İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BORDADAN GELEN DÜZENLİ DALGALARDA GEMİLERİN STABİLİTESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Müh. Erdem ÜÇER

Anabilim Dalı : GEMİ İNŞAATI MÜHENDİSLİĞİ

Programı : GEMİ İNŞAATI MÜHENDİSLİĞİ

OCAK 2003

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BORDADAN GELEN DÜZENLİ DALGALARDA GEMİLERİN STABİLİTESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Müh. Erdem ÜÇER
(508001105)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 24 Aralık 2002
Tezin Savunulduğu Tarih : 13 Ocak 2003

Tez Danışmanı :	**Prof.Dr. Alim YILDIZ**
Diğer Jüri Üyeleri	**Doç.Dr. Metin TAYLAN (İ.T.Ü)**
	Doç.Dr. İ. Hakkı HELVACIOĞLU (İ.T.Ü)

OCAK 2003

ÖNSÖZ

Yapmış olduğum bu çalışmada bana değerli fikirleri ile yol gösteren sayın hocam Prof. Dr. Alim Yıldız ve Prof. Dr. A.Yücel Odabaşı'ya , öğrencilik hayatım boyunca maddi ve manevi desteğini esirgemeyen aileme teşekkürü bir borç bilirim .

Erdem Üçer

Ocak 2003

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ

ŞEKİL LİSTESİ

SEMBOL LİSTESİ

Δ	:	Modelin deplasmanı
KG	:	Modelin ağırlık merkezinin kaide hattından yüksekliği
L_{WL}	:	Modelin su hattı boyu
B	:	Modelin genişliği
T_{ort}	:	Modelin ortalama draftı
C_B	:	Blok katsayısı
θ	:	Bağıl yalpa açısı
I	:	Toplam atalet momenti
I_G	:	Yalpa atalet momenti
I_E	:	Ek kütle atalet momenti
$M_r(\theta)$	:	Doğrultma momenti fonksiyonu
$D(\theta, d\theta/dt)$	:	Sönüm momenti fonksiyonu
ω_0	:	Doğal frekans
μ, μ_3	:	Sönüm momenti katsayıları
α_3, α_5	:	Doğrultma momenti katsayıları
α_m	:	Dalga eğimi
Ω	:	Dalga zorlama frekansı
ε	:	Çok küçük bir parametre
θ_v	:	Stabilitenin kaybolduğu açı
$M(t_o)$	:	Melnikov fonksiyonu
M_s	:	Melnikov fonksiyonunun sabit kısmı
$M_d(t_o)$	:	Melnikov fonksiyonunun değişken kısmı
$V(x)$	:	Lyapunov fonksiyonu
Λ	:	Otonom sistemlerde stabilite bölgesi
Λ^*	:	Otonom olmayan sistemlerde stabilite bölgesi
M	:	İnvaryant bölge
δ	:	Pozitif bir sabit
$h(\xi)$	:	Pozitif artan bir fonksiyon
$\psi_1(\xi,e)$, $\psi_2(\xi,e)$	:	Lyapunov fonksiyonun türevinin kökleri
$\Theta(\delta)$, $\Theta^*(\delta)$	:	Lyapunov fonksiyonun türevinin kökleri ile sınırlanan bölge

BORDADAN GELEN DÜZENLİ DALGALARDA GEMİLERİN STABİLİTESİ

ÖZET

Bir gemi için bordadan gelen düzenli dalgalarda en önemli hareket yalpa hareketidir. Bu hareketin modellenmesi oldukça zordur. Bundan dolayı bu çalışmada yalpa hareketiyle geminin yaptığı diğer hareketler arasında bir etkileşim olmadığı kabul edilmiştir.

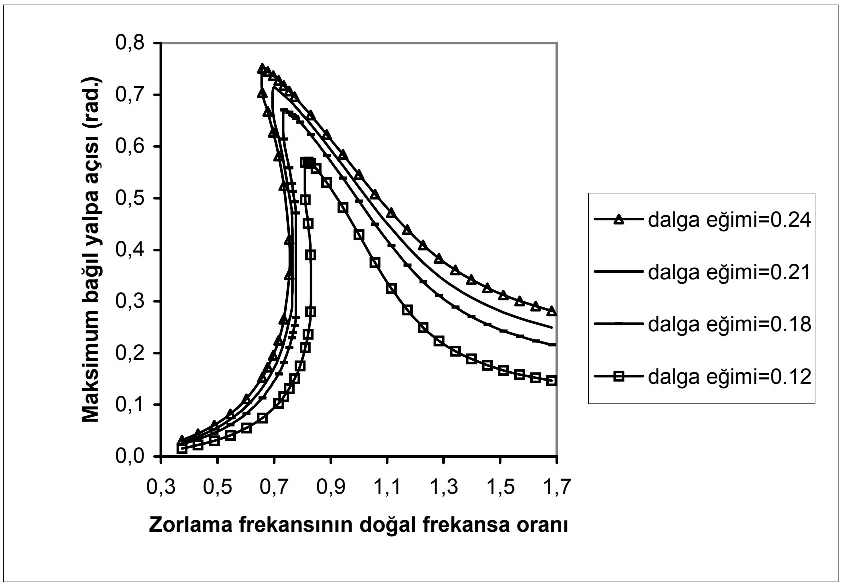
Çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, ilk önce nonlineer yalpa hareketinin çözümü ve stabilitesini incelemek için yapılan çalışmalar hakkında kısa bir bilgi verilmiştir. Daha sonra bu konu üzerine araştırma yapmaktaki amacımız anlatılmıştır.

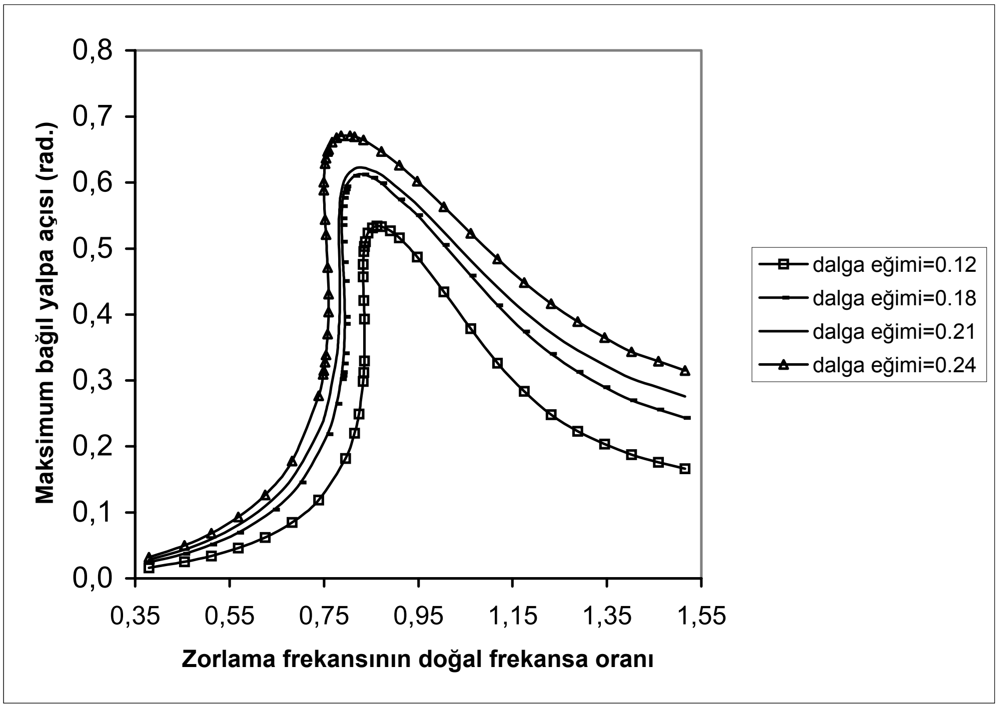
İkinci bölümde, ilk önce yalpa hareketi denkleminin çıkartılırken hangi kabuller yapıldığı anlatılmıştır. Daha sonra yalpa hareketi denklemini oluşturan atalet, sönüm, doğrultma ve dalga zorlama momentleri hakkında kısa bir bilgi verilmiştir.

Üçüncü bölümde, ilk önce bir çok araştırmacı ve bilim adamı tarafından kullanılan Multi Scale metot ve Bogoulibov Mitropolsky asimptotik metodu hakkında kısa bir bilgi verilmiştir. Daha sonra bu metotlar kullanılarak yalpa hareketi denklemi çözülmüştür.

Dalga eğiminin maksimum bağıl yalpa açısının üzerindeki etkisi şekil 1 ve şekil 2’de gösterilmiştir. Şekil 1’deki maksimum bağıl yalpa açıları, Multiple Scale metodu kullanarak, şekil 2’dekiler ise Bogoulibov Mitropolsky Asimptotik metodu kullanarak elde edilmiştir.



Şekil 1 Dalga eğiminin Multiple Scale metot kullanılarak elde edilen maksimum bağıl yalpa açıları üzerindeki etkisi

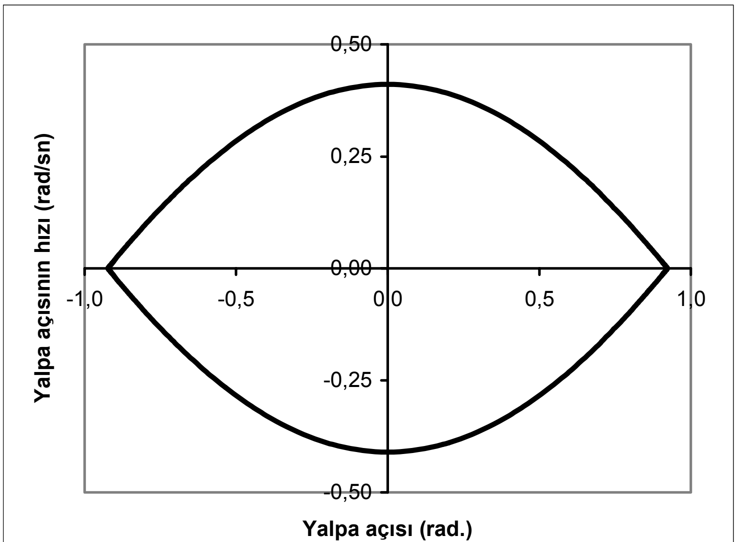


Şekil 2 Dalga eğiminin Bogoulibov Mitropolsky Asimptotik Metodu kullanılarak elde edilen maksimum bağıl yalpa açıları üzerindeki etkisi

Dördüncü bölümde, yalpa hareketi denkleminin stabilitesi, Floquet teori, Melnikov yöntemi ve Lyapunov direkt yöntemi kullanılarak incelenmiştir.

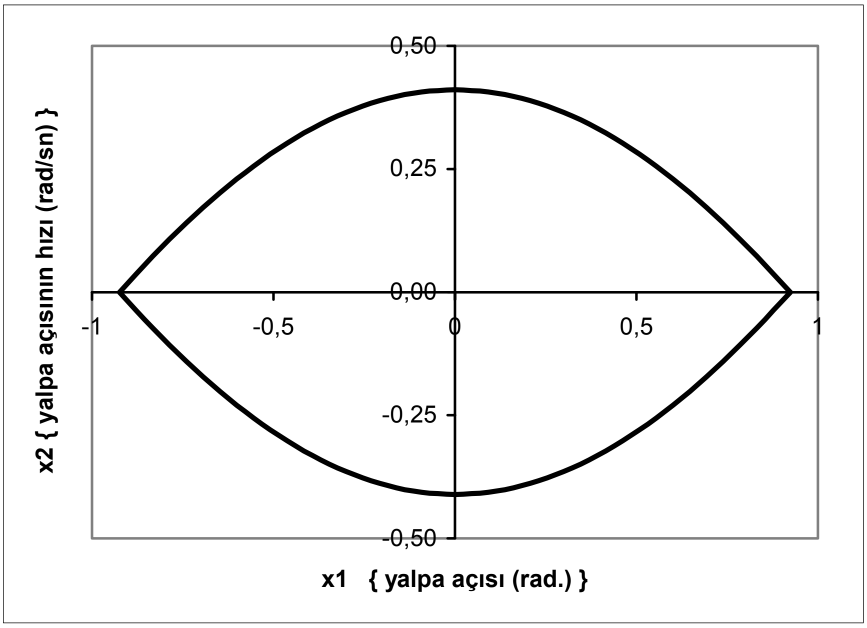
Örnek aldığımız model için, zorlanmış yalpa hareketinin stabilitesinin Floquet teori kullanarak incelenmesi sonucunda, zorlama frekansı $0.645\times\omega_0$'dan büyük olduğu zaman stabil olmadığı bulunmuştur. Burada ω_0 doğal frekanstır.

Melnikov yöntemi kullanarak örnek aldığımız modelin zorlanmamış yalpa hareketi için şekil 3'de gösterilen stabilite sınırı elde edilmiştir. Daha sonra zorlanmış haldeki yalpa hareketi incelenmiş ve zorlama frekansı $\Omega<0.72\times\omega_0$ olduğu zaman stabil olduğu bulunmuştur.

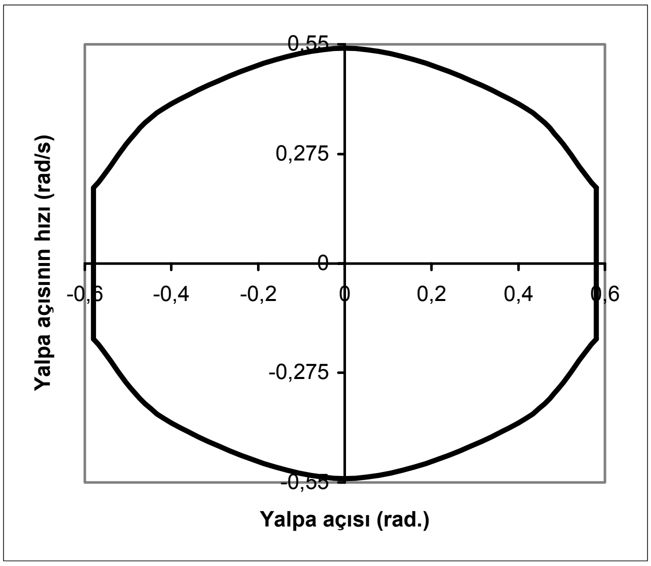


Şekil 3   Melnikov yöntemi kullanılarak elde edilen stabilite sınırı

Lyapunov Direkt yöntemi kullanarak, ilk önce sakin suda nonlineer yalpa hareketi incelenmiş ve şekil 4'de gösterilen stabilite sınırı elde edilmiştir. Daha sonra zorlanmış nonlineer yalpa hareketinin stabilitesi incelenmiş ve şekil 5'de gösterilen Lyapunov zarfı elde edilmiştir.



Şekil 4 Nonlineer yalpa hareketinin asimptotik stabilite bölgesi



Şekil 5 Lyapunov zarfı

Beşinci bölüm sonuç bölümüdür. Çalışmanın bu bölümünde, Multiple Scale metot ve Bogoulibov Mitropolsky asimptotik metoduyla elde edilen çözümlerin ve stabilite analizinde kullanılan yöntemlerin sonuçlarının karşılaştırılması yapılmıştır.

STABILITY OF SHIPS IN REGULAR BEAM SEAS

SUMMARY

Roll motion is the most important motion for a ship in regular beam seas and its modeling is very hard. In this study, it is assumed that roll motion is uncoupled with the other motions of the ship.

This study consists of five parts.

In part one, first of all a brief literature review was given about the research which was done on solution and stability of nonlinear roll motion equation. Then our aim about this subject was outlined.

In part two, our assumptions which were asserted while obtaining the roll motion equation were examined. Then a brief summary about inertia, damping, righting and wave excitation moments were given.

In part three, a brief review was given about the Multiple Scale and Bogoliubov Mitropolsky Asymptotic Methods which were used by many researchers and scientists. Then the roll motion equation was solved by both methods.

The effect of wave slope on maximum relative roll angles was shown in Figure 1 and Figure 2. Maximum relative roll angles in Figure 1 were obtained from the solution of the roll motion equation by using Multiple Scale Method whereas maximum relative roll angles in Figure 2 were obtained by using Bogoulibov-Mitropolsky Asymptotic Method.

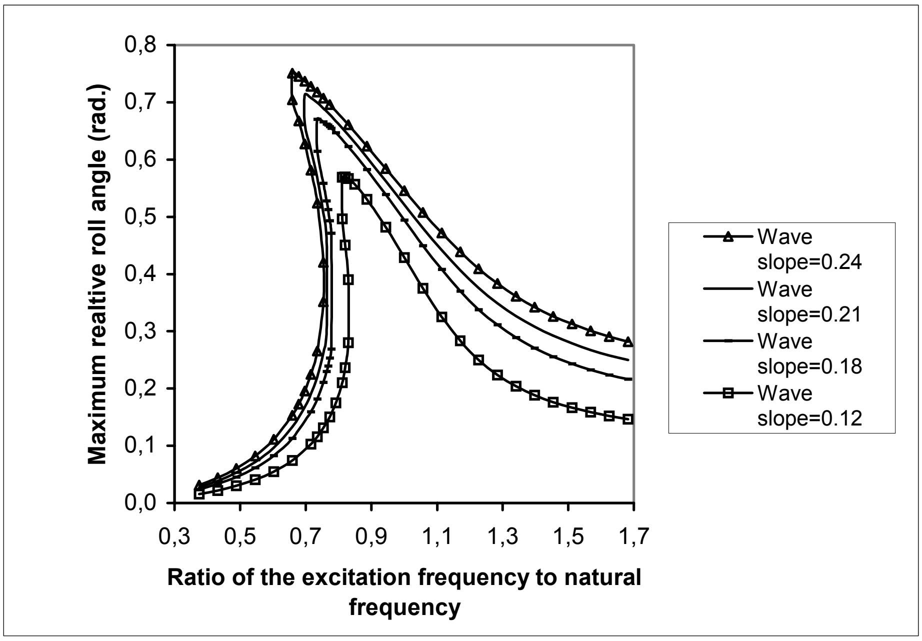


Figure 1. Effect of wave slope on maximum relative roll angles which were obtained by using Multiple Scale Method.

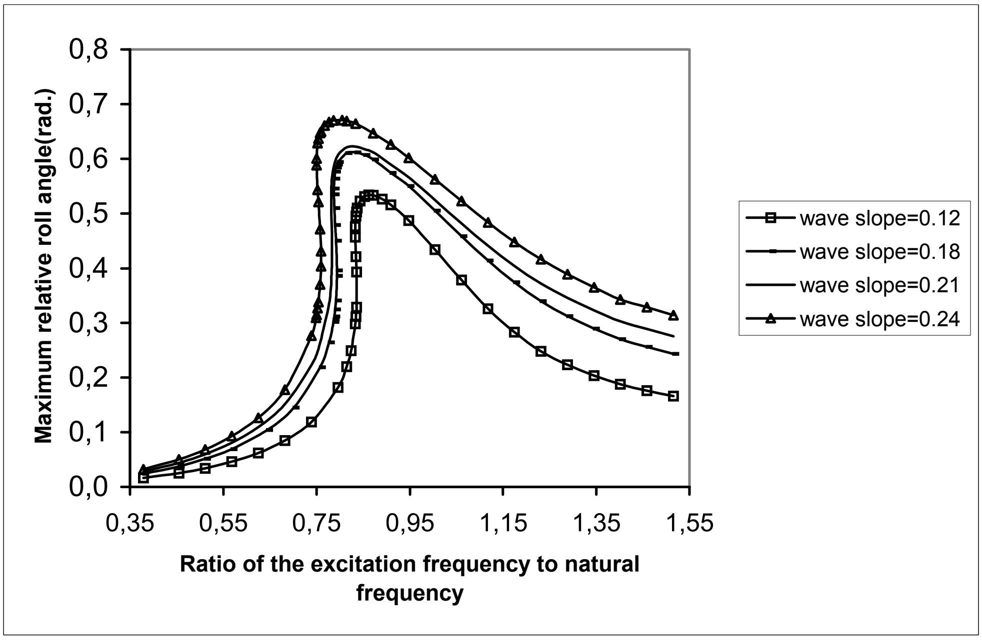


Figure 2. Effect of wave slope on maximum relative roll angles which were obtained by using Bogoliubov-Mitropolsky Asymptotic Method.

In part four, the stability of roll motion equation was examined by using Floquet Theory, Melnikov Method and Lyapunov Direct Method.

From the investigation of the stability of roll motion by using Floquet theory, it was found that our sample model was unstable for excitation frequencies higher than $0.645 \times \omega_0$. Here ω_0 is the natural frequency of the model.

The stability boundaries which were obtained for free roll motion of the model by using Melnikov method , was shown in Figure 3. Then the excited roll motion was investigated and found that it was unstable when the excitation frequency takes values higher than $0.72\times \omega_0$.

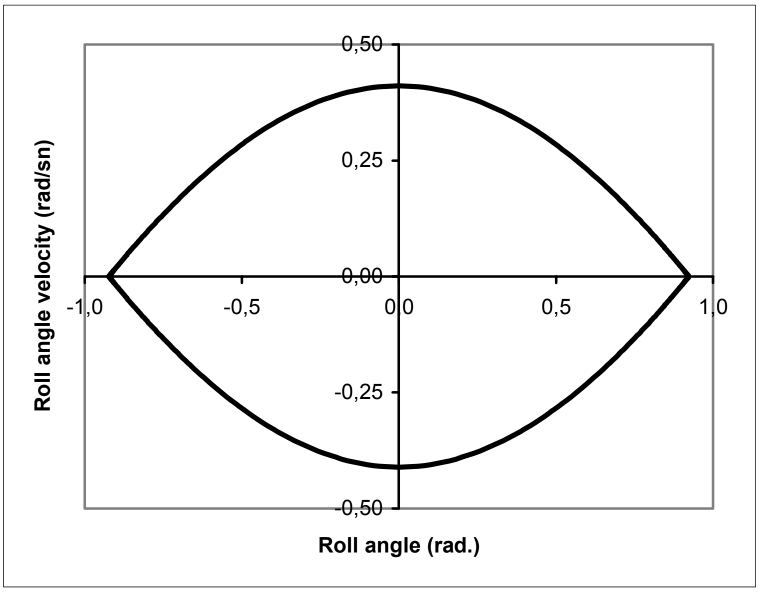


Figure 3. Boundary of stability obtained by using Melnikov Method

First, the stability of the free roll motion equation was investigated by using Lyapunov Direct Method and the boundaries which were shown in Figure 4 were obtained. Then the excited roll motion equation was examined and Lyapunov envelope which was shown in Figure 5, was obtained .

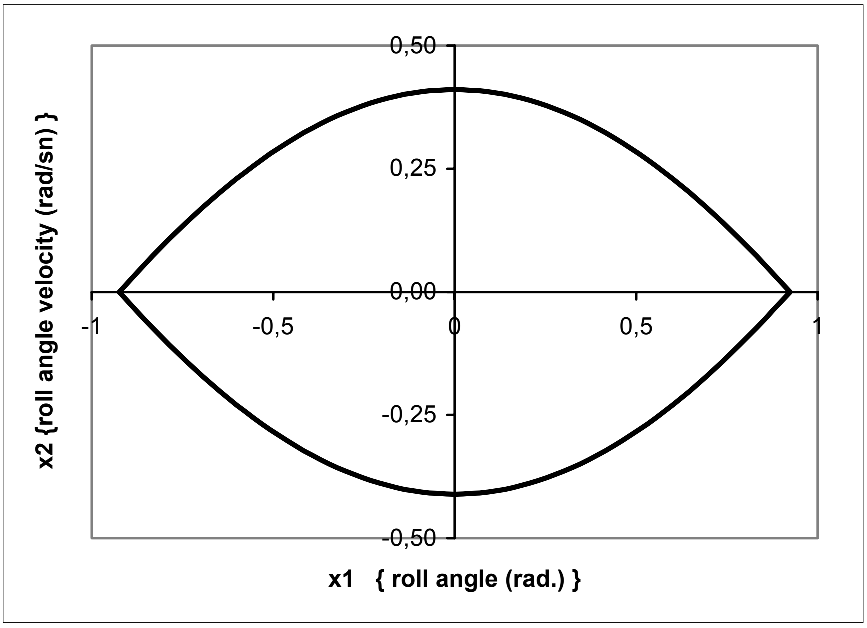


Figure 4. Asymptotic stability region of nonlinear roll motion

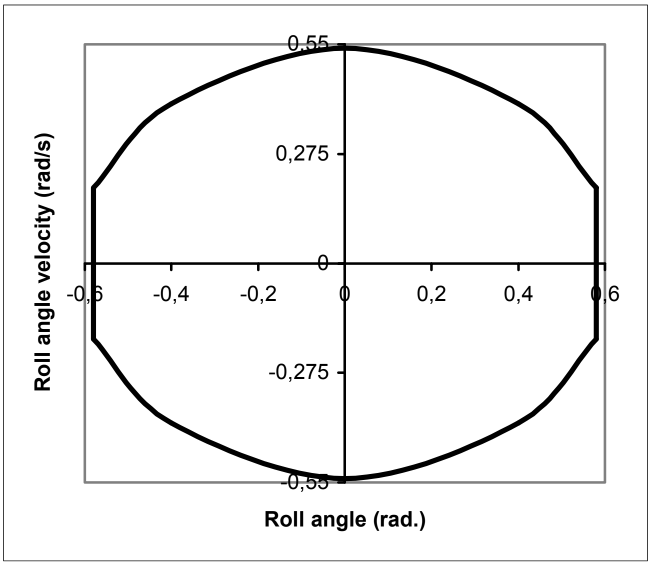


Figure 5. Lyapunov envelope

In Part 5, the results and recommendations were given. In this part of the study, comparisons of the solutions which were obtained by Multiple Scale and Bogoulibov-Mitorpolsky Asymptotic methods were analyzed. Comparisons of the results of the methods which were used for the stability analysis were also discussed.

1. GİRİŞ

Dalgalar arasında bulunan bir gemi genel olarak altı serbestlik derecesine sahiptir. Bu nedenle altı değişik hareket yapabilir. Bu hareketler yan-sürüklenme, boyuna-öteleme, dalıp çıkma, savrulma, yalpa ve baş kıç vurmadır. Ancak gemi tüm bu hareketleri aynı büyüklükte yapmaz. Dalgaların karakterine ve geliş yönüne göre bir tip veya daha fazla bileşik hareketi diğerlerine nazaran daha belirgin bir biçimde yapabilir. Bordadan gelen düzenli dalgalarda gemi yalpa hareketini diğer hareketlere nazaran daha belirgin bir biçimde yapar [1].

