

VİSKOELASTİK DİELEKTRİK ORTAMLARIN HASAR MEKANİĞİNE AİT MATEMATİKSEL BİR MODEL

Mustafa Reşit Usal Ali Ünal Erdem

Süleyman Demirel Üniversitesi Teknik Eğitim Fakültesi Makine Eğitimi Bölümü Isparta
Gazi Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Makine Mühendisliği Bölümü Ankara

usalmr@tef.sdu.edu.tr

alierdem13@gmail.com

ÖZET

Bu çalışmada, viskoelastik dielektrik hasarlı malzemelerin bünye denklemlerine ait genel ifadeler sürekli ortam hasar mekanizmasının temel yasalarından türetilmiştir. Bu matematiksel model, mekanik bir yükün etkisi altında kalan ve mikro boşluklar içeren viskoelastik dielektrik ortamlar için geliştirilmiştir. Malzeme normalde izotrop bir ortam olup sırf mikro-boşluk dağılımı nedeniyle güçlü bir anizotropi göstermektedir. Bu bağlamda cisim davranış olarak kendisini elastik gerilme, dissipatif gerilme, elektriksel polarizasyon ve gerilme-enerjisi yoğunluğunun değişim hızı tarzında ifade edecektir.

ABSTRACT

The general expressions of constitutive equations for isotropic viscoelastic dielectric damaged materials were derived from the basic laws of continuum damage mechanics. This mathematical model represents an viscoelastic dielectric media which has micro-voids and subjected to a mechanical loading. Due to micro-void distribution, overall structure attains a strong anisotropy, despite the fact that the material is otherwise isotropic. In this context the body will respond by means of elastic stress, dissipative stress, electric polarization and strain-energy density release rate.

1.GİRİŞ

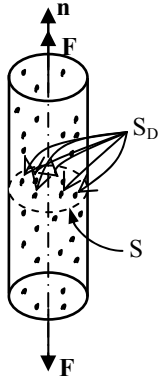
Hasar mekanizması; atomik ölçekte, mikro ölçekte, mezo ölçekte ve makro ölçekte oldukça farklı araştırma alanlarına konu olmuştur. Bu farklı yaklaşımlardan ortaya çıkan ortak görüş şudur: Hasar, malzemenin momentum iletim özelliğinde bir gerilemeye neden olmaktadır. Hasar tansörleri kavramı hasar mekanizmasının temelini oluşturmaktadır. Hasar değişkenini tanımlamak için literatürde değişik mertebeden tansörler kullanılmıştır[1-7]. Biz bu çalışmamızda kanaatimizce daha gerçekçi bir fiziksel yoruma imkan vermesi nedeniyle hasar tansörünü ikinci mertebeden seçmiş bulunuyoruz.

2. HASARIN MEKANİK TEMSİLİ

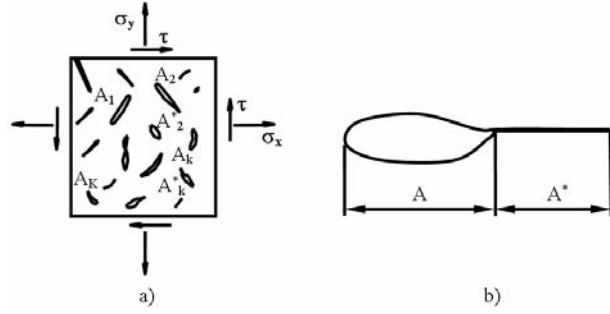
Malzeme içerisinde yer alan mikro boşlukların dışarıdan uygulanan çekme kuvvetine karşı herhangi bir direnç göstermediği dolayısı ile yük taşımadığı düşünülürse, efektif olarak yük taşıyan yüzeyin dik kesit alanından mikro boşlukların alanını çıkararak elde edilen yüzey ($S - S_D$) olur. Dolayısıyla da **efektif gerilme** : $\tilde{\sigma} = \frac{F}{S - S_D}$ şeklinde yazılabilir. **Hasar parametresi**

mikro boşlukların toplam alanının toplam kesit alanına oranı $D \equiv \frac{S_D}{S}$ olarak tanımlanabilir[8-11]. Bu durumda efektif gerilme ve hasarın tanımını dikkate alarak, $\tilde{\sigma} = \frac{F}{S(1 - \frac{S_D}{S})} = \frac{F/S}{1 - D} = \frac{\sigma}{1 - D}$ yazılabilir. Yukarıda verilen ifadeleri göz önüne alarak aşağıdaki

sınırlamaları yazılabilir; $0 \leq D \leq 1$, $D = 0$ (başlangıçtaki hasarsız durum), $D = 1$ (malzemenin kopma veya kırılma durumu)



Şekil 1. Tek eksenli çekme altındaki bir çubukta hasar parametresinin tanımı



Şekil 2. a) K sayıda mikro çatlak içeren temsili hacim elemanının düzlemsel görüntüsü (27), b) Bir mikro çatlakın açık ve kapalı yüzeyleri.

Efektif gerilme bağıntısını kullanarak, hasarlı ve hasarsız bir malzemenin elastisite modülleri arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilebilir: $\varepsilon = \frac{\tilde{\sigma}}{E} = \frac{\sigma}{(1 - D)E} = \frac{\sigma}{\tilde{E}} \Rightarrow \tilde{E} = E(1 - D)$. Burada, (DE) hasar

nedeniyle elastisite modülünde meydana gelen azalmayı, $\tilde{E}$ ise hasarlı malzemenin elastisite modülünü göstermektedir. Hasar değişkenlerini belirleyebilmek için K sayıda mikro çatlak içeren bir temsili hacim elemanı (THE) göz önüne alınmıştır. Herhangi bir k-ıncı mikro çatlakın açık veya aktif kısmı $A^{(k)}$ ile, bu mikro çatlakın kapalı veya pasif yüzeyi de $A^{*(k)}$ ile gösterilmiştir. Weitsman bunları eşdeğer düzlemsel yüzeyler olarak düşünerek $A^{(k)} = A^{(k)} \mathbf{n}^{(k)}$ ve $A^{*(k)} = A^{*(k)} \mathbf{n}^{(k)}$ vektörleri ile temsil etmiştir, ($k = 1, \dots, K$). Burada $\mathbf{n}^{(k)}$, bir mikro çatlak düzlemine ait birim normal vektörü göstermektedir [12,13]. Eğrilik yarıçapları çok büyük olan farklı infinitesimal çatlak yüzeyleri topolojik ve mekanik açıdan eş değer kabul edilebilir. Bu durumda çatlak yüzeyinin topolojik temsili çatlak yüzeyinin yönünden bağımsız olarak ifade edilebilir. Matematiksel olarak bu temsili, iki vektörün diyadik çarpımı ile oluşturulan bir simetrik tansör kullanarak gösterebiliriz. Bu durumda, her bir mikro çatlak aşağıdaki gibi simetrik diyadlarla tanımlayabiliriz.

$$\mathbf{H}^{(k)} \equiv \mathbf{A}^{(k)} \otimes \mathbf{A}^{(k)} \text{ ve } \mathbf{H}^{*(k)} \equiv \mathbf{A}^{*(k)} \otimes \mathbf{A}^{*(k)}, \quad H_{ij}^{(k)} \equiv A_i^{(k)} A_j^{(k)} \quad (1)$$

$A^{(k)}$ ve $A^{*(k)}$ yüzeylerinin ölçüsü ve yeri hakkında detaylı bilgiler ancak istatistiksel olarak mikro ölçekte mevcut olduğundan, Sürekli-Ortamlar Mekaniğinin kullanıldığı mezo ölçekte (1) ifadesi ile verilen tansörel ifadelerin birleşik etkilerini aşağıdaki diyadik çarpımların toplamları ile gösterebiliriz. Bu işlem, mikro ölçekten mezo ölçeğe geçerken yapılan homojenleştirme şeklinde de yorumlanabilir.

$$\mathbf{H} = \sum_{k=1}^K \mathbf{A}^{(k)} \otimes \mathbf{A}^{(k)} \quad \text{ve} \quad \mathbf{H}^* = \sum_{k=1}^K \mathbf{A}^{*(k)} \otimes \mathbf{A}^{*(k)} \quad (2)$$

Hasarın etkisi, ikinci dereceden simetrik tansörel karakter taşıyan iki adet iç durum değişkeni ile ifade edilmektedir. Bu çalışmada, bünye değişkeni olarak, sadece açık mikro yüzeylerin etkisini dikkate alan bir tek hasar tansörü göz önüne alınmıştır. Açık mikro-çatlak yüzeylerinin temsili hacim elemanı içerisindeki ortalama değerlerini $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ vektörü ile, bu vektörün zamanla değişimini $\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t)$ ile gösterebiliriz. Malzeme mikro-çatlak yüzeylerinin pozitif ve negatif taraflarını fark edemeyeceği için, matematiksel olarak $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ ve $\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t)$ vektörlerine olan bağımlılığı, (2)₁ ifadesini de göz önüne alarak, $\mathbf{H} \equiv \mathbf{A} \otimes \mathbf{A} \Rightarrow \dot{\mathbf{H}} \equiv \dot{\mathbf{A}} \otimes \mathbf{A} + \mathbf{A} \otimes \dot{\mathbf{A}}$ formundaki tansörel çarpımlarla ifade edebiliriz.

