



XX. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ
05 - 09 Eylül 2017, Uludağ Üniversitesi, Bursa

DOĞRUSAL OLMAYAN MEKANİKTE SEÇMELER: KARMAŞA VE DÜZEN

Attila Aşkar
Koç Üniversitesi, İstanbul, Türkiye

1.SUNUMUN İÇERİĞİ

Konu üç alt başlıkta derlenmiştir:

1. Karmaşalı Dinamik: Kaos [1, 2, 3]
2. Düzenli Dinamik: Solitonlar [1, 4]
3. Heliste büyük yerdeğiştirmeler: statik ve dinamik. [5]

2.KARMAŞALI DİNAMİK: KAOS

Kaos kelimesi Eski Yunanca'dan ve mitolojiden geliyor. Mitolojiye göre, evrenin bir karmaşayla başlamış. Bu karmaşık başlangıca Kaos diyorlar. "Gaz" kelimesi de yine aynı kelimenin başka ortamda kullanılması. Ege'nin iki tarafındaki, Anadolu ve Atika yarımadasındaki bilim insanları, sezgisel de olarak bir gazın içinde, bugün de varlığını bildiğimiz atom ve moleküllerin karmaşık dinamiğini saptamışlar.

Burada kaosun kuramına girmeksizin, konuyla ilgileri olmayan veya çok az olanları da hedefleyip, örneklerle tanıtacağız. Kaos özünde doğrusal olmayan bir olay. Doğrusal yaklaşımlara, yaklaşık olarak da olsa, tanıtılamaz. Ancak, doğrusal dinamikteki bazitemel araçlar bu alanda da kullanılıyor.

2.1. Doğrusal dinamikten genel hatırlatmalar.

Kaaosa geçmeden önce, doğrusal ve düzenli dinamikten öğrendiklerimizi anımsayalım. Parabol sınırları içinde sürtünmesiz yuvarlanan bir bilyanın, bir kütleyle bağlı yayın ve bir sarkacın küçük genlikli salınımlarıyla başlayalım.

Her üç düzendeki dinamiğin de, bunları tanımlayan denklemlerin ve çözümünü biliyoruz. Boyutsuzlaştırılmış büyüklüklerle denklem:

$$\ddot{x} + x = 0 \quad x(0) = A \quad \dot{x}(0) = B \quad \rightarrow$$

$$x = A \cos t + B \sin t \quad p \equiv \dot{x}(t) = B \cos t - A \sin t$$

Bu salınımlarda potansiyel, kinetik ve toplam enerjilerin sırasıyla

$$V = \frac{1}{2}x^2 \quad KE = \frac{1}{2}p^2 \quad E = V + KE$$

Bulunan çözümü iki türlü gösterebiliriz: $x = x(t)$ veya t yi x ile p arasında yok ederek $x^2 + p^2 = 2E \quad E = \frac{1}{2}(A^2 + B^2)$.

Bir adım daha ileri giderek, örneğin a , b , c sabit sayılarıyla tanımlanan $ax + bp = c$, çizgisine sarkacın her geldiği zamanda bir nokta koyalım. Sistem her salınımlarında bu çizginin hep aynı noktasından geçer. Bu gösterimde salınımları bir tek noktayla özetliyoruz. Bu yaklaşımla elde edilen gösterime "Poincaré gösterimi" denir. Bu problemde gelenek olarak bu gösterim kullanılmaz, çünkü problem düzlemde bir çizgiyle tam olarak gösterilebiliyor, Poincaré gösterimi de aşırı basite indirger, pek bir anlamı kalmaz.

