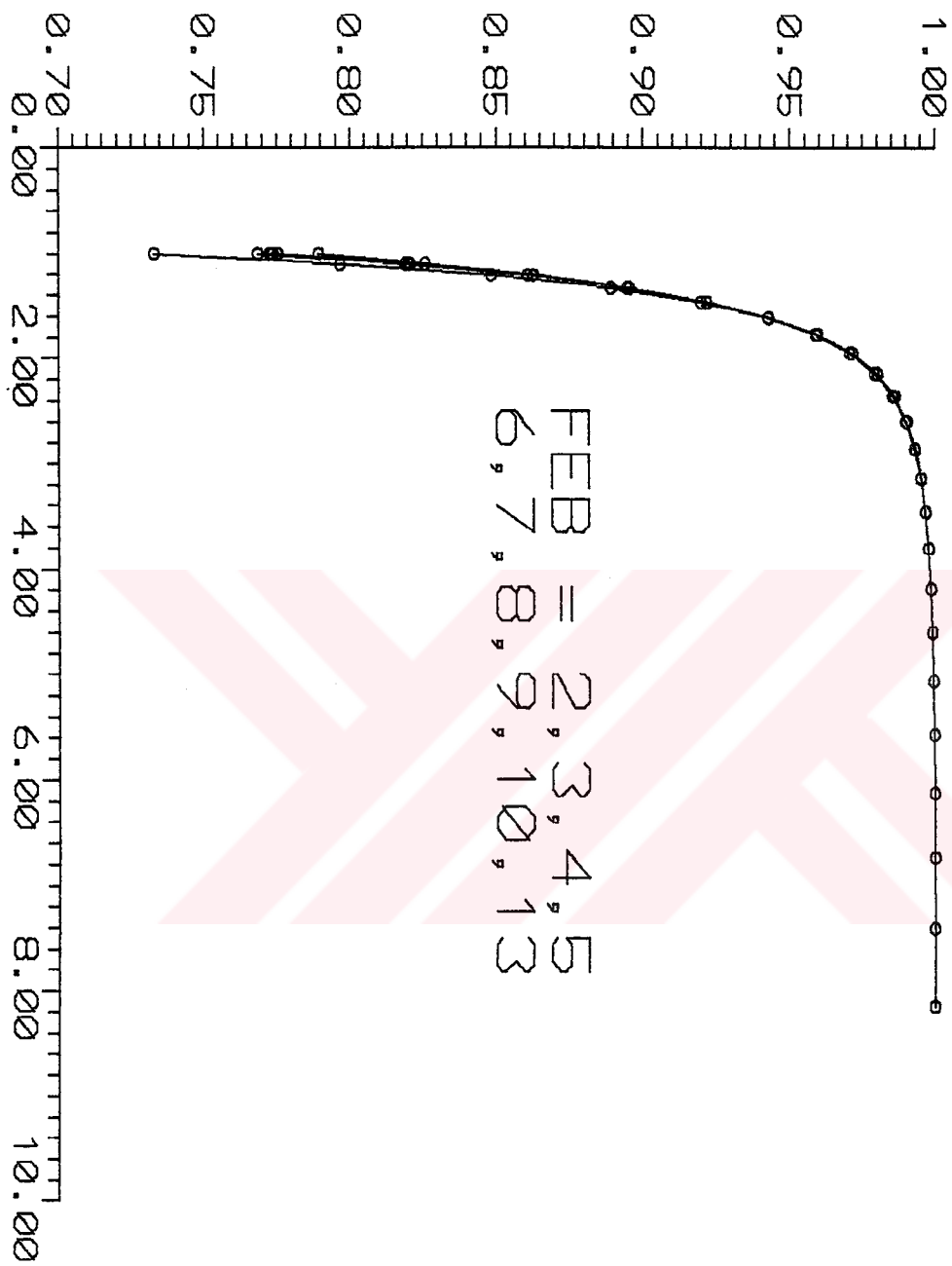
FES	512.000
1.00000	0.77350
1.10000	0.82047
1.21000	0.86099
1.33100	0.89468
1.46410	0.92174
1.61051	0.94282
1.77156	0.95881
1.94872	0.97067
2.14359	0.97930
2.35795	0.98550
2.59374	0.98990
2.85312	0.99299
3.13843	0.99516
3.45227	0.99666
3.79750	0.99770
4.17725	0.99842
4.59497	0.99892
5.05447	0.99926
5.55992	0.99949
6.11591	0.99965
6.72750	0.99976
7.40025	0.99984
8.14027	0.99989

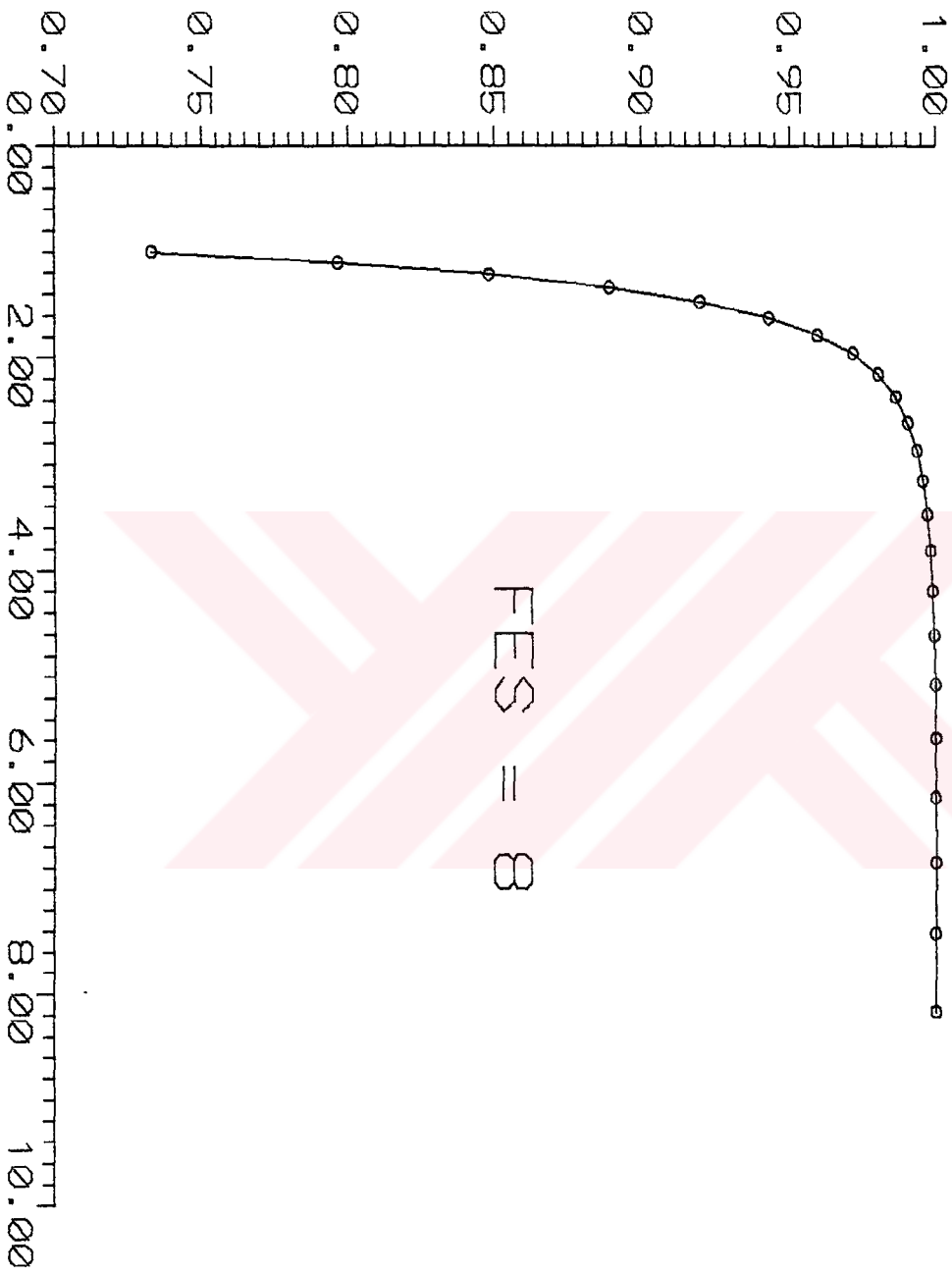
FES	1.000.000
1.00000	0.77350
1.10000	0.82047
1.21000	0.86099
1.33100	0.89468
1.46410	0.92174
1.61051	0.94282
1.77156	0.95881
1.94872	0.97067
2.14359	0.97930
2.35795	0.98550
2.59374	0.98990
2.85312	0.99299
3.13843	0.99516
3.45227	0.99666
3.79750	0.99770
4.17725	0.99842
4.59497	0.99892
5.05447	0.99926
5.55992	0.99949
6.11591	0.99965
6.72750	0.99976
7.40025	0.99984
8.14027	0.99989