3. TERMODİNAMİK KISITLAR

Enerji denklemi ile entropi eşitsizliği uygun şekilde birleştirilir ve serbest enerji için aşağıdaki şekilde bir Legendre transformasyonu kullanarak,

$$\psi \equiv \varepsilon - \theta \eta - \mathbf{E} \cdot \mathbf{\Pi} = \varepsilon - \theta \eta - \rho^{-1} E_i P_i \quad (3)$$

Entropi eşitsizliği maddesel formda aşağıdaki gibi elde edilir.

$$-(\dot{\Sigma} + \rho_0 \eta \dot{\theta}) + \frac{1}{2} \bar{T}_{MN} \dot{C}_{MN} - \frac{1}{\theta} \theta_{,M} Q_M - \Pi_M \dot{E}_M \geq 0 \quad (4)$$

elde edilmiş olur. Mekanik bir yüklemeye maruz, mikro-çatlaklar içeren ve bu çatlakların zamanla şekillerinin değiştiği düşünülen viskoelastik bir ortamın gerilme potansiyeli Σ 'nın argümanları; Sürekli-Ortamlar Mekaniğinin bünye aksiyomlarına göre $(C_{MN}, \dot{C}_{MN}, H_{MN}, \dot{H}_{MN}, E_M, \theta)$ olarak belirlenmiştir [14-15]. Bu durumda gerilme potansiyelini,

$$\Sigma(\mathbf{x}, t) = \Sigma[C_{MN}, \dot{C}_{MN}, H_{MN}, \dot{H}_{MN}, E_M, \theta] \quad (5)$$

şeklinde bir fonksiyon olarak yazabiliriz. Bu fonksiyonun zamana göre maddesel türevi (31) eşitsizliğinde yerine yazılır, ortak terimlerin parantezleri alınırsa aşağıdaki eşitsizliğe ulaşırız.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\bar{T}_{MN} - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{MN}}) \dot{C}_{MN} - \frac{\partial \Sigma}{\partial \dot{C}_{MN}} \ddot{C}_{MN} - \frac{\partial \Sigma}{\partial H_{MN}} \dot{H}_{MN} - \frac{\partial \Sigma}{\partial \dot{H}_{MN}} \ddot{H}_{MN} - \\ (\Pi_M + \frac{\partial \Sigma}{\partial E_M}) \dot{E}_M - \rho_0 (\eta + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta}) \dot{\theta} - \frac{1}{\theta} Q_M \theta_{,M} \geq 0 \end{aligned} \quad (6)$$

(6) eşitsizliğinin keyfi her bağımsız termodinamik proseste sağlanabilmesi için gerilme potansiyelinin argümanları içinde bulunmayan $\ddot{C}_{MN}$, $\ddot{H}_{MN}$, $\dot{E}_M$, $\dot{\theta}$, ve $\theta_{,M}$ terimlerin katsayılarının sıfıra eşit olması gerekir. $\dot{C}_{MN}$ ve $\dot{H}_{MN}$, Σ 'nin argümanları içerisinde yer aldığından bu eşitsizlikteki $\dot{C}_{MN}$ ve $\dot{H}_{MN}$ 'nin katsayıları sıfıra eşitlenemez [14-15]. $\dot{C}_{MN}$ 'nin ve $\dot{H}_{MN}$ 'nin katsayılarına aşağıda verilen atamalar yapılmıştır.

$${}_D \bar{T}_{MN} \equiv \bar{T}_{MN} - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{MN}}, \quad \bar{Y}_{MN} \equiv - \frac{\partial \Sigma}{\partial H_{MN}} \quad (7)$$

Burada, ${}_D\bar{T}_{MN}$ ve $\bar{Y}_{MN}$ sırasıyla dissipatif gerilme ve gerinme-enerjisi yoğunluğunun değişim hızı olarak adlandırılmıştır. Ayrıca pozitif bir büyüklükle uğraşmak için; $Y_{MN} \equiv -\bar{Y}_{MN}$ tanımlaması kullanılarak, gerinme enerjisi yoğunluğunun değişim hızı aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$Y_{MN} \equiv \frac{\partial \Sigma}{\partial H_{MN}} \quad (8)$$

(6) eşitsizliğindeki $\ddot{C}_{MN}, \ddot{H}_{MN}, \dot{E}_M, \dot{\theta}$, ve $\theta_{,M}$ nin katsayıları sıfıra eşitlenerek aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \dot{C}_{MN}} = 0, \quad \frac{\partial \Sigma}{\partial \dot{H}_{MN}} = 0, \quad \Pi_M = -\frac{\partial \Sigma}{\partial E_M}, \quad \eta = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta}, \quad Q_M = 0, \quad (9)$$

(8) ve (9) tanımlarını dikkate alarak, (6) eşitsizliği aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{1}{2} {}_D\bar{T}_{MN} \dot{C}_{MN} - Y_{MN} \dot{H}_{MN} \geq 0 \quad (10)$$

Dissipatif gerilmenin hangi argümanlara bağlı olduğu aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$${}_D\bar{T}_{MN} = {}_D\bar{T}_{MN}(C_{MN}, \dot{C}_{MN}, H_{MN}, \dot{H}_{MN}, E_M, \theta) \quad (11)$$

Yukarıda verilen (9) ve (10) ifadelerinde, başlangıçta belirttiğimiz gibi ortamda ısı iletiminin olmadığı ve serbest enerji yoğunluğunun da $\dot{C}_{MN}$ ve $\dot{H}_{MN}$ tansörlerine bağlı olmadığı görülmektedir. O halde Σ 'nın bağlı olduğu argümanlar aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\Sigma = \Sigma[C_{MN}, H_{MN}, E_M, \theta] \quad (12)$$

(7) ifadesinden görüldüğü gibi, malzeme içinde oluşan $\bar{T}_{MN}$ simetrik gerilme tansörü, iki gerilme tansöründen meydana gelmektedir ($\bar{T}_{MN} = 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{MN}} + {}_D\bar{T}_{MN}$). Her biri simetrik olan bu gerilme tansörleri elastik gerilme ve dissipatif gerilme olarak adlandırılır. Buna göre $\bar{T}_{MN}$ gerilme tansörünü $\bar{T}_{MN} \equiv {}_E\bar{T}_{MN} + {}_D\bar{T}_{MN}$ şeklinde yazabiliriz. Bu ifadedeki ${}_E\bar{T}_{MN}$ elastik gerilme tansörü ${}_E\bar{T}_{MN} \equiv 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{MN}}$ şeklinde ifade edilmektedir.

Asimetrik formda ortaya çıkan toplam gerilmenin maddesel koordinatlardaki ifadesi sürekli ortamlar mekaniğinin rutin hesaplamaları ile aşağıdaki gibi bulunmuştur[6]:

$$T_{PR} = \bar{T}_{PR} - \Pi_P X_{M,n} X_{R,n} E_M = \bar{T}_{PR} - \Pi_P E_M C_{MR}^{-1} \quad (13)$$

Burada, $C_{MN}^{-1} = X_{M,m} X_{N,n}$ Piola şekil değiştirme tansörü olarak bilinir.