2.2. İki kütleli doğrusal olmayan yay takımı. Bu düzenekte, Hénon - Heiles potansiyeli olarak adlandırılan potansiyel enerjiyi ve bundan elde edilen denklemleri inceleyelim:

$$V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + xy^2 - \frac{1}{3}x^3 \quad \rightarrow \quad \ddot{x} = -x - y^2 + x^2 \quad \ddot{y} = -y - 2xy$$

Bu problemin çözümünü $\{x, y, p \equiv \dot{x}, q \equiv \dot{y}\}$ den oluşan dört boyutlu faz uzayında belirleyebiliriz. Tek serbestlik dereceli durumdaki gibi bu durumu çizmemiz olanaksızdır. Ancak, bu düzenekte enerjinin korunduğunu kullanarak, serbest değişkenlerin sayısını müce indirebiliriz. Bu üç boyutlu uzaydaki yörüngeyi çizebiliriz. Ancak bu çok karışık bir işlemdir ve sonuçların yorumu da basit değildir.

Bir önceki alt bölümde olduğu gibi tüm yörüngeden vazgeçerek, yörünge'nin üç boyutlu faz uzayındaki bir düzlemi kesme noktalarını kullanarak iki boyutlu uzayda, yani düzlemde yörüngelerin niteliğini belirleyen bilgiyi derleyebiliriz. Bu gösterime "Poincaré gösterimi" (Poincaré map) denir.

Hénon - Heiles denkleminde, değişik enerji değerlerinde Poincaré gösterimleri aşağıda görülmektedir. Bu gösterimlerdeki noktalar düzleme rasgele bir sırada gelirler.

Şekillerden düşük enerji değerlerinde, Poincaré gösterimlerinin düzenli olup, uzayın hepsini örtmemekte, enerji arttıkça noktalar tüm düzlemi örtme eğilimini sürdürmektedir. Bu duruma toplam enerjinin 1/6 değerinde ulaşılır ve bu durum tam kaos olarak adlandırılır.

3.DÜZENLİ DİNAMİK ÖRNEĞİ: SOLİTONLAR

Düz türevliye dönüştürerek çözülebilen kısmi türevli denklemlerden aşağıdaki beşini inceleyeceğiz:

$$\text{Korteweg de Vries (KdV)} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

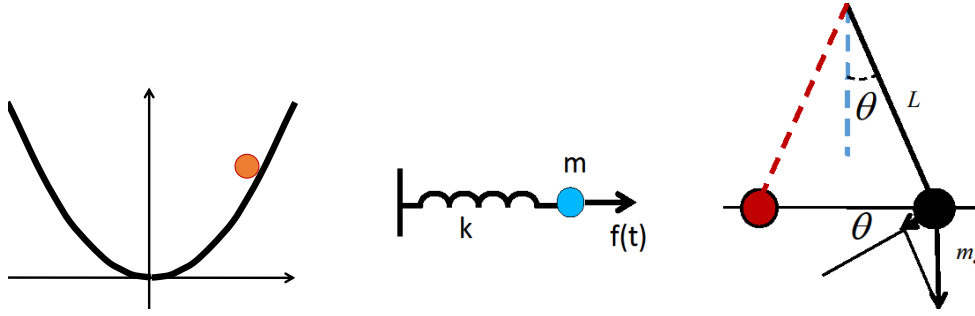


Figure 1: a. Parabolik kuyu içinde yuvarlanan bilya; b. Kütle - yay takımı; c. Sarkaç

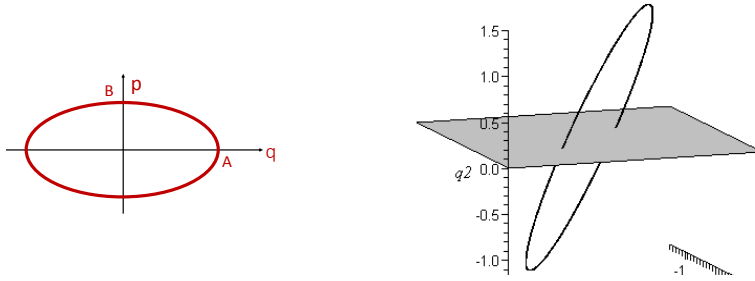


Figure 2: Çözümün a. Düzlemde yörünge ile gösterimi; b. Poincaré gösterimiyle düzlemde iki noktaya indirgenmesi.

