İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR YAPININ TİTREŞİMLERİNİN KONTROLU İÇİN GERİ BESLEMELİ BİR KAPALI ÇEVRİM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnş. Müh. Hacer GÜMÜŞ

Anabilim Dalı : İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ

Programı : YAPI MÜHENDİSLİĞİ

HAZİRAN 2008

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR YAPININ TİTREŞİMLERİNİN KONTROLU İÇİN GERİ BESLEMELİ BİR KAPALI ÇEVRİM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnş. Müh. HACER GÜMÜŞ
501041050

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 02.05.2008
Tezin Savunulduğu Tarih : 10.06.2008

Tez Danışmanı : **Doç.Dr. Necla KADIOĞLU**
Diğer Jüri Üyeleri **Prof. Dr. Reha ARTAN (İ.T.Ü.)**
Prof. Dr. Faruk YÜKSELER (Y.T.Ü.)

HAZİRAN 2008

.

ÖNSÖZ

Bu çalışma esnasında değerli bilgi ve tecrübe birikimini özveri ile bana aktarmaya çalışan ve çalışmanın her safhasında yapıcı, yol gösterici teşvik ve tavsiyeleri ile bana destek olan sayın hocam Doç. Dr. Necla KADIOĞLU'na çok teşekkür ederim. Aynı zamanda her zaman benim yanımda olan ve desteklerini eksik etmeyen aileme de teşekkür etmeyi borç bilirim.

Mayıs 2008 Hacer GÜMÜŞ

·

İÇİNDEKİLER

.

ŞEKİL LİSTESİ

SAYFA NO

SEMBOL LİSTESİ

$\boldsymbol{p}$	:	Çubuk koordinatlarındaki çubuk uç kuvvetleri
$\boldsymbol{d}$	:	Çubuk koordinatlarındaki çubuk uç deformasyonları
$\boldsymbol{P}$	:	Sistem koordinatlarındaki çubuk uç kuvvetleri
$\boldsymbol{D}$	:	Sistem koordinatlarındaki çubuk uç deformasyonları
s	:	Laplace değişkeni
$\boldsymbol{M}$	:	Sistemin kütle matrisi
$\boldsymbol{k_{xyz}}$	:	Çubuk koordinatlarında çubuk rijitlik matrisi
$\boldsymbol{k_{XYZ}}$	:	Sistem koordinatlarında çubuk rijitlik matrisi
$\boldsymbol{K_{XYZ}}$	:	Sistem koordinatlarında sistem rijitlik matrisi
I_x	:	x yönündeki atalet kuvveti
I_y	:	y yönündeki atalet kuvveti
F	:	Kesit alanı
E	:	Elastisite modulü
q_i	:	i numaralı çubuk için koordinat dönüşüm matrisi
Q_i	:	i numaralı çubuk için dönüşüm matrisi
$\boldsymbol{kn}$	:	Kod numaraları matrisi
$\boldsymbol{D}$	:	Sistem deplasman matrisi
P	:	Kuvvet
$\boldsymbol{K^*}$	:	İndirgenmiş rijitlik matrisi
$f(t)$	:	Zamana bağlı dış etki
$\bar{f}(s)$	:	$f(t)$ fonksiyonunun Laplace transformu
$x_o(t)$	:	Referans değeri
$\bar{x}_o(s)$	:	$x_o(t)$ fonksiyonunun Laplace transformu
$x(t)$	:	Sistem çıkışı
$\bar{x}(s)$	:	$x(t)$ fonksiyonunun Laplace transformu
$g(t)$	:	Transfer fonksiyonu
$\bar{g}(s)$	:	$g(t)$ fonksiyonunun Laplace transformu
$G(t)$	:	Transfer fonksiyonu
$\bar{G}(s)$	:	$G(t)$ fonksiyonunun Laplace transformu
F_o	:	$f(t)$ fonksiyonunun t_o anındaki değeri
$\bar{R}(s)$	:	Referans büyüklüğü
$\bar{e}(s)$	:	Hata
$L(t)$	:	Kapalı çevrim transfer fonksiyonu
$\bar{L}(s)$	:	$L(t)$ fonksiyonunun Laplace transformu
$m(t)$	:	Kontrol organı çıkışı
$\bar{m}(s)$	:	$m(t)$ fonksiyonunun Laplace transformu
$K\tau_d$	:	Kontrol elemanı sabitleri
$\bar{g}_1(s)$ ve $\bar{g}_2(s)$	:	$\bar{x}(s)$ ifadesinde görülen iki fonksiyon
$q_1(t)$ ve $q_2(t)$	:	$\bar{g}_1(s)$ ve $\bar{g}_2(s)$in invers transformları

.

ÖZET

Bu çalışmada amaç yapılarda dinamik bir dış etki altında oluşan deplasmanları kontroludur. Bu işlemi yapabilmek için önce yapı bir kütle-yay sistemine indirgenmelidir. Bu işlemin nasıl yapılacağı bölüm 1 de açıklanmış ve bölüm 2 de basit bir örnek üzerine uygulanmıştır. İki kütleli bir sistemde sistemin belli bir noktasının yatay deplasmanı hesaplanarak, bu deplasmanı doğuran kuvvetin de yardımıyla sistem tek serbestlik dereceli bir kütle-yay sistemine indirgenmiştir. Bu kütle-yay sistemine birim adım fonksiyonu yapısında dinamik bir dış kuvvetin etkimesi halinde hareketin genliği de sönümsüz halde bulunmuştur. Ayrıca hareketin zamanla değişimi de belirlenmiştir. Bundan sonra sisteme bir kontrol elemanı eklenmiştir. Bu kontrol elemanı bir sönüm kutusu ile ilave bir yaydan oluşmaktadır. Ayrıca kontrol elemanı için bir $x_o(t)$ referans değeri de sözkonusudur. Bu herhangi bir eğri seçilebilir. Ancak burada referans değeri zamanla değişmeyen bir sabit olarak seçilmiştir. Bu eğrinin zamana bağlı bir fonksiyon olarak verilmesi uygulanan çözüm metodunda elde edilen integrallerinin integrandlarında ilave bir çarpan gelmesinden öte bir değişiklik getirmez. Keyfi bir dış etki genellikle sayısal ve ayrık değerlerle verilir. Bu durumda ise burada bulunan integrallerin sayısal olarak hesaplanması gerekecektir. Referans değeri, sönüm katsayısı, ilave yay, dinamik dış etki fonksiyonlarının kapattığı geri beslemeli bir otomatik kontrol çevrimi, bu fonksiyonların Laplace dönüşümleri arasında çizilmiştir. Sonuçta bu kapalı çevrime karşılık gelen açık çevrim bulunmuş ve ters Laplace transformu yardımı ile sistemin $x(t)$ cevap eğrisi, $x_o(t)$ referans değeri ve dinamik dış etkiye bağlı olarak elde edilmiştir. Sistemde kritik sönüm sonradan konulan ikinci yayla ilgilidir. Bu yayda yay katsayısı değiştirilerek üç farklı kritik sönüm bulunmuştur. Ayrıca her yay için c sönüm katsayısı değiştirilerek kuvvetli sönüm, kritik sönüm ve sönümlü titreşim veya zayıf sönüm durumları incelenmiştir. Hareketin en büyük genliği sönüm katsayısı arttıkça ve k_2 ilave yay katsayısı azaldıkça azalmaktadır.

.

SUMMARY

In this study, the aim is to control of the displacements in the structures which are formed due to a dynamic external effect. At first the structure must be reduced to a spring-mass system for this purpose. The purocedure of this operation has been explained in the chapter 1 and is applied to a simple example in chapter 2. A system with two masses has been reduced to a spring-mass system of one degree of freedom by calculation of the horizontal displacement of a spesific point and the force producing this displacement. The amplitude of the motion has also been found for the undamped case, if the system subjected to a dynamic external force having the shape of unit step funtion. Besides, time variation of the motion has also been determined. After these, a control element is added to the system. This control element are formed by an additional spring and a dashpot. Besides, an $x_o(t)$ reference value is in question for control element. This can be selected as an arbitrary curve. On the other hand, the reference value has been selected as a constant. The selection of this curve as a time depended function does not produce a difference in the solution except an additional multiplier in the integrands of the resulting integrals. In general an arbitrary external effect are given by a numerical data. In that case, the resulting integrals must be calculated numerically. A close-loop outomatic control block diagram with a feedback has been drawn between the Laplace transforms of reference value and dynamic external force, damping and additional spring constant. As a consequence, the open-loop block diagram of the control system, corresponding to the close-loop mentioned before, has been found and controlled variable or output has been determined in terms of input which are reference value and external force. The critical damping of the system is related to the secondary spring which was added to the system later. Three different critical dampings have been found by changing spring constant of these secondary springs. Besides, the cases of overdamped, critically damped and underdamped are examined by changing the viscous damping coefficient c

for every spring constant. The maximum amplitude of the motion decreases with the increament of c and the decreament of the constant of the secondary spring.

1. GİRİŞ VE TEMEL KAVRAMLAR

Bu çalışmada amaç yapılarda dinamik titreşim tipinde (deprem) bir etki altında oluşan deplasmanların kontroludur. Bu kontrol işlemi otomatik kontrol metodları kullanılarak gerçekleştirilmeye çalışılacaktır. Dolayısıyla önce otomatik kontrolün temel elemanları tanımlanmalıdır. İkinci aşama binayı bir kütle-yay sistemine indirgemektir. Bu işlem ise iki kütleli basit bir düzlem çerçeve üzerinde açıklanmıştır. Sonuncu aşama binayı temsil eden bir kütle yay sistemine orantı-diferansiyel (P.D.) tipi bir kontrol elemanı eklenerek bir kapalı çevrim elde edilmeye çalışılacaktır. Bütün bu işlemler için gerekli olan bilgiler aşağıda verilmişitr.

OTOMATİK KONTROL İLE İLGİLİ GENEL BİLGİLER

Bu günün dünyasında kontrol işlemlerine günlük yaşantımızın her alanında rastlanır. Kontrol işlemleri otomatik biçimde yani kendi kendine gerçekleşir. Örneğin; bazı ışıklar kendi kendine yanar ve kendi kendine söner. Çamaşır ve bulaşık makinaları suyu kendi kendilerine ve belli bir miktarda alırlar. Bazı kapılar, kendi kendilerine açılır ve kapanırlar.
Canlı organizmalarda da otomatik kontrol örnekleri görülebilir. Özellikle termik kontrolün uygulamaları ortaya çıkar.
Sıcaklık artınca vücut sıcaklığı belli bir derecede tutmak ister. Bu amaçla gözenekler açılarak terleme işlemi hızlanır. Buharlaşan ter vücudun sıcaklık derecesini düşürür. Sıcaklık düştüğü halde ise gözenekler kapanarak su kaybı azaltılır.
Bu örneklerdeki kontrol işlemlerinin benzer tarafından yararlanarak "kontrol" ve "otomatik kontrol" için şu genel tanımlar yapılabilir.

Kontrol: İncelenen davranışların belirli istenen değerler etrafında kalması veya istenen değişimleri göstermesi için yapılan işlemler, genel anlamda kontrol olarak tanımlanır.

Otomatik Kontrol: Kontrol işlemlerinin, kontrol edilmek istenen olay etrafında kurulmuş bir karar mekanizması tarafından, doğrudan insan girişimi olmaksızın gerçekleştirilebilmesidir.
Kontrol işlemlerinin belirlenmesi ve otomatik kontrol mekanizmalarının kurulması, öncelikle bu işlemleri gerektiren amaçların ve istenen davranışların kesin

biçimde tanımlanmasını, buna bağlı olarak da, olayların oluşturduğu ortamın, olayların sebep-sonuç ilişkilerinin ve davranış özelliklerinin incelenmesini gerektirir. "Sistem Dinamiği ve Kontrol" bilim dalı, bu konuların bilimsel yöntemlerle incelendiği bilim dalıdır.
Otomatik kontrol, özellikle mühendislik sistemlerinde giderek daha çok önem kazanmaktadır. Bu nedenlerini şöyle sıralayabiliriz:
Otomatik Kontrol, kullanılan sistemlerin kendi kendini konrol ederek çalışmasını sağlar. Dolayısıyla fiziksel ve zihinsel insan emeğinden tasarruf edilmiş olur.
Otomatik Kontrol, insan gücünün dışında gerçekleşen olaylarda insanın hakimiyetini kolaylaştırır.
Mühendislerin amacı genelde çeşitli işlerde kullanılacak olan nesnelerin imalatıdır. Bu imalatın içine saç kurutma makinasından binaya kadar her türlü mamul sokulabilir. Otomatik kontrol, bu ürünlerin kullanımda daha verimli çalışmasına imkan sağlar.
Bilgisayarların mühendislik uygulamalarında yaygın biçimde kullanılması, Kontrol ve Otomatik Kontrol yöntemlerinin de daha etkin olarak uygulanmasına yol açmıştır.
Değişik alanlardaki sistemlerin bilimsel olarak incelenmesi aşağıdaki genel tanımın yapılmasını sağlar.

Sistem: Belirli bir amacı sağlayan bir "bütün" oluşturacak biçimde fonksiyonel bağıntıları bulunan etkileşimli ya da ilişkili elemanlar kümesine "sistem" denir.
Bu tanımdan şu önemli özellikler anlaşılır.

Bir sistem, sınırları içinde bir bütün oluşturur; Sistemin sınırları, sistemin oluşturulmasındaki amaca ya da sistem üzerinde yapılan incelemenin amacına göre belirlenir. Bu sınırların dışına sistemin "çevre"si denir. Sistem, çevresinden bu sınırlar üzerinden etkilenir, çevresini de gene bu sınırlar üzerinden etkiler.

Bir sistem, birbiri ile etkileşimli elemanlardan oluşur; Sistemin davranış özellikleri, hem elemanların bireysel davranış özelliklerine, hem de elemanlar arasındaki etkileşim özelliklerine bağımlıdır.

Sistem değişkenleri aşağıdaki gibi sınıflandırılır

Giriş Değişkenleri: Bir sisteme, o sistemin dışından uygulanan, diğer değişkenlerden bağımsız biçimde değişebilen ve sistemin davranışını etkileyen değişkenlere sistemin “giriş değişkenleri” denir. Buna örnek olarak bir binaya etkiyen dinamik yükler gösterilebilir.

Çıkış Değişkenleri: Bir sistemin davranışını belirleyen değişkenler arasında tasarım ya da gözlem açısından belirleyici olanlara sistemin “çıkış değişkenleri” denir. Çıkış değerleri ölçülebilir değişkenlerdir. Bir sistemin giriş ve çıkış arasında bir “ sebep-sonuç ilişkisi” vardır.

Kumanda Değişkenleri: Bie sistemin giriş değerleri arasında yer alan, istenildiği gibi değiştirilebilen ve çıkışları etkileyen girişlere sistemin “kumanda değişkenleri” denir.

Bozucu Değişkenler: Bir sistemin girişleri arasında yer alan ve değişimi önceden bilinemeyen girişlere sistemin “bozucu değişkenler” denir.

Açık ve Kapalı Kontrol Çevrimleri

Açık kontrol çevrimi veya açık çevrimli kontrol: Bir kontrol çevriminde, kontrol ve kumanda, sistemin çıkışlarına fiziksel bir bağlantı ile bağımlı olarak belirlenmiyorsa, kontrol çevrimi açıktır. Çıkışların kumandayı kontrol sistemi içinde etkilemediği kontrol çevrimine açık çevrimli kontrol denir. Açık kontrol çevrimi kontrol edilen sistemin yapısının ve giriş değerlerinin çok iyi bilindiği hallerde kullanılır.

Kapalı kontrol çevrimi veya kapalı çevrimli kontrol: Bir kontrol çevriminde, kontrol ve kumanda, sistemin çıkışlarına fiziksel bir bağlantı ile bağımlı olarak belirleniyorsa, kontrol çevrimi kapalıdır. Çıkışlardaki değişimlerin kumandayı kontrol sistemi içinde etkilediği ve kumandanın bu değişimlere göre belirlendiği kontrol çevrimine kapalı çevrimli kontrol denir. Bu kontrol sisteminde kontrol işlemleri ve sebep sonuç ilişkileri sistemde bir dizi oluştururlar. Sistem çıkışındaki değişimler, sisteme uygulanacak kumandanın belirlenmesi için daha önceki adımlara “geri” gönderildiği için, bu kontrol çevrimine “geri beslemeli kontrol çevrimleri” de denir.

Otomatik Kontrol Sistemi: Otomatik kontrol sistemi, bir sistem etrafında, önceden belirlenmiş kontrol amaçlarını insan girişimi olmaksızın gerçekleştirmek üzere kurulmuş birbiri ve sistemle bağlantılı elemanlardan oluşur.
Otomatik kontrol sistemleri genelde kapalı çevrimli, geri beslemeli kontrol sistemleridir.

Negatif Geri Besleme: Kontrol amacı çıkışı sabit bir değerde tutmak olan ve gi-rişindeki artışların çıkışında da artışlara sebep olduğu bir kontrol sistemi göz önüne alınsın. Bu kontrol siteminde çıkış sabit tutulmak istenirken bir artış gösterdiği için kumanda azaltılarak çıkışın istenilen değere geri dönmesi sağlanır. Tersi bir durumda çıkış istenilen değere göre azalış gösteriyorsa ku-

manda arttırılarak çıkışın istenilen değere yükseltilmesi sağlanır. Dolayısı ile çıkışdaki değişimlerin kumandaya etkisi ters yönde olmaktadır. Bunun için çıkış değişimlerinin karşılaştırma ve kontrol elemanına negatif işaretle geri gönderilmesi gerekir. Bu işleme geri besleme adı verilir. Negatif geri besleme otomatik kontrol çevrimlerinin temel özelliklerinden biridir.
Otomatik kontrolde Laplace transformu ağırlıklı olarak kullanılır. Burada Laplace dönüşümü hakkında kısaca bilgi verilecektir.

LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

Giriş: Laplace dönüşümü lineer sistemlerin incelenmesinde kullanılan bir dönüşüm metodudur. Bu dönüşüm metodu sayesinde sabit katsayılı lineer denlemler, çözümü daha kolay olan cebrik denklemlere dönüştürülürler. Burada hangi değişken üzerinde Laplace dönüşümü uygulanıyorsa bunun yerine bir s kompleks değişkeni gelir. Laplace operatörüne bağlı olarak elde edilen cebrik denklemler ile gerekli işlemler yapıldıktan sonra, diferansiyel denklemlerin çözümünü bulmak için ters dönüşümle diferansiyel denklemin değişkenine geri dönülür.
Laplace dönüşümüne ait değişken olan "s" bir kompleks sayıdır ve $s = \tau + i\omega$ olarak tanımlanır. Burada τ ve ω reel sayılar olup $i = \sqrt{-1}$ dir.

