

RİJİT PANÇ İLE BASTIRILMIŞ ELASTİK YARIM DÜZLEME OTURMUŞ AĞIRLIKSIZ ÇİFT ŞERİTTE DEĞME PROBLEMİ

Handan ADIBELLİ İsa ÇÖMEZ Ragıp ERDÖL

KTÜ Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü
e-mail:hadibelli@ktu.edu.tr

ÖZET

Bu çalışmada elastik sabitleri farklı olan malzemelerden yapılmış, elastik yarım düzlem üzerine oturan yükseklikleri sırasıyla h_1 ve h_2 olan iki tabaka arasındaki sürtünmesiz değme problemi elastisite teorisine göre incelenmiştir. Üst tabakaya rijit panç vasıtasıyla tekil yük uygulanmıştır. Rijit panç ve üst tabaka arasında, iki tabaka arasında ve tabaka ile yarım düzlem arasında sürtünme olmadığı kabulü yapılmış bununla birlikte kütle kuvvetlerinin etkisi ihmal edilmiştir, Problem singüler integral eşitliklerinden oluşan bir probleme indirgenmiş ve Gauss Chebyshev formülü kullanılarak integral denklem sayısal olarak çözülmüştür. Sayısal sonuçlar ve bunlara bağlı grafikler bu bildiri de sunulmuştur.

ABSTRACT

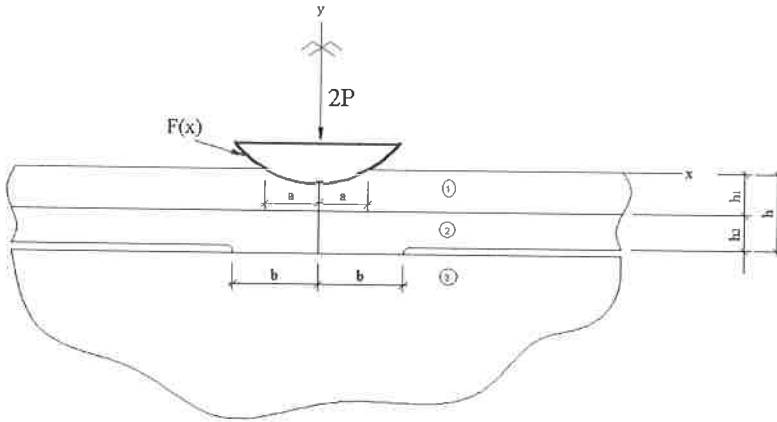
In this paper, a frictionless contact problem for two elastic layers made of different materials and have different highs respectively; h_1, h_2 resting on semi-infinite half plane is investigated according to the theory of elasticity. A compression load is applied on the upper layer by means of a rigid punch. It is assumed that the contact between the rigid stamp and the upper elastic layer and, between bottom layer and elastic half plane is frictionless. Additionally the effect of gravity forces are neglected. The problem is reduced to a system of singular integral equations. The singular integral equations are solved numerically by making use of appropriate Gauss-Chebyshev Integration formulae. Numerical results and related graphics are given in this paper.

1. GİRİŞ

Hertz tarafından 1882 de araştırılmaya başlanan Uffiland ve Gallin'in çalışmaları vasıtasıyla hız kazanan ve daha sonra sayısal çözüm yöntemleri ve bilgisayar kullanımındaki gelişmeler ile çözüm açısından daha iyi seviyelere gelen değme problemleri temeller, karayolları, havaalanı pistleri, akaryakıt tankları, silindirik bilyeler ve miller başta olmak üzere birçok farklı uygulama alanında incelenmiştir.

Elastik tabakaların elastik yarı sonsuz bir ortam veya rijit bir temele oturduğu, yükün tabakaya rijit veya elastik bloklarla aktarıldığı çalışmalar, temas yüzeylerinde sürtünmenin ihmal edildiği veya göz önüne alındığı çalışmalar ve sonsuz-yarı sonsuz şerit(tabaka) problemlerini içeren çalışmalar incelenen problemlerden bazılarıdır. Bunlara örnek olarak Elastik yarım düzlemin serbest yüzeyine rijit panç ile bastırıldığında gerilme ve yer değiştirme dağılımını belirleyen Boussnesq problemi [1] tarafından, sürtünmesiz değme problemi [2] , üzerinde tekil yada yayılı yük bulunan elastik tabaka ile elastik düzlem arasındaki değme problemi [3], [4], [5] tarafından , rijit parabolik bir pançla bastırılan izotropik, ortotropik ve monoklinik tabakaların oluşturduğu çok tabakalı yarım düzlemlerde sürtünmesiz değme problemleri [6] tarafından, homojen olmayan yarım düzlem ve rijit panç arasında değme problemi [7], incelenen çalışmalara örnek verilebilir.

Bu bildiride birbirine yapışık olan, h_1 ve h_2 yüksekliklerinde , aynı veya farklı değerlerdeki elastik sabitlere sahip üst üste konulmuş, tekil yük uygulanan rijit panç ile yarı sonsuz düzleme bastırılmış olan tabakaların değme problemi incelenmiştir. Tabakalar arasında ve panç ile değdiği tabaka arasında sürtünme olmadığı kabulü yapılmış ve kütle kuvvetleri ihmal edilmiştir. Problemin geometrisi şekil 1 de verilmiştir.



