İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LEIPHOLZ PROBLEMİ İÇİN FARKLI KİRİŞ MODELLERİNİN ANALİZİ VE KARŞILAŞTIRILMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mustafa Emre IHLAMUR

Anabilim Dalı: Uçak ve Uzay Mühendisliği
Programı : Uçak ve Uzay Mühendisliği

OCAK 2008

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LEIPHOLZ PROBLEMİ İÇİN FARKLI KİRİŞ MODELLERİNİN ANALİZİ VE KARŞILAŞTIRILMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mustafa Emre IHLAMUR

Anabilim Dalı: Uçak ve Uzay Mühendisliği
Programı : Uçak ve Uzay Mühendisliği

OCAK 2008

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LEIPHOLZ PROBLEMİ İÇİN FARKLI KİRİŞ MODELLERİNİN ANALİZİ VE KARŞILAŞTIRILMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mustafa Emre IHLAMUR

511041038

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 24 Aralık 2007

Tezin Savunulduğu Tarih : 28 Ocak 2008

Tez Danışmanı : **Prof.Dr. İbrahim ÖZKOL**

Diğer Jüri Üyeleri **Prof.Dr. Metin Orhan KAYA (İ.T.Ü.)**

Doç.Dr. Erol UZAL (İ.Ü.)

OCAK 2008

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlandığı uzun ve yorucu süreçte bana yol gösteren danışmanım sayın Prof. Dr. İbrahim ÖZKOL'a teşekkürü bir borç bilirim. Çalışma süresince bildiklerini benimle paylaşarak çalışmanın son halini almasında büyük katkısı olan sevgili Aytaç ARIKOĞLU'na da sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışmayı, eğitim ve öğrenim hayatım boyunca benden maddi ve manevi hiçbir desteğini esirgememiş olan aileme ithaf ediyorum.

OCAK 2008 **Mustafa Emre Ihlamur**

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ

ŞEKİL LİSTESİ

SEMBOL LİSTESİ

W(X, T)	**:** Enine eğilme.
X	**:** Eksenel uzunluk, m
T	**:** Zaman, s
A	**:** Kesit alanı, m^2
L	**:** Uzunluk, m
I	**:** Kesit alanının alan atalet momenti, m^4
E	**:** Elastisite modülü, N/m^2
G	**:** Kayma modülü, N/m^2
k'	**:** Kayma sabiti
ρ	**:** Yoğunluk**,** kg/m^3
ε	**:** Gerinme
σ	**:** Gerilme, N/m^2
α	**:** Eğilmeden kaynaklanan dönme açısı, rad
γ	**:** Kaymadan kaynaklanan dönme açısı, rad.
P	**:** Birim uzunluktaki dinamik yük, N/m
$\mathbf{P_0}$	**:** Birim uzunluktaki statik yük, N/m
μ	**:** Sürtünme katsayısı
Ω	**:** Uyarım frekansı, 1/s
w(x, t)	**:** Boyutsuz enine eğilme
x	**:** Boyutsuz eksenel uzunluk
t	**:** Boyutsuz zaman
p	**:** Boyutsuz birim uzunluktaki dinamik yük
$\mathbf{p_0}$	**:** Boyutsuz birim uzunluktaki statik yük
ω	**:** Boyutsuz uyarım frekansı

LEIPHOLZ PROBLEMİ İÇİN FARKLI KİRİŞ MODELLERİNİN ANALİZİ VE KARŞILAŞTIRILMASI

ÖZET

Bu çalışmada farklı kiriş teorileri kullanılarak Leipholz kolon-model yüklemesi altındaki bir kiriş analiz edilmiştir. Üniform, yayılı ve eksenel bir kuvvetin etkisi altında enine titreşen kirişler için Euler-Bernoulli, Rayleigh, Shear ve Timoshenko kiriş teorileri karşılaştırılmış; kiriş modellerine ait hareket denklemleri ve çeşitli sınır koşulları, Hamilton varyasyonel prensibi kullanılarak elde edilmiştir. Bu denklemler Leipholz problemi için ifade edilmiştir. Çizgiler metodu ve buna bağlı olarak sonlu fark yöntemi anlatılmıştır. Birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü türevler çeşitli mertebelerden yaklaşım yapılarak bulunmuş ve ileri sonlu fark, geri sonlu fark ve merkezi sonlu fark tabloları oluşturulmuştur. Elde edilen hareket denklemleri çizgiler metodu kullanılarak ayrıklaştırılmış ve hatlar boyunca sadece zamana bağlı adi diferansiyel denklem haline getirilmiştir. Bu denklemler sayısal olarak çözülmüştür. Farklı sınır koşullarının etkisini incelemek için her iki ucu da sabit ve bir ucu sabit diğer ucu serbest sınır koşulunda olan kirişin deplasman-zaman grafikleri elde edilmiştir. Dönme ataleti ve kayma deformasyonunun etkileri araştırılmış ve kiriş teorileri kullanılarak karşılaştırılmıştır. Yine kirişlerin dinamik davranışını inceleyebilmek için belirtilen sınır koşullarında Euler-Bernoulli, Rayleigh, Shear ve Timoshenko kiriş modellerine ait faz diyagramları çizdirilmiştir. Leipholz kolon-model yüklemesi altındaki kirişin titreşimi hakkında fikir sahibi olabilmek için her iki ucu da ankastre ve bir ucu ankastre diğer ucu serbest sınır koşulu için Poincaré diyagramları elde edilmiştir.

A COMPARISON AND AN ANALYSIS OF BEAM MODELS FOR LEIPHOLZ PROBLEM

SUMMARY

In this study, transversely vibrating beam subjected to the Leipholz column-model loading condition is analyzed by using different beam theories. Euler-Bernoulli, Rayleigh, Shear and Timoshenko beam models are compared for the transversely vibrating beams subjected to the uniform, distributed and axial load. The boundary conditions and the equations of motion of the beam models are obtained by Hamilton variational principle. These expressions are denoted for the Leipholz problem. Method of Lines and correspondingly the finite difference approach are presented. First, second, third and fourth order derivatives are obtained by using finite difference approach in order to derive the forward difference, the backward difference and the centre difference tables. The equations of motion of the beam models are discretized by the method of lines. Thus, the ordinary differential equations with time as the independent variables are obtained at the grid points. These differential equations are solved numerically. To analyze the effect of the boundary conditions, the displacement-time plots for clamped-clamped and clamped-free boundary conditions are figured. The effect of rotary inertia and shear deformation are investigated and are compared for different beam models. Also phase diagrams are plotted for Euler-Bernoulli, Rayleigh, Shear and Timoshenko beam models to analyze the dynamic behaviours of the transversely vibrating beams under the stated boundary conditions. The Poincaré maps of transversely vibrating beams subjected to the Leipholz column-model loading condition for the clamped-clamped and clamped-free boundary conditions are plotted to determine the vibration is whether periodic or not.

1. GİRİŞ

Leipholz kolonu, üniform, yayılı ve eksenel bir kuvvetin etkisi altında çalışan bir yapıyı ifade eder. Kang ve Tan [1] disk-fren kararsızlığını incelemek için, çeşitli kabuller altında disk fren balatasında aldıkları bir şerit elemana etkiyen kuvvetlerin Leipholz kolonunun yükleme koşuluyla aynı olduğundan yola çıkarak, şerit elemanı Leipholz kolon-model yüklemesi altında bir kiriş olarak modellemişlerdir. Şerit elemana etkiyen yükleri üniform ve periyodik olarak kabul etmişlerdir. Bu çalışmada kullanılan modelde, disk-fren sisteminin kararsızlığını inceleyebilmek için çeşitli kabuller altında fren balatasında seçilen bir elemana etkiyen yükler tespit edilmiştir. Euler-Bernoulli kiriş teorisi yoluyla enine titreşimin hareket denklemleri elde ederek çeşitli sınır koşulları altında kararlılık diyagramlarını elde etmişlerdir. Yine Kang ve Tan [2] bir başka çalışmalarında aynı koşullardan yola çıkarak, yayılı, eksenel bir sürtünme kuvvetinin yükleme etkisi altındaki Leipholz kirişinin parametrik kararsızlığı üzerinde durmuşlar, sınır koşullarının, sürtünme katsayısının, mesnetlerin kararsızlık üzerindeki etkisini araştırmışlardır.

Kiriş teorilerinin geliştirilmesi ile uğraşan ilk araştırmacılarına göre eğilme, enine titreşen kirişler için tek ve en önemli etken idi. Euler-Bernoulli kiriş modeli, eğilmeye bağlı olarak gerinme enerjisini ve yanal deplasmanlara bağlı olarak da kinetik enerjiyi dikkate alıyordu. Jacob Bernoulli elastik bir kirişin herhangi bir noktadaki eğilmesinin o noktadaki eğilme momentiyle orantılı olduğunu söylüyordu. Yeğeni Daniel Bernoulli ise ilk defa titreşen bir kirişin hareket denklemlerini diferansiyel denklem olarak ifade etmiştir. Daha sonraları Jacob Bernoulli'nin teorisini kabul eden Leonard Euler, elastik kirişlerin çeşitli yükleme koşulları altındaki şekilleriyle ilgili araştırmalar yapmıştır. Ve bu model Euler-Bernoulli kiriş teorisi adını almıştır. Literatürde klasik kiriş teorisi, Euler kiriş teorisi ya da Bernoulli kiriş teorisi olarak da geçebilmektedir. Euler-Bernoulli kiriş teorisi en basit kiriş modelidir. Bu sebeple yapılan çalışmalarda en fazla kullanılan kiriş modelidir. Basit olmasına karşın çoğu koşulda güvenilir sonuçlar vermektedir. Ancak yüksek modların doğal frekanslarını hatalı hesaplar. Ancak genelde ince kirişler için tutarlı sonuçlar sağlar. Rayleigh kiriş teorisi Euler-Bernoulli kiriş teorisine ek olarak kesitin dönmesini de göz önünde bulundurur. Kesitin dönme ataletini hesaba katması sebebiyle Rayleigh kiriş teorisi, Euler-Bernoulli'nin sonuçlarında bir miktar düzeltme yapar. Shear (kayma) kiriş modeli ise Euler-Bernoulli'ye kayma etkisini de ekler. Ancak en büyük gelişme Timoshenko kiriş teorisiyle ortaya çıkar. Bu kiriş modelinde Euler-Bernoulli kiriş teorisine ek olarak hem kesitin dönme ataleti hem de kayma deformasyonu bir arada değerlendirilir. Böylece Timoshenko kiriş teorisinde eğilme momentinin etkisi, yanal deplasmaların etkisi, dönme ataletinin etkisi ve kayma deformasyonlarının etkisi aynı anda göz önünde bulundurulur. Ortaya çıkan model sadece ince kirişler için değil, ince olmayan kirişler için de tutarlı sonuçlar verir. Dört kiriş teorisinin özeti Tablo 1.1'de verilmiştir. [3]

Tablo 1.1: Kiriş Teorileri

	Eğilme Momenti	Yanal Deplasman	Dönme Ataleti	Kayma Deformasyonu
Euler	√	√		
Rayleigh	√	√	√	
Shear	√	√		√
Timoshenko	√	√	√	√

Han, Benaroya ve Wei [3] kirişler hakkında kapsamlı bir çalışma yapmışlardır. Kiriş modellerine ait hareket denklemleri ve sınır koşullarını Hamilton varyasyonel prensbini kullanarak türetmişler, frekans denklemlerini elde etmişlerdir. Her kiriş modeli için özfonksiyonların ve mod şekillerinin ortogonalite koşullarını türetmişlerdir.

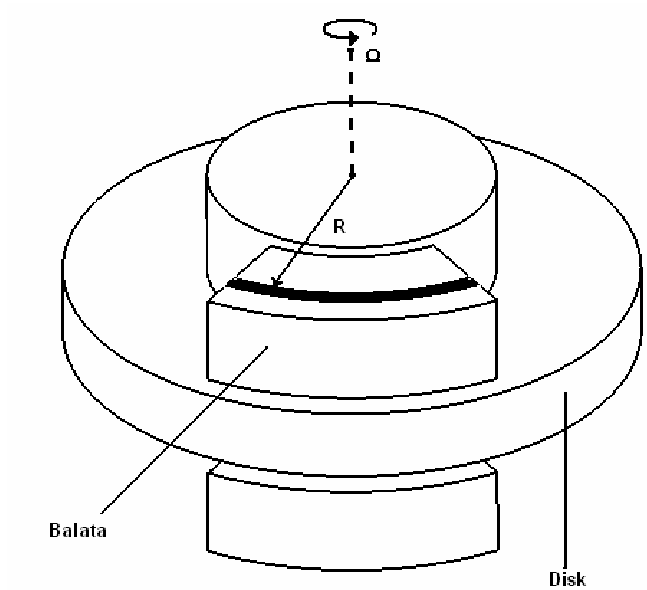
Traill-Nash ve Collar [4], kayma deformasyonu ve dönme ataleti hesaba katıldığı zaman üniform bir kirişin yanal titreşim problemini teorik olarak ele almıştır.

Cveticanin ve Atanackovic, Leipholz kolonu için dönme ataletinin, kaymanın ve eksen uzatılabilirliğinin kararlılık sınırlarını analiz etmişlerdir. [5]

Kirişlerde kayma deformasyonunun ve dönme ataletinin etkisi birçok çalışmada araştırmalara konu olmuştur. [6-8] Kiriş teorileri arasında karşılaştırmalı çalışmalar da yapılmıştır. [9-10] Ayrıca bu çalışmaların teorik altyapısını edinebilmek için de pek çok önemli kaynak [11-13] ve sonuçlara ulaşabilmek için çözüm yöntemleri hakkında yapılmış çalışmalar mevcuttur. [14]

2. BİR DİSK-FREN SİSTEMİNİN LEIPHOLZ KOLON-MODEL YÜKLEMESİ ALTINDAKİ BİR KİRİŞ OLARAK İFADE EDİLMESİ

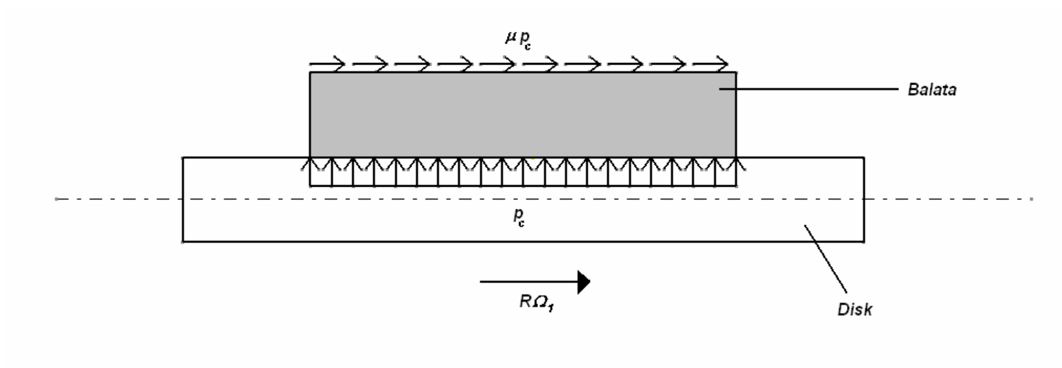
Bu çalışmada incelenen disk-fren sistemi [1]'den alınmıştır. Çok çeşitli araçlarda kullanılan disk-fren sistemlerinde, frenleme anında balatalar vasıtası ile dönen diske bir kuvvet uygulanır. Şekil 2.1'de gösterilen disk-fren sisteminde, disk Ω_1 hızıyla dönmektedir.



Şekil 2.1: Disk-Fren Sistemi

Bu disk-fren sisteminde, balata üzerinde diskin merkezinden R kadar uzaklıkta bir şerit eleman alındığında, bu şerit elemana etkiyen yayılı kuvvet dönmenin etkisiyle bir sürtünme kuvveti oluşturur. Şekil 2.1'de siyaha boyalı bir biçimde gösterilen bu eleman, Şekil 2.2'de ayrıca gösterilmiştir. Oluşan temas kuvveti (P_c) ile sürtünme katsayısının (μ) çarpımı, sürtünme kuvvetini ifade eder (μP_c). Bu sürtünme kuvveti diskin dönme açısal hızına (Ω_1), diskin titreşim frekansına (Ω_2) ve daha başka parametrelere bağlıdır. Ancak diskin dönme frekansı, diskin titreşim frekansının yanında çok küçük bir değerde olduğu ve de 1'den çok küçük bir değere karşılık geldiği için ihmal edilir. Diskin titreşim frekansı gözönünde bulundurulur. Bu noktada dönen bir disk üzerindeki fren disk sisteminin hareket denklemleri ile periyodik yükleme altındaki bir Leipholz kolonunun hareket denklemlerinin aynı oldğu kabul edilir. [1]

Eğer Şekil 2.1'de gösterilen şerit elemanın eğriliği ihmal edilirse, Şekil 2.2'de gösterildiği gibi yayılı ve takip eden kuvvetlerin yüklemesi altındaki bir kiriş olarak modellenebilir.



Şekil 2.2: Disk-Fren Sisteminin Bir Kiriş Olarak Modellenmesi

Şerit elemanı kiriş olarak modelleyebilmek için çeşitli kabuller yapılır.

1) Fren diski ile balatalar arasındaki temas, elastik konformel temas (elastic conformal contact) olarak kabul edilir.[1] Elastik cisimler arasındaki deformasyon, uygulanan kuvvet ile orantılıdır.

2) Fren diski ile balatalar arasındaki temas yüzeyinin hiçbir noktasında temas kaybolmaz.[1]

3) Malzeme özelliklerinde hiçbir değişim olmaz. [1]

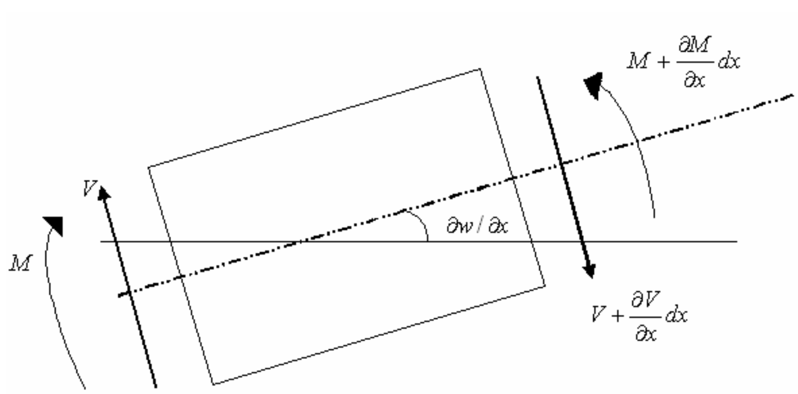
4) Kaliper piston ve disk-fren sistemine ait tüm diğer parçalar rijit olarak kabul edilir. [1]

Euler-Bernoulli, Rayleigh, Shear ve Timoshenko kiriş modellerine ait hareket denklemlerini elde etmek için Hamilton Varyasyonel Prensibi kullanılmıştır.Yine sınır koşullarını ifade edebilmek için de bu yöntem kullanılmıştır. Hareket denklemleri elde edildikten sonra boyutsuzlaştırma yoluna gidilmiştir.

Potansiyel ve kinetik enerji ifadelerini boyutsuz hale çevirerek, direkt olarak boyutsuz hareket denklemlerinin elde edildiği çalışmalar da mevcuttur. [3]

2.1 Hareket Denklemlerinin Hamilton Prensibi ile Elde Edilmesi

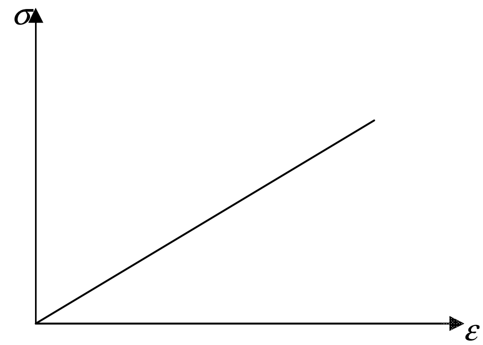
2.1.1 Euler-Bernoulli Kiriş Modeli



Şekil 2.3: Eğilme Açısının Gösterimi

Euler-Bernoulli kiriş eğilme momenti ve yanal deplasmanları hesaba katan bir kiriş teorisidir. Şekil 2.3'de eğilme açısı gösterilmiştir.