Laplace Dönüşümünün Tanımı: Bir $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü sembolik olarak $\mathcal{L}[f(t)]$ şeklinde gösterilir ve "f(t) nin Laplace dönüşümü" diye okunur.
Laplace dönüşümünün matematik tanımı

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \bar{f}(s) \tag{1.1}$$

dir. Bu ifadenin integrasyon sınırları 0 ve ∞ olduğundan t bağımsız değişkeni ortadan kalkar ve yalnız s kompleks değişkeninin bir fonksiyonu olan $\bar{f}(s)$ elde edilir.Laplace dönüşümünün bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

$$\mathcal{L}[\frac{df(t)}{dt}] = s\bar{f}(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}[\frac{d^2f(t)}{dt^2}] = s^2\bar{f}(s) - sf(0) - \left|\frac{df}{dt}\right|_{t=0} \tag{1.2}$$

$$\mathcal{L}[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau] = \bar{f}(s)\bar{g}(s) \tag{1.3}$$

Otomatik kontrolda başlangıç değerleri genellikle 0 olarak alınır. Bundan sonra bu çalışmada da $f(t)$ ve türevlari $t = 0$ da sıfır kabul edileceklerdir.

Ters Laplace Dönüşümü: Diferansiyel denklemlerden Laplace dönüşümü ile elde edilen cebrik denklemlerin çözümünden sonra Laplace değişkeni s den gerçek değişken t ye geri dönmek istenebilir. Bu şekilde, kompleks sayılı değişkeni olan bir ifadenin, zaman değişkeni olan bir ifadeye dönüştürülmesi için uygulanan matematik işleme "Ters Laplace Dönüşümü" denir. Ters Laplace dönüşümü sembolik olarak

$$\mathcal{L}^{-1}[\bar{f}(s)] = f(t) \tag{1.4}$$

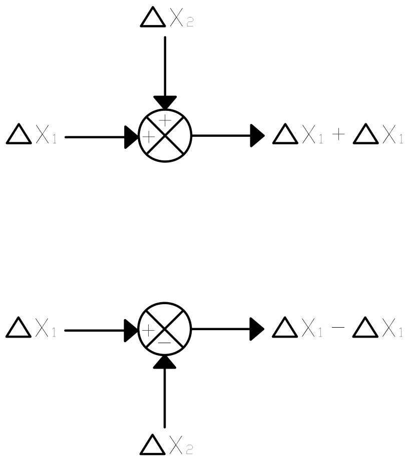
şeklinde gösterilir.

Transfer Fonksiyonu: Otomatik kontrol sistemlerinin incelenmesinde, lineer sabit katsayılı sistemlerin giriş-çıkış bağıntılarının belirtilmesinde "transfer fonksiyonları" kullanılır. Bir lineer sabit katsayılı sistemin transfer fonksiyonu, o sistemin çıkış fonksi- yonunun Laplace dönüşümünün, giriş fonksiyonun Laplace dönüşümüne oranıdır. (Şekil 1.1)

Şekil 1.1 Blok Diyagramı ve Transfer Fonksiyonu G(s)

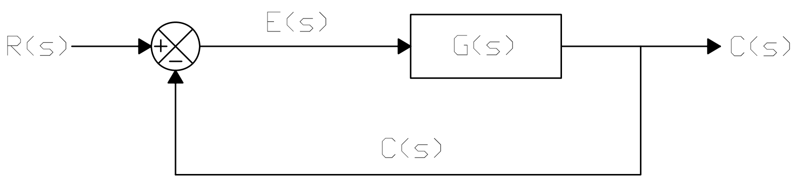
$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s) \tag{1.5}$$

Burada X(s), giriş, ikaz veya sebep ve Y(s), çıkış, sonuç veya cevap olarak isimlendirilirler.
Transfer fonksiyonu lineer bir sistemde çıkış fonksiyonunu giriş fonksiyonuna sisteme ait parametrelerle bağlayan bir fonksiyondur. Tranfer fonksiyonu sistemin fiziksel yapısı ile ilgili bilgilerden tamamen bağımsızdır. Diğer bir deyişle farklı sistemlerin transfer fonksiyonları benzer olabilir.
Transfer fonksiyonunun paydasına "karakteristik fonksiyon" adı verilir. Karakteristik fonksiyon sıfıra eşitlenerek "karakteristik denklem" elde edilir.
Blok diyagramlarındaki toplama, çıkarma işlemleri için Şekil 1.2 deki sembol kullanılır.



Şekil 1.2 Cebirsel toplama sembolu

Giriş-Çıkış bağıntısında kontrol büyüklüğü $R(s)$ referans değeri ile karşılaştırılarak kapalı çevrim elde edilir. (Şekil 1.3)



Şekil 1.3 Kapalı Çevrim Blok Diyagramı

Burada E(s)=R(s)-C(s), yeni sistem girişi adını alır.

DÜZLEM ÇERÇEVEDE KUVVET-DEPLASMAN BAĞINTILARI

Uzay veya düzlem çerçeveler çubukların birleşiminden oluşur. Düzlem çerçevede çubuk eksenleri ve dış kuvvetler YZ düzlemi içindedirler. X, Y, Z eksen takımı bir çubuğun konumunu belirlemek için kullanılır ve ortak eksen takımı olarak isimlendirilir. Ayrıca her çubuğa bağlı bir x, y, z eksen takımı tanımlanır. Çubuklar birbirlerine rijit veya mafsallı olarak bağlanırlar. Ayrıca düzlem çerçeve dış ortamı izostatik veya hiperstatik bir sistem oluşturacak şekilde bağlanmalıdır. Burada sadece doğru eksenli çubuklar göz önüne alınmıştır ve sisteme etkiyen dış yüklerin çubukların birleşim noktalarında etkidiği kabul edilmiştir. Şimdi bir düzlem çubuğun kandisine bağlı x, y, z takımındaki serbestlikleri incelenecektir. A ucu çubuğun başlangıcı, B sonu olsun. Bir sistemin birbirinden bağımsız yapabileceği deplasman sayısına serbestlik derecesi denir. Düzlem çerçeve çubuğunda A ucunda üç, B ucunda üç olmak üzere altı serbestlik bulunur. Şekil 1.4
Serbestlik derecesi altı olduğuna göre uç kuvvet sayısıda altıdır. Örnek olarak bir-

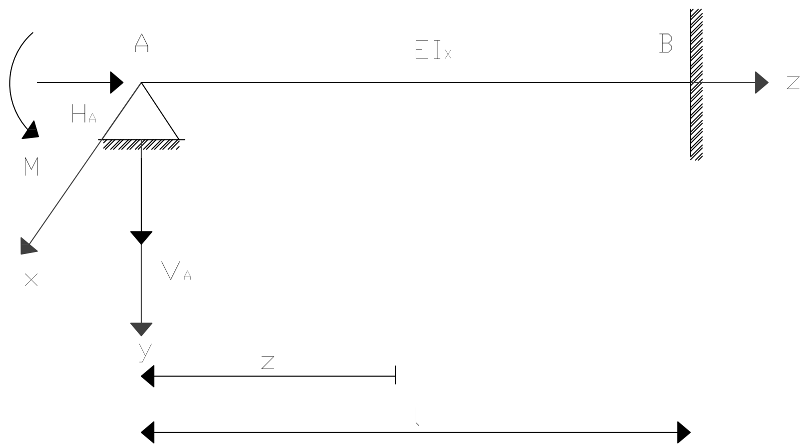
inci serbestliğin A ucunun x ekseni etrafında dönmesi olduğu düşünülürse birinci uç kuvvet A ya etkiyen $M_x = F_1$ momentidir.

Düzlem Çerçeve Çubuğun Stiffness(Rijitlik) Matrisinin Bulunuşu:

Düzlem çubuğun rijitlik matrisini bulabilmek için önce bir çubukta çubuğa bağlı eksen takımı x,y,z olarak tanımlanacaktır. (Şekil 1.4)

Şekil 1.4 Düzlem çerçeve çubuğu

Bu deformasyon veya deplasmanlar ve kuvvetler Şekil 1.4'de gösterilmiştir. Çubuğun diğer bütün serbestlik dereceleri doğrultusundaki deplasmanlar sıfır iken, yalnız j doğrultusunda birim deplasman oluşturabilmek için, i doğrultusunda uygulanması gereken kuvvet çubuğun ***k*** rijitlik matrisinin ij numaralı elemanıdır. Bu rijitlik k_{ij} olarak ifade edilir. k_{ij} değerleri hesaplanırken Castigliano teoreminden faydalanılacaktır. Örnek olarak aşağıda k_{11} in hesabı verilmiştir.
Şekil 1.5 deki A ucunun dönmesini bir yapan M değeri k_{11} i verecektir.



Şekil 1.5 Bir ucu ankastre, bir ucu sabit mesnetli kiriş

Bu sistemde A daki tepkiler V_A ve H_A olsun. A-B arasında bir z kesitinde kesit tesirleri;

$$N = -H_A, \qquad M_{x(z)} = V_A z - M \tag{1.6}$$

Düzlem bir çubukta çubuk ekseni z ekseni ve yükler z, y düzlemi içinde ise sadece M_x eğilme momenti, N normal kuvveti ve T_y kesme kuvveti oluşur. Kesme kuvvetinin etkisi göz önüne alınmazsa çubukta biriken toplam şekil değişimi işi;

$$U = \int_0^l \left(\frac{N^2}{2EF} + \frac{M_x^2}{2EI}\right) dz \tag{1.7}$$

şeklinde hesaplanır. Burada F çubuk kesit alanını, I kesitin x eksenine göre atalet momentini göstermektedir. Ancak kesitin y eksenine göre simetrik olduğu da kabul edilmiştir. E çubuk malzemesine ait elastisite modülüdür.

Castigliano Teoremi: Çubuğun bir noktasına P kuvveti etkirse bu noktada, kuvvet doğrultusundaki deplasman;

$$\delta_P = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_0^l \left(\frac{N}{EF}\frac{\delta N}{\delta P} + \frac{M_x}{EI}\frac{\delta M_x}{\delta P}\right) dz \tag{1.8}$$

şeklinde hesaplanır. Ayrıca bir noktada M momenti etkiyorsa o noktada, o moment yönünde dönme açısı ise;

$$\theta_M = \frac{\partial U}{\partial M} = \int_0^l \left(\frac{\delta N}{\delta M} + \frac{\delta M_x}{\delta M}\right) dz \tag{1.9}$$

olarak bulunur.
(1.6), (1.7), (1.8), (1.9) kullanılarak A noktasının çökme ve dönmesi hesaplanırsa

$$\delta_A = 0 = \int_0^l \frac{(V_A z - M) z}{EI_x} dz \rightarrow 0 = V_A \frac{l^3}{3} - M \frac{l^2}{2} \tag{1.10}$$

$$\theta_A = 1 = \frac{(V_A z - M)(-1)}{EI_x} dz \rightarrow EI_x = V_A \frac{\text{ß}^2}{2} + Ml \tag{1.11}$$

$$\rightarrow k_{11} = M = \frac{4EI}{l} \tag{1.12}$$

bulunur. Benzer şekilde diğerleride hesaplanırsa, çubuk koordinatlarında çubuk rijitlik matrisi aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\boldsymbol{k_{xyz}} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_x}{l} & \frac{-6EI_x}{l^2} & 0 & \frac{EI_x}{l} & \frac{6EI_x}{l^2} & 0 \\ \frac{-6EI_x}{l^2} & \frac{12EI_x}{l^3} & 0 & \frac{-6EI_x}{l^2} & \frac{-12EI_x}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EF}{l} & 0 & 0 & \frac{-EF}{l} \\ \frac{2EI_x}{l} & \frac{-6EI_x}{l^2} & 0 & \frac{4EI_x}{l} & \frac{6EI_x}{l^2} & 0 \\ \frac{6EI_x}{l^2} & \frac{-12EI_x}{l^3} & 0 & \frac{6EI_x}{l^2} & \frac{12EI_x}{l^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-EF}{l} & 0 & 0 & \frac{EF}{l} \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

(1.13) ifadesinden k_{ij} matrisinin simetrik bir matris olduğu görülmektedir. Bilindiği gibi reel simetrik bir matrisin bütün özdeğerleri reel sayılardır.

SİSTEM KOORDİNATLARINDA DÜZLEM ÇERÇEVENİN K RİJİTLİK MATRİSİNİN BULUNUŞU VE SİSTEMDE YÜK-DEPLASMAN BAĞINTILARI

Herhangi bir düzlem çubuk için, k_{xyz} rijitlik matrisi, çubuk koordinatlarında bulunmuştu. Bu matrisin bir çubuk için bütün bir sistem için tanımlanmış olan sistem koordinatlarına çevrilmesi gereklidir. Bu sayede sistem koordinatlarındaki çubuk rijitlik matrisi k_{XYZ} elde edilir. Bu işlem tüm çubuklar için yapılır. Daha sonra elde edilen bu matrisler kullanılarak tüm sisteme ait K rijitlik matrisi oluşturulur.

Çubuk Rijitlik Matrisinin Sistem Koordinatlarında Elde Edilmesi

k_{XYZ} sistem koordinatlarındaki çubuk rijitlik matrisinin elde edilmesi için bir dönüşüm yapılması gereklidir. Bu, Q dönüşüm matrisi adı verilen bir matris yardımı ile yapılacaktır. Her çubuğun dönüşüm matrisi farklıdır ve bu dönüşüm matrisleri daima ortagonal matrislerdir.

Q Dönüşüm Matrisinin Bulunuşu: Bir AB düzlem çerçeve çubuğu XYZ sistem koordinatlarında Şekil 1.6 da gösterilmiştir. Ayrıca bu çubuğa bağlı olan xyz çubuk eksen takımı da Şekil 1.6 da görülmektedir. X, Y, Z eksenlerini x, y, z eksenlerine dönüştüren q matrisi

$$\cos\theta = \frac{Z_B - Z_A}{l} \sin\theta = \frac{Y_B - Y_A}{l} \tag{1.14}$$

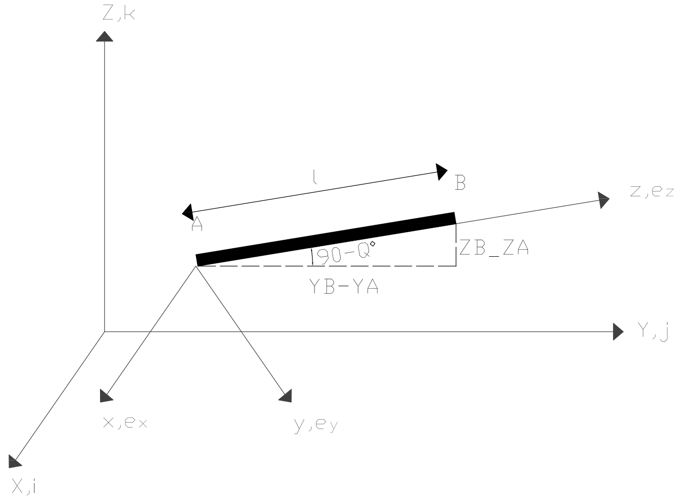
olmak üzere

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} \tag{1.15}$$

şeklindedir. Bir noktanın çubuk eksen takımındaki konum vektörü $\boldsymbol{x}$, aynı noktanın sistem koordinatlarındaki konum vektörü $\boldsymbol{X}$ e aşağıdaki denklemle bağlanır.

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}\boldsymbol{X} \tag{1.16}$$

Ancak burada xyz ve XYZ eksan takımlarının orjinlerinin çaıştığı kabul edilmiştir.



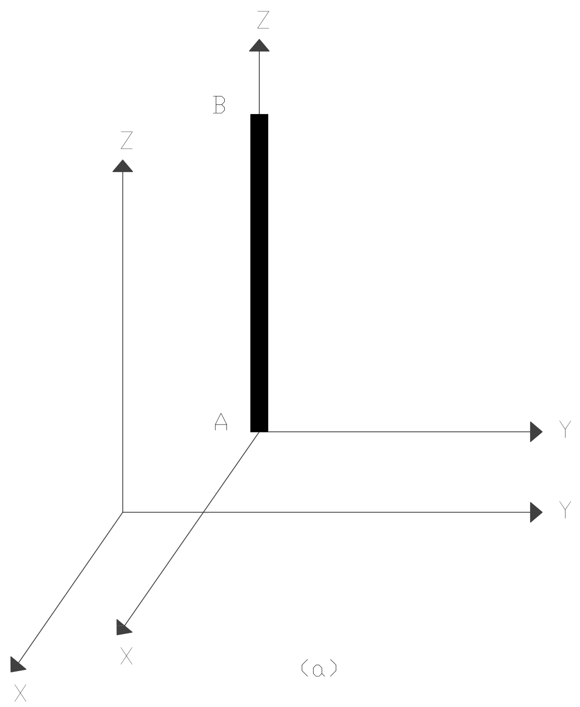
Şekil 1.6 Sistem ve çubuk koordinatları

Burada elde edilen $\boldsymbol{q}$ matrisi Şekil 1.6 deki sistem koordinatlarını, çubuk koordinatlarına çevirmektedir. Bu çevirme (transformasyon) bütün vektörel büyüklükler için geçerlidir.

Bir düzlem çubukta dönüştürülmesi gerekli olan 6 serbestlik derecesi yani iki dönme ve dört öteleme söz konusudur. Bu dönüşüm, Şekil 1.6 deki çubuk için $\boldsymbol{q}$ matrisinden oluşturulan $\boldsymbol{Q}$ transformasyon matrisi ile sağlanır. $\boldsymbol{Q}$ transformasyon matrisi ortagonal bir matristir ve aşağıda verilmiştir.

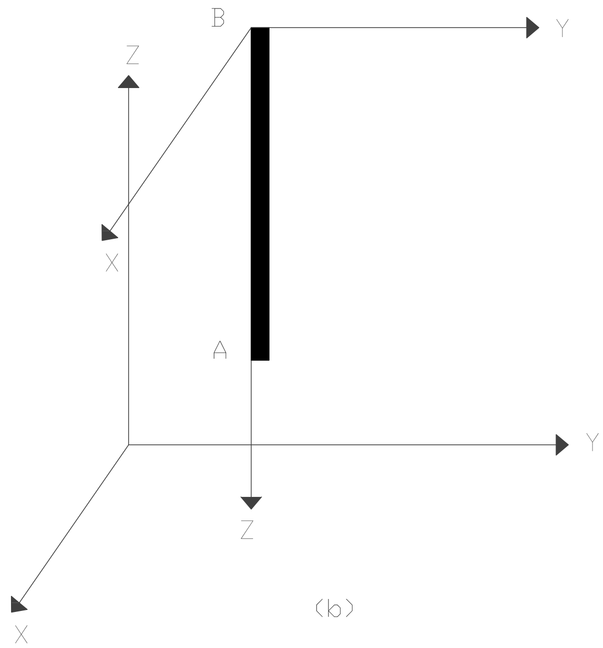
$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\theta & -\cos\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

θ açısının 90^0 (düşey çubuk) veya 0^0 (yatay çubuk) olduğu haller için, çubuk koordinatlarının yönüne bağlı olarak transformasyon matrisinin ayrıca tanıtılması gerekmektedir. Bu özel durumlar için $\boldsymbol{Q}$ matrisinin yazılışı Şekil 2.2 de gösterilmiştir.