Bu çalışmada ortam sıkışmaz kabul edilmiştir ($J = \det C = III = 1$). Bu durumda elastik gerilme için bünye denklemi maddesel koordinatlarda aşağıdaki gibi elde edilir [15].

$${}_E\bar{T}_{MN} = -p C_{MN}^{-1} + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{MN}} \quad (14)$$

Burada p , Lagrange çarpanı olup alan denklemleri ve sınır şartları ile belirlenir.

Elde edilen bünye denklemlerinden, ${}_E\bar{T}_{MN}$, Π_M ve Y_{MN} nin işlemler içinde tanımlanan bir termodinamik potansiyelden türetildiği, ${}_D\bar{T}_{MN}$ nin ise kendi argümanlarına bağlı tansörel bir fonksiyon olarak ortaya çıktığı görülmüştür. O halde yapılacak ilk iş Σ 'nın ve ${}_D\bar{T}_{MN}$ nin açık formlarını ortaya koymak olacaktır.

4. HASARLI ELASTİK DİELEKTRİK ORTAMLAR İÇİN BÜNYE DENKLEMLERİ

Ortamın anizotropisi sadece mikro-boşluklardan kaynaklandığı için Σ gerilme potansiyelinin formu maddesel koordinat sisteminin ful-ortogonal transformasyon grubu altında invaryant

kalmalıdır[14-15]. Matematiksel olarak ifade edilecek olursa, Σ aşağıdaki kısıtlamayı sağlamalıdır:

$$\Sigma(\mathbf{C}, \mathbf{H}, \mathbf{E}, \theta) = \Sigma(\mathbf{MCM}^T, \mathbf{MHM}^T, \mathbf{ME}, \theta) \quad (15)$$

Burada $\mathbf{M}$, maddesel koordinat sistemlerinin ful ortogonal transformasyonlarını gösterdiğinden ortogonal bir matris olup, $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^T$ şartını sağlamaktadır. $\mathbf{C}$, $\mathbf{H}$ simetrik matrisleri ile $\mathbf{E}$ vektörünün birbirinden bağımsız 11 adet müşterek invariantları aşağıdaki gibi belirlenmiştir:

$$\begin{aligned} I_1 &= C_{NN}, I_2 = C_{NM} C_{MN}, I_3 = C_{NM} C_{ML} C_{LN}, I_4 = H_{NN}, I_5 = E_N E_N, I_6 = E_N C_{NM} E_M, \\ I_7 &= E_N C_{NM} C_{ML} E_L, I_8 = E_N H_{NM} E_M, I_9 = E_N C_{NL} H_{LM} E_M, I_{10} = C_{NM} H_{MN}, I_{11} = C_{NM} C_{ML} H_{LN}, \end{aligned} \quad (16)$$

Bu durumda serbest enerji fonksiyonumuz yukarıda verilen argümanların fonksiyonu olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\Sigma = \Sigma(I_1, I_2, I_3, \dots, I_{11}) \quad (17)$$

İkinci dereceden bir tansör olan Green deformasyon tansörünün asal invariantları dikkate alınarak (17) ifadesindeki (I_1, I_2, I_3) invariantları yerine, asal invariantlar kullanılabilir. Ortam sıkışmaz kabul edildiğinden $\text{III}=1$ olur. Bu durumda Σ nın bağlı olduğu invariantlar, aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\Sigma = \Sigma(I, II, I_4, I_5, I_6, \dots, I_{10}, I_{11}) \quad (18)$$

(18) ifadesinin C_{MN}, H_{MN} ve H_{MN} e göre türevlerini alıp (14), (9)₃ ve (8) denklemlerinde yerine yazacak olursak, modellenen ortamdaki elastik gerilme, polarizasyon ve gerinme-enerjisi-yoğunluğu değişim hızına ait nonlinear bünye denklemleri elde edilmiş olur.

$$\begin{aligned} {}_E \bar{T}_{PR} = & -p C_{PQ}^{-1} + 2 \left[\frac{\partial \Sigma}{\partial I} (\delta_{PR}) + \frac{\partial \Sigma}{\partial II} (C_{NN} \delta_{PR} - C_{PR}) + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_6} (E_P E_R) + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_7} (C_{PN} E_N E_R + C_{RN} E_N E_P) + \right. \\ & \left. \frac{\partial \Sigma}{\partial I_9} (E_P E_N H_{NR}) + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{10}} (H_{PR}) + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{11}} (C_{PN} H_{NR} + H_{PN} C_{NR}) \right] \end{aligned} \quad (19)$$

$$\Pi_R = - \left[2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_5} E_R + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_6} (C_{RL} E_L) + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_7} (C_{RM} C_{ML} E_L) + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_8} (H_{RL} E_L) + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_9} (C_{RL} H_{LM} E_M + E_M C_{ML} H_{LR}) \right] \quad (20)$$

$$Y_{PR} = \frac{\partial \Sigma}{\partial I_4} (\delta_{PR}) + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_8} (E_P E_R) + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_9} (E_N C_{NP} E_R) + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{10}} (C_{PR}) + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_{11}} (C_{PN} C_{NR}) \quad (21)$$

Σ , (16)' da verilen invariantların analitik bir fonksiyonu ise bir polinomla temsil edilebilir. Σ ' nın kaçınıcı mertebeden bir polinomla temsil edileceği deformasyon büyüklüklerinin olaydaki etkileşim paylarına kısacası nonlinearlık mertebelerine bağlıdır [14,15]. İç enerji pozitif tanımlı olduğundan bu polinomun pozitif tanımlı olması gerekir. Ayrıca invariantların sırasının Σ ' yı etkilememesi için bu polinomun simetrik katsayılı olması, yani kuadratik bir form şeklinde olması gerekir. Serbest enerji yoğunluğu fonksiyonu için mevcut invariantlar cinsinden bir polinom seçilebilir:

$$\Sigma = \sum_{i,j} a_{ij} I_i I_j, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad (i, j = 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11) \quad (22)$$

(22) ifadesinin ihtiva ettiği invariantlara göre Σ ' nın kısmi türevleri alınarak (19), (20) ve (21) denkleminde yerine yazıldıktan sonra deformasyon tansörü $\mathbf{C}$ ve hasar tansörü $\mathbf{H}$ ' nın birinci dereceden, elektrik alan vektörü $\mathbf{E}$ nin ikinci dereceye kadar olan terimleri dikkate

alınarak yeniden düzenlenmiştir[14,15]. Ayrıca deformasyon tansörü **C** ve genleme tansörü **E** arasındaki $C_{MN} = \delta_{MN} + 2E_{MN}$ bağıntıyı dikkate alarak aşağıdaki denklemleri yazabiliriz.