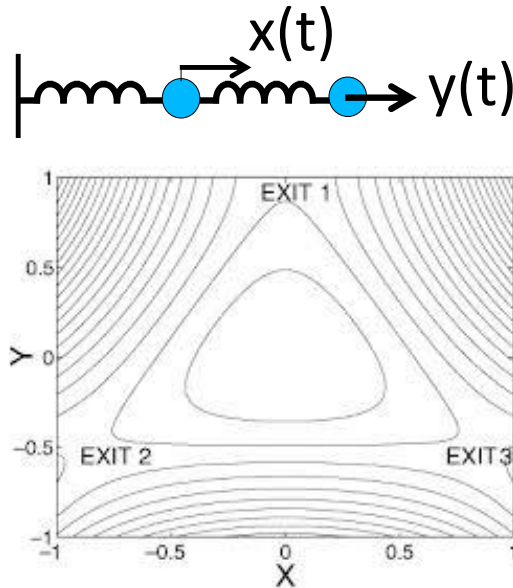


Figure 3: a. Kütle - yay takımı ; b. Hénon - Heiles potansiyeli

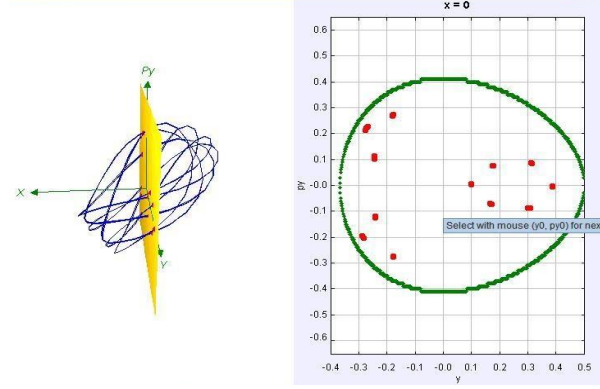


Figure 4: Poincaré gösterimiyle dinamiğin basite indirgenmiş yapısı

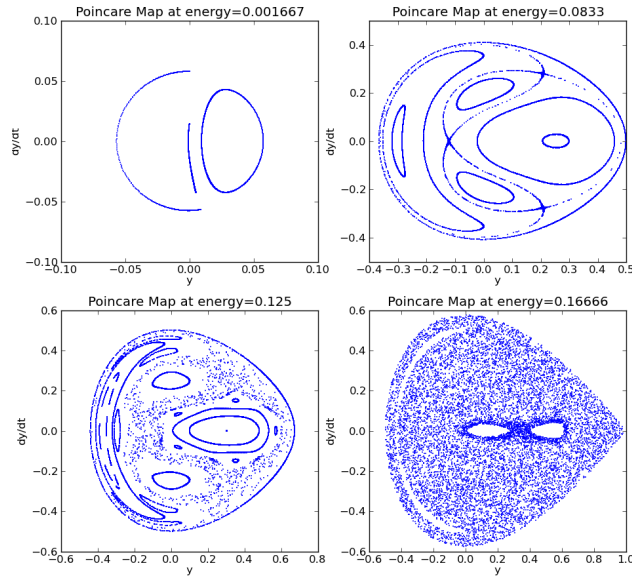


Figure 5: Hénon - Heiles denkleminde artan enerjilerle yörüngelerin Poincaré gösterimleri

$$\text{Dönüşmüş Korteweg de Vries (KdV)} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + 6u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

$$\text{Boussinesq} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{1}{2} u^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] = 0$$

$$\text{Sine - Gordon} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sin u = 0$$

$$\text{Doğru olmayan Schrödinger (NS)} \quad i \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - |u|^2 u = 0 \quad i \equiv \sqrt{-1}$$

Bu döklemelerin hepsi de $\xi = x - ct$ cinsinden düz türevli denkleme indirgenir. Burada hesaplamaların ayrıntısı KdV denklemini için vereceğiz. Diğer denklemler de aynı yoldan sonuca varılır.