Lineer-elastik malzeme kabulüne göre gerilme ve gerinme arasında lineer bir bağlantı vardır. Şekil 2.4'de bu durum gösterilmiştir.



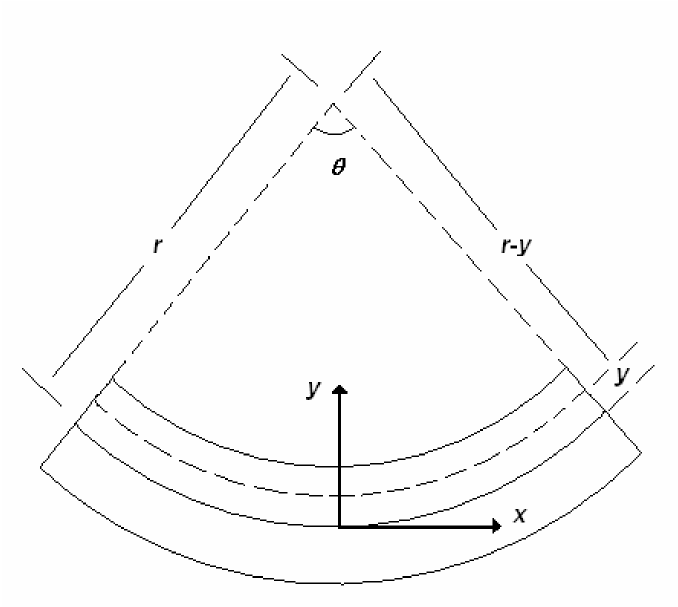
Şekil 2.4: Gerilme ile Gerinme Arasındaki İlişki

Potansiyel enerjinin eğilmeye bağlı olarak ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$P_E = \frac{1}{2}\int_V E\varepsilon^2 dV = \frac{1}{2}\int_0^L \left(\int_A E{\varepsilon_{xx}}^2 dA \right) dX \tag{2.1}$$

Burada E elastisite modülünü ifade ederken, ε ise gerinmeyi belirtir.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{(r-y)\theta - r\theta}{r\theta} = -\frac{y}{r} = -y\frac{d^2W}{dX^2} \tag{2.2}$$



Şekil 2.5: Eğrilik Yarıçapının Gösterimi

Şekil 2.5'te de gösterildiği gibi r eğrilik yarıçapı, W ise enine eğilme (transverse deflection) fonksiyonudur. X konum boyutunu belirtir. ε_{xx} ifadesini yerine koyarsak, potansiyel enerji aşağıdaki gibi ifade edilmiş olunur. [15]

$$P_E = \frac{1}{2}\int_0^L \left(\int_A E y^2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right)^2 dA \right) dX \tag{2.3}$$

$$P_E = \frac{1}{2}\int_0^L E \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right)^2 \left(y^2 dA \right) dX \tag{2.4}$$

Yukarıdaki denklemdeki $y^2 dA$ ifadesi alan atalet momentine karşılık gelir. Alan atalet momenti I sembolü ile göterilir. L kiriş boyuna karşılık gelir.

$$P_E = \frac{1}{2}\int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right)^2 dX \tag{2.5}$$

Kinetik enerjinin ifade ediliş biçimi ise aşağıda verilmiştir. ρ kirişin yoğunluğu, A kirişin kesit alanı ve T zamandır.

$$K_E = \frac{1}{2}\int_0^L \rho A \left(\frac{\partial W}{\partial T}\right)^2 dX \tag{2.6}$$

Lagrangian denklemi, potansiyel enerjinin, kinetik enerjiden çıkartılmasını ifade eder.

$$L = K_E - P_E \tag{2.7}$$

$$L = \frac{1}{2}\int_0^L \left[\rho A \left(\frac{\partial W}{\partial T}\right)^2 - EI\left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}\right)^2\right] dX \tag{2.8}$$

Virtüel iş ifade edilirse;

$$\delta W_{nc} = \int_0^L f(X,T)\delta W(X,T)dX \tag{2.9}$$

$$\int_{T_1}^{T_2} \delta L dT + \int_{T_1}^{T_2} \delta W_{nc} dT = 0 \tag{2.10}$$

Burada, Hamilton Varyasyonel Prensibi uygulanırsa, (2.8) denklemi (2.11) denklemine dönüşür.

$$\frac{1}{2}\int_{T_1}^{T_2} \delta \int_0^L \left[\rho A \left(\frac{\partial W}{\partial T}\right)^2 - EI\left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}\right)^2\right] dX\,dT + \int_{T_1}^{T_2}\int_0^L f(x,t)\delta W(X,T)dXdT = 0 \tag{2.11}$$

Terimler ortak integraller içinde ifade edilirse;

$$\int_{T_1}^{T_2}\int_0^L \left[\rho A \left(\frac{\partial W}{\partial T}\right)\delta\left(\frac{\partial W}{\partial T}\right) - EI\left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}\right)\delta\left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}\right) + f\delta W\right] dXdT = 0 \tag{2.12}$$

(2.12) denkleminin ilk kısmının açılımı (2.13)'te verilmiştir.

$$\int_{T_1}^{T_2}\int_0^L \rho A\left(\frac{\partial W}{\partial T}\right)\delta\left(\frac{\partial W}{\partial T}\right)dTdX = \int_0^L\left[\rho A\left(\frac{\partial W}{\partial T}\right)\delta W \mid_{T_1}^{T_2} - \int_{T_1}^{T_2}\rho A\left(\frac{\partial W}{\partial T}\right)^2 \delta W dT\right]dX \tag{2.13}$$

(2.12) denkleminin ikinci kısmı (2.14) denkleminde ifade edilmiştir.

$$\begin{aligned}
&-EI\int_{T_1}^{T_2}\int_0^L\left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}\right)\delta\left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}\right)dXdT = \\
&\qquad -EI\int_{T_1}^{T_2}\left[\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}\delta\frac{\partial W}{\partial X}\mid_0^L - \frac{\partial^3 W}{\partial X^3}\delta W\mid_0^L + \int_0^L \frac{\partial^4 W}{\partial X^4}\delta W dX\right]dT
\end{aligned} \tag{2.14}$$

(2.13) ve (2.14) denklemleri birlikte yazılırsa;

$$\begin{aligned}
&-\int_{T_1}^{T_2}\int_0^L\left[\rho A\frac{\partial^2 W}{\partial T^2} + EI\frac{\partial^4 W}{\partial X^4} - f\right]\delta W dXdT + \int_0^L \rho A\frac{\partial W}{\partial T}\delta W\mid_{T_1}^{T_2} dX \\
&\qquad - EI\left[\int_{T_1}^{T_2}\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}\delta\frac{\partial W}{\partial X}\mid_0^L dT - \int_{T_1}^{T_2}\frac{\partial^3 W}{\partial X^3}\delta W\mid_0^L dT\right] = 0
\end{aligned} \tag{2.15}$$

(2.15) denkleminde hareket denklemi ve sınır koşullarının ifadeleri yer almaktadır. Buna göre Euler-Bernoulli kiriş modelinin hareket denklemi (2.16)'da verilmiştir.

$$\rho A\frac{\partial^2 W}{\partial T^2} + EI\frac{\partial^4 W}{\partial X^4} = f(X,T) \tag{2.16}$$

(2.15) denkleminde sınır şartlarını ifade eden terimler (2,17-2.21)'de yazılmıştır.

$$\int_{T_1}^{T_2}\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}\delta\frac{\partial W}{\partial X}\mid_0^L dT = 0\,,\quad \int_{T_1}^{T_2}\frac{\partial^3 W}{\partial X^3}\delta W\mid_0^L dT = 0 \tag{2.17a, b}$$

$$\frac{\partial^2 W(L,T)}{\partial X^2}\delta\left(\frac{\partial W(L,T)}{\partial X}\right) = 0 \tag{2.18}$$

$$\frac{\partial^2 W(0,T)}{\partial X^2}\delta\left(\frac{\partial W(0,T)}{\partial X}\right)=0 \tag{2.19}$$

$$\frac{\partial^3 W(L,T)}{\partial X^3}\delta\big(W(L,T)\big)=0 \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial^3 W(0,T)}{\partial X^3}\delta\big(W(0,T)\big)=0 \tag{2.21}$$

Buna göre serbest uç sınır koşulu;

$$\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}=0\,,\ \frac{\partial^3 W}{\partial X^3}=0 \qquad \text{(2.22a, b)}$$

Basit mesnet;

$$\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}=0\,,\ W=0 \qquad \text{(2.23a, b)}$$

Kayan mesnet;

$$\frac{\partial W}{\partial X}=0\,,\ \frac{\partial^3 W}{\partial X^3}=0 \qquad \text{(2.24a, b)}$$

Ankastre;

$$\frac{\partial W}{\partial X}=0\,,\ W=0 \qquad \text{(2.25a, b)}$$

şeklinde elde edilir.

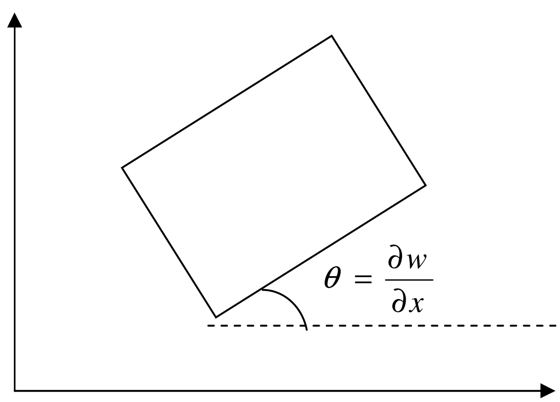
$$\int_0^L \rho A\frac{dW}{dT}\delta W\,\Big|_{T_1}^{T_2}\,dX \tag{2.26}$$

(2.26) denkleminin terimleri açılırsa (2.27) ve (2.28) denklemleri elde edilir.

$$\rho A \frac{\partial W(T_2, X)}{\partial T} \delta\big(W(T_2, X)\big) = 0 \tag{2.27}$$

$$\rho A \frac{\partial W(T_1, x)}{\partial T} \delta\big(W(T_1, X)\big) = 0 \tag{2.28}$$

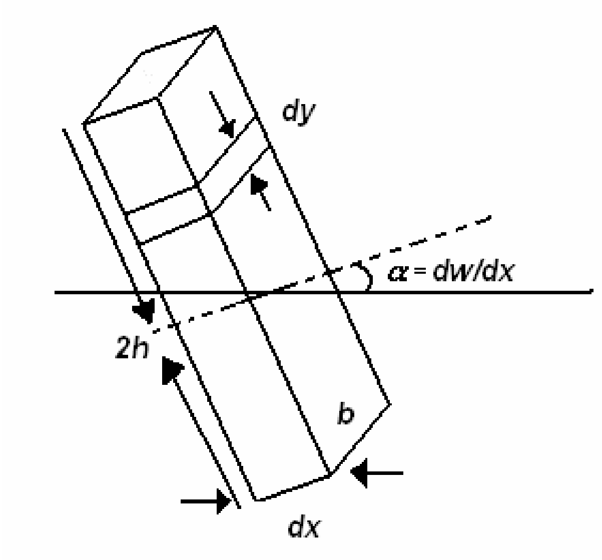
2.1.2 Rayleigh Kiriş Modeli



Şekil 2.6: Dönme Ataleti

Rayleigh kiriş modelinde, Euler-Bernoulli'den farklı olarak kinetik enerji ifadesine dönme ataleti terimi de eklenir. Şekil 2.6'da dönme ataleti gösterilmiştir.

$$K_{Edön} = \int_0^L \int_{-h}^{h} \frac{1}{2} dm \big(y\dot{\theta}\big)^2 \tag{2.29}$$



Şekil 2.7: Bir Kiriş Elemanı Üzerinde Dönme Ataletinin Gösterilmesi

Şekil 2.7'de dx kalınlığındaki çok küçük bir kiriş elemanın boyutları verilmiştir. Bu elemanın kütlesi hesaplanmak isternirse;

$$dm = \frac{\frac{m}{L}dx}{2h}dy \tag{2.30}$$

$$dm = \frac{m}{L2hb}dxdyb \tag{2.31}$$

$$dm = \frac{m}{L2hb}dxdyb \tag{2.32}$$

şeklinde bulunur. Kirişin hacmi v ve yoğunluğu ρ yazılırsa;

$$v = 2hLb\,,\ \rho = \frac{m}{v} \tag{2.33a, b}$$

(2.32) ve (2.33a, b) kullanılırsa alınan kiriş elemanın kütlesi (2.34)'teki gibi hesaplanır.

$$dm = \rho bdxdy \tag{2.34}$$

(2.34) denklemi (2.29) denkleminde yerine konulur.

$$K_{Edön} = \frac{1}{2}\int_{0}^{L}\int_{-h}^{h}\rho by^2\dot{\theta}^2 dxdy \tag{2.35}$$

$$K_{Edön} = \frac{1}{2}\int_{0}^{L}\rho\dot{\theta}^2\left(\int_{-h}^{h}by^2dy\right)dx \tag{2.36}$$

(2.36) denklemi içinde yer alan $\int_{-h}^{h}by^2dy$ ifadesi alan atalet momenti I 'ya karşılık gelir.

$$\int_{-h}^{h}by^2dy = \int_A y^2 dA = I \tag{2.37}$$

(2.37), (2.36)'da yerine konulur.

$$K_{Edön} = \frac{1}{2}\int_{0}^{L}\rho I\dot{\theta}^2 dx \tag{2.38}$$

Dönme açısının zamana göre türevi açısal hızı verir.

$$\theta = \frac{dW}{dX}\,,\ \dot{\theta} = \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial T} \tag{2.39a, b}$$

(2.39b) denklemi (2.38)'de yerine konulursa, (2.29) denklemi (2.40) denklemine dönüşür.

$$K_{Edön} = \frac{1}{2}\int_{0}^{L}\rho I\left(\frac{\partial^2 W}{\partial X \partial T}\right)^2 dX \tag{2.40}$$

Dönme ataletini temsil eden $K_{Edön}$ terimi, Euler-Bernoulli kirişine ait (2.6) denklemi ile toplanırsa, Rayleigh kirişininin toplan kinetik enerjisi (2.41)'de ifade edilir.

$$K_E = \frac{1}{2}\int_0^L \rho A\left(\frac{\partial W}{\partial T}\right)^2 dX + \frac{1}{2}\int_0^L \rho I\left(\frac{\partial^2 W}{\partial X \partial T}\right)^2 dX \tag{2.41}$$

Rayleigh kirişinin potansiyel enerji denklemine Euler-Bernoulli kirişinin potansiyel enerji denkleminde farklı herhangi bir terim gelmez. (2.7)'de belirtilen Lagrangian denklemi gereği Rayleigh kirişinin kinetik enrji denklemi (2.41)'den (2.5) denklemi çıkartılır.

$$\frac{1}{2}\int_0^L \left[\rho A\left(\frac{\partial W}{\partial T}\right)^2 + \rho I\left(\frac{\partial^2 W}{\partial X \partial T}\right)^2 - EI\left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}\right)^2\right] dX \tag{2.42}$$

(2.10)'da belirtilen Hamilton Prensibi, (2.40)'ta bulunan K_{Erot} terimine uygulanır.

$$K_{Edön} = \frac{\rho I}{2}\int_{T_1}^{T_2}\int_0^L \delta\left(\frac{\partial^2 W}{\partial X \partial T}\right)^2 dX\, dT \tag{2.43}$$

$$K_{Edön} = \rho I \int_{T_1}^{T_2}\int_0^L \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial T}\, \delta\left(\frac{\partial^2 W}{\partial X \partial T}\right) dX\, dT \tag{2.44}$$

$$K_{Edön} = \rho I \int_0^L \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial T}\, \delta\left(\frac{\partial W}{\partial X}\right)\Big|_{T_1}^{T_2} dX - \int_{T_1}^{T_2}\int_0^L \frac{\partial^3 W}{\partial X \partial T^2}\delta\left(\frac{\partial W}{\partial X}\right) dX dT \tag{2.45}$$

$$K_{Edön} = \rho I \left[\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^L \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial T}\, \delta\left(\frac{\partial W}{\partial X}\right)\Big|_{T_1}^{T_2} dX - \int_{T_1}^{T_2} \frac{\partial^3 W}{\partial X \partial T^2}\, \delta(W)\Big|_0^L dX \\ \displaystyle + \int_{T_1}^{T_2}\int_0^L \frac{\partial^4 W}{\partial X^2 \partial T^2} \delta W dX dT \end{array}\right] \tag{2.46}$$

(2.46)'da elde edilen dönme ataletini ifade eden terimler (2.15) denklemine eklenir.

$$
-\int_{T_1}^{T_2}\int_0^L\left[\rho A\frac{\partial^2 W}{\partial T^2}+EI\frac{\partial^4 W}{\partial X^4}-\rho I\frac{\partial^4 W}{\partial X^2\partial T^2}-f\right]dXdT
$$

$$
+\int_0^L\left[\rho A\frac{\partial W}{\partial T}\delta W-\rho I\frac{\partial^2 W}{\partial X\partial T}\delta\left(\frac{\partial W}{\partial X}\right)\right]\Big|_{T_1}^{T_2}dX \tag{2.47}
$$

$$
\int_{T_1}^{T_2}\left[-EI\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}\delta\frac{\partial W}{\partial X}+EI\frac{\partial^3 W}{\partial X^3}\delta W-\rho I\frac{\partial^3 W}{\partial X\partial T^2}\delta W\right]\Big|_0^L dT=0
$$

Rayleigh kiriş modelinin hareket denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

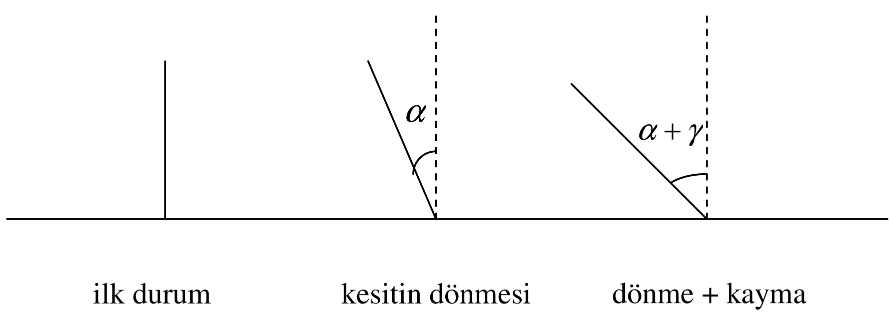
$$
\rho A\frac{\partial^2 W}{\partial T^2}+EI\frac{\partial^4 W}{\partial X^4}-\rho I\frac{\partial^4 W}{\partial X^2\partial T^2}=f(X,T) \tag{2.48}
$$

(2.49) ve (2.50) denklemleri Rayleigh kiriş modelinin sınır şartlarını ifade eder.

$$
\left(EI\frac{\partial^3 W}{\partial X^3}-\rho I\frac{\partial^3 W}{\partial X\partial T^2}\right)\delta W\Big|_0^L=0 \tag{2.49}
$$

$$
\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}\delta\frac{\partial W}{\partial X}\Big|_0^L=0 \tag{2.50}
$$

2.1.3 Shear Kiriş Modeli



Şekil 2.8: Kayma Deformasyonunun Kesite Etkisi

Shear kiriş modelinde Euler-Bernoulli kiriş modelinden farklı olarak kayma deformasyonları da hesaba katılır. Şekil 2.8'de eğilmenin yarattığı dönme açısına ek olarak kayma deformasyonunun da yarattığı açı gösterilmiştir. Tüm açı ikisinin toplamı olarak ifade edilir. (2.51) denkleminde bu ifade edilmiştir.

$$\alpha + \gamma = \frac{\partial W}{\partial X} \tag{2.51}$$

Gerinme eğilmeye bağlı dönme açısı cinsinden ifade edilir.

$$\varepsilon_{xx} = -\frac{\partial \alpha}{\partial x} y \tag{2.52}$$

(2.52) denklemi (2.1) denkleminde yerine konulursa, potansiyel enerji dönme açısı ile ifade edilir.

$$P_{E\,egilme} = \frac{1}{2}\int_0^L \int_A E\left(-\frac{\partial \alpha}{\partial X} y\right)^2 dAdX \tag{2.53}$$

$$P_{E\,egilme} = \frac{1}{2}\int_0^L E\left(\frac{\partial \alpha}{\partial X}\right)^2 \left(\int_A y^2 dA\right) dX \tag{2.54}$$

$$P_{E\,egilme} = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{\partial \alpha}{\partial X}\right)^2 dX \tag{2.55}$$

Kayma deformasyonu, potansiyel enerjinin bir terimi olarak ifade edilir.

$$P_{E\,kayma} = \frac{1}{2}\int_0^L k' GA\gamma^2 dX \tag{2.56}$$

Burada k' kayma faktörünü ve G kayma modülünü belirtir. Kayma deformasyonundan kaynaklanan açı (γ), tüm açıdan eğilmeden kaynaklanan dönme açısının (α) çıkartılmasıyla elde edilir.

$$\gamma = \frac{\partial W}{\partial X} - \alpha \tag{2.57}$$

(2.57) denklemi (2.58)'de yerine konulur.

$$P_{E\,kayma} = \frac{1}{2}\int_0^L k'GA\left(\frac{\partial W}{\partial X} - \alpha\right)^2 dX \tag{2.58}$$

(2.55), (2.58) ve (2.6) denklemleri (2.7) denkleminde yerine konularak Larangian denklemi ifade edilir.

$$L = \frac{1}{2}\int_0^L \left[\rho A\left(\frac{\partial W}{\partial T}\right)^2 - EI\left(\frac{\partial \alpha}{\partial X}\right)^2 - k'GA\left(\frac{\partial W}{\partial X} - \alpha\right)^2\right] dX \tag{2.59}$$

(2.59) denklemine Hamilton Prensibi uygulanır.

$$\frac{1}{2}\delta\int_{T_1}^{T_2}\int_0^L \left[\rho A\left(\frac{\partial W}{\partial T}\right)^2 - EI\left(\frac{\partial \alpha}{\partial X}\right)^2 - k'GA\left(\frac{\partial W}{\partial X} - \alpha\right)^2\right] dXdT + \int_{T_1}^{T_2} f\delta W dT = 0 \tag{2.60}$$

(2.60) denklemini oluşturan terimler (2.61), (2.62) ve (2.63) denlemlerinde açılarak yazılır ve (2.64) denklemi elde edilir.