Yalpa hareketi bir geminin devrilmesine yol açan en kritik hareket olduğu için bu hareket üzerine uzun yıllar boyunca bir çok araştırma yapılmıştır.

Cardo, Francescutta ve Nabergoj, "averaging" yöntemini kullanarak bordadan gelen düzenli dalgalarda açı bağımlı sönümün yalpa hareketi üzerindeki etkisini incelemişlerdir [2].

Nayfeh, Khedeir ve Sanchez, Multiple Scale metodu kullanarak nonlineer yalpa hareketi denkleminin yaklaşık çözümlerini elde etmişler ve bu çözümlerin stabilitesini Floquet teori kullanarak incelemişlerdir [3,4].

Özkan, Lyapunov direkt yöntemini kullanarak sakin suda Rayleigh tipi nonlineer yalpa hareketi denkleminin asimptotik stabilite bölgesini elde etmiştir ve zorlanmış yalpa hareketi için toplam stabilite sınırını ortaya koymuştur [5].

Caldeira ve Sariava, Lyapunov direkt yöntemini kullanarak, Lienard tipi yalpa hareketi denkleminin çözümlerini sınırlayan bir Lyapunov zarfının varlığını ortaya koymuşlardır [6].

Bu çalışmayı yapmaktaki amacımız yalpa hareketi denkleminin çözümünde ve stabilitesinin incelenmesinde kullanılan yöntemler hakkında kısa bir bilgi verdikten sonra bu yöntemleri lineer ve kübik sönüm katsayılı Rayleigh tipi yalpa hareketi denkleminin çözümünde ve stabilitesinin incelenmesinde kullanmak ve elde edilen sonuçları karşılaştırmaktır.

2. YALPA HAREKETİ DENKLEMİNİN FORMÜLASYONU

Genelde yalpa hareketi denkleminin formülasyonu yapılırken aşağıdaki kabuller yapılır.

- Geminin bütün diğer serbestlik derecelerinin etkileri ihmal edilir.
- Ek kütle atalet momentinin, meyil açısından bağımsız sabit bir değeri olduğu kabul edilir.
- Gemiye etki eden hidrodinamik yalpa momentlerinin, gemi ve dalganın bağıl hareketine bağlı olduğu kabul edilir. Bu kabulün yapılmasının sebebi bordadan gelen dalgalarda bağıl yalpanın daha kolay tanımlanabilmesidir.

Yukarıda anlatılan kabullere dayanarak geminin nonlineer yalpa hareketi, denklem 2.1 ile gösterebilir [2-7].

$$I\ddot{\theta} + D(\theta,\dot{\theta}) + M_r(\theta) = E(t) \tag{2.1}$$

Burada I ($I=I_G+I_E$), geminin harekete karşı reaksiyonundan doğan yalpa atalet momentiyle, deniz suyunun gemi hareketine karşı reaksiyonundan doğan ek kütle atalet momentinin toplamını göstermektedir . Yalpa atalet momenti hareketin ivmesine bağlıdır.

Denklem 2.1'de $D(\theta,\dot{\theta})$, sönüm momentini göstermektedir. Sönüm momentini göstermek için kullanılan modeller iki gruba ayrılabilir. Birincisi sadece yalpa açısının hızına bağlı olanlar, ikincisi ise hem yalpa açısına, hem de yalpa açısının hızına bağlı olanlardır [7].

- Kuadratik model

$$D(\theta,\dot{\theta}) = d_0\dot{\theta} + d_3\left|\dot{\theta}\right|\dot{\theta} \tag{2.2a}$$

- Kübik model

$$D(\theta,\dot{\theta}) = d_0\dot{\theta} + d_4\dot{\theta}^3 \tag{2.2b}$$

- Lineer açı bağımlı + kuadratik model

$$D(\theta,\dot{\theta}) = d_0\dot{\theta} + d_1|\theta|\dot{\theta} + d_3|\dot{\theta}|\dot{\theta} \tag{2.2c}$$

- Lineer açı bağımlı + kübik model

$$D(\theta,\dot{\theta}) = d_0\dot{\theta} + d_1|\theta|\dot{\theta} + d_4\dot{\theta}^3 \tag{2.2d}$$

- Kuadratik açı bağımlı + kuadratik model

$$D(\theta,\dot{\theta}) = d_0\dot{\theta} + d_2\theta^2\dot{\theta} + d_3|\dot{\theta}|\dot{\theta} \tag{2.2e}$$

- Kuadratik açı bağımlı + kübik model

$$D(\theta,\dot{\theta}) = d_0\dot{\theta} + d_2\theta^2\dot{\theta} + d_4\dot{\theta}^3 \tag{2.2f}$$

Denklem 2.1'de $M_r(\theta)$ doğrultma momentini göstermektedir. $M_r(\theta)$, katsayıları stabilite eğrisinden yararlanılarak elde edilen yalpa açısı cinsinden tek polinomla ifade edilebilir.

$$M_r(\theta) = \Delta\overline{GZ}(\theta) = \Delta\sum_i k_i\theta^i \text{ (i=1,3,5…)} \tag{2.3}$$

Denklem 2.1'de E(t), dalga zorlama momentini göstermektedir. Bordadan gelen düzenli dalgalarda zorlama terimi denklem 2.4 ile gösterilebilir.

$$E(t) = I_G\,\alpha_m\Omega^2\cos\Omega t \tag{2.4}$$

Denklem 2.4'de ; α_m dalga eğimini, Ω zorlama frekansını göstermektedir.

Denklem 2.1'de en genel haliyle gösterilen yalpa hareketi denkleminde ; sönüm momenti yerine kübik model, doğrultma momenti yerine denklem 2.3'de gösterilen ifade ve dalga zorlama momenti yerine denklem 2.4'de gösterilen ifade konulursa denklem 2.5 elde edilir.

$$I\ddot{\theta} + d_0\dot{\theta} + d_4\dot{\theta}^3 + \Delta\left(k_1\theta + k_3\theta^3 + k_5\theta^5 + ...\right) = I_G\,\alpha_m\Omega^2\cos\Omega t \tag{2.5}$$

Denklem 2.5'in her iki tarafı, I toplam atalet kütle momentine bölünürse denklem 2.6 elde edilir.

$$\ddot{\theta}+\frac{d_0}{I}\dot{\theta}+\frac{d_4}{I}\dot{\theta}^3+\frac{\Delta}{I}\left(k_1\theta+k_3\theta^3+k_5\theta^5+......\right)=\frac{I_G\,\alpha_m\Omega^2\cos\Omega t}{I} \tag{2.6}$$

Denklem 2.6'da aşağıda gösterilen dönüşümler yapılırsa denklem 2.7 elde edilir.
$\omega_0^2 = \Delta k_1 / I$, $\mu = D_0 / 2I$, $\mu_3 = D_4 / I$, $\alpha_n = \Delta k_n / I$ (n=3,5,7,..), $f = I_G\,\alpha_m\,\Omega^2 / I$

$$\ddot{\theta}+2\mu\dot{\theta}+\mu_3\dot{\theta}^3+\omega_0^2\theta+\alpha_3\theta^3+\alpha_5\theta^5+...=f\cos\Omega t \tag{2.7}$$

Doğrultma moment kolunun mertebesini beşinci dereceyle sınırlarsak denklem 2.7 denklem 2.8 haline gelir.

$$\ddot{\theta}+\omega_0^2\theta+\alpha_3\theta^3+\alpha_5\theta^5+2\mu\dot{\theta}+\mu_3\dot{\theta}^3=f\cos\Omega t \tag{2.8}$$

İlerleyen bölümlerde yalpa hareketi denklemi olarak denklem 2.8 kullanılmıştır.

3. YALPA HAREKETİ DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

3.1 Multiple Scale Metodu ve Uygulaması

3.1.1 Multiple Scale metodu

Multiple Scale metodu, herhangi bir sistem üzerine etkiyen bir tepkiyi temsil eden açılımın, tek değişken yerine bir çok bağımsız değişkene bağlı bir fonksiyon olarak düşünülmesine dayanır [8,9].

Multiple Scale metoduyla çözüme başlanırken ilk önce bağımsız değişkenler ortaya konur. $T_n = \varepsilon^n t$ (n=0,1,2,…) bu ifadede de T_n bağımsız değişkenleri göstermektedir. ε çok küçük bir parametredir [8,9].

Zincir kuralı kullanılarak tek değişkene (zamana) göre alınmış türev, aşağıda gösterildiği gibi çok değişkene görede alınabilir.

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + ... \tag{3.1}$$

$$\frac{d}{dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} + \varepsilon^2 (2 \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_2} + \frac{\partial^2}{\partial T_1^2}) + ... \tag{3.2}$$

Örnek olarak $\ddot{u} + u + \varepsilon.u^3 = 0$ denkleminin çözümünü arayalım. Denklem 3.2, bu denklemde yerine yerleştirilirse bir çok bağımsız değişkene bağlı denklem 3.3 elde edilir [8,9].

$$\frac{\partial^2 u}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial T_0 \partial T_1} + \varepsilon^2 (2 \frac{\partial^2 u}{\partial T_0 \partial T_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial T_1^2}) + u + \varepsilon u^3 + ... = 0 \tag{3.3}$$

Denklem 3.3'e aşağıdaki ifadeye benzer bir çözüm aranılabilir [8,9].

$$u = u_0(T_0, T_1, T_2,....) + \varepsilon.u_1(T_0, T_1, T_2,....) + ... + \varepsilon^n u_n(T_0, T_1, T_2,....) \tag{3.4}$$

Denklem 3.4, çözümü aranılan denklem 3.3'te yerine yerleştirilip, ε'dan daha büyük katsayılı terimler ihmal edilirse denklem 3.5 elde edilir.

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_1} + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon u_0^3 = 0 \tag{3.5}$$

Denklem 3.5'de aynı mertebeden ε katsayılı terimler bir araya getirilirse bağımsız değişken sayısı kadar diferansiyel denklem elde edilir.

$$\varepsilon^0 : \frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0^2} + u_0 = 0$$

$$\varepsilon^1 : \frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 = -2\frac{\partial^2 u_0}{\partial T_0 \partial T_1} - u_0^3$$

ε^0 katsayılı diferansiyel denkleminin genel çözümü denklem 3.6'da gösterilmiştir .

$$u_0 = a(T_1)\cos[T_0 + b(T_1)] \tag{3.6}$$

Denklem 3.6'da gösterilmiş olan u_0 çözümü, ε^1 katsayılı diferansiyel denklemde yerine yerleştirilirse denklem 3.7 elde edilir.

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 = 2\frac{\partial a}{\partial T_1}\sin(T_0 + \beta) + (2a\frac{\partial \beta}{\partial T_1} - \frac{3a^3}{4})\cos(T_0 + \beta) - \frac{a^3}{4}\cos(3T_0 + 3\beta) \tag{3.7}$$

Denklem 3.7 harmonikliği bozan terimler içermektedir. Bu terimleri yok etmek için $\sin(T_0 + b)$'nın ve $\cos(T_0 + b)$'nın katsayıları sıfıra eşitlenmelidir [8].

$$\frac{\partial a}{\partial T_1} = 0 \tag{3.8}$$

$$2a\frac{\partial \beta}{\partial T_1} - \frac{3a^3}{4} = 0 \tag{3.9}$$

Denklem 3.8 ve 3.9'un çözümünden a ve β bulunur. Denklem 3.7'nin sağ tarafındaki harmonikliği bozan terimlerin elenmesiyle denklem 3.10 elde edilir.

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2} + u_1 = -\frac{a^3}{4}\cos(3T_0 + 3\beta) \tag{3.10}$$

Denklem 3.10'nun çözümünden u_1'in değeri bulunur. Değerlerini hesapladığımız a, b, u_1 ve u_0, denklem 3.4'te yerlerine yerleştirilirse $\ddot{u} + u + \varepsilon.u^3 = 0$ denkleminin yaklaşık çözümünü bulmuş oluruz.

3.1.2 Yalpa hareketi denkleminin Multiple Scale metoduyla çözümü

Yalpa hareketi denklemini temsil eden denklem 2.8'i tekrar ele alalım.

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta + \alpha_3\theta^3 + \alpha_5\theta^5 + 2\mu\dot{\theta} + \mu_3\dot{\theta}^3 = f\cos\Omega t \tag{3.11}$$

$$\Omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon\sigma \tag{3.12}$$

Denklem 3.12'de σ, zorlama frekansı Ω'nın sistemin doğal frekansı ω_0'dan sapma miktarını göstermektedir [3,4]. Denklem 3.12'yi, denklem 3.11'de yerleştirir, sönüm ve zorlayıcı kuvvetin etkilerinin ihmal edilebilir olduğunu kabul edersek denklem 3.11 denklem 3.13 haline gelir.

$$\ddot{\theta} + \Omega^2\theta - \varepsilon\sigma\theta + \varepsilon(\alpha_3\theta^3 + \alpha_5\theta^5) + \varepsilon(2\mu\dot{\theta} + \mu_3\dot{\theta}^3) = \varepsilon.f\cos\Omega t \tag{3.13}$$

Bölüm 3.1.1'de anlatıldığı üzere, denklem 3.13'ün çözümü için denklem 3.14'te gösterilen yaklaşım kullanılabilir.

$$\theta = \theta_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon\theta_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2\theta_2(T_0, T_1, T_2) + \dots\dots\dots \tag{3.14}$$

Denklem 3.14'de ; T_0 = t ω_0 frekansına sahip hareketleri, $T_1 = \varepsilon$ t ve $T_2 = \varepsilon^2$ t nonlineeriteye sahip genlik ve fazları karakterize eden değişkenleri göstermektedir. Denklem 3.14, denklem 3.13'de yerine yerleştirilirse denklem 3.15 elde edilir.

$$\begin{aligned} &\ddot{\theta}_0 + \varepsilon\ddot{\theta}_1 + \varepsilon^2\ddot{\theta}_2 + \Omega^2(\theta_0 + \varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2) - \varepsilon\sigma(\theta_0 + \varepsilon\theta_1) + \varepsilon\alpha_3\theta^3 + 3\varepsilon^2\alpha_3\theta_0^2\theta_1 + \\ &+ \varepsilon\alpha_5\theta_0^5 + 5\varepsilon\alpha_5\theta_0^4\theta_1 + 2\mu(\varepsilon\dot{\theta}_0 + \varepsilon^2\dot{\theta}_1) + \varepsilon\mu_3(\dot{\theta}_0^3 + 3\varepsilon\dot{\theta}_0^2\dot{\theta}_1) = \varepsilon.f\cos\Omega t \end{aligned} \tag{3.15}$$

Denklem 3.1 ve denklem 3.2, denklem 3.15'te yerlerine yerleştirilirse yeni bir diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklem $D_n = \partial/\partial T_n$ 'ni gösterecek şekilde yeniden yazılırsa denklem 3.16 elde edilir.

$$D_0\theta_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1\theta_0 + 2\varepsilon^2 D_0 D_2\theta_0 + \varepsilon^2 D_1^2\theta_0 + \varepsilon^2 D_0^2\theta_1 + 2\varepsilon^2 D_0 D_1\theta_0 + \varepsilon^2 D_0^2\theta_2 +$$

$$+\Omega^2(\theta_0 + \varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2) - \varepsilon\sigma\theta_0 - \varepsilon^2\sigma\theta_1 + \varepsilon\alpha_3\theta_0^3 + 3\varepsilon^2\alpha_3\theta_0^2\theta_1 + 5\varepsilon\alpha_5\theta_0^4\theta_1 +$$

$$+\varepsilon\alpha_5\theta_0^5 + 2\varepsilon\mu D_0\theta_0 + \varepsilon 2\mu D_0\theta_0 + \varepsilon^2 2\mu D_1\theta_0 + \varepsilon^2 2\mu D_0\theta_1 + \mu_3\varepsilon\mu_3(D_0\theta_0)^3 +$$

$$+3\varepsilon^2 D_0\theta_1(D_0\theta_0)^2 + 3\varepsilon^2 D_1\theta_0(D_0\theta_0)^2\mu_3 = \varepsilon.f\cos\Omega t \tag{3.16}$$

Bölüm 3.1.1’de anlatıldığı gibi denklem 3.16’nın ε^0, ε^1 ve ε^2’li terimlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\varepsilon^0: \; D_0^2\theta_0 + \Omega^2\theta_0 = 0 \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^1: \; D_0^2\theta_1 + \Omega^2\theta_1 &= -2D_0D_1\theta_0 + \sigma\theta_0 - 2\mu D_0\theta_0 - \mu_3(D_0\theta_0)^3 - \alpha_3\theta_0^3 \\ &\quad - \alpha_5\theta_0^5 + f.\cos\Omega T_0\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^2: \; D_0^2\theta_2 + \Omega^2\theta_2 &= -2D_0D_1\theta_1 - 2D_0D_2\theta_0 - D_1^2\theta_0 + \sigma\theta_1 - 2\mu D_0\theta_1 \\ &\quad - 2\mu D_1\theta_0 - 3\mu_3(D_0\theta_0)^2 D_0\theta_1 - 3\mu_3(D_0\theta_0)^2 D_1\theta_0 \\ &\quad - 3\alpha_3\theta_0^2\theta_1 - 5\alpha_5\theta_0^4\theta_1\end{aligned} \tag{3.19}$$

Bölüm 3.1.1’de anlatıldığı üzere denklem 3.17’nin genel çözümü denklem 3.20’dir.

$$\theta_0 = a(T_1, T_2)\cos\left[T_0 + \beta(T_1, T_2)\right] \tag{3.20}$$

Denklem 3.20 kompleks formda yazılırsa denklem 3.21 halini alır [3].

$$\theta_0 = A(T_1, T_2)e^{i\Omega T_0} + \overline{A}(T_1, T_2)e^{-i\Omega T_0} \tag{3.21}$$

Burada ;

$$A(T_1, T_2) = \frac{1}{2}a(T_1, T_2)e^{i\beta(T_1, T_2)} \tag{3.22}$$

Denklem 3.22’de, a bağıl hareketin genliğini, b ise fazını göstermektedir. Denklem 3.21 denklem 3.18’de yerine yerleştirilirse denklem 3.23 elde edilir.

$$D_0^2\theta_1 + \Omega^2\theta_1 = \left[-2i\Omega D_1 A + \sigma A - 2i\mu\Omega A - 3i\mu_3\Omega^3 A^2\overline{A} - 3\alpha_3 A^2\overline{A} - 10\alpha_5 A^3\overline{A}^2\right]e^{i\Omega T_0}$$
$$+\frac{f.e^{i\Omega T_0}}{2} + \left[i\mu_3\Omega^3 A^3 + \alpha_3 A^3 - 5\alpha_5 A^4\overline{A}\right]e^{3i\Omega T_0} - \alpha_5 A^5 e^{5i\Omega T_0} + p \quad (3.23)$$

Denklem 3.23'de p, diferansiyel denklemin sağ tarafındaki terimlerin kompleks eşleniğini göstermektedir [3]. Denklem 3.23'ün sağ tarafında harmonikliği bozan terimlerin yok edilmesi için e^{iWT_0} parantezi içinde kalan terimler sıfıra eşitlenmelidir.

$$2i\Omega D_1 A - \sigma A + 2i\mu\Omega A + 3i\mu_3\Omega^3 A^2\overline{A} + 3\alpha_3 A^2\overline{A} + 10\alpha_5 A^3\overline{A}^2 - \frac{1}{2}f = 0 \quad (3.24)$$

$$D_0^2\theta_1 + \Omega^2\theta_1 = \left(i\mu_3\Omega^3 A^3 + \alpha_3 A^3 - 5\alpha_5 A^4\overline{A}\right)\cdot e^{3i\Omega T_0} - \alpha_5 A^5 e^{5i\Omega T_0} + kk \quad (3.25)$$

Burada kk, denklem 3.25'in sağ tarafındaki terimlerinin kompleks eşleniğini göstermektedir.

Denklem 3.25'in özel çözümü denklem 3.26'da gösterilmiştir [3].

$$\theta_1 = \left(\Gamma A^3 + \Gamma_1 A^4\overline{A}\right)\cdot e^{3i\Omega T_0} + \Gamma_2 A^5 e^{5i\Omega T_0} + kk \quad (3.26)$$

Burada Γ, Γ_1, Γ_2 sırasıyla denklem 3.27'de gösterilen ifadelere eşittir. kk, denklem 3.25'in sağ tarafındaki terimlerinin kompleks eşleniğini göstermektedir.

$$\Gamma = \frac{1}{8}\left(\frac{\alpha_3}{\Omega^2} - i\mu_3\Omega\right),\ \Gamma_1 = \frac{5\alpha_5}{8\Omega^2},\ \Gamma_2 = \frac{\alpha_5}{24\Omega^2} \quad (3.27)$$

Denklem 3.21 ve denklem 3.25, denklem 3.19'da yerlerine yazılırsa denklem 3.28 elde edilir. Denklem 3.28'in sağ tarafındaki harmonikliği bozmayan terimler DBT kısaltmasıyla gösterilmiştir [3].

$$D_0^2\theta_2 + \Omega^2\theta_2 = -(2i\Omega D_2 A + D_1^2 A)\cdot e^{i\Omega T_0} - 2\mu D_1 A e^{i\Omega T_0} - 3\alpha_3 A^3\overline{A}^2\Gamma e^{i\Omega T_0}$$
$$-3\alpha_3 A^4\overline{A}^3\Gamma_1 e^{i\Omega T_0} - 5\alpha_5\left[A^4\overline{A}^3\left(4\Gamma + \overline{\Gamma}\right) + A^5\overline{A}^4\left(4\Gamma_1 + \overline{\Gamma}_1\right)\right]\cdot e^{i\Omega T_0}$$
$$+3\mu_3\Omega^2(D_1 A^2\overline{A} - 2D_1 A^2\overline{A} + 3i\Omega A^3\overline{A}^2\Gamma + 3i\Omega A^4\overline{A}^3\Gamma_1)\cdot e^{i\Omega T_0}$$
$$-5\alpha_5\Gamma_2 A^5\overline{A}^4 e^{i\Omega T_0} + kk + DBT \quad (3.28)$$

Denklem 3.28'deki harmonikliği bozan terimler denklem 3.29'da gösterilmiştir [5].

$$2i\Omega D_2 A + D_1^2 A + 2\mu D_1 A + 3\mu_3\Omega^2(2D_1 A\overline{A} - D_1 A^2 A) = 3\Gamma A^3\overline{A}^2 \cdot (3i\mu_3\Omega^3 - \alpha_3)$$

$$+ 3\Gamma_1 A^4\overline{A}^3(3i\mu_3\Omega^3 - \alpha_3) - 5\alpha_5 A^4\overline{A}^3(4\Gamma + \overline{\Gamma}) - 5\alpha_5 A^5\overline{A}^4(4\Gamma_1 + \overline{\Gamma}_1 + \Gamma_2) \qquad (3.29)$$

Denklem 3.24'deki $2iD_1\Omega A$ terimi, sol tarafta bırakılıp, diğer terimler eşitliğin sağ tarafına atıldıktan sonra yeni bir denklem elde edilir. Elde edilen bu denklemin her iki tarafı 2Ω ile bölünüp, i ile çarpıldıktan sonra denklem 3.30 elde edilir.

$$D_1 A = \frac{i}{2\Omega}\left[-\sigma A - \frac{f}{2} + 3\alpha_3 A^2\overline{A} + 10\alpha_5 A^3\overline{A}^2\right] - \mu A - \frac{3}{2}\mu_3\Omega^2 A^2\overline{A} \qquad (3.30)$$

Denklem 3.30, denklem 3.29'da yerine yerleştirilirse denklem 3.31 elde edilir.

$$2i\Omega D_2 A = \frac{f\sigma}{8\Omega^2} + \frac{if\mu}{4\Omega} + (\frac{\sigma^2}{4\Omega^2} + \mu^2)A + (\frac{3i\mu_3\Omega f}{4} - \frac{3\alpha_3 f}{4\Omega^2})A\overline{A} + (\frac{9i\mu_3\Omega f}{8} + \frac{3\alpha_3 f}{8\Omega^2})A^2$$

$$+ (3i\sigma\mu_3\Omega - \frac{3\sigma\alpha_3}{2\Omega^2} + \frac{3i\mu\alpha_3}{\Omega})A^2\overline{A} - \frac{15 f\alpha_5}{4\Omega^2}A^2\overline{A}^2 + \frac{5f\alpha_5}{2\Omega^2}A^3\overline{A}$$

$$+ (\frac{-5\alpha_5\sigma}{\Omega^2} + \frac{20i\mu\alpha_5}{\Omega} - \frac{9\mu_3^2\Omega^4}{8} - 3i\alpha_3\mu_3\Omega + \frac{15\alpha_3^2}{8\Omega^2})A^3\overline{A}^2$$

$$+ (\frac{15i\mu_3\alpha_5\Omega}{2} + \frac{10\alpha_3\alpha_5}{\Omega^2})A^4\overline{A}^3 + \frac{5f\alpha_5^2}{6\Omega^2}A^5\overline{A}^4 \qquad (3.31)$$

$2i\Omega A$'nın zamana göre alınmış türevi denklem 3.32 ile ifade edebilir.

$$\frac{d}{dt}(2i\Omega A) = D_0(2i\Omega A) + \varepsilon 2i\Omega D_1 A + \varepsilon^2 2i\Omega D_2 A \qquad (3.32)$$

Burada, A terimi T_0'a bağlı olmadığından $2i\Omega D_0 A$ terimi sıfıra eşittir.