$$\begin{aligned} {}_E\bar{T}_{PR} = & -pC_{PQ}^{-1} + \alpha_0 \delta_{PR} + \alpha_1 E_{NN} \delta_{PR} + \alpha_2 E_N E_N \delta_{PR} + \alpha_3 E_N E_N E_{QQ} \delta_{PR} + \alpha_4 E_N E_{NL} E_L \delta_{PR} + \alpha_5 H_{NN} \delta_{PR} + \\ & \alpha_6 H_{NN} E_{QQ} \delta_{PR} + \alpha_7 E_N H_{NL} E_L \delta_{PR} + \alpha_8 E_N H_{NL} E_L E_{QQ} \delta_{PR} + \alpha_9 E_{NL} H_{LN} \delta_{PR} + \alpha_{10} E_N E_{NL} H_{LM} E_M \delta_{PR} + \\ & \alpha_{11} E_{PR} + \alpha_3 E_N E_N E_{PR} + \alpha_6 H_{NN} E_{PR} + \alpha_8 E_N H_{NL} E_L E_{PR} + \alpha_{12} E_P E_R + \alpha_{13} E_{NN} E_P E_R + \alpha_{14} H_{NN} E_P E_R + \\ & \alpha_{15} E_{NL} H_{LN} E_P E_R + \alpha_{16} (E_P E_Q E_{QR} + E_{PQ} E_Q E_R) + \alpha_{17} H_{NN} (E_P E_Q E_{QR} + E_{PQ} E_Q E_R) + \alpha_{18} E_P H_{RQ} E_Q + \\ & \alpha_{19} E_{NN} E_P H_{RQ} E_Q + \alpha_{20} H_{PR} + \alpha_{21} E_{NN} H_{PR} + \alpha_{22} E_N E_N H_{PR} + \alpha_{23} E_N E_{NL} E_L H_{PR} + \\ & \alpha_{24} (E_{PQ} H_{QR} + E_{RQ} H_{QP}) + \alpha_{25} E_N E_N (E_{PQ} H_{QR} + E_{RQ} H_{QP}) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \Pi_P = & -[\beta_1 E_P + \beta_2 E_{NN} E_P + \beta_3 + E_{PL} E_L + \beta_4 H_{NN} E_P + \beta_5 H_{PL} E_L + \beta_6 H_{NN} E_{PL} E_L \\ & \beta_7 E_{NN} H_{PL} E_L + \beta_8 E_{NL} H_{LN} E_P + \beta_9 (E_{PL} H_{LM} E_M + H_{PL} E_{LM} E_M)] \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} Y_{PR} = & \gamma_0 \delta_{PR} + \gamma_1 E_{NN} \delta_{PR} + \gamma_2 H_{NN} \delta_{PR} + \gamma_3 E_N E_N \delta_{PR} + \gamma_4 E_N E_{NL} E_L \delta_{PR} + \gamma_5 E_N H_{NL} E_L \delta_{PR} \\ & + \gamma_6 E_{NL} H_{LN} \delta_{PR} + \gamma_7 E_N E_{NL} H_{LM} E_M \delta_{PR} + \gamma_8 E_{PR} + \gamma_6 H_{NN} E_{PR} + \gamma_9 E_N E_N E_{PR} + \\ & \gamma_{10} E_N H_{NL} E_L E_{PR} + \gamma_{11} E_P E_R + \gamma_{12} E_{NN} E_P E_R + \gamma_{13} H_{NN} E_P E_R + \gamma_{10} E_{NL} H_{LN} E_P E_R + \\ & \gamma_{13} E_{PN} E_N E_R + \gamma_7 H_{QQ} E_{PN} E_N E_R \end{aligned} \quad (25)$$

denklemleri bulunur. Başlangıçta gerilmesiz ve yüksüz durumda (23) ve (25) denklemindeki $\alpha_0 \delta_{PR}$ terimi sıfır olur. Yukarıda verilen (23), (24) ve (25) denklemindeki katsayıları aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned} \alpha_0 = & 12(a_{11} + 5a_{12} + 4a_{22}), \alpha_1 = 8(a_{11} + 9a_{12} + 11a_{22}), \alpha_2 = 4(a_{15} + 4a_{25} + 4a_{16} + 4a_{26} + 4a_{27}), \\ \alpha_3 = & 8(a_{25} + a_{26} + a_{27}), \alpha_4 = 8(a_{16} + 4a_{26} + 2a_{17} + 8a_{27}), \alpha_5 = 4(a_{14} + 4a_{24} + a_{1,10} + 4a_{2,10} + a_{1,11} + 4a_{2,11}), \\ \alpha_6 = & 8(a_{24} + a_{2,10} + a_{2,11}), \alpha_7 = 4(a_{18} + 4a_{28} + a_{19} + 4a_{29}), \alpha_8 = 8(a_{28} + a_{29}), \\ \alpha_9 = & 8(a_{1,10} + 4a_{2,10} + 4a_{1,11} + 4a_{2,10} + 14a_{2,11}), \alpha_{10} = 8(a_{19} + 7a_{29}), \alpha_{11} = 24(a_{12} + a_{22}), \\ \alpha_{12} = & 12(a_{16} + a_{26} + 2a_{17} + 2a_{27}), \alpha_{13} = 8(a_{16} + 2a_{26} + 2a_{17} + 4a_{27}), \alpha_{14} = 4(a_{46} + 2a_{47} + a_{6,10} + 2a_{7,10} + a_{6,11} + 2a_{7,11}), \\ \alpha_{15} = & 8(a_{6,10} + 2a_{7,10} + 2a_{6,11} + 4a_{7,11}), \alpha_{16} = 24(a_{17} + a_{27}), \alpha_{17} = 8(a_{47} + a_{7,10} + a_{7,11}), \alpha_{18} = 6(2a_{19} + a_{29}), \\ \alpha_{19} = & 4(a_{19} + 2a_{29}), \alpha_{20} = 6(2a_{1,10} + a_{2,10} + 4a_{1,11} + 4a_{2,10} + 4a_{2,11}), \alpha_{21} = 8(a_{1,10} + 2a_{2,10} + 24a_{1,11} + 4a_{2,11}), \\ \alpha_{22} = & 4(a_{5,10} + a_{5,11} + a_{6,10} + a_{6,11} + a_{7,10} + a_{7,11}), \alpha_{23} = 8(a_{6,10} + a_{6,11} + 2a_{7,10} + 4a_{7,11}), \alpha_{24} = 24(a_{1,11} + a_{2,11}), \\ \alpha_{25} = & 8(a_{5,11} + a_{6,11} + a_{7,11}), \beta_1 = 12(a_{16} + a_{17} + a_{26} + a_{27}), \beta_2 = 8(a_{16} + a_{17} + 2a_{26} + 2a_{27}), \\ \beta_3 = & 24(a_{16} + a_{17} + 2a_{26} + 2a_{27}), \beta_4 = 4(a_{45} + a_{46} + a_{47} + a_{5,10} + a_{6,10} + a_{7,10} + a_{5,11} + a_{6,11} + a_{7,11}), \\ \beta_5 = & 12(a_{48} + a_{19} + 2a_{28} + 2a_{29}), \beta_6 = 8(a_{46} + a_{6,10} + 2a_{47} + a_{7,10} + a_{6,11} + a_{7,11}), \beta_7 = 8(a_{148} + a_{19} + 2a_{28} + 2a_{29}), \\ \beta_8 = & 8(a_{5,106} + a_{6,10} + a_{7,10} + 2a_{5,11} + 2a_{6,11} + 2a_{7,11}), \beta_9 = 12(a_{19} + a_{29}), \gamma_0 = 6(a_{14} + a_{24} + a_{1,10} + a_{2,10} + a_{1,11} + a_{2,11}), \\ \gamma_1 = & 4(a_{14} + 2a_{24} + a_{1,10} + 2a_{2,10} + a_{1,11} + 2a_{2,11}), \gamma_2 = 2(a_{44} + 2a_{4,10} + 2a_{4,11} + a_{10,10} + 2a_{10,11} + a_{11,11}), \\ \gamma_3 = & 2(a_{45} + 2a_{46} + 2a_{47} + a_{5,10} + 2a_{5,11} + a_{6,10} + a_{6,11} + a_{7,10} + a_{7,11}), \\ \gamma_4 = & 4(a_{46} + 2a_{47} + a_{6,10} + a_{6,11} + 2a_{7,10} + 2a_{7,11}), \gamma_5 = 2(a_{48} + a_{49} + a_{8,10} + a_{8,11} + a_{9,10} + a_{9,11}), \\ \gamma_6 = & 4(a_{4,10} + 2a_{4,11} + a_{10,10} + 3a_{10,11} + 2a_{11,11}), \gamma_7 = 4(a_{49} + a_{9,10} + a_{9,11}), \gamma_8 = 12(a_{1,10} + 2a_{1,11} + a_{2,10} + 2a_{2,11}), \\ \gamma_9 = & 4(a_{5,10} + 2a_{5,11} + a_{6,10} + 2a_{6,11} + a_{7,10} + 2a_{7,11}), \gamma_{10} = 4(a_{8,10} + 2a_{8,11} + a_{9,10} + 2a_{9,11}), \\ \gamma_{11} = & 6(a_{18} + a_{19} + a_{28} + a_{29}), \gamma_{12} = 2(a_{18} + a_{19} + 2a_{28} + 2a_{29}), \gamma_{13} = 12(a_{19} + a_{29}) \end{aligned} \quad (26)$$

5. DISSIPATİF GERİLMENİN TAYİNİ

Dissipatif gerilme, ortam izotrop olduğundan, ${}_D\bar{T}$ simetrik matrisi $\underline{\underline{C}}$, $\underline{\underline{C}}$, $\underline{\underline{H}}$ ve $\underline{\underline{H}}$ simetrik matrisleri ile $\underline{E}$ polar vektörünün izotrop bir fonksiyonudur. **V** keyfi bir vektör olmak üzere,