Şekil1. Rijit panç ile bastırılmış ve elastik yarım düzleme oturmuş ağırlıksız çift şerit

2. GENEL DENKLEMLERİN ELDE EDİLMESİ

Üst tarafından $(-a, a)$ aralığında üst tabakaya temas eden rijit panç vasıtasıyla $2P$ şiddetinde simetrik tekil yük etkiyen , alt tarafından yarım düzleme oturan x eksenini boyunca $(-\infty, \infty)$ aralığında uzanan $(-b, +b)$ aralığında birbirlerine değen elastik tabakaların değme problemi elastisite teorisine göre çözümlenerek değme uzunluğu ve değme gerilme ifadeleri bulunacaktır.

Şekil değiştirmelerin gerilme cinsinden yazılması ile elde edilen bünve denklemleri ve şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntıları yardımı ile gerilmeler yer değiştirmeler cinsinden yazılmışlardır.

İki boyutlu problemlerde z boyutu ve kütle kuvvetleri ihmal edileceğinden Navier Denklemleri ;

$$\mu_i \nabla^2 u_i + (\lambda_i + \mu_i) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} \right) = 0 \quad (1a)$$

$$\mu_i \nabla^2 v_i + (\lambda_i + \mu_i) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} \right) = 0 \quad (1b)$$

İle ifade edilmiştir. Burada μ_i ; kayma modülü, λ_i ; lame sabiti, u_i , v_i ; yer değiştirme bileşenidir.

Problem malzeme, yük ve geometri olarak y eksenine göre simetrik alındığından $u(x,y)=-u(-x,y)$ ve $v(x,y)=v(-x,y)$ olarak yazılabilir.

$u(x,y)$ ve $v(x,y)$ yer değiştirmeleri $\Phi(x,y)$ ve $\varphi(x,y)$ ' nin fourier sinüs ve fourier kosinüs dönüşümleri olarak aşağıdaki gibi verebiliriz.

$$u_i(x,y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \phi(\alpha, y) \sin(\alpha x) d\alpha \quad (i=1,2) \quad (2a)$$

$$v_i(x,y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \psi(\alpha, y) \cos(\alpha x) d\alpha \quad (i=1,2) \quad (2b)$$

(3a) ve (3b) denklemlerinin gerekli türevleri alınıp 2a, 2b denklemlerinde yerine yazılması sonucu bulunan adi diferansiyel denklem takımı çözülerek yerdeğiştirme ifadeleri problemin sınır şartlarından belirlenecek olan sabit katsayılar cinsinden (4a), (4b) daki gibi ifade edilirler.

$\kappa=(3-4\nu)$, düzlem gerilme halinde ise $\kappa=(3-\nu)/(1+\nu)$ deęerine sahip olan malzeme sabitidir.

$$u(x,y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ [A + By] e^{-\alpha y} + [C + Dy] e^{\alpha y} \right\} \sin(\alpha x) d\alpha \quad (3a)$$

$$v(x,y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[A + B \left(\frac{k}{\alpha} + y \right) \right] e^{-\alpha y} + \left[-C + D \left(\frac{k}{\alpha} - y \right) \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (3b)$$

eřitlikleri elde edilmiştir.

Yukarıdaki eşitliklerde geçen A,B,C,D bilinmeyen sabit katsayılar olup probleme ait sınır şartlarından elde edilmişlerdir.

Gerilme bileşenleri bünve denklemlerinin kullanımıyla yerdeğiştirmelere bağlı olarak aşağıdaki gibi elde edilirler.

$$\frac{1}{2\mu_i} \sigma_{xx}(x,y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \left[\alpha (A_i + B_i y) - \left(\frac{3-\kappa_i}{2} \right) B_i \right] e^{-\alpha y} + \left[\alpha (C_i + D_i y) - \left(\frac{3-\kappa_i}{2} \right) D_i \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (4a)$$

$$\frac{1}{2\mu_i} \sigma_{yi}(x,y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ - \left[\alpha(A_i + B_i y) - \left(\frac{\kappa_i + 1}{2} \right) B_i \right] e^{-\alpha y} + \left[-\alpha(C_i + D_i y) - \left(\frac{\kappa_i + 1}{2} \right) D_i \right] e^{\alpha y} \right\} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (4b)$$

$$\frac{1}{2\mu_i} \tau_{xyi}(x,y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ - \left[\alpha(A_i + B_i y) - \left(\frac{\kappa_i + 1}{2} \right) B_i \right] e^{-\alpha y} + \left[\alpha(C_i + D_i y) - \left(\frac{\kappa_i + 1}{2} \right) D_i \right] e^{\alpha y} \right\} \sin(\alpha x) d\alpha \quad (4c)$$

gerilmeleri elde edilir.

$r=1,2,3$ indis tabaka numarasını göstermektedir.