Denklem 3.30 ve denklem 3.31, denklem 3.32'de yerlerine konulup, elde edilen bu yeni denklem gerçek ve sanal kısımlarına ayrılırsa denklem 3.33 ve denklem 3.34 elde edilir. Denklem 3.33 gerçek kısmı, denklem 3.34 sanal kısmı göstermektedir.

$$\dot{a} = \varepsilon\left[-\frac{f}{2\Omega}\sin\beta - \mu a - \frac{3}{8}\mu_3\Omega^2 a^3\right] + \varepsilon^2\left[(\frac{3}{8}\sigma\mu_3 + \frac{3\mu\alpha_3}{8\Omega^2})a^3 + (\frac{5\mu\alpha_5}{8\Omega^2} - \frac{3\alpha_3\mu_3}{32})a^5 +\right.$$

$$\left. + \frac{15\mu_3\alpha_5 a^7}{256} + (\frac{9f\alpha_3 a^2}{32\Omega^3} + \frac{25f\alpha_5 a^4}{64\Omega^3} - \frac{f\sigma}{8\Omega^3})\sin\beta + (\frac{f\mu}{4\Omega^2} + \frac{15}{32}\mu_3 f a^2)\cos\beta\right] \qquad (3.33)$$

$$a\dot{\beta}=\varepsilon\left(\frac{-a\sigma}{2\Omega}+\frac{3\alpha_3 a^3}{8\Omega}+\frac{5\alpha_5 a^5}{16\Omega}-\frac{f}{2\Omega}\cos\beta\right)+\varepsilon^2\left[-\left(\frac{\sigma^2}{8\Omega^3}+\frac{\mu^2}{2\Omega}\right)a+\frac{3\sigma\alpha_3 a^3}{16\Omega^3}+\right.$$

$$+\left(\frac{5\alpha_5\sigma}{32\Omega^3}+\frac{9\mu_3^2\Omega^3}{256}-\frac{15\alpha_3^2}{256\Omega^3}\right)a^5-\frac{5\alpha_3\alpha_5 a^7}{64\Omega^3}-\frac{55\alpha_5^2 a^9}{3072\Omega^3}+\left(\frac{3\mu_3 f a^2}{32}-\frac{f\mu}{4\Omega^2}\right)\sin\beta$$

$$\left.+\left(\frac{3f\alpha_3 a^2}{32\Omega^3}+\frac{5f\alpha_5 a^4}{64\Omega^3}-\frac{f\sigma}{8\Omega^3}\right)\cos\beta\right] \qquad (3.34)$$

Denklem 3.33'de $\dot{a}$, denklem 3.34'de $\dot{\beta}$ sıfıra eşitlenirse iki yeni denklem elde edilir.

$$\mu a+\left(\frac{3}{8}\mu_3\Omega^2-\frac{3}{8}\sigma\mu_3-\frac{3\mu\alpha_3}{8\Omega^2}\right)a^3+\left(\frac{3}{32}\alpha_3\mu_3-\frac{5\mu\alpha_5}{8\Omega^2}\right)a^5-\frac{15}{256}\mu_3\alpha_5 a^7$$

$$=\left(\frac{25\alpha_5 a^4}{64\Omega^3}+\frac{9\alpha_3 a^2}{32\Omega^2}-\frac{\sigma}{8\Omega^3}-\frac{1}{2\Omega}\right)f\sin\beta+\left(\frac{\mu}{4\Omega^2}+\frac{15}{32}\mu_3 a^2\right)f\cos\beta \qquad (3.35)$$

$$\left(\frac{\sigma}{2\Omega}+\frac{\sigma^2}{8\Omega^3}+\frac{\mu^2}{2\Omega}\right)a-\left(\frac{3\alpha_3}{8\Omega}+\frac{3\sigma\alpha_3}{16\Omega^3}\right)a^3+\left(\frac{15\alpha_3^2}{256\Omega^3}-\frac{9\mu_3^2\Omega^3}{256}-\frac{5\alpha_5\sigma}{32\Omega^3}-\frac{5\alpha_5}{16\Omega}\right)a^5$$

$$+\frac{5\alpha_3\alpha_5 a^7}{64\Omega^3}+\frac{55\alpha_5^2 a^9}{3072\Omega^3}=\cos\beta\left(\frac{5\alpha_5 a^4}{64\Omega^3}+\frac{3\alpha_3 a^2}{32\Omega^3}-\frac{\sigma}{32\Omega^3}-\frac{1}{2\Omega}\right)$$

$$+\sin\beta\left(\frac{3}{32}\mu_3 a^2-\frac{\mu}{4\Omega^2}\right) \qquad (3.36)$$

Denklem 3.35 ve 3.36'nın, Ek A'da verilmiş bilgisayar programı yardımıyla çözümünden a ve β katsayıları bulunur. Denklem 3.26'da, denklem 3.27'de gösterilen ifadeler ve denklem 3.22'de gösterilen A'nın değeri yerleştirilip, $(e^{i\theta}+e^{-i\theta})=2\cos\theta$ ve $i\cdot(e^{i\theta}+e^{-i\theta})=2\sin\theta$ dönüşümleri yapılırsa denklem 3.37 elde edilir.

$$\theta_1=\left(\frac{a^3\alpha_3}{32\Omega^2}+\frac{5a^5\alpha_5}{128}\right)\cos(3\Omega T_0+3\beta)+\frac{a^5\alpha_5}{374\,\Omega^2}\cos(5\Omega T_0+5\beta)+$$

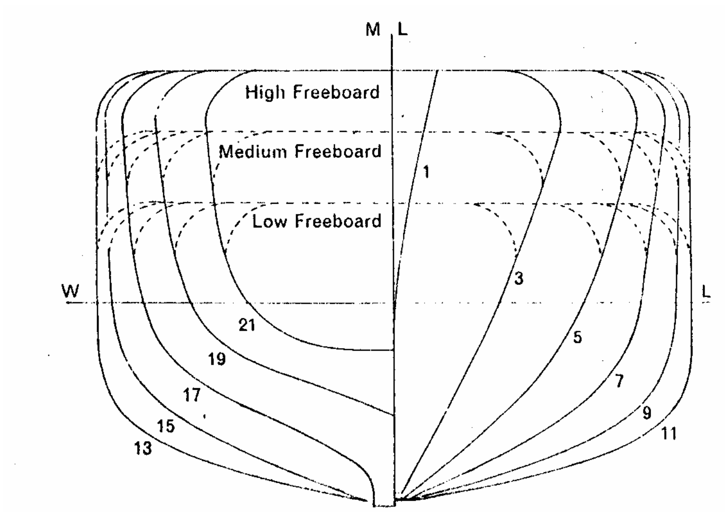
$$+\frac{\mu_3 a^3\Omega}{32}\sin(3\Omega T_0+3\beta) \qquad (3.37)$$

Denklem 3.37'de ve denklem 3.21, denklem 3.14'de yerlerine yazılırsa denklem 3.38 elde edilir. Denklem 3.38, denklem 3.13'ün yaklaşık çözümünü göstermektedir.

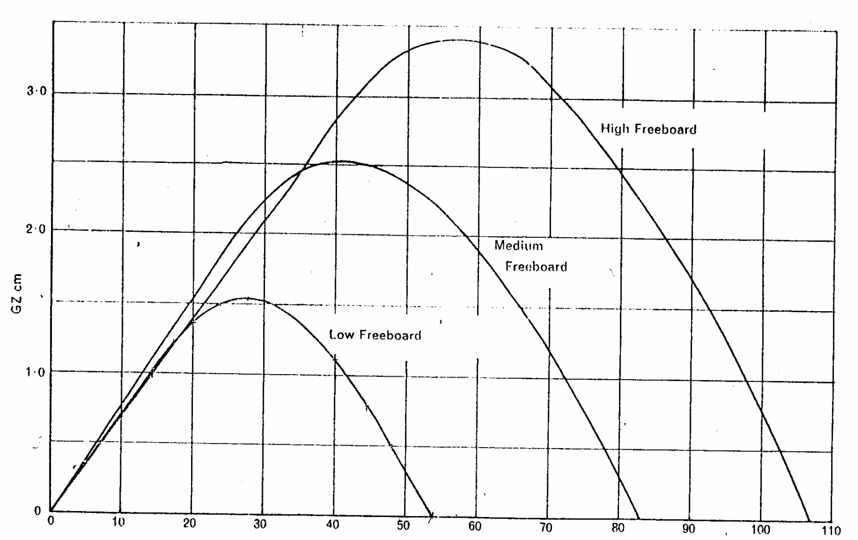
$$\theta = a\cos(\Omega t+\beta)+\varepsilon\left[\left(\frac{\alpha_3 a^3}{32\Omega^2}+\frac{5\alpha_5 a^5}{128\Omega^2}\right)\cos(3\Omega t+3\beta)+\frac{\alpha_5 a^5}{384\Omega^2}\cos(5\Omega t+5\beta)\right.$$

$$\left.+\frac{\mu_3\Omega a^3}{32}\sin(3\Omega t+3\beta)\right]+O(\varepsilon^2) \qquad (3.38)$$

Bu yöntemin sayısal uygulamasında, şekil 3.1'de en kesitleri ve şekil 3.2'de GZ eğrisi gösterilen düşük fribordlu modelin değerleri kullanılmıştır [3,4,10]. Bu değerler denklem 3.39a ve 3.39b'de gösterilmiştir.



Şekil 3.1 Model en kesitleri



Şekil 3.2 GZ-θ eğrisi

Δ=93.2 kg L_{WL}=3.5 m. B=0.4 m. T_{ort}=0.135 m. KG=0.152 m. C_B=0.45 (3.39a)

ω_0 = 5.278 μ = 0.086 μ_3 = 0.108 α_3 = -1.402 ω_0^2 α_5= 0.271 ω_0^2 I_E/ I = 0.25 (3.39b)

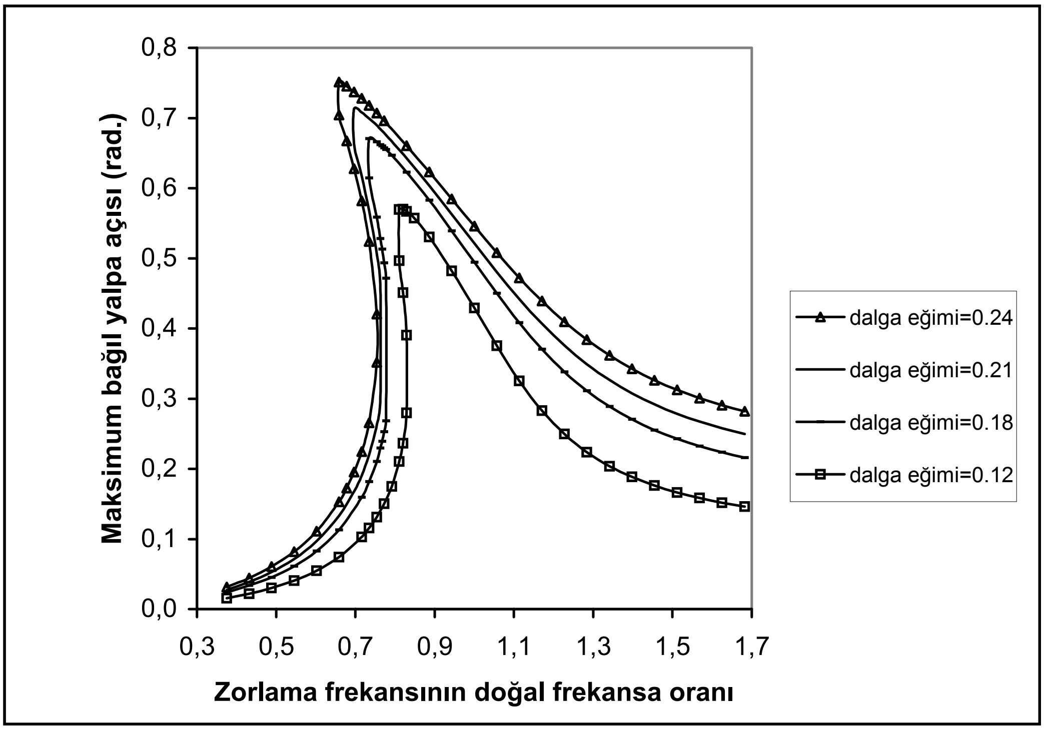
Çözümünü aradığımız denklem 3.11'deki f, denklem 3.40 yardımıyla bulunabilir.

$$(I_G + I_E)\ f = I_G\ \alpha_m\ \Omega^2 \quad (3.40)$$

Burada α_m dalga eğimini göstermektedir [3,4].

Dalga eğimi α_m = 0.24, 0.21, 0.18 ve 0.12 için zorlama frekanslarına karşılık gelen a ve β katsayıları sırasıyla Tablo B.1, B.2, B.3 ve B.4'te gösterilmiştir.

Şekil 3.1, Ek E'de verilen bilgisayar programı yardımıyla elde edilmiş maksimum bağıl yalpa açılarının, dalga eğimine bağlı olarak nasıl değiştiğini göstermektedir. Şekilden de görülebileceği gibi artan dalga eğimiyle birlikte yalpa açısının aldığı maksimum değerde ve rezonans genişliğinde artış meydana gelmektedir.



Şekil 3.3 Dalga eğiminin maksimum bağıl yalpa açıları üzerindeki etkisi

3.2 Bogoliubov Mitropolsky Asimptotik Metodu ve Uygulaması

3.2.1 Bogoliubov Mitropolsky asimptotik metodu

Bogoliubov Mitropolsky asimptotik metodu, nonlineer sistemlerin çözümünde sıkça kullanılan bir yöntemdir. Şimdi bu yöntemin nasıl uygulandığını, sinüsodial bir kuvvet etkisi altındaki nonlineer osilatörün hareketini inceleyerek gösterelim. Salınım yapan bu tip bir sistem denklem 3.41 ile ifade edilebilir [11].

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2 x = \varepsilon F(x, \frac{dx}{dt}) + \varepsilon E \sin vt \tag{3.41}$$

Burada w sistemin doğal frekansını, v zorlayıcı kuvvetin frekansını göstermektedir. Sinüsodial kuvvetin genliğinin küçük olduğu kabul edilmiştir.

Denklem 3.41'in çözümü için denklem 3.42'de gösterilen yaklaşım kullanılabilir.

$$x = a\cos(\varphi + \beta) \tag{3.42}$$

Burada $\varphi = v$ t'ye eşittir.

a ve β, denklem 3.43 ve denklem 3.44'ün yardımıyla belirlenebilir [11].

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a, \beta) \tag{3.43}$$

$$\frac{d\beta}{dt} = w - v + \varepsilon B_1(a, \beta) \tag{3.44}$$

Denklem 3.42'de gösterilen ifadenin zamana göre birinci ve ikinci türevlerini alalım.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{da}{dt}\cos(\varphi + \beta) - a\sin(\varphi + \beta)\frac{d\varphi}{dt} - a\sin(\varphi + \beta)\frac{d\beta}{dt} \tag{3.45}$$

Denklem 3.45'de, denklem 3.43 ve denklem 3.44'te gösterilen ifadelerle $d\varphi/dt = v$ yerlerine yazılırsa denklem 3.46 elde edilir.

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon A_1 \cos(\varphi + \beta) - a\sin(\varphi + \beta)\ v - a\sin(\varphi + \beta)\left(w - v + \varepsilon B_1\right) \tag{3.46}$$

Denklem 3.46 yeniden düzenlenirse denklem 3.47 elde edilir.

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon A_1 \cos(\varphi + \beta) - a\; w \sin(\varphi + \beta)\; - a \sin(\varphi + \beta)\, \varepsilon B_1 \tag{3.47}$$

Denklem 3.47'de elde ettiğimiz dx/dt'nın zamana göre bir daha türevi alınırsa denklem 3.48 elde edilir.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varepsilon\left[(w - v)\frac{\partial A_1}{\partial \beta} - 2\,a\,w\,B_1\right]\cos(\varphi + \beta) - a\,w^2 \cos(\varphi + \beta)$$

$$- \varepsilon\left[(w - v)\; a\frac{\partial B_1}{\partial \beta} + 2\;\, wA_1\right]\sin(\varphi + \beta) \tag{3.48}$$

Denklem 3.48 ve denklem 3.42, denklem 3.41'in sol tarafında yerlerine yerleştirilirse denklem 3.49 elde edilir [11].

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2 x = \varepsilon\left[(w - v)\frac{\partial A_1}{\partial \beta} - 2\,a\,w\,B_1\right]\cos(\varphi + \beta)$$

$$- \varepsilon\left[(w - v)\; a\frac{\partial B_1}{\partial \beta} + 2\;\, wA_1\right]\sin(\varphi + \beta) \tag{3.49}$$

Denklem 3.47 ve denklem 3.42, denklem 3.41'in sağ tarafında yerlerine yerleştirilirlerse denklem 3.50 elde edilir [11].

$$\varepsilon\, f(x, \dot{x}) + \varepsilon\, E \sin\varphi = \varepsilon\, f(a\cos(\varphi + \beta), - a\, w \sin(\varphi + \beta)) + \varepsilon\, E \sin\varphi \tag{3.50}$$

Denklem 3.50, denklem 3.51 şeklinde yazılabilir [11].

$$\varepsilon\, f(x, \dot{x}) + \varepsilon\, E \sin\varphi = \frac{\varepsilon\cos(\varphi + \beta)}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\,w\sin\psi)\; \cos\psi\, d\psi + \varepsilon\, E \sin\varphi$$

$$+ \frac{\varepsilon\sin(\varphi + \beta)}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\,w\sin\psi)\; \sin\psi\, d\psi \tag{3.51}$$

Burada $\psi = \varphi + \beta$'ya eşittir.

Denklem 3.51'de denklem 3.52'de gösterilen dönüşüm yapılırsa denklem 3.53 elde edilir.

$$\sin\varphi = \sin(\varphi + \beta - \beta) = \sin(\varphi + \beta)\cos\beta - \sin\beta\cos(\varphi + \beta) \tag{3.52}$$

$$\varepsilon f(x,\dot{x}) + \varepsilon E \sin\varphi = \frac{\varepsilon\cos(\varphi+\beta)}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\,w\sin\psi)\,\cos\psi\,d\psi$$
$$+\frac{\varepsilon\sin(\varphi+\beta)}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\,w\sin\psi)\,\sin\psi\,d\psi$$
$$+\varepsilon E\left[\sin(\varphi+\beta)\cos\beta - \sin\beta\cos(\varphi+\beta)\right] \qquad (3.53)$$

Denklem 3.49 ve 3.53'ün sağ tarafındaki terimler birbirine eşitlenirse denklem 3.54 ve denklem 3.55 elde edilir.

$$(w-v)\frac{\partial A_1}{\partial\beta} - 2\,a\,w\,B_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\,w\sin\psi)\,\cos\psi\,d\psi - E\sin\beta \qquad (3.54)$$

$$(w-v)\,a\,\frac{\partial B_1}{\partial\beta} + 2\,w\,A_1 = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\,w\sin\psi)\,\sin\psi\,d\psi - E\cos\beta \qquad (3.55)$$

Denklem 3.54 ve denklem 3.55'in çözümünden A_1 ve B_1 bulunur.

$$A_1 = -\frac{1}{2\pi w}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\,w\sin\psi)\,\sin\psi\,d\psi - \frac{E}{w+v}\cos\beta \qquad (3.56)$$

$$B_1 = -\frac{1}{2\pi w a}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\,w\sin\psi)\,\cos\psi\,d\psi - \frac{E}{(w+v)\,a}\sin\beta \qquad (3.57)$$

Denklem 3.56 denklem 3.43'te, denklem 3.57 denklem 3.44'te yerine yerleştirilirse denklem 3.58 ve 3.59 elde edilir.

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2\pi w}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\,w\sin\psi)\,\sin\psi\,d\psi - \frac{\varepsilon E}{w+v}\cos\beta \qquad (3.58)$$

$$\frac{d\beta}{dt} = w - v - \frac{\varepsilon}{2\pi w a}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\,w\sin\psi)\,\cos\psi\,d\psi + \frac{\varepsilon E}{(w+v)\,a}\sin\beta \qquad (3.59)$$

Denklem 3.58 ve 3.59, denklem 3.60 ve 3.61 şeklinde yazılabilir.

$$\frac{da}{dt} = -\delta_e(a)\,a - \frac{\varepsilon E}{w+v}\cos\beta \qquad (3.60)$$

$$\frac{d\beta}{dt} = w_e(a) - v + \frac{E}{(w+v)\,a}\sin\beta \qquad (3.61)$$

Denklem 3.60'daki $\delta_e(a)$ denklem 3.62'ye, denklem 3.61'deki $w_e(a)$ denklem 3.63'e eşittir.

$$\delta_e(a) = \frac{\varepsilon}{2\pi w a}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a w \sin\psi)\,\sin\psi\, d\psi \tag{3.62}$$

$$w_e(a) = w - \frac{\varepsilon}{2\pi w a}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a w \sin\psi)\,\cos\psi\, d\psi \tag{3.63}$$

a ve β katsayılarını bulabilmek için denklem 3.60 ve 3.61'in sağ tarafları sıfıra eşitlenirse denklem 3.64 ve 3.65 elde edilir.

$$-\delta_e(a)\; a \;-\; \frac{\varepsilon E}{w+v}\cos\beta = 0 \tag{3.64}$$

$$w_e(a) - v + \frac{E}{(w+v)a}\sin\beta = 0 \tag{3.65}$$

Denklem 3.64 ve 3.65, denklem 3.66 ve 3.67 şeklinde yazılabilir [11].

$$2 v a\, \delta_e(a) = -\varepsilon E \cos\beta \tag{3.66}$$

$$a\left(w_e^2 - v^2\right) = -\varepsilon E \sin\beta \tag{3.67}$$

Denklem 3.66 ve 3.67'nin her iki taraflarının kareleri alınıp taraf tarafa toplanırsa denklem 3.68 elde edilir. Denklem 3.68'in çözümünden a katsayısı bulunur.

$$a\left[\left(w_e^2 - v^2\right)^2 + 4 v^2 \delta_e^2(a)\right] = \varepsilon^2 E^2 \tag{3.68}$$

Denklem 3.66 ve 3.67 taraf tarafa bölünürse denklem 3.39 elde edilir. Denklem 3.69'dan β bulunur.

$$\tan\beta = \frac{w_e^2 - v^2}{2 v \delta_e(a)} \tag{3.69}$$

Denklem 3.68 ve 3.69'dan elde edilen a ve β değerleri denklem 3.42'de yerlerine yerleştirilirlerse denklem 3.41'in birinci mertebeden yaklaşık çözümünü bulunmuş olur.

3.2.2 Yalpa denkleminin Bogoliubov Mitropolsky asimptotik metoduyla çözümü

Bölüm 3.1.2'de incelediğimiz yalpa hareketini temsil eden denklem 3.11'i tekrar ele alalım.

$$\ddot{\theta}+\omega_0^2\,\theta+\alpha_3\theta^3+\alpha_5\theta^5+2\mu\dot{\theta}+\mu_3\dot{\theta}^3=f\ \cos\Omega\,t \qquad (3.70)$$

Denklem 3.70, zorlayıcı kuvvetin genliğinin (f)'in ve sönümün etkisinin küçük olduğunu kabul edilerek denklem 3.71 şeklinde yazılabilir.

$$\ddot{\theta}+\omega_0^2\,\theta=\varepsilon\ F(\theta,\dot{\theta})+\varepsilon\,E\ \cos\Omega\,t \qquad (3.71)$$

Burada ε F(θ,dθ/dt) terimi denklem 3.72'deki ifadeye eşittir.

$$\varepsilon\ F(\theta,\dot{\theta})=-\alpha_3\theta^3-\alpha_5\theta^5-2\mu\dot{\theta}-\mu_3\dot{\theta}^3 \qquad (3.72)$$

Denklem 3.70'in çözümü için denklem 3.73'de gösterilen yaklaşım kullanılabilir.

$$\theta=a\cos(\varphi+\beta) \qquad (3.73)$$

Burada $\varphi=\Omega$ t'ye eşittir.

a ve β denklem 3.74 ve 3.75 yardımıyla belirlenir.

$$\frac{da}{dt}=\varepsilon\,A_1(a,\beta) \qquad (3.74)$$

$$\frac{d\beta}{dt}=\omega_0-\Omega-\varepsilon\,B_1(a,\beta) \qquad (3.75)$$

Bölüm 3.2.1'de anlatıldığı gibi denklem 3.73, denklem 3.71'in sol tarafında yerleştirilirse denklem 3.76 elde edilir.

$$\ddot{\theta}+\omega_0^2\,\theta=\varepsilon\left[(\omega_0-\Omega)\frac{\partial A_1}{\partial\beta}-2\ a\,\omega B_1\right]\cos(\varphi+\beta)$$
$$-\varepsilon\left[(\omega_0-\Omega)a\ \frac{\partial B_1}{\partial\beta}+2\ \ \omega A_1\right]\sin(\varphi+\beta) \qquad (3.76)$$

Bölüm 3.2.1'de anlatıldığı gibi denklem 3.73, denklem 3.71'in sağ tarafında yerleştirilirse denklem 3.77 elde edilir.

$$\varepsilon\, F(\theta,\dot{\theta}) + \varepsilon\, E \cos\Omega t = \frac{\varepsilon \cos(\varphi+\beta)}{\pi}\int_0^{2\pi} F(a\cos\psi, -a\,\omega \sin\psi)\, \cos\psi\, d\psi$$
$$+ \frac{\varepsilon \sin(\varphi+\beta)}{\pi}\int_0^{2\pi} F(a\cos\psi, -a\,\omega \sin\psi)\, \sin\psi\, d\psi$$
$$+ \varepsilon\, E\left[\cos(\varphi+\beta)\cos\beta + \sin(\varphi+\beta)\sin\beta\right] \qquad (3.77)$$

Denklem 3.76 ve denklem 3.77'nin sağ tarafları birbirlerine eşitlenirse denklem 3.78 ve denklem 3.79 elde edilir.

$$(\omega_0 - \Omega)\frac{\partial A_1}{\partial \beta} - 2\, a\, \omega\, B_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(a\cos\psi, -a\,\omega \sin\psi)\, \cos\psi\, d\psi + E\cos\beta \qquad (3.78)$$

$$(\omega_0 - \Omega)\, a\frac{\partial B_1}{\partial \beta} + 2\, \omega\, A_1 = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(a\cos\psi, -a\,\omega \sin\psi)\, \sin\psi\, d\psi - E\sin\beta \qquad (3.79)$$

Denklem 3.78 ve 3.79'dan yararlanarak $A_1(a,\beta)$ ve $B_1(a,\beta)$ bulunabilir [11].

$$A_1(a,\beta) = -\frac{1}{2\pi\omega_0}\int_0^{2\pi} F(a\cos\psi, -a\,\omega \sin\psi)\, \sin\psi\, d\psi - \frac{E}{\omega_0+\Omega}\sin\beta \qquad (3.80)$$

$$B_1(a,\beta) = -\frac{1}{(2\pi\omega_0)\, a}\int_0^{2\pi} F(a\cos\psi, -a\,\omega \sin\psi)\, \cos\psi\, d\psi - \frac{E}{a\,(\omega_0+\Omega)}\cos\beta \qquad (3.81)$$

Denklem 3.80'de gösterilen $A_1(a,\beta)$'ya karşılık gelen ifade denklem 3.74'te, denklem 3.81'de gösterilen $B_1(a,\beta)$'ya karşılık gelen ifade denklem 3.75'de yerleştirilirse denklem 3.82 ve denklem 3.83 elde edilir.