$\bar{T}_D$ tansörü V vektörü ile sağdan ve soldan skaler çarpılır ve bu çarpım aşağıdaki gibi bir $\mathfrak{R}$ skaler fonksiyonu ile tanımlanır [15].

$$\mathfrak{R}(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{\dot{C}}}, \underline{\underline{H}}, \underline{\underline{\dot{H}}}, \underline{\underline{E}}, \underline{\underline{V}}) \equiv \underline{\underline{V}}^T \bar{T}_D (\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{\dot{C}}}, \underline{\underline{H}}, \underline{\underline{\dot{H}}}, \underline{\underline{E}}, \underline{\underline{V}}) \underline{\underline{V}} \quad (27)$$

(27) ifadesinin V_K ve V_L ye göre kısmi türevleri alınır,

$${}_D \bar{T}_{KL} (\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{\dot{C}}}, \underline{\underline{H}}, \underline{\underline{\dot{H}}}, \underline{\underline{E}}, \underline{\underline{V}}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathfrak{R}(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{\dot{C}}}, \underline{\underline{H}}, \underline{\underline{\dot{H}}}, \underline{\underline{E}}, \underline{\underline{V}})}{\partial V_K \partial V_L} \quad (28)$$

yazılır. Bu ifadenin sol tarafı V vektöründen bağımsız olduğu için (28) eşitliği $V=0$ için de geçerli olmalıdır. Bu durumda ${}_D \bar{T}_{KL}$ izotrop tansör fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilir.

$${}_D \bar{T}_{KL} (\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{\dot{C}}}, \underline{\underline{H}}, \underline{\underline{\dot{H}}}, \underline{\underline{E}}, \underline{\underline{V}}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathfrak{R}(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{\dot{C}}}, \underline{\underline{H}}, \underline{\underline{\dot{H}}}, \underline{\underline{E}}, \underline{\underline{V}})}{\partial V_K \partial V_L} \bigg|_{V_K=0} \quad (29)$$

Önce $\mathfrak{R}$ skaler fonksiyonunun argümanlarından keyfi V vektörünü çıkarıp argümanları $\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{\dot{C}}}, \underline{\underline{H}}, \underline{\underline{\dot{H}}}$, ve $\underline{\underline{E}}$ olan bir skaler fonksiyon tanımlayalım ve bunu $Z \equiv Z(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{\dot{C}}}, \underline{\underline{H}}, \underline{\underline{\dot{H}}}, \underline{\underline{E}})$ şeklinde gösterelim. İzotrop bir fonksiyon olan Z nin ortogonal koordinat dönüşümleri altında invariant kalması için, argümanlarının sonlu sayıda invariantlarına bağlı olması gerekir. Dört simetrik tansör $\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{\dot{C}}}, \underline{\underline{H}}, \underline{\underline{\dot{H}}}$ ile polar vektör olan $\underline{\underline{E}}$ nin birbirinden bağımsız 53 adet invariantı aşağıdaki listede ifade edilmiştir[15].

$$\begin{aligned} I_1 &\equiv C_{NN}, I_2 \equiv C_{NL} C_{LN}, I_3 \equiv C_{NL} C_{LM} C_{MN}, I_4 \equiv \dot{C}_{NN}, I_5 \equiv \dot{C}_{NL} \dot{C}_{LN}, I_6 \equiv \dot{C}_{NL} \dot{C}_{LM} \dot{C}_{MN}, I_7 \equiv H_{NN}, \\ I_8 &\equiv \dot{H}_{NN}, I_9 \equiv C_{NL} \dot{C}_{LN}, I_{10} \equiv C_{NL} H_{LN}, I_{11} \equiv C_{NL} \dot{H}_{LN}, I_{12} \equiv \dot{C}_{NL} H_{LN}, I_{13} \equiv \dot{C}_{NL} \dot{H}_{LN}, I_{14} \equiv H_{NL} \dot{H}_{LN}, \\ I_{15} &\equiv C_{NL} C_{LM} \dot{C}_{MN}, I_{16} \equiv C_{NL} C_{LM} H_{MN}, I_{17} \equiv C_{NL} C_{LM} \dot{H}_{MN}, I_{18} \equiv C_{NL} \dot{C}_{LM} \dot{C}_{MN}, I_{19} \equiv \dot{C}_{NL} \dot{C}_{LM} H_{MN}, \\ I_{20} &\equiv \dot{C}_{NL} \dot{C}_{LM} \dot{H}_{MN}, I_{21} \equiv C_{NL} \dot{C}_{LM} H_{MN}, I_{22} \equiv C_{NL} \dot{C}_{LM} \dot{H}_{MN}, I_{23} \equiv C_{NL} H_{LM} \dot{H}_{MN}, I_{24} \equiv \dot{C}_{NL} H_{LM} \dot{H}_{MN}, \\ I_{25} &\equiv C_{KL} C_{LM} \dot{C}_{MN} H_{NK}, I_{26} \equiv C_{KL} C_{LM} \dot{C}_{MN} \dot{H}_{NK}, I_{27} \equiv C_{KL} C_{LM} H_{MN} \dot{H}_{NK}, I_{28} \equiv \dot{C}_{KL} \dot{C}_{LM} C_{MN} H_{NK}, \\ I_{29} &\equiv \dot{C}_{KL} \dot{C}_{LM} C_{MN} \dot{H}_{NK}, I_{30} \equiv \dot{C}_{KL} \dot{C}_{LM} H_{MN} \dot{H}_{NK}, I_{31} \equiv C_{KL} C_{LM} \dot{C}_{MN} \dot{C}_{NK}, I_{32} \equiv C_{KL} \dot{C}_{LM} H_{MN} \dot{H}_{NK}, \\ I_{33} &\equiv E_N E_N, I_{34} \equiv E_N C_{NL} E_L, I_{35} \equiv E_N C_{NL} C_{LM} E_M, I_{36} \equiv E_N \dot{C}_{NL} E_L, I_{37} \equiv E_N \dot{C}_{NL} \dot{C}_{LM} E_M, I_{38} \equiv E_N H_{NL} E_L, \\ I_{39} &\equiv E_N \dot{H}_{NL} E_L, I_{40} \equiv E_N C_{NL} \dot{C}_{LM} E_M, I_{41} \equiv E_N C_{NL} H_{LM} E_M, I_{42} \equiv E_N C_{NL} \dot{H}_{LM} E_M, I_{43} \equiv E_N \dot{C}_{NL} H_{LM} E_M, \\ I_{44} &\equiv E_N \dot{C}_{NL} \dot{H}_{LM} E_M, I_{45} \equiv E_K H_{KL} \dot{H}_{LM} E_M, I_{46} \equiv E_K C_{KL} \dot{C}_{LM} H_{MN} E_N, I_{47} \equiv E_K C_{KL} \dot{C}_{LM} \dot{H}_{MN} E_N, \\ I_{48} &\equiv E_K C_{KL} H_{LM} \dot{H}_{MN} E_N, I_{49} \equiv E_K C_{KL} C_{LM} \dot{C}_{MN} H_{NS} E_S, I_{50} \equiv E_K \dot{C}_{KL} \dot{C}_{LM} H_{MN} C_{NS} E_S, \\ I_{51} &\equiv E_K C_{KL} C_{LM} \dot{C}_{MN} \dot{H}_{NS} E_S, I_{52} \equiv E_K \dot{C}_{KL} \dot{C}_{LM} H_{MN} \dot{H}_{NS} E_S, I_{53} \equiv E_K C_{KL} \dot{C}_{LM} H_{MN} \dot{H}_{NS} E_S \end{aligned} \quad (30)$$

Ancak asıl bulunması gereken fonksiyon $\mathfrak{R}$ skaler izotrop fonksiyonunun argümanları $\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{\dot{C}}}, \underline{\underline{H}}, \underline{\underline{\dot{H}}}, \underline{\underline{E}}, \underline{\underline{V}}$ şeklindedir. $\mathfrak{R}$ skaleri, V vektörünün bi – lineer bir fonksiyonu olduğundan (30) deki invariantlara ilaveten aşağıda verilen invariantlara da bağlıdır.