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \rho A\left(\frac{\partial W}{\partial T}\right)\delta\left(\frac{\partial W}{\partial T}\right) dTdX = \int_0^L \left[\rho A\left(\frac{\partial W}{\partial T}\right)\delta w \,|_{T_1}^{T_2} - \int_{T_1}^{T_2} \rho A \frac{\partial^2 W}{\partial T^2}\delta W dT\right] dX \tag{2.61}$$

$$-EI\int_{T_1}^{T_2}\int_0^L \left(\frac{\partial \alpha}{\partial X}\right)\delta\left(\frac{\partial \alpha}{\partial X}\right) dXdT = -EI\int_{T_1}^{T_2}\left[\frac{\partial \alpha}{\partial X}\delta\frac{\partial \alpha}{\partial X}\,|_0^L + \int_0^L \frac{\partial^2 \alpha}{\partial X^2}\delta\alpha dX\right] dT \tag{2.62}$$

$$\int_{T_1}^{T_2}\int_0^L k'GA\left(\frac{\partial W}{\partial X}-\alpha\right)\delta\left(\frac{\partial W}{\partial X}-\alpha\right)dXdT = \int_{T_1}^{T_2}\int_0^L k'GA\left(\frac{\partial W}{\partial X}-\alpha\right)\delta\left(\frac{\partial W}{\partial X}\right)dXdT$$
$$+\int_{T_1}^{T_2}\int_0^L k'GA\left(\frac{\partial W}{\partial X}-\alpha\right)\delta\alpha dXdT$$
$$=-\int_{T_1}^{T_2} k'GA\left(\frac{\partial W}{\partial X}-\alpha\right)\delta W \,|_0^L\, dT \tag{2.63}$$
$$+\int_{T_1}^{T_2}\int_0^L k'GA\left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}-\frac{\partial \alpha}{\partial X}\right)\delta W dXdT$$
$$+\int_{T_1}^{T_2}\int_0^L k'GA\left(\frac{\partial W}{\partial X}-\alpha\right)\delta\alpha dXdT$$

$$\int_{T_1}^{T_2}\int_0^L\left[-\rho A\left(\frac{\partial W}{\partial T}\right)^2+k'GA\left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}-\frac{\partial\alpha}{\partial X}\right)+f\right]\delta W dXdT$$
$$+\int_{T_1}^{T_2}\int_0^L\left[EI\frac{\partial^2\alpha}{\partial X^2}+k'GA\left(\frac{\partial W}{\partial X}-\alpha\right)\right]\delta\alpha dXdT \tag{2.64}$$
$$-\int_{T_1}^{T_2}\left(EI\frac{\partial\alpha}{\partial X}\delta\alpha\,|_0^L+k'GA\left(\frac{\partial W}{\partial X}-\alpha\right)\delta W\,|_0^L\right)dT=0$$

(2.64) denkleminden Shear kiriş modeline ait hareket denklemleri aşağıdaki gibi yazılır.

$$\rho A\left(\frac{\partial W}{\partial T}\right)^2-k'GA\left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}-\frac{\partial\alpha}{\partial X}\right)=f \tag{2.65}$$

$$EI\frac{\partial^2\alpha}{\partial X^2}+k'GA\left(\frac{\partial W}{\partial X}-\alpha\right)=0 \tag{2.66}$$

Shear kiriş modeline ait sınır şartları ise aşağıda elde edilen denklemlerden türetilir.

$$\frac{\partial\alpha}{\partial X}\delta\alpha\,|_0^L=0\,,\ \left(\frac{\partial W}{\partial X}-\alpha\right)\delta W\,|_0^L=0 \tag{2.67a, b}$$

Sınır şartları; serbest uç için;

$$\frac{\partial \alpha}{\partial X} = 0 \,, \; \left(\frac{\partial W}{\partial X} - \alpha \right) = 0 \tag{2.68a, b}$$

menteşe ile tutturulmuş uç için;

$$\frac{\partial \alpha}{\partial X} = 0 \,, \; W = 0 \tag{2.69a, b}$$

ankastre uç için;

$$\alpha = 0 \,, \; W = 0 \tag{2.70a, b}$$

kayıcı (sliding) uç için;

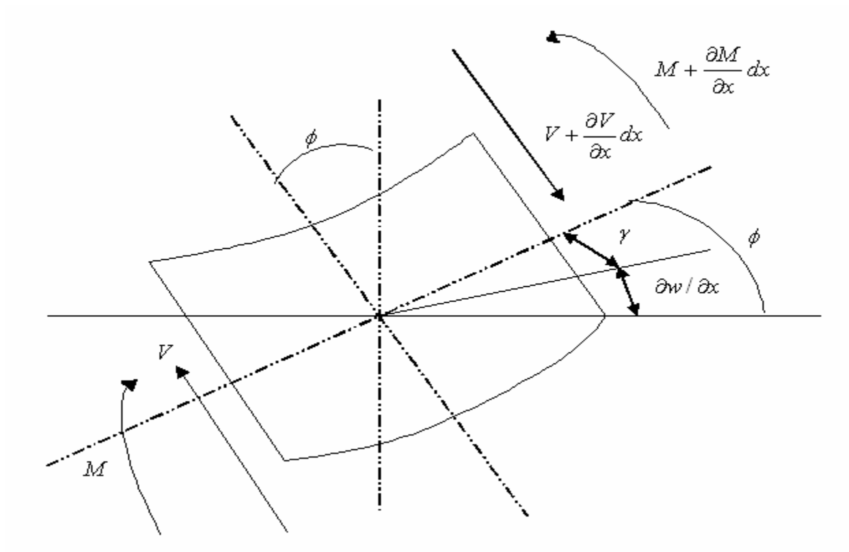
$$\alpha = 0 \,, \; \left(\frac{\partial W}{\partial X} - \alpha \right) = 0 \tag{2.71a, b}$$

şeklinde ifade edilir.

2.1.4 Timoshenko Kiriş Modeli

Timoshenko kiriş modeli, kinetik enerji denkleminde Shear modelinden farklı olarak $K_{Edön}$ terimini, potansiyel enerji denkleminde ise Rayleigh kiriş modelinden farklı olarak P_{Ekayma} terimini içerir.

Şekil 2.9'da kayma deformasyonlarını ve dönme ataletini de hesaba katan bir Timoshenko elemanı verilmiştir.[12]



Şekil 2.9: Timoshenko Kiriş Elemanı

$$K_{E\,dön} = \frac{1}{2}\int_0^L \rho I \dot{\alpha}^2 dX \tag{2.72}$$

Sadece bu terimin varyasyonu hesaplanırsa

$$K_{E\,dön} = \int_{T_1}^{T_2}\int_0^L \rho I \dot{\alpha}^2 dX\,dT = \int_{T_1}^{T_2}\int_0^L \frac{\partial \alpha}{\partial T}\rho I \delta\left(\frac{\partial \alpha}{\partial T}\right) dX\,dT \tag{2.73}$$

$$K_{E\,dön} = \rho I\left[\int_0^L \frac{\partial \alpha}{\partial T}\delta\alpha\,|_{T_1}^{T_2}\ dX - \int_{T_1}^{T_2}\int_0^L \frac{\partial^2 \alpha}{\partial T^2}\delta\alpha dX\,dT\right] \tag{2.74}$$

şeklinde olur.

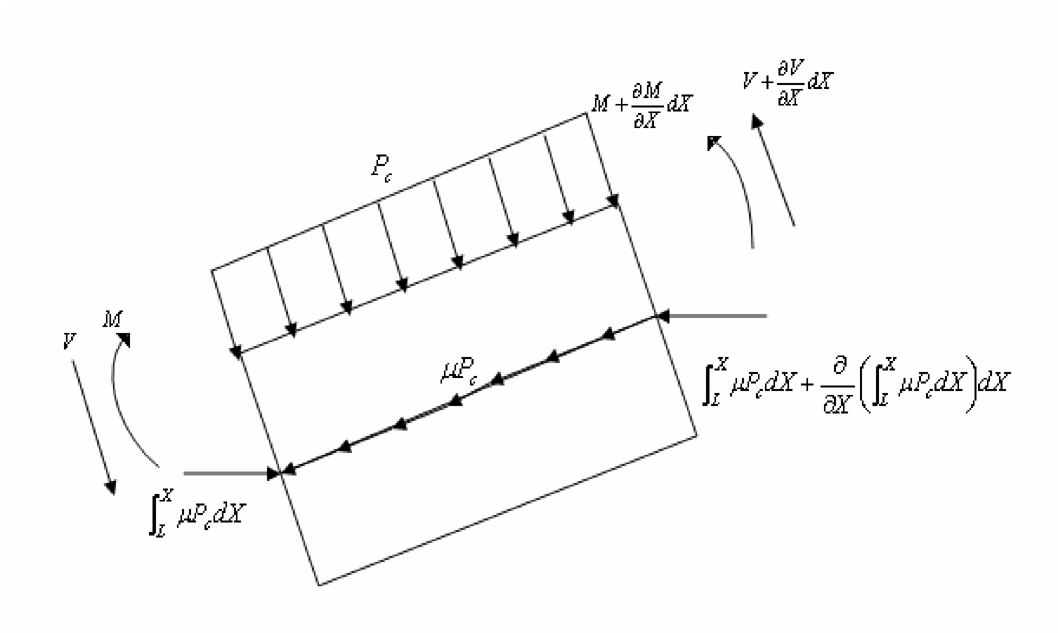
Bu terim, Shear modelindeki kinetik enerji denklemlerine eklendiğinde, Timoshenko kiriş modeline ait hareket denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\rho A\left(\frac{\partial W}{\partial T}\right)^2 - k'GA\left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} - \frac{\partial \alpha}{\partial X}\right) = f \tag{2.75}$$

$$\rho I \frac{\partial^2 \alpha}{\partial T^2} - EI \frac{\partial^2 \alpha}{\partial X^2} - k'GA\left(\frac{\partial W}{\partial X} - \alpha\right) = 0 \tag{2.76}$$

Timoshenko kiriş modeline ait sınır şartları Shear kiriş modeline ait sınır koşulları ile aynıdır.

2.2 Hareket Denklemlerinin Serbest Cisim Diyagramı Kullanılarak Elde Edilmesi



Şekil 2.10: Disk-Fren Sistemine Ait Serbest Cisim Diyagramı

2.2.1 Euler-Bernoulli Kirişi

Disk-Fren sistemine ait serbest cisim diyagramı Şekil 2.10’da verilmiştir. Serbest cisim diyagramından kuvvet dengesini yazarsak;

$$V - (V + \frac{\partial V}{\partial X} dX) + P_c dX + \mu P_c \frac{\partial W}{\partial X} dX - \rho A \frac{\partial^2 W}{\partial T^2} = 0 \tag{2.77}$$

$$-\frac{\partial V}{\partial X} + P_c + \mu P_c \frac{\partial W}{\partial X} - \rho A \frac{\partial^2 W}{\partial T^2} = 0 \tag{2.78}$$

Moment Dengesini yazarsak;

$$M-(M+\frac{\partial M}{\partial X}dX)-V\frac{dX}{2}-(V+\frac{\partial V}{\partial X}dX)\frac{dX}{2}-\left(\int_L^X \mu P_c dX\right)\frac{\partial W}{\partial X}\frac{dX}{2}$$
$$-\left(\int_L^X \mu P_c dX\right)\frac{\partial W}{\partial X}\frac{dX}{2}-\frac{\partial}{\partial X}\left(\int_L^X \mu P_c dX\right)dX\frac{\partial W}{\partial X}\frac{dX}{2}=0 \tag{2.79}$$

$$-\frac{\partial M}{\partial X}dX-VdX-\left(\int_L^X \mu P_c dX\right)\frac{\partial W}{\partial X}dX=0 \tag{2.80}$$

$$-\frac{\partial M}{\partial X}-V-\left(\int_L^X \mu P_c dX\right)\frac{\partial W}{\partial X}=0 \tag{2.81}$$

Burada kesme kuvveti V ’yi yalnız bırakırsak;

$$V=-\frac{\partial M}{\partial X}-\left(\int_L^X \mu P_c dX\right)\frac{\partial W}{\partial X} \tag{2.82}$$

$$V=-\frac{\partial M}{\partial X}+\left(\int_X^L \mu P_c dX\right)\frac{\partial W}{\partial X} \tag{2.83}$$

$M=-EI\dfrac{\partial^2 W}{\partial X^2}$ kabulü doğrultusunda (2.83) denklemi aşağıdaki hale gelir.

$$V=-\frac{\partial}{\partial X}\left(-EI\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}\right)+\left(\int_X^L \mu P_c dX\right)\frac{\partial W}{\partial X} \tag{2.84}$$

Kesme kuvvetinin X ’e göre türevini alırsak;

$$\frac{\partial V}{\partial X}=EI\frac{\partial^4 W}{\partial X^4}+\frac{\partial}{\partial X}\left[\left(\int_X^L \mu P_c dX\right)\frac{\partial W}{\partial X}\right] \tag{2.85}$$

(2.85) denklemini (2.78) denkleminde yerine koyarsak Leipholz yükleme koşulu için Euler-Bernoulli kirişine ait hareket denklemi elde edilmiş olur.

$$-EI\frac{\partial^4 W}{\partial X^4}-\mu P_c\frac{\partial W}{\partial X}-\left(\int_X^L \mu P_c dX\right)\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}+\mu P_c\frac{\partial W}{\partial X}+P_c-\rho A\frac{\partial^2 W}{\partial T^2}=0 \tag{2.86}$$

(2.86) denklemi düzenlenirse aşağıdaki hale gelir.

$$\rho A\frac{\partial^2 W}{\partial T^2}+EI\frac{\partial^4 W}{\partial X^4}+\left(\int_X^L \mu P_c dX\right)\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}=P_c \tag{2.87}$$

2.2.2 Rayleigh Kirişi

Rayleigh kirişinin kuvvet dengesi Euler-Bernoulli kirişi ile aynıdır. Moment dengesinde ise dönme ataleti de hesaba katılır.

$$-\frac{\partial M}{\partial X}-V-\left(\int_L^X \mu P_c dX\right)\frac{\partial W}{\partial X}-\rho I\frac{\partial^2\alpha}{\partial T^2}=0 \tag{2.88}$$

Burada eğilmeden kaynaklanan dönme açısı α için $\alpha=\frac{\partial W}{\partial X}$ eşitliği yazlır ve kesme kuvveti V 'nin X 'e göre türevi alındığında aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\frac{\partial V}{\partial X}=EI\frac{\partial^4 W}{\partial X^4}+\frac{\partial}{\partial X}\left[\left(\int_X^L \mu P_c dX\right)\frac{\partial W}{\partial X}\right]-\rho I\frac{\partial^4 W}{\partial X^2\partial T^2} \tag{2.89}$$

(2.89) denklemi (2.78) denkleminde yerine konulursa;

$$\begin{aligned}-EI\frac{\partial^4 W}{\partial X^4}-\mu P_c\frac{\partial W}{\partial X}-\left(\int_X^L \mu P_c dX\right)\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}+\mu P_c\frac{\partial W}{\partial X}\\ +\rho I\frac{\partial^4 W}{\partial X^2\partial T^2}-\rho A\frac{\partial^2 W}{\partial T^2}+P_c=0\end{aligned} \tag{2.90}$$

(2.90) denklemi düzenlendiğinde Rayleigh kiriş modeline ait harekt denklemi Leipholz yükleme koşulu için ifade edilmiş olur.

$$\rho A\frac{\partial^2 W}{\partial T^2}+EI\frac{\partial^4 W}{\partial X^4}-\rho I\frac{\partial^4 W}{\partial X^2\partial T^2}+\left(\int_X^L \mu P_c dX\right)\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}=P_c \tag{2.91}$$

2.2.3 Shear Kirişi

Kesme kuvveti V , moment M ve kaymadan kaynaklanan dönme açısı γ aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$V=k'GA\gamma\,,\ \gamma=\alpha-\frac{\partial W}{\partial X}\,,\ M=-EI\frac{\partial\alpha}{\partial X} \tag{2.92 a, b, c}$$

Yukarıdaki dönüşümler uygulanarak (2.78) ve (2.81) denklemleri yeniden yazılarak düzenlendiğinde Shear kiriş modeline ait hareket denklemleri elde edilmiş olur.

$$\rho A\frac{\partial^2 W}{\partial T^2}-k'GA\left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}-\frac{\partial\alpha}{\partial X}\right)=P_c+\mu P_c\frac{\partial W}{\partial X} \tag{2.93}$$

$$EI\frac{\partial^2\alpha}{\partial X^2}+k'GA\left(\frac{\partial W}{\partial X}-\alpha\right)=-\left(\int_X^L \mu P_c dX\right)\frac{\partial W}{\partial X} \quad (2.94)$$

2.2.4 Timoshenko Kirişi

(2.92) denklemindeki dönüşümleri kullanarak ve Shear kiriş modeline ek olarak dönme ataletini de hesaba katarak Leipholz yükleme koşulu için Timoshenko kiriş modeline ait hareket denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\rho A\frac{\partial^2 W}{\partial T^2}-k'GA\left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}-\frac{\partial\alpha}{\partial X}\right)=P_c+\mu P_c\frac{\partial W}{\partial X} \quad (2.95)$$

$$\rho I\frac{\partial^2\alpha}{\partial X^2}-EI\frac{\partial^2\alpha}{\partial X^2}-k'GA\left(\frac{\partial W}{\partial X}-\alpha\right)=\left(\int_X^L \mu P_c dX\right)\frac{\partial W}{\partial X} \quad (2.96)$$

2.3 Boyutsuzlaştırma

Hareket denklemlerini boyutsuzlaştırmak için çeşitli parametreler kullanılmıştır. Bu parametreler (2.97) denkleminde ifade edilmiştir. Burada x boyutsuz uzunluğu, t boyutsuz zamanı, w boyutsuz enine eğilme fonksiyonunu (transverse deflection) belirtir.

$$X=xL\,,\ T=tL^2\sqrt{\frac{\rho A}{EI}}\,,\ W=wL\,,\Omega=\frac{\omega}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}\,,P=p\frac{EI}{L^3}\,,P_0=p_0\frac{EI}{L^3} \quad (2.97)$$

P ve P_0 leipholz yüklemesinden kaynaklanan birim alandaki dinamik ve statik yüklerdir. Ω uyarım frekansını ifade eder. [1] Bu boyutlu büyüklüklerin boyutsuz ifadeleri takip eden denklemlerde sırasıyla p, p_0 ve ω olarak verilmiştir.