3.1. KdV denkleminin düz türevli denkleme indirgenmesi.

$u = u(x - ct)$ türünden ötelenen dalga çözümünü, $\xi = x - c$ tanımıyla KdV denkleminde yerleştirelim:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad \rightarrow \quad -c \frac{du}{d\xi} + 6u \frac{du}{d\xi} + \frac{d^3 u}{d\xi^3} = 0$$

Bu denklemini $\frac{du}{d\xi} \equiv u'$ ile çarpıp inetegralleri hesaplayınca:

$$u' u'' - cu' u + 3u' u^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{1}{2} u'^2 - \frac{1}{2} cu^2 + u^3 \right)' = 0 \quad \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} u'^2 - \frac{1}{2} cu^2 + u^3 = E \quad \rightarrow \quad V = -\frac{1}{2} cu^2 + u^3$$

Burada E matematik gözüyle bir entegral sabiti, fizik gözüyle de toplam enerji, V de potansiyel enerjidir. $\xi = x - c$ değişkeni de Newton mekanığı kapsamında zaman görevi yapıyor.

Son denklemden $u' = \frac{du}{d\xi}$ yazılımını kullanarak, çözüme ulaşılır:

$$\frac{1}{2} u'^2 - \frac{1}{2} cu^2 + u^3 = E \quad \rightarrow \quad \frac{du}{\sqrt{2E + cu^2 - 2u^3}} = d\xi \quad \rightarrow \quad u = \frac{c}{\cosh(\frac{1}{2}\sqrt{c}\xi)}$$

3.2. Solitonları veren entegraller. Sayfa 4 deki denklemlerin ortak yapısı:

$$u' = \sqrt{-2V(u)} \quad \rightarrow \quad \frac{du}{\sqrt{-V(u)}} = d\xi \quad \rightarrow \quad \int_{u=u_0}^u \frac{du}{\sqrt{-V(u)}} = \xi$$

(i) Korteveg-de Vries (KdV) solitonu için:

$$\int_{u=u_0}^u \frac{du}{u \sqrt{c - u}} = \xi \quad u_0 = c$$

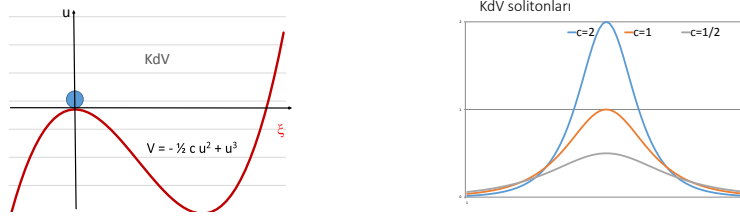


Figure 6: KdV denkleminde a. Eşdeğer potansiyel; b. Seçilen c değerlerine göre elde edilen solitonlar.

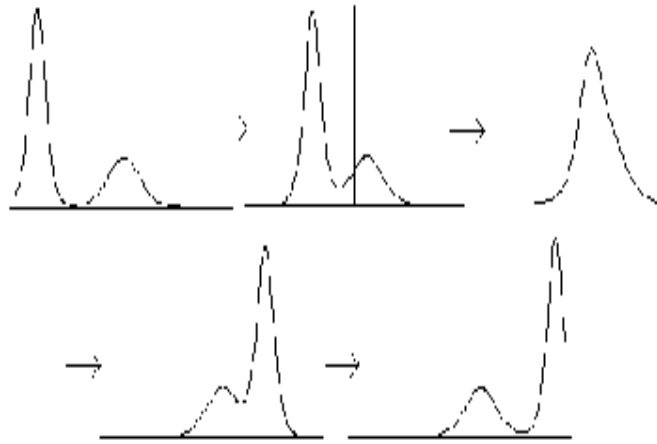


Figure 7: KdV denkleminde İki solitonun etkileşimi / çarpışması

KdV ve benzer denklemler birden fazla solitonun da var olduğu çözümler de verirler. Bu solitonlarda da genlik ve dalga hızı birbirine bağlıdır. Yine doğrusal olmayan terim ve yüksek mertebe türevinin bir birini dengelemesi sonucunda, bir ortamda birden fazla soliton bulunduğu da solitonlar bir birleriyle etkileşimde olsalar da ayrıldıklarında kimliklerini korurlar.