3. PROBLEMİN SINIR ŞARTLARI

$u_r(x,y)$ ve $v_r(x,y)$ yer değiştirmeleri $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ise gerilmeleri göstermek üzere probleme ait sınır şartları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\sigma_{x1}(x,0) = \begin{cases} -P_1(x) & 0 \leq x < a \\ 0 & a \leq x < \infty \end{cases} \quad (5a)$$

$$\tau_{xy1}(x,0) = 0 \quad 0 \leq x < \infty \quad (5b)$$

$$\sigma_{y1}(x, -h_1) = \sigma_{y2}(x, -h_1) \quad 0 \leq x < \infty \quad (5c)$$

$$\tau_{xy1}(x, -h_1) = \tau_{xy2}(x, -h_1) \quad 0 \leq x < \infty \quad (5d)$$

$$u_1(x - h_1) = u_2(x - h_1) \quad 0 \leq x < \infty \quad (5e)$$

$$v_1(x - h_1) = v_2(x - h_1) \quad 0 \leq x < \infty \quad (5f)$$

$$\sigma_{x1}(x,0) = \begin{cases} -P_2(x) & 0 \leq x < b \\ 0 & b \leq x < \infty \end{cases} \quad (5g)$$

$$\tau_{xy2}(x, -h) = 0 \quad 0 \leq x < \infty \quad (5h)$$

$$\tau_{xy3}(x, -h) = 0 \quad 0 \leq x < \infty \quad (5i)$$

$$\sigma_{y2}(x, -h) = \sigma_{y3}(x, -h) \quad 0 \leq x < \infty \quad (5j)$$

$$v_1(x,0) = F(x) \quad 0 < x < a \quad (5j)$$

$$v_2(x, -h) - v_3(x, -h) = 0 \quad 0 < x < b \quad (5k)$$

Burada a rijit bloğun üst tabakaya değme uzunluğunun yarısı b ise alt tabakanın yarım düzleme değme uzunluğunun yarısıdır. $F(x)$ rijit pançın profilini tanımlamaktadır. Burada verilen $P_1(x_1)$ rijit panç ile üst tabaka arasındaki, $P_2(x_2)$ alt tabaka ile yarım düzlem arasındaki bilinmeyen değme gerilmeleridir.

Probleme ait denge şartları ise aşağıda verilmiştir.

$$\int_{-a}^a P_1(x) dx = 2P \quad (6a)$$

$$\int_{-b}^b P_2(x) dx = 2P \quad (6b)$$

P tabakalara etki eden tekil yüküdür.

Gerilme ve yer değiştirme ifadeleri ile aynı zamanda sınır şartlarının da fourier integral dönüşümlerinin alınmasıyla 10 bilinmeyenli 10 denklem oluşturulmuştur. $-\infty$ dan $+\infty$ 'a giden x eksenini yerine sınırları $-a$ dan $+a$ ya giden t eksenini kullanırsak değme gerilmeleri $P_1(\alpha)$ ve $P_2(\alpha)$ (7a, 7b) de ki gibi tanımlanır.

$P_1(\alpha), P_2(\alpha)$ sırasıyla $P_1(x_1)$ ve $P_2(x_2)$ 'in fourier kosinüs dönüşümü alınmış halidir.

$$P_1(\alpha) = -\frac{1}{2G_1} \int_0^a P_1(t_1) \cos \alpha(t_1) dt_1 \quad (7a)$$

$$P_2(\alpha) = -\frac{1}{2G_2} \int_0^b P_2(t_2) \cos \alpha(t_2) dt_2 \quad (7b)$$

4. İNTEGRAL DENKLEMLERİN ELDE EDİLMESİ

Panç ile tabaka arasındaki bilinmeyen değme gerilme yayılımını elde edebilmek için (5j) nolu sınır şartıdan ve alt tabaka ile yarım düzlem arasında ki bilinmeyen değme gerilme yayılımı içinse (5k) nolu sınır şartının türevlerinden faydalanılmıştır.

Bu ifadelerin bir defa türevi alındığında

$$\frac{\partial v_{1x}}{\partial x} = \frac{d}{dx} [F(x)] = f(x) \quad 0 < x < a \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [V_2(x,y) - V_3(x,y)] = 0 \quad 0 < x < b \quad (9)$$

A,B,C,D katsayılarında geçen $P_1(\alpha)$ ve $P_2(\alpha)$, $P_1(t_1)$ ve $P_2(t_2)$ cinsinden yazılıp düzenlendiğinde ve $y \rightarrow 0$ 'a ve $y \rightarrow -h$ 'ya giderken integral çekirdeğinin yakınsaması bozulmuştur. Yakınsamayı bozan singüler terimler aşağıda verilmiştir.