2.3.1 Euler Bernoulli Kirişi

Denklem (2.16)'da Euler-Bernoulli kirişine ait hareket denklemi ifade edilmişti. Leipholz problemi için terimleri yerlerine koyarsak (2.98) denklemi elde edilir. [1]

$$\rho A\frac{\partial^2 W}{\partial T^2}+EI\frac{\partial^4 W}{\partial X^4}+\mu(P_0+P\cos\Omega T)(L-X)\frac{d^2 W}{dX^2}=0 \qquad (2.98)$$

(2.97)’deki boyutsuzlaştırma parametreleri uygulanır.

$$\frac{\rho ALEI}{L^4\rho A}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{EIL}{L^4}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{EI}{L^3}\mu(p_0+p\cos\omega t)(1-x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \qquad (2.99)$$

Denklem $\frac{EI}{L^3}$ ile böIündüğünde Euler-bernoulli kiriş modeline ait boyutsuz hareket denklemi elde edilmiş olur.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\mu(p_0+p\cos\omega t)(1-x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \qquad (2.100)$$

2.3.2 Rayleigh Kirişi

Daha once (2.48) denkleminde elde edilmiş olan Rayleigh kiriş modeline ait hareket denkleminde Leipholz yükleme koşulundan kaynaklanan terimler yazıldığında (2.101) denklemine ulaşılır.

$$\rho A\frac{\partial^2 W}{\partial T^2}+EI\frac{\partial^4 W}{\partial X^4}-\rho I\frac{\partial^4 W}{\partial X^2\partial T^2}+\mu(P_0+P\cos\Omega T)(L-X)\frac{d^2 W}{dX^2}=0 \qquad (2.101)$$

(2.97) denkleminde belirtilen boyutsuzlaştırma parametreleri yardımıyla elde edilen denklem $\frac{EI}{L^3}$ terimi ile bölündüğünde, Rayleigh kiriş modeline ait boyutsuz hareket denklemi elde edilmiş olur..

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-\frac{I}{AL^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}+\mu(p_0+p\cos\omega t)(1-x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \qquad (2.102)$$

2.3.3 Shear Kirişi

(2.65) ve (2.66) denklemleri, Leipholz kirişi uyarınca yeniden yazıldığında (2.103) ve (2.104) denklemleri elde edilir.

$$\rho A\frac{\partial^2 W}{\partial T^2}-k'GA\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}+k'GA\frac{\partial\alpha}{\partial X}+\mu(P_0+P\cos\Omega T)\frac{dW}{dX}=0 \tag{2.103}$$

$$EI\frac{\partial^2\alpha}{\partial X^2}+k'GA\frac{\partial W}{\partial X}-k'GA\alpha-\mu(P_0+P\cos\Omega t)(L-X)\frac{dW}{dX}=0 \tag{2.104}$$

(2.97)'deki boyutsuz parametreler yardımıyla denklemler aşağıdaki hale gelir.

$$\frac{\rho ALEI}{\rho AL^4}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{k'GAL}{L^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{k'GA}{L}\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{EI}{L^3}\mu(p_0+p\cos\omega t)\frac{\partial w}{\partial x}=0 \tag{2.105}$$

$$\frac{EI}{L^2}\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}+\frac{k'GAL}{L}\frac{\partial w}{\partial x}-k'GA\alpha-\frac{EI}{L^2}\mu(p_0+p\cos\omega t)(1-x)\frac{\partial w}{\partial x}=0 \tag{2.106}$$

$$\frac{EI}{L^3}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{k'GA}{L}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{k'GA}{L^*}\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{EI}{L^3}\mu(p_0+p\cos\omega t)\frac{\partial w}{\partial x}=0 \tag{2.107}$$

$$\frac{EI}{L^2}\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}+\frac{k'GAL}{L}\frac{\partial w}{\partial x}-k'GA\alpha-\frac{EI}{L^2}\mu(p_0+p\cos\omega t)(1-x)\frac{\partial w}{\partial x}=0 \tag{2.108}$$

(2.107) denklemini $\frac{EI}{L^3}$ terimi ile ve (2.108) denklemini de $\frac{EI}{L^2}$ terimi ile bölersek (2.109) ve (2.110) denklemleri elde edilir.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{k'GAL^3}{EIL}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{k'GAL^3}{EIL}\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\mu(p_0+p\cos\omega t)\frac{\partial w}{\partial x}=0 \tag{2.109}$$

$$\frac{EI}{L^2}\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}+k'GA\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\alpha\right)-\mu(p_0+p\cos\omega t)(1-x)\frac{\partial w}{\partial x}=0 \tag{2.110}$$

Denklemler düzenlendiğinde Shear kiriş modeline ait boyutsuz hareket denklemleri elde edilmiş olur.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{k'GAL^2}{EI}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)+\mu(p_0+p\cos\omega t)\frac{\partial w}{\partial x}=0 \tag{2.111}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}+\frac{k'GAL^2}{EI}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\alpha\right)-\mu(p_0+p\cos\omega t)(1-x)\frac{\partial w}{\partial x}=0 \tag{2.112}$$

2.3.4 Timoshenko Kirişi

(2.75) ve (2.76) denklemleri, Leipholz kirişi uyarınca yeniden yazıldığında (2.113) ve (2.114) denklemleri elde edilir.

$$\rho A\frac{\partial^2 W}{\partial T^2}-k'GA\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}+k'GA\frac{\partial \alpha}{\partial X}+\mu(P_0+P\cos\Omega T)\frac{dW}{dX}=0 \tag{2.113}$$

$$\rho I\frac{\partial^2 \alpha}{\partial T^2}-EI\frac{\partial^2 \alpha}{\partial X^2}-k'GA\frac{\partial W}{\partial X}+k'GA\alpha-\mu(P_0+P\cos\Omega t)(L-X)\frac{dW}{dX}=0 \tag{2.114}$$

(2.97)'deki boyutsuz değişken ve parametreler kullanılarak, boyutlu olan hareket denklemleri boyutsuz hale getirilir. (2.113) denklemi (2.103) denkleminin aynısıdır. Dolayısıyla (2.94) denklemi boyutsuzlaştırılır.

$$\frac{\rho IEI}{\rho AL^4}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}-\frac{EI}{L^2}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}-k'GA\frac{\partial w}{\partial x}+k'GA\alpha-\frac{EI}{L^2}\mu(p_0+p\cos\omega t)(1-x)\frac{\partial w}{\partial x}=0 \tag{2.115}$$

$$\begin{aligned}\frac{I}{AL^2}\frac{EI}{L^2}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}-\frac{EI}{L^2}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}-\frac{k'GAL}{L}\frac{\partial w}{\partial x}&\\ +k'GA\alpha-\frac{EI}{L^2}\mu(p_0+p\cos\omega t)(1-x)\frac{\partial w}{\partial x}=0&\end{aligned} \tag{2.116}$$

(2.116) denklemi $\dfrac{EI}{L^2}$ terimine bölünürse (2.118) denklemi ile Timoshenko kiriş modelinin hareket denklemlerinden teki elde edilir. Diğer hareket denklemi (2.117) Shear kiriş modelinin hareket denklemi (2.111) ile aynıdır.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{k'GAL^2}{EI}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \alpha}{\partial x}\right) + \mu(p_0 + p\cos\omega t)\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad (2.117)$$

$$\frac{I}{AL^2}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} - \frac{k'GAL^2}{EI}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \alpha\right) - \mu(p_0 + p\cos\omega t)(1-x)\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad (2.118)$$

3. ÇİZGİLER METODU

Çizgiler Metodu (Method Of Lines), zamana ve konuma bağlı bir kısmi diferansiyel denklemin konuma bağlı boyutlarını sonlu fark yöntemi ile ayrıklaştırarak, denklemi her t adımında adi diferansiyel denkleme dönüştüren bir sayısal çözüm yöntemidir. [14] Bu yöntem ile hatlar boyunca sadece zamana bağlı bir adi diferansiyel denklem elde edilir. İncelediğimiz problemde deplasman fonksiyonu (W), zaman (T) ve bir konum boyutu (X) olmak üzere iki boyuta sahiptir. Yani deplasman fonksiyonu iki boyutludur. ($W(X,T)$) Problemde çizgiler metodu kullanılarak konum boyutuna tek boyutlu sonlu fark yaklaşımı uygulanır.

3.1 Eşit Aralıklı Bölünmüş Sonlu Fark Yöntemi

Sonlu Fark Yöntemi, ileri fark, geri fark ve merkezi fark olmak üzere üçe ayrılır.

3.1.1 İleri Sonlu Fark Yöntemi

f_{k+1}, f_{k+2}, f_{k+3}, f_{k+4} ve f_{k+5} terimlerinin Taylor Serisi kullanılarak açılımı aşağıdaki gibidir.

$$f_{k+1} = f_k + (\Delta) f_k' + \frac{(\Delta)^2}{2!} f_k'' + \frac{(\Delta)^3}{3!} f_k''' + \frac{(\Delta)^4}{4!} f_k^{\,iv} \tag{3.1}$$

$$f_{k+2} = f_k + (2\Delta) f_k' + \frac{(2\Delta)^2}{2!} f_k'' + \frac{(2\Delta)^3}{3!} f_k''' + \frac{(2\Delta)^4}{4!} f_k^{\,iv} \tag{3.2}$$

$$f_{k+3} = f_k + (3\Delta) f_k' + \frac{(3\Delta)^2}{2!} f_k'' + \frac{(3\Delta)^3}{3!} f_k''' + \frac{(3\Delta)^4}{4!} f_k^{\,iv} \tag{3.3}$$

$$f_{k+4} = f_k + (4\Delta) f_k' + \frac{(4\Delta)^2}{2!} f_k'' + \frac{(4\Delta)^3}{3!} f_k''' + \frac{(4\Delta)^4}{4!} f_k^{iv} \tag{3.4}$$

$$f_{k+5} = f_k + (5\Delta) f_k' + \frac{(5\Delta)^2}{2!} f_k'' + \frac{(5\Delta)^3}{3!} f_k''' + \frac{(5\Delta)^4}{4!} f_k^{iv} \tag{3.5}$$

3.1.1.1 $O(\Delta)$ Mertebesinden İleri Sonlu Fark Yöntemi

f_{k+1} teriminin açılımını yeniden düzenlersek ;

$$f_k' = \frac{f_{k+1} - f_k}{\Delta} - \frac{\Delta}{2!} f_k'' \tag{3.6}$$

$$f_k' = \frac{f_{k+1} - f_k}{\Delta} - O(\Delta) \tag{3.7}$$

(3.1) denklemi -2 ve (3.2) denklemi 1 katsayısı ile çarpılıp toplanırsa f_k' terimleri birbirini götürür ve toplama sonucunda $O(\Delta)$ mertebesinden ikinci türev f_k'' aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$f_k'' = \frac{f_k - 2f_{k+1} + f_{k+2}}{\Delta^2} + O(\Delta) \tag{3.8}$$

f_k''' terimini bulmak için (3.1) denklemi 3, (3.2) denklemi -3 ve (3.3) denklemi 1 ile çarpılarak toplanır. Toplama işlemi sonucunda f_k' terimleri birbirini götürür.

$$f_k''' = \frac{-f_k + 3f_{k+1} - 3f_{k+2} + f_{k+3}}{\Delta^3} + O(\Delta) \tag{3.9}$$

(3.1) denklemi -4, (3.2) denklemi 6, (3.3) denklemi -4, ve (3.4) denklemi 1 ile çarpılarak toplanır ise f_k^{iv} aşağıdaki gibi bulunur.

$$f_k^{iv} = \frac{f_k - 4f_{k+1} + 6f_{k+2} - 4f_{k+3} + f_{k+4}}{\Delta^4} \tag{3.10}$$

Tablo 3.1'de birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü türevlerin $O(\Delta)$ mertebesinden karşılıkları toplanmıştır.

Tablo 3.1: $O(\Delta)$ Mertebesinden İleri Fark

	f_k	f_{k+1}	f_{k+2}	f_{k+3}	f_{k+4}
$\Delta f_k'$	-1	1			
$\Delta^2 f_k''$	1	-2	1		
$\Delta^3 f_k'''$	-1	3	-3	1	
$\Delta^4 f_k^{iv}$	1	-4	6	-4	1

3.1.1.2 $O(\Delta)^2$ Mertebesinden İleri Sonlu Fark Yöntemi

(3.1) denklemi 4 ile çarpılır ve ondan (3.2) denklemi çıkartıldığında $O(\Delta)^2$ mertebesinden f_k' şu şekilde ifade edilir.

$$f_k' = \frac{-3f_k + 4f_{k+1} - f_{k+2}}{2\Delta} + O(\Delta)^2 \tag{3.11}$$

(3.1) denklemi -5, (3.2) denklemi 4 ve (3.3) denklemi -1 ile çarpılıp toplandığında f_k' terimlerinin katsayısı 0 olur.

$$f_k'' = \frac{2f_k - 5f_{k+1} + 4f_{k+2} - f_{k+3}}{\Delta^2} + O(\Delta)^2 \tag{3.12}$$

(3.1) denklemi 18, (3.2) denklemi -24, (3.3) denklemi 14 ve (3.4) denklemi -3 ile çarpılarak toplandığında, f_k' ve f_k'' terimleri birbirlerini götürürler.

$$f_k''' = \frac{-5f_k + 18f_{k+1} - 24f_{k+2} + 14f_{k+3} - 3f_{k+4}}{2\Delta^3} + O(\Delta)^2 \qquad (3.13)$$

(3.1) denklemi -14, (3.2) denklemi 26, (3.3) denklemi -24, (3.4) denklemi 11 ve (3.5) denklemi -2 ile çarpılarak toplandığında, f_k', f_k'' ve f_k''' terimlerinin katsayısı 0 olur. f_k^{iv} ise aşağıdaki gibi bulunur.

$$f_k^{iv} = \frac{3f_k - 14f_{k+1} + 26f_{k+2} - 24f_{k+3} + 11f_{k+4} - 2f_{k+5}}{\Delta^4} + O(\Delta)^2 \qquad (3.14)$$

Tablo 3.2'de $O(\Delta)^2$ mertebesinden birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü türevlerin yukarıda bulunan ifadeleri verilmiştir.

Tablo 3.2: $O(\Delta)^2$ Mertebesinden İleri Fark

	f_k	f_{k+1}	f_{k+2}	f_{k+3}	f_{k+4}	f_{k+5}
$2\Delta f_k'$	-3	4	-1			
$\Delta^2 f_k''$	2	-5	4	-1		
$2\Delta^3 f_k'''$	-5	18	-24	14	-3	
$\Delta^4 f_k^{iv}$	3	-14	26	-24	11	-2

3.1.2 Geri Sonlu Fark Yöntemi

$$f_{k-1} = f_k - (\Delta) f_k' + \frac{(\Delta)^2}{2!} f_k'' - \frac{(\Delta)^3}{3!} f_k''' + \frac{(\Delta)^4}{4!} f_k^{iv} \qquad (3.15)$$

$$f_{k-2} = f_k - (2\Delta) f_k' + \frac{(2\Delta)^2}{2!} f_k'' - \frac{(2\Delta)^3}{3!} f_k''' + \frac{(2\Delta)^4}{4!} f_k^{iv} \qquad (3.16)$$

$$f_{k-3} = f_k - (3\Delta) f_k' + \frac{(3\Delta)^2}{2!} f_k'' - \frac{(3\Delta)^3}{3!} f_k''' + \frac{(3\Delta)^4}{4!} f_k^{\,iv} \tag{3.17}$$

$$f_{k-4} = f_k - (4\Delta) f_k' + \frac{(4\Delta)^2}{2!} f_k'' - \frac{(4\Delta)^3}{3!} f_k''' + \frac{(4\Delta)^4}{4!} f_k^{\,iv} \tag{3.18}$$

$$f_{k-5} = f_k - (5\Delta) f_k' + \frac{(5\Delta)^2}{2!} f_k'' - \frac{(5\Delta)^3}{3!} f_k''' + \frac{(5\Delta)^4}{4!} f_k^{\,iv} \tag{3.19}$$

3.1.2.1 $O(\Delta)$ Mertebesinden Geri Sonlu Fark Yöntemi

(3.15) denklemini yeniden düzenlersek, $O(\Delta)$ mertebesinden birinci türev f_k' aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$f_k' = \frac{f_k - f_{k-1}}{\Delta} + O(\Delta) \tag{3.20}$$

f_k' terimini elde etmek için (3.15) denklemi -2 çarpılarak (3.16) denklemi ile toplanır.

$$f_k'' = \frac{f_k - 2f_{k-1} + f_{k-2}}{\Delta^2} + O(\Delta) \tag{3.21}$$

(3.17) denklemi -1, (3.16) denklemi 3 ve (3.15) denklemi -3 ile çarpılarak birbirleriyle toplanırsa, f_k''' aşağıdaki gibi bulunur.

$$f_k''' = \frac{-f_{k-3} + 3f_{k-2} - 3f_{k-1} + f_k}{\Delta^3} + O(\Delta) \tag{3.22}$$

(3.18) denklemi 1, (3.17) denklemi -4, (3.16) denklemi 6, ve (3.15) denklemi -4 ile çarpılıp, belirtilen katsayılarla çarpılmış denklemler birbirleriyle toplandığında f_k^{iv} aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$f_k^{iv} = \frac{f_{k-4} - 4f_{k-3} + 6f_{k-2} - 4f_{k-1} + f_k}{\Delta^4} + O(\Delta) \tag{3.23}$$

Tablo 3.3'de $O(\Delta)$ mertebesinden birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü türevler verilmiştir.

Tablo 3.3: $O(\Delta)$ Mertebesinden Geri Sonlu Fark

	f_{k-4}	f_{k-3}	f_{k-2}	f_{k-1}	f_k
$\Delta f_k'$				-1	1
$\Delta^2 f_k''$			1	-2	1
$\Delta^3 f_k'''$		-1	3	-3	1
$\Delta^4 f_k^{iv}$	1	-4	6	-4	1

3.1.2.2 $O(\Delta)^2$ Mertebesinden Geri Sonlu Fark Yöntemi

(3.15) denklemi -4 ile çarpılarak (3.16) denklemi ile toplanırsa, toplamdaki f_k'' teriminin katsayısı 0 olur.

$$f_k' = \frac{3f_k - 4f_{k-1} + f_{k-2}}{2\Delta} + O(\Delta)^2 \tag{3.24}$$

(3.15) denklemi -5, (3.16) denklemi 4 ve (3.17) denklemi -1 ile çarpılarak toplandığında $O(\Delta)^2$ mertebesinden f_k'' terimi aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$f_k'' = \frac{2f_k - 5f_{k-1} + 4f_{k-2} - f_{k-3}}{\Delta^2} + O(\Delta)^2 \tag{3.25}$$

Aynı şekilde, (3.15), (3.16), (3.17), (3.18) ve (3.19) denklemleri sırasıyla -18, 24, -14, 3, 0 katsayıları ile çarpılarak toplandığında f_k''' ve bu denklemler yine sırasıyla -14, 26, -24, 11, -2 ile çarpılarak toplandığında f_k^{iv} aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$f_k''' = \frac{5f_k - 18f_{k-1} + 24f_{k-2} - 14f_{k-3} + 3f_{k-4}}{2\Delta^3} + O(\Delta)^2 \tag{3.26}$$

$$f_k^{iv} = \frac{3f_k - 14f_{k-1} + 26f_{k-2} - 24f_{k-3} + 11f_{k-4} - 2f_{k-5}}{\Delta^4} \tag{3.27}$$

$O(\Delta)^2$ mertebesinden geri sonlu fark yöntemi ile birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü terimler Tablo 3.4'te bir arada verilmiştir.