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0}\int_0^{2\pi} F(a\cos\psi, -a\,\omega \sin\psi)\, \sin\psi\, d\psi - \frac{\varepsilon E}{\omega_0+\Omega}\sin\beta \qquad (3.82)$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \omega_0 - \Omega - \frac{\varepsilon}{(2\pi\omega_0)\, a}\int_0^{2\pi} F(a\cos\psi, -a\,\omega \sin\psi)\, \cos\psi\, d\psi - \frac{\varepsilon E}{a\,(\omega_0+\Omega)}\cos\beta \qquad (3.83)$$

Bölüm 3.2.1'de anlatılan örneğe benzer şekilde a ve β, denklem 3.82 ve 3.83'ten yararlanarak elde edilebilir.

$$a^2 \left\{ \left(\omega_e^2(a) - \Omega^2 \right)^2 + 4\Omega^2 \delta_e^2(a) \right\} = \varepsilon^2 E^2 \tag{3.84}$$

$$\tan\beta = -\frac{2\Omega\delta_e(a)}{\omega_e^2(a) - \Omega^2} \tag{3.85}$$

Denklem 3.84 ve 3.85'daki $\delta_e(a)$ ve $\omega_e(a)$ sırasıyla denklem 3.86 ve 3.87'deki ifadelere eşittir.

$$\delta_e(a) = \frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0 a} \int_0^{2\pi} F(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\sin\psi \, d\psi \tag{3.86}$$

$$\omega_e(a) = \omega_0 - \frac{\varepsilon}{(2\pi\omega_0)a} \int_0^{2\pi} F(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\cos\psi \, d\psi \tag{3.87}$$

Denklem 3.77'de gösterilen $\varepsilon F(\theta, \dot{\theta})$ ifadesinde, θ yerine a cosψ, $\dot{\theta}$ yerine – aωsinψ yazılırsa, denklem 3.88'de gösterilen ε F(acosψ,– aω sinψ) ifadesi elde edilir.

$$\varepsilon F(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi) = 2\mu a\omega_0 \sin\psi + \mu_3 a^3 \omega_0^3 \sin^3\psi - \alpha_3 a^3 \cos^3\psi - \alpha_5 a^5 \cos^5\psi \tag{3.88}$$

Denklem 3.88'de ε F(acosψ, –aωsinψ)'ya karşılık gelen ifade denklem 3.86 ve 3.87'de yerine yerleştirilirse, denklem 3.89 ve denklem 3.90 elde edilir.

$$\delta_e(a) = \mu + \frac{3\omega_0^2 \mu_3}{8} a^2 \tag{3.89}$$

$$\omega_e(a) = \omega_0 + \frac{3\alpha_3}{8\omega_0} a^2 + \frac{5\alpha_5}{16\omega_0} a^4 \tag{3.90}$$

Denklem 3.89'da $\delta_e(a)$'ya karşılık gelen ifadeyle, denklem 3.90'da $\omega_e(a)$'ya karşılık gelen ifade, denklem 3.84 ve denklem 3.85'de yerlerine yerleştirilirse denklem 3.91 ve denklem 3.92 elde edilir. Denklem 3.91'in çözümünden a, denklem 3.92'nin çözümünden β bulunur.

$$a^2\left\{\left[\left(\omega_0+\frac{3\alpha_3}{8\omega_0}a^2+\frac{5\alpha_5}{16\omega_0}a^4\right)^2-\Omega^2\right]^2+4\Omega^2\left[\mu+\frac{3\omega_0^2\mu_3}{8}a^2\right]^2\right\}=f^2 \tag{3.91}$$

Burada $f=\varepsilon E$'ye eşittir.

$$\tan\beta=-\frac{2\Omega\left(\mu+\dfrac{3\omega_0^2\mu_3}{8}a^2\right)}{\left(\omega_0+\dfrac{3\alpha_3}{8\omega_0}a^2+\dfrac{5\alpha_5}{16\omega_0}a^4\right)^2-\Omega^2} \tag{3.92}$$

Bu yöntemin sayısal uygulamasında da bölüm 3.1.2'de denklem 3.39'da gösterilen değerler kullanılmıştır. Çözümünü aradığımız denklem 3.70'deki f, denklem 3.40 yardımıyla hesaplanmıştır.

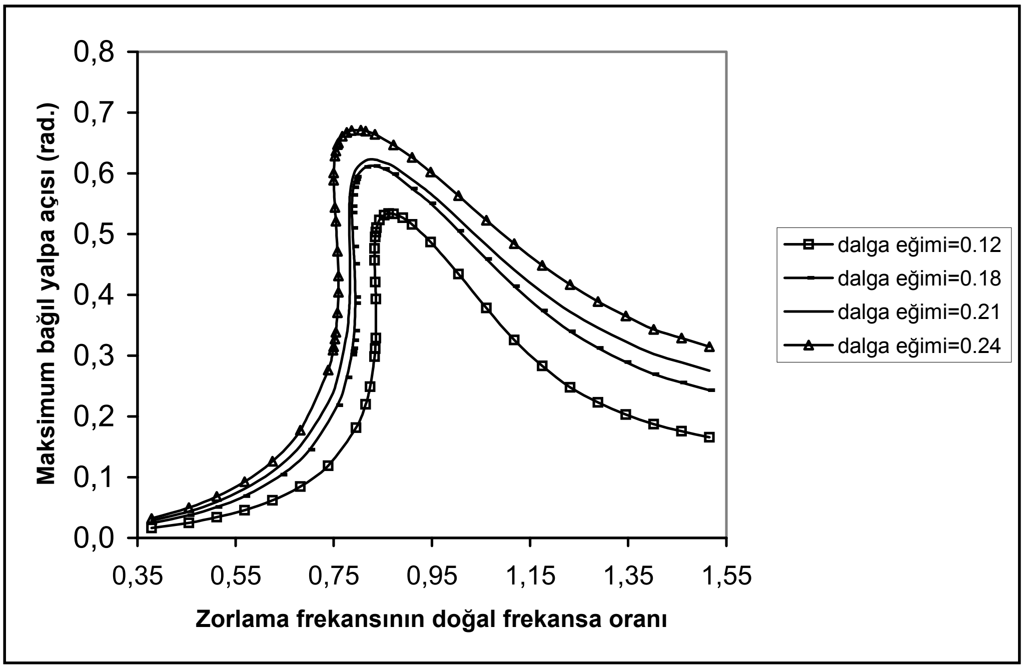
Denklem 3.91 ve 3.92'de denklem 3.39'da gösterilen ifadeler yerlerine yazılırsa denklem 3.93 ve 3.94 elde edilir. Denklem 3.93 ve 3.94'ün çözümünden istenilen zorlama frekansı ve dalga eğimi değerleri için a ve β katsayıları bulunur.

$$a^2\left\{\left[\left(5.278-2.7749085\,a^2+0.446980625\,a^4\right)^2-\Omega^2\right]^2\right.$$
$$\left.+4\Omega^2\left(0.086+1.128122\,a^2\right)^2\right\}=0.64\,\alpha_m^2\,\Omega^4 \tag{3.93}$$

$$\beta=\mathrm{ArcTan}\left[-\frac{2\Omega\left(0.086+1.128122\,a^2\right)^2}{\left(5.278-2.7749085\,a^2+0.446980625\,a^4\right)^2-\Omega^2}\right] \tag{3.94}$$

Dalga eğimi α_m = 0.24, 0.21, 0.18, 0.12 için zorlama frekanslarına karşılık gelen a ve β değerleri Tablo C.1, C.2, C.3 ve C.4'te gösterilmiştir. Bu değerleri kullanarak elde edilen maksimum bağıl yalpa açılarının, zorlama frekanslarına karşılık gelen değerleri şekil 3.2'de gösterilmiştir.

Şekil 3.2'den görülebileceği gibi artan dalga eğimiyle birlikte yalpa açısının aldığı maksimum değerde ve rezonans genişliğinde artış meydana gelmektedir.



Şekil 3.4 Dalga eğiminin maksimum bağıl yalpa açıları üzerindeki etkisi

4. STABİLİTE ANALİZİ

4.1 Floquet Teorisi ve Uygulaması

4.1.1 Floquet teorisi

Denklem 4.1'le gösterilen otonom bir sistemin periyodik çözümlerinin stabilitesinin belirlenmesinde Floquet teorisi kullanılabilir [9].

$$\dot{x} = F(x; M) \tag{4.1}$$

Denklem 4.1'de ; x, n boyutlu durum vektörünü, M, m boyutlu parametre vektörünü gösterir. $M=M_0$ olduğu zaman denklem 2.40'ın periyodik çözümü $X_0(t)$ olsun. Bu çözümün stabilitesini incelemek için $X_0(t)$'yi, y(t) kadar pertürbe edelim. Bu durumda x(t) denklem 4.2'de gösterilen ifadeye eşittir [9].

$$x(t) = X_0(t) + y(t) \tag{4.2}$$

Denklem 4.2, denklem 4.1'de yerine yerleştirilirse yeni bir denklem elde edilir. Elde edilen bu denklem X_0 civarında Taylor serisine açılıp sadece lineer pertürbasyon terimleri muhafaza edilirse denklem 4.3 elde edilir [9].

$$\dot{y} = A(t; M_0)\, y \tag{4.3}$$

Burada $A(t ; M_0)$, $F(X_0 ; M_0)$'ın ilk kısmi türevlerinin matrisidir.

Denklem 4.3, n boyutlu lineer bir sistemi göstersin. Böyle bir sistemin n tane lineer bağımsız çözümü vardır. Bu çözümler denklem 4.4'de gösterilmiştir.

$$Y(t) = \left[\, y_1(t)\ y_2(t) \ldots\ldots\ldots y_n(t) \,\right] \tag{4.4}$$

Eğer sistemin en küçük periyodu T ise denklem 4.3'de $\tau = t + T$, T/2 ise $\tau = t + T/2$ dönüşümü yapılabilir. Bizim ele alacağımız sistemin en küçük periyodu T/2 olduğu için denklem 4.3'de $\tau = t + T/2$ dönüşümü yapılacaktır.

$$\frac{dy}{d\tau} = A(\tau + \frac{T}{2}; M_0)\ y = A(\tau; M_0)\ y \qquad (4.5)$$

Eğer $y_i(t)$ (i=1,...n) sistemin lineer bağımsız çözümleri ise, y_i (t + T/2) (i=1,....n) çözümleri bunların lineer kombinasyonudur [9]. Buna dayanarak denklem 4.6 yazabilir.

$$Y(t + \frac{T}{2}) = Y(t)\,\Phi \qquad (4.6)$$

Denklem 4.6'da Φ ; (nxn) boyutunda sabit bir matristir, seçilen temel matris çözümüne bağlıdır ve tek değildir. Φ matrisi, t=0 anındaki R^n uzayındaki başlangıç vektörünün yine R^n uzayındaki t = T/2 anındaki diğer bir vektöre transformasyonunu sağlar. Başlangıç şartını y(0) = I olarak kabul edilip denklem 4.6'da yerine yerleştirilirse denklem 4.7'yi elde edilir. I, (n x n) boyutunda birim matristir [9].

$$\Phi = Y(\frac{T}{2}) \qquad (4.7)$$

Denklem 4.6'da Y(t)=V(t) P^{-1} dönüşümü yapılırsa denklem 4.8 elde edilir. Dönüşüm ifadesindeki P^{-1}, (n x n) boyutunda tekil olmayan sabit bir matris olan P'nin tersini göstermektedir [9].

$$V(t + \frac{T}{2}) = V(t)\,D \qquad (4.8)$$

Denklem 4.8'deki D, denklem 4.9'da gösterilmiştir .

$$D = P^{-1}\,\Phi\,P = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & .... & 0 \\ 0 & \rho_2 & .... & 0 \\ .. & .... & .... & ...... \\ 0 & 0 & .... & \rho_n \end{bmatrix} \qquad (4.9)$$

Denklem 4.8 ve denklem 4.9'dan hareket ederek denklem 4.10 yazılabilir.

$$v_m(t + \frac{T}{2}) = \rho_m\, v_m(t) \qquad m = 1, 2, ...n \qquad (4.10)$$

Denklem 4.9 ve 4.10'daki ρ_m (m=1, 2,......n), Φ matrisinin öz değerlerini göstermektedir.

Eğer $|\rho_m| < 1$ ise ; $t \to \infty$, $v_m(t) \to 0$ (4.11a)

Eğer $|\rho_m| > 1$ ise ; $t \to \infty$, $v_m(t) \to \infty$ (4.11b)

Yukarıda belirtilen koşullardan görülebileceği gibi sistemin çözümlerinin stabil olması için $|\rho_m| < 1$ olmalıdır.

Denklem 4.10'nun her iki tarafı $e^{-\gamma_m (t+\frac{T}{2})}$ ile çarpılırsa denklem 4.12 elde edilir.

$$e^{-\gamma_m (t+\frac{T}{2})} v_m(t+\frac{T}{2}) = \rho_m\, e^{-\gamma_m (t+\frac{T}{2})} v_m(t) \tag{4.12}$$

Burada ;

$$\rho_m = e^{\gamma_m \frac{T}{2}} \quad \text{veya} \quad \gamma_m = \frac{2}{T}\ln \rho_m \tag{4.13}$$

Denklem 4.13'de gösterilen ifade, denklem 4.12'de yerine yazılırsa denklem 4.14 elde edilir.

$$e^{-\gamma_m (t+\frac{T}{2})} v_m(t+\frac{T}{2}) = \rho_m\, e^{-\gamma_m (t+\frac{T}{2})} v_m(t) \tag{4.14}$$

$e^{-\gamma_m (t+\frac{T}{2})}$, T/2 periyoduna sahip periyodik bir vektördür. Bundan dolayı eğer $\rho_m \neq 0$ ise, her v_m denklem 4.15 ile ifade edilebilir.

$$v_m(t) = e^{\gamma_m t}\, \phi_m(t) \tag{4.15}$$

Eğer $\mathrm{Re}(\gamma_m) < 0$ ise ; $t \to \infty$, $v_m(t) \to 0$ (4.16a)

Eğer $\mathrm{Re}(\gamma_m) > 0$ ise ; $t \to \infty$, $v_m(t) \to \infty$ (4.16b)

Denklem 4.16a ve denklem 4.16b'de belirtilen koşullardan görülebileceği gibi sistemin çözümlerinin stabil olması için $\gamma_m < 0$ olmalıdır.

4.1.2 Yalpa denkleminin Floquet teorisiyle stabilitesinin incelenmesi

Denklem 3.11 ve 3.70'de gösterilen yalpa hareketi denkleminin çözümü θ(t) olsun. Bölüm 4.1.1'de anlatıldığı gibi çözümün stabilitesini incelemek için bu çözümü ξ(t) kadar pertürbe edelim.

$$\tilde{\theta}(t) = \theta(t) + \xi(t) \tag{4.17}$$

Denklem 4.17, denklem 3.70'de yerine yerleştirilip lineer olmayan pertürbasyon terimleri ihmal edilirse denklem 4.18 elde edilir [4].

$$\ddot{\xi} + (2\mu + 3\mu_3\dot{\theta}^2)\dot{\xi} + \left(\omega_0^2 + 3\alpha_3\theta^2 + 5\alpha_5\theta^4\right)\xi = 0 \tag{4.18}$$

Denklem 4.18, periyodik katsayılara sahip lineer adi diferansiyel denklemi göstermektedir. Denklem 3.38'den θ(t + T) = θ(t) ve θ(t + T/2) = - θ(t) eşit olduğu görülür. Burada T=2π/ Ω'ya eşittir. Bu bilgilerin ışığı altında denklem 4.18'in T/2'lik minimum periyoda sahip olduğu görülür [4]. Denklem 4.18'de ; ξ = v_1, dξ / dt= v_2 dönüşümleri yapılırsa denklem 4.19 ve 4.20 elde edilir.

$$\dot{v}_1 = v_2 \tag{4.19}$$

$$\dot{v}_2 = -(2\mu + 3\mu_3\dot{\theta}^2)v_2 + \left[\omega_0^2 + 3\alpha_3\theta^2 + 5\alpha_5\theta^4\right]v_1 \tag{4.20}$$

Floquet teori kullanarak yapılan stabilite analizinin sayısal uygulamasında daha önceki bölümlerde kullandığımız modelin değerleri kullanılmıştır.

Dalga eğimi α_m= 0.24 ve her bir zorlama frekansı (Ω) değeri için, $v_1(0)=1$ ve $v_2(0)=0$ başlangıç koşullarına bağlı olarak, Ek F'de verilen bilgisayar programı yardımıyla elde edilen $v_1(T/2)$ ve $v_2(T/2)$ değerleri Tablo D.1'de, $v_1(0)=0$ ve $v_2(0)=1$ başlangıç şartlarına bağlı olarak elde edilen $v_1(T/2)$ ve $v_2(T/2)$ değerleri Tablo D.2'de gösterilmiştir. Her bir zorlama frekansı (Ω) için elde edilen bu dört değer bölüm 4.1.1'de denklem 4.7'de bahsedilen Φ(T/2) matrisinin elemanlarıdır.

Bölüm 4.1.1'de anlatıldığı gibi zorlama frekansına karşılık gelen Φ(T/2) matrisinin öz değerlerine bakılarak, sistemin o zorlama frekansında stabil olup olmadığı hakkında fikir sahibi olunabilir.

Şimdi bazı zorlama frekansı (Ω) değerleri için sistemin stabil olup olmadığını inceleyelim.

Ω = 3.578 değeri için ; Tablo D.1'de karşılık gelen değerler $v_1(T/2) = 0.935114$ ve $v_2(T/2) = -9.034983$, Tablo D.2'den karşılık gelen değerler $v_1(T/2) = 0.306565$ ve $v_2(T/2) = -2.585859$'dir. Ω = 3.578 karşılık gelen $\Phi(T/2)$ matrisi denklem 4.21'de gösterilmiştir.

$$\Phi(\frac{T}{2}) = \begin{bmatrix} 0.935114 & 0.306565 \\ -9.034983 & -2.585859 \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

Denklem 4.21'deki $\Phi(T/2)$ matrisinin öz değerleri denklem 4.22'nin çözümünden bulunur.

$$\rho^2 - (0.93511 - 2.58586)\,\rho + (0.93511 \times (-2.58586) + 9.03498 \times 0.30657) = 0 \tag{4.22}$$

$$\rho_1 = -1.3994$$

$$\rho_2 = -0.25135$$

Bölüm 4.1.1'de anlatıldığı üzere $|\rho_1| > 1$ olduğu için Ω = 3.578 değeri için sistem stabil değildir.

Ω = 2.278 değeri için ; Tablo D.1'de karşılık gelen değerler $v_1(T/2) = 0.506305$ ve $v_2(T/2) = -3.871088$, Tablo D.2'dan karşılık gelen değerler $v_1(T/2) = 0.140236$ ve $v_2(T/2) = 0.482293$'dir. Ω = 2.278'e karşılık gelen $\Phi(T/2)$ matrisi denklem 4.23'de gösterilmiştir.

$$\Phi(\frac{T}{2}) = \begin{bmatrix} 0.506305 & 0.140236 \\ -3.871088 & 0.482293 \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

4.23'deki $\Phi(T/2)$ matrisinin öz değerleri denklem 4.24'ün çözümünden bulunur.

$$\rho^2 - (0.50631 + 0.48229)\,\rho + (0.50631 \times 0.48229 + 3.87109 \times 0.14024) = 0 \tag{4.24}$$

$$\rho_1 = 0.49430 + 0.73670\,i \tag{4.25a}$$

$$\rho_2 = 0.49430 - 0.73670\,i \tag{4.25b}$$

$\rho_j = a_j + b_j i = e^{x_j} \cos y_j + e^{x_j} \sin y_j i = e^{x_j + y_j i} \quad j = 1, 2$ dönüşümü yapılırsa denklem 4.25a ve 4.25b, denklem 4.26a ve 4.26b haline gelir.

$$y_1 = \text{ArcTan}\left(\frac{0.73670}{0.49430}\right) = 0.979822$$

$$y_2 = \text{ArcTan}\left(\frac{-0.73670}{0.49430}\right) = -0.979822$$

$$x_1 = \ln\left[\frac{0.49430}{\cos(0.979822)}\right] = -0.119728$$

$$x_2 = \ln\left[\frac{0.49430}{\cos(-0.979822)}\right] = -0.119728$$

$$\rho_1 = e^{x_1 + y_1 i} = e^{-0.119728 + 0.979822 i} \tag{4.26a}$$

$$\rho_2 = e^{x_2 + y_2 i} = e^{-0.119728 + 0.979822 i} \tag{4.26b}$$

Denklem 4.26a ve 4.26b'de, denklem 4.13'de gösterilen $\rho_m = e^{\gamma_m \frac{T}{2}} \ (m = 1, 2)$ dönüşümü yapılırsa denklem 4.27a ve 4.27b elde edilir.

$$e^{\gamma_1 \frac{T}{2}} = e^{-0.119728 + 0.979822 i} \tag{4.27a}$$

$$e^{\gamma_2 \frac{T}{2}} = e^{-0.119728 - 0.979822 i} \tag{4.27b}$$

Denklem 4.27a ve 4.27b'de $T = 2\pi / \Omega$'ya eşittir. Sırasıyla denklem 4.27a ve 4.27b'den γ_1 ve γ_2 bulunur.

$$\gamma_1 = -0.0868 + 0.7105 i$$

$$\gamma_2 = -0.0868 - 0.7105 i$$

Bölüm 4.1.1'de anlatıldığı üzere Re(γ) = -0.0868 <0 olduğundan Ω = 2.278 için sistem stabildir.

Ω = 3.178 değeri için ; Tablo D.1'de karşılık gelen değerler $v_1(T/2)$ = 0.371340 ve $v_2(T/2)$ = 4.206273, Tablo D.2'den karşılık gelen değerler $v_1(T/2)$ = -0.161620 ve $v_2(T/2)$ = 0.395969'dir. Ω = 3.178'e karşılık gelen $\Phi(T/2)$ matrisi denklem 4.28'de gösterilmiştir.

$$\Phi(\frac{T}{2}) = \begin{bmatrix} 0.371340 & -0.161620 \\ 4.206273 & 0.395969 \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

Denklem 4.28'deki $\Phi(T/2)$ matrisinin öz değerleri denklem 4.29'un çözümünden bulunur.

$$\rho^2 - \left(0.37134 + 0.39597\right)\rho + \left(0.37134 \times 0.39597 + 4.20627 \times 0.16162\right) = 0 \tag{4.29}$$

$$\rho_1 = 0.38365 + 0.82443\ i \tag{4.30a}$$

$$\rho_2 = 0.38365 - 0.82443\ i \tag{4.30b}$$

Denklem 4.30a ve 4.30b'de bir önceki örnekte yapılan işlemler tekrarlanırsa aşağıdaki γ_1 ve γ_2 değerleri elde edilir.

$$\gamma_1 = -0.0962 + 1.1484\ i$$

$$\gamma_2 = -0.0962 - 1.1484\ i$$

Bölüm 4.1.1'de anlatıldığı üzere Re(γ) = -0.0962 <0 olduğundan Ω = 3.178 için sistem stabildir.

Örnek alınan modelin, α_m= 0.24 dalga eğimi için, zorlama frekanslarına karşılık gelen sonuçların stabilitelerinin, Floquet teori kullanılarak incelenmesi sonucunda, $\Omega < 0.645 \times \omega_0$ olduğu zaman stabil olduğu bulunmuştur.

4.2 Melnikov Yöntemi ve Uygulaması

4.2.1 Melnikov yöntemi

Melnikov yöntemi, heteroklinik ve homoklinik bifurkasyon oluşumlarının incelenmesinde yaygın olarak kullanılan global bir analiz tekniğidir. Homoklinik ve heteroklinik oluşumlar sistemin herhangi bir parametresi değiştiği zaman ortaya çıkabilir veya yok olabilirler. Melnikov yöntemi, homoklinik veya heteroklinik bifurkasyona sebep olan değişik sistem parametrelerinin değerlerinin, bu parametrelerde meydana gelen değişimlerin kaosa sebep olup olmadığının araştırılmasına yardımcı olur.

$\dot{\theta} = f(\theta) + \varepsilon g(\theta, t)$ formundaki sistemi ele alalım. Melnikov fonksiyonu, bu tip bir sistemin stabil ve stabil olmayan manifoldları veya eyer noktalarının arasındaki mesafeyi gösterir. Melnikov fonksiyonun minimumu sıfıra çok yaklaşırsa sistemin stabil ve stabil olmayan manifoldları kesişir, bu ise istenmeyen bir durumdur. Sistemin pertürbe edilmemiş kısmı Hamiltonyense, Melnikov fonksiyonu denklem 4.31'deki gibidir [9].

$$M(\bar{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left[\bar{\theta}(t)\right] \wedge g\left[\bar{\theta}(t), t + \bar{t}\right] dt \tag{4.31}$$

Burada $\bar{t}$, $t = \bar{t}$ anında seçilen Poincare kesiti göstermektedir.

Denklem 4.31'deki $(\wedge)$ işlem operatörü $f \wedge g = f_1\, g_2 - f_2\, g_1$ şeklinde tanımlıdır.

4.2.2 Yalpa denkleminin Melnikov yöntemiyle stabilitesinin incelenmesi

Daha önceki bölümlerde kullanmış olduğumuz yalpa hareketi denklemi, sönüm katsayıları ve uyarıcı kuvvetin küçük olduğunu kabul edilerek denklem 4.32 şeklinde yazılabilir .

$$\ddot{\theta} + \varepsilon(2\mu\dot{\theta} + \mu_3\dot{\theta}^3) + \omega_0^2\,\theta + \alpha_3\theta^3 + \alpha_5\theta^5 = \varepsilon f \cos\Omega t \tag{4.32}$$

Sayısal uygulama esnasında daha önceki bölümdeki değerler kullanılacaktır. Bu değerler denklem 4.33'de tekrar gösterilmiştir.

$$\mu = 0.086\,,\ \mu_3 = 0.108\,,\ \alpha_3 = -1.402\ \omega_0^2\,,\ \alpha_5 = 0.271\ \omega_0^2 \tag{4.33}$$

$\theta_2 = \dot{\theta}$, $\theta_1 = \theta$ olarak kabul edilirse denklem 4.32 aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\dot{\theta}_1 = \theta_2 \tag{4.34}$$

$$\dot{\theta}_2 = -(\omega_0^2\,\theta_1 + \alpha_3\,\theta_1^3 + \alpha_5\,\theta_1^5) - \varepsilon(2\mu\dot{\theta} + \mu_3\dot{\theta}^3) + \varepsilon f \cos\Omega t \tag{4.35}$$

Pertürbe edilmemiş ($\varepsilon = 0$) sistem göz önüne alınırsa denklem 4.35, denklem 4.37 haline gelir.

$$\dot{\theta}_1 = \theta_2 \tag{4.36}$$

$$\dot{\theta}_2 = -(\omega_0^2\,\theta_1 + \alpha_3\,\theta_1^3 + \alpha_5\,\theta_1^5) \tag{4.37}$$

Sistemin her bir denge konumu için aşağıdaki şartlar sağlamalıdır.