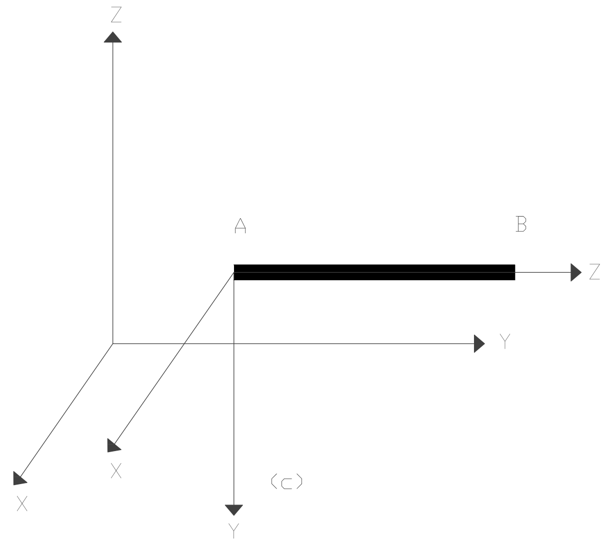
Şekil 1.7 Özel Çubuk Durumları

$$(a)\quad \boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{q} \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.18}$$



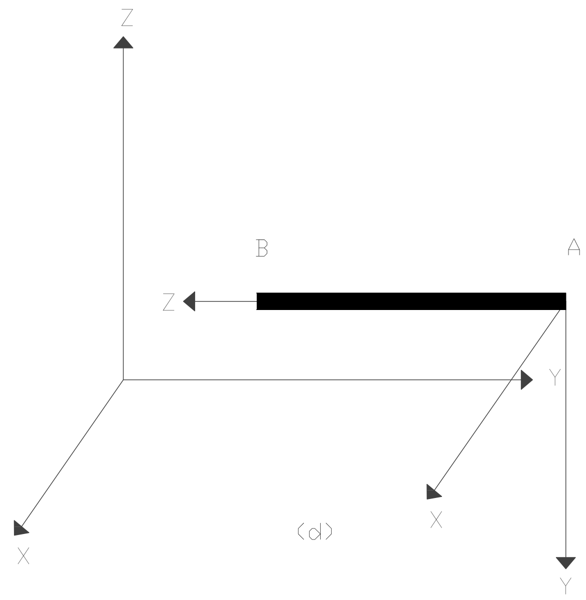
Şekil 1.8 Özel Çubuk Durumları

$$(b)\quad \boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{q} \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{1.19}$$



Şekil 1.9 Özel Çubuk Durumları

$$(c)\quad \boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{q} \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.20}$$



Şekil 1.10 Özel Çubuk Durumları

$$(d)\quad \boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{q} \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.21}$$

Sistem Koordinatlarında Çubuk Rijitlik Matrisi $\boldsymbol{k_{XYZ}}$

Daha önce (1.16) da verilen dönüşüm bütün vektörel büyüklükler için geçerlidir. Buna göre sistem koordinatlarındaki herhangi bir kuvvet veya yer değiştirme de çubuk koordinatlarına aşağıdaki denklemler yardımı ile dönüştürülebilir.

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{QP} \qquad ve \qquad \boldsymbol{d} = \boldsymbol{QD} \tag{1.22}$$

$\boldsymbol{p}$: çubuk koordinatlarındaki çubuk uç kuvvetleri
$\boldsymbol{d}$: çubuk koordinatlarındaki çubuk uç deformasyonları
$\boldsymbol{P}$: sistem koordinatlarındaki çubuk uç kuvvetleri
$\boldsymbol{D}$: sistem koordinatlarındaki çubuk uç deformasyonları
Herhangi bir çubukta, çubuk koordinatlarında çubuk uç kuvvetleri ile çubuk koordinatlarında çubuk ç deformasyonları arasındaki bağıntı aşağıdaki denklemde gösterildiği gibi yazılır.

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{k_{xyz}d} \tag{1.23}$$

$\boldsymbol{k_{xyz}}$: çubuk koordinatlarında çubuk rijitlik matrisi
Bu denklem sistem koordinatlarında, (1.22) deki denklemler kullanılarak aşağıdaki gibi yazılır.

$$\boldsymbol{QP} = \boldsymbol{k_{xyz}QD} \tag{1.24}$$

$\boldsymbol{Q}$ matrisi ortogonal bir matris olduğundan, transpozesi ile çarpılırsa $\boldsymbol{I}$ birim matrisi elde edilir. Bu durumda (1.24) soldan $\boldsymbol{Q^T}$ ile çarpılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q^T k_{xyz} QD} \tag{1.25}$$

Sistem koordinatlarında çubuk rijitlik denklemi;

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{k_{XYZ}D} \tag{1.26}$$

(1.25) ve (1.26) karşılaştırılırsa

$$\boldsymbol{k_{XYZ}} = \boldsymbol{Q^T k_{xyz} Q} \tag{1.27}$$

olarak bir çubuğun sistem koordinatlarındaki rijitlik matrisi $\boldsymbol{k_{XYZ}}$ bulunur.

Düzlem çerçevenin sistem koordinatlarında $\boldsymbol{K}$ rijitlik matrisinin bulunması

$\boldsymbol{K}$ nın oluşturulabilmesi için düzlem çerçevenin serbestliklerinin çerçeve içinde numa- ralanması gerekir. Çerçevenin m serbestliği varsa $\boldsymbol{K}$ $m \times m$ mertebesinde olacaktır. Serbestlikler çubukların dış ortama ve birbirlerine bağlandığı noktalardaki olası deplasmanlardır. Eğer çerçeve bir dış ortama bir noktadan ankastre olarak bağlanmışsa bu noktadan sistem serbestlik derecesine hiçbir katkı gelmez. Eğer bağlantı noktası kayıcı mesnetse iki, sabit mesnetse bir serbestlik doğacaktır. Çubukların bağlantı noktalarında ise daima üç serbestlik vardır ancak bu, bağlantı noktasında bir ara mafsal olmaması halinde doğrudur. Ara mafsal bu birleşim noktasında dört ilave serbestlik doğurur. Çubukların daha önce numaralandığını da anımsamak gerekir. Bundan sonra kod numaraları matrisi tanımlanır. Sistemdeki çubuk sayısı n ise kod numaraları matrisi $n \times 6$ mertebesinde bir matristir. Bu matris $\boldsymbol{kn}$ matrisi olarak isimlendirilirse, kn_{ij} i numa- ralı çubuktaki j numaralı çubuk deplasmanının sistem serbestliklerindeki numarasına eşittir. Bundan sonra sistem koordinatlarındaki çubuk rijitlik matrisleri kod numaraları matrisi yardımı ile sistem rijitlik matrisine yerleştirilir. Örnek olarak 2 numaralı çubuğun rijitlik matrisindeki k_{12} adresli elemanını incelersek; $kn_{21} = 2$, $kn_{22} = 3$ olmak üzere çubuk rijitlik matrisinin (1,2) adresli elemanı K_{23} e ilave edilecektir. Eğer kod numaralarından biri 0 ise o eleman hiçbir terime eklenmez. Bu durum örnek üzerinde ayrıca açıklanacaktır. $\boldsymbol{D^{m\times 1}}$ sistemin bağımsız deplasmanlarının sayısı ise $\boldsymbol{P^{m\times 1}}$ de bu bağımsız deplasmanların tanımlandığı noktalarda ve bunların doğrultusundaki yükler olmak üzere

$$\boldsymbol{K^{m\times m} D^{m\times 1}} = \boldsymbol{P^{m\times 1}} \tag{1.28}$$

bağıntısı vardır ve $\boldsymbol{K}$ ile $\boldsymbol{P}$ biliniyorsa $\boldsymbol{D}$ sistem deplasmanları hesaplanır. Ancak sistemin dinamik davranışını incelerken genellikle bu $\boldsymbol{K}$ rijitlik matrisi kullanılmaz. $r \leq m$ olmak üzere sistem rijitlik matrisi $r \times r$ mertebesinde bir $\boldsymbol{K^*}$ matrisine indirgenecektir. Burada r dinamik halde zamanla değişen sistem deplasmanı sayısını gösterir. Parçalanmış matrisler halinde (1.28) denklemi

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K_{11}^{r\times r}} & \boldsymbol{K_{12}^{r\times (m-r)}} \\ \boldsymbol{K_{21}^{(m-r)\times r}} & \boldsymbol{K_{22}^{(m-r)\times (m-r)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{D_1^{r\times 1}} \\ \boldsymbol{D_2^{(m-r)\times 1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P_1^{r\times 1}} \\ \boldsymbol{P_2^{(m-r)\times 1}} \end{bmatrix} \tag{1.29}$$

(1.29) denklemi matris çarpımları yapılarak iki terim halinde yazılırsa

$$\boldsymbol{K_{11} D_1} + \boldsymbol{K_{12} D_2} = \boldsymbol{P_1} \tag{1.30}$$

$$\boldsymbol{K_{21} D_1} + \boldsymbol{K_{22} D_2} = \boldsymbol{P_2} = \boldsymbol{0} \tag{1.31}$$

bulunur.

$$\boldsymbol{K_{21}} = \boldsymbol{K_{12}^T} \tag{1.32}$$

olduğu da düşünülerek (1.31) denkleminden $\boldsymbol{D_2}$ çözülüp (1.30) da yerine konulursa

$$\boldsymbol{K^* D_1} = \boldsymbol{P_1} \tag{1.33}$$

elde edilir. Burada

$$\boldsymbol{K^*} = \boldsymbol{K_{11}} - \boldsymbol{K_{12} K_{22}^{-1} K_{12}^T} \tag{1.34}$$

olarak hesaplanan $r \times r$ mertebesinde bir matristir.

Çok Kütleli Bir Sistemin Hareketi: Sistemde r tane ayrı kütle bulunsun $(m_1, m_2, ...m_r)$. Bunların dinamik halde yapabilecekleri deformasyonlar ise $x_1, x_2, ...x_r$ ile gösterilsin. Bu kütleler için ayrı ayrı hareket denklemleri

$$m_1 \ddot{x}_1 = -P_1^*, \quad m_2 \ddot{x}_2 = -P_2^*, ... \quad m_r \ddot{x}_r = -P_r^* \tag{1.35}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\ddot{x_1}$ in zamana göre ikinci türevini göstermektedir. $-P_1^*$ ve $-P_2^*$ ise atalet kuvvetleridir. (1.33) denkleminde

$$\boldsymbol{D_1} = \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_r \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P_1} = \begin{bmatrix} -m_1 \ddot{x}_1 \\ -m_2 \ddot{x}_2 \\ . \\ . \\ -m_r \ddot{x}_r \end{bmatrix} \tag{1.36}$$

yazılarak

$$\boldsymbol{M \ddot{X}} = -\boldsymbol{K^*} \tag{1.37}$$

denklemi elde edilir. Burada $\boldsymbol{M}$ sistemin kütle matrisidir ve

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & . & . & . \\ 0 & m_2 & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & m_r \end{bmatrix} \tag{1.38}$$

şeklinde tanımlanır.

2. BİR YAPININ TİTREŞİMLERİNİN KONTROLU İÇİN GERİ BESLEMELİ BİR KAPALI ÇEVRİM

Burada çok kütleli bir çerçeve sistemin önce tek serbestlik dereceli bir kütle yatay sistemine indirgenişi bir örnek problem üzerinde açıklanacaktır. Ancak izlenen yol geneldir ve her çerçeveye uygulanabilir. Seçilen çerçeve sistemi Şekil 2.1 de gösterilmiştir. Burada X ekseni kağıt düzlemine dik alınmıştır ve A noktasına Y ekseni doğrultusunda $P = 100000N$ luk bir yatay yük yüklensin. Çerçevede A ve B de iki eşit $m = 180kg$ kütlesinin olduğuda kabul edilmiştir. Kesitte

$$I_x = 4585.33cm^4, \quad I_y = 20000cm^4$$

ve kesitin alanı ile elastisite modulü

$$F = 76cm^2, \quad E = 20000000N/cm^2$$

olarak bulunur. Çubuklar DA veya 1, AB veya 2 ve BC veya 3 çubuğu olarak isimlendirilmişlerdir.
Çubuk dönüşüm matrisleri ise q_i (i) numaralı çubuk için koordinat dönüşüm matrisini göstermek üzere (1.14) ve (1.15) den

$$q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

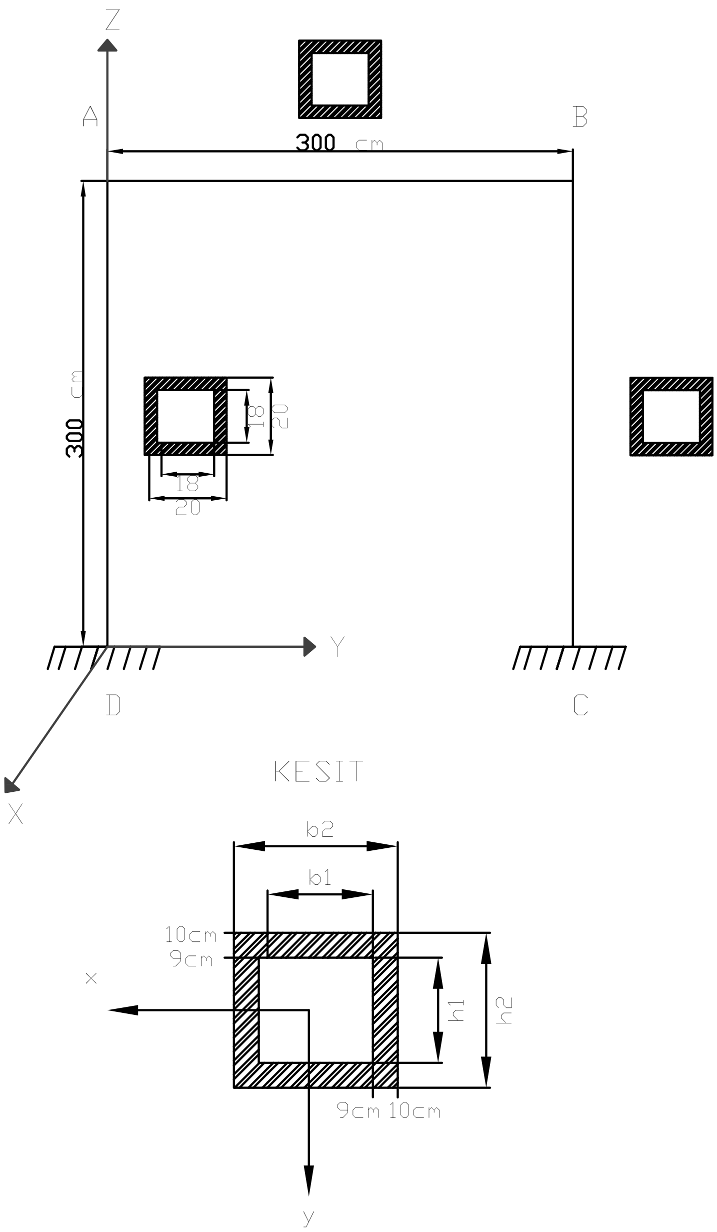
$$q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanmışlardır. Herhangi bir çubuğa ait $\boldsymbol{Q_i}$ dönüşüm matrisi ise

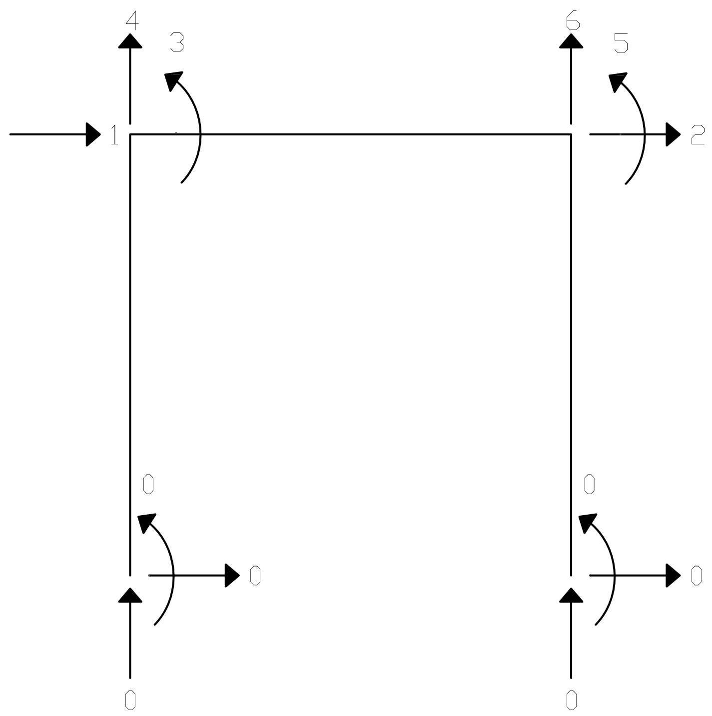
$$Q_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q_i^{3\times3}} & \mathbf{0^{3\times3}} \\ \mathbf{0^{3\times3}} & \boldsymbol{q_i^{3\times3}} \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanmışlardır.



Şekil 2.1 Örnek problemdeki düzlem çerçeve

Sistemin serbestlikleri ise Şekil 2.2 de gösterildiği gibi numaralanmıştır.



Şekil 2.2 Sistem serbestliklerinin numaralanması

Şekil 2.2 deki numaralamaya ve daha önce kararlaştırılan çubuk numaralarına göre kod numaraları matrisi

$$kn = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 & 6 \\ 5 & 2 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

olacaktır. Çubuk rijitlik matrisleri $\boldsymbol{k_{xyz}}$ ler çubuk koordinatlarındadır. (1.13) den her çubuk için elde edilir. Sonra her çubuğun $\boldsymbol{Q_i}$ dönüşüm matrisi ve $\boldsymbol{k_{xyz}}$ çubuk rijitlik matrisleri kullanılarak (1.27) denklemi yardımı ile her çubuğun sistem koordinatlarında $\boldsymbol{k_{XYZ}}$ rijitlik matrisi bulunur. Bu matrisler sistem rijitlik matrisine kod numaraları matrisi yardımı ile (1.27) denkleminden sonra anlatıldığı gibi yerleştirilerek $\boldsymbol{K_{XYZ}}$ sistem rijitlik matrisi bulunur. Bu 6×6 mertebesinde bir matristir. Örnek sistemde bu matris aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$K = 10^4 \begin{bmatrix} 51.074 & -50.667 & 61.138 & 0 & 0 & 0 \\ -50.667 & 51.074 & 0 & 0 & 61.138 & 0 \\ 61.138 & 0 & 24455 & 61.138 & 6113.8 & -61.138 \\ 0 & 0 & 61.138 & 51.074 & 61.138 & -0.40758 \\ 0 & 61.138 & 6113.8 & 61.138 & 24455 & -61.138 \\ 0 & 0 & -61.138 & -0.40758 & -61.138 & 51.074 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Ancak bu matrisde beş anlamlı dijit gösterilmiştir. Şimdi (1.28) denklemi

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{D}^{\mathbf{1\times 6}} = \begin{bmatrix} 100000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

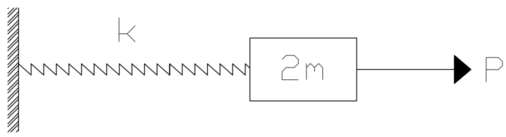
halini alır. Sistem deplasmanları bu denklem çözülerek

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1.7646 \\ 1.7548 \\ -0.00357 \\ 0.00844 \\ -0.00354 \\ -0.00844 \end{bmatrix} cm \tag{2.4}$$

olarak elde edilirler. Burada birinci amaç bu sistemi tek serbestlik dereceli bir kütle-yay sistemine indirgemektir. $P = 100000N$ luk bir kuvvetin etkisi altında $2m = 360kg$ kütleli sistemde A noktasının yatay deplasmanı $1.7646cm$ olduğuna göre Şekil 2.3 deki sistemin yay katsayısı

$$k = \frac{P}{D_1} \rightarrow k = \frac{100000}{1.7646} = 56670N/cm \tag{2.5}$$

olarak hesaplanabilir.