Tablo 3.4: $O(\Delta)^2$ Mertebesinden Geri Sonlu Fark

	f_{k-5}	f_{k-4}	f_{k-3}	f_{k-2}	f_{k-1}	f_k
$2\Delta f_k'$				1	-4	3
$\Delta^2 f_k''$			-1	4	-5	2
$2\Delta^3 f_k'''$		3	-14	24	-18	5
$\Delta^4 f_k^{iv}$	-2	11	-24	26	-14	3

3.1.3 Merkezi Sonlu Fark Yöntemi

3.1.3.1 $O(\Delta)^2$ Mertebesinden Merkezi Fark

(3.1) denkleminden (3.15) denklemi çıkartılırsa;

$$\begin{aligned} f_{k+1} - f_{k-1} = f_k + (\Delta) f_k' + \frac{(\Delta)^2}{2!} f_k'' + \frac{(\Delta)^3}{3!} f_k''' + \frac{(\Delta)^4}{4!} f_k^{iv} \\ - f_k + (\Delta) f_k' - \frac{(\Delta)^2}{2!} f_k'' + \frac{(\Delta)^3}{3!} f_k''' - \frac{(\Delta)^4}{4!} f_k^{iv} \end{aligned} \tag{3.28}$$

$$f_{k+1} - f_{k-1} = 2(\Delta) f_k' + \frac{(\Delta)^3}{3} f_k''' \tag{3.29}$$

$$f_k' = \frac{f_{k+1} - f_{k-1}}{2\Delta} - \frac{(\Delta)^2 f_k'''}{6} \tag{3.30}$$

$$f_k' = \frac{f_{k+1} - f_{k-1}}{2\Delta} - O(\Delta)^2 \tag{3.31}$$

(3.1) denklemi ile (3.15) denklemi toplanırsa;

$$\begin{aligned} f_{k+1} + f_{k-1} = {} & f_k + (\Delta) f_k' + \frac{(\Delta)^2}{2!} f_k'' + \frac{(\Delta)^3}{3!} f_k''' + \frac{(\Delta)^4}{4!} f_k^{iv} \\ & + f_k - (\Delta) f_k' + \frac{(\Delta)^2}{2!} f_k'' - \frac{(\Delta)^3}{3!} f_k''' + \frac{(\Delta)^4}{4!} f_k^{iv} \end{aligned} \tag{3.32}$$

$$f_{k+1} + f_{k-1} = 2 f_k + (\Delta)^2 f_k'' + \frac{(\Delta)^4}{12} f_k^{iv} \tag{3.33}$$

$$f_k'' = \frac{f_{k+1} - 2 f_k + f_{k-1}}{\Delta^2} - \frac{(\Delta)^2}{12} f_k^{iv} \tag{3.34}$$

$$f_k'' = \frac{f_{k+1} - 2 f_k + f_{k-1}}{\Delta^2} + O(\Delta)^2 \tag{3.35}$$

f_k' ve f_k'' terimlerinin elde edilmesine benzer olarak, f_k''' terimini elde etmek için (3.16), (3.15), (3.1) ve (3.2) denklemleri sırasıyla -1, 2, -2, 1 katsayılarıyla, f_k^{iv} terimi için ise 1, -4, -4, 6 katsayılarıyla çarpılarak birbirleriyle toplanır.

$$f_k''' = \frac{- f_{k-2} + 2 f_{k-1} - 2 f_{k+1} + f_{k+2}}{2\Delta^3} + O(\Delta)^2 \tag{3.36}$$

$$f_k^{iv} = \frac{f_{k-2} - 4 f_{k-1} + 6 f_k - 4 f_{k+1} + 6 f_{k+2}}{\Delta^4} + O(\Delta)^2 \tag{3.37}$$

Tablo 3.5'de $O(\Delta)^2$ mertebesinden merkezi sonlu farklar bir arada verilmiştir.

Tablo 3.5: $O(\Delta)^2$ Mertebesinden Merkezi Fark

	f_{k-2}	f_{k-1}	f_k	f_{k+1}	f_{k+2}
$2\Delta f_k'$		-1	0	1	
$\Delta^2 f_k''$		1	-2	1	
$2\Delta^3 f_k'''$	-1	2	0	-2	1
$\Delta^4 f_k^{iv}$	1	-4	6	-4	6

3.1.3.2 $O(\Delta)^4$ Mertebesinden Merkezi Fark

(3.16), (3.15), (3.2), (3.1) denklemleri sırasıyla 1, -8, 8, -1 katsayıları ile çarpılarak toplanırsa f'_k ve -1,16, 16, -1 katsayıları ile çarpılarak toplanırsa f_k'' aşağıdaki gibi elde edilir.

$$f_k' = \frac{f_{k-2} - 8f_{k-1} + 8f_{k+1} - f_{k+2}}{12\Delta} + O(\Delta)^4 \tag{3.38}$$

$$f_k'' = \frac{-f_{k-2} + 16f_{k-1} - 30f_k + 16f_{k+1} - f_{k+2}}{12\Delta^2} + O(\Delta)^4 \tag{3.39}$$

(3.17), (3.16), (3.15), (3.1), (3.2), (3.3) denklemleri sırasıyla 1, -8, 13, -13, 8, -1 ile çarpılarak toplandığında ise f_k''' elde edilir. Aynı denklemler yine sırasıyla -1, 12, -39, -39, 12, -1 ile çarpılarak toplanırsa f_k^{iv} elde edilir.

$$f_k''' = \frac{f_{k-3} - 8f_{k-2} + 13f_{k-1} - 13f_{k+1} + 8f_{k+2} - f_{k+3}}{8\Delta^3} + O(\Delta)^4 \tag{3.40}$$

$$f_k^{iv} = \frac{-f_{k-3} + 12f_{k-2} - 39f_{k-1} + 56f_k - 39f_{k+1} + 12f_{k+2} - f_{k+3}}{6\Delta^4} + O(\Delta)^4 \tag{3.41}$$

Tablo 3.6'da $O(\Delta)^4$ mertebesinden türevler toplu halde verilmiştir.

Tablo 3.6: $O(\Delta)^4$ Mertebesinden Merkezi Fark

	f_{k-3}	f_{k-2}	f_{k-1}	f_k	f_{k+1}	f_{k+2}	f_{k+3}
$12\Delta f_k'$		1	-8	0	8	-1	
$12\Delta^2 f_k''$		-1	16	-30	16	-1	
$8\Delta^3 f_k'''$	1	-8	13	0	-13	8	-1
$6\Delta^4 f_k^{IV}$	-1	12	-39	56	-39	12	-1

3.2 Kiriş Modellerine Ait Hareket Denklemlerinin Ayrıklaştırılması

Her kiriş modeline ait hareket denklemlerini ifade eden kısmi diferansiyel denklemler sonlu fark yaklaşımı kullanılarak hatlar boyunca her t adımında birer adi diferansiyel denkleme dönüştürülürler.

Euler-Bernoulli Kiriş Modeli harekete denklemi;

$$
\begin{aligned}
w_k''(t) = &-\frac{w_{k+2}(t) - 4w_{k+1}(t) + 6w_k(t) - 4w_{k-1}(t) + w_{k-2}(t)}{\Delta^4} \\
&-(1-(1-k)\Delta)(p_0 + p\cos\omega t)\frac{w_{k+1}(t) - 2w_k(t) + w_{k-1}(t)}{\Delta^2}
\end{aligned} \tag{3.42}
$$

Rayleigh Kiriş Modeli hareket denklemi;

$$
\begin{aligned}
w_k''(t) = &-\frac{w_{k+2}(t) - 4w_{k+1}(t) + 6w_k(t) - 4w_{k-1}(t) + w_{k-2}(t)}{\Delta^4} \\
&-\left(1-(k-1)\Delta\right)(p_0 + p\cos\omega t)\frac{w_{k+1}(t) - 2w_k(t) + w_{k-1}(t)}{\Delta^2} \\
&+\frac{I^*}{A^* L^{*2}}\frac{w_{k+1}''(t) - 2w_k''(t) + w_{k-1}''(t)}{\Delta^2}
\end{aligned} \tag{3.43}
$$

Shear Kiriş Modeli hareket denklemleri;

$$
\begin{aligned}
w_k''(t) = {} & \frac{k'G^*A^*L^{*2}}{E^*I^*}\left(\frac{w_{k+1}(t)-2w_k(t)+w_{k-1}(t)}{\Delta^2}-\frac{\alpha_{k+1}(t)-\alpha_{k-1}(t)}{2\Delta}\right) \\
& -(p_0+p\cos\omega t)\left(\frac{w_{k+1}(t)-w_{k-1}(t)}{2\Delta}\right)
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

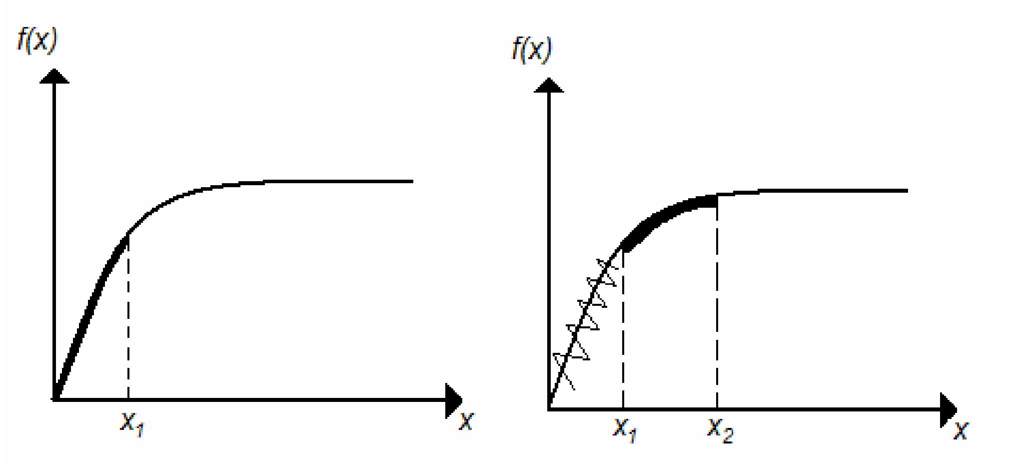
$$
\begin{aligned}
0 = {} & \frac{k'G^*A^*L^{*2}}{E^*I^*}\left(\frac{w_{k+1}(t)-w_{k-1}(t)}{2\Delta}-\alpha_k\right)+\left(\frac{\alpha_{k+1}(t)-2\alpha_k(t)+\alpha_{k-1}(t)}{\Delta^2}\right) \\
& -(p_0+p\cos\omega t)\left(1-(k-1)\Delta\right)\left(\frac{w_{k+1}(t)-w_{k-1}(t)}{2\Delta}\right)
\end{aligned}
\tag{3.45}
$$

Timoshenko Kiriş Modeli hareket denklemleri;

$$
\begin{aligned}
w_k''(t) = {} & \frac{k'G^*A^*L^{*2}}{E^*I^*}\left(\frac{w_{k+1}(t)-2w_k(t)+w_{k-1}(t)}{\Delta^2}-\frac{\alpha_{k+1}(t)-\alpha_{k-1}(t)}{2\Delta}\right) \\
& -(p_0+p\cos\omega t)\left(\frac{w_{k+1}(t)-w_{k-1}(t)}{2\Delta}\right)
\end{aligned}
\tag{3.46}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{I^*}{A^*L^{*2}}\alpha_k''(t) = {} & \frac{k'G^*A^*L^{*2}}{E^*I^*}\left(\frac{w_{k+1}(t)-w_{k-1}(t)}{2\Delta}-\alpha_k\right) \\
& +\left(\frac{\alpha_{k+1}(t)-2\alpha_k(t)+\alpha_{k-1}(t)}{\Delta^2}\right) \\
& -(p_0+p\cos\omega t)\left(1-(k-1)\Delta\right)\left(\frac{w_{k+1}(t)-w_{k-1}(t)}{2\Delta}\right)
\end{aligned}
\tag{3.47}
$$

Ayrıklaştırılan hareket denklemleri MATHEMATICA yardımıyla sayısal olarak çözülür. Çözüm yapılırken belleği daha iyi kullanabilmek için adım adım çözüm yaptırılır. Şekil 3.1'de gösterildiği gibi, ilk önce x_1 noktasına kadar çözüm yapılır. Program bunu bir yere kaydeder. Daha sonra x_2 ve x_1 arasını çözer, x_1'e kadar olan çözümle ilgilenmez. Bu yöntem sayesinde tekrar tekrar aynı yerler çözdürülmez.



Şekil 3.1: Adım Adım Çözüm Yöntemi

4. SONUÇLAR

Kiriş teorilerinin kayma deformasyonunu ve dönme ataletini göz önünde bulundurup bulundurmadıklarına bağlı olarak ayrıldığı ve farklı isimler aldığı daha önceden belirtilmişti. Bu kısımda kayma deformasyonu ve dönme ataletinin kirişin titreşim davranışına olan etkileri araştırılmıştır. Bu noktada enine titreşen kirişlerin deplasman-zaman grafiklerinin, faz ve Poincaré diyagramlarının elde edilebilmesi için kirişin mekanik ve malzeme özelliklerinin tanımlanması gerekmektedir.Çelikten yapılmış bir kirişin özellikleri Tablo 4.1: Kiriş Özellikleri'de verilmiştir. Bu özellikler [3]'ten alınmıştır.

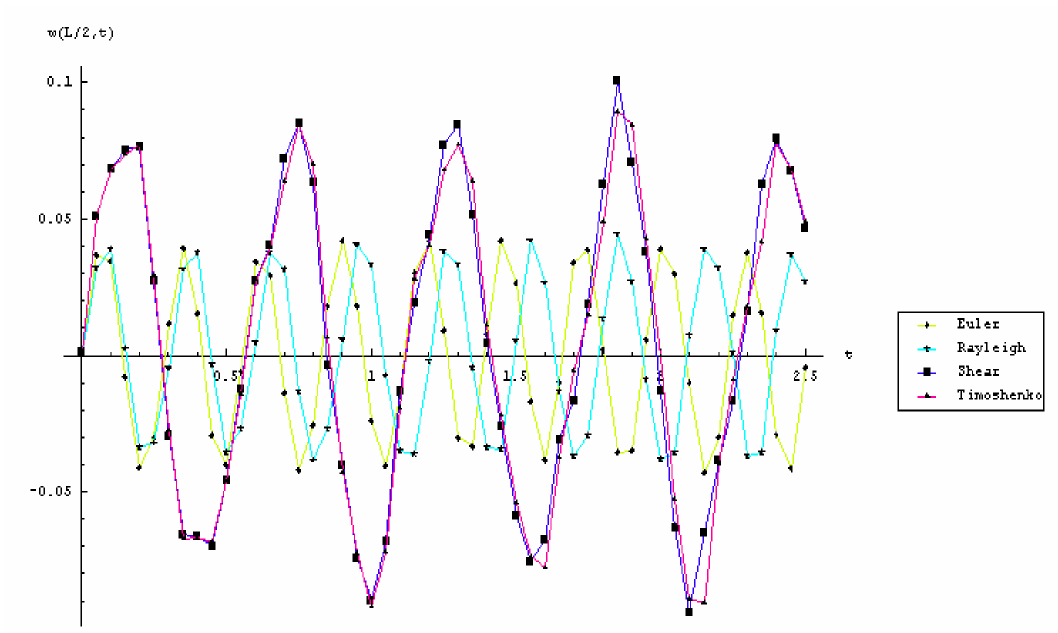
Tablo 4.1: Kiriş Özellikleri

Elastisite Modülü, E	200 GPa
Kayma Modülü, G	77.5 GPa
Yoğunluk, ρ	7830 kg/ m^3
Kesit Alanı, A	0.0097389 m^2
Alan Atalet Momenti, I	0.0001171 m^4
Kirişin Uzunluğu, L	1 m
Kayma Sabiti, k'	0.53066

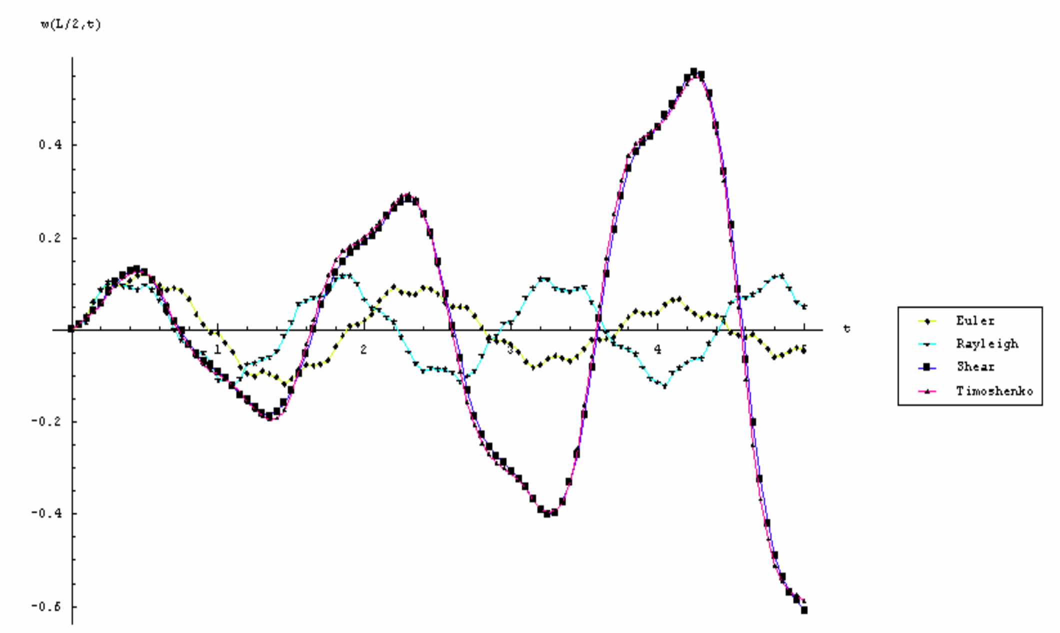
Tablo 4.1'de verilen değerlere göre elde edilen boyutsuz katsayılar aşağıda verilmiştir.

$$\frac{k'GAL^2}{EI} = 17.1018\,, \quad \frac{I}{AL^2} = 0.0120239 \qquad (4.1\ \text{a, b})$$

Tablo 4.1 ve 2. kısımda bulunan kiriş modellerine ait boyutsuz hareket denklemleri kullanılarak çizdirilen deplasman-zaman grafikleri Şekil 4.1 ve Şekil 4.2'de yer almaktadır.