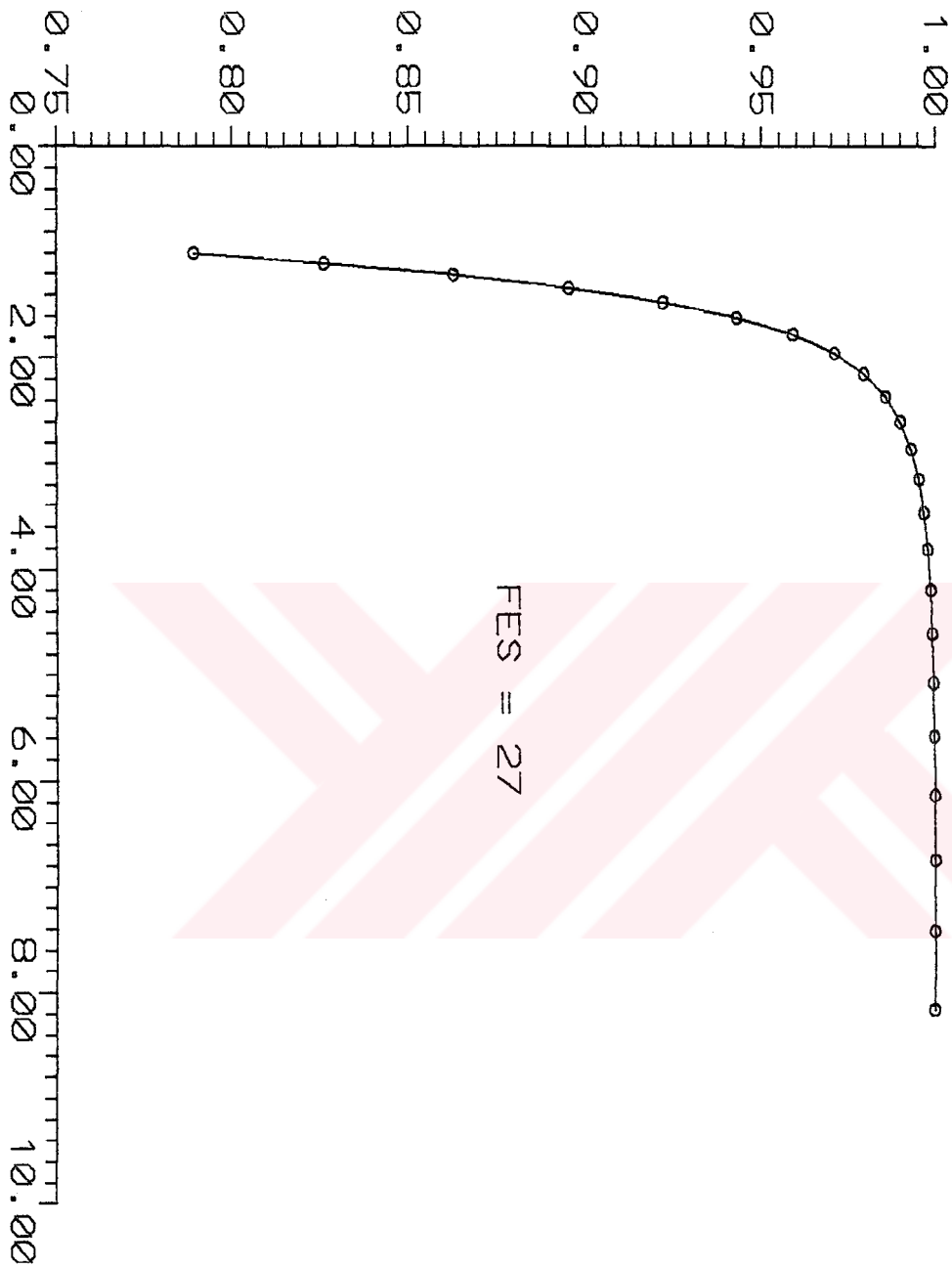
FES = SONLU ELEMEN SAYISI ; İLGİLİ GRAFİKLER İÇİN DATALAR



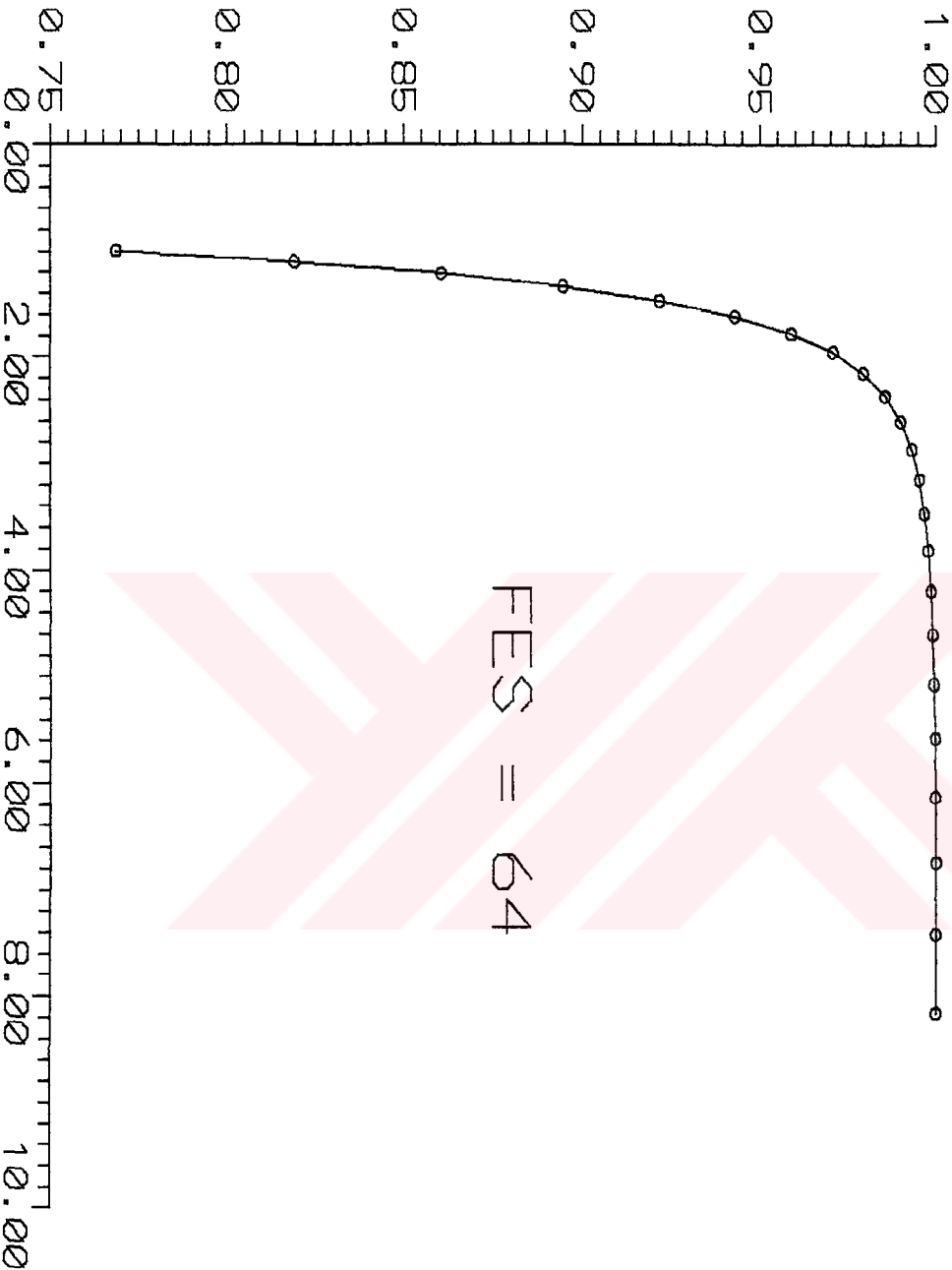
FEB = 10, 13, 16, 20
30, 40, 50, 60, 80, 100