$$\begin{aligned} K_1 &\equiv V_N E_N, K_2 \equiv V_N C_{NL} E_L, K_3 \equiv V_N \dot{C}_{NL} E_L, K_4 \equiv V_N H_{NL} E_L, K_5 \equiv V_N \dot{H}_{NL} E_L, K_6 \equiv V_N C_{NM} C_{ML} E_L, \\ K_7 &\equiv V_N \dot{C}_{NM} \dot{C}_{ML} E_L, K_8 \equiv V_N C_{NL} \dot{C}_{LM} E_M, K_9 \equiv V_N C_{NL} H_{LM} E_M, K_{10} \equiv V_N C_{NL} \dot{H}_{LM} E_M, K_{11} \equiv V_N \dot{C}_{NL} H_{LM} E_M, \\ K_{12} &\equiv V_N \dot{C}_{NL} \dot{H}_{LM} E_M, K_{13} \equiv V_N H_{NL} \dot{H}_{LM} E_M, K_{14} \equiv V_K C_{KL} \dot{C}_{LM} H_{MN} E_N, K_{15} \equiv V_K C_{KL} \dot{C}_{LM} \dot{H}_{MN} E_N, \\ K_{16} &\equiv V_K C_{KL} H_{LM} \dot{H}_{MN} E_N, K_{17} \equiv V_K C_{KL} C_{LM} \dot{C}_{MN} H_{NS} E_S, K_{18} \equiv V_K \dot{C}_{KL} \dot{C}_{LM} H_{MN} C_{NS} E_S, \\ K_{19} &\equiv V_K C_{KL} C_{LM} \dot{C}_{MN} \dot{H}_{NS} E_S, K_{20} \equiv V_K \dot{C}_{KL} \dot{C}_{LM} H_{MN} \dot{H}_{NS} E_S, K_{21} \equiv V_K C_{KL} \dot{C}_{LM} H_{MN} \dot{H}_{NS} E_S, K_{22} \equiv V_K V_K, \\ K_{25} &\equiv V_N H_{NL} V_L, K_{26} \equiv V_N \dot{H}_{NL} V_L, K_{27} \equiv V_N C_{NL} C_{LM} V_M, K_{28} \equiv V_N \dot{C}_{NL} \dot{C}_{LM} V_M, K_{29} \equiv V_N C_{NL} \dot{C}_{LM} V_M, \\ K_{30} &\equiv V_N C_{NL} H_{LM} V_M, K_{31} \equiv V_N C_{NL} \dot{H}_{LM} V_M, K_{32} \equiv V_N \dot{C}_{NL} H_{LM} V_M, K_{33} \equiv V_N \dot{C}_{NL} \dot{H}_{LM} V_M, \\ K_{35} &\equiv V_K C_{KL} \dot{C}_{LM} H_{MN} V_N, K_{36} \equiv V_K C_{KL} \dot{C}_{LM} \dot{H}_{MN} V_N, K_{37} \equiv V_K C_{KL} H_{LM} \dot{H}_{MN} V_N, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{38} &\equiv V_K C_{KL} C_{LM} \dot{C}_{MN} H_{NS} V_S, K_{39} \equiv V_K \dot{C}_{KL} \dot{C}_{LM} H_{MN} C_{NS} V_S, K_{40} \equiv V_K C_{KL} C_{LM} \dot{C}_{MN} \dot{H}_{NS} V_S, \\ K_{41} &\equiv V_K \dot{C}_{KL} \dot{C}_{LM} H_{MN} \dot{H}_{NS} V_S, K_{42} \equiv V_K C_{KL} \dot{C}_{LM} H_{MN} \dot{H}_{NS} V_S \end{aligned} \quad (31)$$

Bu durumda (27) ifadesiyle tanımlanan $\mathfrak{R}$ skaler fonksiyonu, (31) ifadesindeki K_i ($i = 1, 2, \dots, 21$) invaryantları cinsinden bi-lineer ve K_i ($i = 21, 16, \dots, 42$) invaryantlar cinsinden lineer olmalıdır. O halde $\mathfrak{R}$ fonksiyonu için aşağıdaki gibi yazılır.

$$\mathfrak{R}(\underline{C}, \underline{\dot{C}}, \underline{A}, \underline{E}, \underline{V}) = \sum_{\alpha=1}^{21} \sum_{\beta=1}^{21} \lambda_{\alpha\beta} K_{\alpha} K_{\beta} + \sum_{i=0}^{20} \sum_{l=22}^{42} \lambda_i K_l \quad (32)$$

(32) denklemindeki $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{20}$ ve $\lambda_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3, \dots, 21$) katsayıları, (30) denklemi ile verilen invaryantların birer skaler fonksiyonudur. Ayrıca $\lambda_{\alpha\beta}$ katsayıları için, $\lambda_{\alpha\beta} = \lambda_{\beta\alpha}$ simetri şartı geçerlidir. (29) ilişkisi kullanılıp bu çalışmada etkileşimler ilgili yapılan kabullerden dolayı $\underline{C}$, $\underline{\dot{C}}$, $\underline{H}$ ve $\underline{\dot{H}}$ tansörlerinin birinci mertebeden, $\underline{E}$ vektörünün ikinci mertebeye kadar olan terimleri dikkate alındığında dissipatif gerilme aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} {}_D \bar{T}_{PR} &= \lambda_0 \delta_{PR} + \lambda_1 C_{PR} + \lambda_2 \dot{C}_{PR} + \lambda_3 H_{PR} + \lambda_4 \dot{H}_{PR} + \lambda_{11} E_P E_R + \lambda_{12} (E_P E_L C_{LR} + C_{PN} E_N E_R) + \\ &\lambda_{13} (E_P E_L \dot{C}_{LR} + \dot{C}_{PN} E_N E_R) + \lambda_{14} (E_P E_L H_{LR} + H_{PN} E_N E_R) + \lambda_{15} (E_P E_L \dot{H}_{LR} + \dot{H}_{PN} E_N E_R) \end{aligned} \quad (33)$$

(33) denklemindeki katsayılar, mekanik etkileşimler lineer kabul edildiğinden (30) ifadesindeki $\underline{C}$, $\underline{\dot{C}}$, $\underline{H}$ ve $\underline{\dot{H}}$ tansörlerinin karesel ya da daha yüksek mertebeden terimleriyle ve birlikte etkileşimlerini içermeyen invaryantların birer skaler fonksiyonudur. O halde bu katsayıların bağlı oldukları invaryantlar E_{KL} ve $\dot{E}_{KL}$ cinsinden aşağıdaki gibi yazılmıştır.

$$\begin{aligned} J_1 &= 3 + 2 E_{MN}, J_2 = 2 \dot{E}_{NN}, J_3 = H_{NN}, J_4 = \dot{H}_{KK}, J_5 = E_N E_N, J_6 = E_N E_N + 2 E_N E_{NL} E_L, \\ J_7 &= 2 E_N \dot{E}_{NL} E_L, J_8 = E_N H_{NL} E_L, J_9 = E_N \dot{H}_{NL} E_L \end{aligned} \quad (34)$$

(33) denklemindeki katsayılar (34) deki invaryantların skaler fonksiyonu olarak,

$$\lambda_{\alpha} = \beta_0 + \sum_{i=1}^9 \beta_i J_i, \quad 0 \leq \alpha \leq 17.$$

Eğer: ($\alpha = 0 \Rightarrow \beta = a$, $\alpha = 1 \Rightarrow \beta = b$, $\alpha = 2 \Rightarrow \beta = c$, $\alpha = 3 \Rightarrow \beta = d$, $\alpha = 4 \Rightarrow \beta = f$, $\alpha = 11 \Rightarrow \beta = g$, $\alpha = 12 \Rightarrow \beta = h$, $\alpha = 13 \Rightarrow \beta = k$, $\alpha = 14 \Rightarrow \beta = l$, $\alpha = 15 \Rightarrow \beta = m$)

(35)