$y \rightarrow 0$ 'a giderken singüler terim;

$$\int_0^\infty \left[\frac{1+k_1}{2} - \alpha y \right] e^{-\alpha y} \sin(\alpha x) \cos(\alpha t_1) d\alpha \quad (10)$$

$y \rightarrow -h$ 'a giderken singüler terimler;

$$\int_0^{\infty} \left[\frac{1+\kappa_2}{2} + \alpha(h+y) \right] e^{-\alpha(h+y)} \sin(\alpha x) \cos(\alpha t_2) \quad (11a)$$

$$\int_0^{\infty} \left[\frac{1+\kappa_3}{2n} + \alpha(h+y) \right] e^{\alpha(h+y)} \sin(\alpha x) \cos(\alpha t_2) d\alpha \quad (11b)$$

Singüler terimler çekirdek içerisinde çıkarılıp ayrı olarak kapalı integrali alındıktan sonra çekirdek ifadesine eklenirse paç ile üst tabaka arasında ve alt tabaka ile yarım düzlem arasında yazılan integral denklemler sırasıyla (12) ve (13) de verilmektedir.

$$\int_0^a P_1(t_1) dt_1 \left[\frac{1}{t_1+x_1} - \frac{1}{t_1-x_1} + 2K_1(x_1, t_1) \right] dt_1 + 2 \int_0^b P_2(t_2) K_2(x_1, t_2) dt_2 = \frac{4\pi G_1}{1+\kappa_1} \frac{\partial f(x)}{\partial x} \quad (12)$$

$$2 \int_0^a P_1(t_1) K_3(x_2, t_1) dt_1 + \int_0^b P_2(t_2) \left[\frac{1}{t_2+x_2} - \frac{1}{t_2-x_2} + 2K_4(x_2, t_2) \right] dt_2 = 0 \quad (13)$$

Burada çekirdekler;

$$K_1 = \frac{1}{1+\kappa_1} \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta} (1+\kappa_1) \{ -4\alpha h_1(-1+m)(\kappa_2+m) e^{-2\alpha h_1} [e^{-4\alpha h_2} + 1] + \\ (1+\kappa_1 m)(\kappa_2+m) (1+e^{-4\alpha h_1-4\alpha h_2}) \\ + (-1+m)(-\kappa_2+m\kappa_1)(e^{-4\alpha h_2} - e^{-4\alpha h_1}) + ((-1+m)(1+\kappa_1 m)(4\alpha^2 h_2^2 + 1) + \\ (\kappa_2 - \kappa_1 m)(\kappa_2 + m))(e^{-2\alpha h_2} - e^{-4\alpha h_1-2\alpha h_2}) + (4\alpha h_2(4\alpha^3 h_1 h_2(-1+m)^2 + \\ (1+\kappa_1)(1+\kappa_2)m) + 4\alpha h_1((\kappa_2+m)^2 + (1-m)^2))(e^{-2\alpha h_1-2\alpha h_2}) \} - [1+\kappa_1] \quad (14a)$$

$$K_2 = \frac{1}{1+\kappa_1} \int_0^{\infty} \frac{1}{m\Delta} e^{-5\alpha h_1-3\alpha h_2} (1+\kappa_1)(1+\kappa_2)m \{ e^{-4\alpha h_1} (1+\kappa_2 + (-2\alpha(h_1-h_2) + 4\alpha^2 h_1 h_2) \\ - m(1+\kappa_1) e^{2\alpha(h_1+h_2)} (-1-\kappa_2-2\alpha(-1+m)((h_1-h_2)+ \\ 2\alpha h_1 h_2) + m(1+\kappa_1)) + e^{2\alpha h_1} ((1+\kappa_1 m)(-1+2\alpha h_2) \\ + (\kappa_2+m)(-1+2\alpha h_1)) + e^{2\alpha(2h_1+h_2)} ((1+\kappa_1 m)(1+2\alpha h_2) \\ + (\kappa_2+m)(1+2\alpha h_1))) \} \quad (14b)$$

$$K_3 = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta} \frac{n}{m(1+\kappa_2)+1+\kappa_3} m \{ e^{-5\alpha h_1-3\alpha h_2} (1+\kappa_1)(1+\kappa_2) (e^{2\alpha(h_1+h_2)} (1+\kappa_2+2\alpha(-1+m) \\ (h_1-h_2+2\alpha h_1 h_2) - m(1+\kappa_1)) + e^{4\alpha h_1} (-1-\kappa_2+m(1+\kappa_1)+2\alpha(-1+m)(h_1-h_2-2\alpha h_1 h_2)) + \\ e^{2\alpha h_1} ((\kappa_2+m)(1-2\alpha h_1) + (1+\kappa_1 m)(1-2\alpha h_2)) - e^{2\alpha(2h_1+h_2)} ((1+\kappa_1 m)(1+2\alpha h_2) \\ + (\kappa_2+m)(1+2\alpha h_1))) \} \quad (15a)$$

$$K_4 = - \int_0^{\infty} \frac{n}{n(1+\kappa_2)+1+\kappa_3} \left(\frac{1}{\Delta} \{ e^{-4\alpha h_1-4\alpha h_2} (1+\kappa_2)(16\alpha^3 h_1^2 h_2(-1+m)^2) e^{2\alpha h_1+2\alpha h_2} + \right. \\ \left. 4\alpha^2 h_1^2 (-1+m)(\kappa_2+m)(-1+e^{-4\alpha h_2}) e^{2\alpha h_1} + (-1+e^{2\alpha h_1}) \kappa_2 \right. \\ \left. (1+(e^{2\alpha h_1} + e^{4\alpha h_2})(-1+m) + \kappa_1 m + e^{2\alpha(h_1+2h_2)} (1+\kappa_1 m)) - \right.$$