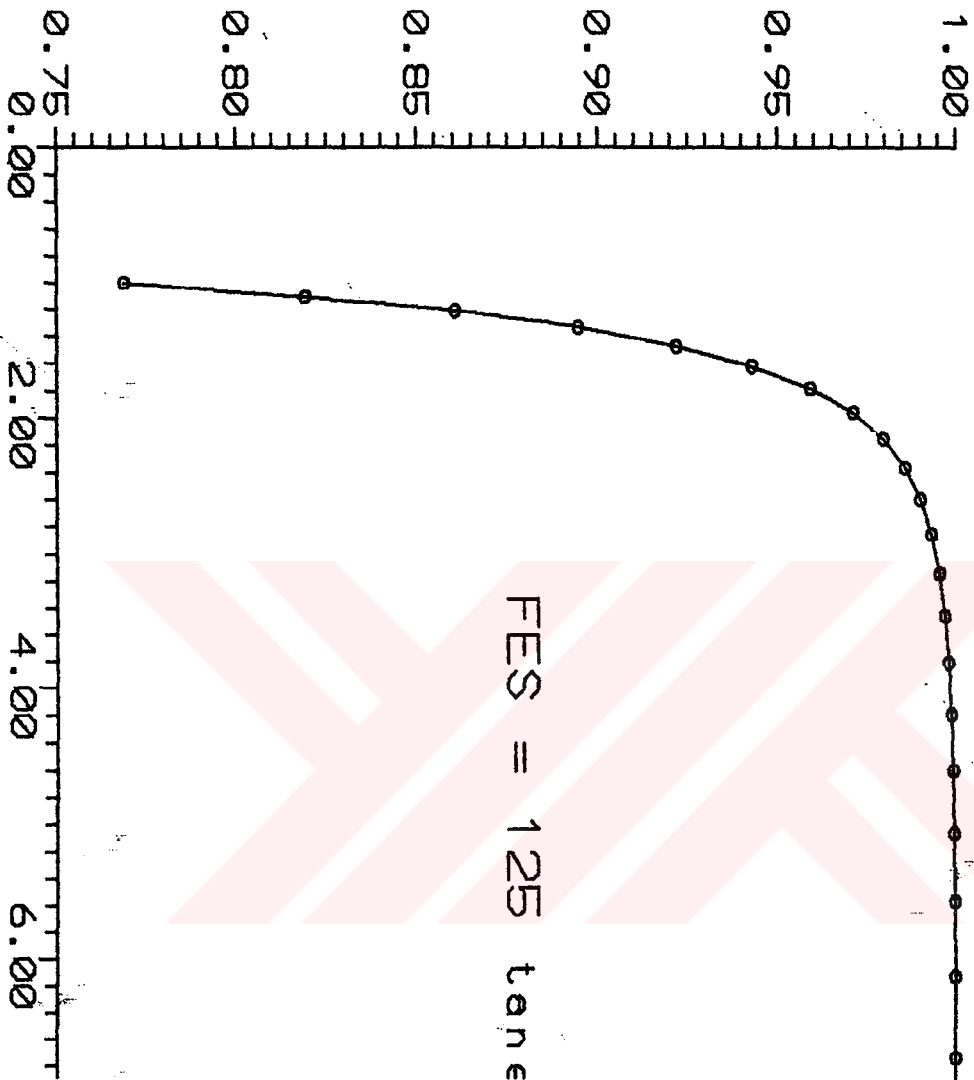


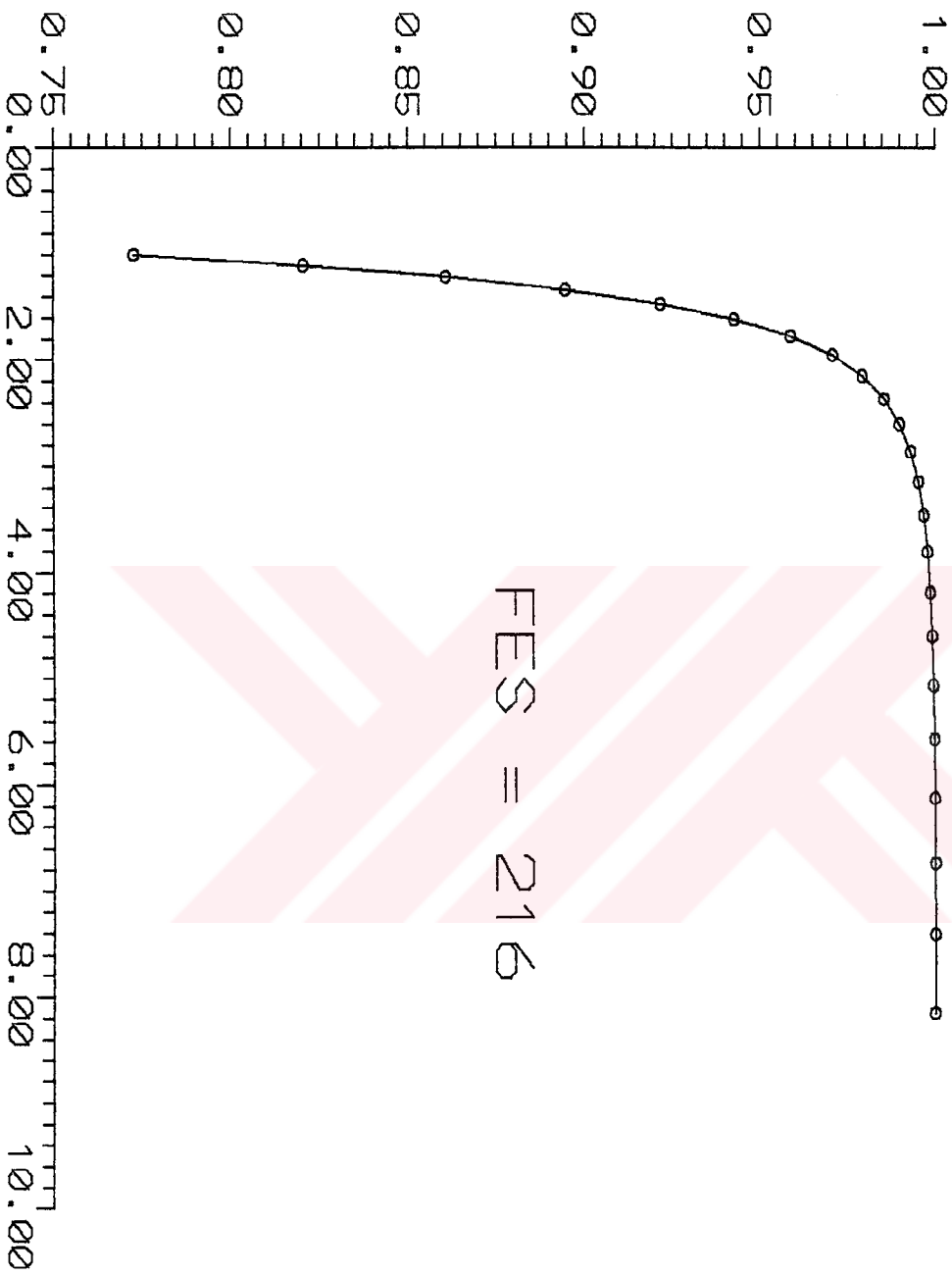




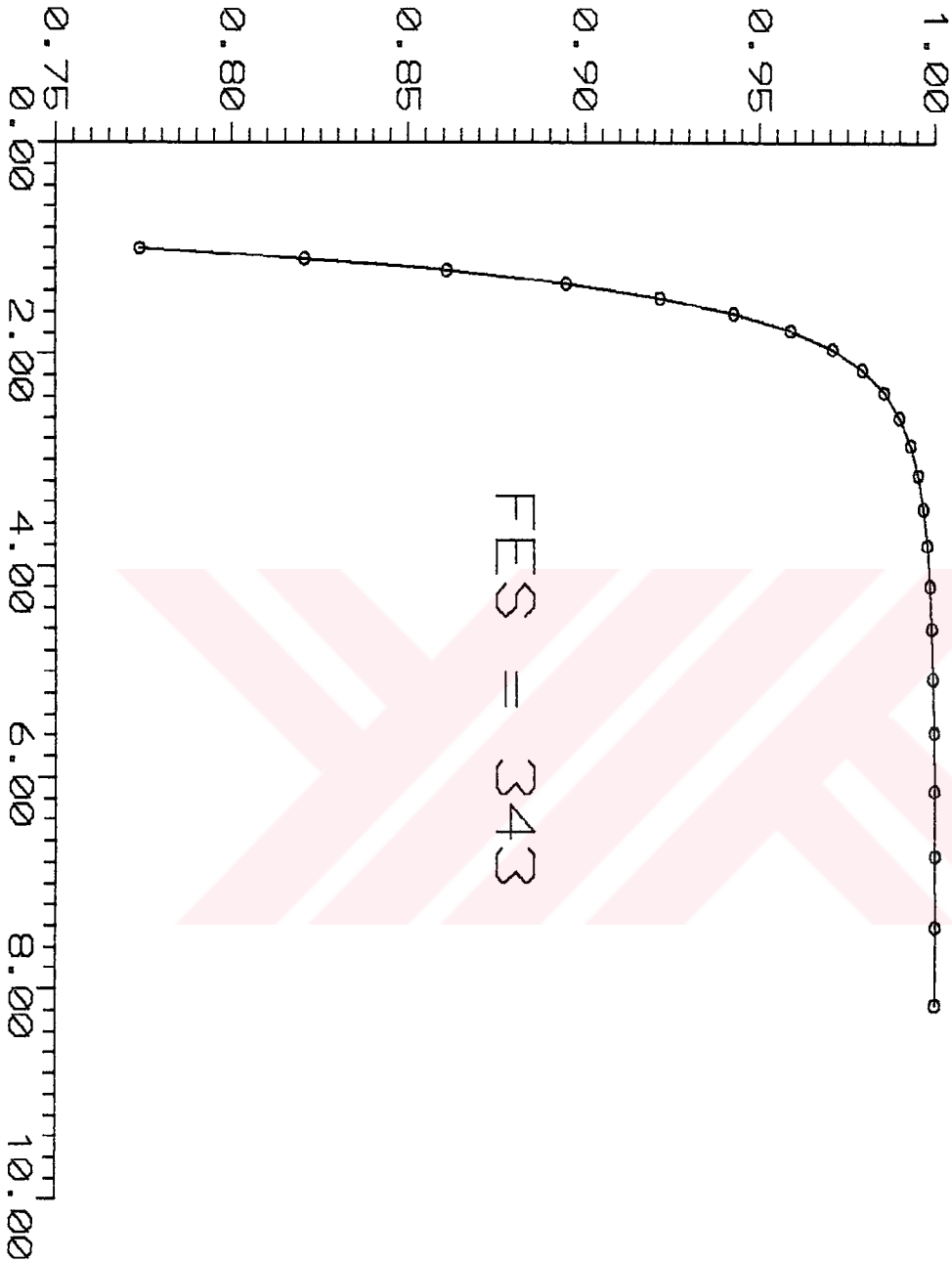
FES = 27

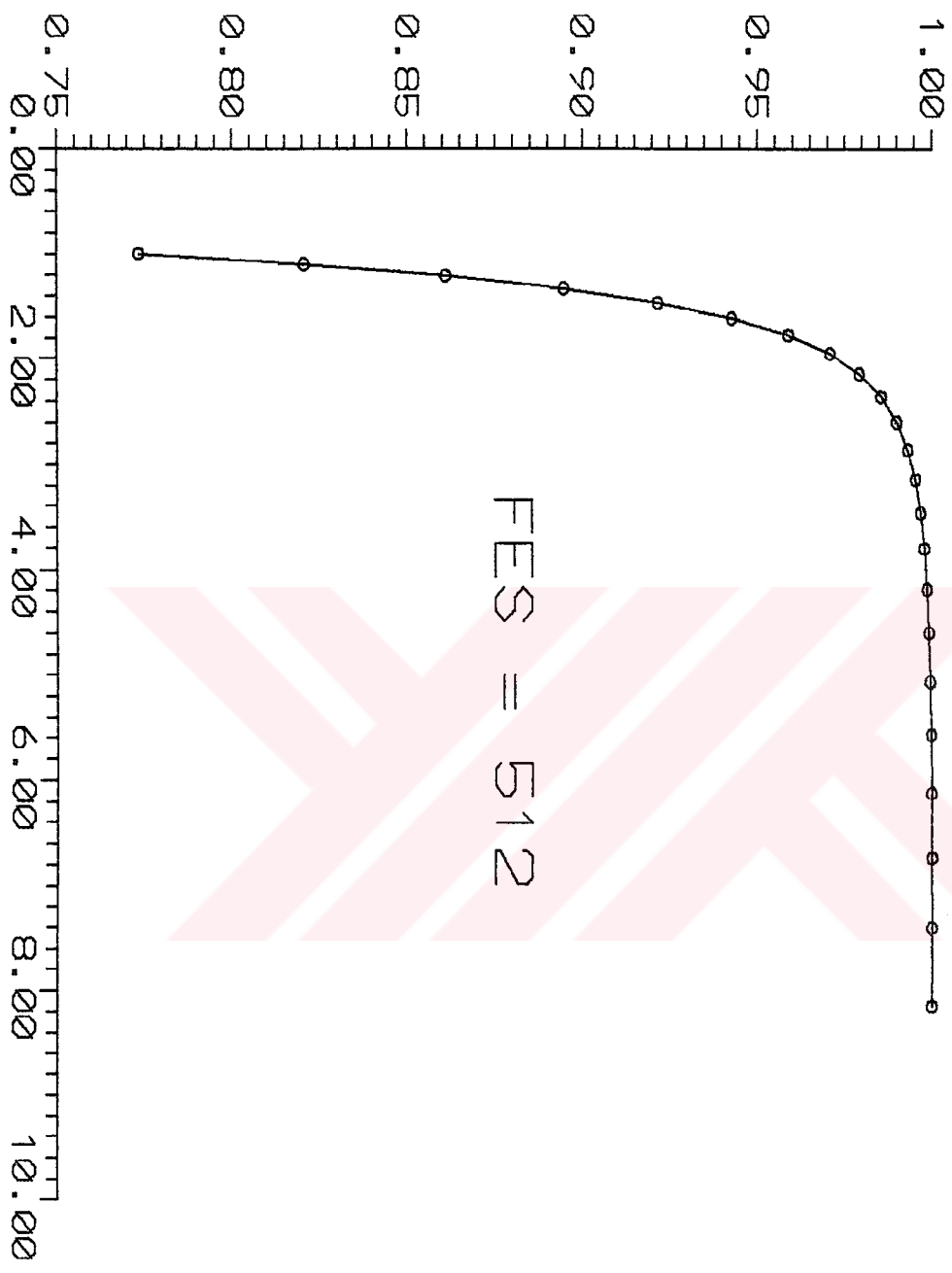


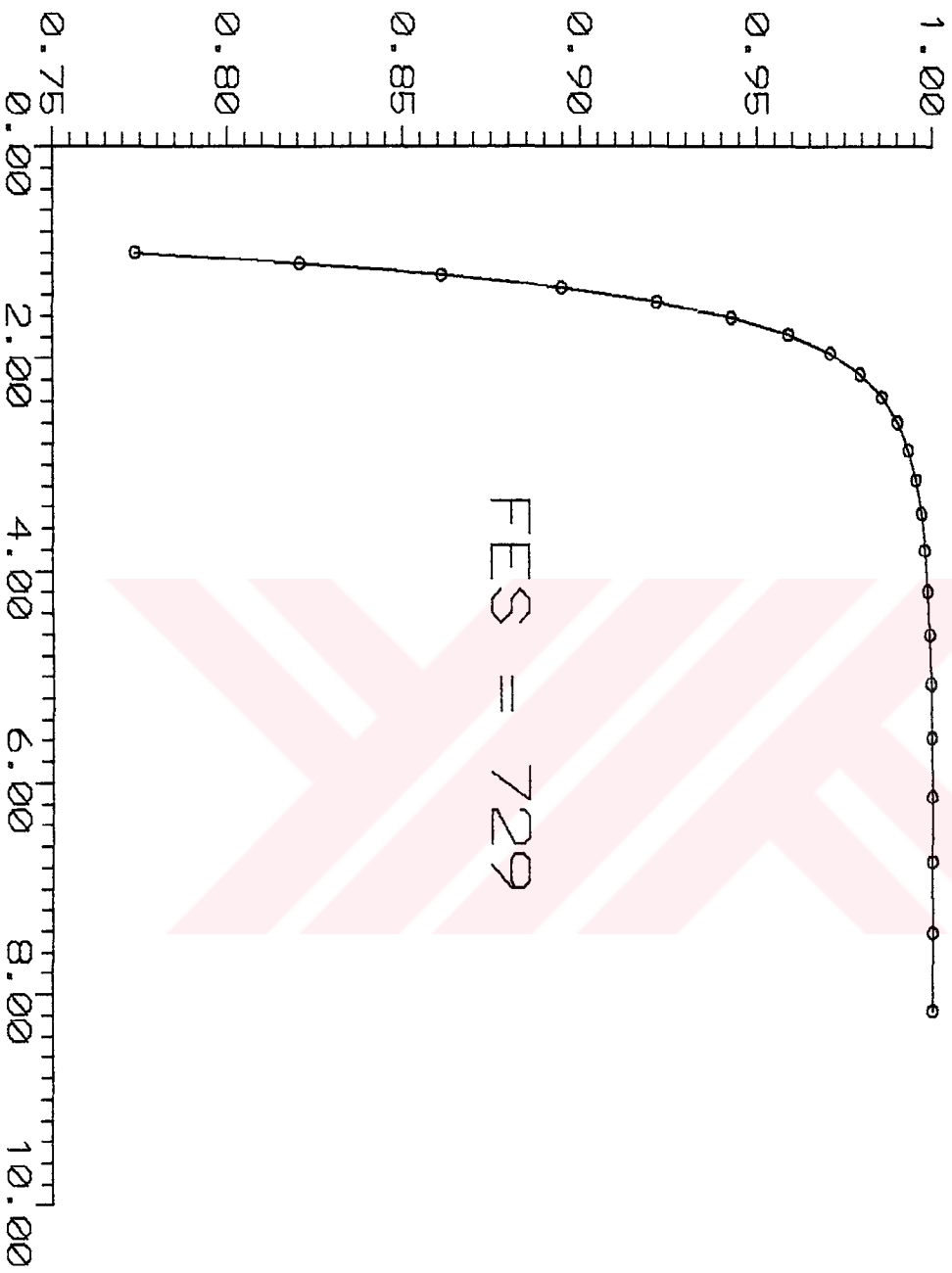


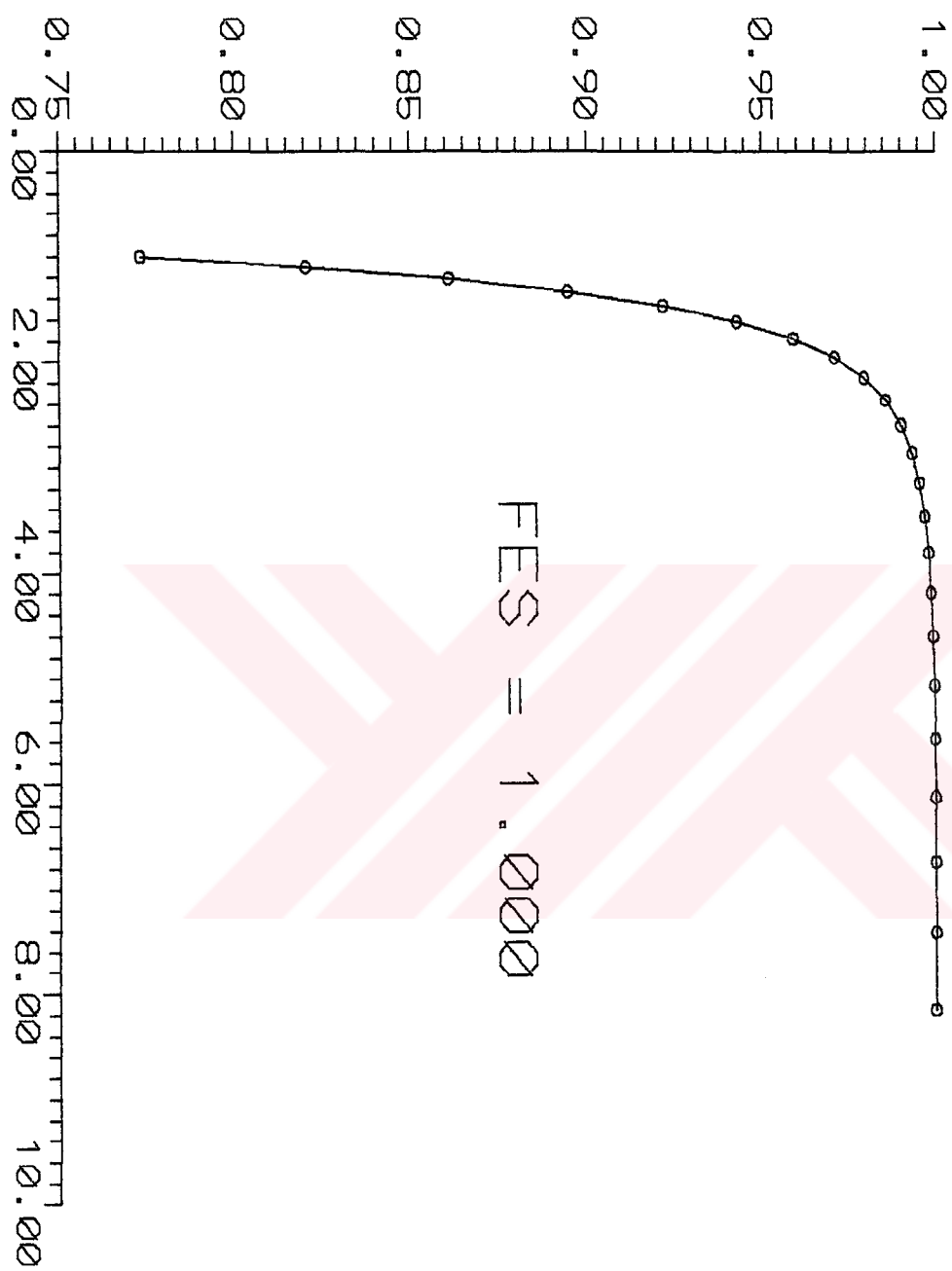


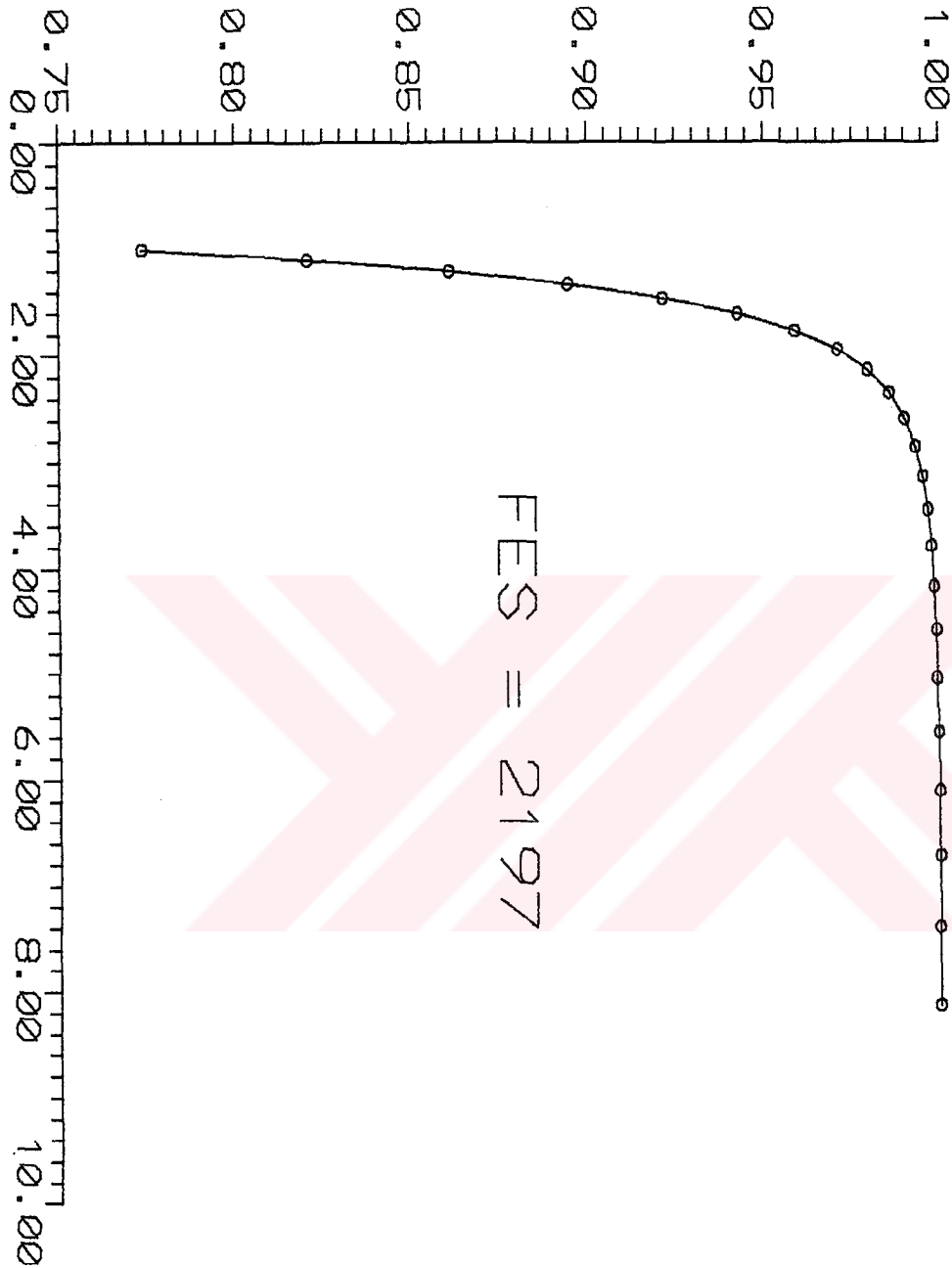
FES = 216

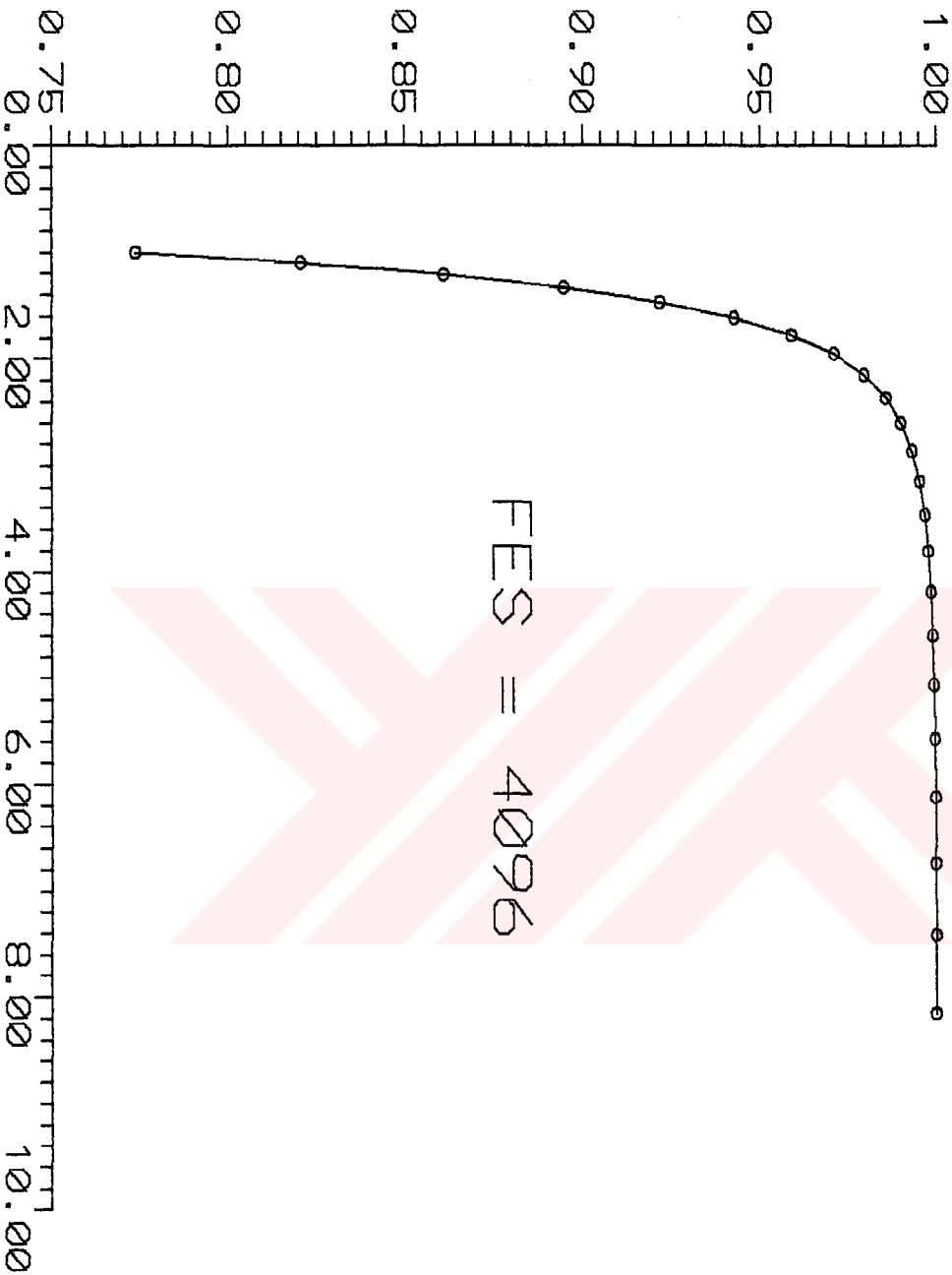


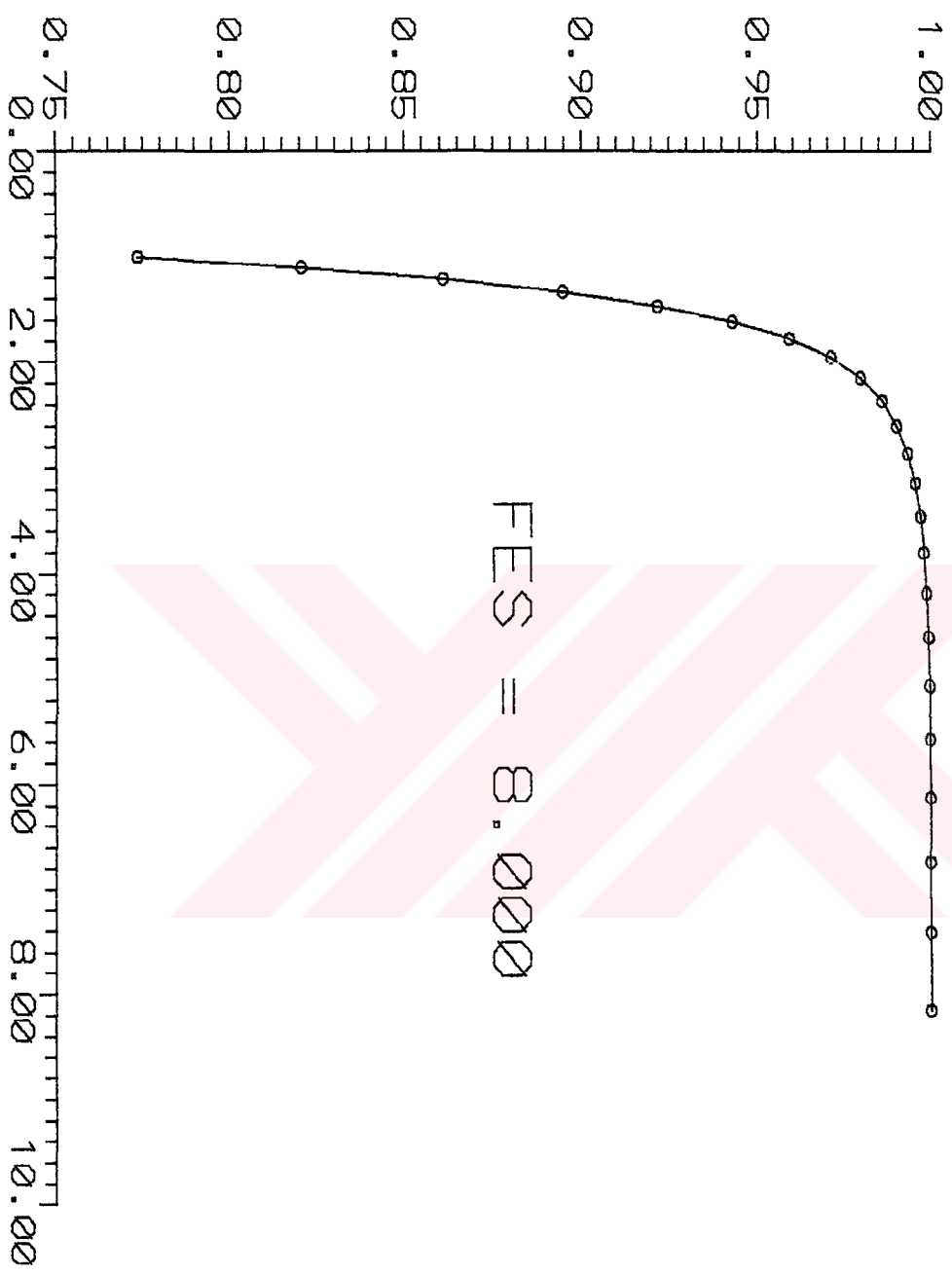


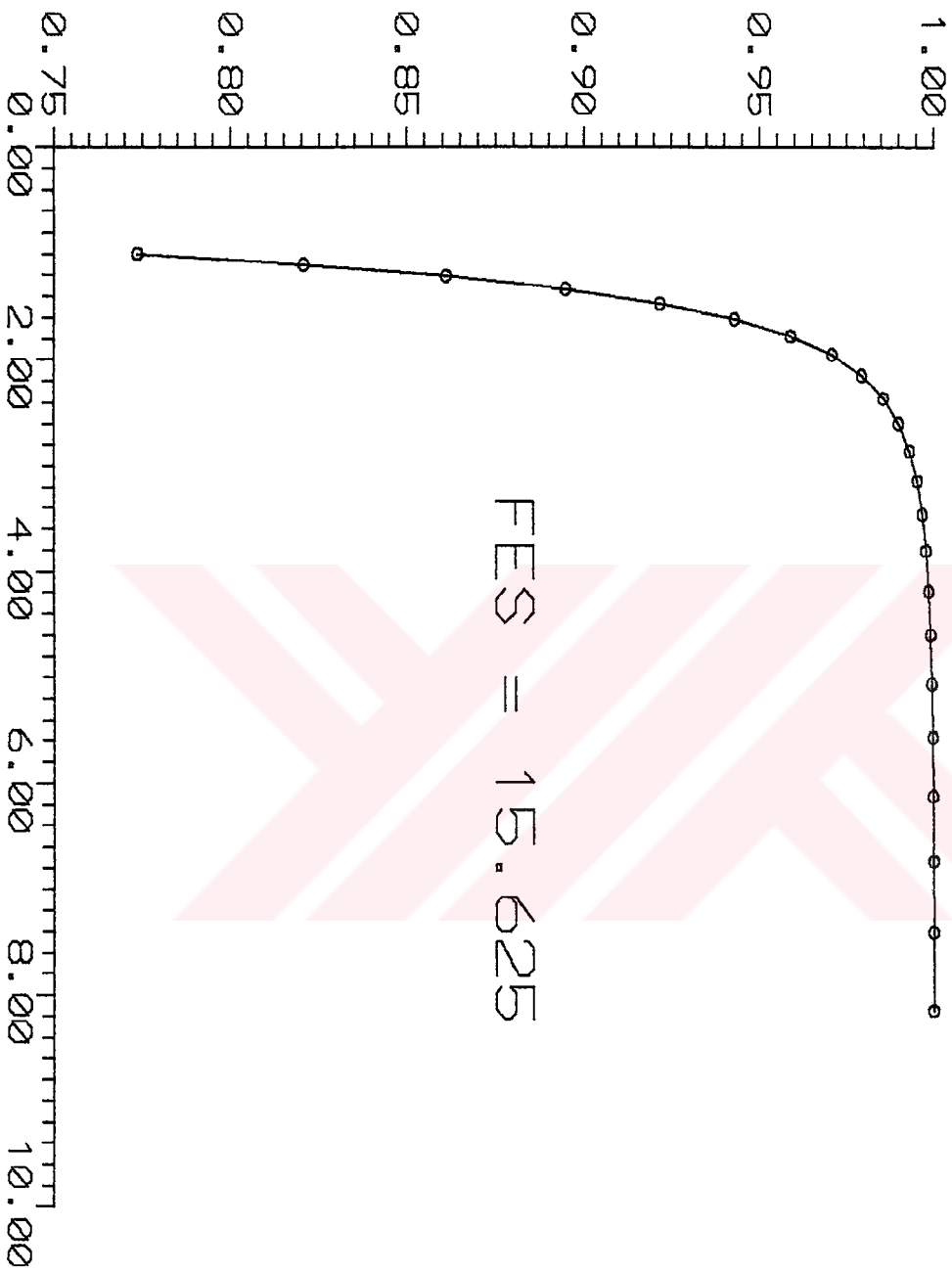


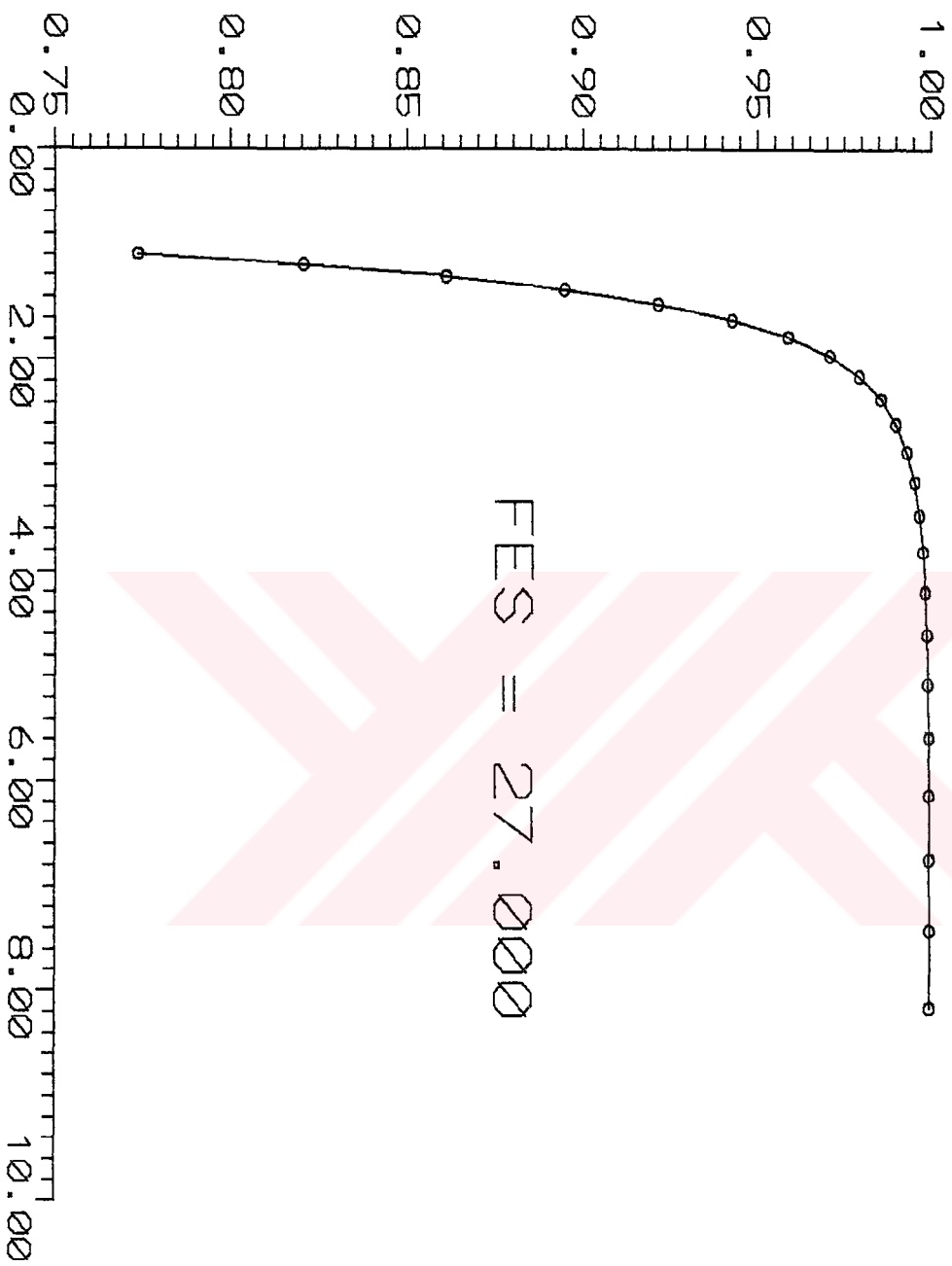


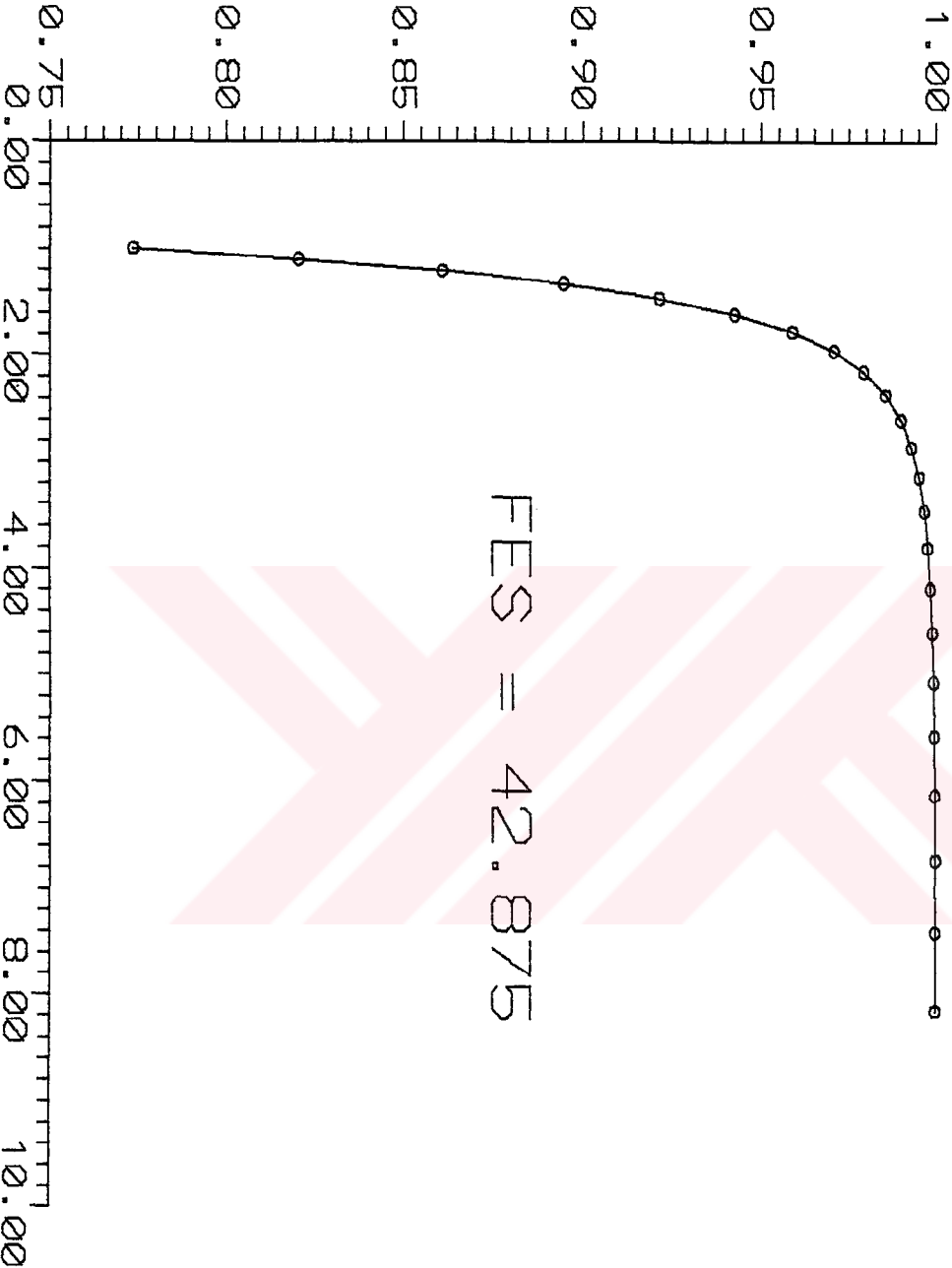


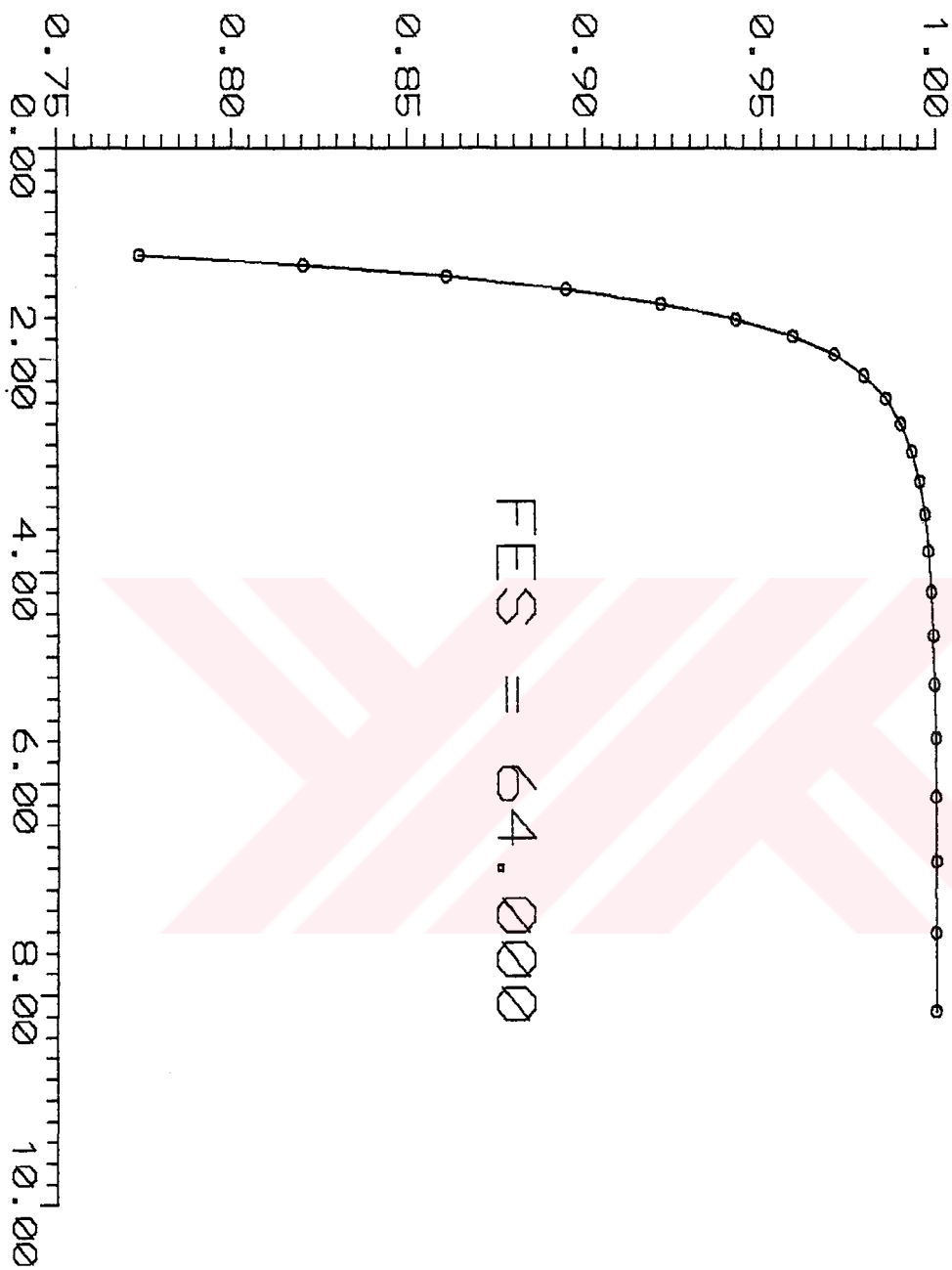


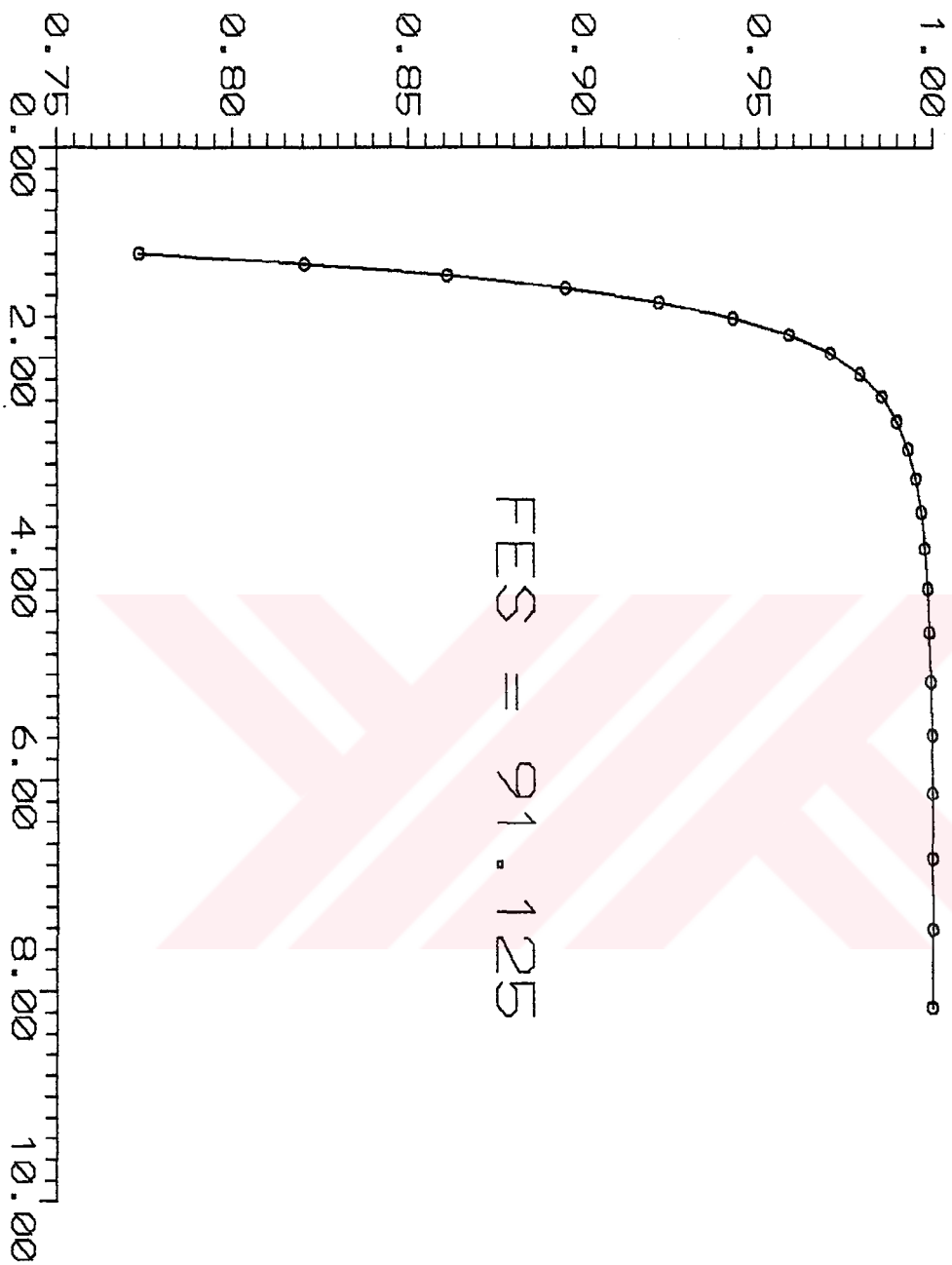


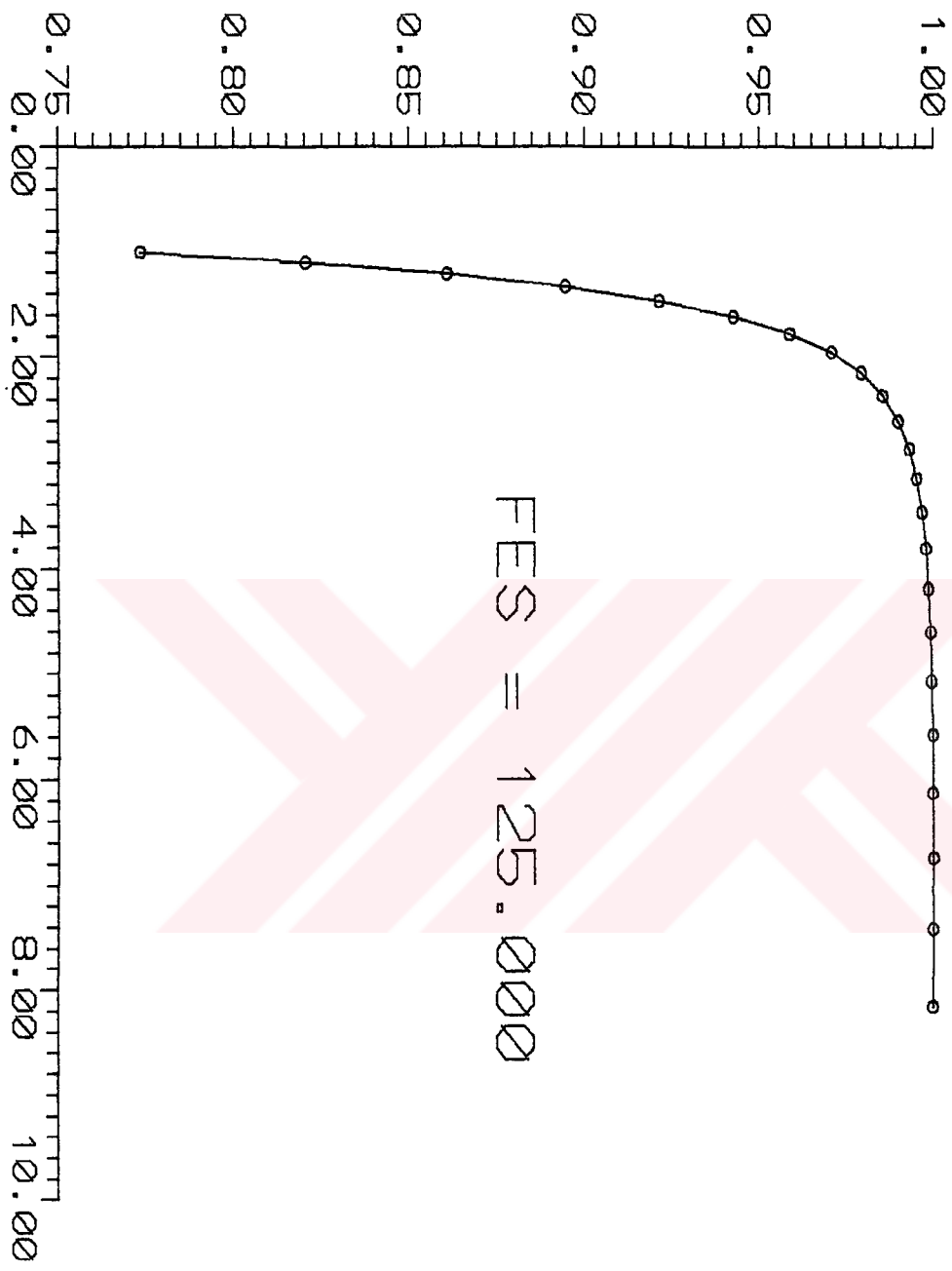