şeklinde tanımlanabilir. (35) ifadeleri (33) denkleminde kullanılıp C_{KL} ve $\dot{C}_{KL}$ tansörleri, E_{KL} ve $\dot{E}_{KL}$ tansörleri cinsinden ifade edilip, etkileşimlerle ilgili yapılan kabuller göz önünde alındığında aşağıda ifade elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} {}_D \bar{T}_{PR} &= \Gamma_1 \delta_{PR} + \Gamma_2 E_{NN} \delta_{PR} + \Gamma_3 \dot{E}_{NN} \delta_{PR} + \Gamma_4 H_{NN} \delta_{PR} + \Gamma_5 \dot{H}_{NN} \delta_{PR} + \Gamma_6 E_N E_N \delta_{PR} + \Gamma_7 E_N E_{NL} E_L \delta_{PR} + \\ &\Gamma_8 E_N \dot{E}_{NL} E_L \delta_{PR} + \Gamma_9 E_N H_{NL} E_L \delta_{PR} + \Gamma_{10} E_N \dot{H}_{NL} E_L \delta_{PR} + \Gamma_{11} E_{PR} + \Gamma_{12} E_N E_N E_{PR} + \Gamma_{13} \dot{E}_{PR} + \Gamma_{14} E_N E_N \dot{E}_{PR} + \\ &\Gamma_{15} H_{PR} + \Gamma_{16} E_N E_N H_{PR} + \Gamma_{17} \dot{H}_{PR} + \Gamma_{18} E_N E_N \dot{H}_{PR} + \Gamma_{19} E_P E_R + \Gamma_{20} E_{NN} E_P E_R + \Gamma_{21} \dot{E}_{NN} E_P E_R + \Gamma_{22} H_{NN} E_P E_R + \\ &\Gamma_{23} \dot{H}_{NN} E_P E_R + \Gamma_{24} (E_P E_Q E_{QR} + E_{PQ} E_Q E_R) + \Gamma_{25} (E_P E_Q \dot{E}_{QR} + \dot{E}_{PQ} E_Q E_R) + \\ &\Gamma_{26} (E_P E_Q H_{QR} + H_{PQ} E_Q E_R) + \Gamma_{27} (E_P E_Q \dot{H}_{QR} + \dot{H}_{PQ} E_Q E_R) \end{aligned} \quad (36)$$

${}_D \bar{T}_{KL} = {}_D \bar{T}_{KL}(\underline{E}, \underline{0}, \underline{H}, \underline{0}, \underline{\theta}) = \underline{0}$ ifadesi (36) denklemindeki katsayıları bir kısıtlama getirir ve,

$$\begin{aligned} 0 &= \Gamma_1 \delta_{PR} + \Gamma_2 E_{NN} \delta_{PR} + \Gamma_4 H_{NN} \delta_{PR} + \Gamma_6 E_N E_N \delta_{PR} + \Gamma_7 E_N E_{NL} E_L \delta_{PR} + \Gamma_9 E_N H_{NL} E_L \delta_{PR} + \\ &\Gamma_{11} E_{PR} + \Gamma_{12} E_N E_N E_{PR} + \Gamma_{15} H_{PR} + \Gamma_{16} E_N E_N H_{PR} + \Gamma_{19} E_P E_R + \Gamma_{20} E_{NN} E_P E_R + \Gamma_{22} H_{NN} E_P E_R + \\ &\Gamma_{24} (E_P E_Q E_{QR} + E_{PQ} E_Q E_R) + \Gamma_{26} (E_P E_Q H_{QR} + H_{PQ} E_Q E_R) \end{aligned} \quad (37)$$

ifadesi yazılır. (37) ifadesine göre söz konusu olanlar keyfi olduğundan, bu denklemin gerçekleşmesi için gerek ve yeter şart, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_4 = \Gamma_6 = \Gamma_7 = \Gamma_9 = \Gamma_{11} = \Gamma_{12} = \Gamma_{15} = \Gamma_{16} = \Gamma_{19} = \Gamma_{20} = \Gamma_{22} = \Gamma_{24} = \Gamma_{26} = 0$ katsayılarının sıfır olmasıdır. Bu durumda dissipatif gerilmenin maddesel formunu veren ifade aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} {}_D\bar{T}_{PR} = & \Gamma_3 \dot{E}_{NN} \delta_{PR} + \Gamma_5 \dot{H}_{NN} \delta_{PR} + \Gamma_8 E_N \dot{E}_{NL} E_L \delta_{PR} + \Gamma_{10} E_N \dot{H}_{NL} E_L \delta_{PR} + \Gamma_{13} \dot{E}_{PR} + \Gamma_{14} E_N E_N \dot{E}_{PR} + \Gamma_{17} \dot{H}_{PR} + \\ & \Gamma_{17} \dot{H}_{PR} + \Gamma_{18} E_N E_N \dot{H}_{PR} + \Gamma_{21} \dot{E}_{NN} E_P E_R + \Gamma_{23} \dot{H}_{NN} E_P E_R + \Gamma_{25} (E_P E_Q \dot{E}_{QR} + \dot{E}_{PQ} E_Q E_R) + \\ & \Gamma_{27} (E_P E_Q \dot{H}_{QR} + \dot{H}_{PQ} E_Q E_R) \end{aligned} \quad (38)$$

(38) denklemindeki Γ_i ($i = 3, 5, 8, 10, 13, 14, 17, 18, 21, 23, 25, 27$) katsayıları aşağıda tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned} \Gamma_3 & \equiv 2(a_2 + b_2), \quad \Gamma_5 \equiv (a_4 + b_4), \quad \Gamma_8 \equiv 2(a_7 + b_7), \quad \Gamma_{10} \equiv (a_9 + b_9), \quad \Gamma_{13} \equiv 2(c_0 + 3c_1), \quad \Gamma_{14} \equiv 2(c_5 + c_6), \\ \Gamma_{17} & \equiv (f_0 + 3f_1), \quad \Gamma_{18} \equiv (f_5 + f_6), \quad \Gamma_{21} \equiv 2(g_2 + 2h_2), \quad \Gamma_{23} \equiv (g_4 + h_4), \quad \Gamma_{25} \equiv 2(k_0 + 3k_1), \quad \Gamma_{27} \equiv (m_0 + 3m_1) \end{aligned} \quad (39)$$

6. SONUÇLAR

Simetrik gerilme, elastik gerilme (23) ile dissipatif gerilme (38) toplanarak aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} \bar{T}_{PR} = & -pC_{PQ}^{-1} + \alpha_0 \delta_{PR} + \alpha_1 E_{NN} \delta_{PR} + \alpha_2 E_N E_N \delta_{PR} + \alpha_3 E_N E_N E_{QQ} \delta_{PR} + \alpha_4 E_N E_{NL} E_L \delta_{PR} + \alpha_5 H_{NN} \delta_{PR} + \\ & \alpha_6 H_{NN} E_{QQ} \delta_{PR} + \alpha_7 E_N H_{NL} E_L \delta_{PR} + \alpha_8 E_N H_{NL} E_L E_{QQ} \delta_{PR} + \alpha_9 E_{NL} H_{LN} \delta_{PR} + \alpha_{10} E_N E_{NL} H_{LM} E_M \delta_{PR} + \\ & \alpha_{11} E_{PR} + \alpha_3 E_N E_N E_{PR} + \alpha_6 H_{NN} E_{PR} + \alpha_8 E_N H_{NL} E_L E_{PR} + \alpha_{12} E_P E_R + \alpha_{13} E_{NN} E_P E_R + \alpha_{14} H_{NN} E_P E_R + \\ & \alpha_{15} E_{NL} H_{LN} E_P E_R + \alpha_{16} (E_P E_Q E_{QR} + E_{PQ} E_Q E_R) + \alpha_{17} H_{NN} (E_P E_Q E_{QR} + E_{PQ} E_Q E_R) + \alpha_{18} E_P H_{RQ} E_Q + \\ & \alpha_{19} E_{NN} E_P H_{RQ} E_Q + \alpha_{20} H_{PR} + \alpha_{21} E_{NN} H_{PR} + \alpha_{22} E_N E_N H_{PR} + \alpha_{23} E_N E_{NL} E_L H_{PR} + \\ & \alpha_{24} (E_{PQ} H_{QR} + E_{RQ} H_{QP}) + \alpha_{25} E_N E_N (E_{PQ} H_{QR} + E_{RQ} H_{QP}) + \Gamma_3 \dot{E}_{NN} \delta_{PR} + \Gamma_5 \dot{H}_{NN} \delta_{PR} + \\ & \Gamma_8 E_N \dot{E}_{NL} E_L \delta_{PR} + \Gamma_{10} E_N \dot{H}_{NL} E_L \delta_{PR} + \Gamma_{13} \dot{E}_{PR} + \Gamma_{14} E_N E_N \dot{E}_{PR} + \Gamma_{17} \dot{H}_{PR} + \Gamma_{18} E_N E_N \dot{H}_{PR} + \Gamma_{21} \dot{E}_{NN} E_P E_R + \\ & \Gamma_{23} \dot{H}_{NN} E_P E_R + \Gamma_{25} (E_P E_Q \dot{E}_{QR} + \dot{E}_{PQ} E_Q E_R) + \Gamma_{27} (E_P E_Q \dot{H}_{QR} + \dot{H}_{PQ} E_Q E_R) \end{aligned} \quad (40)$$