Şekil 2.3 Bir serbestlik dereceli sistem

Dinamik halde sistemde Şekil 2.2 de gösterilen serbestliklerden sadece 1 ve 2 numaralı serbestliklerin kalacağı kabul edilir ve (1.34) de tanımlanan $\boldsymbol{K^*}$ indirgenmiş rijitlik matrisi hesaplanırsa

$$\boldsymbol{K^*} = 10^6 \begin{bmatrix} 0.50911 & -0.50626 \\ -0.50626 & 0.50911 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

olarak hesaplanır. Bu durumda

$$\boldsymbol{K}^*\bar{\boldsymbol{D}} = \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{D}} = \begin{bmatrix} \bar{D}_1 \\ \bar{D}_2 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

denklem takımı çözülürse

$$\bar{\boldsymbol{D}} = \begin{bmatrix} 1.7646 \\ 1.7548 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

olarak yeni sistemin deplasmanları bulunur ki daha önce bulunan değerlerle aynıdır. Dolayısıyla indirgenmiş sisteme karşılık gelen tek serbestlik dereceli sistemin yay katsayısı da daha önce bulunan sistemin yay katsayısı ile aynı olacaktır.

Şimdi Şekil 2.3 deki sistemde P yerine bir f(t) kuvveti geldiği zaman bu sistemin hareket denklemini yazalım

$$2m\ddot{x} = -kx + f(t) \tag{2.9}$$

Bu denkleme Laplace transformu uygulanırsa

$$\overline{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \tag{2.10}$$

olmak üzere

$$2ms^2\overline{x} + k\overline{x} = \overline{f}(s) \tag{2.11}$$

bulunur. Burada

$$\overline{x}(s) = \int_0^\infty e^{-st} x(t) dt \tag{2.12}$$

şeklinde $x(t)$ fonksiyonunun Laplace transformudur. (2.11) den denkleminden

$$\overline{x}(s) = \frac{\overline{f}(s)}{2ms^2 + k} \tag{2.13}$$

şeklinde $f(s)$ girişine karşı sistem cevabı bulunur.
Şimdi $f(t)$ in belli bir fonksiyon olması halinde $x(t)$ in nasıl bulunabileceği incelenecektir.

$$\overline{x}(s) = \overline{g}(s)\overline{f}(s) \tag{2.14}$$

ise

$$\overline{x}(t) = \int_0^t g(t-\tau) f(\tau) d\tau \tag{2.15}$$

şeklinde $g(t)$ ve $f(t)$ nin konvolüsyonu olarak bulunur. (2.13) den

$$\overline{g}(s) = \frac{1}{2ms^2 + k} \tag{2.16}$$

olduğu anımsanarak

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[g(s)] = \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{2ms^2 + k}) = \frac{1}{2m}\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2 + \frac{k}{2m}}$$

$$= \frac{1}{2m}\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(s + i\sqrt{\frac{k}{2m}})}\ \frac{1}{(s - i\sqrt{\frac{k}{2m}})}] \tag{2.17}$$

şekline getirilebilir.

$$\frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)} \tag{2.18}$$

ifadesinin invers transformunun

$$\frac{1}{(s_1 - s_2)}e^{s_1 t} + \frac{1}{(s_2 - s_1)}e^{s_2 t} \tag{2.19}$$

olduğu bilindiğine göre (2.17) den $g(t)$ fonksiyonu

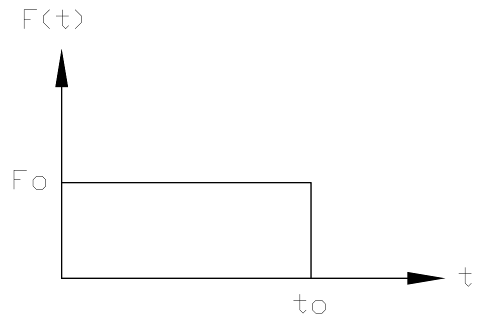
$$g(t) = \frac{1}{2m}[e^{i\sqrt{\frac{k}{2m}}t}\frac{1}{2i\sqrt{\frac{k}{2m}}} - e^{-i\sqrt{\frac{k}{2m}}t}\frac{1}{2i\sqrt{\frac{k}{2m}}}]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2km}}[\frac{e^{i\sqrt{\frac{k}{2m}}t} - e^{-i\sqrt{\frac{k}{2m}}t}}{2i}] = \frac{1}{\sqrt{2km}}\sin\sqrt{\frac{k}{2m}}t \tag{2.20}$$

olarak hesaplanır. $x(t)$ cevabı ise

$$x(t) = \int_0^t g(t - \tau)f(\tau)d\tau = \frac{1}{\sqrt{2km}}\int_0^t \sin\sqrt{\frac{2k}{m}}(t - \tau)f(\tau)d\tau \tag{2.21}$$

olarak hesaplanır. Örnek olarak $f(t)$ fonksiyonu Şekil 2.4 deki gibi seçilmiştir.



Şekil 2.4 Dinamik dış etkinin zamanla değişimi

Bu $f(t)$ fonksiyonu için $x(t)$ cevabı

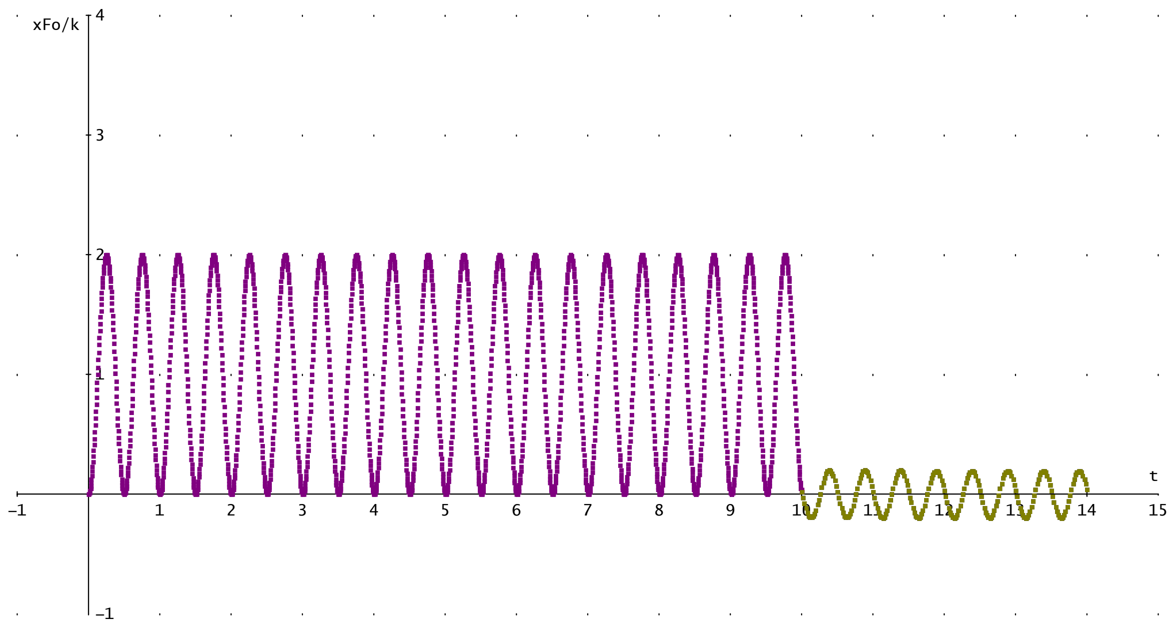
$t \leq t_o$ için

$$x(t) = \frac{F_o}{\sqrt{2km}} \int_0^t \sin\sqrt{\frac{k}{2m}}(t-\tau)d\tau \tag{2.22}$$

$t \geq t_0$ için

$$x(t) = \frac{F_o}{\sqrt{2km}} \int_0^{t_o} \sin\sqrt{\frac{k}{2m}}(t-\tau)d\tau \tag{2.23}$$

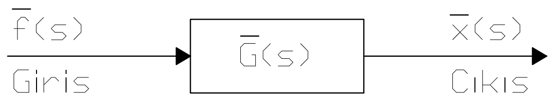
$t_o = 10sn$ alınarak Şekil 2.1 de verilen sistemde cevap eğrisi Şekil 2.5 de çizilmiştir.



Şekil 2.5 Sönümsüz sistemde cevap eğrisi

Şekil 2.3 deki sistemin transfer fonksiyonu tanımlanacaktır. Bunun için $f(t)$ ve $x(t)$ fonksiyonlarının Laplace transformları gözönüne alınmaktadır. Burada $\bar{f}(s)$

ve $\bar{x}(s)$ bu fonksiyonların Laplace trnasformları olmak üzere aralarındaki ilişki Şekil 2.6 daki bir blok elemanlı açık çevrimle gösterilebilir.



Şekil 2.6 Açık çevrimli blok diyagramı

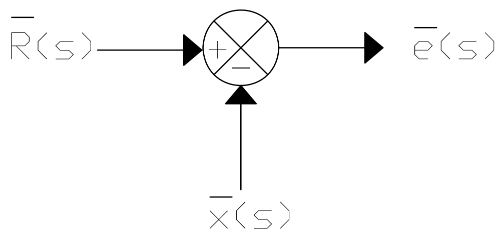
Blok elemanda okların yönü blok elemana yönlenmiş veya blok elemanı terkeder doğrultuda olmalıdır.

$$\bar{x}(s) = \bar{G}(s)\bar{f}(s) \tag{2.24}$$

bağıntısında $\bar{G}(s)$ transfer fonksiyonudur. Şekil 2.3 deki sistemde

$$\bar{G}(s) = \frac{1}{2ms^2 + k} \tag{2.25}$$

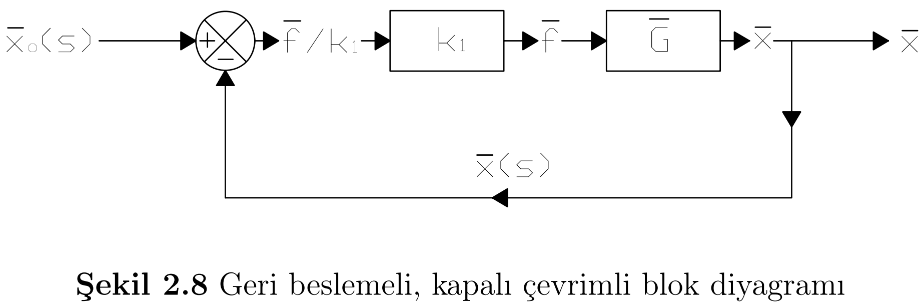
olacaktır. Kapalı bir çevrim elde edebilmek için bir cebirsel toplama elemanına da ihtiyaç vardır. Şekil 2.7 deki gibi bir cebirsel toplama elemanı düşünülürse



Şekil 2.7 Cebirsel toplama elemanı

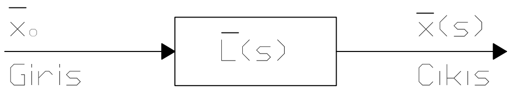
$$\bar{R}(s) - \bar{x}(s) = \bar{e}(s) \tag{2.26}$$

olacaktır. Burada $\bar{R}(s)$ e referans büyüklüğü adı verilir. Bu sistemde referans büyüklüğünün de $\bar{f}(s)$ ile aynı boyutta seçilmesi gerekir. Bunu sağlamak yerine karşılaştırma elemanından çıkan büyüklüğe $\bar{f}(s)/k$ denirse, sistem geri beslemeli formunda Şekil 2.8 de gösterilen bir blok diyagramına sahip olacaktır.



Şekil 2.8 Geri beslemeli, kapalı çevrimli blok diyagramı

Şekil 2.8 deki diyagram açık çevrimli halde Şekil 2.9 daki formda da çizilebilir. Burada $\bar{x}_o(s)$ referans yer değiştirmesidir.



Şekil 2.9 Açık çevrimli blok diyagramı

$\bar{L}(s)$ i hesap etmek için bir çevrim sonrası geçerli olmak üzere

$$\bar{x}_o(s) - \bar{x}(s) = \frac{\bar{f}(s)}{k_1}$$

$$k_1[\bar{x}_o(s) - \bar{x}(s)] = \bar{f}(s)$$

$$\bar{G}(s)\bar{f}(s) = \bar{x}(s) \tag{2.27}$$

bu üç denklemden

$$\bar{x}(s) = \frac{\bar{G}(s)k_1}{1 + \bar{G}(s)k_1}\bar{x}_o(s) \tag{2.28}$$

şeklinde bulunarak kapalı çevrimin transfer fonksiyonu $\bar{L}(s)$

$$\bar{L}(s) = \frac{\bar{G}(s)k_1}{1 + \bar{G}(s)k_1} \tag{2.29}$$

olarak bulunur. Burada kapalı çevrim, birim dönüşlü alınmıştır.
A noktasının içinde bulunduğu bir sönüm kutusu düşünülürse;
$x(t) \leq x_o$ ise Şekil 2.5 deki cevap eğrisi devam eder. $x(t) \geq x_o$ ise $-c\dot{x}$ gibi bir kuvvet sisteme etkisin. Şekil 2.5 deki cevap eğrisinde

$$t \leq t_o, \quad ise \quad x(t) = \frac{F_o}{k}[1 - \cos(\sqrt{\frac{k}{2m}}t)] \rightarrow \left|\frac{x(t)}{F_o/k}\right|_{max} = 2 \tag{2.30}$$

$$t \geq t_o, \quad ise \quad x(t) = \frac{F_o}{k}[\cos(\sqrt{\frac{k}{2m}}(t - t_o)) - \cos(\sqrt{\frac{k}{2m}}t)]$$

$$\rightarrow t_o = 10sn, \quad ise \quad \left|\frac{x(t)}{F_o/k}\right|_{max} = 0.2 \tag{2.31}$$

bulunur. Sönüm PD (bu orantı+diferansiyel tip kontrol organıdır) tipi bir organında kullanılmıştır. Kontrol organı için genel olarak aşağıdaki blok diyagramı çizilebilir.

Şekil 2.10 Açık çevrimli blok diyagramı

$e(t)$ genellikle hata diye isimlendirilir ve bunlar arasındaki ilişki yine genel olarak

$$m(t) = Ke(t) + K\tau_d \frac{de(t)}{dt} \tag{2.32}$$

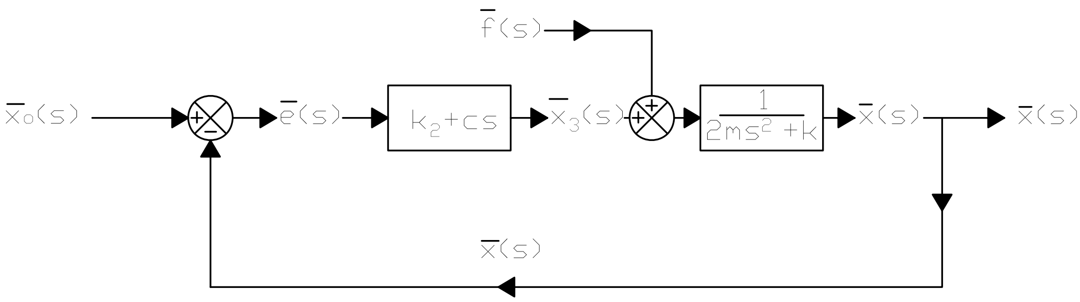
şeklindedir. Burada $K\tau_d$ kontrol organına ait sabitlerdir. $e(t)$ nin $x_o - x(t)$ olduğu düşünülür ve

$$K = \frac{1}{k_2}, \qquad \tau_d = -c \tag{2.33}$$

seçilirse $m(t)$ ve onun Laplace transformu $\bar{m}(s)$ (2.32) den

$$m(t) = \frac{1}{k_2}[e(t) + c\frac{de(t)}{dt}] \rightarrow \bar{m}(s) = \frac{1}{k_2}[\bar{e}(s) + c\, s\, e(s)] = \frac{\bar{e}(s)}{k_2}(1 + cs) \tag{2.34}$$

olarak elde edilirler. Sonuçta kontrol elemanının kullanıldığı ve $\bar{f}(s)$ in bir dış etki olduğu halde kapalı çevrim blok diyagramı Şekil 2.11 deki gibidir.