Şekil 4.1: İki Ucu da Sabit olan Kirişin Orta Noktasının Deplasman-Zaman Grafiği



Şekil 4.2: Bir Ucu Sabit Diğer Ucu Serbest Kirişin Serbest Ucunun Deplasman-Zaman Grafiği

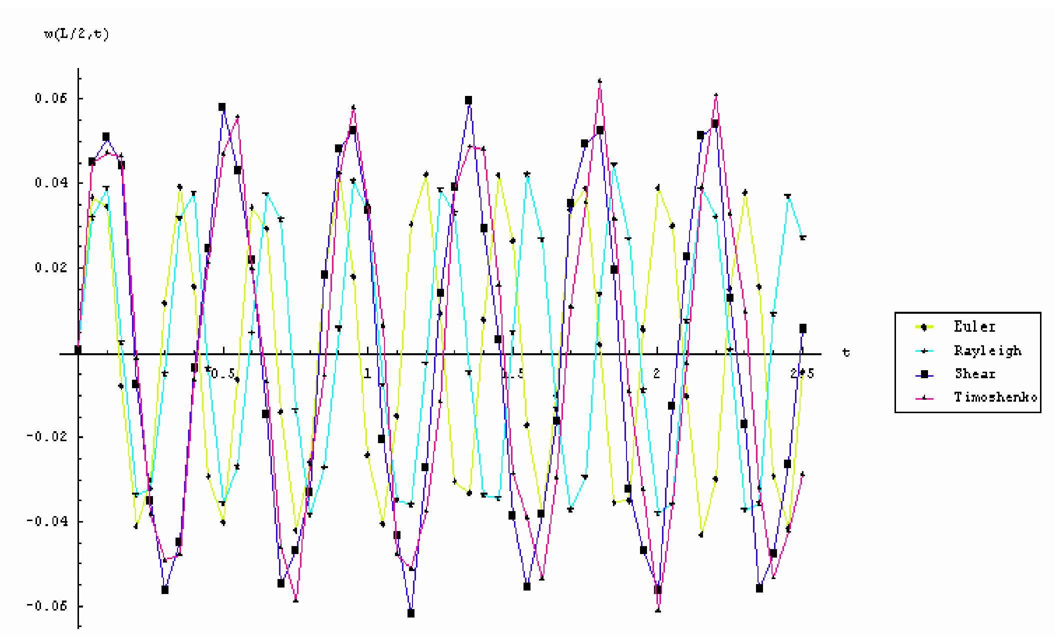
4.1 Dönme Ataleti ve Kayma Deformasyonunun Etkisi

4.1.1 Kayma Deformasyonunun Etkisi

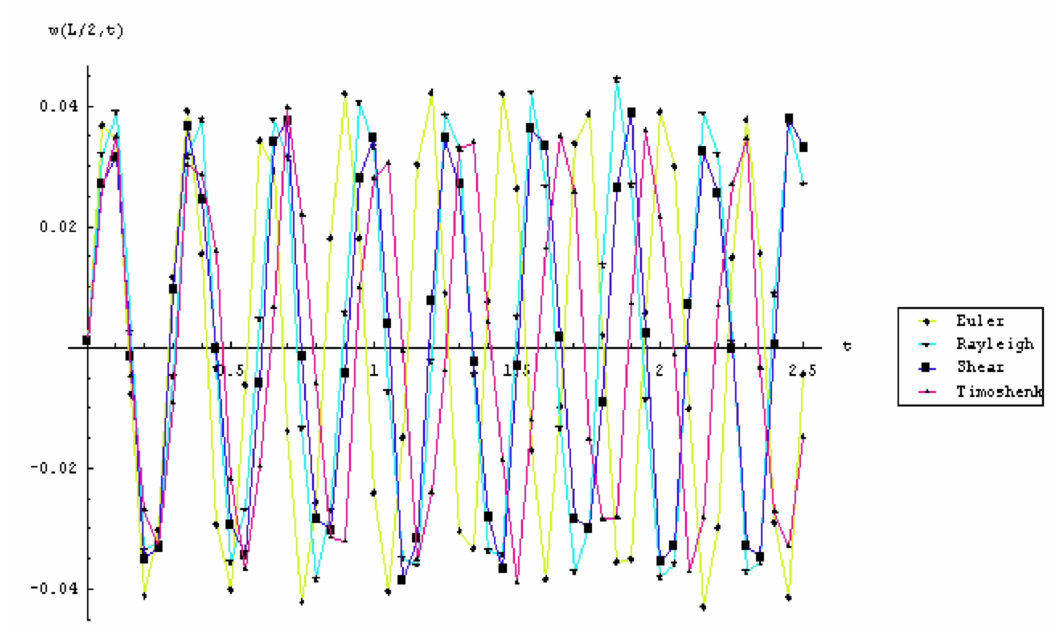
Şekil 4.1 ve Şekil 4.2 incelendiğinde, gerek her iki ucu da sabit olan kiriş için gerekse bir ucu sabit diğer ucu serbest olan kiriş için, Euler-Bernoulli ve Rayleigh kiriş modellerinin titreşim davranışlarının yakın olduğu gözlenir. Aynı benzer davranış Shear ve Timoshenko kirişleri için de vardır. Fakat Euler Bernoulli-Rayleigh ikilisinin Shear ve Timoshenko kirişlerinden farklı davrandığı görülür. Aradaki fark Shear ve Timoshenko kirişlerinin kayma deformasyonunu hesaba katmasından kaynaklanır. (2.91), (2.92), (2.97) ve (2.98) denklemleri hatırlandığında buradaki G değeri Şekil 4.1'de Tablo 1'de verilen 77.5 GPa alınmıştı. Kayma deformasyonu, kesitlerin birbiri üzerinden kaymasını ifade eder.

Yukarıda belirtilen denklemlerde GA değeri sonsuz büyük alındığında, yani $GA \rightarrow \infty$ durumu gerçekleştiğinde kayma deformasyonu etkisi ortadan kalkacak ve kiriş çok fazla rijit olacaktır. [11] Bu noktada kesitler birbiri üzerinden kayamayacaktır.

Şekil 4.3'te G değeri 200 GPa ve Şekil 4.4'te ise 500 Gpa alınmıştır. Şekil 4.1, Şekil 4.3 ve Şekil 4.4 kıyaslandığında G değeri arttırıldığında Shear-Tmoshenko kiriş modellerinin davranışının Euler-Rayleigh kirişlerinin davranışına benzediği görülmektedir.



Şekil 4.3: Kayma Modülünün Etkisi $G = 200$ GPa



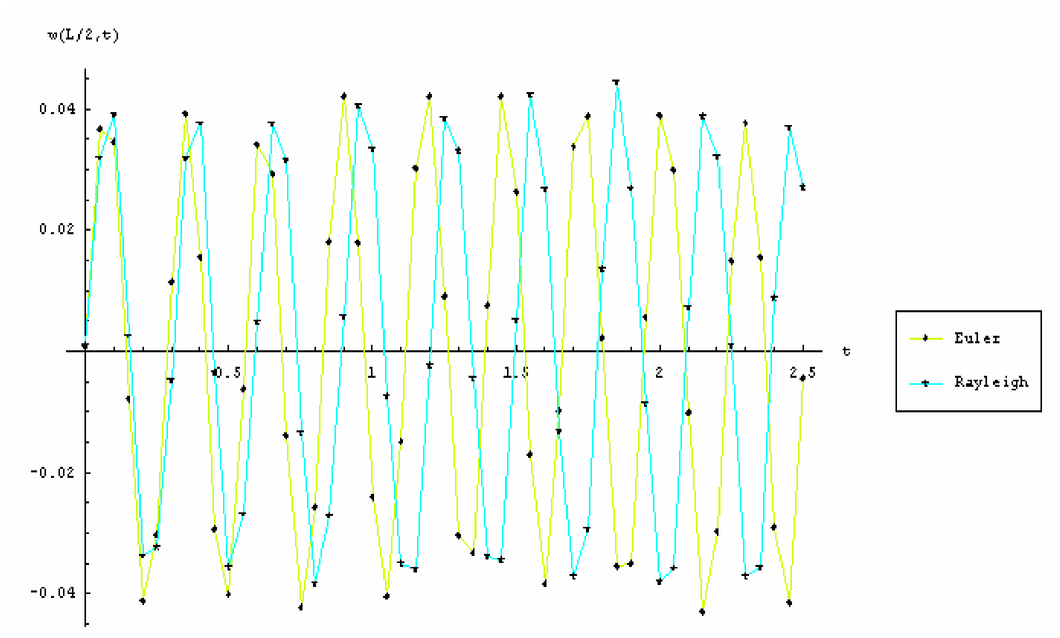
Şekil 4.4: Kayma Modülünün Etkisi $G = 500$ GPa

4.1.2 Dönme Ataletinin Etkisi

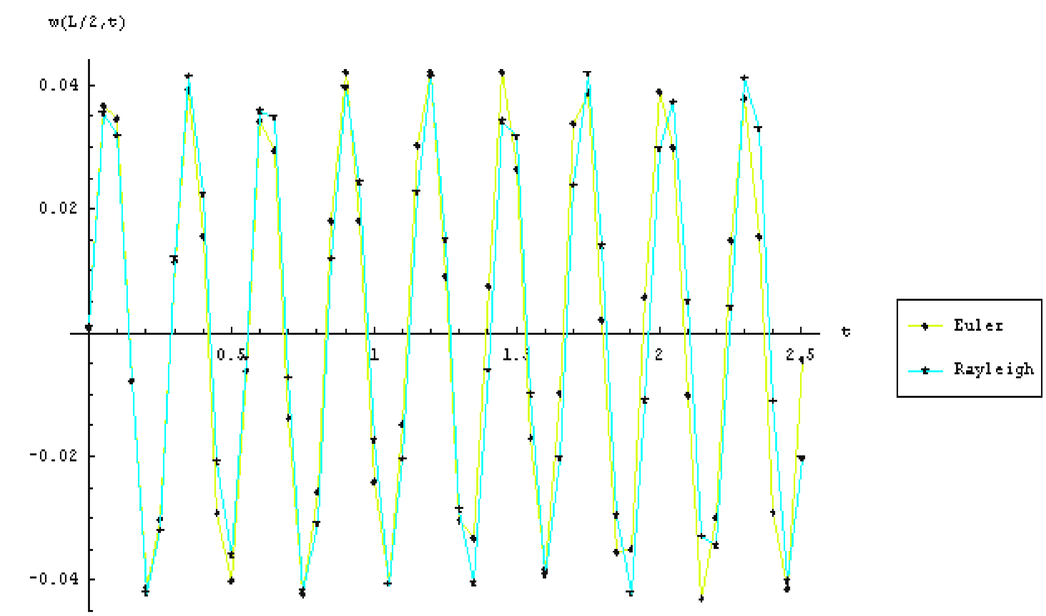
Rayleigh kirişinin Euler-Bernoulli kirişinden ve Timoshenko kirişinin Shear kirişinden farkı dönme ataletini hesaba katmasıdır.

Euler-Bernoulli kirişinin hareket denklemi (2.80) ile Rayleigh kirişinin hareket denklemi (2.82) arasındaki fark $\frac{I}{AL^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2}$ terimidir. Burada $\frac{I}{A}$ terimi dönme ataletinin ifadesidir.

$\frac{I}{A}$ terimi sıfıra giderse, yani sonsuz küçük alınırsa, dönme ataletinin etkisi ortadan kalkar. [10] Şekil 4.5, Şekil 4.1'deki Euler-Bernoulli ve Rayleigh kirişlerinin birlikte çizdirilmiş halidir. I değerini Şekil 4.5'tekinin onda biri kadar bir değer ile çizdirilirse Şekil 4.6 ortaya çıkar.



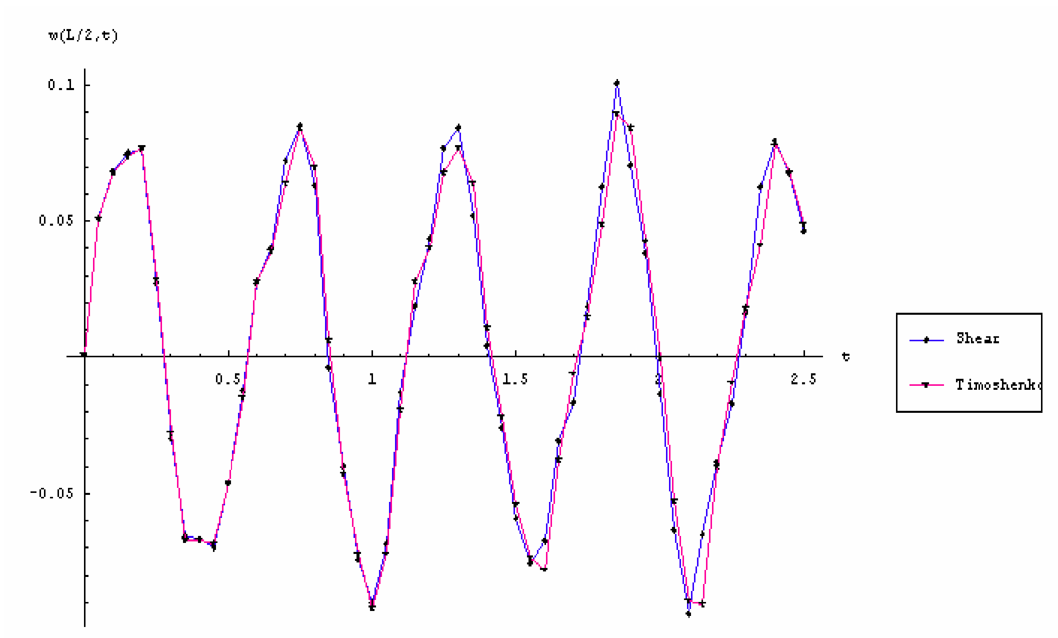
Şekil 4.5: Dönme Ataletinin Etkisi, Euler-Bernoulli-Rayleigh, $I = 0.0001171$



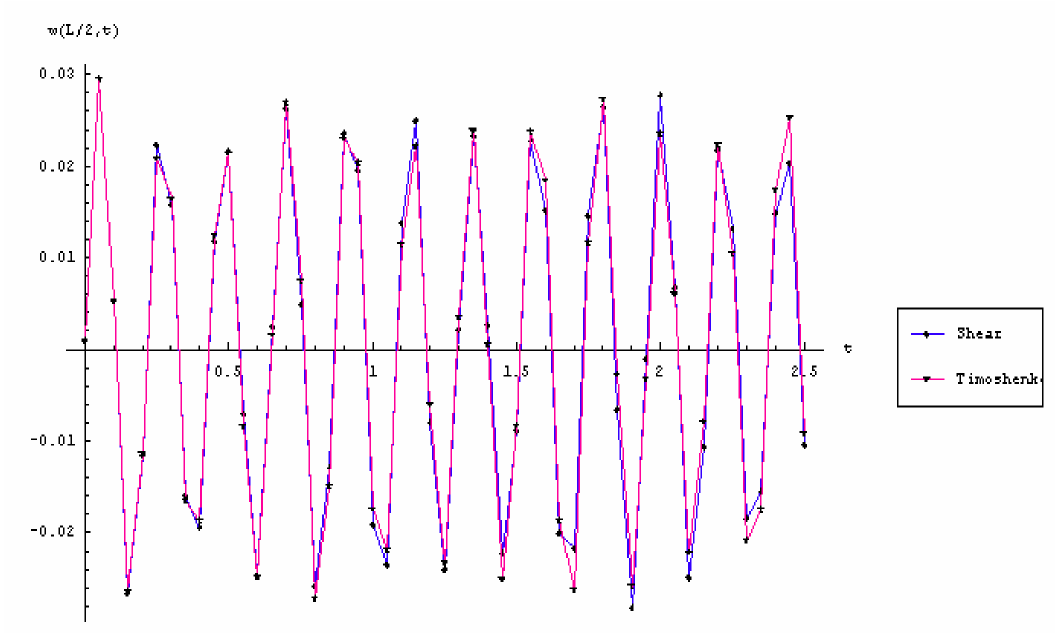
Şekil 4.6: Dönme Ataletinin Etkisi, Euler-Bernoulli-Rayleigh, $I = 0.00001171$

Şekil 4.7, Şekil 4.1'deki Shear ve Timoshenko kirişlerinin birlikte çizdirlmiş halidir. I daha ufak bir değerde alındığında Şekil 4.8 ortaya çıkmaktadır. Şekil 4.8'de Shear ve Timoshenko kirişlerinin davranışlarının birbirlerine çok benzediği görülmektedir.

Kullanılan malzeme çok hassas değilse, kiriş çok ince ise veya yüksek modların doğal frekansları araştırılmıyorsa dönme ataleti ve kayma deformasyonu etskisi ihmal edilebilir. Bu etkiler ihmal edildiğinde geriye eğilme momenti ve yanal deplasmanları içeren terimler kalır. Bu terimleri içeren kiriş modelinin ise Euler-Bernoulli olduğu yukarıda belirtilmişti.



Şekil 4.7: Dönme Ataletinin Etkisi, Shear- Timoshenko, $I = 0.0001171$



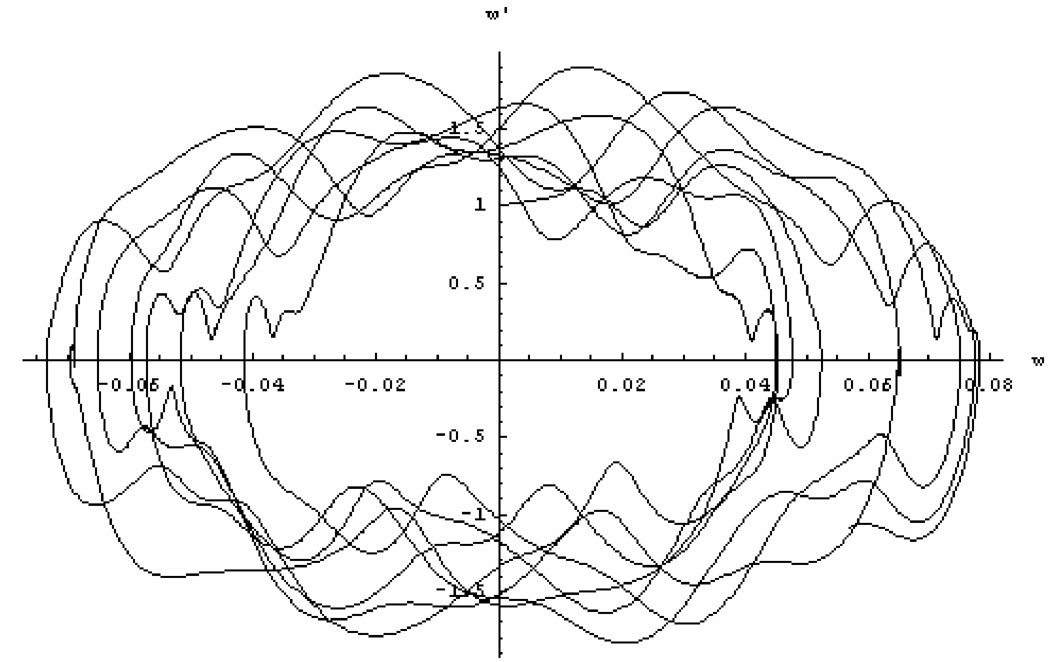
Şekil 4.8: Dönme Ataletinin Etkisi, Shear-Timoshenko, $I = 0.00001171$

4.2 Faz Diyagramları

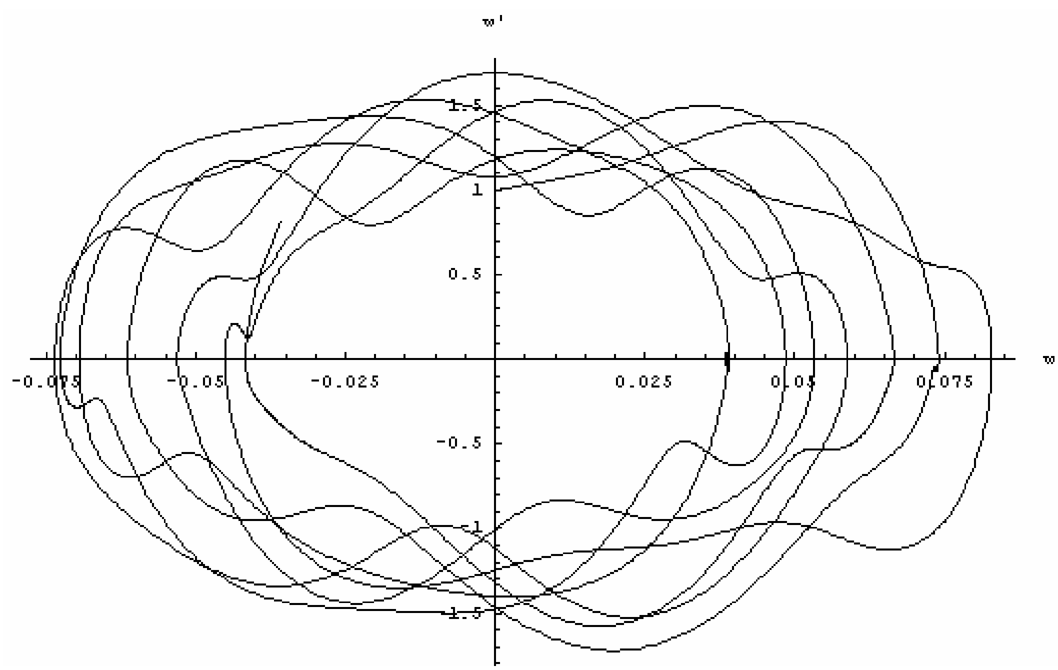
Leipholz yükleme koşulları altında enine titreşen kirişlerin her iki ucu da anakstre sınır koşulu ve bir ucu ankastre diğer ucu serbest olan sınır koşulu için faz diyagramları kısım 4.2.1 ve 4.2.2'de verilmiştir.