İlk konumda, solitonlardan a arkada, B önde bulunuyor. arkadaki genliği daha büyük olan a solitonu B den daha büyük hızla ilerler. Dolayısıyla, a solitonu öndeki B solitonunu yakalar. Bu olay iki parçacığın çarpışmasını anımsatıyor. İkinci şekil bu çarpışma döneminde birbiri içine girmiş solitonları gösteriyor. Üçüncü şekildeyse, daha hızlı olan a solitonunun öne geçmiş olduğu konum görülüyor.

Özellikle iki solitonlu çarpışmada, çarpışma bittikten sonra her iki solitonun da başlangıçtaki biçimlerine kavuşup ilerlediği solitonların en önemli özelliklerindendir. Bu mükemmel kararlılık solitonların içerdikleri bir bilgiyi bozulmadan taşıyabilmesini gösteriyor.

Bu nedenle solitonlar iletişim teknolojilerinde bir devrim sayılacak kadar önem kazanmıştır.

3.3. Soliter dalga - Soliton karşılaştırılması.

Genliği bir dar bölgede yoğunlaşmış ve sabit bir hızla yerdeğiştiren dalga paketine "Soliter dalga" diyoruz. Bu tanımla KdV denkleminde bulunan ve soliton dediğimiz çözüm bir soliter dalgadır. Ancak her soliter dalga soliton değildir.

Doğrusal Dalga denklemi: $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ nin çözümünün herhangi f ve g fonksiyonlarıyla, $u = f(x - ct) + g(x + ct)$ olduğunu biliyoruz. $\xi = x - ct$ ve $g = 0$ ile, örneğin A ve B herhangi iki değer olarak, $u = A/\cosh^2(Bx)$ doğrusal dalga denkleminin bir çözümüdür. Bu çözüm KdV denkleminde bulduğumuz çözüm yapısında. Ancak bu dalga denkleminin sonsuz sayıda çözümünden bir tanesi.

KdV denklemi soliton çözümü: $u = c/\cosh^2(\sqrt{c}(x - ct/2))$ ise teGenlik ve genişlik: birbirine bağlı.

(i) Dalga paketlerinin genliği a , genişlik ölçüsü B ve dalganın ilerleme hızı c birbirinden bağımsızdır. Doğrusal dalga denkleminde tüm çözümler denklemdeki c ile ilerler.

(ii) KdV denkleminin çözümünün, çok temel bir farkı var: dalganın genliği $a = c$ ve genişliği $B = \frac{1}{2} \sqrt{c}$ olarak dalga hızına bağlıdır. Dolayısıyla KdV denkleminde, doğrusal olmayan terim ve yüksek mertebe türevi dalga paketinin yapısında hıza bağlı kısıtlamalar getirmiştir.

(iii) Farklı genlik ve genişlikteki solitonlar farklı hızlarla ilerler.

Bu özellik tüm soliton çözümlerinde vardır. Bu özelliği izleyerek solitonların biçimleri fevkalade stabildir ve fiziksel olarak da biçimlerini enerji kayıpları, sürtünmeye karşı korurlar.