(13) denklemi dikkate alındığı zaman, $T_{PR} = \bar{T}_{PR} - \Pi_P E_M C_{MR}^{-1}$ asimetrik toplam gerilme tansörü de aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} T_{PR} = & -pC_{PQ}^{-1} + \alpha_0 \delta_{PR} + \alpha_1 E_{NN} \delta_{PR} + \alpha_2 E_N E_N \delta_{PR} + \alpha_3 E_N E_N E_{QQ} \delta_{PR} + \alpha_4 E_N E_{NL} E_L \delta_{PR} + \alpha_5 H_{NN} \delta_{PR} + \\ & \alpha_6 H_{NN} E_{QQ} \delta_{PR} + \alpha_7 E_N H_{NL} E_L \delta_{PR} + \alpha_8 E_N H_{NL} E_L E_{QQ} \delta_{PR} + \alpha_9 E_{NL} H_{LN} \delta_{PR} + \alpha_{10} E_N E_{NL} H_{LM} E_M \delta_{PR} + \\ & \alpha_{11} E_{PR} + \alpha_3 E_N E_N E_{PR} + \alpha_6 H_{NN} E_{PR} + \alpha_8 E_N H_{NL} E_L E_{PR} + \alpha_{12} E_P E_R + \alpha_{13} E_{NN} E_P E_R + \alpha_{14} H_{NN} E_P E_R + \\ & \alpha_{15} E_{NL} H_{LN} E_P E_R + \alpha_{16} (E_P E_Q E_{QR} + E_{PQ} E_Q E_R) + \alpha_{17} H_{NN} (E_P E_Q E_{QR} + E_{PQ} E_Q E_R) + \alpha_{18} E_P H_{RQ} E_Q + \\ & \alpha_{19} E_{NN} E_P H_{RQ} E_Q + \alpha_{20} H_{PR} + \alpha_{21} E_{NN} H_{PR} + \alpha_{22} E_N E_N H_{PR} + \alpha_{23} E_N E_{NL} E_L H_{PR} + \alpha_{24} (E_{PQ} H_{QR} + E_{RQ} H_{QP}) + \\ & \alpha_{25} E_N E_N (E_{PQ} H_{QR} + E_{RQ} H_{QP}) + \Gamma_3 \dot{E}_{NN} \delta_{PR} + \Gamma_5 \dot{H}_{NN} \delta_{PR} + \Gamma_8 E_N \dot{E}_{NL} E_L \delta_{PR} + \Gamma_{10} E_N \dot{H}_{NL} E_L \delta_{PR} + \Gamma_{13} \dot{E}_{PR} + \\ & \Gamma_{14} E_N E_N \dot{E}_{PR} + \Gamma_{17} \dot{H}_{PR} + \Gamma_{18} E_N E_N \dot{H}_{PR} + \Gamma_{21} \dot{E}_{NN} E_P E_R + \Gamma_{23} \dot{H}_{NN} E_P E_R + \Gamma_{25} (E_P E_Q \dot{E}_{QR} + \dot{E}_{PQ} E_Q E_R) + \\ & \Gamma_{27} (E_P E_Q \dot{H}_{QR} + \dot{H}_{PQ} E_Q E_R) + [\beta_1 E_P + \beta_2 E_{NN} E_P + \beta_3 + E_{PL} E_L + \beta_4 H_{NN} E_P + \beta_5 H_{PL} E_L + \beta_6 H_{NN} E_{PL} E_L + \\ & \beta_7 E_{NN} H_{PL} E_L + \beta_8 E_{NL} H_{LN} E_P + \beta_9 (E_{PL} H_{LM} E_M + H_{PL} E_{LM} E_M)] E_M C_{MR}^{-1} \end{aligned}$$

(41) denkleminde dikkat ettiğimizde; birinci terim hidrostatik basıncın gerilmeye olan katkısını, ikinci terim başlangıçta bir ön yükleme olması halinde gerilmeye olan katkısı göstermektedir. Diğer terimler sırasıyla deformasyonun, ikinci mertebeden elektostatik katkısı, non-lineer elektrik alanı ile deformasyon alanının etkileşiminin katkısını, hasarın gerilmeye olan etkisini, hasar ile deformasyon alanının etkileşiminden doğan katkısı, non-lineer elektrik alanı ile hasarın etkileşiminden gelen katkısı, elektrik alanı, deformasyon ve hasarın üçlü etkileşiminden doğan katkıları göstermektedir. Ayrıca, gerilme ve hasar tansörlerinin zamanla değişimlerinin gerilmeye olan katkıları ve bunların elektrik alanla ayrı ayrı ve üçlü etkileşiminden doğan katkılar görülmektedir. Gerilmenin asimetric olmasına sebep olan elektrik alanının kendisinin deformasyonla, hasar tansörü ile ve üçlü etkileşim halinde ortaya çıkan katkıları da gözlenmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] Ibijola, E.A., "On Some Fundamental Concepts of continuum Damage Mechanics" Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 191 1505-1520, 2002.
- [2] Bassiouny, E., "Damage Mechanics in Ferroelectric Ceramics-Model and Application" Journal of Applied Sciences 5(2) 257-266, 2005.
- [3] Woo, C.W., Li, D.L., "A Universal Physically Consistent Definition of Material Damage" International Journal of Solid and Structures 30 15 2097-2108, 1993.
- [4] Krajcinovic, D., "Selection of Damage Parameter – Art or Science?" Mechanics of Materials 28 165 129, 1998.
- [5] Simo, J.C., Ju, J.W., "Strain and Stres-Based Continuum Damage Models-I" Formulation Int. J. Solids struct 23 7 821-840, 1978.
- [6] Eskandari, H., Nemes, J.A., "An Isotropic Damage Model based on a Tensorial Representation of Damage" International Journal of Damage Mechanics 8 254-272, 1999.
- [7] Zheng, Q.S., Betten, J., "On Damage Effective Stres and Equivalence Hypothesis" International Journal of Damage Mechanics 5 219-240, 1996.
- [8] Kachanov, L.M., "Introduction to Continuum Damage Mechanics" Martinus Nijhof Publishers Boston-1986.
- [9] Lemaitre, J., "A Course on Damage Mechanics" Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [10] Krajcinovic, D., "Damage Mechanics" North Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics Volume 41 Amsterdam Elsevier, 1996.
- [11] Weitsman, Y., "Damage Coupled with Heat Conduction in Uniaxially Reinforced Composites" Journal of Applied Mechanics 55 641-647, 1988.
- [12] Weitsman, Y., "A Continuum Damage Model for Viscoelastic Materials" Journal of Applied Mechanics 55 773-780, 1988.
- [13] Eringen, A.C., Maugin, G.A., "Electrodynamics of Continua" vol.I. Foundations and Solid Media North – Holland-1990.
- [14] Erdem, A.Ü., Usal, M., Usal, M.R., "İzotropik Matris Malzemesi Olan Fiber Takviyeli Dielektrik Viskoelastik Ortamların Elektro-Termomekanik Davranışı için Matematiksel Bir Model" Gazi Üniv. Müh. Mim. Fak. Der. 20 3 321-334 Ankara, 2005.
- [15] Spencer, A.J.M., "Theory of Invariants" In Continuum Physics Vol.I. (Ed. A.C. Eringen) Academic Pres N.Y. and London, 1971.