$$\begin{aligned}
(15b) \quad & m(\kappa_1(-1+m)(e^{4ah_1}-e^{4h_2})+(1-e^{4a(h_1+h_2)})(1+\kappa_1m)+ \\
& (-1+\kappa_1+m(1+\kappa_1^2))e^{2ah_1}(1-e^{4ah_2})+4\alpha e^{2ah_2}(e^{2ah_1}h_1(1+\kappa_1)(1+\kappa_2)m \\
& +h_2(1+e^{4ah_1})(-1+m)(1+\kappa_1m)+e^{2ah_1}(2+2m(-1+\kappa_1)+m(1+\kappa_1^2))) \\
& +(1+\kappa_2)) \\
\Delta = & (\kappa_2+m)(1+m\kappa_1)(e^{-4ah_1-4ah_2}+1)+(-1+m)(-\kappa_2+m\kappa_1)(e^{-4ah_1}+e^{-4ah_2})+e^{-2ah_2}(1+e^{-4ah_1})(1+\kappa_2-m+ \\
& m(\kappa_1+\kappa_2-\kappa_1\kappa_2-2\kappa_1m)-4\alpha^2h_2^2(-1+m)(1+m\kappa_1))+e^{-2ah_1}(1+e^{-4ah_2})(\kappa_2(-2+4\alpha^2h_1^2(-1+m) \\
& +m(1-\kappa_1))+m(-1+\kappa_1+4\alpha^2h_1^2(-1+m)+m(1+\kappa_1^2))-2e^{-2ah_1-2ah_2}(1+\kappa_2^2+8\alpha^4h_1^2h_2^2(-1+m)^2- \\
& m(1-\kappa_1-\kappa_2-\kappa_1\kappa_2)+m^2(1+\kappa_1^2)+2\alpha^2((h_1+h_2)^2(2+2(-1+\kappa_1)m+(1+\kappa_1^2)m^2)-2h_1(h_1+h_2) \\
& (2-(3+\kappa_1(-1+\kappa_2)+\kappa_2)m+(1+\kappa_1^2)m^2)+h_1^2(3+\kappa_2^2-6m-2m\kappa_1\kappa_2+(3+\kappa_1^2)m^2))))))n
\end{aligned} \quad (16)$$

olarak bulunmuşlardır.

Bu denklemlerde ; $m = \frac{\mu_2}{\mu_1}$ ve $n = \frac{\mu_3}{\mu_2}$ kayma modülleri oranlarını ifade etmektedirler.

5. İNTEGRAL DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMÜ

I. ve II. İntegral denklemlerin sayısal çözümü için değişken dönüşümü ve boyutsuzlaştırma yapılmış ve aşağıdaki boyutsuz büyüklükler tanımlanmıştır.

$ah_1 = z$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$\alpha = \frac{z}{h_1} \quad (17a)$$

$$t_1 = as_1 \quad dt_1 = ads_1, \quad t_2 = bs_2 \quad dt_2 = bds_2, \quad x_1 = aw_1 \quad x_2 = bw_2 \quad (17b)$$

$$g(s_1) = \frac{P_1(s_1)}{P/h_1}, \quad g(s_2) = \frac{P_2(s_2)}{P/h_1} \quad (17c)$$

Yukarıdaki denklemlerde $g(s_1)$ ve $g(s_2)$ sırasıyla panç ve temas ettiği tabaka arasındaki ve iki tabaka arasındaki yüzeylerde meydana gelen boyutsuz temas gerilmeleridir. $g(s_n = \pm 1) = 0$ olduğundan integral denkleminin indisi (-1) olacaktır.

$$\frac{a}{h_1} \int_{-1}^1 g(s_1) ds_1 = 1 \quad (18a)$$

$$\frac{b}{h_1} \int_{-1}^1 g(s_2) ds_2 = 1 \quad (18b)$$

(17) de ki boyutsuz büyüklükler (12) ve (13) te ki integral denklemlerde yerlerine yazılırsa

I. ve II. integral denklemler,

$$\int_{-1}^1 g s_1 \left[\frac{1}{(s_1, w_1)} + \frac{a}{h_1} K_1^*(w_1, s_1) \right] ds_1 + \frac{b}{h_1} \int_{-1}^1 g s_2 K_2^*(w_1, s_2) ds_2 = \frac{f(s_1)}{P/h_1} \quad -1 < s_1 < 1 \quad (19a)$$

$$\frac{a}{h_1} \int_{-1}^1 g s_1 K_3^*(w_1, s_1) ds_1 + \int_{-1}^1 g s_2 \left[\frac{1}{s_2 - w_2} + \frac{b}{h_1} K_4^*(w_2, s_2) \right] ds_2 = 0 \quad -1 < s_2 < 1 \quad (19b)$$

halini alır.