Şekil 2.11 Geri beslemeli, kapalı çevrimli blok diyagramının son hali

Bu kapalı çevrime karşı gelen açık çevrim transfer fonksiyonu aşağıdaki yol izlenerek bulunabilir.

$$[\bar{f(s)} + \bar{x}_3(s)]\frac{1}{2ms^2+k} = \bar{x}(s) \tag{2.35}$$

$$(k_2 + c\,s)\bar{e}(s) = \bar{x}_3(s) \tag{2.36}$$

$$\bar{x}_o(s) - \bar{x}(s) = \bar{e}(s) \tag{2.37}$$

(2.35), (2.36) ve (2.37) denklemlerinden $\bar{e}(s)$ ve $\bar{x}_3(s)$ yok edilirse

$$x(t) \leq x_o, \quad \bar{x}(s) = \frac{\bar{f}(s)}{2ms^2+k} \tag{2.38}$$

$$\bar{x}(s) = \bar{x}_o(s)\frac{k_2+cs}{2ms^2+k+k_2+c\,s} + \bar{f}(s)\frac{1}{2ms^2+k+k_2+c\,s} \tag{2.39}$$

sonuçları elde edilir. Şimdi sorun $\bar{x}_o(s)$ in $x(t)$ nin sınırlanması için nasıl seçileceğidir. Başlangıç olarak

$$\bar{x}_o(t) = \frac{F_o}{k} \tag{2.40}$$

ve $f(t)$ fonksiyonuda Şekil 2.4 deki gibi olsun. Ayrıca k_2 de k e eşit olsun. Bu kabuller altında (2.39) ifadesi

$$\bar{x}(s) = \frac{\bar{f}(s)}{2m}\frac{1}{s^2+\frac{c}{2m}s+\frac{k}{m}} + \frac{\bar{x}_o(s)}{2m}\frac{k+cs}{s^2+\frac{c}{2m}s+\frac{k}{m}}$$

$$\bar{x}(s) = \frac{\bar{f}(s)}{2m}\frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)} + \frac{\bar{x}_o(s)}{2m}\frac{k+cs}{(s-s_1)(s-s_2)} \tag{2.41}$$

şeklinde yazılabilir. s_1 ve s_2 kökleri aşağıda verilmiştir.

$$s_{1,2} = -\frac{c}{4m} \mp \sqrt{(\frac{c}{4m})^2 - \frac{k}{m}} \tag{2.42}$$

Önce

$$\bar{g}_1(s) = \frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)} \tag{2.43}$$

fonksiyonunun invers transformu

$$g_1(t) = \frac{e^{s_1 t}}{(s_1 - s_2)} + \frac{e^{s_2 t}}{(s_2 - s_1)} = \frac{e^{s_1 t} - e^{s_2 t}}{2\sqrt{(\frac{c}{4m})^2 - \frac{k}{m}}} \tag{2.44}$$

olacaktır. (2.41) ifadesi

$$\bar{x}(s) = \frac{\bar{f}(s)}{2m}\bar{g}_1(s) + \frac{\bar{x}_o(s)}{2m}\bar{g}_2(s) \tag{2.45}$$

olarak yazılırsa bunun invers transformu

$$x(t) = \frac{1}{2m}[\int_0^t f(\tau)g_1(t-\tau)d\tau + \int_0^t x_o(\tau)g_2(t-\tau)d\tau] \tag{2.46}$$

şeklinde hesaplanacaktır. Burada

$$\bar{g}_2(s) = \frac{k(1 + s\frac{c}{k})}{(s - s_1)(s - s_2)} \tag{2.47}$$

ve invers transformu

$$g_2(t) = \frac{k}{2\Delta}e^{-\frac{c}{4m}t}[e^{\Delta t}(1 + \frac{c}{k}s_1) - e^{-\Delta t}(1 + \frac{c}{k}s_2)]$$

$$\Delta = \sqrt{(\frac{c}{4m})^2 - \frac{k}{m}} \tag{2.48}$$

olarak bulunur. Ancak (2.44) ve (2.48) ifadeleri s_1 ve s_2 köklerinin eşit olmaması halinde geçerlidir. Bu köklerin karmaşık veya reel olmaları halinde de (2.44) ve (2.48) doğrudur. Köklerin eşit olması halinde $g_1(t)$ ve $g_2(t)$ fonksiyonları aşağıdaki şekilde hesaplanacaktır.

$$g_1(t) = \frac{e^{st}}{(s - s_1)^2}$$

$$g_1(t) = \lim_{s \to s_1} \frac{d}{ds}[(s - s_1)^2 \frac{e^{st}}{(s - s_1)^2}] = \lim_{s \to s_1}[te^{st}]$$

$$g_1(t) = te^{s_1 t}$$

$$g_2(t) = \frac{(k+cs)e^{s_1 t}}{(s-s_1)^2}$$

$$g_2(t) = \lim_{s \to s_1} \frac{d}{ds}[(s-s_1)^2 \frac{(k+cs)e^{st}}{(s-s_1)^2}] = \lim_{s \to s_1}[ce^{st} + (k+cs)te^{st}]$$

$$g_2(t) = ke^{s_1 t}[t(1 + \frac{c}{k}s_1) + \frac{c}{k}]$$

$$s_1 = -\frac{c}{4m}, \quad c = 4m\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.49}$$

Bu durum sistem için kritik sönüme karşı gelir. Bu sistem için kritik sönüm hesaplanırsa

$$c_k = 12775 \, N \, sn/cm \tag{2.50}$$

olarak bulunmuştur. Önce Δ nın karmaşık olduğu kabul edilerek zayıf sönüm hali için hesap yapılacaktır. Bu durumda Δ karmaşık olur ve s_1 ve s_2 kökleri

$$s_1 = a + ib, \quad s_2 = a - ib \tag{2.51}$$

$$a = -\frac{c}{4m}, \quad b = \sqrt{\frac{k}{m} - (\frac{c}{4m})^2} \tag{2.52}$$

olarak kısaltılabilir. $g_1(t)$ ve $g_2(t)$ fonksiyonlarının invers transformları (2.51) ve (2.53) ifadeleri kullanılarak

$$s_1 - s_2 = a + ib - a + ib = 2ib \tag{2.53}$$

$$g_1(t) = \frac{e^{s_1 t}}{(s_1 - s_2)} + \frac{e^{s_2 t}}{(s_2 - s_1)} = \frac{e^{s_1 t} - e^{s_2 t}}{(s_1 - s_2)}$$

$$= \frac{e^{(a+ib)t} - e^{(a-ib)t}}{2ib} = \frac{e^{at}}{b}\frac{e^{ibt} - e^{-ibt}}{2i} = \frac{e^{at}}{b}\sin bt \tag{2.54}$$

$$g_2(t) = e^{s_1 t}[\frac{k(1+s_1\frac{c}{k})}{s_1 - s_2}] + e^{s_2 t}[\frac{k(1+s_2\frac{c}{k})}{s_2 - s_1}]$$

$$= e^{(a+ib)t}[\frac{k(1+(a+ib)\frac{c}{k})}{2ib}] - e^{(a-ib)t}[\frac{k(1+(a-ib)\frac{c}{k})}{2ib}]$$

$$= e^{at}[(\frac{k+ac}{b})\frac{(e^{ibt} - e^{-ibt})}{2i} + c\frac{(e^{ibt} + e^{-ibt})}{2}]$$

$$= e^{at}[(\frac{k+ac}{b})\sin bt + c\cos bt] \qquad (2.55)$$

şeklinde elde edilirler.

Sonuçta cevap eğrileri (2.46), (2.54) ve (2.55) kullanılır ve $f(t)$ fonksiyonunun Şekil 2.4 de verilen formu da kullanılarak

$$x(t) = \frac{F_o}{2m}[(\frac{2}{b} + \frac{ac}{kb})\int_0^t (e^{a(t-\tau)}\sin(b(t-\tau)))d\tau$$

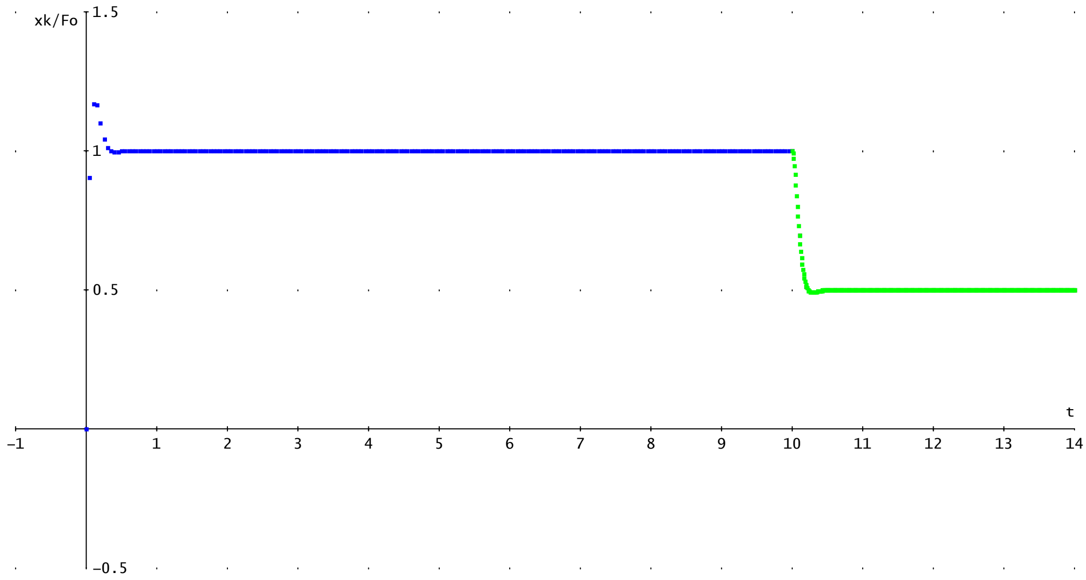
$$+\frac{c}{k}\int_0^t (e^{a(t-\tau)}\cos(b(t-\tau)))d\tau] \qquad t \le t_o \qquad (2.56)$$

$$x(t) = \frac{F_o}{2m}[\frac{1}{b}\int_0^{t_o} (e^{a(t-\tau)}\sin(b(t-\tau)))d\tau$$

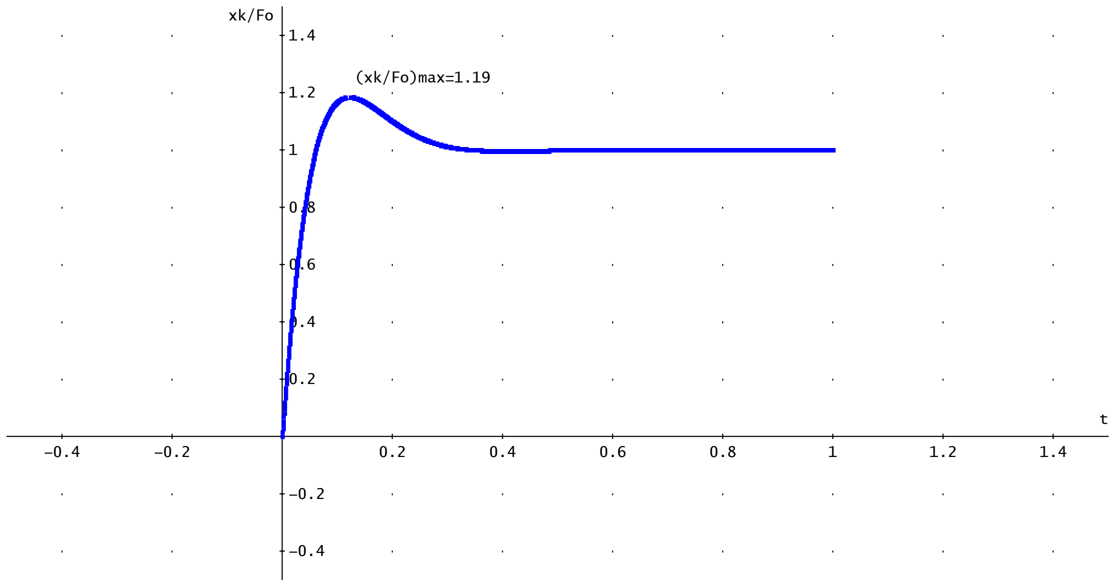
$$+(\frac{1}{b} + \frac{ac}{kb})\int_0^t (e^{a(t-\tau)}\sin(b(t-\tau)))d\tau$$

$$+\frac{c}{k}\int_0^t (e^{a(t-\tau)}\cos(b(t-\tau)))d\tau] \qquad t \ge t_o \qquad (2.57)$$

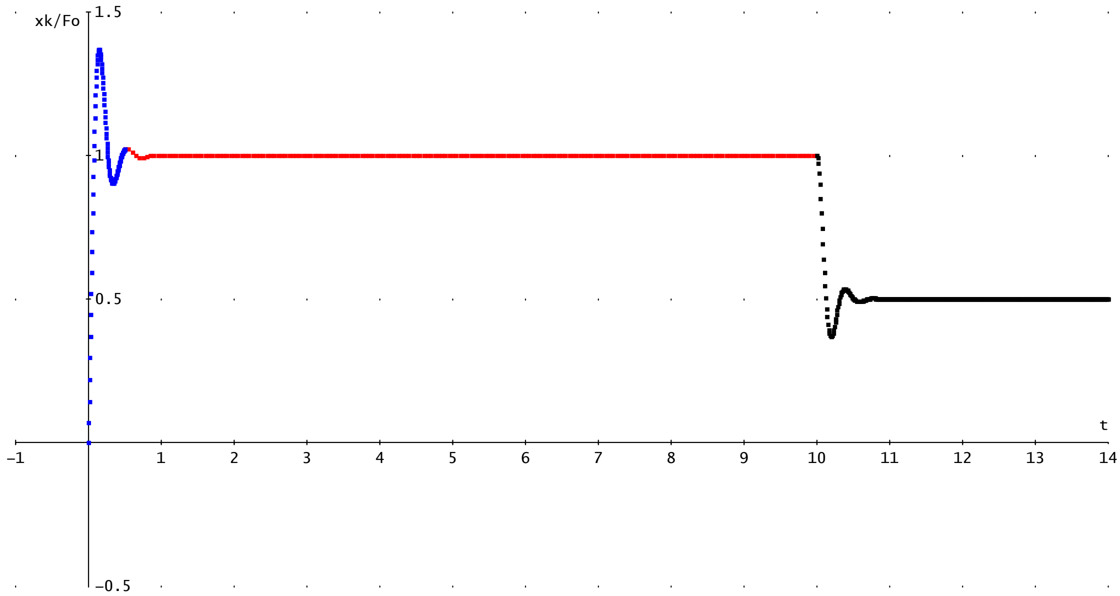
şeklinde cevap eğrisi elde edilir. Bu eğriler, $k = 56670N/cm$, $m = 180kg$ ve $c = 10000Nsn/cm$ ve $c = 5000Nsn/cm$ için Şekil 2.12 ve Şekil 2.14 de sırasıyla çizilmiştir. Ayrıca eğrilerdeki maksimum noktaların görülebilmesi için sırasıyla Şekil 2.13 ve Şekil 2.15 diğer grafiklerin devamı olarak aşağıdaki gibidir.



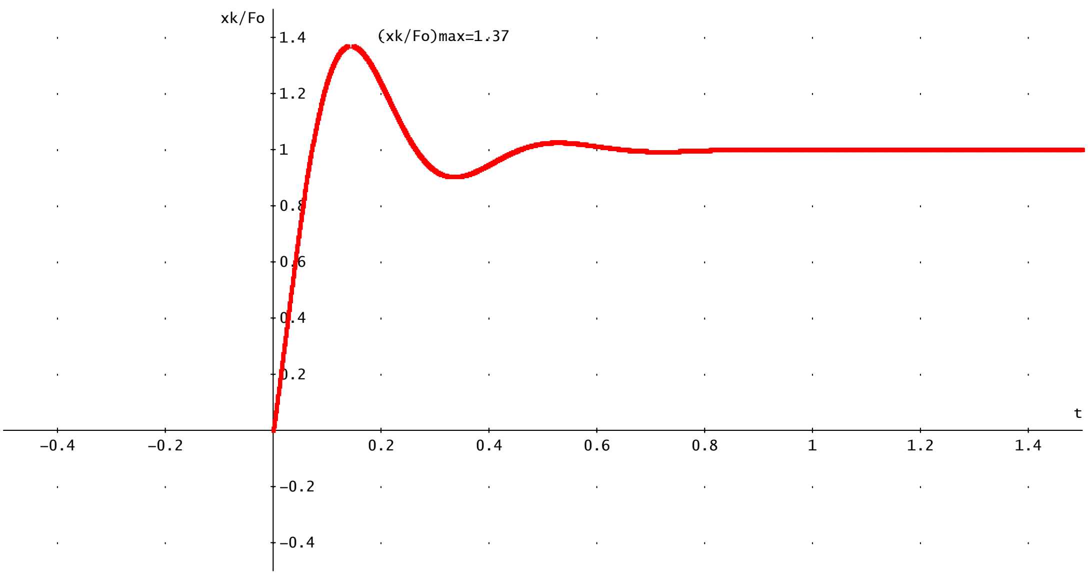
Şekil 2.12 $k_2 = k$ ve $c = 10000Nsn/cm$ için cevap eğrileri



Şekil 2.13 $k_2 = k$ ve $c = 10000Nsn/cm$ için cevap eğrileri



Şekil 2.14 $k_2 = k$ ve $c = 5000Nsn/cm$ için cevap eğrileri



Şekil 2.15 $k_2 = k$ ve $c = 5000Nsn/cm$ için cevap eğrileri

Köklerin eşit olması durumuna karşılık gelen kritik sönüm için hesap yapılacaktır.

$$x(t) = \frac{F_o}{2m}[-2\int_0^t e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}(t-\tau)}(t-\tau)d\tau$$

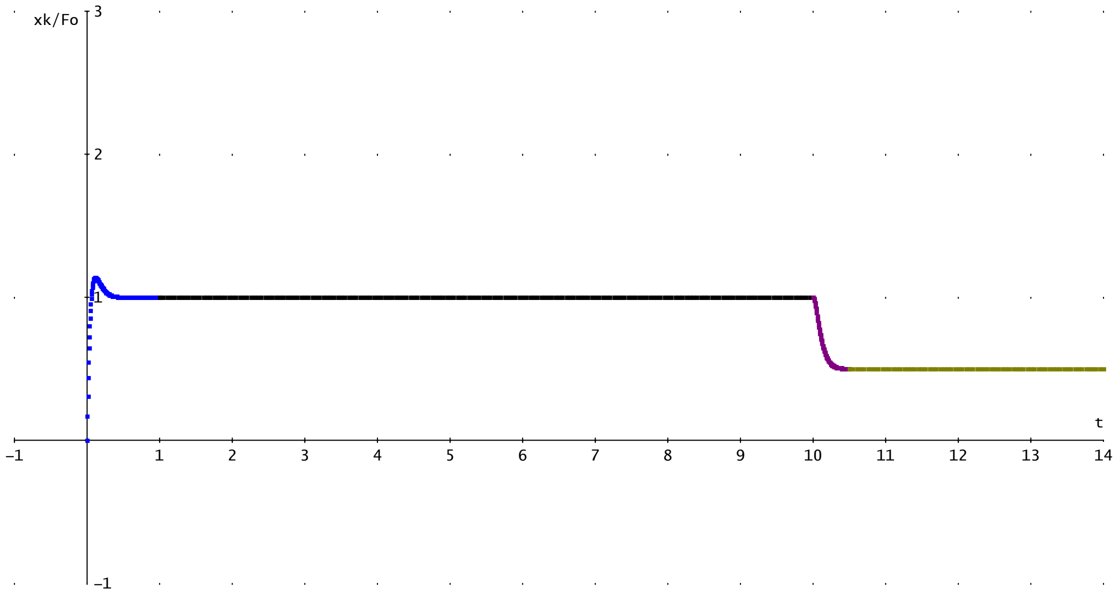
$$+4\sqrt{\frac{m}{k}}\int_0^t e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}(t-\tau)}d\tau] \qquad t \leq t_o \tag{2.58}$$

$$x(t) = \frac{F_o}{2m}[\int_0^{t_o} e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}(t-\tau)}(t-\tau)d\tau$$

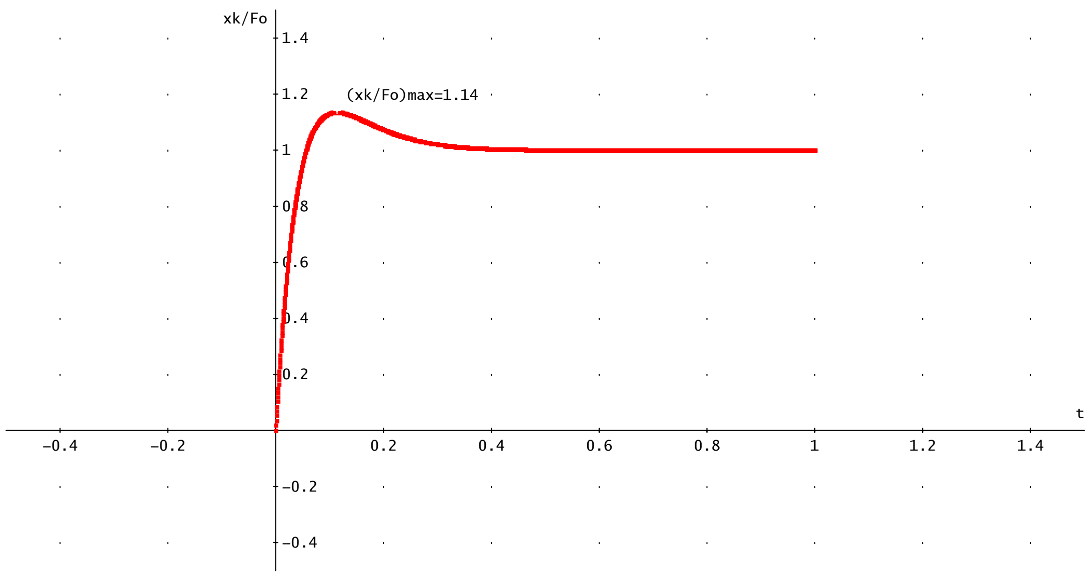
$$+4\sqrt{\frac{m}{k}}\int_0^t e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}(t-\tau)}d\tau$$

$$-3\int_0^t e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}(t-\tau)}(t-\tau)d\tau] \qquad t \geq t_o \tag{2.59}$$

şeklinde cevap eğrisi elde edilir. Bu eğriler, $k = 56670N/cm$, $m = 180kg$ ve $c_k = 12775Nsn/cm$ için Şekil 2.16 de çizilmiştir. Ayrıca eğrilerdeki maksimum noktaların görülebilmesi için diğer grafik Şekil 2.17 deki gibidir.