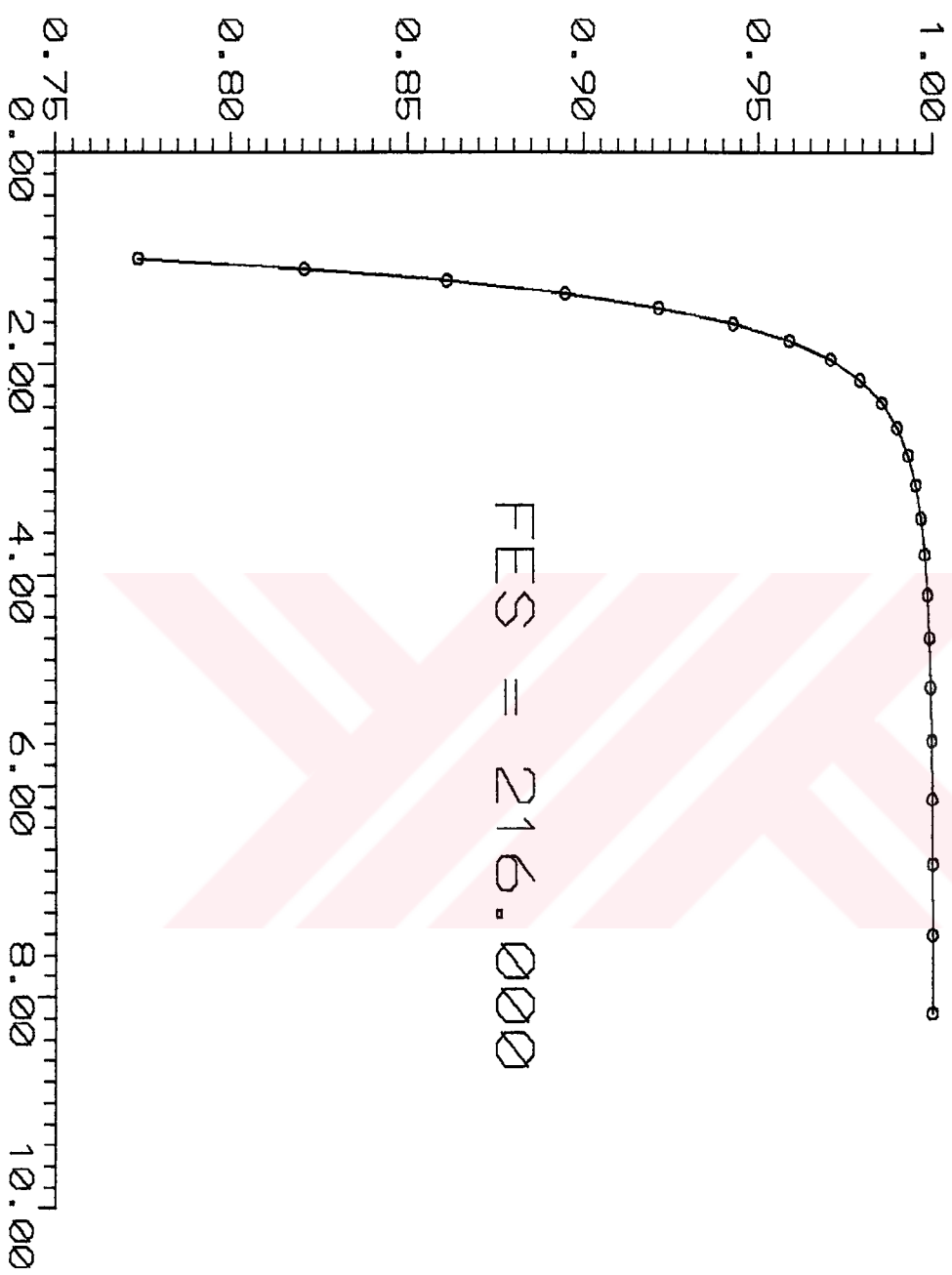


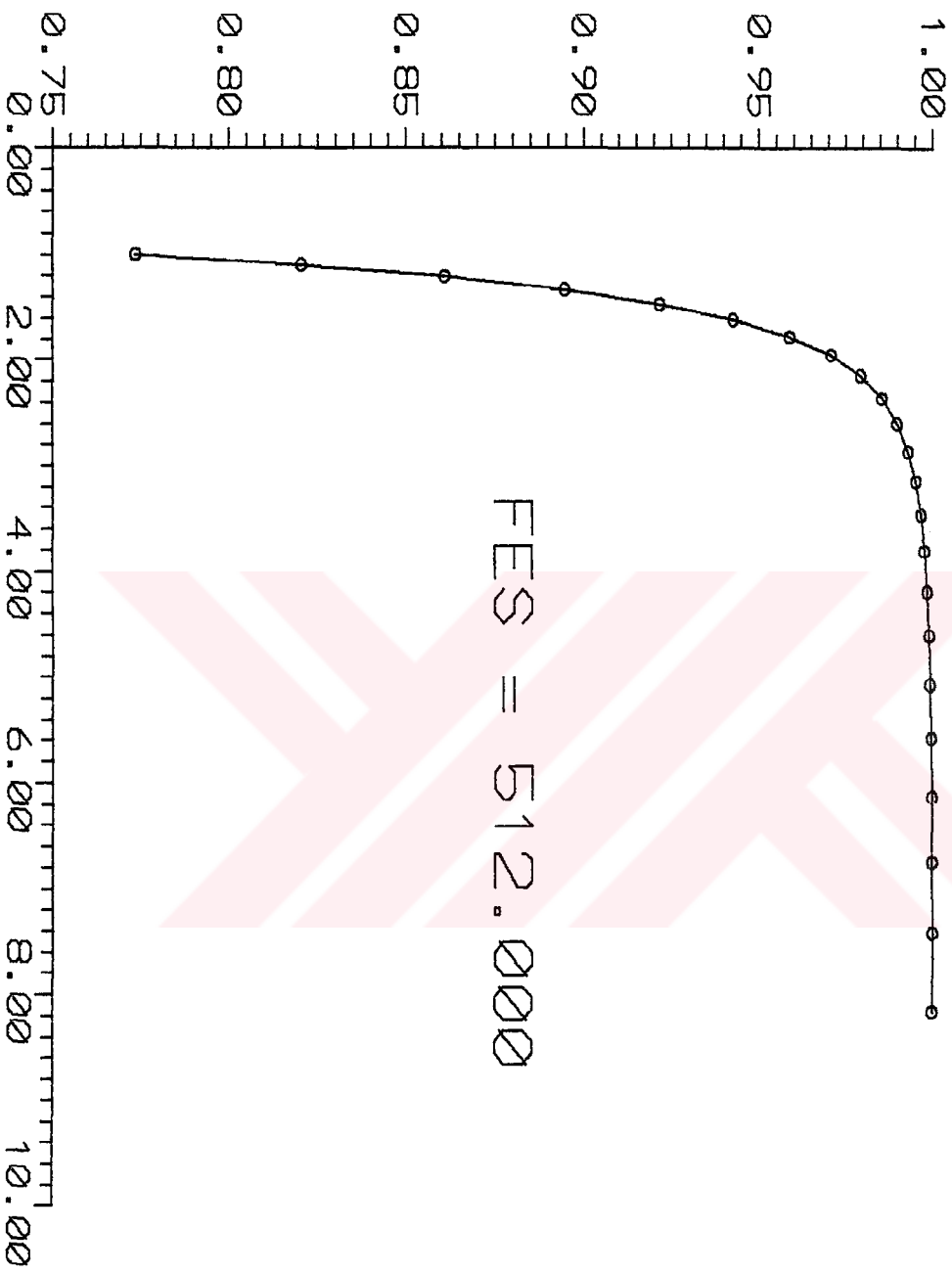


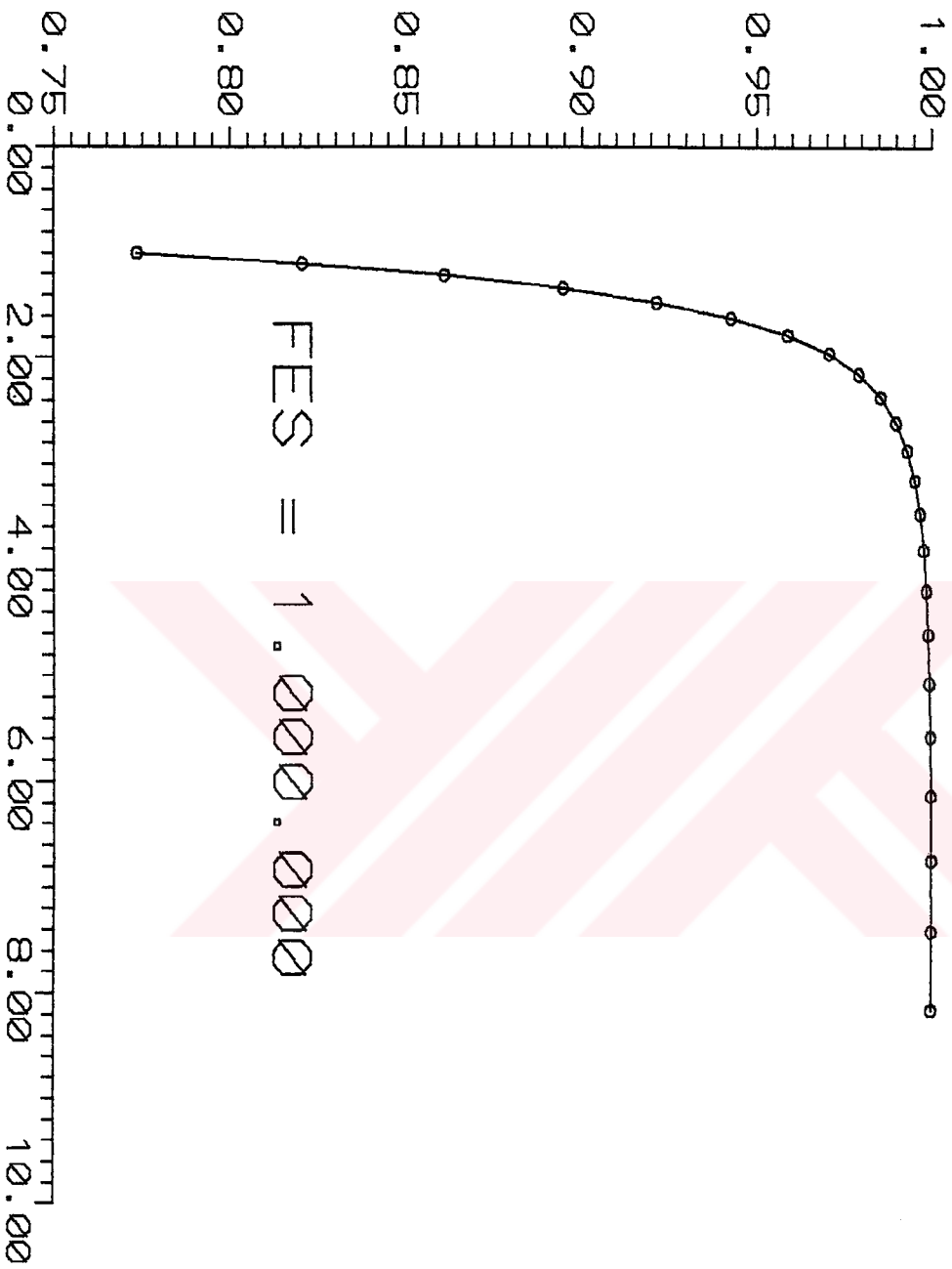


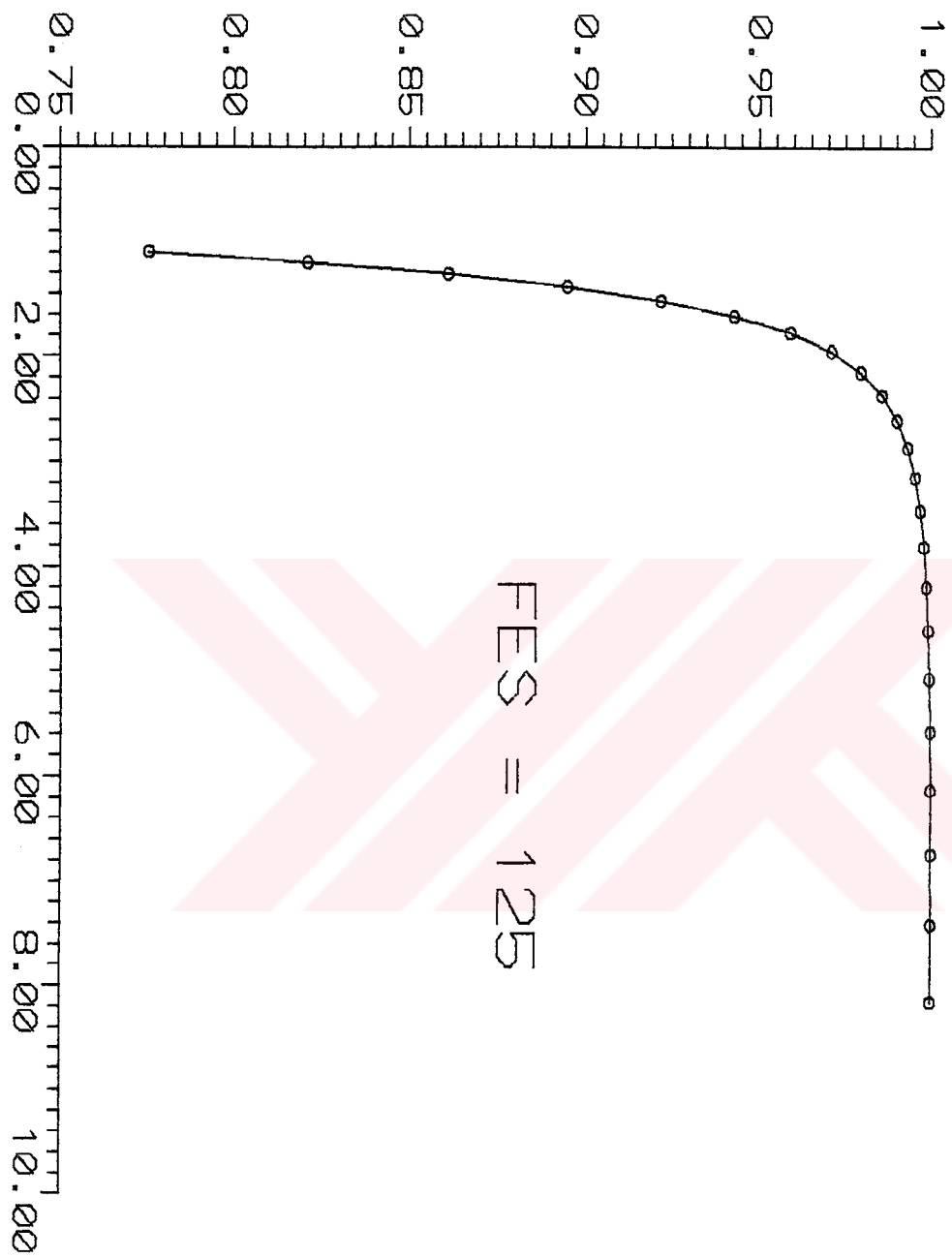












REFERANSLAR:

- [1] ZAFIRATOS, Chris., Physics, John Wiley & Sons, Inc. NewYork London
Sydney Toronto PP(342-360) 1976
- [2] STEPHEN F. MASON, M.A., D.Pil., A History of Sciences, COLLIER BOOKS
Macmillan Publishing Company, NEW YORK, pp 192-207 1982
- [3] WELLNER, MARCEL; Elements of Physics; New York, PLENIUM PRESS.
NEW YORK AND LONDON pp 175-189 1991
- [4] SEARS, W. Francis.; ZEMANSKY, W. Mark YOUNG, D. Hugh., University
Physics, sixth edition, pp 12-15 ve 59-75 1982