$$g(s_{ri}) = G(s_{ri}) (1 - s_{ri}^2)^{1/2} \quad (20)$$

olarak alınıp ve (-1) indis için Gauss-Chebyshev integrasyon formülü kullanılırsa

$$\sum_{i=1}^n (1 - s_{1i}^2) \left[\frac{1}{s_{1i} - w_{1j}} + \frac{a}{h_1} K_1^*(w_1, s_{1i}) \right] G(s_{1i}) + \frac{b}{h_1} \sum_{i=1}^n (1 - s_{2i}^2) K_2^*(w_{1j}, s_{2i}) G(s_{2i}) = \frac{f(w_{1j})}{P/h_1} = f^*(w_{1j}) \quad (21a)$$

$$\frac{a}{h_1} \sum_{i=1}^n (1 - s_{1i}^2) K_3^*(w_{2j}, s_{1i}) G(s_{1i}) + \sum_{i=1}^n (1 - s_{2i}^2) \left[\frac{1}{s_{2i} - w_{2j}} + \frac{b}{h_1} K_4^*(w_2, s_{2i}) \right] G(s_{2i}) = 0 \quad (21b)$$

Burada

$$\frac{a}{h_1} \sum_{i=1}^n (1 - s_{1i}^2) G(s_{1i}) = \frac{n+1}{\pi} \quad (22a)$$

$$\frac{b}{h_1} \sum_{i=1}^n (1 - s_{2i}^2) G(s_{2i}) = \frac{n+1}{\pi} \quad (22b)$$

$$s_n = \cos\left(\frac{i\pi}{n+1}\right) \quad i=1, \dots, n \quad (22c)$$

$$w_j = \cos\left[\pi\left(\frac{2j-1}{2n+2}\right)\right] \quad j=1, \dots, n+1 \quad (22d)$$

$$f^*(w_{1j}) = \frac{n+1}{\pi} \frac{f(w_{1j})}{P/h_1} \quad (22e)$$

olarak tanımlıdır.

(21a,b)' de (n/2+1). Denklemler otomatik olarak sağlanmaktadır. 21(a,b) ve 22(a,b) denklemlerinden (2n+2) tane cebirsel denklem elde edilir ve bu denklemler yardımı ile yine (2n+2) tane olan $G(s_{1i})$ ve $G(s_{2i})$ ile a ve b bilinmeyen değerlerini bulmak mümkündür. A ve b değerleri iterasyonlar sonucu elde edilir ve değme gerilmeleri hesaplanabilir. Değme gerilmesi değerleri bulunduğu normal gerilmeler ve kayma gerilmeleri buna bağlı olarak hesaplanabilir.

Burada bilinmeyenler $G(s_{1i})$ ve $G(s_{2i})$ değerleridir. Bu bilinmeyenler var olan denklemler yardımı ile bulunabilir. Denklemlerde geçen

$h_1, h_2, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \mu_3/\mu_2, \mu_2/\mu_1, R/h_1, G_2/(P/h_1)$

boyutsuz büyüklükleri tabaka yükseklikleri, panç yarıçapı, malzeme ve dış tekil yük durumlarına göre değer alırlar.

6. SONUÇLAR VE İRDELEME

Tabakaların malzeme özellikleri $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \mu_3/\mu_2, \mu_2/\mu_1$ panç yarıçapı R/h_1 , tekil yük değeri $G_2/(p/h_1)$ ve tabakaların yükseklikleri oranı h_2/h_1 ile ilgili olan boyutsuz büyüklüklerin farklı değerleri için değme gerilmeleri, değme yüzeyleri, y simetri ekseninde ortaya çıkan σ_x , σ_y normal gerilmeleri incelenmiştir.

Pançın değme yüzeyi ve bu yüzeyde ortaya çıkan değme gerilmeleri ile iki tabakanın değme yüzeyi ve bu yüzeyde ortaya çıkan değme gerilmeleri ayrı ayrı incelenmiştir.

Boyutsuz büyüklüklerde yer alan G_1 ve h_1 değerlerinin değişimi birden fazla boyutsuz büyüklüğü etkilediğinden yer aldıkları ifadelerde sabit kaldıkları düşünülmelidir. Örneğin $G_1/(P/h_1)$ değerinin değişimi yalnızca P tekil yükünün değişimini ifade etmektedir.

İlk olarak yük ve yarıçapın değişimine bağlı olarak değme yüzeyleri Tablo1, ve Şekil 2 de verilmiştir. Bunlardan görüleceği gibi yük ve yarıçap değerleri arttıkça panç ve tabakaların değme yüzeyleri arasındaki fark azalmaktadır. Değme yüzeyleri yarıçapın küçük değerlerinde yükün değişiminden az etkilenmekte yarıçapın artması ile yükün değme yüzeylerindeki tesiri daha fazla görülmektedir.

Değme gerilme dağılışı dairesel pançın yarıçapına bağlı olarak Şekil (3, 4) de çeşitli yük değerleri için Şekil (5, 6) da gösterilmiştir. Değme gerilmeleri şekillerinden değme yüzeyleri arttıkça değme gerilmelerinin azaldığı görülmektedir. Panç yarıçapı ve yük değerinin azalması ise değme gerilmelerini arttırmaktadır.

Tabakaların ve alt tabaka ile elastik yarım düzlemin kayma modülleri oranlarına göre değme uzunluklarının değişimi Tablo 2 de ve Şekil (6,7) de verilmektedir. Üst tabaka ile alt tabakanın kayma modülleri oranı m arttıkça değme uzunluğu azalmaktadır. Aynı şekilde alt tabaka ve yarım düzlemin kayma modülleri oranı n arttıkça değme uzunluğu azalmaktadır.