Şekil 2.16 $c_k = 12775Nsn/cm$ için cevap eğrileri



Şekil 2.17 $c_k = 12775Nsn/cm$ için cevap eğrileri

Şimdi k_2 de $2k$ e eşit olsun. Bu kabuller altında (2.39) ifadesi

$$\bar{x}(s) = \bar{x}_o(s)\frac{2k + cs}{2ms^2 + 3k + cs} + \bar{f}(s)\frac{1}{2ms^2 + 3k + cs}$$

$$\bar{x}(s) = \frac{\bar{f}(s)}{2m}\frac{1}{s^2 + \frac{c}{2m}s + \frac{3k}{2m}} + \frac{\bar{x}_o(s)}{2m}\frac{2k + cs}{s^2 + \frac{c}{2m}s + \frac{3k}{2m}}$$

$$\bar{x}(s) = \frac{\bar{f}(s)}{2m}\frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)} + \frac{\bar{x}_o(s)}{2m}\frac{2k + cs}{(s - s_1)(s - s_2)} \tag{2.60}$$

şeklinde yazılabilir. s_1 ve s_2 kökleri aşağıda verilmiştir.

$$s_{1,2} = -\frac{c}{4m} \mp \sqrt{(\frac{c}{4m})^2 - \frac{3k}{2m}} \tag{2.61}$$

(2.53) ve (2.61) ifadeleri kullanılarak $\bar{g}_1(s)$ ve $\bar{g}_2(s)$ fonksiyonlarının invers transformları

$$g_1(t) = \frac{e^{s_1 t}}{(s_1 - s_2)} + \frac{e^{s_2 t}}{(s_2 - s_1)} = \frac{e^{s_1 t} - e^{s_2 t}}{(s_1 - s_2)}$$

$$= \frac{e^{(a+ib)t} - e^{(a-ib)t}}{2ib} = \frac{e^{at}}{b}\frac{e^{ibt} - e^{-ibt}}{2i} = \frac{e^{at}}{b}\sin bt \tag{2.62}$$

$$g_2(t) = e^{s_1 t}[\frac{k(2 + s_1\frac{c}{k})}{s_1 - s_2}] + e^{s_2 t}[\frac{k(2 + s_2\frac{c}{k})}{s_2 - s_1}]$$

$$= e^{(a+ib)t}[\frac{k(2 + (a + ib)\frac{c}{k})}{2ib}] - e^{(a-ib)t}[\frac{k(2 + (a - ib)\frac{c}{k})}{2ib}]$$

$$= e^{at}[(\frac{2k + ac}{b})\frac{(e^{ibt} - e^{-ibt})}{2i} + c\frac{(e^{ibt} + e^{-ibt})}{2}]$$

$$= e^{at}[(\frac{2k + ac}{b})\sin bt + c\cos bt] \tag{2.63}$$

şeklinde elde edilirler. (2.46), (2.62) ve (2.63) ifadeleri ve $f(t)$ fonksiyonunun Şekil 2.4 deki formu kullanılarak zayıf sönüm hali için aşağıdaki cevap eğrileri elde edilir.

$$x(t) = \frac{F_o}{2m}[(\frac{3}{b} + \frac{ac}{kb}) \int_0^t (e^{a(t-\tau)} \sin(b(t-\tau)))d\tau$$

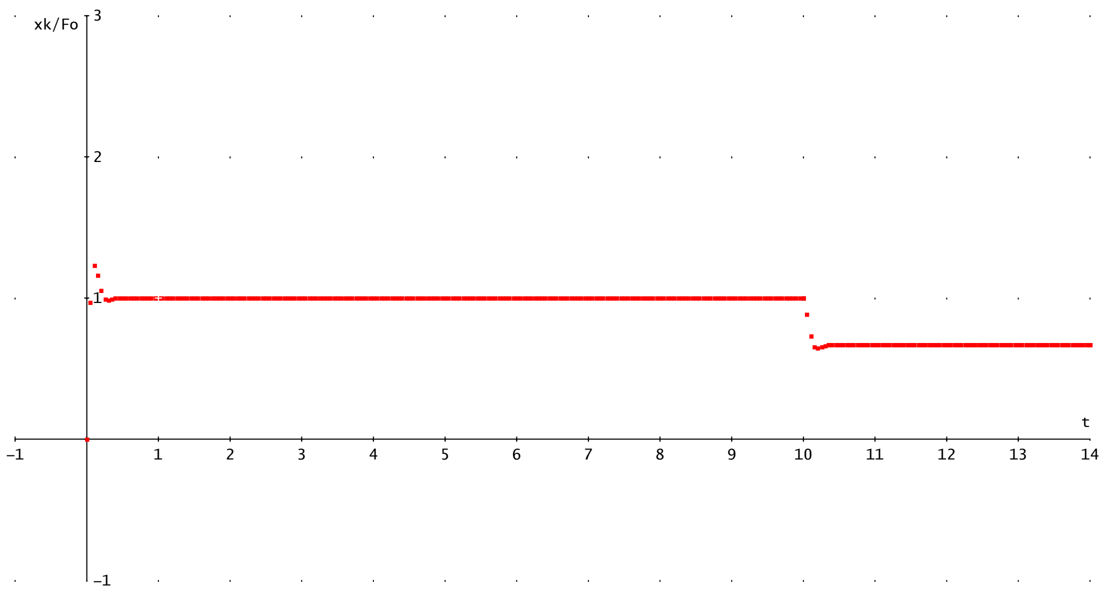
$$+\frac{c}{k} \int_0^t (e^{a(t-\tau)} \cos(b(t-\tau)))d\tau] \qquad t \leq t_o \tag{2.64}$$

$$x(t) = \frac{F_o}{2m}[\frac{1}{b} \int_0^{t_o} (e^{a(t-\tau)} \sin(b(t-\tau)))d\tau$$

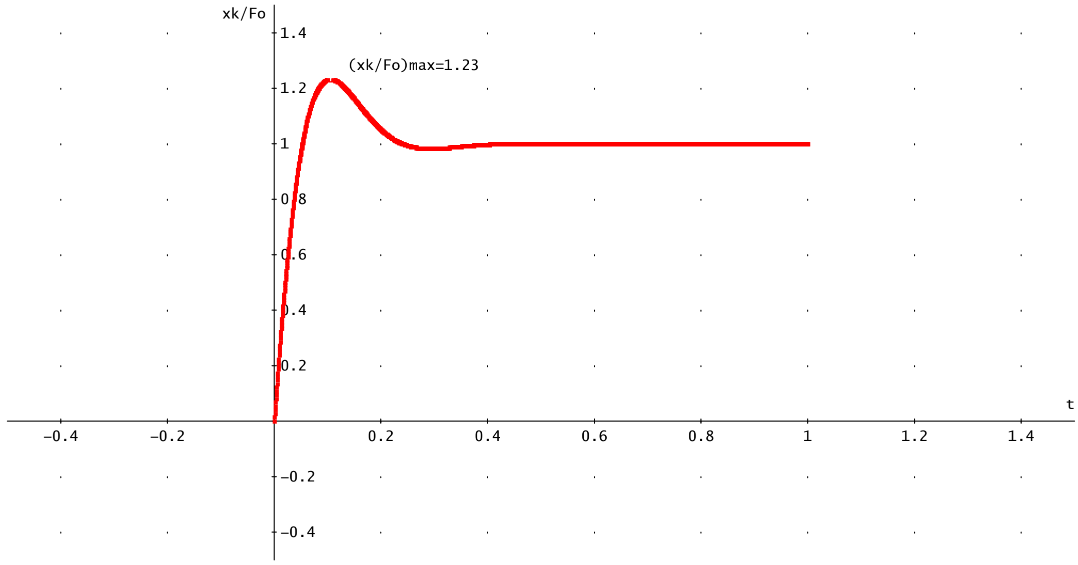
$$+(\frac{2}{b} + \frac{ac}{kb}) \int_0^t (e^{a(t-\tau)} \sin(b(t-\tau)))d\tau$$

$$+\frac{c}{k} \int_0^t (e^{a(t-\tau)} \cos(b(t-\tau)))d\tau] \qquad t \geq t_o \tag{2.65}$$

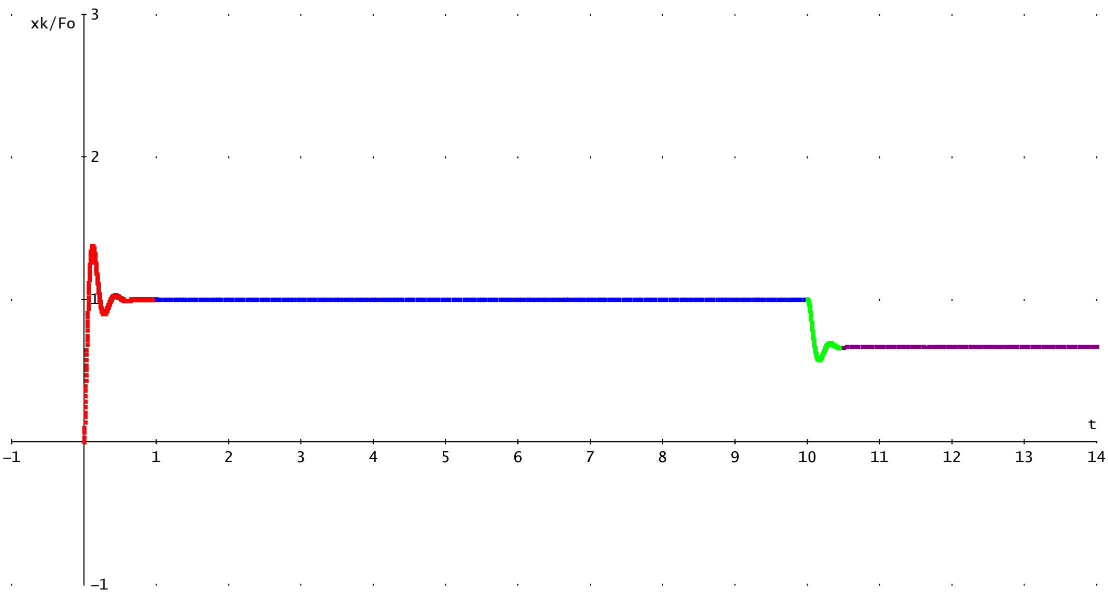
Bu eğriler, $k = 56670N/cm$, $m = 180kg$ ve $c = 10000Nsn/cm$ ve $c = 6000Nsn/cm$ için Şekil 2.18 ve Şekil 2.20 de sırasıyla çizilmiştir. Ayrıca eğrilerdeki maksimum noktaların görülebilmesi için diğer grafikler Şekil 2.19 ve Şekil 2.21 deki gibidir.



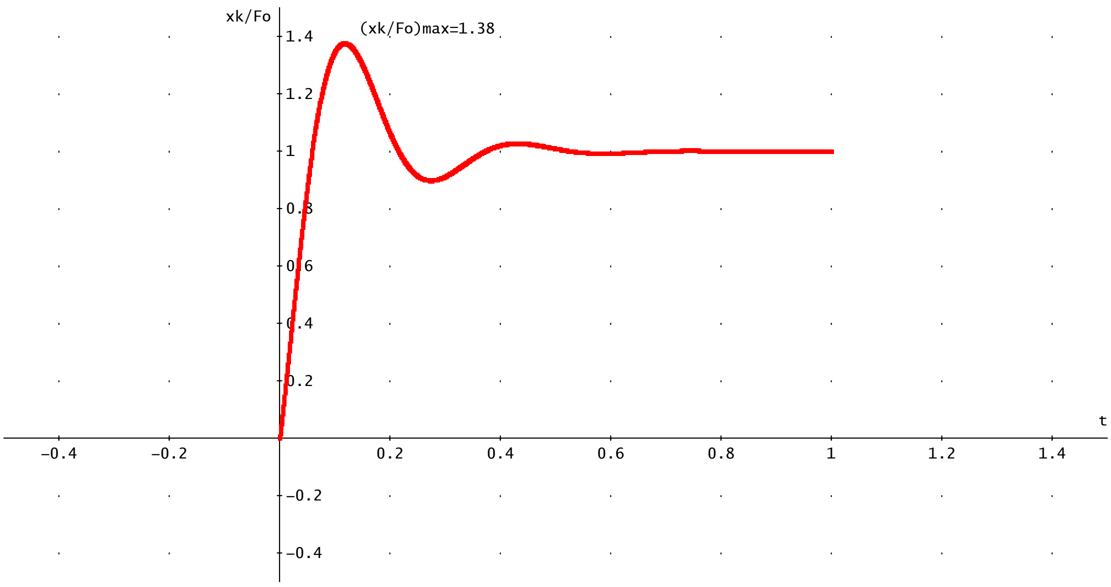
Şekil 2.18 $k_2 = 2k$ ve $c = 10000Nsn/cm$ için cevap eğrileri



Şekil 2.19 $k_2 = 2k$ ve $c = 10000 Nsn/cm$ için cevap eğrileri



Şekil 2.20 $k_2 = 2k$ ve $c = 6000 Nsn/cm$ için cevap eğrileri



Şekil 2.21 $k_2 = 2k$ ve $c = 6000Nsn/cm$ için cevap eğrileri

Şimdi k_2 de $\frac{k}{2}$ e eşit olsun. Bu kabuller altında (2.39) ifadesi

$$\bar{x}(s) = \bar{x}_o(s)\frac{0.5k + cs}{2ms^2 + 1.5k + cs} + \bar{f}(s)\frac{1}{2ms^2 + 1.5k + cs}$$

$$\bar{x}(s) = \frac{\bar{f}(s)}{2m}\frac{1}{s^2 + \frac{c}{2m}s + \frac{1.5k}{2m}} + \frac{\bar{x}_o(s)}{2m}\frac{0.5k + cs}{s^2 + \frac{c}{2m}s + \frac{1.5k}{2m}}$$

$$\bar{x}(s) = \frac{\bar{f}(s)}{2m}\frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)} + \frac{\bar{x}_o(s)}{2m}\frac{0.5k + cs}{(s - s_1)(s - s_2)} \tag{2.66}$$

şeklinde yazılabilir. s_1 ve s_2 kökleri aşağıda verilmiştir.

$$s_{1,2} = -\frac{c}{4m} \mp \sqrt{(\frac{c}{4m})^2 - \frac{1.5k}{2m}} \tag{2.67}$$

(2.53) ve (2.61) ifadeleri kullanılarak $\bar{g}_1(s)$ ve $\bar{g}_2(s)$ fonksiyonlarının invers transformları

$$g_1(t) = \frac{e^{s_1 t}}{(s_1 - s_2)} + \frac{e^{s_2 t}}{(s_2 - s_1)} = \frac{e^{s_1 t} - e^{s_2 t}}{(s_1 - s_2)}$$

$$= \frac{e^{(a+ib)t} - e^{(a-ib)t}}{2ib} = \frac{e^{at}}{b}\frac{e^{ibt} - e^{-ibt}}{2i} = \frac{e^{at}}{b}\sin bt \tag{2.68}$$

$$g_2(t) = e^{s_1 t}[\frac{k(0.5 + s_1 \frac{c}{k})}{s_1 - s_2}] + e^{s_2 t}[\frac{k(0.5 + s_2 \frac{c}{k})}{s_2 - s_1}]$$

$$= e^{(a+ib)t}[\frac{k(0.5 + (a + ib)\frac{c}{k})}{2ib}] - e^{(a-ib)t}[\frac{k(0.5 + (a - ib)\frac{c}{k})}{2ib}]$$

$$= e^{at}[(\frac{0.5k + ac}{b})\frac{(e^{ibt} - e^{-ibt})}{2i} + c\frac{(e^{ibt} + e^{-ibt})}{2}]$$

$$= e^{at}[(\frac{0.5k + ac}{b})\sin bt + c\cos bt] \qquad (2.69)$$

şeklinde elde edilirler. (2.46), (2.68) ve (2.69) ifadeleri ve $f(t)$ fonksiyonunun Şekil 2.4 deki formu kullanılarak zayıf sönüm hali için aşağıdaki cevap eğrileri elde edilir.

$$x(t) = \frac{F_o}{2m}[(\frac{1.5}{b} + \frac{ac}{kb})\int_0^t (e^{a(t-\tau)}\sin(b(t-\tau)))d\tau$$