- [5] UZDILEK, Salih, Murat; Fizik Prensipleri (Mekanik, Isi, Ses), ikinci baskı İTÜ ,
Gümüssuyu-1957 pp 374-392
- [6] HALLIDAY, David; RESNICK,.; Physics; Robert; JOHN WILEY & SONS, 1978,
PP- 243-260 1978
- [7] PEACOCK, A. John, EARLY UNIVERSE; 1989; PUBLISHED BY THE
Scottish Universities summer SChools In Physics 1990
- [8] HUFF, Douglas; PREWETT, Omer; THE NATURE OF THE PHYSICAL
UNIVERSE; 1976 NOBEL CONFERENCE; JOHN WILEY &
SONS, NewYork. Chichester. Brisbane. Toronto
- [9] STEINMETZ, Charles Proteus; FOUR LECTURES ON RELATIVITY AND
SPACEE dover publication inc new york 1967

- [10] NOVIKOV, I.D.; EVOLUTION OF THE UNIVERSE; TRANSLATED BY:
BASKO, M. M.; CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1983
- [11] RADIN S. H. and FOLK R. T. Physics for Scientists and Engineers
(Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1982.)
- [12] TIPLER P. A., Physics (Worth, New York) 1982
- [13] EISBERG R. M., and LERNER L. S., PHYSICS: Foundations and Applications (McGraw-Hill, New York) 1984
- [14] ARFKEN G. B., GRIFFING D. F., KELLY D. C., and PRIEST J.,
Physics (Academic, New York) 1984
- [15] MARION J. B., and HORNYAK W. F., PRINCIPLES OF PHYSICS (CBS
College PUB., New York, 1984), pp. 241-144, 1984
- [16] McKELVEY J. P. and GROATCH H., Physics for Science and Engineering