$\theta_2 = 0$ ve $\omega_0^2 + \alpha_3\,\theta_1^3 + \alpha_5\,\theta_1^5 = 0$

$\omega_0^2 + \alpha_3\,\theta_1^3 + \alpha_5\,\theta_1^5 = 0$ denkleminin çözümü denklem 4.38'de gösterilmiştir [9].

$$\theta_1 = 0, \theta_1^2 = \frac{-\alpha_3 \pm \sqrt{\alpha_3^2 - 4\omega_0^2\,\alpha_5}}{2\alpha_5} \tag{4.38}$$

Denklem 4.33'de verilmiş değerler için, denklem 4.38'de verilmiş olan bağıntı yardımıyla sistemin denge konumlarının (0,0), (± 0.9243, 0) ve (± 2.0782, 0) noktaları olduğu bulunur. (± 2.0782, 0) noktasının fiziksel bir anlamı yoktur, çünkü şekil 3.1'den de görüleceği gibi stabilite θ = 0.9243 radyan civarında kaybolmaktadır. θ = 2.0782 radyanda ise gemi çoktan devrilmiştir.

Denklem 4.36 ve 4.37 ile verilmiş sistemin, Hamiltonyen fonksiyonu (H) aşağıdaki yöntem izlenerek bulunabilir.

$$\dot{\theta}_1 = \theta_2 = \frac{\partial H}{\partial \theta_2} \tag{4.39}$$

$$\dot{\theta}_2 = -(\omega_0^2\,\theta_1 + \alpha_3\,\theta_1^3 + \alpha_5\,\theta_1^5) = -\frac{\partial H}{\partial \theta_1} \tag{4.40}$$

Denklem 4.39'un θ_2'ye göre integrasyonundan denklem 4.41 elde edilir.

$$H = \frac{\theta_2^2}{2} + C(\theta_1) \tag{4.41}$$

Denklem 4.41, denklem 4.40'da yerleştirilince yeni bir denklem elde edilir. Elde edilen bu yeni denklemin θ_1'e göre integrasyonu yapılırsa denklem 4.42 elde edilir.

$$C(\theta_1) = \frac{\omega_0^2}{2}\theta_1^2 + \frac{\alpha_3}{4}\theta_1^4 + \frac{\alpha_5}{6}\theta_1^6 \tag{4.42}$$

Denklem 4.42, denklem 4.41'de yerine yerleştirilirse, sistemin denklem 4.43 ile gösterilen Hamiltonyen fonksiyonu bulunmuş olur.

$$H = \frac{\theta_2^2}{2} + \frac{\omega_0^2}{2}\theta_1^2 + \frac{\alpha_3}{4}\theta_1^4 + \frac{\alpha_5}{6}\theta_1^6 \tag{4.43}$$

θ_v stabilitenin kaybolduğu açı (bizim ele aldığımız örnekte 0.9243 radyan) olmak üzere (θ_v,0) eyer noktası için H denklem 4.44'e eşittir.

$$H = \frac{\omega_0^2}{2}\theta_v^2 + \frac{\alpha_3}{4}\theta_v^4 + \frac{\alpha_5}{6}\theta_v^6 \tag{4.44}$$

Denklem 4.43 ve denklem 4.44 birbirlerine eşitlenip elde edilen denklemin her iki tarafı ikiye bölünürse denklem 4.45 elde edilir.

$$\omega_0^2\,\theta_v^2 + \frac{\alpha_3}{2}\theta_v^4 + \frac{\alpha_5}{3}\theta_v^6 = \theta_2^2 + \omega_0^2\,\theta_1^2 + \frac{\alpha_3}{2}\theta_1^4 + \frac{\alpha_5}{3}\theta_1^6 \tag{4.45}$$

Denklem 4.45'de aşağıdaki dönüşümler yapıldıktan sonra denklem 4.47 elde edilir.

$$c_1 = \frac{\omega_0^2}{2}\theta_v^2 + \frac{\alpha_3}{2}\theta_v^4 + \frac{\alpha_5}{3}\theta_v^6\ ,\ c_2 = -\omega_0^2\ ,\ c_3 = -\frac{\alpha_3}{2}\ ,\ c_4 = -\frac{\alpha_5}{3}$$

Denklem 4.33'de gösterilen değerler ve stabilitenin kaybolduğu açı θ_v = 0.9243 radyan için c_1, c_2, c_3 ve c_4 katsayılarının aldıkları değerler denklem 4.46'da gösterilmiştir.

$$c_1 = 0.399\,\omega_0^2\ ,\ c_2 = -\omega_0^2\ ,\ c_3 = 0.701\,\omega_0^2\ ,\ c_4 = -0.09033\,\omega_0^2 \tag{4.46}$$

$$\theta_2 = \pm\sqrt{c_1 + c_2\,\theta_1^2 + c_3\,\theta_1^4 + c_4\,\theta_1^6} \tag{4.47}$$

Denklem 4.47'de $\theta_2 = \dot{\theta}$ ve $\theta_1 = \theta$ dönüşümleri yapılırsa denklem 4.48 elde edilir.

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{c_1 + c_2\,\theta_1^2 + c_3\,\theta_1^4 + c_4\,\theta_1^6} \tag{4.48}$$

Denklem 4.48 değişkenlerine ayrılıp pozitif işaretli olan kısmı düşünülürse denklem 4.49 elde edilir.

$$dt = \frac{d\theta}{\sqrt{c_1 + c_2\,\theta^2 + c_3\,\theta^4 + c_4\,\theta^6}} \tag{4.49}$$

Denklem 4.49'da $\theta^2 = x$ ve $d\theta = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$ dönüşümleri yapılırsa denklem 4.50 elde edilir.

$$dt = \frac{dx}{2\,\sqrt{c_1 x + c_2\,x^2 + c_3\,x^3 + c_4\,x^4}} \tag{4.50}$$

Denklem 4.50 integre edilirse denklem 4.51 elde edilir.

$$t = \int_0^x \frac{dx}{2\,\sqrt{c_1 x + c_2\,x^2 + c_3\,x^3 + c_4\,x^4}} \tag{4.51}$$

Eğer $c_4 < 0$ ise, x^4'li terimin katsayısı -1 olacak şekilde denklem 4.51 yeniden düzenlenirse denklem 4.52, $c_4 > 0$ ise, x^4'li terimin katsayısı 1 olacak şekilde denklem 4.51 yeniden düzenlenirse denklem 4.53 elde edilir.

$$t = \frac{1}{2\sqrt{-c_4}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{-\frac{c_1}{c_4}x - \frac{c_2}{c_4}\,x^2 - \frac{c_3}{c_4}x^3 - x^4}} \tag{4.52}$$

$$t = \frac{1}{2\sqrt{c_4}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{c_1}{c_4}x + \frac{c_2}{c_4}\,x^2 + \frac{c_3}{c_4}x^3 + x^4}} \tag{4.53}$$

Denklem 4.52 yeniden düzenlenip denklem 4.54, denklem 4.53 ise denklem 4.55 haline getirilebilir.

$$t = \frac{1}{2\sqrt{-c_4}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(a-x)\,(b-x)\,(c-x)\,(x-0)}} \tag{4.54}$$

$$t = \frac{1}{2\sqrt{c_4}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(a-x)\,(b-x)\,(x-0)\,(x-d)}} \tag{4.55}$$

Ele alacağımız örnekte $c_4 < 0$ olduğu için denklem 4.54'ün çözümünün nasıl yapılacağı detaylı bir şekilde gösterilecektir. Denklem 4.55'in çözümünde benzer bir yol izlenir. Denklem 4.54'deki a, b, c katsayıları sırasıyla denklem 4.56, 4.57, 4.58 yardımıyla Mathematica 4.0 programı kullanılarak hesaplanabilir.

$$a^3 + \frac{c_3}{c_4}\,a^2 + \frac{c_2}{c_4}\,a + \frac{c_1}{c_4} = 0 \tag{4.56}$$

$$b^2 + (\frac{c_3}{c_4} + a)\,b - \frac{c_1}{c_4\,a} = 0 \tag{4.57}$$

$$c = -\frac{c_1}{c_4\,a\,b} \tag{4.58}$$

Denklem 4.46'daki c_1, c_2, c_3, c_4 katsayılarının değerlerini denklem 4.56, 4.57 ve 4.58'de yerlerine koyup bu denklemleri çözersek a, b, c için denklem 4.59'daki sonuçlar elde edilebilir.

$$a = 6.05143 \ , \ b = 0.85572 \ , \ c = 0.853 \tag{4.59}$$

Denklem 4.54'deki $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(a-x)\,(b-x)\,(c-x)\,(x-0)}}$ eliptik integrali denklem 4.60'da gösterilen ifadeye eşittir [12].

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(a-x)\,(b-x)\,(c-x)\,(x-0)}} = g \times sn^{-1}\,(\sin\varphi, k) \tag{4.60}$$

Denklem 4.60'daki φ, g, k sırasıyla denklem 4.61, 4.62 ve 4.63'de gösterilmiştir .

$$\varphi = \mathrm{ArcSin}\left(\sqrt{\frac{(a-c)\,(x-0)}{(c-0)\,(a-x)}}\right) \tag{4.61}$$

$$g = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-0)}} \tag{4.62}$$

$$k^2 = \frac{(a-b)(c-0)}{(a-c)(b-0)} \tag{4.63}$$

Denklem 4.59'da gösterilen a, b, c değerleri için g ve k denklem 4.64'de gösterilen değerlere eşittir.

$$g = 0.94826, \; k=0.99815 \tag{4.64}$$

Denklem 4.61, denklem 4.60'da yerine yerleştirilirse denklem 4.65 elde edilir.

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(a-x)\,(b-x)\,(c-x)\,(x-0)}} = g \times sn^{-1}\left(\sqrt{\frac{(a-c)(x-0)}{(c-0)(a-x)}}, k\right) \tag{4.65}$$

Denklem 4.65, denklem 4.54'te yerine yerleştirilirse denklem 4.66'da gösterilen ifade elde edilir.

$$t = \frac{1}{2\sqrt{-c_4}} \times g \times sn^{-1}\left(\sqrt{\frac{(a-c)(x-0)}{(c-0)(a-x)}}, k\right) \tag{4.66}$$

Denklem 4.66'nın tersi alınırsa denklem 4.67 elde edilir.

$$\sqrt{\frac{(a-c)\,x}{c\,(a-x)}} = sn\left(\frac{2\sqrt{-c_4}\,t}{g}, k\right) \tag{4.67}$$

Denklem 4.67'de gösterilen ifadeden x çekilirse denklem 4.68 elde edilir.

$$x = \frac{a \times c \times sn^2\left(\frac{2\sqrt{-c_4}\,t}{g}, k\right)}{a - c + c \times sn^2\left(\frac{2\sqrt{-c_4}\,t}{g}, k\right)} \tag{4.68}$$

$\theta = \sqrt{x}$ dönüşümü yapılırsa denklem 4.68, denklem 4.69 haline gelir.

$$\theta = \sqrt{a\,c}\,\frac{\operatorname{sn}\left(\frac{2\sqrt{-c_4}\,t}{g},k\right)}{\sqrt{a - c + c \times \operatorname{sn}^2\left(\frac{2\sqrt{-c_4}\,t}{g},k\right)}} \tag{4.69}$$

Denklem 4.69, $w = 2\,(-c_4)^{1/2} / g$ ve $u = w\,t$ dönüşümü yapıldıktan sonra denklem 4.71 haline gelir. 4.46'da elde edilen c_4 ve 4.64'de elde ettiğimiz g değerleri için w, 4.70'daki değere eşittir.

$$w = 0.6339 \times \omega_0 \tag{4.70}$$

$$\theta = \sqrt{a\,c}\,\frac{\operatorname{sn}(u,k)}{\sqrt{a - c + c \times \operatorname{sn}^2(u,k)}} \tag{4.71}$$

Denklem 4.71'de $\frac{c}{a-c} = \lambda^2$ dönüşümü yapılırsa denklem 4.72 elde edilir.

$$\theta = \lambda\sqrt{a}\,\frac{\operatorname{sn}(u,k)}{\sqrt{1 + \lambda^2 \operatorname{sn}^2(u,k)}} \tag{4.72}$$

Denklem 4.70'deki λ katsayısının değeri, 4.69'daki a, b, c değerleri için 4.73'deki değere eşittir.

$$\lambda = 0.40508 \tag{4.73}$$

Denklem 4.72'nin u'ya göre türevi alınırsa denklem 4.74 elde edilir.

$$\frac{d\theta}{du} = \lambda\sqrt{a}\,\frac{\operatorname{cn}(u,k)\operatorname{dn}(u,k)}{\left(1 + \lambda^2 \operatorname{sn}^2(u,k)\right)^{3/2}} \tag{4.74}$$

Denklem 4.74'ün zamana göre türevi alınırsa denklem 4.75 elde edilir.

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{du}\frac{du}{dt} = \lambda\,w\sqrt{a}\,\frac{\operatorname{cn}(u,k)\operatorname{dn}(u,k)}{\left(1 + \lambda^2 \operatorname{sn}^2(u,k)\right)^{3/2}} \tag{4.75}$$

k, bir civarında olduğu zaman ; sn(u,k), cn(u,k), dn(u,k) sırasıyla denklem 4.76a, 4.76b ve 4.76c'ye eşittir [12].

k=1 olduğu zaman ; sn(u,k), cn(u,k), dn(u,k) sırasıyla denklem 4.77a, 4.77b ve 4.77c'ye eşittir [12].

Ele aldığımız örnekte, k=0.99815 olarak bulunmuştu. Bu değer bire çok yakın olduğu için denklem 4.76a, denklem 4.76b ve denklem 4.76c'den elde edilen sonuçlarla denklem 4.77a, 4.77b ve 4.77c'yle elde edilen sonuçlar arasında virgülden sonra üçüncü haneden sonra bir farklılık meydana gelir. Bu nedenden dolayı sn(u,k), cn(u,k) ve dn(u,k) sırasıyla denklem 4.77a, 4.77b ve 4.77c'ye eşit olarak kabul edilmiştir.

$$\mathrm{sn}\,(u,k) \approx \tanh u + (1-k^2)\ \mathrm{sech}^2 u\,(\sinh u\ \cosh u - u)/4 \qquad (4.76a)$$

$$\mathrm{cn}\,(u,k) \approx \mathrm{sech}\,u - (1-k^2)\ \tanh u\,\mathrm{sech}\,u\ (\sinh u\ \cosh u - u)/4 \qquad (4.76b)$$

$$\mathrm{dn}\,(u,k) \approx \mathrm{sech}\,u + (1-k^2)\ \tanh u\,\mathrm{sech}\,u\ (\sinh u\ \cosh u + u)/4 \qquad (4.76c)$$

$$\mathrm{sn}\,(u,1) \approx \tanh u \qquad (4.77a)$$

$$\mathrm{cn}\,(u,1) \approx \mathrm{sech}\,u \qquad (4.77b)$$

$$\mathrm{dn}\,(u,1) \approx \mathrm{sech}\,u \qquad (4.77c)$$

Denklem 4.77a, 4.77b ve 4.77c ; denklem 4.72 ve denklem 4.75'te yerlerine yerleştirilir ve u = w t dönüşümü yapılırsa, denklem 4.78a ve denklem 4.78b elde edilir. Denklem 4.78a yalpa açısını, denklem 4.78b yalpa açısının hızını göstermektedir.

$$\theta = \lambda\sqrt{a}\,\frac{\tanh(w\,t)}{\sqrt{1+\lambda^2\tanh^2(w\,t)}} \qquad (4.78a)$$

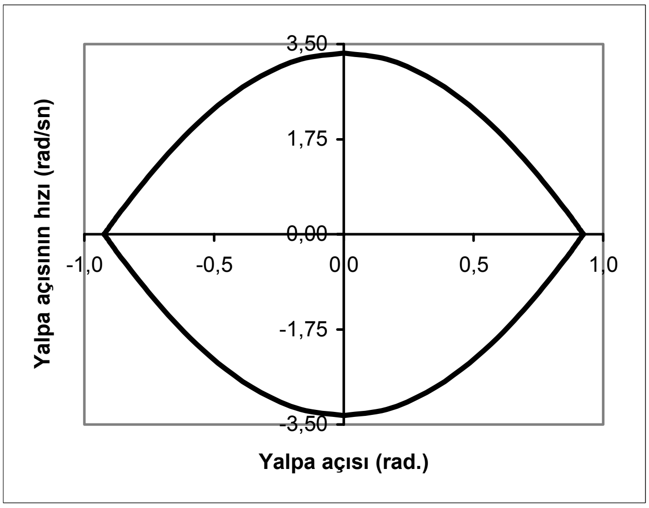
$$\frac{d\theta}{dt} = \lambda\,w\,\sqrt{a}\,\frac{\mathrm{sech}^2(w\,t)}{\left[1+\lambda^2\tanh^2(w\,t)\right]^{3/2}} \qquad (4.78b)$$

λ = 0.40508, a =6.05143 ve w =0.6339 × ω_0 değerleri denklem 4.78a ve 4.78b'de yerlerine yazılırsa denklem 4.79a ve 4.79b elde edilir.

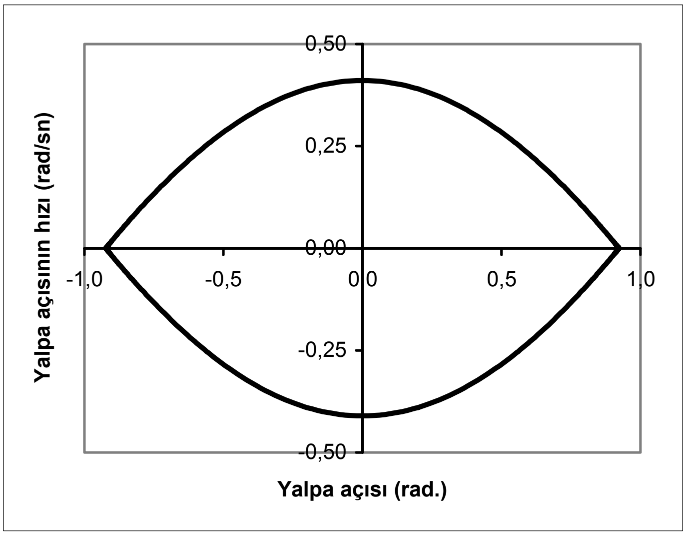
$$\theta = 0.99648 \frac{\tanh(0.6339 \times \omega_0 \times t)}{\sqrt{1 + 0.16409 \times \tanh^2(0.6339 \times \omega_0 \times t)}} \tag{4.79a}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 0.63167 \times \omega_0 \times \frac{\sec h^2(0.6339 \times \omega_0 \times t)}{\left[1 + 0.16409 \times \tanh^2(0.6339 \times \omega_0 \times t)\right]^{3/2}} \tag{4.79b}$$

Şekil 4.1 ve şekil 4.2, denklem 4.32 ile gösterilen sistemin, sakin suda denklem 4.79a ve 4.79b kullanılarak elde edilen stabilite sınırını göstermektedir.



Şekil 4.1 ω_0=5.278 için zorlanmamış yalpa hareketinin stabilite sınırı



Şekil 4.2 ω_0=0.65 için zorlanmamış yalpa hareketinin stabilite sınırı

Denklem 4.34 ve denklem 4.35 yeniden düzenlenirse denklem 4.80 ve 4.81 elde edilir.

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta} \tag{4.80}$$

$$\dot{\theta}_2 = -(\omega_0^2\,\theta_1 + \alpha_3\,\theta_1^3 + \alpha_5\,\theta_1^5) + \varepsilon\left[f\cos\Omega\,t - (2\mu\dot{\theta} + \mu_3\dot{\theta}^3)\right] \tag{4.81}$$

Denklem 4.80 ve 4.81'den oluşan denklem sisteminin h ve g fonksiyonları sırasıyla denklem 4.82 ve 4.83'de gösterilmiştir .

$$h = \left[\theta_2\,, -(\omega_0^2\,\theta_1 + \alpha_3\,\theta_1^3 + \alpha_5\,\theta_1^5)\right]^T \tag{4.82}$$

$$g = \left[0\,, f\cos\Omega\,t - (2\mu\theta_2 + \mu_3\theta_2^3)\right]^T \tag{4.83}$$

Denklem 4.82 ve 4.83, denklem 4.31'de yerlerine yerleştirilerek denklem 4.84 ile gösterilen Melnikov fonksiyonu elde edilir.

$$M(t_o) = \int_{-\infty}^{\infty}\theta_2\left\{f\,\cos[\Omega(t+t_o)] - (2\mu\theta_2 + \mu_3\theta_2^3)\right\}dt \tag{4.84}$$

Denklem 4.84, trigonometrik dönüşüm yapılıp yeniden düzenlenirse denklem 4.85 elde edilir.

$$\begin{aligned} M(t_o) = {} & f\cos\Omega t_o \int_{-\infty}^{\infty}\theta_2\,\cos\Omega t\;dt - f\sin\Omega t_o \int_{-\infty}^{\infty}\theta_2\,\sin\Omega t\;dt \\ & - \int_{-\infty}^{\infty}(2\mu\theta_2^2 + \mu_3\theta_2^4)\,dt \end{aligned} \tag{4.85}$$

Denklem 4.85, denklem 4.86 halinde yazılabilir. Denklem 4.86'da M_s Melnikov fonksiyonun sabit kısmını, M_d değişken kısmını gösterir . Sabit kısım sistem üzerindeki sönümün etkisini, değişen kısım dalga uyarımının etkisini gösterir.

$$M(t_o) = M_s + M_d(t_o) \tag{4.86}$$

Denklem 4.86'daki M_s ve M_d sırasıyla denklem 4.87 ve 4.88'e eşittir.

$$M_s = -\int_{-\infty}^{\infty}(2\mu\theta_2^2 + \mu_3\theta_2^4)\,dt \tag{4.87}$$

$$M_d(t_o) = f\cos\Omega t_o \int_{-\infty}^{\infty} \theta_2 \cos\Omega t\, dt - f \sin\Omega t_o \int_{-\infty}^{\infty} \theta_2 \sin\Omega t\, dt \tag{4.88}$$

Denklem 4.87 ve 4.88'de, θ_2'nin değerini gösteren denklem 4.78b yerine yerleştirilirse denklem 4.89 ve 4.90 elde edilir.

$$M_s = -2\mu \int_{-\infty}^{\infty} \left(\lambda\, w \sqrt{a}\, \frac{\operatorname{sech}^2(w\,t)}{\left[1 + \lambda^2 \tanh^2(w\,t)\right]^{3/2}} \right)^2 dt$$

$$-\mu_3 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\lambda\, w \sqrt{a}\, \frac{\operatorname{sech}^2(w\,t)}{\left[1 + \lambda^2 \tanh^2(w\,t)\right]^{3/2}} \right)^4 dt \tag{4.89}$$

$$M_d(t_o) = f\cos(\Omega t_o)\, \lambda\, w\sqrt{a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sech}^2(w\,t)}{\left[1 + \lambda^2 \tanh^2(w\,t)\right]^{3/2}} \cos(\Omega t)\, dt$$

$$-f\sin(\Omega\, t_o)\, \lambda\, w\sqrt{a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sech}^2(w\,t)}{\left[1 + \lambda^2 \tanh^2(w\,t)\right]^{3/2}} \sin(\Omega t)\, dt \tag{4.90}$$

Denklem 4.90'da, aşağıdaki denklem 4.91 ve 4.92 ile gösterilen dönüşümler yapılırsa denklem 4.93 elde edilir.

$$F_{d1} = \lambda\, w \sqrt{a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sech}^2(w\,t)}{\left[1 + \lambda^2 \tanh^2(w\,t)\right]^{3/2}} \cos\Omega t\, dt \tag{4.91}$$

$$F_{d2} = \lambda\, w \sqrt{a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sech}^2(w\,t)}{\left[1 + \lambda^2 \tanh^2(w\,t)\right]^{3/2}} \sin\Omega t\, dt \tag{4.92}$$

$$M_d(t_o) = f\,\left(F_{d1} \cos(\Omega t_o) - F_{d2}\, \sin(\Omega t_o)\right) \tag{4.93}$$

Denklem 4.86'da, denklem 4.93 yerine yazılırsa denklem 4.94 elde edilir. Denklem 4.94 Melnikov fonksiyonunu göstermektedir.

$$M(t_o) = M_s + f\,\left(F_{d1} \cos(\Omega t_o) - F_{d2}\, \sin(\Omega t_o)\right) \tag{4.94}$$

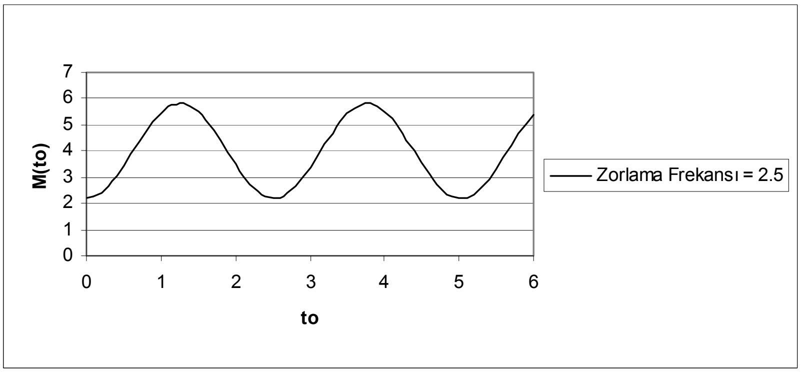
Daha önceden hesapladığımız w, λ ve a değerleri ile incelediğimiz sistemin

μ = 0.086 ve μ_3 = 0.108 sönüm katsayıları denklem 4.89'da yerlerine yazılırsa, Melnikov fonksiyonunun sabit kısmı M_s = -3.997 olarak bulunur.