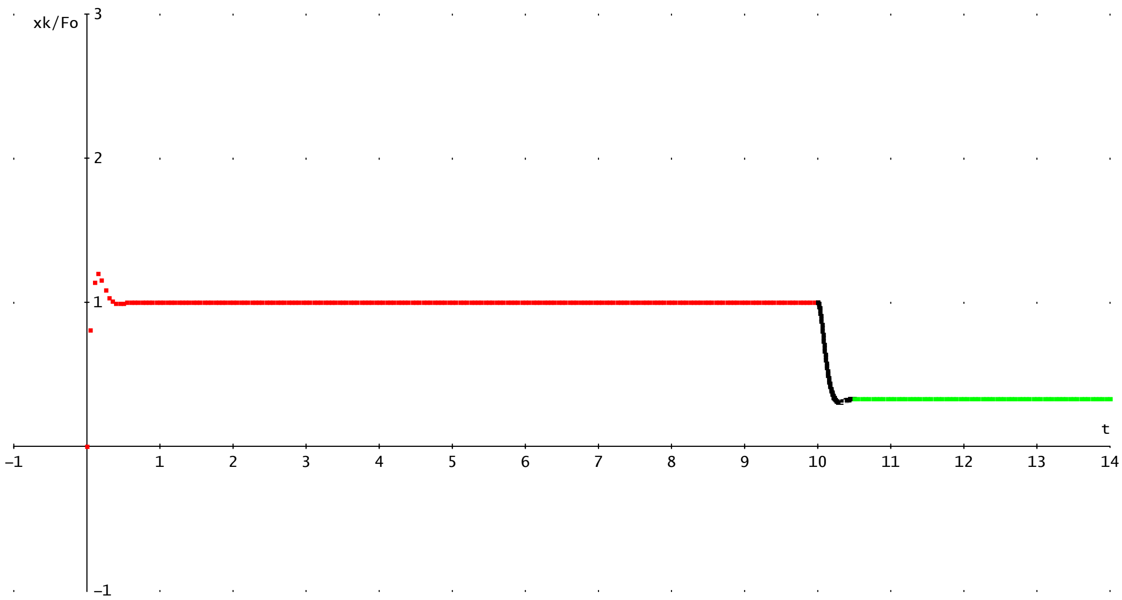
$$+\frac{c}{k}\int_0^t (e^{a(t-\tau)}\cos(b(t-\tau)))d\tau] \qquad t \leq t_o \qquad (2.70)$$

$$x(t) = \frac{F_o}{2m}[\frac{1}{b}\int_0^{t_o} (e^{a(t-\tau)}\sin(b(t-\tau)))d\tau$$

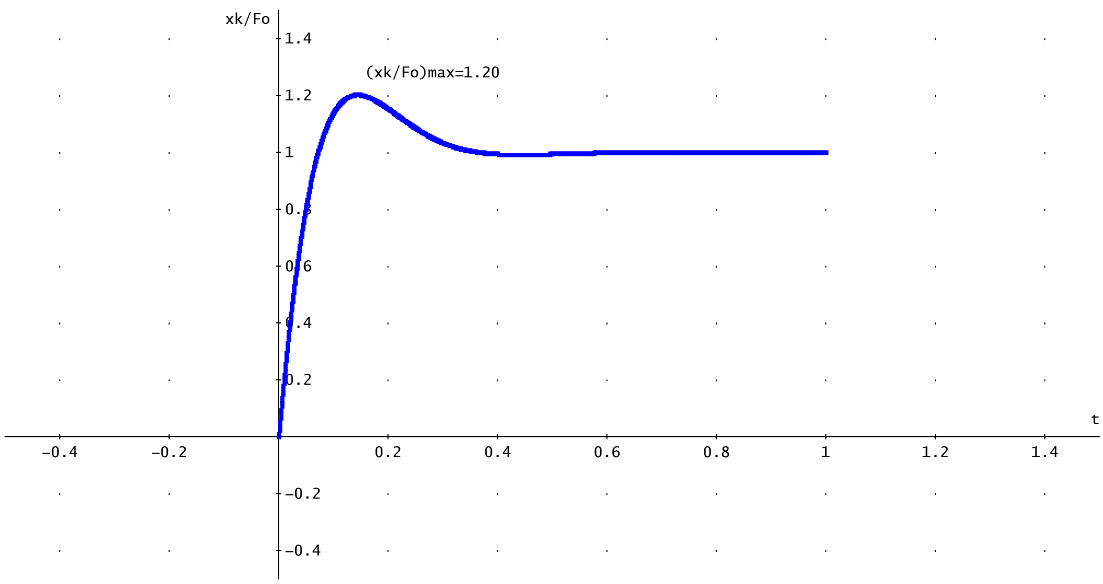
$$+(\frac{0.5}{b} + \frac{ac}{kb})\int_0^t (e^{a(t-\tau)}\sin(b(t-\tau)))d\tau$$

$$+\frac{c}{k}\int_0^t (e^{a(t-\tau)}\cos(b(t-\tau)))d\tau] \qquad t \geq t_o \qquad (2.71)$$

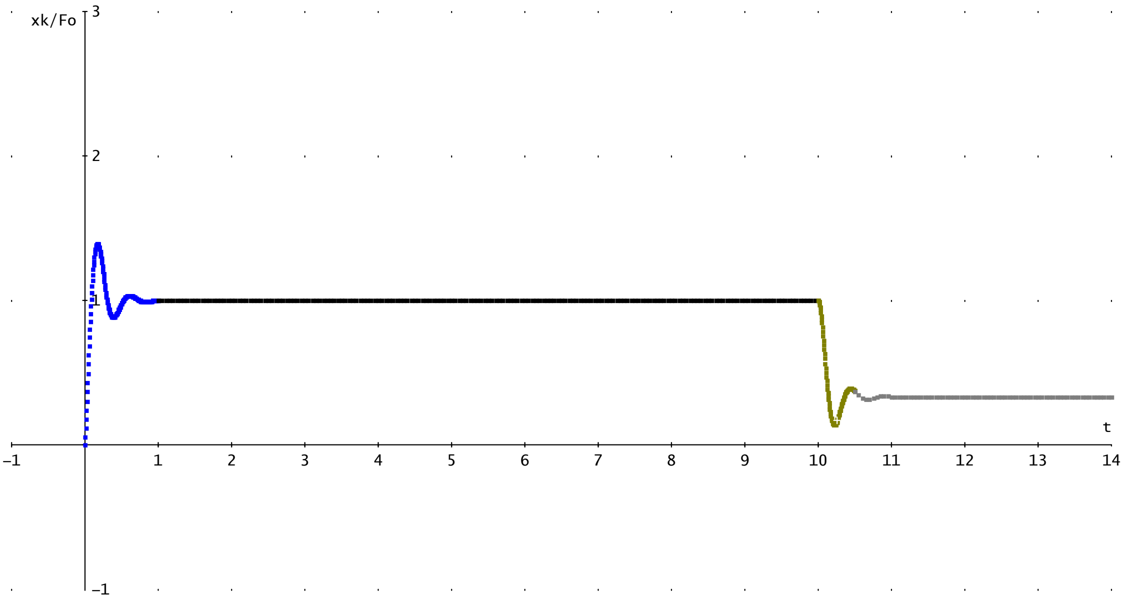
Bu eğriler, $k = 56670N/cm$, $m = 180kg$ ve $c = 8000Nsn/cm$ ve $c = 4000Nsn/cm$ için Şekil 2.22 ve Şekil 2.24 de sırasıyla çizilmiştir. Ayrıca eğrilerdeki maksimum noktaların görülebilmesi için diğer grafikler Şekil 2.23 ve Şekil 2.25 deki gibidir.



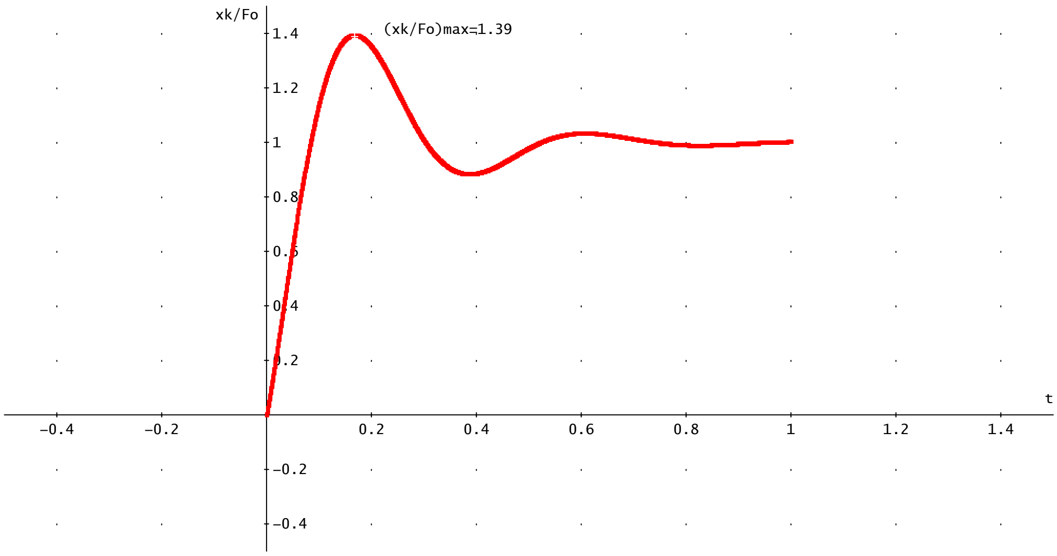
Şekil 2.22 $k_2 = \frac{k}{2}$ ve $c = 8000Nsn/cm$ için cevap eğrileri



Şekil 2.23 $k_2 = \frac{k}{2}$ ve $c = 8000Nsn/cm$ için cevap eğrileri



Şekil 2.24 $k_2 = \frac{k}{2}$ ve $c = 4000 Nsn/cm$ için cevap eğrileri



Şekil 2.25 $k_2 = \frac{k}{2}$ ve $c = 4000 Nsn/cm$ için cevap eğrileri

Şimdi k_2 nin farklı değerleri için kuvvetli sönüm hesabı yapılacaktır. (2.39) ifadesi

$$\bar{x}(s) = \bar{x}_o(s)\frac{k_2 + cs}{2ms^2 + k + k_2 + c\,s} + \bar{f}(s)\frac{1}{2ms^2 + k + k_2 + c\,s} \tag{2.72}$$

$$\bar{x}(s) = \frac{\bar{f}(s)}{2m}\frac{1}{s^2 + \frac{c}{2m}s + \frac{k+k_2}{2m}} + \frac{\bar{x}_o(s)}{2m}\frac{k_2 + cs}{s^2 + \frac{c}{2m}s + \frac{k+k_2}{2m}}$$

$$\bar{x}(s) = \frac{\bar{f}(s)}{2m}\frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)} + \frac{\bar{x}_o(s)}{2m}\frac{k_2 + cs}{(s - s_1)(s - s_2)} \tag{2.73}$$

şeklinde yazılabilir. s_1 ve s_2 kökleri aşağıda verilmiştir.

$$s_{1,2} = -\frac{c}{4m} \mp \sqrt{(\frac{c}{4m})^2 - \frac{k+k_2}{2m}} \tag{2.74}$$

Kuvvetli sönümde

$$(\frac{c}{4m})^2 \succ \frac{k+k_2}{2m} \tag{2.75}$$

şeklindedir. s_1 ve s_2 kökleri

$$s_1 = a + b, \qquad s_2 = a - b \tag{2.76}$$

$$a = -\frac{c}{4m}, \quad b = \sqrt{(\frac{c}{4m})^2 - \frac{k+k_2}{2m}} \tag{2.77}$$

olarak kısaltılabilir. Önce

$$\bar{g}_1(s) = \frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)} \tag{2.78}$$

fonksiyonunun invers transformu

$$g_1(t) = \frac{e^{s_1 t}}{(s_1 - s_2)} + \frac{e^{s_2 t}}{(s_2 - s_1)} = \frac{e^{(a+b)t}}{2b} - \frac{e^{(a-b)t}}{2b} = \frac{e^{at}}{b}\sinh bt \tag{2.79}$$

şeklindedir. Sonra

$$\bar{g}_2(s) = \frac{k_2 + cs}{(s-s_1)(s-s_2)} \tag{2.80}$$

fonksiyonunun invers transformu

$$g_2(t) = e^{s_1 t}\frac{k_2 + cs_1}{(s_1 - s_2)} + e^{s_2 t}\frac{k_2 + cs_2}{(s_2 - s_1)}$$

$$= e^{(a+b)t}\frac{k_2 + c(a+b)}{2b} - e^{(a-b)t}\frac{k_2 + c(a-b)}{2b}$$

$$= e^{at}[\frac{k_2 + ac}{b}\sinh bt + c\cosh bt] \tag{2.81}$$

şeklindedir. (2.46), (2.79) ve (2.81) ifadeleri ve $f(t)$ fonksiyonunun Şekil 2.4 deki formu kullanılarak kuvvetli sönüm hali için aşağıdaki cevap eğrileri kullanılır.

$$x(t) = \frac{F_o}{2m}[(\frac{k_2 + k + ac}{bk}) \int_0^t (e^{a(t-\tau)} \sinh(b(t-\tau)))d\tau$$

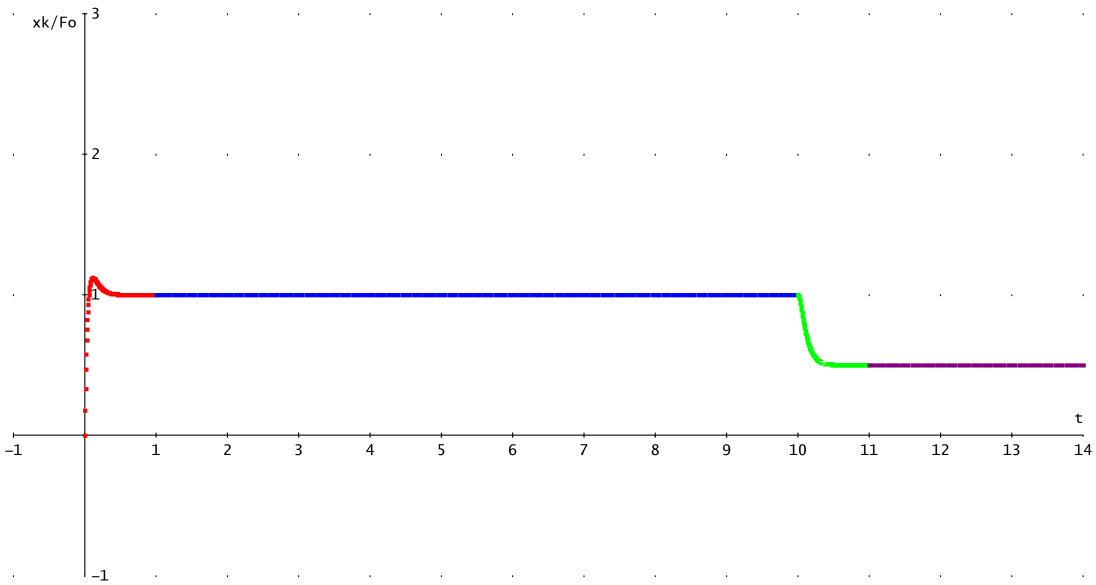
$$+\frac{c}{k} \int_0^t (e^{a(t-\tau)} \cosh(b(t-\tau)))d\tau] \qquad t \leq t_o \tag{2.82}$$

$$x(t) = \frac{F_o}{2m}[\frac{1}{b} \int_0^{t_o} (e^{a(t-\tau)} \sinh(b(t-\tau)))d\tau$$

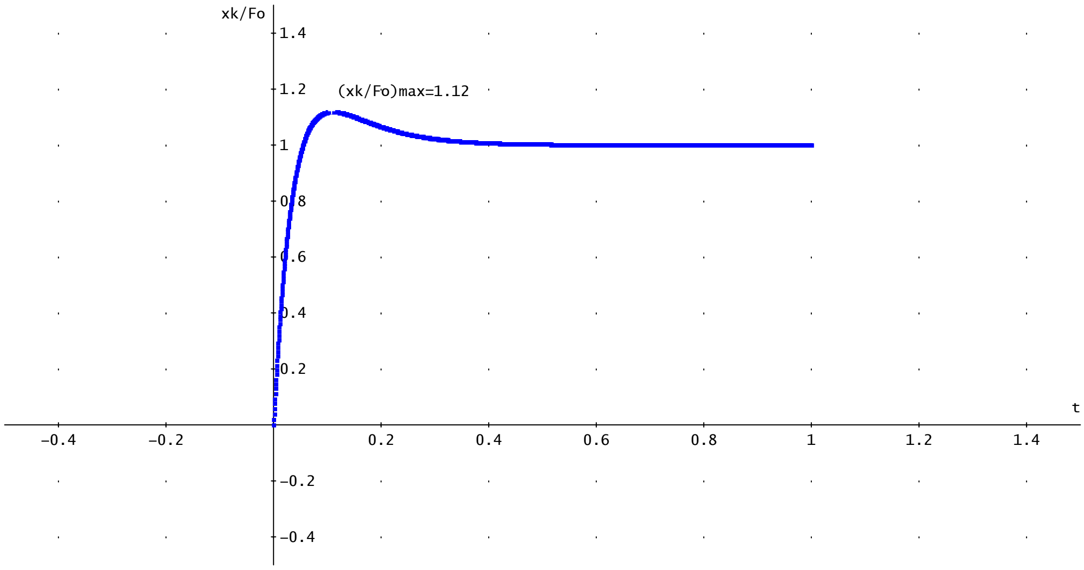
$$+(\frac{k_2 + ac}{bk}) \int_0^t (e^{a(t-\tau)} \sinh(b(t-\tau)))d\tau$$

$$+\frac{c}{k} \int_0^t (e^{a(t-\tau)} \cosh(b(t-\tau)))d\tau] \qquad t \geq t_o \tag{2.83}$$

Bu eğriler $k = 56670N/cm$, $m = 180kg$, $k_2 = k$ ve $c = 14000Nsn/cm$ için Şekil 2.26 da çizilmiştir. Ayrıca eğrilerdeki maksimum noktaların görülebilmesi için diğer grafikler Şekil 2.27 deki gibidir.