4.2.1 Her İki Ucu da Sabit Sınır Koşulu için Faz Diyagramları

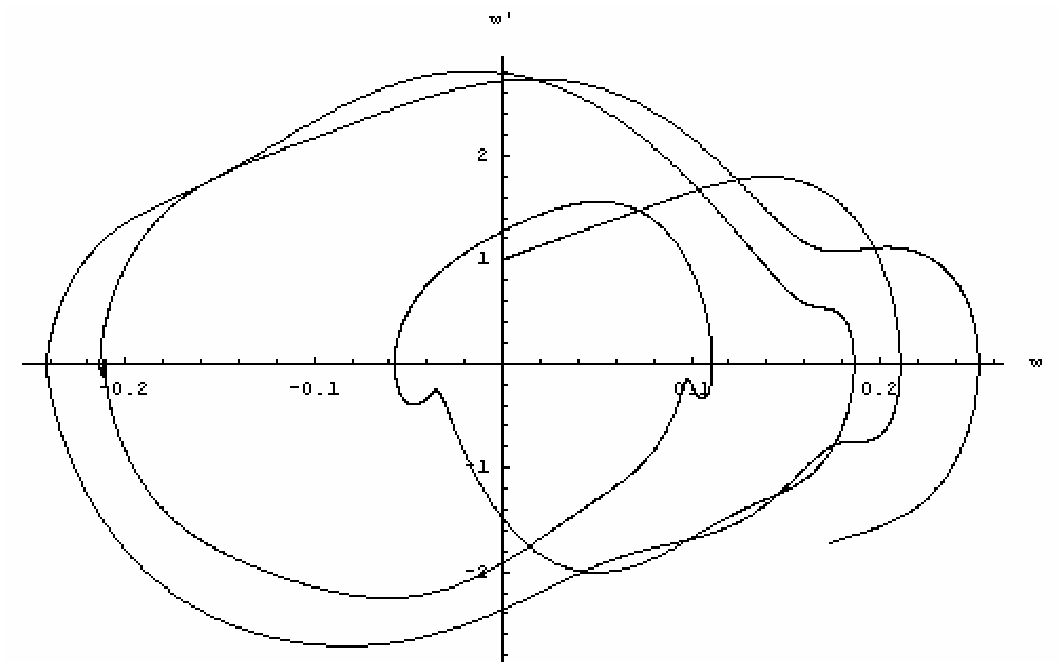
Şekil 4.9-12'de iki ucu da sabit (clamped-clamped) sınır koşulu için Euler-Bernoulli, Rayleigh, Shear ve Timoshenko kiriş modellerinin faz diyagramları verilmiştir. Faz diyagramlarında yatay eksen enine eğilme fonksiyonunu, yani deplasmanı, dikey eksen ise belirtilen fonksiyonun türevini yani hızını ifade etmektedir. Verilen başlangıç koşullarında, belirtilen şekillerde deplasman-hız grafikleri çizdirilmiştir. Tüm kiriş modellerinde 0 deplasmandan ve 1 birimlik başlangıç hızından başlayarak kiriş modellerinin davranışı gösterilmektedir.



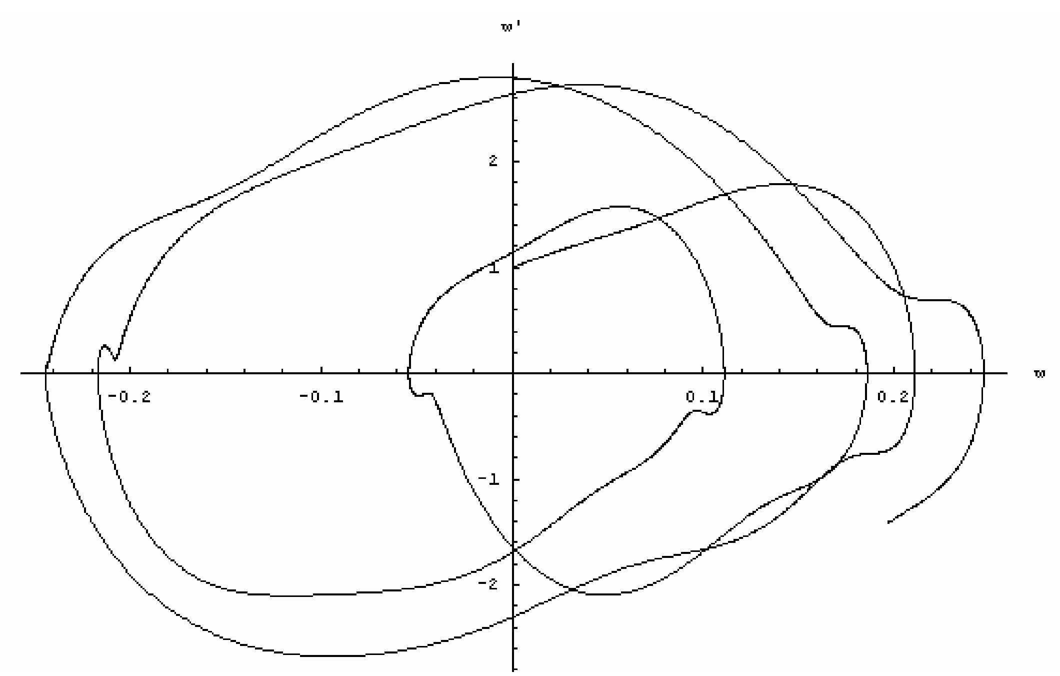
Şekil 4.9: Euler-Bernoulli Sabit-Sabit Faz Diyagramı



Şekil 4.10: Rayleigh Sabit-Sabit Faz Diyagramı



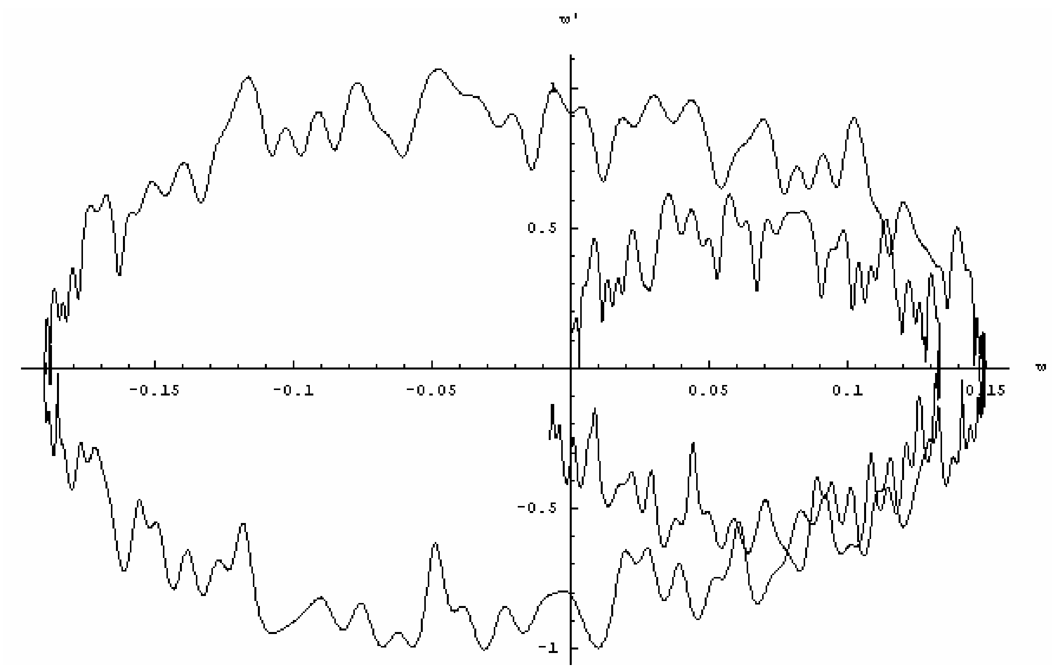
Şekil 4.11: Shear Sabit-Sabit Faz Diyagramı



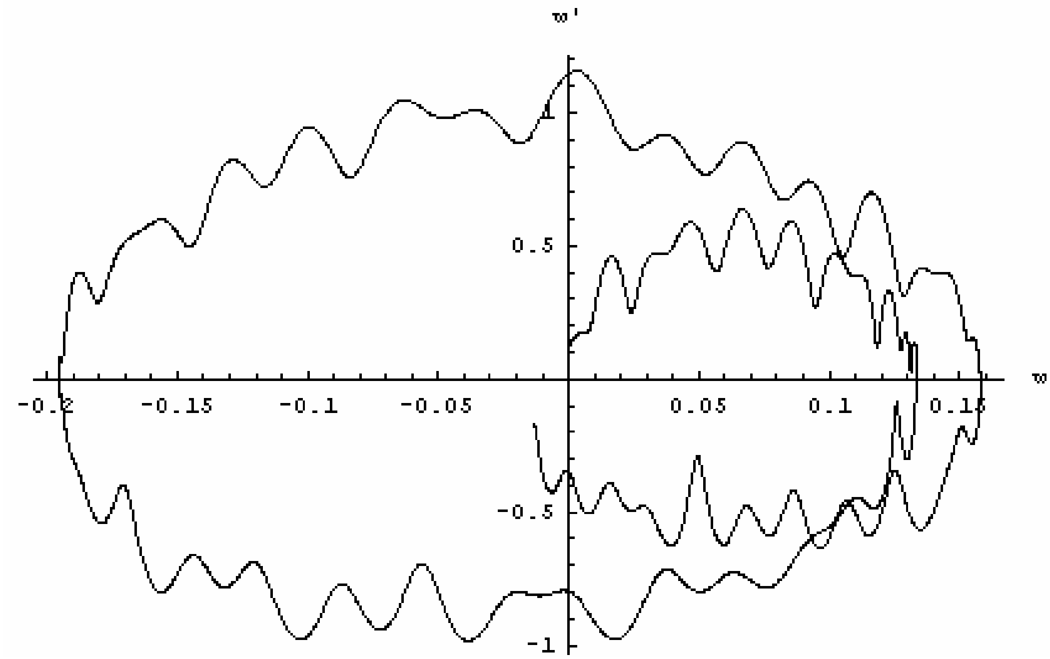
Şekil 4.12: Timoshenko Sabit-Sabit Faz Diyagramı

4.2.2 Bir Ucu Sabit Diğer Ucu Serbest Sınır Koşulu için Faz Diyagramları

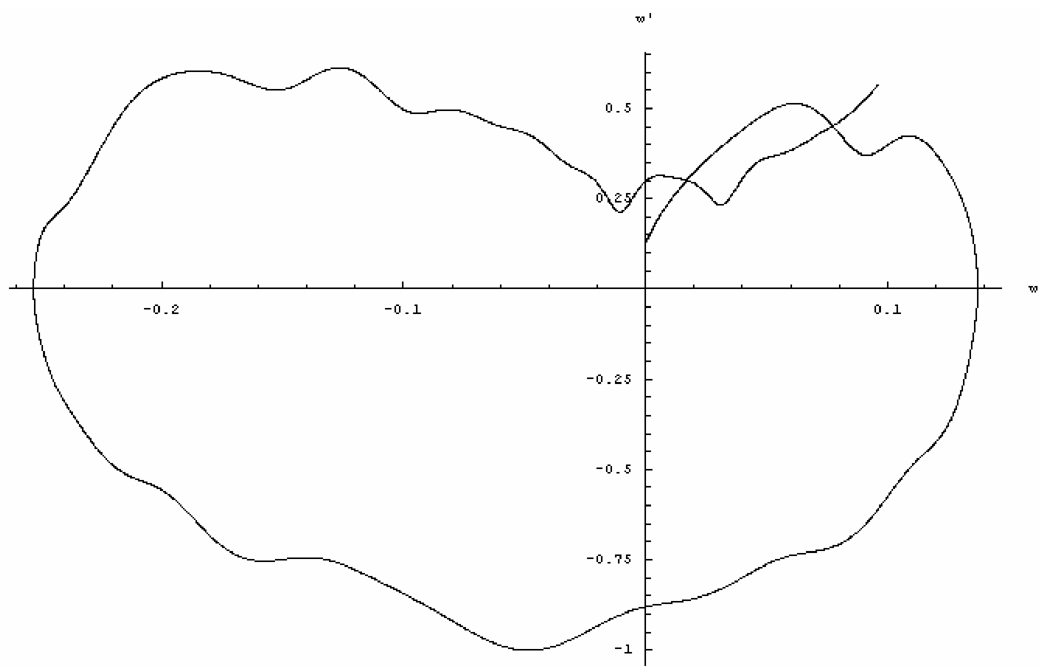
Şekil 4.13-16'da bir ucu sabit ve diğer ucu serbest olan sınır koşulu için sırasıyla Euler-Bernoulli, Rayleigh, Shear ve Timoshenko kiriş modellerinin Leipholz yükleme koşulları etkisi altındaki faz diyagramları verilmiştir. Yatay eksenler deplasmanı ve dikey eksenler hızı ifade etmektedir. Burada da şekilllerde başlangıç koşulu olarak tüm kirişler 0 deplasmandan ve 1 birim hızdan başlamakta ve titreşim süresi boyunca hareketlerine devam etmektedirler.



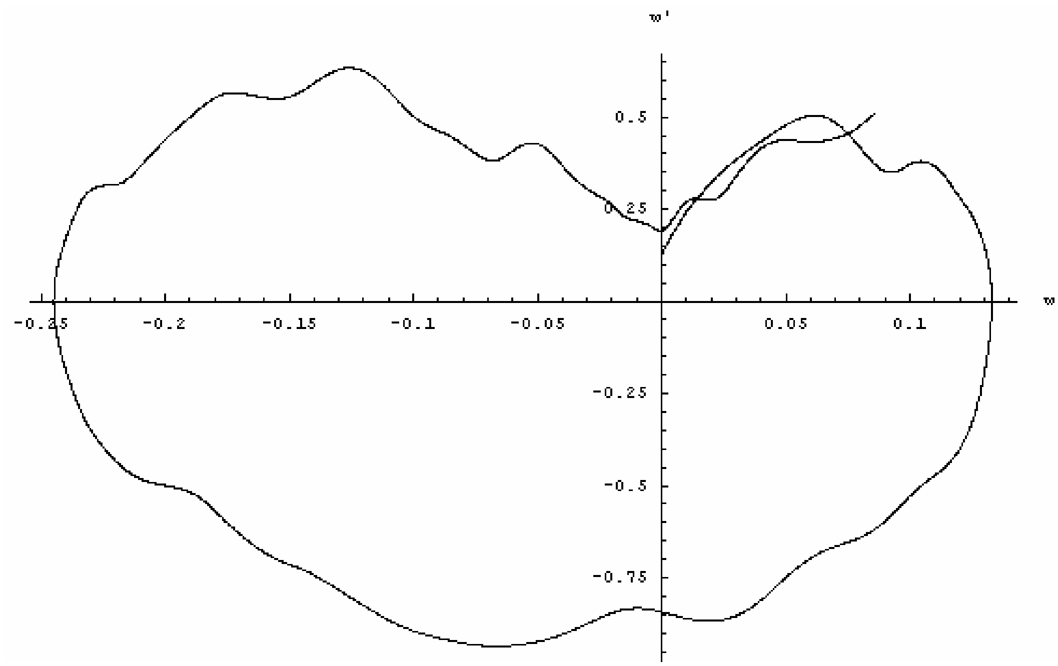
Şekil 4.13: Euler-Bernoulli Sabit-Serbest Faz Diyagramı



Şekil 4.14: Rayleigh Sabit-Serbest Faz Diyagramı



Şekil 4.15: Shear Sabit-Serbest Faz Diyagramı



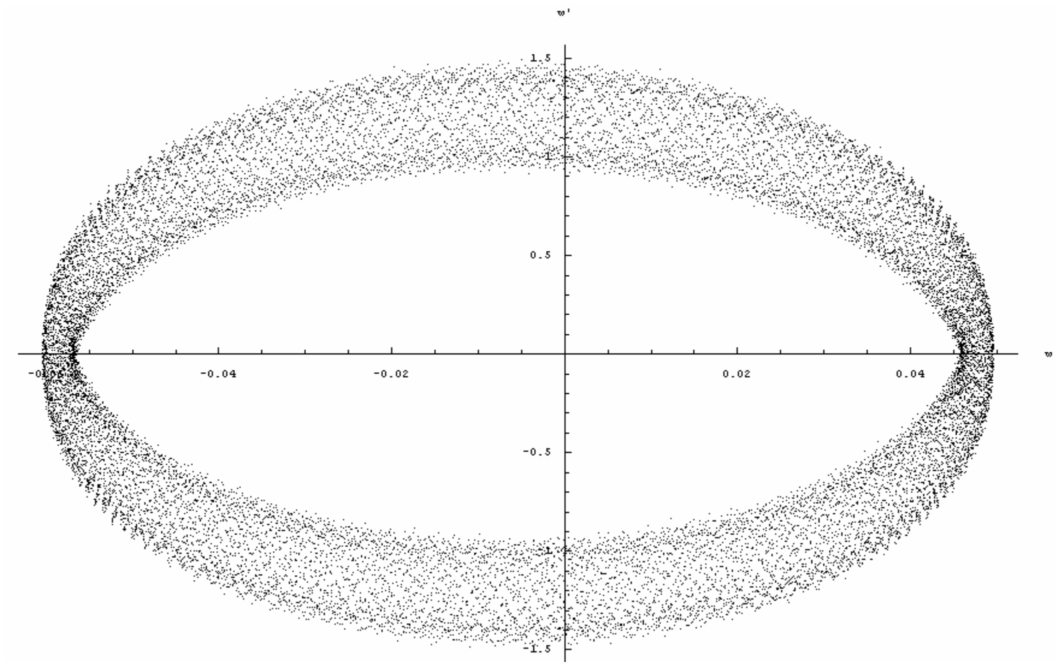
Şekil 4.16: Timoshenko Sabit-Serbest Faz Diyagramı

4.3 Poincaré Diyagramları

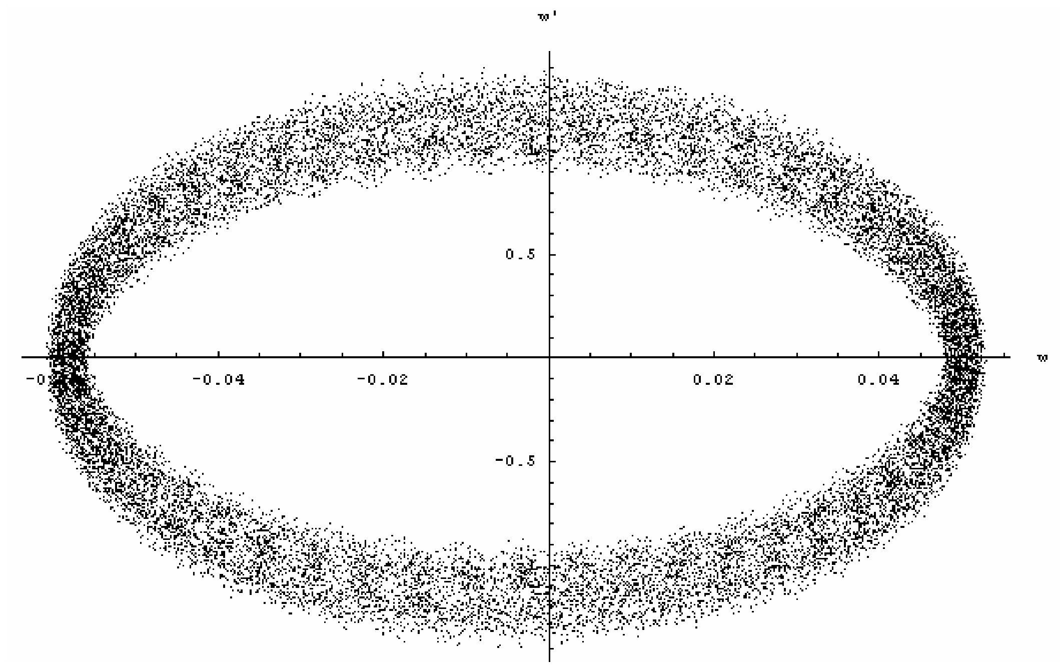
Kısım 4.3.1 ve 4.3.2 iki sınır koşulu için Poincaré diyagramları (Poincaré map) verilmiştir. Alınan bir faz uzayında bir düzlem seçildiğinde kirişin titreşimi deplasmana ve hıza bağlı olarak bir noktayı ifade ederek. Zaman her defasında kirişin frekansı kadar arttırıldığında oluşan noktalar Poincaré diyagramlarını oluşturur.