Denklem 4.94'teki f, denklem 4.95'e eşittir.

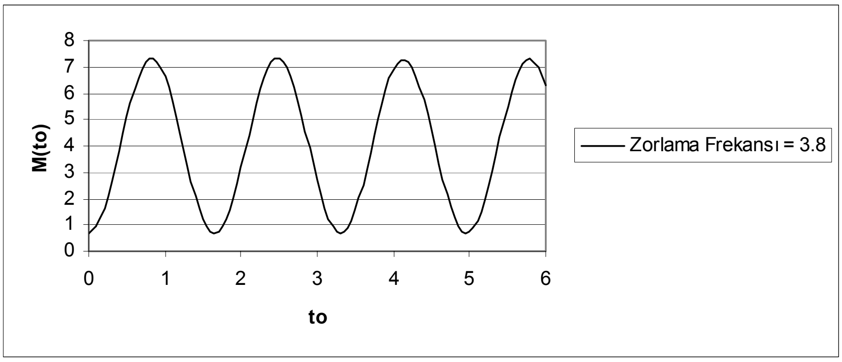
$$f = \frac{I_G}{(I_G + I_E)} \alpha_m \Omega^2 = \frac{\alpha_m \Omega^2}{1.25} \tag{4.95}$$

α_m = 0.24, Ω = 2.5 için Melnikov fonksiyonu şekil 4.2'de gösterilmiştir. Şekilden de görülebileceği gibi Melnikov fonksiyonunun minimumu sıfırdan çok uzaktadır. Sistemin stabil ve stabil olmayan manifoldları arasındaki mesafe yeterince büyüktür.



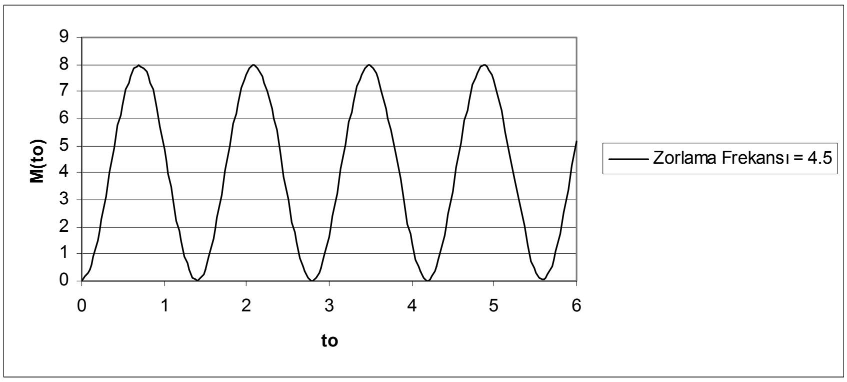
Şekil 4.3 α_m = 0.24, Ω = 2.5 için Melnikov fonksiyonunun grafiği

α_m = 0.24, Ω = 3.8 için Melnikov fonksiyonu şekil 4.3'de gösterilmiştir.



Şekil 4.4 α_m = 0.24, Ω = 3.8 için Melnikov fonksiyonunun grafiği

α_m = 0.24, Ω = 4.5 için Melnikov fonksiyonu şekil 4.4'de gösterilmiştir. Şekilden de görülebileceği gibi Melnikov fonksiyonunun minimumu sıfır değerini almıştır. Sistemin stabil ve stabil olmayan manifoldları kesişmiştir.



Şekil 4.5 $\alpha_m = 0.24$, $\Omega = 4.5$ için Melnikov fonksiyonunun grafiği

4.3 Lyapunov Direkt Yöntemi ve Uygulaması

4.3.1 Lyapunov direkt yöntemi

Lyapunov direkt yöntemi, herhangi bir sistemin çözümüne ihtiyaç olmadan sistemin stabilitesi hakkında fikir sahibi olmamızı sağlayan bir yöntemdir. Bu yöntemle sistemlerin stabilitelerini incelemek için faz uzayında tanımlanmış genel olarak Lyapunov fonksiyonu olarak adlandırılan fonksiyonlar kullanılır [5,13].

Teorem 1 :

$\dot{\vec{x}} = f(\vec{x})$ ile gösterilen otonom bir sistemin $\vec{x} = 0$ çözümünün herhangi bir Λ çevresinde, kesin pozitif $V(\vec{x})$ fonksiyonu (Lyapunov fonksiyonu) varsa ve bu fonksiyonun zamana göre alınmış türevi $\dot{V}(\vec{x})$ pozitif değilse, $\vec{x} = 0$ çözümü stabildir [5,13].

$$V(\vec{x}) > 0 \quad \forall \vec{x} \neq 0 \quad , \quad \vec{x} \in \Lambda \tag{4.96a}$$

$$V(0) = 0 \tag{4.96b}$$

$$\dot{V}(\vec{x}) \leq 0 \quad \forall \vec{x} \in \Lambda \tag{4.96c}$$

Teorem 2:

$\dot{\vec{x}} = f(\vec{x})$ ile gösterilen otonom bir sistemin $\vec{x} = 0$ çözümünün herhangi bir Λ çevresinde bir Lyapunov fonksiyonu $V(\vec{x})$ varsa ve bu fonksiyonun zamana göre alınmış türevi kesin negatif ise, $\vec{x} = 0$ çözümü asimptotik olarak stabildir [5,13].

$$V(\vec{x}) > 0 \quad \forall \vec{x} \neq 0 \quad , \quad \vec{x} \in \Lambda \tag{4.97a}$$

$$V(0) = 0 \tag{4.97b}$$

$$\dot{V}(\vec{x}) < 0 \quad \forall \vec{x} \in \Lambda \tag{4.97c}$$

Denklem 4.96c ve 4.97c'deki Lyaponov fonksiyonunun zamana göre alınmış türevi $\dot{V}(\vec{x})$, denklem 4.98'de gösterilen ifadeye eşittir.

$$\dot{V}(\vec{x}) = \frac{d V(\vec{x})}{d t} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{d x_1}{d t} + \frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{d x_2}{d t} + ... + \frac{\partial V}{\partial x_n}\frac{d x_n}{d t}$$

$$= (\nabla V(\vec{x}))^T . \dot{\vec{x}} \tag{4.98}$$

Teorem 3:

$\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}, t)$ ile gösterilen otonom olmayan sistemin orjininin herhangi bir Λ^* çevresinde Lyapunov fonksiyonu varsa ve bu fonksiyonun zamana göre alınmış türevi $\dot{V}(\vec{x}, t)$ pozitif değilse, pertürbe edilmemiş hareket yani orjin stabildir [5].

- $V(\vec{x}, t)$, Λ^*'da kesin pozitif olmalı

  $\Lambda^* = \Lambda \times I, \; I = \{ t \mid t \in [\,0, +\infty\,) \}$

- $\dot{V}(\vec{x}, t) \leq 0$

  $$\dot{V}(\vec{x}, t) = \frac{d}{d t}V(\vec{x}, t) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{d x_1}{d t} + \frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{d x_2}{d t} + ... + \frac{\partial V}{\partial x_n}\frac{d x_n}{d t}$$

Teorem 4:

$\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}, t)$ ile gösterilen otonom olmayan sistemin orjininin herhangi bir Λ^* çevresinde Lyapunov fonksiyonu varsa ve bu fonksiyonun zamana göre alınmış türevi $\dot{V}(\vec{x}, t)$ kesin negatif ise pertürbe edilmemiş hareket yani orjin asimptotik olarak stabildir [5].

- $V(\vec{x}, t)$, Λ^*'da kesin pozitif olmalı

  $\Lambda^* = \Lambda \times I, \; I = \{ t \mid t \in [\,0, +\infty\,) \}$

- $\dot{V}(\vec{x}, t) < 0$

  $$\dot{V}(\vec{x}, t) = \frac{d}{d t}V(\vec{x}, t) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{d x_1}{d t} + \frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{d x_2}{d t} + ... + \frac{\partial V}{\partial x_n}\frac{d x_n}{d t}$$

4.3.2 Sakin suda yalpa hareketinin stabilitesinin incelenmesi

4.3.2.1 Lyapunov fonksiyonun belirlenmesi

Denklem 3.70'in sağ tarafındaki terimler ihmal edilirse denklem 4.99 elde edilir. Denklem 4.99, sakin suda yalpa hareketinin denklemini göstermektedir.

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta + \alpha_3\theta^3 + \alpha_5\theta^5 + 2\mu\dot{\theta} + \mu_3\dot{\theta}^3 = 0 \tag{4.99}$$

Bu denklem faz uzayında faz değişkenleri kullanılarak yazılırsa denklem 4.100a ve denklem 4.100b elde edilir.

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{4.100a}$$

$$\dot{x}_2 = -2\mu x_2 - \mu_3 x_2^3 - \omega_0^2 x_1 - \alpha_3 x_1^3 - \alpha_5 x_1^5 \tag{4.100b}$$

Lyapunov fonksiyonu V(x) ile gösterildiğine göre denklem 4.98'den görülebileceği gibi Lyapunov fonksiyonunun zamana göre alınmış türevi denklem 4.101'deki ifadeyle gösterilebilir [5].

$$\dot{V}(\vec{x}) = \frac{d\,V(\vec{x})}{d\,t} = \frac{d\,V(x_1, x_2)}{d\,t} = \nabla V^T.\dot{\vec{x}} \tag{4.101}$$

Denklem 4.101'deki ∇V, denklem 4.102'deki gibi yazılabilir [5].

$$\nabla V = \begin{bmatrix} \nabla V_1 = \dfrac{\partial V}{\partial x_1} \\ \nabla V_2 = \dfrac{\partial V}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_{11}\,x_1 + \chi_{12}\,x_2 \\ \chi_{21}\,x_1 + \chi_{22}\,x_2 \end{bmatrix} \tag{4.102}$$

Denklem 4.102, denklem 4.101'de yerine yerleştirilirse denklem 4.103 elde edilir.

$$\frac{d\,V}{d\,t} = \left[(\chi_{11}\,x_1 + \chi_{12}\,x_2) \quad (\chi_{21}\,x_1 + \chi_{22}\,x_2) \right] \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \tag{4.103}$$

$\dot{x}_1$ ve $\dot{x}_2$, faz denklemlerinde çekilip denklem 4.103'de yerlerine yazılırsa denklem 4.104 elde edilir.

$$\frac{dV}{dt} = [(\chi_{11}x_1 + \chi_{12}x_2)(\chi_{21}x_1\chi_{22}x_2)]\begin{bmatrix} x_2 \\ -2\mu x_2 - \mu_3 x_2^3 - \omega_0^2 x_1 - \alpha_3 x_1^3 - \alpha_5 x_1^5 \end{bmatrix} \quad (4.104)$$

Denklem 4.104'deki matris çarpımı yapılırsa denklem 4.105 elde edilir.

$$\frac{dV}{dt} = \chi_{11}x_1x_2 + \chi_{12}x_2^2 - 2\chi_{21}\,\mu\, x_1x_2 - \chi_{21}\mu_3 x_1 x_2^3 - \chi_{21}\omega_0^2 x_1^2 - \chi_{21}\alpha_3 x_1^4 - \chi_{21}\alpha_5 x_1^6$$

$$-2\chi_{22}\,\mu\, x_2^2 - \chi_{22}\,\mu_3\, x_2^4 - \chi_{22}\omega_0^2 x_2 x_1 - \chi_{22}\alpha_3 x_1^3 x_2 - \chi_{22}\alpha_5 x_1^5 x_2 \quad (4.105)$$

$\frac{dV}{dt} < 0$ olmasını istiyoruz. Bunun için önce belirsiz terimlerden kurtulalım.

Bu nedenle $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0$ dersek denklem 4.105 denklem 4.106 haline gelir [5].

$$\frac{dV}{dt} = (\chi_{11} - \chi_{22}\omega_0^2)x_1x_2 - 2\chi_{22}\,\mu\, x_2^2 - \chi_{22}\,\mu_3\, x_2^4 - \chi_{22}\alpha_3 x_1^3 x_2 - \chi_{22}\alpha_5 x_1^5 x_2 \quad (4.106)$$

∇V mevcut olduğundan $\nabla \times \nabla V = 0$'dır. Bu nedenden dolayı denklem 4.107'de gösterilen eşitlik yazılabilir [5].

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\chi_{21}x_1 + \chi_{22}x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2}(\chi_{11}x_1 + \chi_{12}x_2)$$

$$0 = \frac{\partial \chi_{11}}{\partial x_2}x_1 + \chi_{11}\frac{\partial \chi_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \chi_{12}}{\partial x_2}x_2 + \chi_{12}\frac{\partial x_2}{\partial x_2}$$

$$0 = \frac{\partial \chi_{11}}{\partial x_2}x_1 \quad (4.107)$$

Denklem 4.107'de gösterilen eşitliğin sağlanabilmesi için χ_{11} sadece x_1 'e bağlı bir fonksiyon olmalıdır. χ_{11}, denklem 4.108'de gösterilen ifadeye benzer seçilebilir.

$$\chi_{11} = \chi_{22}\omega_0^2 + \chi_{22}\alpha_3 x_1^2 + \chi_{22}\alpha_5 x_1^4 \quad (4.108)$$

Denklem 4.108, denklem 4.106'da yerine yerleştirilirse denklem 4.109 elde edilir.

$$\frac{dV}{dt} = \left(\chi_{22}\omega_0^2 + \chi_{22}\alpha_3 x_1^2 + \chi_{22}\alpha_5 x_1^4 - \chi_{22}\omega_0^2\right)x_1 x_2 - 2\chi_{22}\,\mu\, x_2^2 - \chi_{22}\,\mu_3\, x_2^4$$

$$- \chi_{22}\alpha_3 x_1^3 x_2 - \chi_{22}\alpha_5 x_1^5 x_2 \qquad (4.109)$$

Denklem 4.109, gerekli sadeleştirmeler yapılırsa denklem 4.110 elde edilir.

$$\frac{dV}{dt} = -\chi_{22}\, x_2^2 \left(2\mu + \mu_3 x_2^2\right) \qquad (4.110)$$

Lyapunov fonksiyonu $V(\vec{x})$, denklem 4.111'deki ifadeye eşittir [5].

$$V(x) = \int_0^x \nabla V^T\, dx = \int_0^{x_1} \nabla V_1\, dx_1 + \int_0^{x2} \nabla V_2\, dx_2 = \int_0^{x_1} \chi_{11} x_1\, dx_1 + \int_0^{x2} \chi_{22} x_2\, dx_2 \qquad (4.111)$$

Denklem 4.111'de, denklem 4.108 yerine yazılırsa denklem 4.112 elde edilir.

$$V(\vec{x}) = \chi_{22}\,\omega_0^2\,\frac{x_1^2}{2} + \chi_{22}\,\alpha_3\,\frac{x_1^4}{4} + \chi_{22}\,\alpha_5\,\frac{x_1^6}{6} + \frac{x_2^2}{2} \qquad (4.112)$$

χ_{22}' yi sabit bir sayı olarak seçebiliriz [5]. $\chi_{22} = 12$ alalım. Bu durumda denklem 4.112, denklem 4.113 haline gelir. Denklem 4.113, sakin suda yalpa hareketinin Lyapunov fonksiyonunu göstermektedir.

$$V(\vec{x}) = x_1^2\ \left(6\omega_0^2 + 3\alpha_3 x_1^2 + 2\alpha_5 x_1^4\right) + 6\,x_2^2 \qquad (4.113)$$

$\chi_{22} = 12$ alırsak denklem 4.110'da gösterilen Lyapunov fonksiyonunun türevi denklem 4.114 haline gelir.

$$\frac{dV}{dt} = -12\ x_2^2 \left(2\mu + \mu_3 x_2^2\right) \qquad (4.114)$$

Bölüm 4.3.1'de anlatıldığı üzere sistem asimptotik olarak stabil olması için aşağıdaki şartları sağlamalıdır.

$$V(x) = x_1^2\ \left(6\omega_0^2 + 3\alpha_3 x_1^2 + 2\alpha_5 x_1^4\right) + 6\,x_2^2 > 0 \qquad (4.115a)$$

$$\frac{dV}{dt} = -12\ x_2^2 \left(2\mu + \mu_3 x_2^2\right) < 0 \quad , \quad 2\mu + \mu_3 x_2^2 > 0 \qquad (4.115b)$$

Daha önceki bölümlerde incelediğimiz geminin değerlerini kullanırsak denklem 116.a ve 116.b'de gösterilen şartların sağlanması gerekir.

$$V(\vec{x}) = x_1^2\, \omega_0^2 \left(6 - 4.206\, x_1^2 + 0.542\, x_1^4\right) + 6\, x_2^2 > 0 \tag{4.116a}$$

$$\frac{d\,V(\vec{x})}{d\,t} = -12\; x_2^2 \left(0.172 + 0.108\, x_2^2\right) < 0 \tag{4.116b}$$

4.3.2.2 Yalpa hareketi denkleminin denge konumlarının belirlenmesi

Yalpa hareketi nonlineer olduğu için birden fazla denge konumu vardır. $\dot{\vec{x}} = 0$ denge konumlarını gösterir. Faz denklemlerini sıfıra eşitlersek denklem 4.117a ve 4.117b elde edilir.

$$\dot{x}_1 = x_2 = 0 \tag{4.117a}$$

$$\dot{x}_2 = -2\mu x_2 - \mu_3 x_2^3 - \omega_0^2 x_1 - \alpha_3 x_1^3 - \alpha_5 x_1^5 = 0 \tag{4.117b}$$

Denklem 4.117a ve 4.117b'den yararlanılarak bulunan denge konumları aşağıda gösterilmiştir.

$$O(0,0)\ ;\ A\left(\sqrt{\frac{-\alpha_3 - \sqrt{\alpha_3^2 - 4\omega_0^2\alpha_5}}{2\alpha_5}}\ , 0\right)\ ;\ B\left(-\sqrt{\frac{-\alpha_3 - \sqrt{\alpha_3^2 - 4\omega_0^2\alpha_5}}{2\alpha_5}}\ , 0\right);$$

$$C\left(\sqrt{\frac{-\alpha_3 + \sqrt{\alpha_3^2 - 4\omega_0^2\alpha_5}}{2\alpha_5}}\ , 0\right)\ ;\ D\left(-\sqrt{\frac{-\alpha_3 + \sqrt{\alpha_3^2 - 4\omega_0^2\alpha_5}}{2\alpha_5}}\ , 0\right)$$

O(0,0) denge konumunu incelenmek için, denklem 4.100a ve denklem 4.100b ile gösterilen faz denklemlerini birinci derece terimleri muhafaza edecek şekilde ele alırsak denklem 4.118a ve denklem 4.118b elde edilir.

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{4.118a}$$

$$\dot{x}_2 = -2\mu x_2 - \omega_0^2 x_1 \tag{4.118b}$$

Denklem 4.118a ve 4.118b ile gösterilen sistem, denklem 4.119 gibi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{4.119}$$

Karakteristik denklem aşağıda gösterilmiştir.

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\mu-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega_0^2 = 0 \tag{4.120}$$

Karakteristik denklemin kökleri, denklem 4.121a ve 4.121b'de gösterilmiştir.

$$\lambda_1 = -\mu + \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2} \tag{4.121a}$$

$$\lambda_2 = -\mu - \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2} \tag{4.121b}$$

Şimdi elde ettiğimiz bu karakteristik denklemin köklerinden yararlanarak denge konumunun türünü belirleyelim.

$$\lambda_1 \times \lambda_2 = \omega_0^2 > 0 \tag{4.122}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -2\mu < 0 \tag{4.123}$$

Denklem 4.122 ve 4.123'den yararlanarak, O(0,0) denge konumunun "stabil düğüm" veya "stabil odak" noktası olabileceğini söyleyebiliriz.

$\mu^2 - \omega_0^2 \geq 0$ ise ; denge konumu kararlı düğüm noktasıdır.

$\mu^2 - \omega_0^2 < 0$ ise ; denge konumu kararlı odak noktasıdır.

Bizim ele aldığımız örnekte, $\mu < \omega_0$, O(0,0) noktası bizim örneğimiz için kararlı odak noktasıdır.

Şimdi orjini O noktasından A noktasına kaydırarak bu noktayı inceleyelim.

$$x_1 = x_1' + k_1 \tag{4.124}$$

Burada k_1 denklem 4.125'te gösterilen ifadeye eşittir.

$$k_1 = \sqrt{\frac{-\alpha_3 - \sqrt{\alpha_3^2 - 4\omega_0^2\alpha_5}}{2\alpha_5}} \tag{4.125}$$

Denklem 4.100a ve 4.100b ile gösterilen faz denklemlerinde denklem 4.124'ü yerine yerleştirilirse denklem 4.126a ve denklem 4.126b elde edilir.

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{4.126a}$$

$$\dot{x}_2 = -\omega_0^2 (x_1' + k_1) - \alpha_3 (x_1' + k_1)^3 - \alpha_5 (x_1' + k_1)^5 - 2\mu x_2 - \mu_3 x_2^3 \tag{4.126b}$$

Denklem 4.126a ve denklem 4.126b ile gösterilen faz denklemleri sadece birinci mertebe terimler muhafaza edilecek biçimde yazılırsa denklem 4.127a ve denklem 4.127b elde edilir.

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{4.127a}$$

$$\dot{x}_2 = -\omega_0^2\, x_1' - 3\,\alpha_3\, k_1^2\, x_1' - 5\,\alpha_5\, k_1^5\, x_1' - 2\mu x_2 \tag{4.127b}$$

Karakteristik denklem 4.128'de gösterilmiştir.

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ \left(-\omega_0^2 - 3\alpha_3\, k_1^2 - 5\alpha_5\, k_1^4\right) & -2\mu - \lambda \end{vmatrix}$$
$$= \lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega_0^2 + 3\alpha_3\, k_1^2 + 5\alpha_5\, k_1^4 = 0 \tag{4.128}$$

Karakteristik denklemin kökleri, denklem 4.129a ve 4.129b'de gösterilmiştir.

$$\lambda_1 = -\mu + \sqrt{\mu^2 - (\omega_0^2 + 3\alpha_3\, k_1^2 + 5\alpha_5\, k_1^4)} \tag{4.129a}$$

$$\lambda_2 = -\mu - \sqrt{\mu^2 - (\omega_0^2 + 3\alpha_3\, k_1^2 + 5\alpha_5\, k_1^4)} \tag{4.129b}$$

Şimdi elde ettiğimiz bu karakteristik denklemin köklerinden yararlanarak denge konumunun türünü belirleyelim.

$\lambda_1 + \lambda_2 = -2\mu < 0$

$\lambda_1 \times \lambda_2 = \omega_0^2 + 3\alpha_3\, k_1^2 + 5\alpha_5\, k_1^4 > 0$ ise stabil düğüm veya stabil odak noktasıdır.

$\lambda_1 \times \lambda_2 = \omega_0^2 + 3\alpha_3\, k_1^2 + 5\alpha_5\, k_1^4 < 0$ ise eyer noktasıdır.

Daha önceki bölümlerde incelediğimiz sistemin değerlerini denklem 4.129a ve denklem 4.129b'de koyarsak A(0.9243, 0) noktasının eyer noktası olduğu bulunur.

Daha önceki bölümlerde incelediğimiz geminin değerlerini kullanarak benzer şekilde B,C ve D noktaları incelendiğinde ; B noktasının bir eyer noktası olduğu, C ve D noktalarının stabil odak noktası olduğu bulunur.

4.3.2.3 Yalpa hareketinin asimptotik stabilite sınırının belirlenmesi

İncelediğimiz nonlineer bir sistem olduğundan yalnızca orjinin asimptotik olarak stabil olduğunu bilmek yeterli değildir. Bu nedenle asimptotik stabilite bölgesi saptanmalıdır. Lyapunov yöntemi bize sistemin nonlineerlik özelliklerini göz önüne alarak asimptotik bölgenin sınırını saptamamıza olanak verir [5].

Asimptotik bölgenin varlığını belirleyen ve hesaplanmasına olanak sağlayacak teorem ve tanımlar :

Tanım 1 :

İnvaryant bölge : M'nin içinde başlayan her bir çözüm bütün $t \in [t_0, +\infty)$ için M'nin içinde kalıyorsa bu takdirde M invaryant bir bölgedir. Bu tanıma göre ; eğer her bir $\tau>0$ için bir $T > 0$ varsa, öyle ki her bir $t>T$ için bir $p \in M$ vardır ve $\| \vec{x}(t) - \vec{p} \| < \tau$ oluyorsa, bu takdirde $t \to +\infty$ giderken $\vec{x}(t)$ invaryant bölge M'ye yaklaşacaktır [5].

Teorem 5 :

Λ kapalı ve sınırlı bir bölge olsun, öyle ki, $\dot{\vec{x}} = f(\vec{x})$'in Λ içinde başlayan her çözümü daima bunun içinde kalacaktır. Λ içinde birinci kısmi türevleri olan ve ayrıca burada $\dot{V}(\vec{x}) \leq 0$ şartını sağlayan $V(\vec{x})$ gibi bir skaler fonksiyonun olduğunu farz edelim. R, Λ'da $\dot{V}(\vec{x}) = 0$ şartını sağlayan tüm noktaların oluşturduğu bir bölge, R={ $\vec{x}$ | $\vec{x} \in \Lambda$, $\dot{\vec{V}}(x) = 0$ }, ve M'de R'nin içinde en geniş invaryant bölge olsun. Bu takdirde Λ içinde başlayan her bir çözüm $t \to +\infty$ giderken Λ'ya yaklaşır.

Teorem 6 :

Λ, $V(\vec{x}) \leq h$ ile tanımlanan kapalı bir bölgeyi göstersin. Bu bölge içersinde $V(\vec{x})$'in sürekli birinci dereceden kısmi türevleri olduğunu, $V(\vec{x}) \in C^1$ $\forall \vec{x} \in \Lambda$, varsayalım. Buna ek olarak Λ sınırlı bir bölge ise Λ'nın içinde başlayan her çözüm en geniş invaryant bölge olan M'ye yaklaşacaktır [5].

Sakin suda yalpa hareketiyle ilgili asimptotik sınırın elde edilmesi :

μ ve μ_3 pozitif sabitler olduğundan $x_2 = 0$ için denklem $\dot{V}(\vec{x}) = 0$'dır. Bu sebeple

$R=\{\ \vec{x} \mid x_2 = 0,\ x_1 \lesseqgtr 0\ \}$, x_1 ekseninin bir alt cümlesidir.