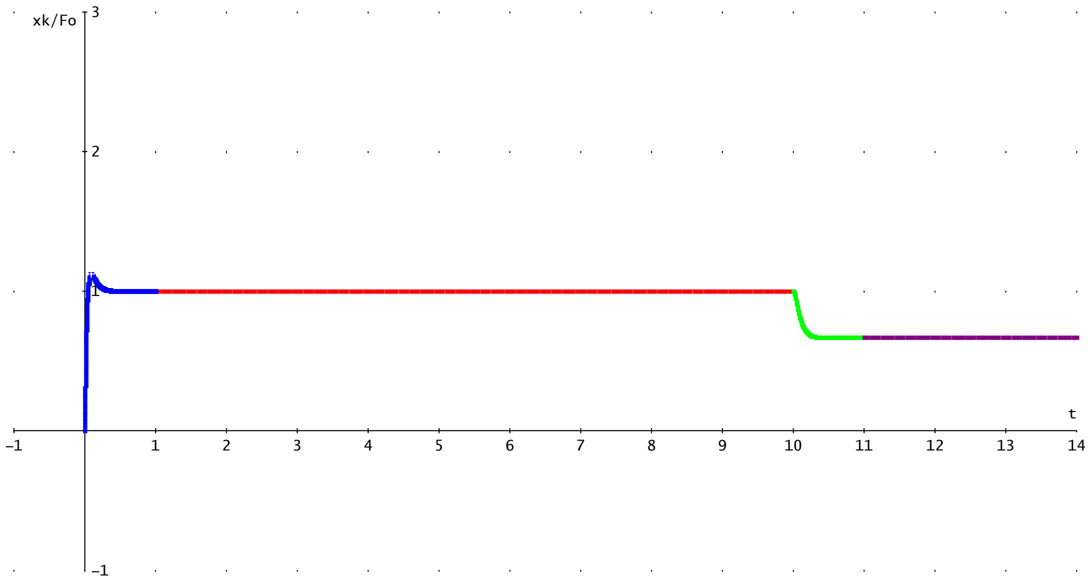


Şekil 2.26 $k_2 = k$ ve $c = 14000Nsn/cm$ için cevap eğrileri

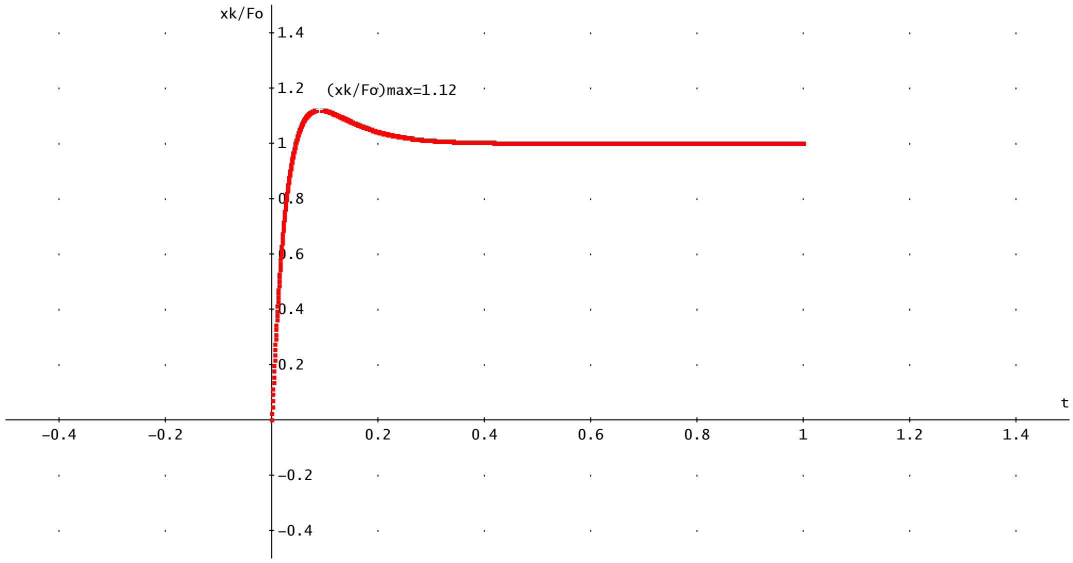


Şekil 2.27 $k_2 = k$ ve $c = 14000Nsn/cm$ için cevap eğrileri

Bu eğriler $k = 56670N/cm$, $m = 180kg$, $k_2 = 2k$ ve $c = 17000Nsn/cm$ için Şekil 2.28 da çizilmiştir. Ayrıca eğrilerdeki maksimum noktaların görülebilmesi için diğer grafikler Şekil 2.29 deki gibidir.

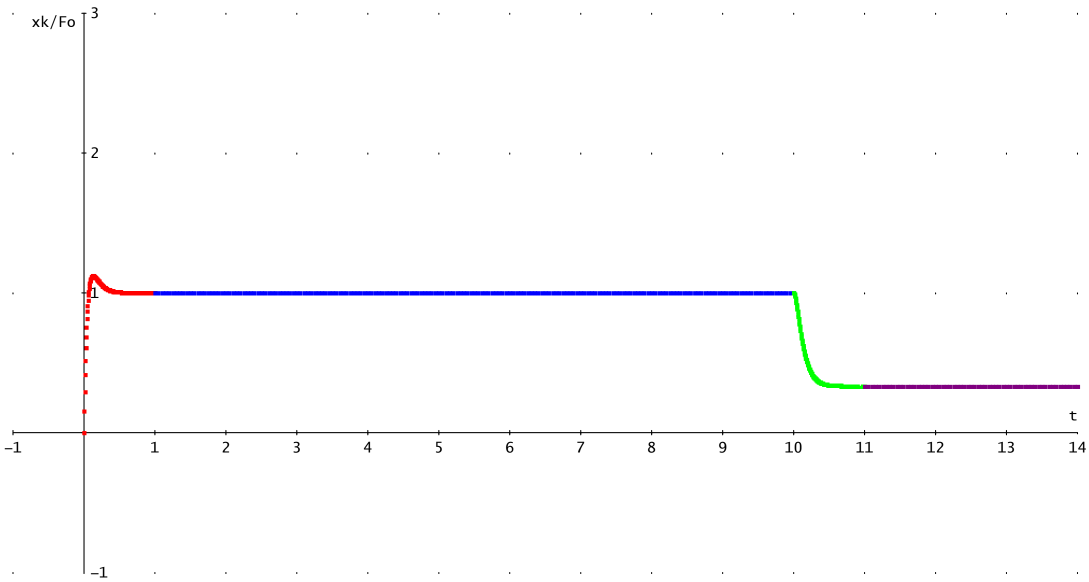


Şekil 2.28 $k_2 = 2k$ ve $c = 17000Nsn/cm$ için cevap eğrileri

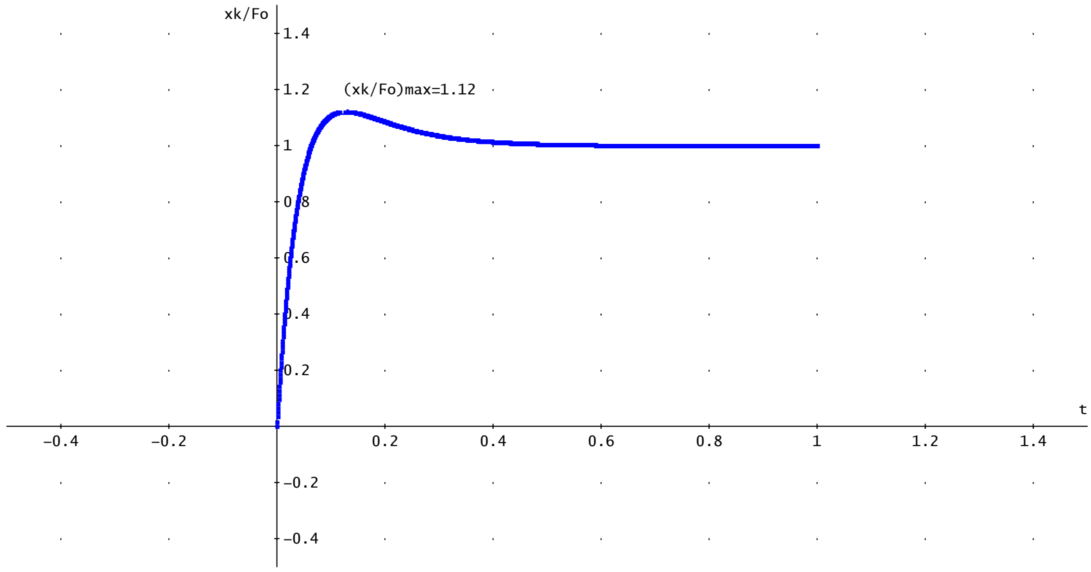


Şekil 2.29 $k_2 = 2k$ ve $c = 17000 Nsn/cm$ için cevap eğrileri

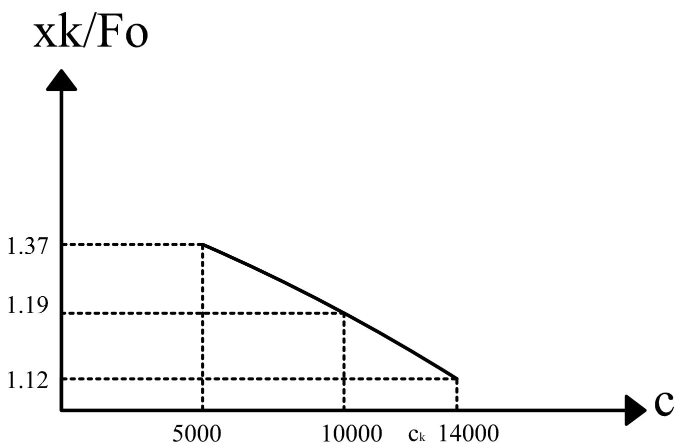
Bu eğriler $k = 56670 N/cm$, $m = 180 kg$, $k_2 = \frac{k}{2}$ ve $c = 12000 Nsn/cm$ için Şekil 2.30 da çizilmiştir. Ayrıca eğrilerdeki maksimum noktaların görülebilmesi için diğer grafikler Şekil 2.31 deki gibidir.



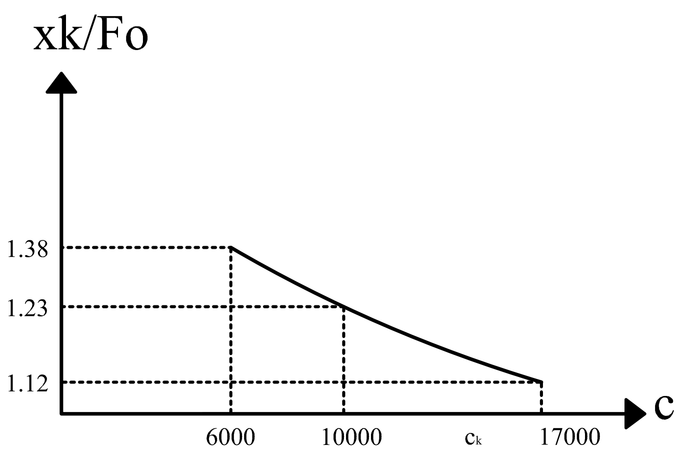
Şekil 2.30 $k_2 = \frac{k}{2}$ ve $c = 12000 Nsn/cm$ için cevap eğrileri



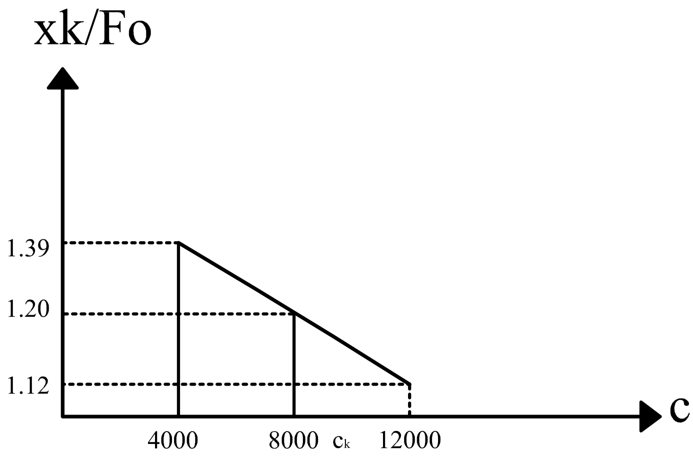
Şekil 2.31 $k_2 = \frac{k}{2}$ ve $c = 12000 Nsn/cm$ için cevap eğrileri



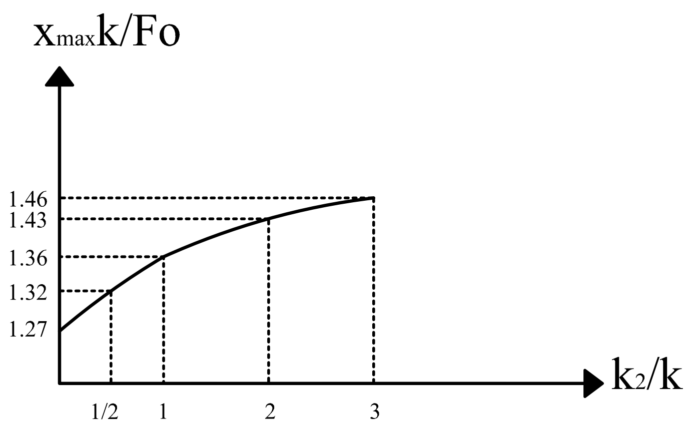
Şekil 2.32 $k_2 = k$ için xk/Fo grafiği



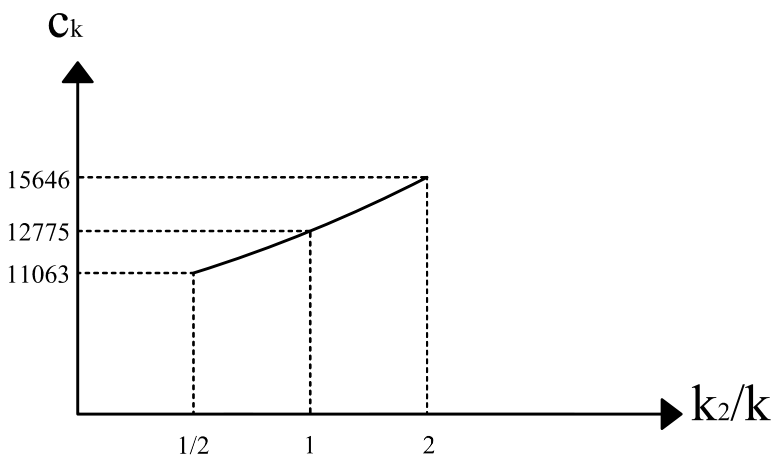
Şekil 2.33 $k_2 = 2k$ için xk/Fo nın c ile değişimi



Şekil 2.34 $k_2 = \frac{k}{2}$ için xk/Fo nın c ile değişimi



Şekil 2.35 $x_{max}k/Fo$ nın k_2/k ile değişimi



.

SONUÇLAR

Bu çalışmada amaç bir yapı sistemini herhangi bir dinamik dış etki altında yapacağı zorlanmış titreşimin genliğinin kontroludur. Bu işlem otomatik kontrol metodları kullanılarak yapılmaya çalışılmıştır. Bu amaçla önce yapının belli bir noktasının statik yük altında yapacağı deplasman, matris deplasman yöntemi kullanılarak hesaplanmış ve sadece bu noktanın deplasmanı kontrol edileceği için yapı bir tek kütle-yay sistemine indirgenmiştir. Sonra bu bir serbestlik dereceli sisteme doğrudan bir dinamik dış kuvvet uygulanarak titreşimin genliğinin zamanla değişimi bulunmuştur. Seçilen dinamik dış etki $t = o$ da belli bir F_o değerine yükselip bir süre sonra kaybolan bir formda seçilmiştir. Burda F_o/k ile boyutsuzlaştırılmış titreşimin maksimum genliği 2 olarak bulunmuştur. Bundan sonra sisteme bir sönüm kutusu ve ikinci bir yaydan oluşan bir kontrol elmanı eklenmiş ve bir x_o referans değeri belirlenmiştir. Bu referans değeri istenildiği şekilde seçilebilir. Burada sabit ve ana sistemin en büyük yer değiştirmesine eşit alınmıştır. Kontrol sistemi devreye, sistemdeki en büyük deplasman bu kontrol değerine ulaşınca girecektir ki mevcut durumda otomatik olarak devrededir. Sistemin yeni durumunun kapalı çevrim blok diyagramı bütün büyüklüklerin Laplace transformları arasında çizilmiştir. Kapalı çevrim elde edildikten sonra bunun elemanları arasındaki bağıntılar kullanılarak bu kapalı çevrime karşı gelen açık çevrim bulunmuştur. Bu açık çevrimde giriş bozucu etki $f(t)$ ve referans değeridir. Cevap veya çıkış ise sistemin deplasmanının zamanla değişimidir. Ancak bunları birbirina bağlayan bağıntı Laplace transformları cinsinden bulunmuştur. Elde edilen ifadenin invers transformu alınarak sistemin cevap eğrisi elde edilmiştir. Elde edilen sonuç dinamik dış kuvvetin ve referans değerinin genel ifadeleri ile bulunmuştur. Dolayısı ile problem başka bir referans değeri ve başka bir dış kuvvet için çözülmek istenirse bu ifadeleri sonuç integrallerde yazmak yeterli olucaktır. Burada genliğin ne mertebe değiştiğini görebilmek için seçilen yük ve referans değeri sabit tutulmak üzere önce kritik sönüm hesaplanmıştır. Kritik sönüm ilave yay katsayısı ile değişmektedir. Kritik sönümün ilave yay katsayısı ile nasıl değiştiği Şekil 2.36 de verilmiştir. Belli bir k_2 değeri için hareketin genliği c sönüm katsayısı ile azalmaktadır. Ancak belli bir sönümde sönüm katsayısı için k_2 arttıkça hareketin maksimum genliğinin arttığı gözlenmiştir. Bu durumda amaç maksimum genliğin azaltılması ise k_2 ilave yay katsayısı olabildiğince küçük, c sönüm katsayısı da olabildiğince büyük seçilmelidir.

KAYNAKLAR

[1] Prof. Dr. Özdaş M. N., Prof. Dr. Dinibütün A. T. ve Prof. Dr. Kuzucu A., 1995, Otomatik Kontrol Temelleri, İstanbul

[2] Prof. Dr. Tezcan S., 1970, Çubuk Sistemlerin Elektronik Hesap Makinelerı ile Çözümü, Arı Kitapevi Matbaası, İstanbul

[3] Stephenson G. and Radmore P. M., 1990, Advanced Mathematical Methods for Engeering and Science Students, Cambridge University Press, New York, Port Chester, Melbourne, Sydney

[4] Sneddon I. H., 1972, The Use of Integral Transforms, McGraw-Hill, New York, St Louis, Sanfrancisco

[5] Kuo B. C., 1975, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey

[6] Pasin F., 1983, Otomatik Kontrol, Teknik Üniversitesi Matbaası, Gümüşsuyu, İstanbul

[7] Ülgür M. M., 1981, Otomatik Kontrol Sistemleri, İTÜ Elektrik Fakültesi Matbaası, İstanbul

.

ÖZGEÇMİŞ

Hacer GÜMÜŞ 01.02.1983'de Konya'da doğdu. Bir yaşında iken ailesi ile İzmir'e yerleşip; ilk, orta ve lise öğrenimini İzmir Bornova'da tamamladı. Lisans öğrenimini Celal Bayar Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümü'nde tamamladıktan sonra aynı yıl İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Bölümü Yapı Mühendisliği programında yüksek lisans öğrenimine başladı. Halen yüksek lisans öğrenimi devam etmektedir.