3.4. Soliton çözümleri: Ortak Yapı : $u = a/\cosh^n(B(x - ct))$

Adı	Denklem	n	a	B
KdV	$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$	2	$\sqrt{c}$	$\frac{1}{2} \sqrt{c}$
MKdV	$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$	1	$\sqrt{c}$	$\sqrt{c}$
Boussinesq	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{1}{2} u^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]$	2	$1 - c^2$	$\frac{1}{2} \sqrt{1 - c^2}$
Sine-Gordon türevi: u'	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin u$	1	$1/\sqrt{1 - c^2}$	$1/4\sqrt{1 - c^2}$
NLS	$i \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v ^2 v$	1	$\sqrt{1 - c^2}$	$\sqrt{1 - c^2}$

Çözümlerin hep aynı $u = a \operatorname{sech}^p(B(x-ct))$ yapısında çıkması bir raslantı olmadığı açıktır. Çünkü, denklemlerin hepsinde doğrusal olmayan terimler ikinci veya üçüncü derecedir.

4.HELİSTE BÜYÜK YER DEĞİŞTİRMELER

Helis denklemi: $x = a \cos \theta \quad y = a \sin \theta \quad z = b\theta \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} \rightarrow$

$$\text{Eğrilik: } \kappa = \frac{a}{c^2} \quad \text{Burulma: } \tau = \frac{b}{c^2}$$

4.1. Eğrisel giriş denklemleri.

Yakın komşular arasında üç türdeki etkileşme:

$$\text{Gerilme: } \|\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i\| = l_0$$

$$\text{Eğilme: } (\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}_i) \cdot (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i) = l_0^2 \cos \theta_i$$

$$\text{Burulma: } [(\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i)] \cdot (\mathbf{x}_{i+2} - \mathbf{x}_{i+1}) = l_0^3 \cos \phi_i$$

Yukarıdaki kinematik değişkenlerde, l_0 1 değişmez varsayımıyla, yerdeğiştirmeleri tanımlayıp seriye açınca, helise ait eğrilik ve burulma değerlerine ulaşılır. Serinin ilk terimleriyle sürekli ortam denklemleri elde edilir. [6]

Bu kinematik büyüklüklerden tanımlanan başlangıçtaki ve şekil değiştirmiş helisin eğriligi K ve κ ile burulması T ve τ cinsinden potansiyel enerji yoğunluğu elde edilir:

$$V = \frac{1}{2} \left[k_e (\kappa - K)^2 + k_b (\tau - T)^2 \right]$$

4.2. Statik Durumda Sonuçlar.

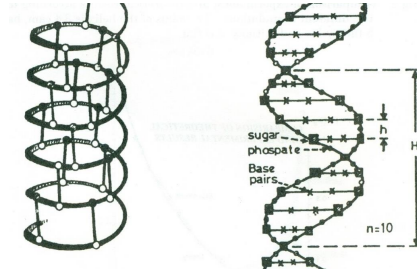


Figure 8: Doğadan Sadeleştirilmiş Helis Örnekleri: a. Protein; b. DNA.

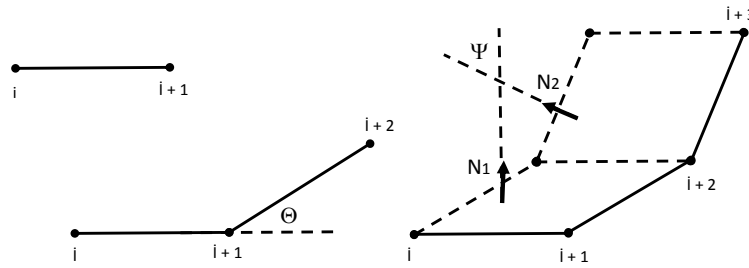


Figure 9: Bir helisi oluşturan komşu noktalarında kinematik büyüklükler: a. İki yakın komşu uzaklığı; Üç yakın komşu arasında eğilme açısı; Dört yakın komşu arasında burulma açısı.