4.3.1 Her İki Ucu da Sabit Sınır Koşulu için Poincaré Diyagramları

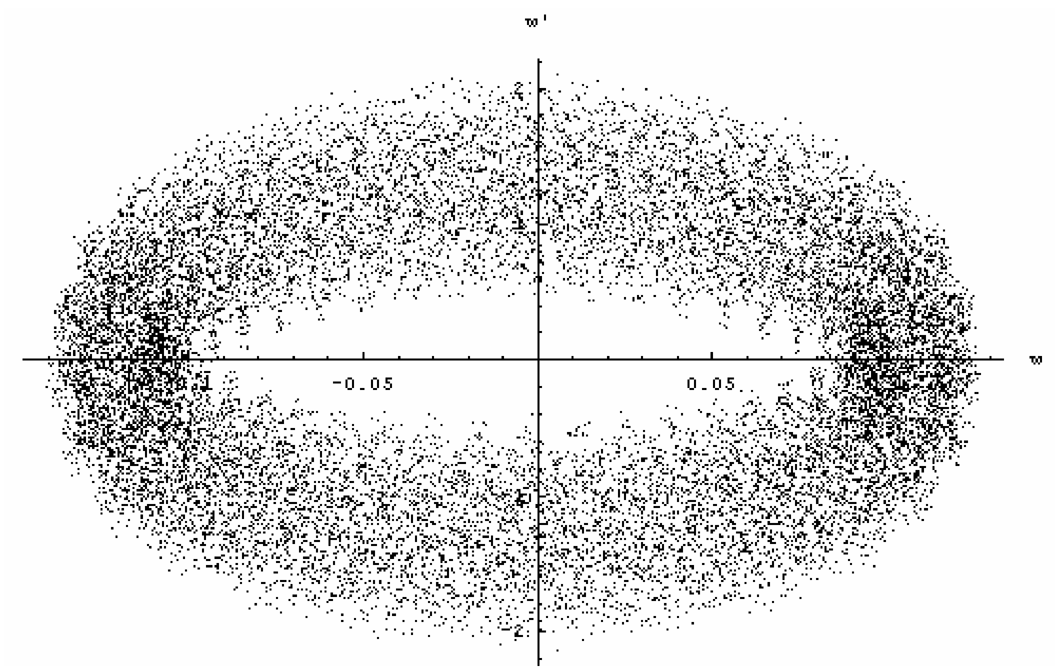
Şekil 4.17-20'de Leipholz yükleme koşulunda her iki ucu da ankastre sınır şartı için Euler-Bernoulli, Rayleigh, Shear ve Timoshenko kiriş modellerinin Poincaré diyagramları verilmiştir. Yatay eksenler deplasmana karşılık gelirken dikey eksenler hızı ifade etmektedir.



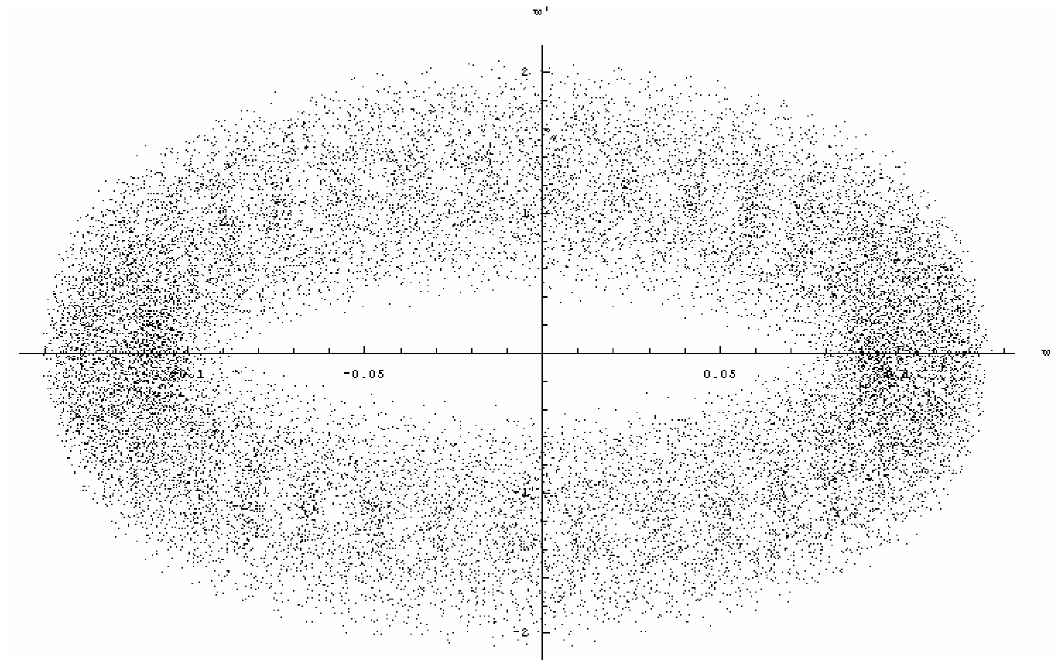
Şekil 4.17: Euler-Bernoulli Sabit-Sabit Poincaré Diyagramı



Şekil 4.18: Rayleigh Sabit-Sabit Poincaré Diyagramı



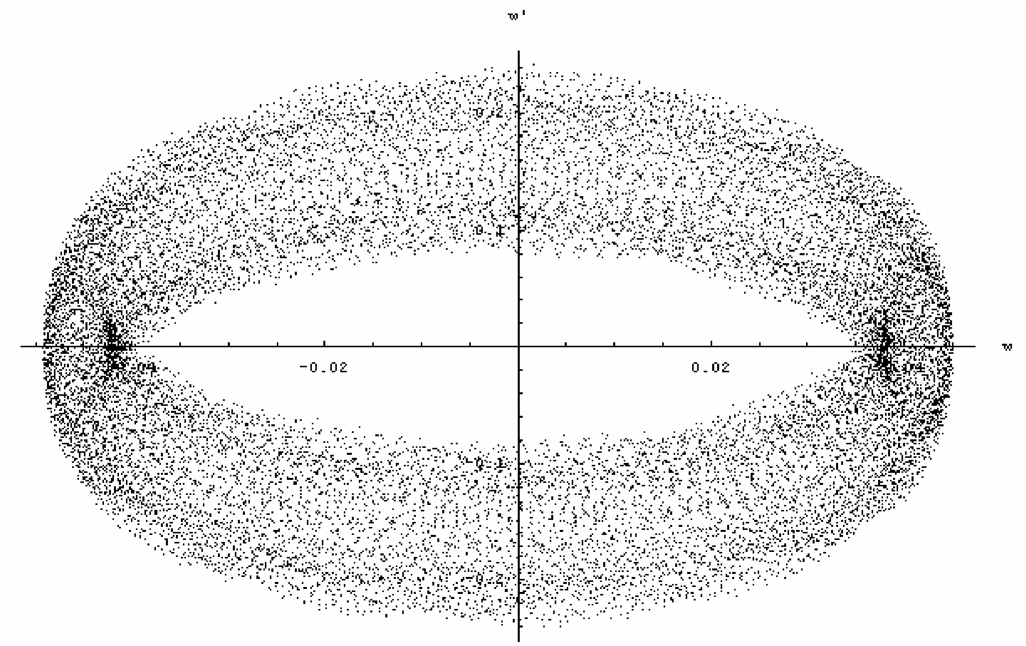
Şekil 4.19: Shear Sabit-Sabit Poincaré Diyagramı



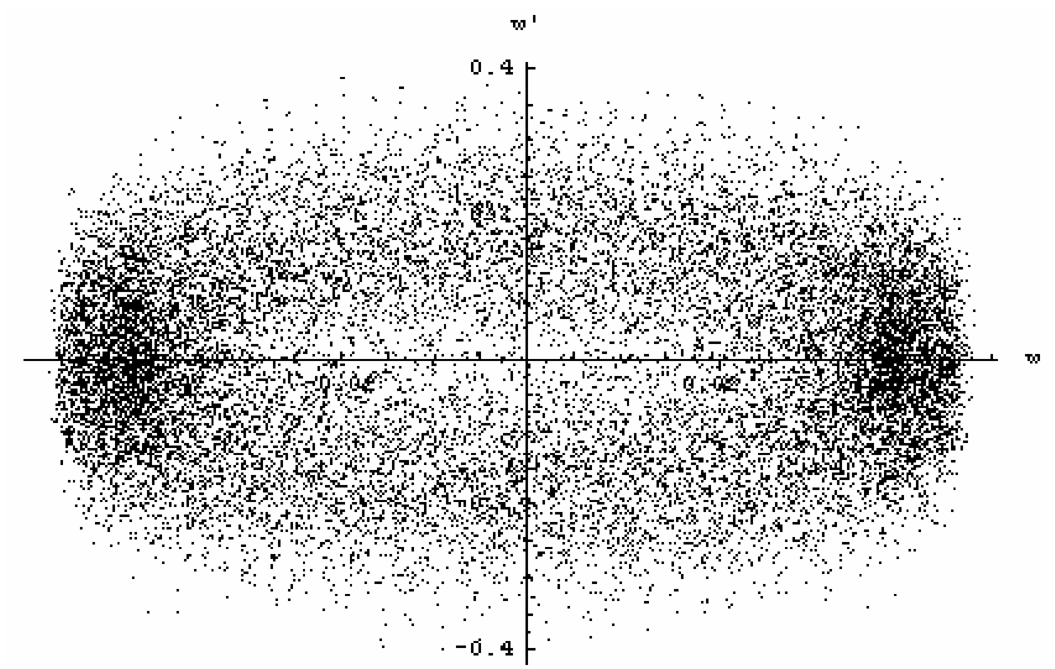
Şekil 4.20: Timoshenko Sabit-Sabit Poincaré Diyagramı

4.3.2 Bir Ucu Sabit Diğer Ucu Serbest Sınır Koşulu için Poincaré Diyagramları

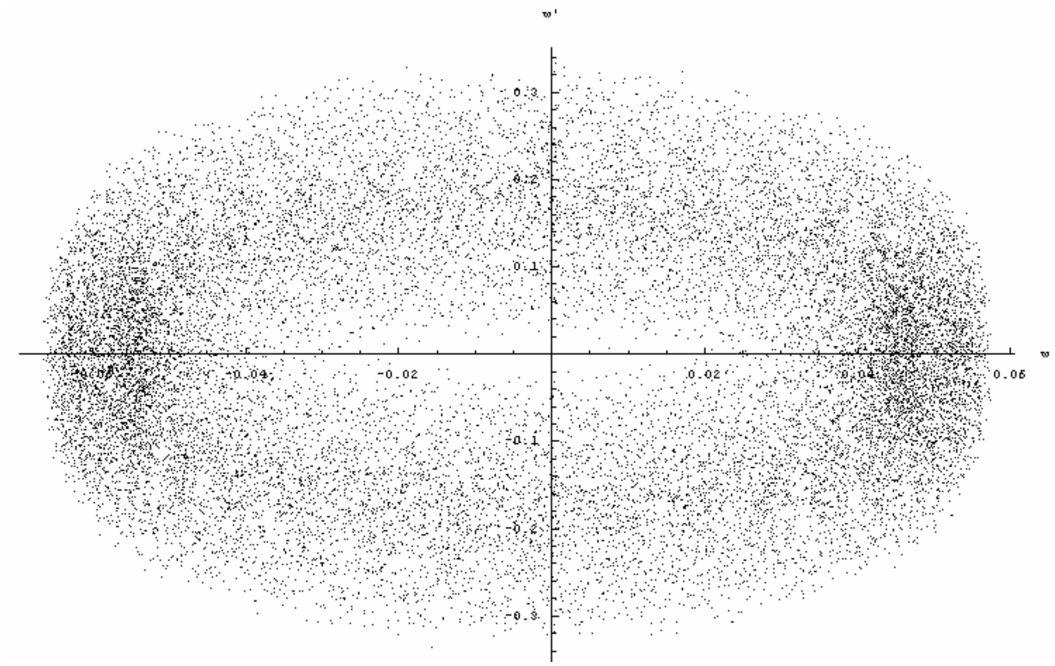
Şekil 4.21-25'te Leipholz yükleme koşulunda bir ucu sabit diğer ucu serbest sınır şartı için sırasıyla Euler-Bernoulli, Rayleigh, Shear ve Timoshenko kiriş modellerinin Poincaré diyagramları verilmiştir. Yatay eksenler deplasmana, dikey eksenler hıza karşılık gelmektedir.



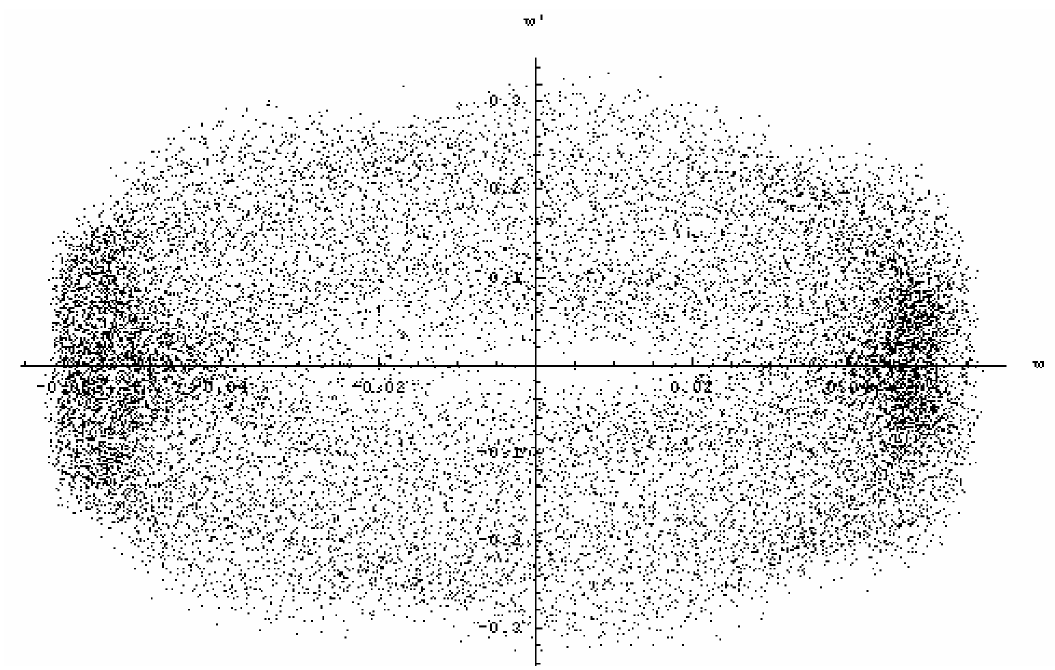
Şekil 4.21: Euler-Bernoulli Sabit-Serbest Poincaré Diyagramı



Şekil 4.22: Rayleigh Sabit-Serbest Poincaré Diyagramı



Şekil 4.23: Shear Sabit-Serbest Poincaré Diyagramı



Şekil 4.24: Timoshenko Sabit-Serbest Poincaré Diyagramı

Poincaré diyagramları (Poincaré Map) Leipholz kolon-modeli şeklinde yüklenmiş kirişin dinamik özelliklerini belirtebilmek için kullanılmıştır. Sabit-Sabit sınır koşuluna sahip kirişlerin Poincaré diyagramlarında kirişin titreşimin periyodik olmadığı gözlenmekte. Bununla birlikte bu sınır şartına ait Poincaré diyagramlarda kaotik çekici (chaotic attractor) gözlenmektedir. Sabit-Serbest sınır koşulu için Poincaré diyagramlarına bakıldığında ise kirişin titreşiminin periyodik olmadığı ve kaotik bir özelliğe sahip olduğu gözlenmektedir. Yine burada da çok ufak da olsa kaotik çekiciler gözlemlenmektedir.

KAYNAKLAR

[1] **Kang, B. and Tan, C.A.**, 2000. Parametric Instability of a Leipholz Column Under Periodic Excitation, *Journal of Sound and Vibration*, **229**, 1097-1113.

[2] **Kang, B. and Tan, C.A.**, 2004. Parametric Instability of a Leipholz Beam due to Distributed Frictional Axial Load, *International Journal of Mechanical Sciences*, **46**, 807-825.

[3] **Han, Seon M., Benaroya, H. And Wei, T.**, 1999. Dynamics of Transversely Vibrating Beams Using Four Engineering Theories, *Journal of Sound and Vibration*, **225**, 935-988.

[4] **Traill-Nash, R.W. and Collar, A.R.**, 1953. The Effects of Shear Flexibility and Rotary Inertia on the Bending Vibrations of Beams, *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, **6**, 186-222.

[5] **Cveticanin, L.J. and Atanackovic T.M.**, 1998. Leipholz Column with Shear and Compressibility, *Journal of Engineering Mechanics*, **124**, 146-151.

[6] **Aristizabal-Ochoa, J.D.**, 2004. Timoshenko Beam Column with Generalized End Conditions and Nonclassical Modes of Vibration of Shear Beams, *Journal of Engineering Mechanics*, **130**, 1151-1159.

[7] **Wang, C.M.**, 1995. Timoshenko Beam-Bending Solutions in Terms of Euler-Bernoulli Solutions, *Journal Of Engineering Mechanics*, **121**, 763-765.

[8] **Hutchinson, J.R.**, 2001. Shear Coefficients for Timoshenko Beam Theory, *Journal of Applied Mechanics*, **68**, 87-91.

[9] **Ihlamur, M.E., Arıkoğlu, A. and Özkol, İ.**, 2007. A Comparison of Euler-Bernoulli and Rayleigh Beam Models For Leipholz Column by Using Method of Lines, *The 4th Ankara International Aerospace Conference*, METU, Ankara, Turkey, September 10-12.

[10] **Challamel, N.**, 2006. On the Comparison of Timoshenko and Shear Models in Beam Dynamics, *Journal of Engineering Mechanics*, **132**, 1141-1145.

[11] **Gatti, P.L. and Ferrari, V.**, 2003. Applied Structural and Mechanical Vibrations, Taylor & Francis e-Library, pp. 341-430.

[12] **Rao, S.S.**, 2004. Mechanical Vibrations, Pearson Education, pp. 623-625

[13] **Frýba, L.**, 1999. Vibration of Solids and Structures under Moving Loads, ASCE Press, pp. 357-382.

[14] **Strikwerda, J.C.**, 1980. Initial Boundary Value Problems for the Method of Lines, *Journal of Computational Physics*, **34**, 94-107.

[15] **Beer, F.P., Johnston, E.R and DeWolf, J.T.** 2001. Mechanics of Materials, Mc-Graw Hill, pp 213-215.

ÖZGEÇMİŞ

Mustafa Emre Ihlamur, 1982 yılında Ankara'da doğdu. 2000 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Uçak Mühendisliği bölümünde lisans eğitimine başladı. 2005 yılında lisans eğitimini tamamlayarak İstanbul Teknik Üniversitesi Disiplinler Arası Uçak ve Uzay Mühendisliği programında yüksek lisans eğitimine başladı.