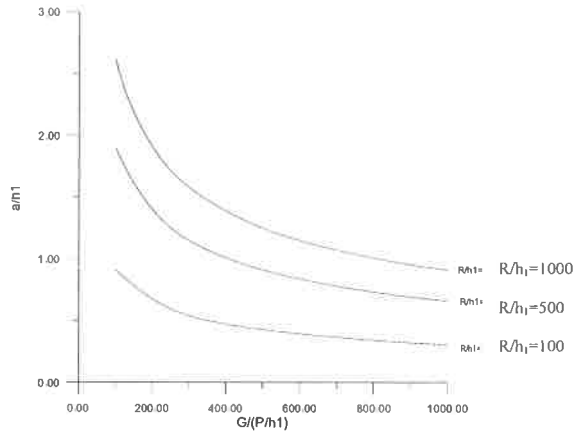
Tablo1. Dairesel pançın yarıçapına bağlı olarak, çeşitli yük değerleri için bulunan değme yüzeyleri ($h_2/h_1 = 2$, $G_2/G_1 = 2$, $G_3/G_2 = 2$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 2$)

G/(P/h ₁)	R/h ₁ =100		R/h ₁ =500		R/h ₁ =1000	
	a/h ₁	b/h ₁	a/h ₁	b/h ₁	a/h ₁	b/h ₁
100	0.9096	3.420	1.90	3.750	2.613	4.198
250	0.5941	3.370	1.250	3.411	1.7122	3.899
500	0.4272	3.230	0.910	3.313	1.2493	3.499
750	0.3511	3.226	0.7544	3.328	1.0382	3.400
1000	0.305227	3.206	0.6598	3.300	0.910	3.312

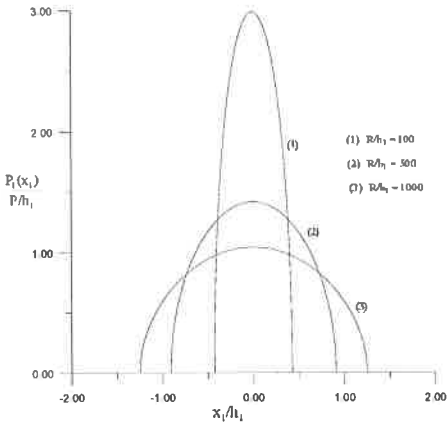
Tabakaların ve elastik yarım düzlemin kayma modülleri oranları azaldığında değme gerilmeleri artmaktadır. Bu artış (Tablo 2) de gösterilmiştir

Tablo 2. Üst tabaka ile alt tabaka arasındaki kayma modülleri oranına bağlı olarak alt tabaka ile yarım düzlem arasındaki kayma modülü oranlarının değişimi

$n = G_3/G_2$	$m = G_2/G_1$					
	0.5		1		2	
	a/h1	b/h1	a/h1	b/h1	a/h1	b/h1
0.5	3.6175	6.3998	2.669	5.4549	2.1165	5
1	3	5.226	2.35352	4.6998	1.9788	4.201
2	2.68	4.3053	2.191	4	1.9	3.75

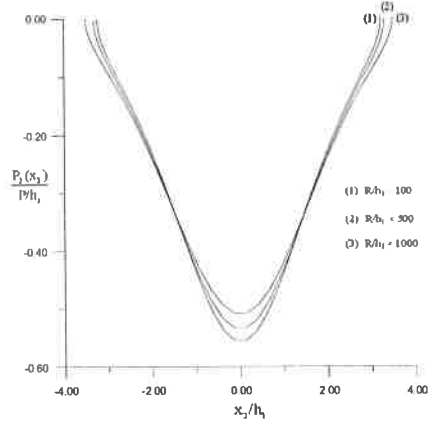


Şekil 2. Dairesel pançın yarıçapına bağlı olarak, panç değme yüzeyinin yük ile değişimi ($h_1/h_2 = 2$, $G_2/G_1 = 2$, $G_3/G_2 = 2$)



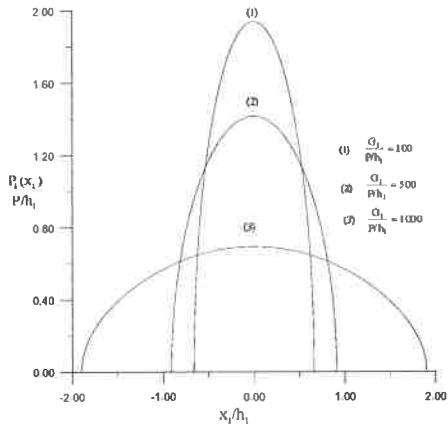
Şekil 3. Dairesel pançın yarıçapına bağlı olarak $y=0$ da değme gerilmesi yayılımı ($h_2/h_1=2$, $G_2/G_1=2$, $G_3/G_2=2$)

$$\kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \frac{G_1}{P/h_1}=500$$

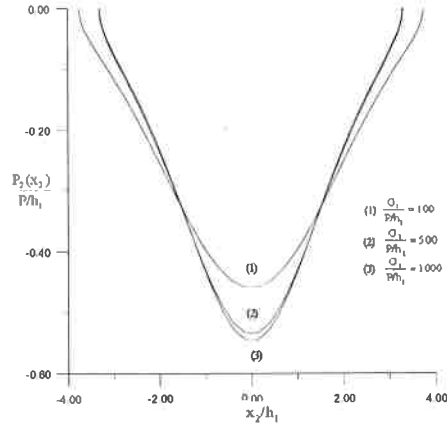


Şekil 4. Dairesel pançın yarıçapına bağlı olarak $y=-h$ da değme gerilmesi yayılımı. ($h_2/h_1=2$, $G_2/G_1=2$,