Faz domeninde eğrinin eğimi denklem 4.130'da gösterilmiştir.

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\frac{dx_2}{dt}}{\frac{dx_1}{dt}} = \frac{-2\mu x_2 - \mu_3 x_2^3 - \omega_0^2 x_1 - \alpha_3 x_1^3 - \alpha_5 x_1^5}{x_2} \tag{4.130}$$

Görüldüğü gibi her $x_1 \neq 0$ için $dy/dx \to \infty$ olduğundan mümkün invaryant bölgeler bizim örnek aldığımız gemi için O(0,0), A(0.9243, 0), B(-0.9243, 0), C(2.0782,0) ve D(-2.0782,0) noktalarıdır. C ve D noktalarının fiziksel olarak bir anlamı yoktur çünkü şekil 3.2'den görülebileceği gibi geminin stabilitesi θ=0.9243 radyan olduğu zaman kaybolmaktadır.

Bölüm 4.3.2.2'de A ve B noktalarının eyer noktası olduğu bulunmuştu. Bu nedenle $\Lambda\ :\ V(\vec{x}) < h$ bölgesi seçilirken bu noktalar dışarıda bırakılmalıdır. A ve B noktalarını içeren V(x) eğrisi denklem 4.131 ile gösterilmiştir.

$$V(x) = x_1^2\ \left(6\omega_0^2 + 3\alpha_3 x_1^2 + 2\alpha_5 x_1^4\right) + 6\,x_2^2 = \text{sabit} \tag{4.131}$$

Denklem 4.131 ile gösterilen bu eğri $x_2 = 0$ için $x_1 = \pm 0.9243$ noktalarından geçmektedir. Bu noktalar denklem 4.131'de yerlerine yazılırsa denklem 4.132 elde edilir.

$$\begin{aligned} V(\vec{x}) = V(x_1, x_2) = h &= (\pm 0.9243)^2\ \omega_0^2\ \left(6 - 4.206\,(\pm 0.9243)^2 + 0.542\,(\pm 0.9243)^4\right) \\ &= 2.3941\ \omega_0^2 \end{aligned} \tag{4.132}$$

Denklem 4.132'de elde ettiğimiz sabitin değeri, denklem 4.131'de yerine yazılırsa denklem 4.133 elde edilir.

$$x_1^2\ \left(6\omega_0^2 + 3\alpha_3 x_1^2 + 2\alpha_5 x_1^4\right) + 6\,x_2^2 = 2.3941\ \omega_0^2 \tag{4.133}$$

Denklem 4.133'den x_2 çekilirse denklem 4.134 elde edilir.

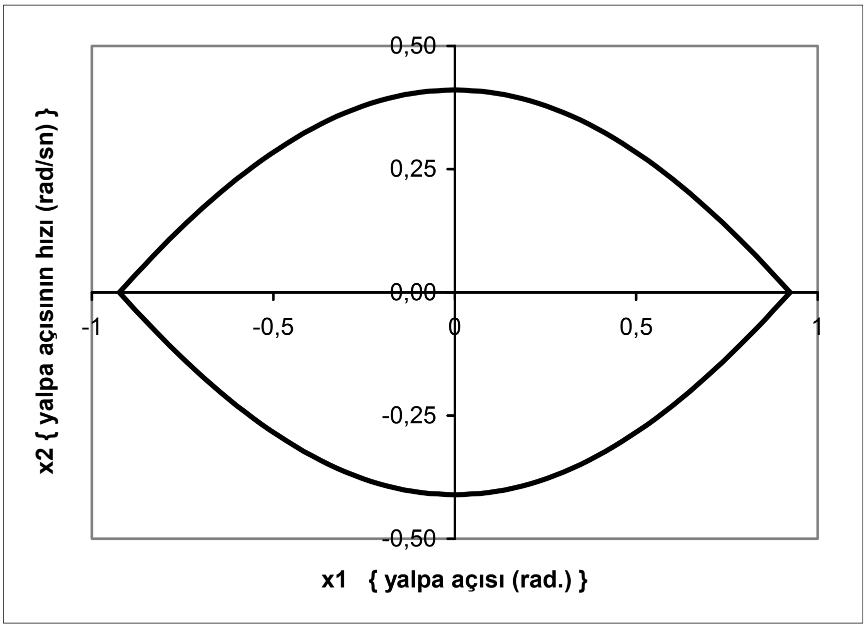
$$x_2 = \pm\sqrt{0.399\,\omega_0^2 - \frac{x_1^2 \omega_0^2 \left(6 - 4.206\,x_1^2 + 0.542\,x_1^4\right)}{6}} \tag{4.134}$$

Eğrinin x_2 eksenini kestiği noktalar $x_2 = \pm\ 0.63166 \times \omega_0$ olarak bulunur.

Teorem 6'ya göre $V(\vec{x}) = 2.3941\,\omega_0^2$ 'nin içinde kalan bölge Λ'dır.

$$\Lambda = \left\{ \vec{x} \mid V(\vec{x}) \le 2.3941 \times \omega_0^2 \,,\ \dot{V}(x) < 0 \right\}$$

$\omega_0 = 0.65$ olarak alındığı zaman şekil 4.6'da gösterilen asimptotik olarak stabil bölge elde edilir. Şekil 4.6'da eğrinin x_1 eksenini kestiği noktalar A ve B eyer noktalarıdır.



Şekil 4.6 Nonlineer yalpa hareketinin asimptotik stabilite bölgesi

4.3.3 Zorlanmış nonlineer yalpa hareketinin stabilitesinin incelenmesi

4.3.3.1 Rayleigh tipi denklemin Lienard tipi denkleme dönüştürülmesi

Denklem 3.70 ile gösterilmiş olan zorlanmış nonlineer yalpa hareketi denklemini tekrar ele alalım.

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta + \alpha_3\theta^3 + \alpha_5\theta^5 + 2\mu\dot{\theta} + \mu_3\dot{\theta}^3 = f\,\cos\Omega t \tag{4.135}$$

Bu denklem $\theta = x_1$ ve $d\theta/dt = x_2$ dönüşümü yapılarak faz uzayında yazılırsa denklem 4.136a ve denklem 4.136b elde edilir.

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{4.136a}$$

$$\dot{x}_2 = -2\mu x_2 - \mu_3 x_2^3 - \omega_0^2 x_1 - \alpha_3 x_1^3 - \alpha_5 x_1^5 + f\,\cos\Omega t \tag{4.136b}$$

Denklem 4.136a ve 4.136b ile faz uzayında gösterilen sistem denklem 4.137 ile gösterilebilir.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha_3 x_1^3 - \alpha_5 x_1^5 \\ -\mu_3 x_2^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ f\cos\Omega t \end{bmatrix} \tag{4.137}$$

Denklem 4.137 ile gösterilen sistem denklem 4.138 ile de gösterilebilir [14].

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_0^2 \\ 1 & -2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha_3 x_2^3 - \alpha_5 x_2^5 \\ -\mu_3 x_2^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f\cos\Omega t \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.138}$$

Denklem 4.138, aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\dot{x}_1 = -\omega_0^2 x_2 - \alpha_3 x_2^3 - \alpha_5 x_2^5 + f\cos\Omega t \tag{4.139a}$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - 2\mu x_2 - \mu_3 x_2^3 \tag{4.139b}$$

Denklem 4.139b'nin zamana göre türevi alınırsa yeni bir denklem elde edilir. Bu denklemde denklem 4.139a yerine yerleştirilirse denklem 4.140 elde edilir.

$$\ddot{x}_2 + (2\mu + 3\mu_3 x_2^2)\dot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 + \alpha_3 x_2^3 + \alpha_5 x_2^5 = f\cos\Omega t \tag{4.140}$$

Denklem 4.140'da $x_2=\xi$ dönüşümü yapılırsa denklem 4.141 elde edilir. Bu denklem Lienard tipi bir denklemdir.

$$\ddot{\xi} + (2\mu + 3\mu_3 \xi^2)\dot{\xi} + \omega_0^2 \xi + \alpha_3 \xi^3 + \alpha_5 \xi^5 = f\cos\Omega t \tag{4.141}$$

4.3.3.2 Zorlanmış yalpa hareketinin Lyapunov zarfının bulunması

Denklem 4.141, denklem 4.142 şeklinde yazılabilir.

$$\ddot{\xi} + f(\xi)\,\dot{\xi} + g(\xi) = e(t) \tag{4.142}$$

Burada ;

$$f(\xi) = 2\mu + 3\mu_3 \xi^2 \tag{4.143a}$$

$$g(\xi) = \omega_0^2 \xi + \alpha_3 \xi^3 + \alpha_5 \xi^5 \tag{4.143b}$$

$$e(t) = f\cos\Omega t \tag{4.143c}$$

eşittir.

$f(\xi)$ ve $g(\xi)$ fonksiyonları aşağıdaki şartları sağlıyorsa birinci yardımcı teoremi öne sürebilir [6].

- $g(\xi)$ $I=[\xi_0-a, \xi_0+a]$ aralığında sürekli ve türetilebilir bir fonksiyon olmalı
- $g(\xi_0+m)=-g(\xi_0-m)$ $|m| \leq a$
- $g(\xi) > 0$ $\xi \in (0, \xi_0+a)$
- $f(\xi) =[\xi_0-a, \xi_0+a]$ aralığında sürekli ve pozitif bir fonksiyon olmalı
- $f(\xi_0+m)=f(\xi_0-m)$ $|m| \leq a$

Yardımcı teorem :

Herhangi $\alpha > 0$ için aşağıdaki şartları sağlayan, I aralığında bir sürekli $h(\xi)$ fonksiyonu ve bu fonksiyonun türevi mevcuttur [6].

a) $h(0)=F(0)$

b) $h(\xi_0+a)=F(\xi_0+a)$, $h(\xi_0-a)=F(\xi_0-a)$

c) $F(0) < h(\xi) < F(\xi)$ $\xi \in (0, \xi_0+a)$, $F(\xi) > h(\xi) > F(0)$ $\xi \in (\xi_0-a, 0)$

d) $\xi \in I$ için $h'(\xi) \geq c$ $c>0$

e) $h'(\xi) < \dfrac{\alpha\, g(\xi)}{F(\xi) - h(\xi)}$

Burada $F(\xi)$, $f(\xi)$ fonksiyonunun integralidir.

Eğer yukarıdaki şartları sağlayan bir $h(\xi)$ fonksiyonu mevcutsa denklem 4.142'nin stabilitesini incelemek için denklem 4.144 ile gösterilen Lyapunov fonksiyonunu kullanılabilir [6].

$$V(\xi, \dot{\xi}) = \frac{1}{2}\left[\dot{\xi} + F(\xi) - h(\xi)\right]^2 + G(\xi) \tag{4.144}$$

Burada $F(\xi)$ ve $G(\xi)$, sırasıyla $f(\xi)$ ve $g(\xi)$ fonksiyonlarının integralleridir.

Denklem 4.144'ün zamana göre türevi alınırsa denklem 4.145 elde edilir.

$$V(\xi, \dot{\xi}, e) = -h'(\xi)\,\dot{\xi}^2 + \left\{e - h'(\xi)\left[F(\xi) - h(\xi)\right]\right\}\dot{\xi} + \left[F((\xi) - h(\xi)\right]\left[e - g(\xi)\right] \tag{4.145}$$

Lyapunov fonksiyonu ξ'ya kompleks bir şekilde bağlı olmasına rağmen $\dot{\xi}$'ye ikinci dereceden bir polinomla bağlıdır [6].

Bu polinomun diskriminantı denklem 4.146'da gösterilmiştir [6].

$$\Delta(\xi,e)=\left\{e-h'(\xi)\left[F(\xi)-h(\xi)\right]\right\}^2+4\ h'(\xi)\left[F(\xi)-h(\xi)\right]\left[e-g(\xi)\right] \tag{4.146}$$

$\Delta(\xi,e)$ e(t)'ye ikinci dereceden bir polinomla bağlıdır. Bu polinomun kökleri denklem 4.147a ve denklem 4.147b'de gösterilmiştir [15].

$$\psi_1(\xi)=\sqrt{h'(\xi)\left|F(\xi)-h(\xi)\right|}\left(2\sqrt{\left|g(\xi)\right|}-\sqrt{h'(\xi)\left|F(\xi)-h(\xi)\right|}\right) \tag{4.147a}$$

$$\psi_2(\xi)=\sqrt{h'(\xi)\left|F(\xi)-h(\xi)\right|}\left(2\sqrt{\left|g(\xi)\right|}+\sqrt{h'(\xi)\left|F(\xi)-h(\xi)\right|}\right) \tag{4.147b}$$

$|e(t)| \leq \delta$ olduğunu kabul edelim. Böyle bir durumda Lyapunov fonksiyonunun türevi ancak $\psi_1(\xi) \leq \delta$ olduğu zaman sıfırdan büyük olabilir [6].

Lyapunov fonksiyonunun türevi sıfıra eşit olduğu zaman iki kök mevcuttur. Bu iki kök denklem 4.148a ve denklem 4.148b'de gösterilmiştir [6] .

$$\psi_1(\xi,e)=\left\{e-h'(\xi)\left[F(\xi)-h(\xi)\right]-\sqrt{\Delta(\xi,e)}\ \right\}/\,2\,h'(\xi) \tag{4.148a}$$

$$\psi_2(\xi,e)=\left\{e-h'(\xi)\left[F(\xi)-h(\xi)\right]+\sqrt{\Delta(\xi,e)}\ \right\}/\,2\,h'(\xi) \tag{4.148b}$$

$\dot{V}$ 'nün kökleri ile sınırlanan bölgeler denklem 4.149a ve denklem 4.149b ile gösterilmiştir [6].

$$\Theta(\delta)=\left\{(\xi,\dot{\xi}):\xi\in\left[2\xi_0-\xi_m,\xi_m\right],\ \psi_1(\xi)\leq\delta\ \text{ve}\ \dot{\xi}\in\left[\psi_1(\xi,e)\,,\,\psi_2(\xi,e)\right]\right\} \tag{4.149a}$$

$$\begin{aligned}\Theta'(\delta)=\Big\{(\xi,\dot{\xi}):\xi\in\left[\xi_0-a\,,2\xi_0-\xi_m\right]\cup\xi\in\left[\xi_m,\xi_0+a\right],\ \psi_1(\xi)\leq\delta\ \text{ve}\\ \dot{\xi}\in\left[\psi_1(\xi,e)\,,\,\psi_2(\xi,e)\right]\Big\}\end{aligned} \tag{4.149b}$$

Yukarıdaki bilgilerin ışığı altında aşağıdaki Lyapunov zarflarını yazabilir [6].

$$W_1(\delta)=\max\left\{V(\xi,\dot{\xi}):\left(\xi,\dot{\xi}\right)\in\Theta(\delta)\right\} \tag{4.150a}$$

$$W_2(\delta)=\min\left\{V(\xi,\dot{\xi}):\left(\xi,\dot{\xi}\right)\in\Theta'(\delta)\right\} \tag{4.150b}$$

Şimdi, denklem 4.142 ile gösterilen, doğal frekansı $\omega_0 = 0.65$, sönüm katsayıları μ=0.089 ve μ_3 = 0.1, doğrultma momenti katsayıları α_3 =-1.402 ω_0^2 ve α_3 =0.271 ω_0^2 olan bir modeli örnek olarak alalım.

Sistemin karşılaşabileceği maksimum zorlama δ, denklem 4.151 yardımıyla hesaplanabilir.

$$\delta = \frac{I_G}{I_G + I_E}\alpha_m \Omega^2 = 0.04032\ (\mathrm{rad/s^2}) \tag{4.151}$$

Şimdi h(ξ) fonksiyonunu elde edelim [6].

$$h(\xi) = F(\xi) + \eta(\xi - \xi_0)(\xi - \xi_0 - a) \tag{4.152}$$

Burada η >0'dır.

Sistemimizin değerlerini denklem 4.152'de koyarsak denklem 4.153 elde edilir.

$$h(\xi) = 0.089\xi + 0.1\xi^3 + \eta(\xi - \xi_0)(\xi - 0.9243) \tag{4.153}$$

Burada η, yardımcı teoremde verilen şartları sağlaması için $0 < \eta < 0.1$ olmalıdır. Değişik ξ_0 ve η değerleri denenerek, Ek G'de verilen bilgisayar yardımıyla hesaplanan Lyapunov zarfı şekil 4.7'de gösterilmiştir.

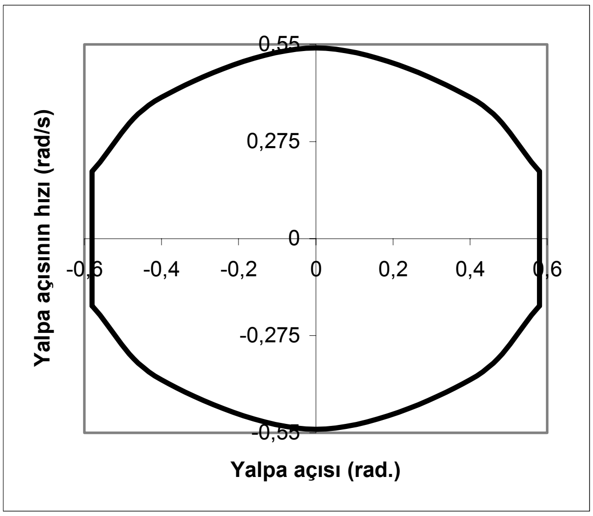
Mathematica 4.0, programı yardımıyla denklem 4.135'le gösterilebilen örnek aldığımız sistemi, değişik zorlama frekansları ve başlangıç değerleri için çözdürüp grafiklerini çizdirdik. Elde ettiğimiz sonuçlardan zorlama frekansı Ω=0.6'da en tehlikeli durumun meydana geldiğini tespit ettik.

Şekil 4.8 ve 4.9, sırasıyla $\theta(0)$= 0 ve $\dot{\theta}(0) = 0$ başlangıç şartları kullanılarak zorlama frekansı Ω=0.6 ve Ω=0.5 için elde edilen çözümleri, şekil 4.10 ise, $\theta(0)$= 0.6 ve $\dot{\theta}(0) = 0.6$ başlangıç şartları kullanılarak zorlama frekansı Ω=0.6 için elde edilen çözümleri göstermektedir.

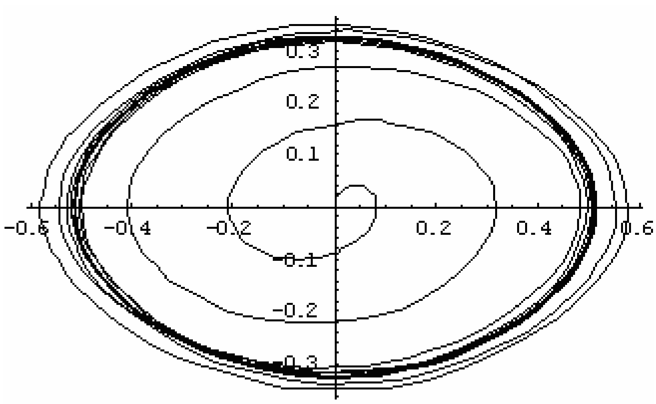
Şekil 4.8 ve 4.9, şekil 4.7'de gösterilen Lyapunov zarfı içersindeki bir noktayı başlangıç şartı kabul eden hareketin bu zarfın içersinde kalacağını kanıtlamaktadır.

Şekil 4.10, Lyapunov zarfı dışındaki bir noktayı başlangıç şartı kabul eden hareketin bu zarfın içersinde kalmadığını, sistemin diğer denge konumu olan θ=2.0782 radyana yöneldiğini göstermektedir . θ=2.0782 radyan olduğu zaman gemi ters dönmüş halde dengededir.

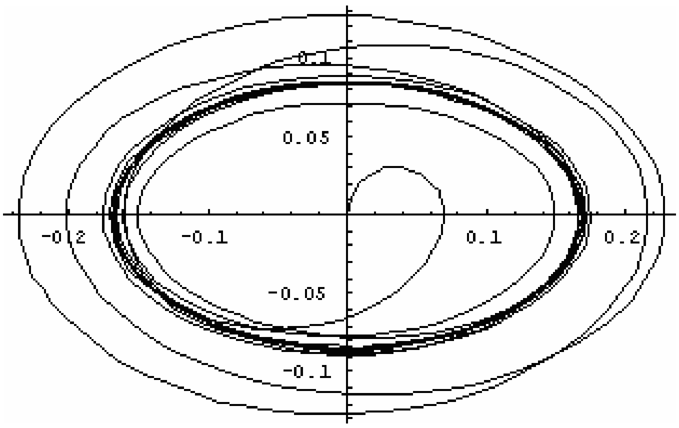
Şekil 4.8, şekil 4.9 ve şekil 4.10'a bakılarak, seçtiğimiz Lyapunov zarfının yeterli olduğu görülebilir.



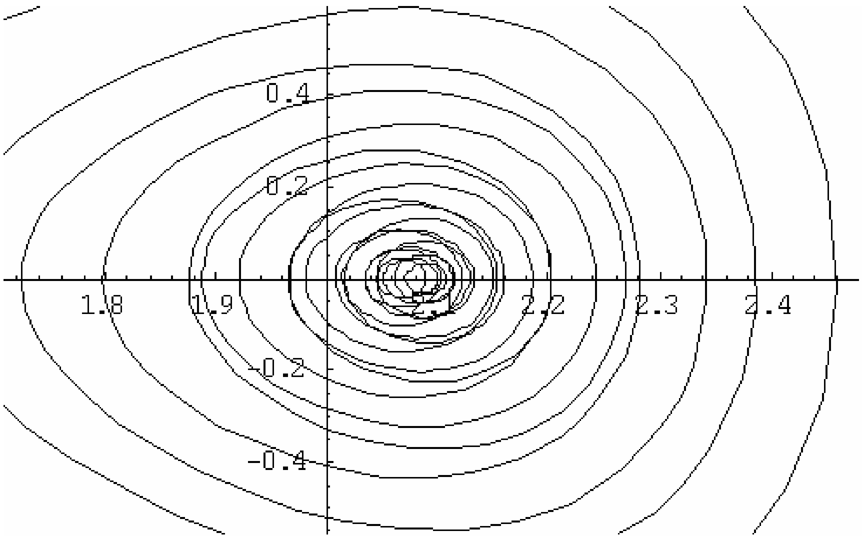
Şekil 4.7 Lyapunov zarfı



Şekil 4.8 Başlangıç şartı (0,0) ve Ω=0.6 için elde edilen çözümler



Şekil 4.9 Başlangıç şartı (0,0) ve Ω=0.5 için elde edilen çözümler

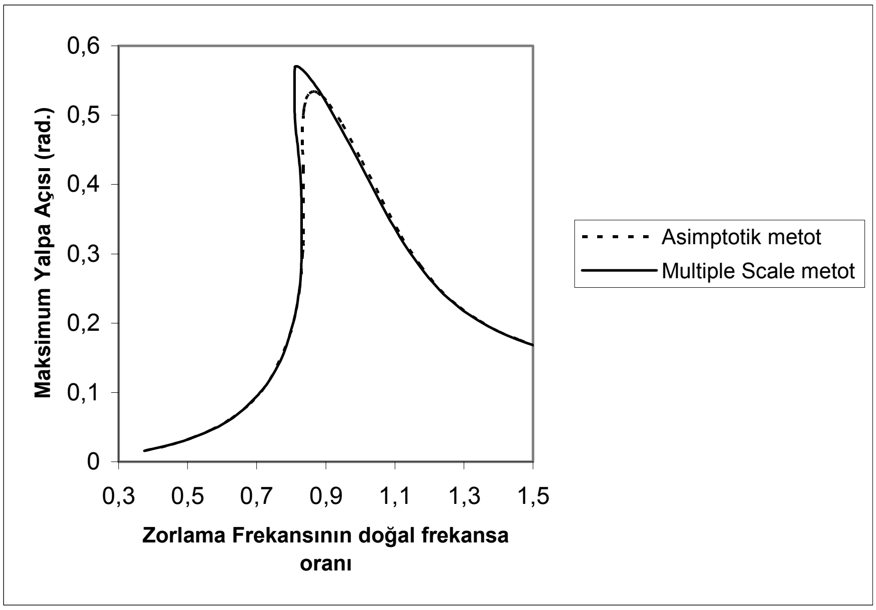


Şekil 4.10 Başlangıç şartı (0.6,0.6) ve Ω=0.6 için elde edilen çözümler

5. SONUÇLAR

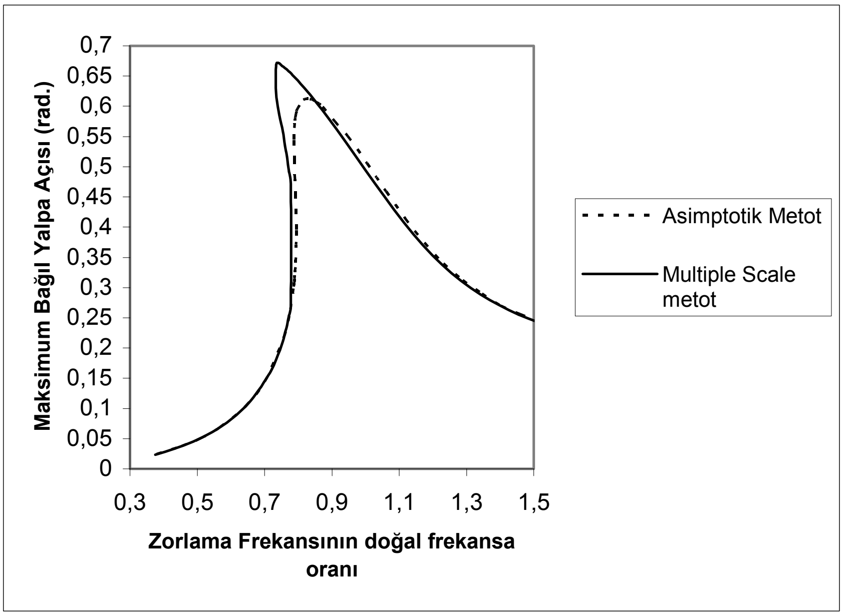
Nonlineer yalpa hareketi denklemi Multiple Scale metodu ve Bogoliubov Mitropolsky asimptotik metodu kullanarak çözülmüştür. Floquet teorisi, Melnikov yöntemi ve Lyapunov direkt yöntemi kullanılarak yalpa hareketinin stabilitesi incelenmiştir.