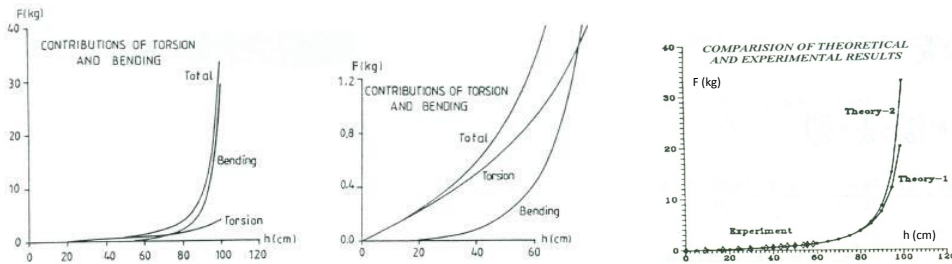


Figure 10: Helisin boyunun uzamasıyla kuvvet - boy ilişkisi: a. Uzama 0 - 120 cm; b. Uzama 0 - 60 cm de ilişkinin ayrıntısı; c. Deney - kuramsal hesaplama karşılaştırması.

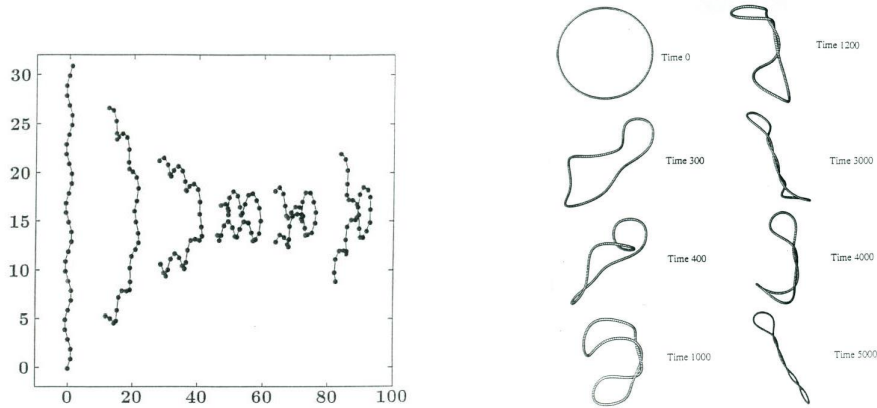


Figure 11: Helisin verilen başlangıç koşullarıyla zaman içinde aldığı yapılar: a. Düz eksenli helis ; b. İki ucu daireye getirilip bağlanmış heliste merkezdeki eğri.

Şekildeki "Theory - 1" olarak belirtilen sonuç taşıma matrisi yöntemiyle adım adım inşa edilen büyük şekil değiştirmeleri, "Theory - 12" de doğrudan eğilme ve burulmayla elde edilen sonucu göstermektedir.

4.3. Dinamik Sonuçlar.

Yukarıdaki türden potansiyel enerji ve bunu izleyen dinamik denklemlerini kullanarak elde edilen iki takım hesaplama örneği aşağıda veriliyor. [7, 8]

KAYNAKLAR

1. A. Aşkar, Yaşam ve matematik-Kaos ve Düzenli olaylardan seçmeler, Utube 5 Nisan 2012
2. M. Henon, C. Heiles, The Astronomical Journal 69, 73 (1964)
3. M. Henon, Chaotic Behavior of Deterministic Systems, Elsevier Science Ltd, pp. 53170 (1983)
4. The Inverse Scattering Transform-Fourier Analysis for Nonlinear Problems MJ Ablowitz, DJ Kaup, AC Newell,
5. H Segur Studies in Applied Mathematics 53(4), 249-315 266 (1974)
6. A. Aşkar, Y. Aköz, Large deformations of helices, Bulletin of the Technical University of Istanbul, 45, Adnan Çakıroğlu özel sayısı, s: 275 (1992)
7. A. Askar, Lattice Dynamical Foundations of Continuum Theories of Solids, Series in Theoretical and Applied Mechanics, World Scientific (1986).
8. A. Askar, B.Space and H. Rabitz, "Subspace Method for Long Time Scale Molecular Dynamics", J.Phys.Chem., 99, No. 19, 7330-7338 (1995).

9. T. Schlick, Modelling and Minimization Techniques for Predicting Large scale Biological Molecules, PhD Thesis (1987), Courant Institute of mathematical Sciences, New York University.