(HARPER & ROW, New York,), pp. 259-261 1978
- [17] OHANIAN H. C., Physics (Norton, New York,) pp 322-325, 1985
- [18] WEIDNER K. T. Physics I (Allyn and Bacon, Boston,) pp 333-335, 1985
- [19] HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; FUNDAMENTALS OF PHYSICS
JOHN WILEY & SONS, sixth edition, PP- 243-260 1981
- [20] SEELY, Fred B., ENSIGN, Newton E., JONS, Paul G., Analytical Mathematics for Engineers, Fifth Edition, JOHN WILEY & SONS INC., 1958

[21] CAJORI, Florian., Sir Isaac Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy and His System of The World, University of California Press 1960

[22] TABAK, Ronald G. Gravity on a Half Shell American Journal of Physics, v 55
p 1096-8 December 1987



Özgeçmişim

1953 yılında Kundullu'da dünyaya gelmişim. İlkokulu Kundullu köyünde, ortaokulu Akşehir'de tamamladım. 1971 yılında Akşehir İlköğretmen Okulu'nu bitirip Sivas'ın bir köyünde ilkokul öğretmeliğine başladım. Tahsile devam etmeğe karar verdim. Gazi Eğitim Enstitüsü, Fen Bilgisi bölümünü tamamlayıp, Karaman'da ortaokul öğretmenliğine başladım. 1991 yılında Anadolu Üniversitesi'nden kimya lisansı aldım. 1993 yılında İTÜ Uçak ve Uzay Bilimleri Fakültesi'ni bitirerek lisans üstü programına başladım. Halen Ayazağa İlköğretim Okulu 1. Sınıf öğretmeniyim. Bekarım.

Mustafa ARSLANALP