Şekil 5.1'de dalga eğimi $\alpha_m = 0.12$, şekil 5.2'de dalga eğimi $\alpha_m = 0.18$, şekil 5.3'de dalga eğimi $\alpha_m = 0.24$ için Bogoulibov Mitropolsky asimptotik metodu ve ikinci mertebeden Multiple scale metodu kullanılarak elde edilen maksimum bağıl yalpa açılarının karşılaştırılmaları gösterilmiştir.



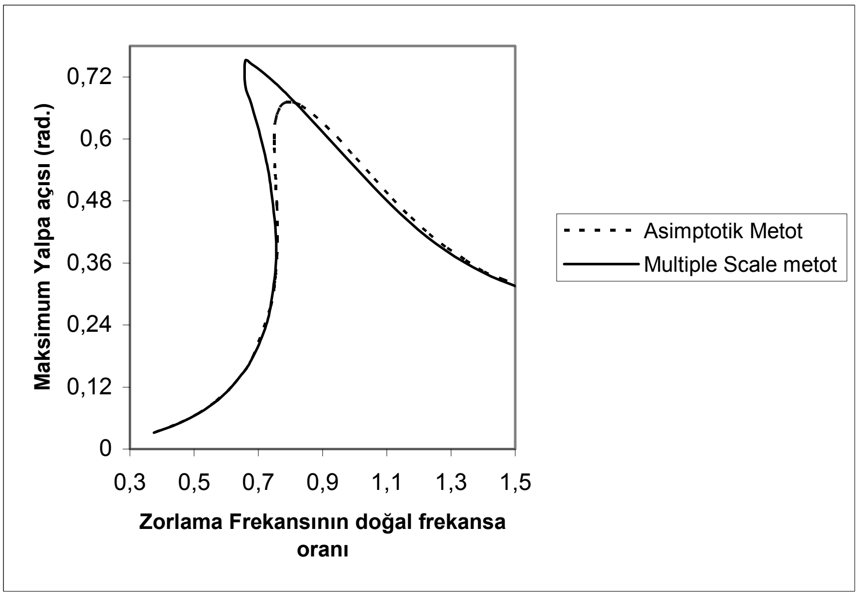
Şekil 5.1 Dalga eğimi $\alpha_m = 0.12$ için yalpa denklemi çözümlerinin karşılaştırılması

Şekil 5.1'den görülebileceği gibi dalga eğimi $\alpha_m = 0.12$ için, Bogoulibov Mitropolsky asimptotik metodu ve Multiple Scale metoduyla elde edilen maksimum bağıl yalpa açıları arasındaki farklılık, zorlama frekansının doğal frekansa oranı $\Omega / \omega_{0,}$ 0.795 ile 0.875 arasında olduğu zaman meydana gelir. Asimptotik metotla elde edilen maksimum bağıl yalpa açısı $\Omega / \omega_0 = 0.86$ iken $\theta = 0.534$ radyanla en yüksek değerini alır. Oysa Multiple Scale metoduyla elde edilen maksimum bağıl yalpa açısı en yüksek değerini $\Omega / \omega_0 = 0.82$'ken $\theta = 0.57$ radyanla alır .



Şekil 5.2 Dalga eğimi $\alpha_m = 0.18$ için yalpa denklemi çözümlerinin karşılaştırılması

Şekil 5.2'den görülebileceği gibi dalga eğimi $\alpha_m = 0.18$ için, Bogoulibov Mitropolsky asimptotik metodu ve Multiple Scale metoduyla elde edilen maksimum bağıl yalpa açıları arasındaki farklılık, zorlama frekansının doğal frekansa oranı Ω / ω_0, 0.73 ile 0.875 arasında olduğu zaman meydana gelir. Asimptotik metotla elde edilen maksimum bağıl yalpa açısı, $\Omega / \omega_0 = 0.795$ iken $\theta = 0.612$ radyanla en yüksek değerini alır. Multiple Scale metoduyla elde edilen ise en yüksek değerini $\Omega / \omega_0 = 0.735$ olduğu zaman $\theta = 0.67$ radyanla alır.



Şekil 5.3 Dalga eğimi $\alpha_m = 0.24$ için yalpa denklemi çözümlerinin karşılaştırılması

Şekil 5.3'den görülebileceği gibi dalga eğimi α_m = 0.24 için, Bogoulibov Mitropolsky asimptotik metodu ve Multiple Scale metoduyla elde edilen maksimum bağıl yalpa açıları arasındaki farklılık artık daha geniş bir zorlama frekansı aralığına yayılmıştır. Her iki yöntemle elde edilen sonuçlar arasındaki önemli farklılık, zorlama frekansının doğal frekansa oranı Ω /ω_0, 0.655 ile 0.815 arasındayken meydana gelir. Ω /ω_0, 0.89 ile 1.06 arasındayken de yaklaşık olarak %2 mertebesinde bir farklılık mevcuttur. Asimptotik metotla elde edilen maksimum bağıl yalpa açısı Ω /ω_0 =0.805 olduğu zaman 0.671 radyanla en yüksek değerini alır. Multiple Scale metoduyla elde edilen ise en yüksek değerini Ω /ω_0 =0.659'ken 0.751 radyanla alır.

Sonuç olarak, Bogoulibov Mitropolsky asimptotik metodu ve Multiple Scale metoduyla elde edilen maksimum bağıl yalpa açılarının aldıkları en yüksek değerlerin ve farklı oldukları zorlama frekansı aralıklarının, artan dalga eğimiyle arttığı bulunmuştur. Multiple Scale metodu daha küçük zorlama frekanslarından itibaren stabilitenin bozulacağını göstermektedir. Hem Bogoliubov Mitropolsky asimptotik metodu hem de Multiple Scale metoduyla elde edilen maksimum bağıl yalpa açıları dalga eğimiyle birlikte artmaktadır.

Bölüm 4.1.2'de, örnek alınan modelin dalga eğimi α_m = 0.24 radyan için Floquet teorisi kullanılarak stabilitesi incelenmişti. Bu inceleme sonucunda, modelin zorlama frekansı Ω /ω_0 < 0.645 olduğu zaman stabil olduğu bulunmuştu.

Bölüm 4.2.2'de, örnek alınan modelin dalga eğimi α_m = 0.24 radyan için Melnikov yöntemi kullanılarak stabilitesi incelenmişti. Bu inceleme sonucunda Melnikov fonksiyonun zorlama frekansı Ω /ω_0 = 0.474 olduğu zaman sıfırdan çok büyük değerler aldığı, Ω /ω_0 = 0.72 olduğu zaman sıfıra yaklaştığı, Ω /ω_0 = 0.85 olduğu zaman sıfıra eşit olduğu bulunmuştu. Bölüm 4.2.1'de anlatıldığı üzere Melnikov fonksiyonunun sıfıra yaklaşması stabilitenin bozulduğu anlamına gelmekteydi. Bundan yola çıkarak Ω /ω_0 < 0.72 olduğu zaman sistemin stabil olduğunu söylenebilir.

Sonuç olarak Floquet teori, Melnikov yöntemine nazaran daha küçük zorlama frekansından itibaren stabilitenin bozulmaya başladığını göstermektedir.

Bölüm 4.3.2'de, Lyapunov direkt yöntemi kullanarak serbest nonlineer yalpa hareketi için asimptotik stabilite şartları, doğrultma moment kolu eğrisi altında kalan alan, yalpa açısal hızı ve sönüm momentine bağlı olarak bulunmuştur.

Melnikov yöntemiyle elde edilen sakin suda yalpa hareketi için asimptotik stabilite sınırıyla, Lyapunov Direkt yöntemiyle elde edilen asimptotik stabilite sınırı arasında bir farklılık bulunmamaktadır.

Bölüm 4.3.3'de zorlanmış nonlineer yalpa hareket Lyapunov direkt yöntemi kullanarak incelenmiş ve şekil 4.7'de gösterilen Lyapunov zarfı elde edilmiştir. Bu zarfın yeterli olduğu aynı bölümde gösterilmiştir.

Bu çalışmada, bordadan gelen düzenli dalgalarda nonlineer yalpa hareketini incelemek için ele alınan yöntemlerden, en fazla kullanılanları irdelenmiş ve karşılaştırmaları yapılmıştır. Bir sonraki aşama, aynı tipten değişik boyutlarda modeller kullanarak nonlineer yalpa hareketi denklemini incelemek olmalıdır. Böylece model karakteristiklerine bağlı olarak stabilitenin nasıl değiştiği hakkında fikir sahibi olunabilir. Daha sonraki aşama, yan-sürüklenme ve dalıp çıkmanın yalpa hareketi üzerindeki etkisi göz önünde bulundurarak, aynı tipten değişik boyutlarda modeller kullanarak, nonlineer yalpa hareketi denklemini incelemek olmalıdır. Son olarak da bu çalışmalar bütün değişik gemi tiplerine uygulanabilir ve gemi tiplerine bağlı olarak stabilite karakteristikleri elde edilebilir.

KAYNAKLAR

[1] **Sabuncu, T,** 1983. Gemi Hareketleri, Matbaa Teknisyenleri Basımevi, İstanbul.

[2] **Cardo, A., Francescutto, A. And Nabergoj, R.**, 1981, Effects of the Angle Dependent Damping on the Rolling Motion of Ships in Regular Beam Seas, *International Shipbuilding Progress*, **27,** 1-6, 1980

[3] **Nayfeh, A.H. and Khdeir, A.A.**, 1986, Nonlinear Rolling Of Ships In Regular Beam Seas, *International Shipbuilding Progress*, **33,** 40-49.

[4] **Nayfeh, A.H. and Sanchez, N.E.**, 1990, Stability and Complicated Rolling Responses Of Ships In Regular Beam Seas, *International Shipbuilding Progress*, **37**, 331-352.

[5] **Özkan**, **R.İ.**, 1977. Lyapunov Direkt Yöntemi İle Gemilerin Stabilite Teorisi, *Doktora Tezi,* İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

[6] **Caldeira**, **F.,** 1986, The Boundedness of Lienard Equation Arising in the theory of Ship rolling, *I.M.A*, **36**, 126-139.

[7] **Bass, D.W. and Haddara, M.R.**, 1988. Nonlinear Models of Ship Roll Damping, *International Shipbuilding Progress*, **35**, 5-24.

[8] **Nayfeh, A.H. and Mook, D.T.**,1979. Nonlinear Oscillations, John Wiley, New York.

[9] **Nayfeh, A.H. and Balachandran, B.**, 1994, Applied Nonlinear Dynamics, John Wiley, New York

[10] **Wright, J.H.G. and Marshfield,W.B.**, 1979, Ship Roll Responses And Capsize Behaviour in Beam Seas, *Transactions of R.I.N.A.,* **122**, 129-145.

[11] **Bogoliubov N.N. and Mitropolsky, Y.A.**, 1961, Asymptotic Methods In The Theory Of Nonlinear Oscillations, Intersciense, New York

[12] **Byrd, P.F. and Friedman, M.D.**, 1954, Handbook Of Elliptic Integrals For Engineers And Physicists, Springer Verlag, Berlin.

[13] **Salle, L.J. and Lefschetz, S.**, 1961, Stability By Lyapunov's Direct Method, Academic Press, New York.

[14] **Odabaşı, A.Y.,** 1983, Popov's Frequency domain stability criteria and stability of large amplitude rolling motion, *Schiffstechnik*, **30,** 31-52.

TABLO B.1

Dalga eğimi α_m = 0.24 için zorlama frekanslarına karşılık gelen a ve β katsayıları

Ω	a	β
1.978	0.015689	–0.014218
2.278	0.021987	–0.017314
2.578	0.030111	–0.020987
2.878	0.040710	–0.025510
3.178	0.054845	–0.031369
3.478	0.074387	–0.039542
3.778	0.103088	–0.052420
3.878	0.115989	–0.058754
3.978	0.131477	–0.066942
4.078	0.150634	–0.078109
4.178	0.175497	–0.094632
4.278	0.210959	–0.122967
4.278	0.504706	–0.773079
4.278	0.581231	–1.457289
4.328	0.237197	–0.148189
4.328	0.456619	–0.584085
4.328	–0.581382	1.538828
4.378	0.281095	–0.200001
4.378	–0.394193	–0.406259
4.378	–0.578093	1.431124
4.478	–0.567308	1.264356
4.678	–0.538504	1.018142
4.978	–0.487496	0.747244
5.278	–0.432406	0.542720
5.578	–0.377304	0.388496
5.878	–0.326613	0.278208
6.178	–0.283836	0.204013
6.478	–0.249970	0.155691
6.778	–0.223938	0.124042
7.078	–0.203981	0.102684
7.378	–0.188511	0.087711
7.678	–0.176320	0.076812
7.978	–0.166545	0.068610
8.278	–0.158578	0.062259
8.578	–0.151987	0.057222
8.878	–0.146462	0.053144

TABLO B.2

Dalga eğimi α_m = 0.21 için zorlama frekanslarına karşılık gelen a ve β katsayıları

Ω	a	β
1.978	0.023543	-0.014232
2.278	0.033528	-0.017352
2.578	0.045237	-0.021096
2.878	0.061256	-0.025800
3.178	0.082792	-0.032143
3.478	0.113103	-0.041705
3.778	0.159770	-0.059308
3.878	0.182254	-0.069599
3.878	0.632790	-0.906366
3.878	0.693928	4.760910
3.978	0.211458	-0.085690
3.978	0.571828	–0.664480
3.978	0.688031	4.570625
4.028	0.230269	–0.096563
4.028	0.539062	–0.565214
4.028	–0.683056	1.359397
4.078	0.254087	–0.113020
4.078	0.501852	–0.469366
4.078	–0.677454	1.298195
4.178	–0.665063	1.192349
4.378	–0.637589	1.020188
4.678	–0.592941	0.816440
4.978	–0.546302	0.652370
5.278	–0.499224	0.517618
5.578	–0.453347	0.408297
5.878	–0.410477	0.322187
6.178	–0.372182	0.256639
6.478	–0.339311	0.208067
6.778	–0.311877	0.172519
7.078	–0.289315	0.146453
7.378	–0.270831	0.127109
7.678	–0.255640	0.112505
7.978	–0.243068	0.101270
8.278	–0.232572	0.092466
8.578	–0.223727	0.085449
8.878	–0.216205	0.079772

TABLO B.3

Dalga eğimi α_m = 0.18 için zorlama frekanslarına karşılık gelen a ve β katsayıları

Ω	a	β
1.978	0.027473	–0.014240
2.278	0.038528	–0.017377
2.578	0.052831	–0.021167
2.878	0.071613	–0.025991
3.178	–0.097000	3.108920
3.478	0.133188	–0.043219
3.678	0.167969	–0.055291
3.678	0.688394	–0.954824
3.678	0.744451	4.724093
3.778	0.191049	–0.064702
3.778	0.637169	–0.746035
3.778	–0.736958	1.418553
3.878	0.220782	–0.078839
3.878	0.582511	–0.580002
3.878	0.726027	4.444069
3.978	0.263579	–0.103946
3.978	0.515974	–0.423864
3.978	–0.713719	1.207545
4.028	0.297015	–0.128047
4.028	0.470916	–0.339160
4.028	–0.707256	1.165131
4.078	0.700644	4.266865
4.378	0.658964	–2.218851
4.678	0.615387	3.901846
4.978	–0.571104	0.624634
5.278	–0.527123	0.510517
5.578	–0.484599	0.415796
5.878	–0.444783	0.339016
6.178	–0.408762	0.278420
6.478	–0.377187	0.231661
6.778	–0.350171	0.196052
7.078	–0.327399	0.169016
7.378	–0.308328	0.143380
7.678	–0.292364	0.132462
7.978	–0.278952	0.120022
8.278	–0.267618	0.110166
8.578	–0.257974	0.102252
8.878	–0.249707	0.095820

TABLO B.4

Dalga eğimi α_m = 0.12 için zorlama frekanslarına karşılık gelen a ve β katsayıları

Ω	a	β
1.978	.031407	-.014250
2.278	.044058	-.017405
2.578	.060449	-.021249
2.878	.082040	-.026215
3.178	.111411	-.033283
3.478	.153493	-.045086
3.478	-.792866	1.532354
3.478	.739075	-.984103
3.578	.173047	-.051281
3.578	.695346	-.807955
3.578	-.783483	1.396829
3.678	.196212	-.059738
3.678	.649567	-.663819
3.678	-.771922	1.296140
3.778	.225672	-.072245
3.778	.598265	-.531917
3.778	-.759434	1.212213
3.878	.266966	-.072245
3.878	.535482	-.401037
3.878	-.746429	1.138646
3.978	.355181	-.158490
3.978	.426062	-.233748
3.978	-.733094	1.072325
4.028	-.726337	1.041298
4.078	-.719532	1.011477
4.378	-.678010	.852361
4.678	-.635886	.718435
4.978	-.593817	.603637
5.278	-.552515	.505360
5.578	-.512824	.422311
5.878	-.475636	.353502
6.178	-.441723	.297710
6.478	-.411568	.253316
6.778	-.385297	.218432
7.078	-.362727	.191165
7.378	-.343481	.169824
7.678	-.327111	.153024
7.978	-.313168	.139683
8.278	-.301249	.128984
8.578	-.291010	.120317

TABLO C.1

Dalga eğimi $\alpha_m = 0.24$ için zorlama frekanslarına karşılık gelen a ve β katsayıları

Ω	a	β
2.000	.0322	-.0146
2.400	.0502	-.0194
2.700	.0685	-.0241
3.000	.0928	-.0309
3.300	.1266	-.0416
3.600	.1776	-.0625
3.900	.2764	-.1274
3.950	.3093	-.1588
3.957	.3151	-.1650
3.970	.3273	-.1787
3.980	.3385	-.1919
4.000	.3706	-.2347
4.009	.4042	-.2878
4.009	.4316	-.3385
4.000	.4716	-.4265
3.980	.5210	-.5643
3.970	.5439	-.6424
3.957	.5886	-.8313
3.957	.6005	-.8933
3.970	.6285	-1.0692
3.980	.6370	-1.1347
4.000	.6476	-1.2310
4.009	.6509	-1.2664
4.050	.6612	-1.3971
4.100	.6676	-1.5196
4.150	.6706	1.5213
4.200	.6716	1.4343
4.250	.6711	1.3569
4.300	.6696	1.2869
4.400	.6643	1.1636
4.600	.6478	.9624
4.800	.6264	.8020
5.000	.6022	.6702
5.300	.5630	.5131
5.600	.5229	.3938
5.900	.4842	.3043
6.200	.4485	.2380
6.500	.4167	.1894
6.800	.3892	.1538
7.100	.3657	.1274
7.400	.3458	.1077
7.700	.3289	.0097
8.000	.3146	.0080

TABLO C.2

Dalga eğimi $\alpha_m = 0.21$ için zorlama frekanslarına karşılık gelen a ve β katsayıları

Ω	a	β
2.000	.0282	-.0146
2.400	.0439	-.0192
2.700	.0597	-.0238
3.000	.0808	-.0300
3.300	.1095	-.0395
3.600	.1515	-.0566
3.900	.2228	-.0984
4.000	.2634	-.1322
4.100	.3361	-.2181
4.120	.3664	-.2664
4.126	.3800	-.2912
4.130	.3928	-.3162
4.134	.4163	-.3673
4.134	.4488	-.4507
4.130	.4823	-.5563
4.126	.5139	-.6798
4.126	.5394	-.8028
4.130	.5568	-.9027
4.134	.5654	-.9587
4.140	.5741	-1.0207
4.150	.5839	-1.0987
4.200	.6071	-1.3406
4.300	.6212	1.5205
4.400	.6227	1.3293
4.500	.6188	1.1797
4.600	.6116	1.0555
4.800	.5912	.8554
5.000	.5663	.6979
5.300	.5247	.5163
5.600	.4820	.3833
5.900	.4413	.2874
6.200	.4046	.2193
6.500	.3727	.1714
6.800	.3457	.1375
7.100	.3232	.1131
7.400	.3045	.0953
7.700	.2889	.0819
8.000	.2758	.2645

TABLO C.3

Dalga eğimi $\alpha_m = 0.18$ için zorlama frekanslarına karşılık gelen a ve β katsayıları

Ω	a	β
2.000	.0242	-.0145
2.400	.0375	-.0191
2.700	.0512	-.0234
3.000	.0692	-.0293
3.400	.1041	-.0418
3.700	.1451	-.0598
4.000	.2184	-.1062
4.100	.2642	-.1480
4.150	.3017	-.1917
4.155	.3068	-.1984
4.160	.3123	-.2059
4.170	.3252	-.2243
4.180	.3412	-.2492
4.191	.3861	-.3313
4.191	.3964	-.3531
4.180	.4508	-.4914
4.170	.4793	-.5830
4.160	.5102	-.7033
4.155	.5354	-.8223
4.155	.5456	-.8779
4.160	.5640	-.9931
4.170	.5769	-1.0903
4.180	.5844	-1.1564
4.191	.5898	-1.2119
4.200	.5941	-1.2571
4.300	.6104	-1.5586
4.400	.6119	1.3819
4.500	.6072	1.2255
4.600	.5990	1.0953
4.800	.5745	.8872
5.000	.5504	.7133
5.300	.5055	.5189
5.600	.4590	.3774
5.900	.4141	.2765
6.200	.3744	.2065
6.500	.3402	.1584
6.800	.3126	.1257
7.100	.2895	.1025
7.400	.2697	.0857
7.700	.2557	.0738
8.000	.2430	.0645

TABLO C.4

Dalga eğimi $\alpha_m = 0.12$ için zorlama frekanslarına karşılık gelen a ve β katsayıları

Ω	a	β
2.000	.0161	-.0145
2.400	.0250	-.0188
2.700	.0341	-.0230
3.000	.0459	-.0282
3.300	.0620	-.0354
3.600	.0846	-.0461
3.900	.1191	-.0649
4.200	.1817	-.1113
4.300	.2200	-.1504
4.350	.2491	-.1873
4.398	.2983	-.2665
4.405	.3117	-.2925
4.411	.3291	-.3294
4.411	.3940	-.5073
4.405	.4213	-.6068
4.398	.4572	-.7713
4.398	.4762	-.8808
4.405	.4958	-1.0199
4.411	.5032	-1.0828
4.420	.5105	-1.1537
4.450	.5234	-1.3166
4.500	.5318	-1.4994
4.550	.5342	1.5039
4.600	.5335	1.3889
4.700	.5268	1.2002
4.800	.5160	1.0460
5.000	.4872	.8012
5.300	.4345	.5359
5.600	.3786	.3563
5.900	.3266	.2402
6.200	.2831	.1686
6.500	.2490	.1248
6.800	.2230	.0973
7.100	.2032	.0791
7.400	.1879	.0666
7.700	.1758	.0575
8.000	.1661	.0507

EK D.1

$v_1(0) = 1$ ve $v_2(0) = 0$ başlangıç şartlarına bağlı olarak elde edilen $v_1(T/2)$ ve $v_2(T/2)$ değerleri

Ω	$v_1(T/2)$	$v_2(T/2)$
1.978	-.420132	-3.987380
2.278	.506305	-3.871088
2.578	.893347	-.576459
2.878	.758090	2.511278
3.178	.371340	4.206373
3.478	-.070227	4.443124
3.478	.604672	-.592055
3.478	2.130424	-11.996172
3.578	-.212006	4.216085
3.578	.935114	-9.034983
3.578	-.601884	-.455282
3.678	-.346739	3.832832
3.678	.216097	-6.642664
3.678	-1.067218	-1.396167
3.778	-.474091	3.258755
3.778	-.225067	-4.797848
3.778	-1.208549	-2.206043
3.878	-.597625	2.386783
3.878	-.505589	-3.174550
3.878	-1.207388	-2.726437
3.978	-.703379	.538675
3.978	-.694221	-.898415
3.978	-1.146975	-3.012842
4.028	-1.107604	-3.093821
4.078	-1.065933	-3.145225
4.378	-.830699	-3.151716
4.678	-.661479	-3.061542
4.978	-.546297	-3.040266
5.278	-.465596	-3.082019
5.578	-.406723	-3.157971
5.878	-.361576	-3.249462
6.178	-.324242	-3.349278
6.478	-.290239	-3.455241
6.778	-.256512	-3.565107
7.078	-.221420	-3.675130
7.378	-.184436	-3.780895
7.678	-.145715	-3.878459
7.978	-.105753	-3.965007
8.278	-.065141	-4.038933
8.578	-.024433	-4.099650
8.878	.015896	-4.147320

EK D.2

$v_1(0) = 0$ ve $v_2(0) = 1$ başlangıç şartlarına bağlı olarak elde edilen $v_1(T/2)$ ve $v_2(T/2)$ değerleri

Ω	$v_1(T/2)$	$v_2(T/2)$
1.978	.143781	-.444828
2.278	.140236	.482293
2.578	.021075	.889776
2.878	-.093294	.773523
3.178	-.161620	.395969
3.478	-.184022	-.049882
3.478	1.390489	-.909699
3.478	.654720	-3.536911
3.578	-.183176	-.197674
3.578	.306565	-2.585859
3.578	1.074952	.357772
3.678	-.178627	-.342287
3.678	.122967	-1.981696
3.678	.827391	.822962
3.778	-.170399	-.486361
3.778	.015912	-1.586255
3.778	.644285	.943798
3.878	-.157949	-.633776
3.878	-.052011	-1.301199
3.878	.509521	.914375
3.978	-.130780	-.861024
3.978	-.108069	-1.010086
3.978	.409601	.822902
4.028	.369521	.767699
4.078	.334726	.710201
4.378	.201214	.383904
4.678	.139599	.133814
4.978	.111389	-.050668
5.278	.100451	-.187794
5.578	.099019	-.288106
5.878	.102840	-.357384
6.178	.109366	-.399916
6.478	.117013	-.420016
6.778	.124807	-.422196
7.078	.132179	-.410781
7.378	.138823	-.389550
7.678	.144602	-.361563
7.978	.149485	-.329193
8.278	.153498	-.294214
8.578	.156704	-.257922
8.878	.159176	-.221255

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında İstanbul'da doğan Erdem Üçer, 1994 yılında Şişli Terakki Lisesinden mezun oldu. 1995 yılında İ.T.Ü. Gemi İnşaatı ve Deniz Bilimleri Fakültesi, Gemi İnşaatı Bölümünü kazandı. 2000 yılı haziran ayında iyi dereceyle mezun olduktan sonra 2001 yılında Gemi Hidromekaniği ana bilim dalında araştırma görevlisi olarak göreve başladı. Halen bu göreve devam etmektedir.