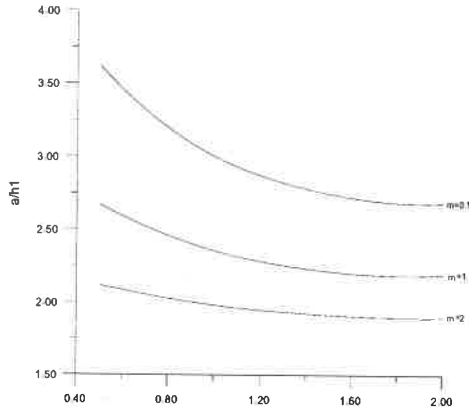
$$G_3/G_2=2, \kappa_1=2, \kappa_2=2, \kappa_3=2, \frac{G_1}{P/h_1}=500$$



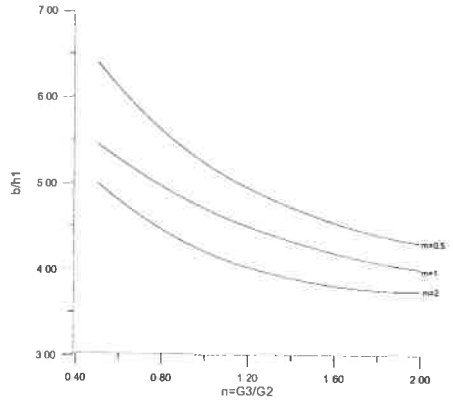
Şekil 5. Çeşitli yük değerleri için $y=0$ da değme gerilmesi yayılımı ($h_2/h_1=2$, $G_2/G_1=2$, $G_3/G_2=2$, $R/h_1=500$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$)



Şekil 6. Çeşitli yük değerleri için $y=-h$ da değme gerilmesi yayılımı ($h_2/h_1=2$, $G_2/G_1=2$, $G_3/G_2=2$, $R/h_1=500$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=2$)



Şekil6. Tabakaların kayma modülleri oranı (m)'e bağlı olarak tabaka ile yarım düzlemin kayma modüllerinin (n) değme yüzeyi (a/h_1) ile değişimi



Şekil7. Tabakaların kayma modülleri oranı (m)'e bağlı olarak tabaka ile yarım düzlemin kayma modüllerinin (n) değme yüzeyi (b/h_1) ile değişimi

KAYNAKLAR

- [1] Ranjits, Dhaliwal and Indresh S. Rau, "The Axisymmetric Boussinesq Problem for A Thick Elastic Layer Under a Punch of Arbitrary Profile", Int J. Eng. Sci, vol 8 pp 843-856 , 1980.
- [2] Geçit, M. R., ve Erdoğan F., "Frictionless Contact Problem for An Elastic Layer Under Axisymetric Loading, International Journal of Engineering Science", 24, 8 1245-1255, 1986.
- [3] Keer, L.M., Dundurs, J., ve Tsai, K.C., "Problems Involving A Receding Contact Between A Layer and A Half Space , Journal of Applied Mechanics", 39, Transactions of ASME 94,1115-1120, 1972.
- [4] Çakıroğlu F.I., Erdöl R., "Elastik Zemine Oturan Bileşik Şeritlerde Sürekli Değme Problemi", VI. Ulusal Mekanik Kongresi, Eylül 234-248, 1989.
- [5] Dempsey, J. P., Zhao, Z. G., Minnetyan, L., Li, H., "Plane Contact of an Elastic Layer Supported by a Winkler Foundation", Journal of Applied Mechanics, transactions of the ASME, 57, 974-980, 1990.
- [6] Pindera, M. J., Lane, M.S., "Frictionless Contact of Layered Half Planes , Part I Analysis, Journal of applied Mechanics", transactions of the ASME, 60, 640-645, 1993.
- [7] Birinci A., Erdöl R., "Frictionless Contact Between A Rigid Stamp and An Elastic Layered Composite Resting on Simple Supports". Mathematical-Computational Applications Vol 6, No1, pp.13-22, 2001.
- [6] Borgi S.E., Abdelmoula R., Keer L., "A Receding Contact Plane Problem Between A Functionally Graded Layer and A Homogeneous Substrate". Int J. Solid and Structures 43 658-674, 2006.
- [7] Bakırtaş., I., "The Problem of A Rigid Punch on A Nonhomogeneous Elastic Half Space. International Journal of engineering Science" . 18, 597-610, 1980.